



**(1+2) BOYUTLU ZAMANA BAĞLI KONVEKTİF
KATSAYILI SÖNÜMLEMELİ DALGA TÜR
KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON
DENKLEMİNİN SONLU FARKLAR/SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

Zeynep ADIGÜZEL

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Harun SELVİTOPI**

**2024
Her hakkı saklıdır.**



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**(1+2) BOYUTLU ZAMANA BAĞLI KONVEKTİF KATSAYILI
SÖNÜMLEMELİ DALGA TÜR KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON
DENKLEMİNİN SONLU FARKLAR/SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE
ÇÖZÜMÜ**

Zeynep ADIGÜZEL

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Harun SELVİTOPI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2024

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

28 / 06 / 2024

İmzası

Zeynep ADIGÜZEL

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(1+2) BOYUTLU ZAMANA BAĞLI KONVEKTİF KATSAYILI SÖNÜMLEMELİ DALGA TÜR KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON DENKLEMİNİN SONLU FARKLAR/SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Zeynep ADIGÜZEL

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Harun SELVİTOPI

Yapılan çalışmaları incelediğimizde görüyoruz ki, birçok mühendislik ve fizik problemleri konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi ile matematiksel olarak modellenmektedir. Bu tez çalışmasında ise literatüre ilk kez girecek ve fiziksel problemlere oldukça katkı sağlayacak, hareketli alanlardaki salınımları kontrol etmede büyük role sahip olan iki boyutlu sönümlemeli dalga tür konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin sonlu fark/sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü ele alınmıştır. Fortran programlama dili kullanılarak elde edilen sayısal çözümlerin sonuçları zamana bağlı konvektif katsayılı denklemler için farklı zaman adımlarında elde edilmiş, incelenmiş ve yorumlanmıştır.

2024, 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sonlu Elemanlar Yöntemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Sönümlemeli Dalga-Tür Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi

ABSTRACT

MS. Thesis

FINITE DIFFERENCE/FINITE ELEMENT METHOD SOLUTION OF THE (1+2) DIMENSIONAL TIME-DEPENDENT CONVECTIVE COEFFICIENT DAMPED WAVE TYPE CONVECTION-DIFFUSION-REACTION EQUATION

Zeynep ADIGÜZEL

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Harun SELVİTOPI

When we examine the studies conducted, we see that many engineering and physics problems are mathematically modeled by the convection-diffusion-reaction equation. In this thesis, for the first time in the literature, the solution of a two-dimensional damped wave-type convection-diffusion-reaction equation, which will make a significant contribution to physical problems and play a major role in controlling oscillations in moving domains, has been addressed using the finite difference/finite element method. The numerical solutions obtained using the Fortran programming language have been derived, examined, and interpreted for equations with time-dependent convective coefficients at different time steps.

2024, 54 page

Keywords: Finite Element Method, Finite Difference Method, Damped Wave-Type Convection-Diffusion-Reaction Equation

TEŞEKKÜR

Tez çalışmaları boyunca yol göstericiliği, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen, süreçteki sabrı ve desteğiyle her zaman yanımda olan yüksek lisans tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Harun SELVİTOPI'ye, bu uzun ve meşakkatli yolculukta verdiği değerli katkılar için en derin şükranlarımı sunarım.

Tez jürimde yer alan ve değerli fikirleri ile katkı sunan Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR ve Prof. Dr. Nilüfer TOPSAKAL hocalarıma ve Yüksek Lisans eğitimim sürecinde bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Erzurum Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü kıymetli hocalarıma ve yine beni her daim destekleyen Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Matematik bölümü başta bölüm başkanım olmak üzere tüm değerli hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, eğitim hayatım boyunca bana inanan, sürekli destek olan ve her zaman varlıklarıyla arkamda duran canım babam ve sevgili anneme, ablalarım ve abime sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım. Her birinin varlığı, bu yolculukta bana güç verdi.

Son olarak, yüksek lisans eğitimim boyunca maddi olarak desteğini aldığım Türkiye Bilimsel ve Teknoloji Araştırma Kurumu 2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Programına çok teşekkür ederim.

Zeynep ADIGÜZEL
Haziran 2024

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Sonlu Farklar Yöntemi	2
1.2. Sonlu Fark Yöntemi Tarihsel Gelişim	5
1.3. Sonlu Fark Formüllerinin Taylor Serisinden Elde Edilişleri	6
1.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi	8
1.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihsel Gelişimi	9
1.6. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Olayı	11
1.7. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi	12
1.8. Sönümlemeli Dalga Tür Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi	14
2. KAYNAK ÖZETLERİ	17
3. MATERYAL ve YÖNTEM	21
3.1. Sonlu Farklar/Sonlu Elemanlar Sayısal Yönteminin Sönümlemeli Dalga Tür Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Problemine Uygulanması	21
3.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları	21
3.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Dezavantajları	22
3.4. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	22
3.4.1. Elemanlar	22
3.4.2. 2-D Elemanlar	23
3.4.3. Şekil fonksiyonları	24
3.4.4. Üçgen eleman şekil fonksiyonları	25
3.4.5. Üçgen eleman için sayısal integral	25
3.5. Cranck Nicolson Şeması	30
3.6. Sonlu Elemanlar Yönteminin Sönümlemeli Dalga Tür Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Denklemine Uygulanması	32

3.6.1. Güçlü hal	32
3.6.2. Zayıf hal	33
3.6.3. Sonlu farklar yönteminin uygulanması	35
3.6.4. Varyasyonel hal.....	36
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	41
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	49
KAYNAKLAR	51



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
Ω	Tanım bölgesi
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$L^2(\Omega)$	Ω bölgesinde karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)$ uzayında Sobolev alt uzayı
ε	Difüzyon katsayısı
u_h^e	Bilinmeyen fonksiyonun eleman üzerinde ayrıklaştırılmış çözümü
∇u	Gradyan
Δu	Laplace operatörü
$\rightarrow_h$	Konveksiyon teriminin konvektif katsayısı
σ	Reaksiyon katsayısı
J	Jacobian
I	Bölge üzerindeki integral
ts	Kabul edilebilir maksimum sapmayı belirleyen tolerans sayısı
w	Ağırlık fonksiyonu
N_i^e	Eleman için şekil fonksiyonu
δ_{ij}	Kronocker delta
$2D$	İki boyutlu uzay
$[K^e]$	Eleman Matris

