

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS**

[0,1] ÜZERİNDEKİ UNİMUMLAR

Ömer OĞUR

Danışman: Doç. Dr. Utku GÜRDAL

II. Danışman: Doç. Dr. Selim ÇETİN

BURDUR, 2025

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca **Yüksek Lisans** Tezi olarak sunduğum “[0,1] Üzerindeki Unimular” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

11/08/2025

(İmza)

Ömer OĞUR

ÖNSÖZ

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam **Doç. Dr. Utku GÜRDAL** ve **Doç. Dr. Selim ÇETİN**'e teşekkürlerimi, eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ağustos, 2025

Ömer OĞUR



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
2.1. Uninormlar	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM	6
3.1. Çoklu Kümeler.....	6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	12
4.1. Unimumlar	12
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	24
KAYNAKLAR	25

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1. Örnek 4.11’deki μn ($1 \leq n \leq 4$) ve μ fonksiyonlarının grafikleri 18



ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Örnek 4.11 bağlamında bazı bulanık kümelerin aldığı çeşitli değerler 18



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{M}[0,1]$	: $[0,1]$ üzerindeki bütün çoklu kümelerin kümesi
$\mathcal{A} \in X$	: $\mathcal{A}$, X üzerinde bir çoklu kümedir
$\underline{\mathcal{A}}$	: $\mathcal{A}$ çoklu kümesinin desteği
$\hat{\mathcal{A}}$	: $\mathcal{A}$ çoklu kümesinin temsili
$\subset$	: Alt çoklu küme
$\subseteq$	: Altküme
σ_{prod}	: Çarpım si-normu
τ_{prod}	: Çarpım t-normu
$\ominus$	: Çoklu küme farkı
$\llbracket , \rrbracket$	: Çoklu küme parantezleri
$\oplus$	: Çoklu küme toplamı
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	: Çoklu kümeler
$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$	: Çoklu küme ailesi toplamı
ζ_{dra}	: Drastik si-konorm
σ_{dra}	: Drastik si-norm
$\perp_{\text{dra}}$	: Drastik t-konorm
τ_{dra}	: Drastik t-norm
σ_{inf}	: İnfimum si-normu
$\leq$	: Kardinalitesi eşit çoklu kümeler için büyüklük sıralaması
$\cup$	: Küme ve çoklu küme birleşimi
$\cap$	: Küme ve çoklu küme kesişimi
$A, B, \dots$	: Kümeler
$\sigma_{\text{Łuk}}$	: Łukasiewicz si-normu
$\tau_{\text{Łuk}}$	: Łukasiewicz t-normu
$\perp_{\text{max}}$	: Maksimum t-konormu
τ_{min}	: Minimum t-normu
ζ_{sum}	: Olasılıksal toplam si-konormu
$\perp_{\text{sum}}$	: Olasılıksal toplam t-konormu
$\zeta_{\text{Łuk}}$	: Sınırlandırılmış toplam si-konormu
$\perp_{\text{Łuk}}$	: Sınırlandırılmış toplam t-konormu
ζ_{sup}	: Supremum si-konormu

$[\cdot]$: Tam değer fonksiyonu
 $\lceil \cdot \rceil$: Tavan fonksiyonu
 $\mathcal{M}(X)$: X üzerindeki bütün çoklu kümelerin ailesi



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

[0,1] Üzerindeki Unimumlar

Ömer OĞUR

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Utku GÜRDAL
II. Danışman: Doç. Dr. Selim ÇETİN

Haziran, 2025

Bu tez çalışmasında, mantıksal bağlaçlar olarak yorumlanan uninormlara karşılık gelen ve bir tür mantıksal niceleyici olarak tasarlanmış yeni bir kavram olan unimumlar tanıtılmaktadır. Bu aracın uninormlarla olan ilişkileri ile t-normlara ve t-konormlara karşılık gelen bazı özel alt sınıfları incelenmektedir. Ayrıca çeşitli örnekler sunulmakta ve teoremin temellerini sağlamlaştıracak bazı aslı özellikler ve nitelikler tartışılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: uninorm, unimum, t-norm, çoklu küme

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Uninorm on $[0,1]$

Ömer Oğur

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Utku Gürdal
Co-Supervisor: Assoc. Prof. Utku Gürdal**

June, 2025

The novel notion of a unimum, which is intended as a kind of logical quantifier, corresponding to the uninorms interpreted as logical connectives, is introduced in this thesis study. The relationships of this tools with uninorms, as well as certain special subclasses corresponding to t-norms, and t-conorms are examined. Also various examples are provided, and some fundamental properties and aspects that will solidify the foundations of the theory are discussed.

Keywords: uninorm, unimum, t-norm, multiset

1. GİRİŞ

Evrendeki tüm maddenin sonlu olduğu ve Planck uzunluğu ile Planck zamanı gibi anlamlı en küçük fiziksel birimlerin varlığı göz önüne alındığında, doğayı modellemek için sayılabilir olmayan sonsuz bir koordinat sistemine, hatta rasyonel sayılara bile, gerçekte ihtiyaç olup olmadığı sorgulanabilir olsa da, matematiğin sonsuzluğa yaklaşımı, doğa olaylarını neredeyse kusursuz bir doğrulukla açıklayan kuramların oluşmasına imkân tanımıştır.

Sembolik mantık bağlamında temel mekanizmalardan biri, $\wedge$ (ve) ve $\vee$ (veya) gibi mantıksal bağlaçların sonsuz durumlara genellenmesidir; bu da $\forall$ (her) ve $\exists$ (en az bir) gibi tümel ve tikel niceleyiciler aracılığıyla gerçekleştirilir. Matematiğin tüm alanlarında, özellikle de küme teorisinde faydalı olan bu ilerleme, aynı zamanda istatistiksel modellerde, olasılık kuramında ve algoritma doğrulamasında da uygulama alanı bulmaktadır.

0 (yanlış) ve 1 (doğru) doğruluk değerleri ile çalışırken, $\wedge$ ve $\vee$ işleçleri tüm girdilerin istisnasız 1 olmasını beklerken, $\vee$ ve $\exists$ işleçleri yalnızca bir girdinin 1 olmasını yeterli görür. Ayrıca bu araçlar, tüm girdiler 0 olduğunda sonuç olarak 0, tüm girdiler 1 olduğunda ise sonuç olarak 1 veren bir tür idempotentlik özelliğini taşırlar.

Bulanık mantıkta, bu yorumun $\{0,1\}$ kümesinden $[0,1]$ aralığına genişletilmesi için birden çok yöntem bulunmaktadır. Teorinin ilk aşamalarında, $\wedge$ ve $\vee$ bağlaçlarının doğruluk değerleri genellikle min ve max ikili işlemleri ile temsil edilirken, sonsuz durumlar için $\forall$ ve $\exists$ niceleyicileri inf ve sup operatörleriyle gösterilmiştir. Bununla birlikte, bulanık mantığın uygulama alanına bağlı olarak, $[0,1]$ aralığında kesişim ve birleşim işlemlerinin nasıl davrandığına dair farklı yorumlar mümkündür.

Örneğin, sonlu bir X örneklem kümesi üzerinde P ve Q açık önermeleri verilsin. p değerini, $P(x)$ önermesini sağlayan elemanların yüzdesini temsil eden bulanık doğruluk değeri; q değerini ise $Q(x)$ önermesini sağlayan elemanların yüzdesini temsil eden bulanık doğruluk değeri olarak düşünersek, pq çarpımı, hem $P(x)$ hem de $Q(x)$ önermelerinin aynı anda doğru olma olasılığına karşılık gelir. Olasılıksal olmayan kesin bir sonuç içinse, elde edilebilecek maksimum olası yüzdelik değer $\min(p, q)$ iken, her durumda garanti edilen minimum yüzdelik değer $\max(p + q - 1, 0)$ şeklindedir. Bu yaklaşımlar sırasıyla, $f_i : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ şeklindeki bazı özel fonksiyonlar olan t-normların şu üç temel örneğine karşılık gelir: $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = \min(x, y)$, $f_3(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$.

T-normlar, $[0,1]$ aralığında tanımlı ikili işlemler olup, kullanılan bulanık mantık varyantına mantıksal "ve" işleminin nasıl uyarlandığına karar verirler. Bu işlemler, birim elemanı 1 olan monoton monoid işlemleri olarak ifade edilebilir. T-normların dualeri olan t-konormlar ise mantıksal "veya" işlemine karşılık gelir. Bunlar da monoton monoid işlemleri olup birim elemanları 0'dır.

Uninormlar, t-normlar ile t-konormlar arasındaki boşluğu dolduran bir ikili işlem sınıfını temsil eder. Bu işlemler, $[0,1]$ kapalı aralığındaki herhangi bir e elemanının birim eleman olarak kullanılmasına imkân tanıyarak, t-normlar ile t-konormları ortak bir çerçevede birleştirir. Uninormlar, belirsiz ya da kısmen doğru iki bilginin mantıksal olarak dengelenmesinin gerektiği durumlarda potansiyel olarak faydalıdır. Ancak bu denge hiçbir zaman tamamen adil değildir. Uninormlar, birleşimsel (conjunctive) ve ayrışimsal (disjunctive) uninormlar olmak üzere iki ayrı alt sınıfa ayrılır. Birleşimsel uninormların t-normlara daha yakın olduğu ve bir bakıma onları genelleştirdiği söylenebilir. Benzer şekilde, ayrışimsal uninormlar da t-konormlarla daha yakından ilişkilidir.

Uninormlar; anket sonuçlarının ve veri kümelerinin yorumlanması, kalite kontrolü, performans değerlendirmeleri, görüntü ve sinyal işleme, risk yönetimi ve karar verme gibi çeşitli alanlarda doğal olarak ortaya çıkma potansiyeline sahip araçlardır. Bu durum, bulanık mantıkta çok yönlü çıkarımlar sağlayabilmeleri, bulanık küme teorisinde karma yapıli işlemlere olanak tanımaları ve belirli bir denge noktasının her iki tarafında farklı davranışları modelleyebilmeleri sayesinde mümkün olur. Bu tür uygulamalarda genellikle farklı kategorilere ait iki puan bulunur ve uninormlar bu puanları birleştirmek için kullanılabilir.