Kısaltmalar

CDR	Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon
FDM	Finite Different Method
FEM	Finite Element Method
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. En genel 2-B problemlerde yaygın olarak kullanılan gridler	4
Şekil 1.2. İleri, geri ve merkezi fark denklemleri kullanılarak P noktasındaki $f(x)$ 'in türevi için kullanılan şematik A ve B noktaları.....	5
Şekil 3.1. Bir sonlu elemanlar modelinin elemanları ve ayrıklaştırma noktaları.....	23
Şekil 3.2. İki boyutlu uzayda kullanılan elemanlar	24
Şekil 3.3. Sayısal integral için bölge dönüşümü	26
Şekil 4.1. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmış hali.....	41
Şekil 4.2. u fonksiyonunun $\varepsilon = 1, \theta = 0,5, \tau = 1, t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve $\varepsilon = 1, \theta = 0,5, t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sağ).....	42
Şekil 4.3. u fonksiyonunun $\varepsilon = 1, \theta = 0,5, \tau = 1, t = 1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve $\varepsilon = 1, \theta = 0,5, t = 2$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sağ).....	42
Şekil 4.4. u fonksiyonunun $\varepsilon = 1, \tau = 1, \theta = 0,5, t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	43
Şekil 4.5. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \tau = 0,1, \theta = 0,5, h_1 = t, h_2 = t, t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	44
Şekil 4.6. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \tau = 0,1, \theta = 0,5, h_1 = t, h_2 = t, t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	44
Şekil 4.7. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \tau = 0,1, \theta = 0,5, h_1 = t, h_2 = t, t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	44
Şekil 4.8. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \tau = 0,1, \theta = 0,5, h_1 = t, h_2 = t, t = 1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	45
Şekil 4.9. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \tau = 0,1, \theta = 0,5, h_1 = t, h_2 = t, t = 1,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ)	45
Şekil 4.10. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \tau = 0,1, \theta = 0,5, h_1 = t, h_2 = t, t = 2$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	45
Şekil 4.11. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \tau = 0,1, \theta = 0,5, h_1 = t, h_2 = t, t = 3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	46
Şekil 4.12. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \tau = 0,01, \theta = 0,5, h_1 = tant, h_2 = tant, t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	46

- Şekil 4.13.** u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = tant$, $h_2 = tant$, $t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....47
- Şekil 4.14.** u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = tant$, $h_2 = tant$, $t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....47
- Şekil 4.15.** u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = tant$, $h_2 = tant$, $t = 1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....47
- Şekil 4.16.** u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = tant$, $h_2 = tant$, $t = 1,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....48
- Şekil 4.17.** u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = tant$, $h_2 = tant$, $t = 2$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....48



1. GİRİŞ

18.yüzyıldan itibaren çalışılmaya başlanılan kısmi diferansiyel denklemler, başta mühendislik ve fizik biliminin birçok dalında önemli rol oynamakta ve gerçek hayat problemlerini modellemek için kullanılmaktadır. Bu denklemlerin mühendislik ve fizik alanlarındaki kritik rolü göz önüne alındığında, bu denklemleri çözebilen her yeni matematiksel metodun, bu alanların gelişimine önemli katkılar sağladığı açıktır. Dolayısıyla gerçekleşen her türlü ilerleme, birçok sürecin daha etkili ve verimli hale gelmesine yardımcı olmaktadır (Kuzulugil 2022).

Kısmi diferansiyel denklemler içerisinde yer alan bilinmeyen bir u fonksiyonu için, çok sayıda bağımsız değişkenle ilişkilidir (örneğin; x koordinatlarındaki ve sıcaklık değişimini t anında gösteren $u(x, t)$ gibi).

Örneğin, $u_t = u_{xx}$ kısmi diferansiyel denkleminde, bilinmeyen fonksiyonun $u(x, t)$ şeklinde olduğu ve u 'nun x ve t gibi iki bağımsız değişkene bağlıdır ve bu denklemlerdeki türevler, hız, ivme, kuvvet gibi çeşitli kavramları temsil etmektedir. Bizim buradaki amacımız denklemdeki bilinmeyen u fonksiyonunu bulmaktır.

Genel olarak, iki değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem $u = u(x, y)$ olmak üzere,

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0; \quad (1.1)$$

formuna sahiptir. Sorunumuz, bu denklemin nasıl çözüleceği ile ilgilidir (Akkaya 2000).

Denklemleri çözmenin birçok yöntemi bulunmaktadır. Hepsinin temelinde problemi anlamak ve basit hale ayırklaştırmak vardır. Pratikte halen çözümü bulunamamış pek çok problemin teoride kısmi diferansiyel denklemler aracılığıyla çözüldüğü görünmektedir. Çözüm aşamalarını, çözümün yapısını anlamayı hedefleyen teorik gelişmeler izler. Genelde, denklemlerimiz bir fiziksel model veya problemten oluşmaktadır. Bilgisayarlarla bile çözülemeyen denklemler için yapabilecek tek şey çözüm hakkında nitel bilgi edinmektir. Bundan ötürü, denklemin çözümüne başlamadan

önce veya çözüm aşamasında detaylı bir analiz yapılması oldukça önem taşımaktadır (Pinchover and Rubinsten'in 2005).

20. yüzyıldan itibaren, bilgisayar teknolojilerinin gelişmesiyle birlikte, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalar, birçok yeni bağımsız araştırma alanı doğurmuştur. Bunlardan birisi de bu denklemlerin sayısal (nümerik) ve sembolik olarak hesaplandığı bir alandır (Maghsoudi 2019). Bizim de faydalanacağımız alan burası olacaktır.

Yapılan bu çalışmada; konvektif katsayılı zamana bağlı sönümlemeli konveksiyon difüzyon reaksiyon denklemi, sayısal hesaplamalar kullanılarak formülasyonu elde edilip (sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemi ile) çözümü incelenecektir. Elde edilen formüller problem üzerinde test edilip sonuçları değerlendirilecektir.