Bununla birlikte, sonsuz sayıda ayrık ya da sürekli değer alabilen bir parametrenin, başka bir parametrenin her bir olası değeri için yorumlanmasını gerektiren durumlarda, uninormlara benzer olan fakat sonsuz sayıda değeri işleyebilecek yetenekte araçlar benzer bir rolü üstlenebilir. Örneğin, tıpta hedefe yönelik tedavi ve farmakokinetik modeller gibi hassas değerlere sahip birden çok parametrenin birlikte yorumlanmasının gerektiği senaryolarda bu tür durumlar ortaya çıkabilir. Ayrıca, risk analizinin çeşitli alanlarında ve hatta finansal bazı problemlerde de benzer ihtiyaçlar söz konusu olabilir. Bu olası uygulama alanları, uninorm kavramını sürekli veriyi işleyebilecek şekilde daha da geliştirme yönünde motivasyon sağlar ve bu çalışmada temel olarak bu amaca yönelik bir araç önerilmiştir. Bunun bazı temel ve açıklayıcı örneklerine de yer verilecektir.

Bu bağlamda, sonlu durumdan sonsuz duruma geçiş için unimum kavramı önerilmektedir. Buradaki süreç, iki değerli mantıkta mantıksal "ve" ve "veya" işlemlerinin evrensel ve varoluşsal niceleyicilere ($\forall$ ve $\exists$) yükseltgenmesi ya da bulanık mantığın klasik yorumunda min ve max işlemlerinin inf ve sup niceleyicilerine genellenmesine benzenmektedir.

Çoklu kümeler üzerinde tanımlanan unimum kavramı, uninormların sonsuz duruma genelleştirilmiş hâli olarak işlev görür ve bu nedenle uninormlardan türeyen mantıksal niceleyici olarak düşünülebilir. Ayrıca, t-normlar ve t-konormlar gibi özel durumlar için de benzer genellemeler sunar. Bu genellemeleri ileride sırasıyla si-norm ve si-konorm olarak adlandıracağız.

Bu bağlamda, unimum teorisinde kullanılacak çoklu kümelerin belirli özellikleri kanıtlanacak, unimumların temel örnekleri sunulacak, karşılanması beklenen temel özellikler incelenecek, unimumun uninormlar, si-normlar ve si-konormlarla ilişkileri araştırılacaktır. Bu sonuçlar yeni bir teoriye ve dolayısıyla yeni bir araştırma alanına kapı aralamaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Uninormlar

Bu alt bölüm, uninormlar hakkındaki çalışmada yaygın olarak kullanılan bazı kavramlara dikkat çekmeyi ve notasyonu standartlaştırmayı amaçlamaktadır. Konunun ayrıntılı incelenmesi için Fodor ve De Baets (2007) ve Fodor ve Yager (1997) kaynaklarına başvurulabilir.

U , $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir ikili işlem olmak üzere $([0,1], U, \leq)$ sıralı bir değişmeli monoid ise U bir uninorm olarak adlandırılır. Başka bir deyişle bir uninorm,

- Her $a, b, c \in [0,1]$ için $U(U(a, b), c) = U(a, U(b, c))$.
- Bir $e \in [0,1]$ elemanı vardır, öyle ki her $a \in [0,1]$ için $U(a, e) = a$.
- Her $a, b \in [0,1]$ için $U(a, b) = U(b, a)$.
- Her $a, b, c, d \in [0,1]$ için, $a \leq b$ ve $c \leq d$ ise $U(a, c) \leq U(b, d)$.

özelliklerine sahip olan bir $U : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

Birimi e olan bir uninorm, eğer $e = 1$ ise üçgensel norm ya da kısaca t-norm, $e = 0$ ise üçgensel konorm ya da t-konorm olarak adlandırılır.

Bazı bilinen örnekler için notasyonları sabitliyoruz. $\top_{min}(x, y) := \min(x, y)$ minimum t-normu olarak bilinir. $\top_{prod}(x, y) := xy$ ise çarpım t-normudur, $\top_{luk}(x, y) := \max(x + y - 1, 0)$ Łukasiewicz t-normudur. $[\cdot]$ taban fonksiyonunu ya da diğer adıyla tam değer fonksiyonunu göstermek üzere $\top_{dra}(x, y) := \min(x, y, [\max(x, y)])$ ise drastik t-normdur. Diğer yandan, $\perp_{max}(x, y) := \max(x, y)$ maksimum t-konormdur. $\perp_{sum}(x, y) := x + y - xy$ olasılıksal toplam olarak bilinen t-konormdur. $\perp_{luk}(x, y) := \min(x + y, 1)$ sınırlandırılmış toplam t-konormdur. $[\cdot]$ tavan fonksiyonunu göstermek üzere $\perp_{dra}(x, y) := \max(x, y, [\min(x, y)])$ ise drastik t-konorm olarak bilinir.

Önerme 2.1. (Fodor ve Yager, 1997) $[0,1]$ üzerindeki her U uninormu için $U(0,1) \in \{0,1\}$ 'dir.

Bu önerme, uninormların tam olarak iki ayrık sınıfa ayrılabilceğini gösterir. Eğer $U(0,1) = 0$ ise U birleşimsel olarak adlandırılır; eğer $U(0,1) = 1$ ise U ayrışimsal olarak adlandırılır.

Her U uninormu için, $\bar{U}(x, y) = 1 - U(1 - x, 1 - y)$ ile tanımlı $\bar{U} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun da bir uninorm olduğu bilinmektedir ve bu durumda U 'nun birleşimsel olması için gerek ve yeter şart, $\bar{U}$ 'nin ayrışimsal olmasıdır.

Bileşimsel ya da ayrışimsal olsun, herhangi bir uninorm için $U(0, 1)$ değeri her zaman aşağıda belirtildiği gibi bir yutan eleman olarak davranır.

Önerme 2.2. (Fodor ve De Baets, 2007) $[0, 1]$ üzerindeki her U uninormu ve her $x \in [0, 1]$ için $U(U(0, 1), x) = U(0, 1)$ 'dir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Çoklu Kümeler

Bu alt bölümde, yalnızca çoklu kümelerle ilgili bazı gerekli tanımlar verilmiş ve çalışmanın amacı doğrultusunda yeni tanımlar ve önermeler de eklenmiştir. Çoklu kümeler üzerine daha ayrıntılı bir tartışma için Miyamoto (2000) ve Yager (1986) kaynaklarına başvurulabilir.

Bir çoklu küme, elemanların birden fazla kez bulunabildiği bir küme genellemesi olarak düşünülebilir.

X , evren olarak kabul edilen sabit bir küme olsun. Bir $\mathcal{A}$ çoklu kümesi $\mathcal{A} : X \rightarrow \mathbb{N}$ şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır. Bu durumda, X 'in her A alt kümesi de

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir $\mathcal{A}$ çoklu kümesi olarak ele alınabilir. X 'in bütün alt kümelerinin ailesi $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilirken, X üzerindeki bütün çoklu kümelerin ailesi $\mathcal{M}(X)$ ile gösterilir. Ayrıca, $\mathcal{A}$ 'nın X üzerinde bir çoklu küme olduğunu belirtmek için $\mathcal{A} \in X$ notasyonu kullanılır. Böylece,

$$\mathcal{A} \in X : \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{M}(X)$$

yazılabilir. Verilen herhangi $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in X$ çoklu kümeleri için, kesişim, birleşim, toplama ve çıkarma işlemleri,

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})(x) = \min\{\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)\}$$

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})(x) = \max\{\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)\}$$

$$(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$$

$$(\mathcal{A} \ominus \mathcal{B})(x) = \max\{\mathcal{A}(x) - \mathcal{B}(x), 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Gösterimi netleştirmek için, örneğin $X = \{a, b, c\}$ kümesi ele alınsın ve $\mathcal{A}$ ile $\mathcal{B}$ çoklu kümeleri $\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(b) = 2$, $\mathcal{A}(c) = 0$, $\mathcal{B}(a) = 3$ ve $\mathcal{B}(b) = \mathcal{B}(c) = 1$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{A} = \llbracket a, a, b, b \rrbracket$, $\mathcal{B} = \llbracket a, a, a, b, c \rrbracket$ olarak yazılır ve $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \llbracket a, a, b \rrbracket$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \llbracket a, a, a, b, b, c \rrbracket$, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \llbracket a, a, a, a, a, b, b, b, c \rrbracket$, $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B} = \llbracket b \rrbracket$ ve $\mathcal{B} \ominus \mathcal{A} = \llbracket a, c \rrbracket$ olur.

Bir çoklu küme yalnızca sonlu doğal sayıları değer olarak kabul ettiğinden, keyfi toplamalar her zaman tanımlı değildir. Ancak, bir $\mathcal{A} \in X$, eğer her $x \in X$ için $\mathcal{A}(x) = \sum_{i \in I} \mathcal{A}_i(x)$ eşitliği varsa $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ yazılır.

Bir çoklu kümenin desteği,

$$\underline{\mathcal{A}} : \{x \in X : \mathcal{A}(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümedir. Diğer yandan, X üzerindeki herhangi bir $\mathcal{A}$ çoklu kümesi için, $\mathcal{A}$ 'nın temsili $\underline{\mathcal{A}} \times \mathbb{N}$ 'nin

$$\hat{\mathcal{A}} = \{(x, n) : x \in X, n \in \mathbb{N}, n < \mathcal{A}(x)\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır. Bu tanımlara göre, örneğin eğer $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \llbracket 4, 7, 7, 7, 9, 9 \rrbracket$ ise, $\underline{\mathcal{A}} = \{4, 7, 9\}$ ve $\hat{\mathcal{A}} = \{(4, 0), (7, 0), (7, 1), (7, 2), (9, 0), (9, 1)\}$ olur.

Bir $\mathcal{A}$ çoklu kümesinin kardinalitesi $\#(\mathcal{A})$ ile gösterilir ve $\hat{\mathcal{A}}$ temsil kümesinin kardinalitesine eşit olacak şekilde tanımlanır. Örneğin, yukarıda verilen $\mathcal{A} = \llbracket 4, 7, 7, 7, 9, 9 \rrbracket$ çoklu kümesi için $\#(\mathcal{A}) = 6$ 'dır. Kardinalitesi sonlu olan bir çoklu kümenin sonlu olduğu söylenir. Buna göre bir çoklu kümenin sonlu olması için gerek ve yeter şart temsili-
nin sonlu olması; bunun için gerek ve yeter şart ise desteğinin sonlu olmasıdır.