Öncelikle problemi çözme aşamasında kullanacağımız sayısal yöntemlerimizi kısaca tanıyalım.

1.1. Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemi, analitik çözümü zor olan pek çok problem için kullanılan, geniş uygulama sahasına sahiptir. Çoğunlukla pratik amaçlarla tatmin edici yaklaşık sonuçlar elde edilen nümerik bir yöntemdir (Ergün 2001). Yöntemin temel prensibi, problemdeki bağımlı değişkenlerin ve türevlerinin belirlenmiş ayrık noktalarda yaklaşık olarak temsil edilmesine dayanır. Genellikle, bu noktalar üçgen, dikdörtgen veya diğer ağ sistemlerinin düğüm noktaları olarak belirlenir. Bu yöntemde, çözüm alanı x yönünde h uzunluğunda ve t yönünde k uzunluğunda hücrelerle bölünmüş dikdörtgensel bölgelere ayrılır. Bu sayede, çözüm bölgesi ızgaralı bir yapıya bölünür. Yaklaşık çözüm, bu düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri ile hesaplandığı için h ve k 'nın doğru seçimi kritik önem taşır. h ve k ne kadar küçük olursa, elde edilen sonuçlar analitik çözüme o kadar yakınsamış olur. Daha sonra kısmi diferansiyel denklemlerdeki türevler, Taylor serisi kullanılarak elde edilen sonlu fark yaklaşımları ile değiştirilir. Sonuç olarak, KDD

çözümü; sonlu fark denklemlerinden oluşan cebirsel bir denklem sisteminin çözümüne dönüştürülür (Fırat 2015).

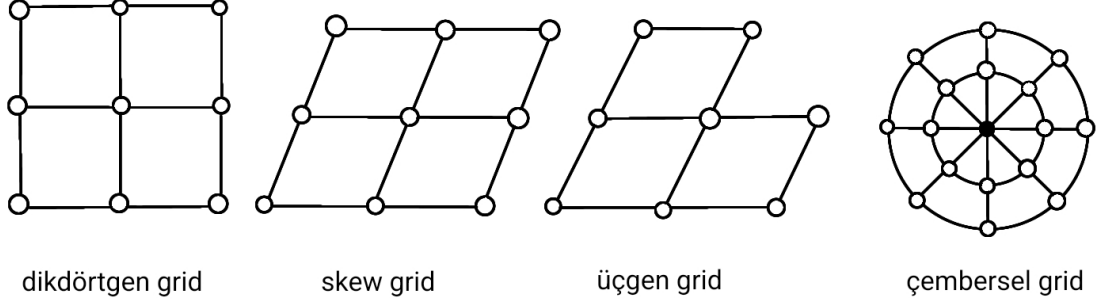
Fizik ve Matematikteki problemler genellikle bir veya birden fazla değişken içeren sürekli fonksiyonlar olarak ortaya çıkmaktadır. Bu durum, sayısal çözümlemede de aynı şekilde geçerlidir. Bu fonksiyonlar genellikle kapalı bir formülle tanımlanır ve bağımsız değişkenin belirli değerleri için bir sonuç sağlarlar. Başka bir deyişle, fonksiyon bağımsız değişkenin her değeri için bir çıktı üretir. Ancak, bazen bir fonksiyonun kapalı bir formülle ifade edilmediği durumlarda olabilir. Bu durumda, fonksiyonun yalnızca eşit aralıklı ayırık noktalardaki belirli değerleri bilinebilir. Ayırık noktalar arasındaki bir değer için fonksiyonel değeri bulma da sonlu farklar yöntemine başvurulduğundan sonlu farklar yöntemi sıklıkla kullanılmaktadır. Hatta bazı durumlarda, problem analitik olarak çözülebilir olmasına rağmen, sonlu farklar kullanılarak problemin daha basit bir hale getirilebildiği gözlemlenmiştir (Özkul 1992).

Sonlu farklar yöntemleri, diferansiyel denklemleri sonlu fark denklemleriyle yer değiştirmeye olanak tanıyan ve tahminlere dayalı bir yaklaşımı ifade eder. Bu sonlu fark tahminleri sayısal olarak ifade edilir; çözüm alanındaki bir noktadaki bağımlı değişkenin değerini, bazı yakın noktalardaki değerlerle ilişkilendirirler. Böylelikle, sonlu fark çözümü temel olarak üç adımdan oluşur.

1. İlki, alanı düğüm noktalarından meydana gelen gridlere bölünür.
2. İkincisi, verilen diferansiyel denklemi, çözüm alanındaki bir noktadaki bağımlı değişkeni yakın noktalardaki değerlerle ilişkilendiren sonlu farklar denklemiyle yaklaşık olarak hesaplanır.
3. Son olarak, sınır şartlarına veya başlangıç koşullarına bağlı olarak fark denklemleri çözülür.

1. GİRİŞ

Çözümün nasıl gerçekleştirileceği, ele alınan problemin özelliği, çözüm alanı ve sınır koşullarına göre belirlenmektedir. İki boyutlu problemler için genellikle en yaygın olarak kullanılan gridleme türleri Şekil 1.1'de gösterilmiştir.



Şekil 1.1. En genel 2-B problemlerde yaygın olarak kullanılan gridler

Şimdi, bir diferansiyel denklem verildiği zaman sonlu fark tahminlerinin nasıl hesaplandığına bakalım. Bu, aslında türevleri nümerik yani sayısal olarak tahmini hesaplamayı içerir.

Şekil 1.2' de gösterilen bir $f(x)$ fonksiyonunun P noktasındaki türevini veya eğimini bulmak için kullanılan, ileri-fark denkleminin formülünü veren $\widehat{PB}$ eğimi ile,

$$f'(x) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

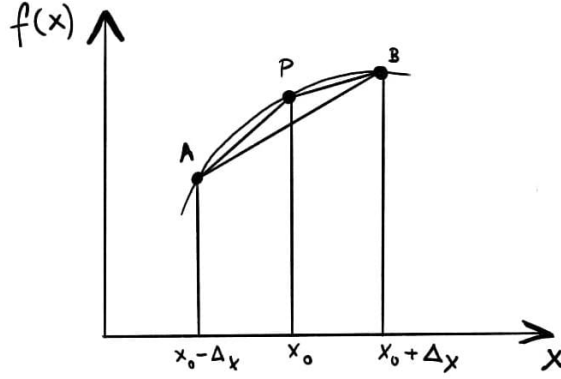
ya da geri-fark denkleminin formülünü veren $\widehat{AP}$ eğimi ile,

$$f'(x) \cong \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.3)$$

ve merkezi- fark formülü denklemini ile sonuçlanan $\widehat{AB}$ eğimi ile,

$$f'(x) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.4)$$

yaklaşık olarak hesaplayabiliriz.