Bir X kümesi üzerinde $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ gibi iki çoklu küme, her $x \in X$ için $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{B}(x)$ olmasını sağlıyorsa, $\mathcal{A}$ 'ya $\mathcal{B}$ 'nin bir alt çoklu kümesi denir ve bu durumda $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ yazılır.

Şimdi çoklu kümelerin fonksiyonlar altında görüntülerini ve ön görüntülerini tartışacağız. X ve Y kümeler olsun ve bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun verildiğini varsayalım. $\mathcal{A} \in X$ ve $\mathcal{B} \in Y$ verilsin. Bu durumda $\mathcal{B}$ 'nin f altındaki ön görüntüsü olan $f^{-1}[\mathcal{B}]$ çoklu kümesi, her $x \in X$ için $\mathcal{B}$ 'de $f(x)$ 'in kaç tane kopyası varsa x 'in o kadar kopyası eklene-
rek oluşturulur. Bu durumda, $f^{-1}[\mathcal{B}](x) = \mathcal{B}(f(x))$ eşitliği her $x \in X$ için geçerlidir. Ön
görüntülerdeki durumun aksine, görüntü kümelerinin en genel çerçevede tanımlanması
problemlidir, çünkü bir $\mathcal{A}$ çoklu kümesinin desteğinin fonksiyon altındaki görüntüsünde
yer alan herhangi bir $y \in Y$ elemanına, X kümesinden sonsuz sayıda eleman gidiyor ola-
bilir ve bu da y 'nin tekrar sayısını sonlu sayıların ötesine taşıyarak, elde edilen yapının
çoklu küme tanımına uymasına engel olabilir. Ancak, eğer fonksiyon birebirse, ya da
sonlu zayıf birebirlik adını vereceğimiz “her $y \in Y$ için $f^{-1}[\{y\}]$ sonlu bir kümedir” şar-
tını sağlıyorsa bu durumda görüntü bekleneyeceği üzere $\mathcal{A}$ 'da x elemanlarının her bir kop-
yası için, $f[\mathcal{A}]$ 'ya birer tane $f(x)$ kopyası eklenerek tanımlanabilir, yani her $y \in Y$
için, $f[\mathcal{A}](y) = \sum \{\mathcal{A}(x) : f(x) = y\}$ olur ve f 'in sonlu zayıf birebir olması, bu top-
lamın sonlu olmasını garanti eder.

Bundan sonra, özellikle $[0, 1]$ birim kapalı aralığı üzerindeki çoklu kümelerle odak-
lanılacak ve $\mathcal{M}([0, 1])$ yerine kısaca $\mathcal{M}[0, 1]$ yazılacaktır. Aşağıdaki özellikler, verilen
 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in [0, 1]$ çoklu kümeleri için, metin boyunca kullanılacak olup, gözlemlenmeleri
oldukça kolaydır.

- $\underline{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}} = \underline{\mathcal{A}} \cup \underline{\mathcal{B}}$

- $\mathcal{A} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{A} \ominus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}))$
- $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ ise $\mathcal{C} \ominus (\mathcal{C} \cap \mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$

$\mathcal{M}[0,1]$ üzerinde, her $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in [0,1]$ için

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists \text{ birebir örten } f : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}, (f(x, n) = (y, m) \Rightarrow x \leq y)$$

şeklinde bir $\preceq$ kısmî sıralaması tanımlanır.

Bu çalışmada, $f(x, n) = (y, m) \Rightarrow x \leq y$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar yarı yükselen olarak adlandırılacaktır. Dolayısıyla, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ olması için gerek ve yeter şart $\hat{\mathcal{A}}$ 'dan $\hat{\mathcal{B}}$ 'ya en az bir yarı yükselen birebir örten fonksiyonun bulunmasıdır.

Örneğin, $\mathcal{A} = \left\lfloor \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rfloor$ ve $\mathcal{B} = \left\lfloor \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5} \right\rfloor$ çoklu kümeleri verildiğinde, bunların temsilleri $\hat{\mathcal{A}} = \left\{ \left(\frac{1}{5}, 0 \right), \left(\frac{1}{5}, 1 \right), \left(\frac{3}{5}, 0 \right), \left(\frac{4}{5}, 0 \right) \right\}$ ve $\hat{\mathcal{B}} = \left\{ \left(\frac{2}{5}, 0 \right), \left(\frac{4}{5}, 0 \right), \left(\frac{4}{5}, 1 \right), \left(\frac{4}{5}, 2 \right) \right\}$ şeklinde olur ve bu durumda, $f\left(\frac{1}{5}, 0\right) = \left(\frac{4}{5}, 2\right)$, $f\left(\frac{1}{5}, 1\right) = \left(\frac{2}{5}, 0\right)$, $f\left(\frac{3}{5}, 0\right) = \left(\frac{4}{5}, 0\right)$ ve $f\left(\frac{4}{5}, 0\right) = \left(\frac{4}{5}, 1\right)$ ile tanımlanan $f : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ birebir ve örten fonksiyonunun, $f(x, n) = (y, m) \Rightarrow x \leq y$ önermesini sağladığını görmek kolaydır. Dolayısıyla f yarı yükselendir. Böyle bir fonksiyonun varlığı $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ olduğu anlamına gelir. Burada f 'in mümkün olan tek seçim olmadığı ve bu şartı sağlayan başka fonksiyonların da bulunduğu gözlemlenir.

$[0,1]$ üzerindeki sonlu bir $\mathcal{J} = \llbracket x_1, x_2, \dots, x_n \rrbracket$ çoklu kümesi için $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ sonlu toplam $\sum \mathcal{J}$ ile gösterilirken, $x_1 x_2 \dots x_n$ sonlu çarpımı da $\prod \mathcal{J}$ ile gösterilir. Daha genel olarak, herhangi bir $\mathcal{A} \in [0,1]$ çoklu kümesi için, sonsuz olması da mümkün olan $\sum \mathcal{A}$ değeri $\sum \mathcal{A} = \sup\{\sum \mathcal{J} : \mathcal{J} \subset \mathcal{A}, \mathcal{J} \text{ sonlu}\}$ şeklinde tanımlanırken, $\prod \mathcal{A}$ çarpımı ise $\prod \mathcal{A} = \inf\{\prod \mathcal{J} : \mathcal{J} \subset \mathcal{A}, \mathcal{J} \text{ sonlu}\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu toplamlar ve çarpımlar tanım gereği her zaman $\sum \mathcal{A} \in [0, \infty]$ ve $\prod \mathcal{A} \in [0,1]$ olmasını sağlarlar. Özellikle $\sum \emptyset = 0$ ve $\prod \emptyset = 1$ olduğu kabul edilmektedir. Toplam ve çarpımların elemanların her bir tekrarını ayrı ayrı ele alınması gerektiğine dikkat edilmelidir. Örneğin, $\sum \llbracket 0.1, 0.6, 0.6 \rrbracket = 1.3$, $\prod \llbracket 0.1, 0.6, 0.6 \rrbracket = 0.036$, $\sum \left\lfloor \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\rfloor = \infty$ ve $\sum \left\lfloor \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\rfloor = 0$ olur. Her ne kadar $[0,1]$ aralığında 1 dışındaki sayıların her katılımı çarpımın değerini küçültse de, sonlu olmayan bir çoklu kümenin çarpımının 0'dan farklı olabileceğine dikkat edilmelidir. Örneğin $\prod \llbracket 2^{-1}, 2^{-1/4}, 2^{-1/9}, 2^{-1/16}, \dots \rrbracket = 2^{-\pi^2/6} \neq 0$ 'dır.

Lemma 3.2. $\prod(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = (\prod \mathcal{A}) \cdot (\prod \mathcal{B})$ ve $\sum(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = (\sum \mathcal{A}) + (\sum \mathcal{B})$ 'dir.

İspat. $\prod(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = (\prod \mathcal{A}) \cdot (\prod \mathcal{B})$ eşitliğini ispatlayacağız. $\sum(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = (\sum \mathcal{A}) + (\sum \mathcal{B})$ eşitliği de benzer şekilde gözlemlenebilir.

$c_0 \in \{\prod \mathcal{I} : \mathcal{I} \subset \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \mathcal{I} \text{ sonlu}\}$ olduğu varsayalım. Bu durumda, $\prod \mathcal{I}_0 = c_0$ olacak şekilde bir $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ sonlu çoklu kümesi vardır. $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0 \cap \mathcal{A}$ ve $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_0 \ominus \mathcal{I}_1$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{B}$ sonludur ve $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ olur. Buradan da $\prod \mathcal{I}_0 = (\prod \mathcal{I}_1) \cdot (\prod \mathcal{I}_2)$ elde edilir.

Şimdi $\prod \mathcal{I}_1 = c_1$ ve $\prod \mathcal{I}_2 = c_2$ diyelim. Bu, $c_1 \in \{\prod \mathcal{I} : \mathcal{I} \subset \mathcal{A}, \mathcal{I} \text{ sonlu}\}$ ve $c_2 \in \{\prod \mathcal{I} : \mathcal{I} \subset \mathcal{B}, \mathcal{I} \text{ sonlu}\}$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $\prod \mathcal{A} \leq c_1$ ve $\prod \mathcal{B} \leq c_2$ 'dir, bu da $(\prod \mathcal{A}) \cdot (\prod \mathcal{B}) \leq c_1 c_2 = c_0$ sonucunu verir.

Sonuç olarak, $(\prod \mathcal{A}) \cdot (\prod \mathcal{B}) \leq c_0$ olur ve bu durum her $c_0 \in \{\prod \mathcal{I} : \mathcal{I} \subset \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \mathcal{I} \text{ sonlu}\}$ için geçerlidir, böylece

$$\left(\prod \mathcal{A}\right) \cdot \left(\prod \mathcal{B}\right) \leq \left\{\prod \mathcal{I} : \mathcal{I} \subset \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \mathcal{I} \text{ sonlu}\right\} = \prod(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$$

elde edilir.

Şimdi, $c_1 \in \{\prod \mathcal{I} : \mathcal{I} \subset \mathcal{A}, \mathcal{I} \text{ sonlu}\}$ ve $c_2 \in \{\prod \mathcal{I} : \mathcal{I} \subset \mathcal{B}, \mathcal{I} \text{ sonlu}\}$ olsun. $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}_1$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{I}_2$, $c_1 = \prod \mathcal{I}_1$ ve $c_2 = \prod \mathcal{I}_2$ olacak şekilde $\mathcal{I}_1$ ve $\mathcal{I}_2$ sonlu çoklu kümeleri seçelim. Bu durumda $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ sonlu bir çoklu kümedir ve $\prod(\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2) = c_1 c_2$ 'dir. Bu, $c_1 c_2 \in \{\prod \mathcal{I} : \mathcal{I} \subset \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \mathcal{I} \text{ sonlu}\}$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde, infimum alınarak $\prod(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \leq (\prod \mathcal{A}) \cdot (\prod \mathcal{B})$ olduğu görülür. ■

Verilen bir $\mathcal{A} \in [0,1]$ çoklu kümesi için, $\tilde{\mathcal{A}} \in [0,1]$ çoklu kümesi şu şekilde tanımlanır:

$$\tilde{\mathcal{A}}(x) := \mathcal{A}(1 - x).$$

Bu çoklu küme aşağıdaki özellikleri sağlar.

Önerme 3.3. $\mathcal{A}$ bir çoklu küme olsun. Bu durumda,

- a) $\widetilde{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{A}} \oplus \tilde{\mathcal{B}}$ 'dir,
- b) Eğer $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ ise $\tilde{\mathcal{B}} \leq \tilde{\mathcal{A}}$ 'dır.

İspat. a) Her $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}})(x) &= (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})(1 - x) = \mathcal{A}(1 - x) + \mathcal{B}(1 - x) = \tilde{\mathcal{A}}(x) + \tilde{\mathcal{B}}(x) \\ &= (\tilde{\mathcal{A}} \oplus \tilde{\mathcal{B}})(x) \end{aligned}$$

olur.

b) $\widehat{(\mathcal{A})} = \{(1-x, n) : (x, n) \in \hat{\mathcal{A}}\}$ kümesini ele alalım. Bu durumda, $\widetilde{f_{\mathcal{A}}} : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \widehat{(\mathcal{A})}$, $\widetilde{f_{\mathcal{A}}}(x, n) = (1-x, n)$ ile tanımlanan fonksiyon birebir örtendir ve B için de benzer bir $\widetilde{f_B} : \widehat{B} \rightarrow \widehat{(B)}$ birebir örten fonksiyonu vardır.

$\mathcal{A} \preceq B$ olduğundan, $\hat{\mathcal{A}}$ 'dan $\widehat{B}$ 'ye yarı-yükselen birebir örten bir f fonksiyon vardır. Bu durumda $f(x, n) = (y, m)$ olması her zaman $x \leq y$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\widetilde{f_{\mathcal{A}}} \circ f^{-1} \circ \widetilde{f_B}^{-1} : \widehat{(B)} \rightarrow \widehat{(\mathcal{A})}$ fonksiyonu da birebir örten olur ve üstelik her $(x, n) \in \widehat{(B)}$ için, $(1-x, n) \in \widehat{B}$ ve $f^{-1}(1-x, n) \in \hat{\mathcal{A}}$ 'dır. $f^{-1}(1-x, n) = (y, m)$ dersek, $(1-y, m) \in \widehat{(\mathcal{A})}$ olur ve böylece

$$(\widetilde{f_{\mathcal{A}}} \circ f^{-1} \circ \widetilde{f_B}^{-1})(x, n) = (\widetilde{f_{\mathcal{A}}} \circ f^{-1})(1-x, n) = \widetilde{f_{\mathcal{A}}}(y, m) = (1-y, m)$$

bulunur. $f(y, m) = (1-x, n)$ olduğu için, $\mathcal{A} \preceq B$ ile $y \leq 1-x$ elde ederiz. Ancak bu aynı zamanda $x \leq 1-y$ anlamına gelir ve $\widetilde{f_{\mathcal{A}}} \circ f^{-1} \circ \widetilde{f_B}^{-1}(x, n)$ ifadesi $x \leq 1-y$ anlamına gelir. Dolayısıyla $\widehat{B} \preceq \widehat{\mathcal{A}}$ sonucuna ulaşırız.

Önerme 3.4. $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sonlu zayıf birebir ve $\mathcal{A}, B \in [0,1]$ olsun.

- a)** $f[\mathcal{A} \oplus B] = f[\mathcal{A}] \oplus f[B]$.
- b)** Eğer f artan bir fonksiyon ise, $\mathcal{A} \preceq B$ durumu $f[\mathcal{A}] \preceq f[B]$ anlamına gelir.

İspat. **a)** f sonlu zayıf birebir olduğundan, görüntüler tanımlıdır ve her $y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f[\mathcal{A} \oplus B](y) &= \sum \{(\mathcal{A} \oplus B)(x) : f(x) = y\} = \sum \{\mathcal{A}(x) + B(x) : f(x) = y\} \\ &= \sum \{\mathcal{A}(x) : f(x) = y\} + \sum \{B(x) : f(x) = y\} \\ &= f[\mathcal{A}](y) + f[B](y) = (f[\mathcal{A}] \oplus f[B])(y). \end{aligned}$$

b) Eğer $\mathcal{A} \preceq B$ ise, yarı-yükselen bir birebir örten $g : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \widehat{B}$ fonksiyonu vardır. f 'in sonlu zayıf birebirliğinden dolayı, $\{x \in X : f(x) = y\}$ kümeleri her $y \in Y$ için sonludur. $y \in f[\mathcal{A}]$ ve $1 \leq i \leq n-1$ için, $x_i \leq x_{i+1}$ olmak üzere $\underline{\mathcal{A}} \cap \{x \in X : f(x) = y\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. Eğer $(x_1, 0), \dots, (x_1, k_1), \dots, (x_n, 0), \dots, (x_n, k_n) \in \hat{\mathcal{A}}$, ise bu durumda $(y, 1), \dots, (y, k_1 + \dots + k_n) \in \widehat{f[\mathcal{A}]}$ olur. Bu durumda, h fonksiyonunu şu şekilde tanımlıyoruz: $h(x_1, 0) = (y, 0), \dots, h(x_1, k_1) = (y, k_1), \dots, h(x_n, 0) = (y, k_1 + \dots + k_n - 1 + 1), \dots, h(x_n, k_n) = (y, k_1 + \dots + k_n)$. Bu yöntemle, $\hat{\mathcal{A}} \rightarrow \widehat{f[\mathcal{A}]}$ birebir örten bir h fonksiyonu tanımlanır. Benzer şekilde, $\widehat{B} \rightarrow \widehat{f[B]}$ birebir örten

bir h fonksiyonu da tanımlanır. Bu durumda, $k \circ g \circ h^{-1} : \widehat{f[\mathcal{A}]} \rightarrow \widehat{f[\mathcal{B}]}$ de bir birebir örten fonksiyon olur.

Varsayalım ki $(k \circ g \circ h^{-1})(y, p) = (y', q)$ olsun. $h^{-1}(y, p) = (x_h, p_h)$ ve $k^{-1}(y', q) = (x'_k, q_k)$ diyelim. O zaman $g(x_h, p_h) = (x'_k, q_k)$ olur. g yarı-yükselen olduğundan, bu $x_h \leq x'_k$ anlamına gelir. Fakat h ve k tanımlarından, $f(x_h) = y$ ve $f(x_k) = y'$ elde ederiz, ve f artan olduğundan, $y \leq y'$ olur. Bu nedenle, $k \circ g \circ h^{-1}$ yarı-yükselendir, bu yüzden $f[\mathcal{A}] \preceq f[\mathcal{B}]$ olur. ■



4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Unimumlar

$v : \mathcal{M}[0,1] \rightarrow [0,1]$ bir fonksiyon olsun. Basitlik adına, $[0,1]$ üzerinde sonlu bir $\llbracket x_1, x_2, \dots, x_n \rrbracket$ çoklu kümesi verildiğinde, $v(\llbracket x_1, x_2, \dots, x_n \rrbracket)$ yazmak yerine $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklindeki daha basit gösterimi kullanıyoruz. Eğer v , her $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in [0,1]$ ve $a \in [0,1]$ için,

$$(U1) \quad v(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = v(v(\mathcal{A}), v(\mathcal{B}))$$

$$(U2) \quad \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \Rightarrow v(\mathcal{A}) \leq v(\mathcal{B})$$

$$(U3) \quad \exists e \in [0,1], \forall a \in [0,1], v(a, e) = a$$

koşulları sağlanıyorsa, bu fonksiyon $[0,1]$ üzerinde bir **unimum** olarak adlandırılır.

Tanım 4.1, unimaların genel bir değişmelilikten yararlandığını gösterir, çünkü bir v unimum, çoklu kümelerin bir fonksiyonudur ve çoklu kümeler elemanların sırasını ayırt etmez. (U1) özeliği bir tür birleşmeliliğe karşılık gelir, (U2) v üzerinde bir tür monotonluğu anlatır, (U3) ise bir birim veya etkisiz elemanın varlığına karşılık gelir.

T-normlar ve t-konormlar uninormların özel sınıflarını oluşturduğu gibi, biz de unimumlar için benzer iki özel sınıf tanımlayacağız. Üçgenlerin yüksek boyutlu benzerleri simpleks olarak adlandırıldığından, bu fonksiyonları adlandırmak için simpleks kavramını kullanıyoruz, ancak literatürde “s-norm” terimi başka bağlamlarda (genellikle bir t-konorm anlamında) kullanıldığından, karışıklığı önlemek amacıyla kısaltmanın ilk iki harfini kullanmayı tercih ediyoruz.

Tanım 4.2. Birim elemanı $e = 1$ olan bir unimuma **simpleks normu** veya **si-norm**, ve birim elemanı $e = 0$ olan bir unimuma **simpleks konormu** veya **si-konorm** denir.

Bu aksiyomların uninormlarla olan ilişkilerine dalmadan önce, birkaç önemli örneğe bir göz atalım.

Örnek 4.3. $\sigma_{\inf} : \mathcal{M}[0,1] \rightarrow [0,1], \sigma_{\inf}(\mathcal{A}) = \inf \mathcal{A}$ fonksiyonu bir si-normdur.