Şekil 1.2. İleri, geri ve merkezi fark denklemleri kullanarak P noktasındaki $f(x)$ 'in türevi için kullanılan şematik A ve B noktaları (Koçaslan 2008).

Bir türevin yaklaşık olarak hesaplanması demek aslında sonlu fark hesabı olarak adlandırılır. Daha genel bir yaklaşım ifadesi için Taylor serileri kullanılmaktadır. Merkezi Farklar Yönteminde hata bağıntısı, diğer iki yöntemle göre kıyaslanırsa daha da küçük olduğu görülür. Türev açılımında istenilen hatayı elde etmek için daha fazla nokta kullanılabilir, ancak bu durumda bilgisayardaki hesaplama süresi ve bellek ihtiyacı artacaktır. Daha yüksek mertebeden sonlu fark yaklaşık hesaplaması, Taylor serisi açılımında daha fazla terim almayı gerektirir. Şayet sonsuz bir Taylor serisi alınsaydı, problem için tam bir çözüm olduğu tespit edilirdi. Ancak pratiklik açısından, sonsuz seri genellikle ikinci mertebeden sonra kesilir. Bu, tüm sonlu fark çözümlerinde bulunan bir hatayı gösterir (Koçaslan 2008).

1.2. Sonlu Farklar Yöntemi Tarihsel Gelişim

Gauss'un (1777 – 1855) zamanına kadar uzanan, zaman bağımlı problemlerin çözümünde kullanılmaya başlanılan sonlu fark yöntemlerindeki kayda değer ilerlemeler, İkinci Dünya Savaşı'nın hemen sonrasında gerçekleşmiştir. Bu dönemde, büyük ölçekli uygulamaların bilgisayar desteği ile mümkün kılınması bu ilerlemenin temelini oluşturmuştur.

Matematiksel fizik problemlerinin sayısal çözümünde kullanılan sonlu farklar yöntemi (finite-difference method), Courant, Friedrichs ve Lewy tarafından ilk olarak 1928 tarihli bir çalışmada tanıtılmıştır. Bu çalışmada, Laplace denkleminin yaklaşık

çözümleri beş nokta yaklaşımı ile tanımlanmış ve çözümlerin ağ genişliği sıfıra yaklaşırken yakınsaması ispatlanmıştır. 1930 yılında Gerschgorin, eliptik problemleri sonlu farklar yaklaşımı yardımı ile analiz etmiş ve hata sınırlarını türetmiştir. FDM, Bramble, Motzkin, Collatz, Wasow, ve Hubbard gibi araştırmacılar tarafından 1960'lara dek yoğun bir şekilde araştırılmıştır. 1940'lar ve 1950'lerde, Von Neumann ve diğer bilim insanlarının çalışmaları, zamanla değişen problemlerin çözümünde sonlu farklar yönteminin daha da gelişmesine öncülük etmiştir. 1950 ve 1960'lı yıllarda doğrusal olmayan korunum yasaları ve hiperbolik türdeki denklemler için sonlu farklar yöntemi bu dönemde gelişimini sürdürmeye devam etmiştir. Crank ve Nicolson (1947) yaptıkları şemayla sonlu farklar yöntemini birleştirmişlerdir (Thomée 2001).

Günümüzde, özellikle son kırk yılda her alanda karşılaşılan problemlerin artan karmaşıklığı, boyutları hızla ve ekonomik bir şekilde çözülmesi gerekliliği, elektronik hesaplama araçlarının gelişimine paralel olarak sayısal çözüm yöntemlerinin de ilerlemesine katkı sağlamıştır. Analitik olarak çözümleri zor olan pek çok problem, sayısal yöntemlerle hesaplamalar yapılarak çözülebilmektedir.

1.3. Sonlu Fark Formüllerinin Taylor Serisinden Elde Edilişleri

Bir $u(x)$ fonksiyonun $(x + \Delta x)$ noktasındaki değerini Taylor Seri açılımı kullanarak yazalım.

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x) &= u(x) + (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \\ &= u(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Buradan birinci türev yalnız bırakılırsa,

1. GİRİŞ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (1.6)$$

ve ikinci türevden sonrasını hata terimi olarak $O(\Delta x)$ ile gösterirsek,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1.7)$$

şeklinde ileri fark formülasyonu elde edilir.

$u(x)$ fonksiyonu $(x - \Delta x)$ noktasında aşağıdaki gibi Taylor serisine açıldığı zaman,

$$u(x - \Delta x) = u(x) - (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (1.8)$$

benzer işlemler yapılarak,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1.9)$$

geri fark formülasyonu elde edilir.

Son olarak (1,5) ve (1,8) eşitlikleri birbirinden çıkartılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (1.10)$$

bulunur. Buradan da son terim hata terimi olarak alınır,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (1.11)$$

merkezi fark formülasyonu elde edilmiş olur (Fırat 2015).

Δx uzunluğunu ne kadar azaltırsak bu yaklaşık formül gerçek türeve o kadar yaklaşır.

1.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu başlıkta, mühendislik sorunları başta olmak üzere birçok fiziksel ve matematiksel sorunun çözümünde oldukça yaygın bir kullanıma ve öneme sahip olan Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile ilgili bilgiler verilecektir.

Çok sayıda problemin denklemleri analitik yollar ile çözülememektedir. Bu nedenle, yaklaşık çözümler elde etmek için nümerik metotlar geliştirilmiş ve kullanılmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminin temeli, 'parçadan bütüne gitme' genel prensibi üzerine inşa edilir. Sonlu farklar yöntemine göre daha etkili ve kullanım alanı oldukça geniş bir yöntemdir. Sonlu elemanlar yöntemi, iki veya üç boyutlu yapıların bir parçası veya bir bölgesidir (Güler ve Şen 2016).