(U1) şu şekilde gözlemlenir:

$$\begin{aligned} \sigma_{\inf}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) &= \inf \underline{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}} = \inf \underline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \\ &= \min\{\inf \mathcal{A}, \inf \mathcal{B}\} = \min\{\sigma_{\inf}(\mathcal{A}), \sigma_{\inf}(\mathcal{B})\} \end{aligned}$$

$$= \inf \{ \sigma_{\inf}(\mathcal{A}), \sigma_{\inf}(\mathcal{B}) \} = \sigma_{\inf}(\sigma_{\inf}(\mathcal{A}), \sigma_{\inf}(\mathcal{B})).$$

(U2) için, $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ olduğunu varsayalım. $b \in \underline{\mathcal{B}}$ olsun. O halde $\mathcal{B}(b) \geq 1$ 'dir. $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ olduğundan, $(x, n) \in \hat{\mathcal{A}}$ için $f(x, n) = (y, m)$ olması durumunda $x \leq y$ anlamına gelen bir birebir örten fonksiyon $f : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ vardır. Özellikle, $(b, 0) \in \hat{\mathcal{B}}$ içinde olduğundan f örten olduğu için $(a, n) \in \hat{\mathcal{A}}$, $f(a, n) = (b, 0)$ olacaktır. Bu durum $a \leq b$ ve $a \in \mathcal{A}$ anlamına gelir. Sonuç olarak, $b \in \mathcal{B}$ için her zaman $a \in \mathcal{A}$ olacak şekilde $a \leq b$ vardır. Bu da $\inf \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B}$ yani $\sigma_{\inf}(\mathcal{A}) \leq \sigma_{\inf}(\mathcal{B})$ sonucunu verir.

Son olarak, (U3) $\sigma_{\inf}(a, 1) = \inf \{a, 1\} = a$ olmasından görülür.

Örnek 4.4. $\varsigma_{\sup} : \mathcal{M}[0,1] \rightarrow [0,1]$, $\varsigma_{\sup}(\mathcal{A}) = \sup \mathcal{A}$ fonksiyonunun bir si-konorm olduğu, Örnek 4.3'tekine benzer şekilde görülebilir.

Örnek 4.5. $\sigma_{\text{prod}} : \mathcal{M}[0,1] \rightarrow [0,1]$, $\sigma_{\text{prod}}(\mathcal{A}) = \prod \mathcal{A}$ fonksiyonu da bir si-normdur. Bu direkt olarak görülemeyebileceğinden dolayı detayları kısaca tartışıyoruz.

U1) Lemma 3.2'ten $\prod(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = (\prod \mathcal{A}) \cdot (\prod \mathcal{B})$ olduğunu biliyoruz ve bu tam olarak $\sigma_{\text{prod}}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \sigma_{\text{prod}}(\sigma_{\text{prod}}(\mathcal{A}), \sigma_{\text{prod}}(\mathcal{B}))$ anlamına gelir.

U2) $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ olduğunu varsayalım ve bir yarı-artan birebir örten fonksiyon $f : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ düşünelim. Bu durumda, $\hat{\mathcal{J}} = \{(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)\}$ şeklindeki her sonlu alt çoklu küme $\mathcal{J} = \llbracket x_1, x_2, \dots, x_k \rrbracket \subset \mathcal{A}$ için

$$f[\hat{\mathcal{J}}] = \{(y_1, m_1), (y_2, m_2), \dots, (y_k, m_k)\} \subseteq \hat{\mathcal{B}}$$

olur ve tüm $1 \leq i \leq k$ için $(y_i, m_i) = f(x_i, n_i)$ 'dir. Bu durumda $\mathcal{J} = \llbracket y_1, y_2, \dots, y_n \rrbracket \subset \mathcal{B}$ ve tüm $1 \leq i \leq k$ için $x_i \leq y_i$ olduğu için $\prod \mathcal{J} \leq \prod \mathcal{J}$ olur. Tüm sonlu alt çoklu kümeler üzerinde infimum alındığında, bu $\prod \mathcal{A} \leq \prod \mathcal{B}$, yani $\sigma_{\text{prod}}(\mathcal{A}) \leq \sigma_{\text{prod}}(\mathcal{B})$ sonucunu verir.

U3) $a \in [0,1]$ için, $\sigma_{\text{prod}}(a, 1) = a \cdot 1 = a$.

Örnek 4.6. $\varsigma_{\text{Luk}} : \mathcal{M}[0,1] \rightarrow [0,1]$, $\varsigma_{\text{Luk}} = \min\{1, \sum \mathcal{A}\}$ $[0,1]$ üzerinde bir si-konormdur.

U1) İki durumu ele alalım: $(\sum \mathcal{A}) + (\sum \mathcal{B}) \leq 1$ ve $(\sum \mathcal{A}) + (\sum \mathcal{B}) > 1$. Lemma 3.2'e göre $\sum(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = (\sum \mathcal{A}) + (\sum \mathcal{B})$ olduğunu zaten biliyoruz. $(\sum \mathcal{A}) + (\sum \mathcal{B}) \leq 1$ eşitsizliği $\varsigma_{\text{Luk}}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \sum(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = (\sum \mathcal{A}) + (\sum \mathcal{B})$

$$= \varsigma_{\text{Luk}}(\mathcal{A}) + \varsigma_{\text{Luk}}(\mathcal{B}) = \varsigma_{\text{Luk}}(\varsigma_{\text{Luk}}(\mathcal{A}), \varsigma_{\text{Luk}}(\mathcal{B}))$$

şeklinde bir sonuç verir. Diğer yandan, $(\sum \mathcal{A}) + (\sum \mathcal{B}) > 1$ ise, $\varsigma_{\text{Luk}}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = 1$ ve ayrıca $\varsigma_{\text{Luk}}(\varsigma_{\text{Luk}}(\mathcal{A}), \varsigma_{\text{Luk}}(\mathcal{B})) = \min\{1, \min\{1, \sum \mathcal{A}\} + \min\{1, \sum \mathcal{B}\}\} = \min\{1, \min\{2, 1 + \sum \mathcal{A}, 1 + \sum \mathcal{B}, \sum \mathcal{A} + \sum \mathcal{B}\}\} = 1$.

U2) Kolayca gözlemlenir. $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ olduğunda $\mathcal{A}$ 'dan seçilen her eleman dizisi $a_1, a_2, \dots, a_n$ için, aynı sayıda eleman $\mathcal{B}$ 'den seçilen $b_1, b_2, \dots, b_n$ vardır ve tüm $1 \leq i \leq n$ için $a_i \leq b_i$ geçerlidir.

U3) $\varsigma_{\text{Luk}}(a, 0) = \min\{1, \sum\{a\}\} = \min\{1, a\} = a$.

Örnek 4.7. $\sigma_{\text{dra}} : \mathcal{M}[0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \mathcal{A}(x) = 0 \text{ ise } x \in [0,1]' \text{de} \\ x_0, & \text{eğer } \mathcal{A}(x_0) = 1 \text{ ve } \mathcal{A}(x) = 0 \text{ ise } x \in [0,1] \setminus \{x_0\} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Bu fonksiyon $[0, 1]$ üzerinde bir si-normdur.

U1) Eğer $\mathcal{A}(x) = 0$ ise $x \in [0,1]$ için, $\mathcal{A}$ yalnızca sınırlı sayıda 1'den oluşur ve şu durumu gözlemleriz: $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B})$ tüm $\mathcal{B}$ ile ilgili üç durum için ve ayrıca $\sigma_{\text{dra}}(\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}), \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B})) = \sigma_{\text{dra}}(1, \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B})) = \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B})$. Bu nedenle, eşitlik elde edilir ve ilk durumu elemiş oluruz.

Eğer $\mathcal{A}(x_0) = 1$ ve $\mathcal{A}(x) = 0$ ise $x \in [0,1] \setminus \{x_0\} = 1$ 'e eşit değilse (aksi takdirde bu durum birinci durumla örtüşür), diğer çoklu küme $\mathcal{B}$ için iki durumu ele alalım. Eğer $\mathcal{B}(x_0) = 1$ ve $\mathcal{B}(x) = 0$ ise $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})(x_0) = 2$ ve bu üçüncü duruma karşılık gelir, yani $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = 0$ olur ve böylece $\sigma_{\text{dra}}(\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}), \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B})) = \sigma_{\text{dra}}(x_0, x_0) = 0 = \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$.

Diğer yandan, $\mathcal{B}(y_0) = 1$ ve $\mathcal{B}(x) = 0$ ise $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, burada $1 \neq y_0 \neq x_0$, o zaman $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ en az iki farklı olmayan elemana sahip olacak, bu durumda $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = 0$ olur ve yine $\sigma_{\text{dra}}(\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}), \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B})) = \sigma_{\text{dra}}(x_0, y_0) = 0$.

Eğer $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ çoklu kümelerinden biri ilk iki duruma düşmüyorsa, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ de bu durumda olmayacaktır. Bu nedenle, $\sigma(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = 0$ ve ayrıca $\sigma_{\text{dra}}(\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}), \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B})) = 0$ olacaktır, çünkü en az birinin değeri sıfırdır.

U2) $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ olduğunu varsayalım. Eğer $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}) = 0$ ya da $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B}) = 1$, o zaman açıkça $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}) \leq \sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B})$ olur. Eğer $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}) = 1$ ise, $\mathcal{A}$ yalnızca 1'lerden oluşur ve bir yarı-artan birebir örten fonksiyon $f : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ 'nin varlığı $\mathcal{B}$ 'nin de yalnızca 1'lerden oluşmasını zorunlu kılar, bu durumda $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{B}) = 1$ olur. Son olarak, $\sigma_{\text{dra}}(\mathcal{A}) = x_0 \notin \{0,1\}$ durumunda, $\mathcal{A}$ çoklu kümesi $\mathcal{A} = \llbracket x_0, 1, 1, \dots, 1 \rrbracket$ biçimindedir. Ancak, bir yarı-

artan birebir örten fonksiyonun varlığı, $\mathcal{B}$ 'nin de $\mathcal{B} = \llbracket y_0, 1, 1, \dots, 1 \rrbracket$ biçiminde olmasını gerektirir ve $x_0 \leq y_0$ olur. Bu nedenle $\sigma_{\text{dra}}(A) = x_0 \leq y_0 = \sigma_{\text{dra}}(B)$ sonucunu çıkarırız.

U3) $\sigma_{\text{dra}}(a, 1) = a$ tüm $a \in [0, 1]$ için hemen görülür.

Örnek 4.8. $v : \mathcal{M}[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} \sup \underline{\mathcal{A}}, & \text{eğer } \emptyset \neq \mathcal{A} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \\ \frac{1}{3}, & \text{eğer } \mathcal{A} = \emptyset \\ \inf \underline{\mathcal{A}}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bir unimumdur, ancak ne bir si-norm ne de bir si-konormdur, birim elemanı $e = \frac{1}{3}$ 'tür.