Sonlu Elemanlar Yöntemi üç ana özelliği ile öne çıkmaktadır;

1. İlk önce şekil bakımından karmaşık olan çözüm alanımız, 'sonlu elemanlar' olarak adlandırılan geometrik olarak basit küçük bölgelere bölünür. Eleman adı verdiğimiz bu küçük bölgeler arasındaki ilişki, 'düğüm noktaları' olarak bilinen noktalar aracılığıyla kurulur.

2. Her bir elemandan elde edilen çözümler, cebirsel polinomların lineer kombinasyonları şeklinde ifade edilir ve bu çözümler elemanlar arasında sürekli fonksiyonlar olarak tanımlanır.

3. Son olarak, bilinmeyen fonksiyonlar ise, her elemanda tanımlı denklemlerin belirli noktalarda bulunan çözümleri kullanılarak elde edilir.

Genellikle kullanılan bu yaklaşım fonksiyonları, polinomlar arasından belirlenir. Bu polinomların derecesi, çözümü yapılacak problemdeki denklemin derecesine ve elemanda kullanılan ayırıklaştırma nokta sayısına bağlı olarak bulunur. Uyguladığımız bu yöntemle göre, her elemandaki bilinmeyenler, denklemin çözümünde ki ayırıklaştırma noktalarındaki değerler olarak ifade edilir (Topçu ve Taşgetiren 2011; Çiftçi 2012).

1.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihsel Gelişimi

1851’de Schellback, belirlenmiş bir kapalı eğri ile çevrili en küçük alanlı bir yüzeyin diferansiyel denklemini kurmak amacıyla yüzeyi birkaç üçgene bölmüş ve bu üçgenlerin toplam alanını hesaplamak için sonlu fark terimini kullanmıştır. Sonlu elemanlar yönteminde, bir diferansiyel denklem bir dizi cebirsel denklemlerle değiştirilerek çözülmeye çalışılır. 1900’lerin başında düzenli bir biçimde oluşturulmuş birkaç doğrudan oluşan yapısal çerçevelerin davranışı, bir cismin davranışıyla yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Eski Geometriciler ise, π ’nin yaklaşık değerini elde edebilmek, bir dairenin alanını ve çevresini hesaplayabilmek için sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Daire örneğinde, daireyi düzenli çokgenlere bölüp basitleştirilmiş problemi çözmek, sonlu elemanlar yönteminin temel bir özelliğini açıkça ortaya koymaktadır (Davies 2011). Bu yöntem ilk kez yapısal analizde kullanılmıştır ve bu alandaki ilk çalışmalar, Alexander Hrennikoff (1941) ve Henry (1943) tarafından geliştirilen yarı analitik analiz yöntemleridir. Alexander Hrennikoff ve Henry gerilme analizleri için tek boyutta doğru elemanlarını kullanmışlardır. Richard Courant (1943), gerilme çözümlerini varyasyonel bir formülasyonda yapma yöntemini sunmuş ve daha sonrasında, yaklaşık sayısal çözümler elde etmek amacıyla tüm alanı oluşturan alt üçgensel bölgelerde parçalı şekil fonksiyonları tanıtmıştır. Aynı yıl içerisinde Courant bir burulma problemini bölgesel sürekli doğrusal yaklaşımdan yararlanarak bir burulma problemini çözmüştür.

1947 yılında Levy, esnek (diğer adıyla kuvvet) yöntemini ileriye taşımış olsa da Levy’nin bu yöntemle elde ettiği denklemler el ile kolayca çözülebildiği için pek tercih

edilmemiştir. Ancak bilgisayar yazılımlarının yaygınlaşmasıyla Levy'nin geliştirdiği bu yöntem kullanılmaya başlanmıştır. 1954 yılında Argyis ve Kelsey, enerji prensibini ele alarak “matrix structural analysis” (matrislerin yapısal analizi) yöntemini geliştirmişlerdir. Bu gelişmeden dolayı, sonlu elemanlar yönteminde enerji prensibi etkili bir şekilde önem kazanmıştır. 1956’da, Turner ve diğerleri iki boyutlu elemanlar üzerinde çalışmışlardır. Bu çalışmalarda kafes eleman, kiriş eleman, iki boyutlu üçgen ve dikdörtgen elemanlar için eleman matrisini diğer adıyla rijitlik matrisini meydana getirmişlerdir. Mühendislikteki 'doğrudan benzetme' yaklaşımı esas alınarak 'sonlu eleman' terimi ortaya çıkmıştır (Huebner et al. 2001). Clough, bu terimi ilk kullanan kişi olup üçgen ve dikdörtgen elemanların düzlemsel gerilme analizinde uygulanmaya başladığında kullanmıştır. Metodun üç boyutlu problemlere uygulanmasının ardından iki boyutlu teoriye geçmek kolayca gerçekleşmiştir (Argyis 1964). 1961’de Melosh, düzgün eğilme özelliğine sahip dikdörtgen plaka elemanlarının matrisini geliştirmiştir. Bu plakalar, üç boyutlu yapısal analizlerde kullanılan ilk gerçek eksenel ve simetrik kabuk elemanlarıdır (Grafton and Strome 1963).

1960’lı yıllar da pek çok bilim insanı doğrusal olmayan problemlerle ilgilenmeye başlamıştır. Geometrik olarak doğrusal olmayan bu problemleri çözebilmek için yeni bir yöntem geliştirmişlerdir (Turner et al. 1960). 1965 yılında Martin sonlu elemanlar yöntemini kullanarak ilk defa kararlılık analizi üzerinde çalışmıştır. İlerleyen yıllarda sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak statik problemler ile beraber dinamik problemler üzerinde de çalışmalar yapılmaya başlanmıştır (Koenig and Davids 1966; Zienkiewicz et al. 1966).