U1) Hem $v(\mathcal{A}) = \inf \underline{\mathcal{A}}$ hem de $v(\mathcal{B}) = \inf \underline{\mathcal{B}}$ ya da her ikisi için de $v(\mathcal{A}) = \sup \underline{\mathcal{A}}$ ve $v(\mathcal{B}) = \sup \underline{\mathcal{B}}$ olduğunda, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ 'nin değeri benzer şekilde belirlenir (sırasıyla infimum veya supremum ile) ve $v(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = v(v(\mathcal{A}), v(\mathcal{B}))$ eşitliği, 1. veya 2. örnekteki gibi elde edilir.

Eğer $\mathcal{A}$ ya da $\mathcal{B}$ boş çoklu küme ise, eşitlik yine açıktır, çünkü $\sup \underline{\mathcal{A}} \geq \frac{1}{3}$ $\mathcal{A} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ olan boş olmayan çoklu kümeler için ve $\inf \underline{\mathcal{A}} < \frac{1}{3}$ üçüncü duruma uyan çoklu kümeler için geçerlidir. Son olarak, eğer $\emptyset \neq \mathcal{A} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ ancak $\mathcal{B}$ üçüncü duruma uygunsa, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ de üçüncü duruma uyar. Bu nedenle $v(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \inf \underline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \inf \underline{\mathcal{B}}$ elde edilir, çünkü $\mathcal{B}$, $\frac{1}{3}$ 'ten küçük en az bir eleman içerir, ancak $\mathcal{A}$ içermez. $\inf \underline{\mathcal{B}} < \frac{1}{3} \leq \sup \underline{\mathcal{A}}$ olduğundan, aynı zamanda $v(v(\mathcal{A}), v(\mathcal{B})) = v(\sup \underline{\mathcal{A}}, \inf \underline{\mathcal{B}}) = \inf\{\sup \underline{\mathcal{A}}, \inf \underline{\mathcal{B}}\} = \inf \underline{\mathcal{B}}$, bu da istenen eşitliği sağlar.

U2) Örnek 4.3 ve Örnek 4.4'teki eşitsizlikleri ele alırsak, eğer kümeler aynı duruma denk geliyorsa, $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ olduğunda $v(\mathcal{A}) \leq v(\mathcal{B})$ sağlanır. En az bir yarı-artan birebir örten fonksiyonun bulunması gerektiğinden, $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ 'nin gerçekleşebileceği tek diğer durum, $\mathcal{B}$ 'nin birinci duruma uyması, $\mathcal{A}$ 'nın ise üçüncü duruma uymasıdır. Bu durumda da, $v(\mathcal{A}) \leq v(\mathcal{B})$ doğrudan elde edilir.

U3) Eğer $a < \frac{1}{3}$ ise, $v\left(a, \frac{1}{3}\right) = \inf\left\{a, \frac{1}{3}\right\} = a$; ve eğer $a \geq \frac{1}{3}$ ise, $v\left(a, \frac{1}{3}\right) = \sup\left\{a, \frac{1}{3}\right\} = a$.

Örnek 4.9. Bir binanın, yer altı hariç herhangi bir yönden gelebilecek tehditlere maruz kalabileceği varsayılmaktadır. Gelen tehditlerin tüm olası yönleri, bir X yarımküresi üzerindeki noktalarla modellenenebilir. Bu yarımküre üzerindeki her bir x noktası için, x 'in temsil ettiği yönden gelebilecek bir saldırının olasılığına karşılık gelen ve $[0, 1]$ aralığında yer alan bir $r(x)$ risk seviyesi skoru atanır. Ölçümlerin yeterince hassas olduğu ve yinelenen değerlerin elendiği varsayımıyla, X kümesindeki noktaların oluşturduğu skorlar kümesi (ve dolayısıyla çoklu kümesi) $\mathcal{R} = \{r(x) : x \in X\}$ olsun.

Eğer elde edilen risk haritası, $\mathcal{R}$ kümesinin $[0, 0.01]$ aralığının bir alt (çoklu) kümesi olduğunu gösteriyorsa, bu durum önemli bir tehdit beklentisinin olmadığını ima eder. Bu durumdan verimli şekilde yararlanmak için, yarımküre tarafından tanımlanan yönler arasında en düşük tehlike seviyesine dayalı bir risk skoru üretilebilir. Bu skor, binanın bu düşük riskli ortamda maksimum verimlilikle çalışmasını ve işlev görmesini sağlamak amacıyla kullanılabilir.

Diğer senaryolarda, herhangi bir yönde tehlike seviyesi tolere edilebilir eşiğin üzerine çıkarsa, verimlilik ikincil bir öneme sahip olur ve önleyici tedbirler öncelik kazanır. Bu önlemlerin seviyesi, en yüksek tehlike skoruna sahip yön dikkate alınarak belirlenebilir.

Bu yaklaşım,

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} \inf \underline{\mathcal{A}}, & \emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq [0, 0.01] \\ 0.01, & \mathcal{A} = \emptyset \\ \sup \underline{\mathcal{A}}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir unimum kullanılarak modellenenebilir.

Örnek 4.10. Bir grup finansal varlığın değeri, zamana bağlı bir fonksiyon olarak $x(t) = \left(\log_2 \frac{M(t)}{m(t)} + 1\right)^{-1}$ şeklinde hesaplanmaktadır. Burada $M(t)$ ve $m(t)$, herhangi bir t anında, söz konusu varlığın son 24 saat içindeki maksimum ve minimum değerlerini temsil eder. Zaman parametresi t seçilen bir başlangıç noktasından itibaren sürekli olarak ilerledikçe, bu şekilde elde edilen tüm benzersiz $x(t)$ değerlerinin oluşturduğu çoklu kümeye $\mathcal{X}$ diyelim. Aşağıdaki şekilde tanımlanan unimum fonksiyonu göz önüne alınır.

$$v(\mathcal{X}) = \begin{cases} \sup \underline{\mathcal{X}}, & \emptyset \neq \mathcal{X} \subseteq [0.5, 1] \\ 0.5, & \mathcal{X} = \emptyset \\ \inf \underline{\mathcal{X}}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Bu durumda, $v(\mathcal{X})$, seçilen zaman aralığı içinde ilgili finansal varlık için bir skor üretir.

Eğer $\mathcal{X}$ çoklu kümesi, 0.5'in altında en az bir değer içeriyorsa, bu durum varlığın tek bir gün içinde önemli dalgalanmalar yaşadığını, yani değerinin yarısından fazlasını

kaybettiğini ya da iki katına çıktığını gösterir. Bu durum, kısa vadeli işlemler için bir risk uyarısı niteliğindedir. Sıfıra daha yakın değerlerin varlığı daha yüksek bir riski işaret eder; infimum bu geçmişteki en kritik riski skora yansıtır.

Öte yandan, böyle bir geçmiş yoksa, skor supremum aracılığıyla elde edilir. Bu değer 1'e yaklaştıkça, belirli dönemlerde oynaklığın son derece düşük olduğu anlamına gelir ki, bu durum da potansiyel fırsatın düşük kaldığı zaman maliyetleri nedeniyle istenmeyebilir.

Sonuç olarak, 24 saatlik işlem planlamalarında, yardımcı bir strateji olarak skoru 0.5'in üzerinde olan varlıkların önceliklendirilmesi düşünülebilir. Eğer bu tür varlıklar yetersizse, skoru 0.5'in altında olan varlıklar da değerlendirilebilir. Her iki durumda da, skoru 0.5'e en yakın olan varlıklara öncelik verilebilir.

Örnek 4.11. Unima kullanılarak bulanık kümeler ailesi üzerinde genelleştirilmiş ya da karma işlemler tanımlamak mümkündür. Örneğin, aşağıdaki örnek olasılıksal olarak yorumlanabilir:

$\mu_n(x) = 2^{-1/n^x}$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir $\{\mu_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ bulanık kümeler ailesi verilsin. σ_{prod} si-normuna göre bu ailenin kesişimiyle elde edilen bulanık küme μ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\mu(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n(x) = \prod_{n=1}^{\infty} 2^{-1/n^x} = 2^{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}}$$

olur ve bu ifade, ζ Riemann zeta fonksiyonunu göstermek üzere

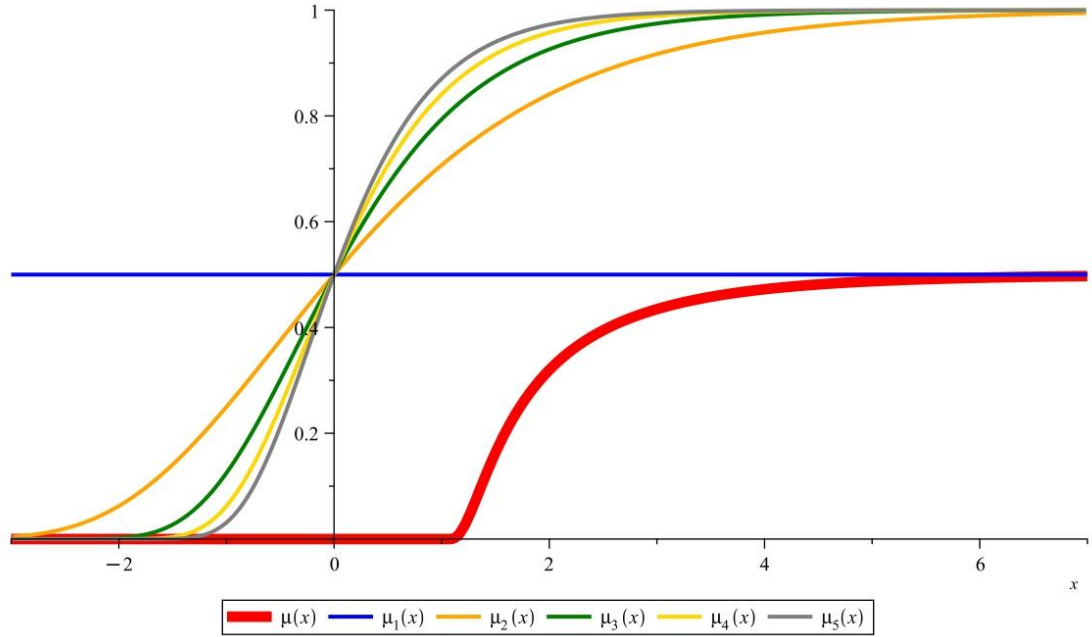
$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 2^{-\zeta(x)}, & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde sadeleşir. Dolayısıyla, bu bulanık kümelerin verilen σ -norm altındaki kesişimi, Şekil 4.1'deki grafikte kırmızıyla gösterilen eğriye karşılık gelir. Bu yaklaşım, infimum kullanılarak hesaplanan klasik kesişimle elde edilenden farklı bir küme sağlar. Bu durum aşağıdaki çizelgede 4 ondalık hassasiyetiyle birkaç örnek değer üzerinden gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. Örnek 4.11 bağlamında bazı bulanık kümelerin aldığı çeşitli değerler

x	$\mu_1(x)$	$\mu_2(x)$	$\mu_3(x)$	$\mu_4(x)$	$\mu_5(x)$	$\inf \mu_i(x)$	$\mu(x)$
-1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0313	0	0
0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0
1	0,5	0,7071	0,7937	0,8409	0,8706	0,5	0
2	0,5	0,8409	0,9259	0,9576	0,9727	0,5	0,3198
3	0,5	0,917	0,9747	0,9892	0,9945	0,5	0,4347

Şekil 4.1. Örnek 4.11'deki μ_n ($1 \leq n \leq 4$) ve μ fonksiyonlarının grafikleri



Devam etmeden önce, $[0,1]$ aralığındaki unimumlar ile ilgili bazı temel ve kullanışlı özellikleri ifade eden şu teoremi verelim.