Mühendislikte sıklıkla kullanılan poisson diferensiyel denklemini Olgierd Zienkiewicz ve Cheung (1965) sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözmüştür. Doctors(1970) da, potansiyel akış analizine sonlu elemanlar metodunu uygulamıştır. Sonlu elemanlar yönteminde çoğunlukla kullanılan “varyasyonel formülasyon” terimi ilk kez Melosh (1963) tarafından, “ağırlıklı rezidü yöntemi” nin sonlu elemanlar yönteminde kullanılması ise ilk kez Szabo ve Lee (1969) tarafından gerçekleştirilmiştir. Sonlu elemanlar tekniği, tıp alanları, ısı transferi, yeraltı sularının akışları, nükleer santral, manyetik alanlar ve daha birçok alandaki problemleri çözmek için geliştirilmiş ve kullanılmıştır (Logan 2010; Çiftçi 2012).

SEY günümüz sanayi uygulamalarında da yaygın olarak kullanıldığı görünmektedir. Sonlu elemanlar yöntemini kullanan endüstriyel kullanıcılar için IDEAS, FIDAP, SAMCEF, NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, MARC, ADINA, LSDYNA, ASTER ve CASTEM gibi bilgisayar kodları da bulunmaktadır (Dhatt 2012). Sonlu elemanlar metodunun hızlı ilerleyişini, yıl da yaklaşık olarak 3800 makale yayımlandığını gözlemleyerek anlamak mümkündür.

1995'den itibaren binlerce makale, yüzlerce kitap ve konferans bildirisi yayımlanmıştır. Tüm bu ilerlemeler neticesinde sonlu elemanlar yöntemi bugün, mühendisler ve uygulamalı bilim insanları tarafından iyi kurulmuş ve kullanışlı analiz araçlarından biri olarak kabul görmektedir (Rao 2017).

1.6. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Olayı

Kimyasal potansiyel farkının olduğu bir bölgede, moleküllerin bir alandan başka bir alana geçişine kütle transferi denir. Kütle aktarımı, derişim farklarının olduğu bir ortamda moleküler (difüzyon) veya konveksiyon ile meydana gelir (Bucholz 2015).

Bir ortamda ısı enerjisinin artmasıyla sıcaklık yükselir ve sıcaklık artışının olduğu alanlarda hacimsel genleşme meydana gelir. Bu genleşme, maddenin ortalama yoğunluğunun düşmesine neden olur. Ortamda, ortalama yoğunluğu azalan madde yükselir ve yerini daha soğuk, dolayısıyla yoğunluğu daha yüksek olan madde alır. Isı alan madde yükseldikçe ısını kaybeder ve yoğunluğu artar. Artan yoğunluktan dolayı, madde çekim kuvveti altında aşağıya çekilir. Bu süreç sırasında yükselen maddenin yerini alan daha soğuk madde ısınmaya başlar ve bu döngü bu şekilde tekrar eder. Isı enerjisinin bu şekildeki yer değiştirme hareketine konveksiyon adı verilir (Sanver 1983).

Difüzyon, moleküllerin rastgele hareketlerle bir yerden başka bir yere geçmesi olarak açıklanır; yani moleküllerin tekil hareketleri aracılığıyla gerçekleşen kütle taşınımı, moleküler (difüzyon) taşınım olarak adlandırılır. Maddenin her tür hali içinde farklı özellikler ve hızlarla gerçekleşebilir. Difüzyonun temel ilkesi, yoğunluğu yüksek olan bir ortamdan yoğunluğu daha düşük bir alana maddenin kendiliğinden yayılımıdır (İnce 2001). Örnek olarak; bir bardak çaya atılan şekerin karıştırılmasa bile zamanla çayın

tamamında eşit şekilde dağılması veya bir odaya sıkılan parfümün kokusunun zamanla kendiliğinden odaya yayılması verilebilir. Difüzyon, maddelerin daha yüksek konsantrasyonlu bölgelerden daha düşük konsantrasyonlu bölgelere, ya da bunun tersine, hareketini sağlayarak maddelerin homojen bir şekilde yayılmasını ve reaksiyona girmesini destekler. Bu durum, Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon (CDR) modeli ile matematiksel olarak tanımlanır; bu model, bir maddenin konsantrasyonunun zamanla nasıl değiştiğini gösteren önemli bir modeldir (Lima et al. 2021).

1.7. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemleri

Denklemlerin gelişimi, matematiksel fizik ve mühendislik uygulamalarındaki ilerlemelerle paralel olarak şekillenmiştir. Bu denklemler, akışkanların ve ısı transferinin karmaşık davranışlarını anlamak ve modellenmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon problemleri üzerine sayısal metotlarının gelişimi, yaklaşık 30 yıl öncesine, 1969 yılına kadar dayanmaktadır. O yıl, konveksiyon-difüzyon ODE'lerini ele alan yeni sayısal yöntemler analiz eden iki önemli Rus çalışması yayınlanmıştır (Stynes 2013).

Bakhvalov, katmanlara uyarlanmış kademeli bir ağ üzerindeki bir fark şemasını ele almıştır. Bu kafeslerin logaritmik bir ölçeğe dayandığı gözlemlenmiştir. Sınır katmanının içinde çok ince ve dışında daha kabaca yapılandırılmış ve kafesin ince yapısı, eklenen yapay difüzyonun katman içinde çok küçük olmasını sağlamıştır. Bu yüzden, katman aşırı bir şekilde dağılmamıştır. Sonraki 20 yıl boyunca birçok ülkeden araştırmacılar, şemalar geliştirmeye başlamışlardır (Bakhvalov 1969). Diğer çalışmada ise; konveksiyon-difüzyon denklemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerin teorik temellerini ve bu yöntemlerin pratikteki uygulanabilirliğini, küçük parametreler ve ağ adım boyutları dikkate alınarak, kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (II'in 1969). Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin kararsız halini çözmek için geliştirilmiş spektral Galerkin yöntemini temel alan açık bir sayısal algoritma sunmaktır (Zhong et al. 2018).