Teorem 4.12. v , birim elemanı e olan bir unimum olsun. O zaman aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

- 1) Sadece bir tane birim eleman vardır.
- 2) $v(\emptyset) = e$.
- 3) $v(a) = a$ her $a \in [0,1]$ için geçerlidir.
- 4) Her $\mathcal{A} \subseteq [0,1]$ için $v(\mathcal{A} \oplus \{e\}) = v(\mathcal{A})$.

İspat. 1) Varsayalım ki e' de v için bir birim elemanıdır. O zaman hem $v(e, e') = e$ hem de $v(e', e) = e'$ geçerlidir. Çoklu kümeler arasındaki $\llbracket e, e' \rrbracket = \llbracket e', e \rrbracket$ eşitliği $e = e'$ sonucunu verir.

2) (U3) ve (U1) kullanılarak şu eşitlik elde edilir:

$$a = v(a, e) = v(\{a, e\} \oplus \emptyset) = v(v(a, e), v(\emptyset)) = v(a, v(\emptyset))$$

her $a \in [0,1]$ için geçerlidir. Birim elemanın teklik özelliğinden dolayı, $v(\emptyset) = e$ sonucuna ulaşılır.

3) İlk olarak, (2)'den $v(e) = e$ olduğu gözlenir:

$$v(e) = v(v(e, e)) = v(v(e, e), e) = v(v(e, e), v(\emptyset)) = v(\{e, e\} \oplus \emptyset) = v(e, e) = e.$$

Şimdi her $a \in [0, 1]$ için (U2) kullanılarak şu eşitlik elde edilir:

$$v(a) = v(v(a), e) = v(v(a), v(e)) = v(\{a\} \oplus \{e\}) = v(a, e) = a.$$

4) (3) uygulanarak şu sonuç elde edilir: $v(\mathcal{A} \oplus \{e\}) = v(v(\mathcal{A}), v(e)) = v(v(\mathcal{A}), e) = v(\mathcal{A})$. ■

Aşağıdaki teorem, $[0, 1]$ aralığındaki uninormlar için bilinen dualite kavramını uninomlara genişletir.

Teorem 4.13. Eğer v birim elemanı e olan bir unimum ise, $\bar{v} : \mathcal{M}[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu,

$$\bar{v}(\mathcal{A}) = 1 - v(\tilde{\mathcal{A}})$$

şeklinde tanımlanır ve bu fonksiyon birim elemanı $1 - e$ olan bir unimumdur. Ayrıca, $\bar{\bar{v}} = v$.

İspat. Önerme 2.4 (a)'ya göre, $\bar{v}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = 1 - v(\widetilde{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}}) = 1 - v(\tilde{\mathcal{A}} \oplus \tilde{\mathcal{B}}) = 1 - v(v(\tilde{\mathcal{A}}), v(\tilde{\mathcal{B}})) = 1 - v(1 - \bar{v}(\mathcal{A}), 1 - \bar{v}(\mathcal{B})) = 1 - v(\{\tilde{v}(\mathcal{A}), \tilde{v}(\mathcal{B})\}) = \tilde{v}(\tilde{v}(\mathcal{A}), \tilde{v}(\mathcal{B}))$ ve Önerme 2.4 (b)'ye göre, eğer $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ ise $\tilde{\mathcal{B}} \leq \tilde{\mathcal{A}}$ 'dır ve bu nedenle $v(\tilde{\mathcal{B}}) \leq v(\tilde{\mathcal{A}})$. Buna göre, $\bar{v}(\mathcal{A}) = 1 - v(\tilde{\mathcal{A}}) \leq 1 - v(\tilde{\mathcal{B}}) = v(\tilde{\mathcal{B}})$.

Ayrıca her $a \in [0, 1]$ için, $\bar{v}(a, 1 - e) = 1 - v(\llbracket a, \widetilde{1 - e} \rrbracket) = 1 - v(1 - a, e) = 1 - (1 - a) = a$.

$\bar{\bar{v}} = v$ eşitliği, $\tilde{\mathcal{A}}$ ve $\bar{v}$ tanımlarından açıkça anlaşılmaktadır. ■

Örnek 4.14. $\overline{\sigma_{\inf}} = \varsigma_{\sup}$ olduğu hemen gözlemlenebilir. Ayrıca, dualiteye dayanarak aşağıdaki unimumları tanımlayabiliriz:

$$\varsigma_{\text{sum}} := \overline{\sigma_{\text{prod}}}, \sigma_{\text{Luk}} := \overline{\varsigma_{\text{Luk}}}, \text{ ve } \varsigma_{\text{dra}} := \overline{\sigma_{\text{dra}}}.$$

Örnek 3.8'deki unimum v 'un duali şu şekilde verilir:

$$\bar{v}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \inf \underline{\mathcal{A}}, & \text{eğer } \emptyset \neq \mathcal{A} \in [0, \frac{2}{3}] \\ \frac{2}{3}, & \text{eğer } \mathcal{A} = \emptyset \\ \sup \underline{\mathcal{A}}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

birim elemanı $e = \frac{2}{3}$ 'tür.

Teorem 4.15. Eğer v birim elemanı e olan bir unimum ise ve $f : [0,1] \rightarrow [a,b]$ artan bir birebir fonksiyon ise, burada $0 \leq a \leq e \leq b \leq 1$ olur. Eğer $\mathcal{A} \in [a,b]$ ise $v(\mathcal{A}) \in [a,b]$ sağlanıyorsa, o zaman $\vartheta : \mathcal{M}[0,1] \rightarrow [0,1]$, $\vartheta(\mathcal{A}) = f^{-1}(v(f[\mathcal{A}]))$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde birim elemanı $f^{-1}(e)$ olan bir unimumdur.

İspat. Eğer f artan bir birebir fonksiyon ise, f^{-1} de öyledir ve Önerme 3.4 (a)'ya göre,

$$\begin{aligned}\vartheta(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) &= f^{-1}(v(f[\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}])) = f^{-1}(v(f[\mathcal{A}] \oplus f[\mathcal{B}])) \\ &= f^{-1}\left(v(v(f[\mathcal{A}]), v(f[\mathcal{B}])))\right) \\ &= f^{-1}\left(v(f[\{f^{-1}(v(f[\mathcal{A}]), f^{-1}(v(f[\mathcal{B}]))\}]))\right) = \vartheta(\vartheta(\mathcal{A}), \vartheta(\mathcal{B}))\end{aligned}$$

ve Önerme 3.4 (b)'ye göre, $A \preccurlyeq B \Rightarrow f[A] \preccurlyeq f[B] \Rightarrow v(f[A]) \leq v(f[B]) \Rightarrow f^{-1}(v(f[A])) \leq f^{-1}(v(f[B]))$ bu da $A \preccurlyeq B \Rightarrow \vartheta(A) \leq \vartheta(B)$ sonucunu verir. Son olarak,

$$\vartheta(a, f^{-1}(e)) = f^{-1}(v(f[\{f^{-1}(e), a\}])) = f^{-1}(v(\{e, f(a)\})) = f^{-1}(f(a)) = a$$

her $a \in A$ için sağlanır.

Teorem 4.16. Eğer v $[0,1]$ üzerinde bir unimum ise, $\ddot{v}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu

$$\ddot{v}(x, y) := v(x, y)$$

şeklinde tanımlanan bir uninormdur.

Uyarı 4.17. Yukarıdaki gösterim, v ve $\ddot{v}$ arasında bir değiştirilebilirliği ifade ediyor gibi görünse de durum böyle değildir, çünkü tanım kümeleri farklıdır ve daha önemlisi, $\ddot{v}$ gerçek bir iki değişkenli fonksiyondur, oysa $v(x, y)$, Tanım 4.1'da açıklandığı gibi aslında $v(\{x, y\})$ 'i belirtmek için kullanılan bir kısayol gösterimidir.

Teorem 4.16'nın ispatı. Bir çoklu kümede elemanların yazılış sırasının önemi olmadığından, $\ddot{v}$ otomatik olarak değişme özelliğine sahiptir. v 'un birim elemanı, (U3)'e göre $\ddot{v}$ 'un da birim elemanıdır. $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ olduğu durumda, $\{x_1, y_1\} \preccurlyeq \{x_2, y_2\}$ olduğu için $\ddot{v}$ monotoniktir ve bu da $\ddot{v}(x_1, y_1) \leq \ddot{v}(x_2, y_2)$ sonucunu verir. Birleşme özelliği için, $x, y, z \in [0,1]$ elemanlarını göz önüne alalım ve (U1) ve Teorem 3.5 (3)'e göre

$$\begin{aligned}\ddot{v}(x, \ddot{v}(y, z)) &= v(x, v(y, z)) = v(v(x), v(y, z)) = v(\{x\} \oplus \{y, z\}) = v(\{x, y\} \oplus \{z\}) \\ &= v(v(x, y), v(z)) = \ddot{v}(\ddot{v}(x, y), z)\end{aligned}$$

İfadesini gözlemleyelim.