CDR denklemi, konveksiyonu (ilk terim) ve difüzyonu (ikinci terim) içeren iki temel süreci birleştirmektedir. Bu denklem, çeşitli bilim ve mühendislik alanlarında,

özellikle de akışkanlar dinamiği, ısı transferi, kütle transferi gibi konularda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bilimde ve günlük yaşantımızda, konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri, yararlı, etkili ve hayati bir matematiksel modelleme sağlar (Lima et al. 2021). Bu denklemler, iyon transferinde, yakıt hücrelerinde (Asinari et al. 2007; Suzue et al. 2008), ve gözenekli alanlarda yüzey reaksiyonları gibi mühendislik çalışmalarında, kütle ve konsantrasyon gibi skaler niceliklerin gelişimini tanımlamak için geniş bir şekilde kullanılmaktadır (Wang et al. 2007; Willingham et al. 2008). Ayrıca aşağıda verilen alanlarda da uygulanan bir denklem türüdür (Lima et al. 2021).

- Havacılık
- Nötron difüzyonu
- Yakıt hücreleri
- Isı iletimi
- Gıda sektörü
- Yarı iletkenlerin ve biyolojik sistemlerin modellenmesi
- Kimyasal olayların reaksiyonu
- Lineer olmayan akustik ve akışkanlar mekaniği
- Atmosfer, malzeme ve deniz bilimleri

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri genellikle karmaşık ve doğrusal olmaması nedeni ile çoğunlukla sayısal yöntemlerle çözülmelidir. Bu denklemlerin ayrıklaştırılmış bir versiyonunu da çözmek için çeşitli sayısal algoritmalar incelenmiştir (Eisenstat et al. 1979). Bu denklemler için sıklıkla kullanılan geleneksel sayısal teknikler, sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, spektral yöntemler ve benzerleri

yöntemler bulunmaktadır (Baliga et al. 1980; Izadkhah et al. 2015; Morton et al. 2019; Xie et al. 2021).

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi, Ω tanım bölgesi üzerinde Dirichlet sınır koşulları altında, u skaler değerli bir fonksiyon, $(0, T]$ sınırında tanımlanan ε difüzyon katsayısı, $\sigma(x)$ reaksiyon katsayısı, $\overrightarrow{h(x)}$ stabil veya stabil olmayan taşınım katsayısı olursa, zaman bağılı olmayan konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemini şu şekilde yazabiliriz;

$$-\varepsilon \Delta u + \overrightarrow{h(t)} \nabla u + \sigma u = f \quad (1.12)$$

$\sigma(t, x, y)$ reaksiyon katsayısı, $\overrightarrow{h(t)}$ zaman bağımlı taşınım katsayısı olsun. Bu durumda zaman bağımlı konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemini şu şekilde yazabiliriz;

$$u_t - \varepsilon \Delta u + \overrightarrow{h(t)} \nabla u + \sigma u = f \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.13)$$

Burada $u(t, x, y)$ bu denklemin aranan bir çözümüdür. Verilen problemin iyi tanımlanmış olması için sınır koşulları; Dirichlet tipi ($u = \bar{u}$), Neymann tipi $\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$, α ve μ sabit katsayılar ise; karmaşık tipi ($\alpha u + \mu \frac{\partial u}{\partial n} = h$) olarak tercih edebiliriz. Burada $\bar{u}$, $\bar{q}$ ve h fonksiyondur.

1.8. Sönümlemeli Dalga Tür Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi

Literatür de pek çok konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleriyle ilgili çalışmalar bulunmaktadır. Dalga türündeki konveksiyon difüzyon denklemleri ile ilgili çalışmalarda mevcuttur. (Wang 2015), değişken katsayılı konveksiyon-difüzyon-dalga denklemleri için sonlu farklar yöntemini kullanarak çalışma yapmıştır. John (2008), makalesinde küçük difüzyonlu zamana bağılı konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri için sonlu elemanlar yöntemlerini kullanarak çalışma yapmıştır. Fakat bu iki

denklemin birleştirildiği bir çalışma olmadığı görünmektedir. Bu yüzden çalışmamız, literatürde üzerine makale ya da tez yazılmamış olmasından dolayı özgünlük kazanmıştır.

Yapısı bakımından kompleks ama işlev bakımından oldukça faydalı olan sönümlü dalga denklemi, dalga denkleminin bir formudur. Genellikle fizik ve mühendislikte karşılaşılan dalgaların zaman içinde nasıl azaldığını veya sönümlendiğini modellemek için kullanılmaktadır. Bu denklem, dalga formunun zamanla nasıl değiştiğini ve enerjinin nasıl dağıldığını matematiksel olarak ifade eder. Hareketli alanlarda sönümlü dalga denklemi, dışsal ya da içsel bir sönümleme mekanizması nedeniyle zamanla genliği azalan dalgaların davranışını tanımlamasından ötürü özellikle mekanik, elektrik ve akustik sistemlerde sönümlemenin salınımları kontrol etmede oynadığı kritik rolü anlamak için fizik ve mühendislikte temel bir kavram haline gelmiştir. Sönümlü dalga denkleminin en yaygın formu,

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) + \gamma u_t(t, x) = f(t, x) \quad (1.14)$$

şeklinde ifade edilebilir (Cannarsa et al. 1990).

Burada;

$u(t, x)$, zamana ve uzaya bağlı dalga fonksiyonudur.

u_{tt} , fonksiyonun zamana göre ikinci türevidir, dalga fonksiyonunun ivmesini ifade eder.

γu_t sönümleme terimidir. γ pozitif bir sönümleme katsayısıdır ve bu terim, sistemdeki enerji kaybını modellemek için kullanılır. u_t , fonksiyonunun zamana göre türevidir ve dalga fonksiyonunun değişim hızını göstermektedir.

$\Delta u(t, x)$, Laplace operatörünü ifade eder.

1. GİRİŞ

f fonksiyonu ise dış kuvvet veya kaynak terimidir ve sisteme enerji ekleyebilir veya çıkarabilir.