Örnek 4.18. Açıkça görülür ki $\sigma_{\inf} = \top_{\min}$, $\check{\sigma}_{\sup} = \perp_{\max}$, $\ddot{\sigma}_{\text{prod}} = \top_{\text{prod}}$, $\check{\sigma}_{\text{sum}} = \perp_{\text{sum}}$, $\ddot{\sigma}_{\text{Luk}} = \top_{\text{Luk}}$, $\check{\sigma}_{\text{Luk}} = \perp_{\text{Luk}}$, $\ddot{\sigma}_{\text{dra}} = \top_{\text{dra}}$ ve $\check{\sigma}_{\text{dra}} = \perp_{\text{dra}}$. Örnek 4.8'deki unimum için,

$$\ddot{v}(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{eğer } (x, y) \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]^2 \\ \min\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonksiyonu elde edilir ve bunun duali,

$$\bar{\ddot{v}}(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{eğer } (x, y) \in \left[0, \frac{2}{3}\right]^2 \\ \max\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.16'dan, Önerme 2.2'in bir karşılığı unimumlar için de geçerlidir ve şu şekilde ifade edilir:

Sonuç 4.19. Her v unimumu için $[0, 1]$ üzerinde $v(0, 1) \in \{0, 1\}$ 'dir.

Bu sonuca dayanarak aşağıdaki sınıflandırmayı yapabiliriz.

Tanım 4.20. Bir unimum v , eğer $v(0, 1) = 0$ ise **birleşimsel** olarak adlandırılır. Aksi halde, eğer $v(0, 1) = 1$ ise, **ayrışimsal** olarak adlandırılır.

Bir başka ilgili nokta, $v(0, 1)$ 'in bir yutan eleman olmasıdır, çünkü içinde en az bir örneğini bulunduran herhangi bir çoklu küme, bir unimum altında her zaman $v(0, 1)$ değerini alacaktır.

Önerme 4.21. Her v unimumu ve her $A \subseteq [0, 1]$ için $v(A \oplus \{v(0, 1)\}) = v(0, 1)$.

İspat. $v(A \oplus \{v(0, 1)\}) = v(v(A), v(v(0, 1))) = v(v(A), v(0, 1)) = \ddot{v}(\ddot{v}(A), \ddot{v}(0, 1)) = \ddot{v}(0, 1) = v(0, 1)$. ■

Aşağıda, birleşme özelliğini kullanarak, $n \geq 2$ olmak üzere bir U uninormu için n -değişkenli $U(x_1, \dots, x_n)$ notasyonunu kullanıyoruz.

Teorem 4.22. Eğer $U: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir birim elemanlı uninorm ise,

$$\dot{U}(A) = \begin{cases} e, & \text{eğer } A=\emptyset \\ a, & \text{eğer } A=\llbracket a \rrbracket \\ U(x_1, \dots, x_n), & \text{eğer } A=\llbracket x_1, \dots, x_n \rrbracket \text{ ve } n \geq 2 \\ U(0,1), & \text{eğer } A \text{ sonsuzdur} \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan $\dot{U}: \mathcal{M}[0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir unimumdur.

İspat. Kolaylık sağlamak için $\dot{U}$ fonksiyonunun durumlarına yukarıdan aşağıya Durum 1, Durum 2, Durum 3 ve Durum 4 olarak atıfta bulunuyoruz. Durum $i - j$, A 'nın uygun bir şekilde Durum i için ve B 'nin uygun bir şekilde Durum j için seçildiği anlamına gelir.

(U1) $\dot{U}(A \oplus B) = \dot{U}(\dot{U}(A), \dot{U}(B))$ eşitliği, tüm Durum $1 - j$, $i - 1$ için gözlemlenmesi kolaydır, çünkü $\dot{U}(\emptyset) = eU$ için nötr elemandır. Durum 2-2 eşitliği doğrudan sağlanır. U bir uninorm olduğundan, ayrıca Durum 2-3, 3-2 ve 3-3 sağlanır. Eğer A veya B sonsuzsa, o zaman $A \oplus B$ de sonsuzdur ve $U(0,1)$ bir yutan eleman olduğu için Proposition 2.3, eşitlik Durum $4 - j$ ve $i - 4$ için de sağlanır.

(U2) $A \preceq B$ olduğunu varsayalım. O zaman $\hat{A} \rightarrow \hat{B}$ için bir yarı-yükselen birebir fonksiyon f vardır ve her bir durum farklı bir kardinaliteyi temsil ettiği için Durum $i - j$, $i \neq j$ olduğunda mümkün değildir. Diğer yandan, $A \preceq B$, Durum 1-1, 2-2, 3-3 ve 4-4 için hemen gözlemlenir.

(U3) doğrudan sağlanır. ■

Uyarı 4.23. Teorem 4.22'deki yapı, bir uninormu unimuma genişletmenin tek yolu değildir. $A = \{2^{-1}, 2^{-1/4}, 2^{-1/9}, 2^{-1/16}, \dots\}$ çoklu kümesi için, $\sigma_{\text{prod}}(A) = 2^{-\pi^2/6}$ ancak $\dot{T}_{\text{prod}}(A) = 0$, $\sigma_{\text{inf}}(A) = \frac{1}{2}$ ve ancak $\dot{T}_{\text{min}}(A) = 0$ 'dır. Ancak hem $\sigma_{\text{prod}}(A)$ hem de $\dot{T}_{\text{prod}}$, T_{prod} 'u genişletir ve hem $\sigma_{\text{inf}}(A)$ hem de $\dot{T}_{\text{min}}$, T_{min} 'i genişletir. Bu nedenle, Teorem 4.9 ve Teorem 4.15'da verilen notasyonlar art arda uygulandığında, bir uninorm U için her zaman $(\dot{U}) \neq U$ eşitliğine sahip olunacağını, ancak genel olarak $(\dot{v}) \neq v$ olduğuna dikkat edelim.

$[0,1]$ aralığı üzerindeki uninormlar

$$v_1 \lesssim v_2 : \Leftrightarrow \forall A \in [0,1], v_1(A) \leq v_2(A)$$

kuralına göre sıralanabilir. Teorem 4.22'deki inşa, $[0,1]$ üzerindeki en zayıf ve en güçlü unimumları aşağıdaki şekilde belirlememizi sağlar.

Önerme 4.24. $e \in (0,1)$ birim elemanına sahip her v unimumu için, $\underline{U}_e \lesssim v \lesssim (\overline{U}_e)$ eşitliği geçerlidir. Burada $\underline{U}_e$ ve $(\overline{U}_e)$, Fodor ve De Baets (2007)'deki Önerme 2'de verilen uninormlardır, yani

$$\underline{U}_e(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x, y \in [0, e) \\ \max\{x, y\}, & \text{eğer } x, y \in [e, 1] \\ \min\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\overline{U}_e(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{eğer } x, y \in [0, e] \\ 1, & \text{eğer } x, y \in (e, 1] \\ \max\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve $\underline{U}_e$ ile $(\overline{U}_e)$ bu uninormlardan Teorem 4.22'deki gibi elde edilen unimumlardır.

İspat. Sonlu durum için ispat Fodor ve De Baets (2007)'deki Önerme 2'den gelmektedir. Sonsuz durum da açıktır, çünkü her sonsuz $A \in [0,1]$ çoklu kümesi için

$$\underline{U}_e(A) = \underline{U}_e(0,1) = \min\{0,1\} = 0 \leq v(A) \leq 1 = \max\{0,1\} = \overline{U}_e(0,1) = (\overline{U}_e)(A)$$

geçerlidir. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, unimum kavramı ve onun özel durumları olan si-normlar ile si-konormlar tanıtılmış; mantıksal bağlaçlar olarak işlev görebilen uninormlar, mantıksal nicelleyiciler konumuna yükseltilmiştir. Elde edilen sonuçlar unimumların, uninormların bazı temel özelliklerini koruduğunu ve onlarla ilgili tutarlı çıkarımlar yapılabildiğini göstermiştir.

Ancak bu çalışmada, teoriye bir giriş sunmak ve metni kısa tutmak amaçladığı için, birçok konuya yüzeysel değinilmiş veya hiç değinilmemiştir. Hâlen açık olan bazı sorular şunlardır: Tüm unimumlar si-normlar ve si-konormlar kullanılarak inşa edilebilir mi? Sonlu olandan sayılabilir sonsuzluğa, oradan da sayılamaz sonsuzluğa geçişte ortaya çıkan kısmi kopukluklar nasıl ele alınmalıdır? Unimumların önemli alt sınıfları nelerdir? Unimumlar özelinde süreklilik kavramı nasıl işler? Unimumlar için idempotentliğin etkileri nelerdir? Unimumların temsil edilebilirliği nasıldır? De Morgan üçlülere ve nullnormlara karşılık gelen ve nulimum olarak adlandırılacak potansiyel kavram nasıl tanımlanır ve unimumlar ile aralarında nasıl bir ilişki ağı vardır?

Bunlara ek olarak, unimaların $[0,1]$ dışındaki herhangi bir tam kafes üzerinde ya da daha genel mantıksal cebirsel yapılar üzerinde nasıl yapılandırılacağı ve bunun ne tür mantıksal yorumlar ve çıkarımlara yol açacağı da araştırılmaya değer sorular arasında yer almaktadır.

Burada elde edilen sonuçların tamamı ve bunlara ek olarak bazı diğer yardımcı kavramlar ve sonuçlar “Unima on $[0,1]$ ” adlı çalışmada yayınlanmıştır. (Gürdal vd., 2025)

KAYNAKLAR

- Fodor, J., ve De Baets, B. (2007). Uninorm basics, *Fuzzy Logic: A Spectrum of Theoretical & Practical Issues* içinde (49-64 s). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Fodor, J., ve Yager, R.R. (1997). Structure of uninorms. *International Journal of Uncertainty. Fuzziness Knowledge-Based Systems*, 5(4), 411-427.
- Gürdal, U., Oğur, Ö., ve Çetin, S. (2025). Unima on $[0,1]$. *Fuzzy Sets and Systems*, 516, 1-18.
- Miyamoto, S. (2000). Multisets and fuzzy multisets, *Soft Computing and Human-Centered Machines* içinde (9-33 s). Japan, Tokyo: Springer.
- Yager, R.R. (1986). On the theory of bags, *International Journal of General Systems*, 13(1), 23-37.