Sönümlemeli dalga tür Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi ise;

$$\frac{1}{\tau^2} u_{tt} + \gamma u_t - \varepsilon \Delta u + \overline{h(t)} \nabla u + u = f(x, y) \quad u = u(t, x, y) \quad (1.15)$$

$$u(0, x, y) = u_0(t, x, y)$$

$$u(t, \partial\Omega) = u_1(t, x, y) \quad (1.16)$$

$$u_t(0, x, y) = u_2(x, y)$$

Verilen denkleme göre, $\overline{h(t)}$ terimi konvektif katsayıyı temsil etmektedir. Bu terim, genellikle zamana bağlı olarak değişebilen ve çevreyle etkileşimde bulunan bir katsayıdır. Denklemin içerisinde $\overline{h(t)} \nabla u$ şeklinde görülmekte ve $\overline{h(t)}$ bu gradyanın etkisini modifiye eden zamana bağlı bir katsayı olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu denklemde sonlu fark ve sonlu eleman yöntemi kullanılarak, gelişmiş bir matematiksel model ele alınmıştır. 2 boyutlu sönümlemeli dalga tür konveksiyon-difüzyon denkleminin uzay değişkenini ayırklaştırmak için sonlu eleman yöntemi, zaman değişkeninin ayırklaştırılması için ise sonlu fark yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemin uygulanması, sönümlü dalga tipi denklemlerin hesaplama verimliliğini artırır. Bu denklem, özellikle mühendislik ve uygulamalı fizik alanlarında üç büyük denklemlerin ilerlemesine katkı sağlayacak ve dalga denklemlerinin çözümlerinde yerini alacaktır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Konveksiyon-difüzyon problemlerini çözmek için geliştirilmiş genel bir sayısal yöntem tanıtılmaktadır. Bu yöntem özellikle iki boyutlu problemler için tasarlanmış olup, ancak temel prensipleri üç boyutlu problemlere de uygulanabilir. İlk olarak, hesaplama alanı üç düğümlü üçgen elemanlara bölünür, sonrasında bu elemanların merkezi ve kenarlarının orta noktaları birleştirilerek çokgen kontrol hacimleri oluşturulur. Her elemanda, bağımlı değişkenler elemanın ortalama hız vektörü doğrultusunda üstel ve bu doğrultuda dik olarak lineer şekilde enterpolasyon yapılır. Enterpolasyon fonksiyonları, elemanın Peclet sayısına göre tepki verir ve değerler sifıra yaklaştıkça lineerleşir. Ayırıklaştırma denklemleri, çokgen kontrol hacimlerine uygulanan integral koruma denklemleri üzerinden cebirsel metotlarla türetilir (Baliga et al. 1980).

Bu çalışma kapsamında öncelikle, konveksiyon-difüzyon denkleminin sabit difüzyon katsayısı ile bir ve iki boyutlu uzaylarda nasıl formüle edileceği sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak formülize edilmiştir. Ardından, bu formülasyonlar değişken difüzyon katsayılı denklemlere uyarlanmıştır. En son olarak, bir ve iki boyutlu uzaylardaki örnek problemlerde bu formülasyonlar test edilmiş ve elde edilen sonuçlar analiz edilmiştir (Çiftçi 2012).

Bu makale, eğimli sınırlar üzerinde konveksiyon-difüzyon denklemleri için Robin sınır koşullarını uygulayan kafes Boltzmann yöntemine yönelik sınır şemalarını ele almaktadır. Mevcut sınır şemaları genellikle, paydanın sifıra eşit olma ihtimali sebebiyle sayısal kararsızlıklara açık olabilir. Bu olasılığı önlemek amacıyla, Robin sınır koşulunu ve sınırın hemen yanında bulunan iç noktada gradyanı, sınırdaki ilerleyen ayırık hız boyunca gradyanı tahmin ederek dikkate alacak yeni bir sınır şeması önerilmektedir (Xie et al. 2021).

Wang et al. (2007) bu araştırmada, mikro ölçekteki rastgele gözenekli yapılar için etkili termal iletkenliklerin hesaplanması amacıyla bir mezoskopik sayısal model geliştirilmiştir. Karmaşık çok fazlı gözenekli geometrilerde enerji taşınım denkleminin çözülmesi için, farklı fazlar arası karmaşık ısı transferini yönetebilen bir lattice Boltzmann algoritması sunulmuştur. Seçilen sınır koşulları ile bu algoritma, basit

senaryolar üzerinden teorik çözümler ve mevcut deneysel verilerle karşılaştırılarak ilk etapta doğrulanmıştır.

Bu araştırma, Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon (CDR) denklemlerinin sayısal çözümlerini üretmek amacıyla Sonlu Elemanlar Metodu'nu (FEM) kullanmaktadır. Araştırma, özellikle doğrusal olmayan parabolik kısmi denklemlerin yakınsaklık ve kararlılık analizine odaklanmıştır. Bu yöntem, doğrusal olmayan terimlerin kesilmesinden ve kısıtlayıcı varsayımlardan kaçınarak uygulanır. Çalışmanın ana hedefleri arasında düzenli ve düzensiz geometrik şekiller bulunmaktadır (Lima et al. 2021).

Cannarsa et al. (1990) tarafından yazılmış olup, hareketli bir bölgedeki sönümlü dalga denkleminin matematiksel zorluklarını araştırmaktadır. 1990 yılında "Journal of Differential Equations" dergisinde yayımlanan bu çalışma, dinamik geometrik koşullarda denklemin dönüştürülmesi ve analiz edilmesi için yenilikçi bir metodoloji sunmayı amaçlamaktadır.

Uğurlu (2007) bu çalışmada, iki irisli paralel levhali dalga kılavuzunun çeşitli frekanslarda nasıl iletim ve yansıma katsayıları gösterdiği incelenmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde Sonlu Elemanlar Metodu'nun (Finite Element Method) işleyiş adımları detaylandırılmış, bir örnek problem seçilerek çözüm süreci adım adım anlatılmış ve MATLAB kodları kullanılarak problemin çözümü tamamlanmıştır.

Davies (2011), yazmış olduğu kitapta kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen sınır ve başlangıç değeri problemlerinin çözümü için sonlu elemanlar metodunun kullanılmasını içerir. Metod, öncelikle Poisson denkleminin çözümü için ağırlıklı artık yaklaşımı temel alınarak geliştirilmiş, sonrasında zaman bağımlı ve doğrusal olmayan problemlere adapte edilmiştir. Ayrıca, metodun varyasyonel yaklaşımla olan ilişkisi de detaylı bir şekilde açıklanmaktadır.

Caputo zamansal türevini barındıran ve değişken katsayılı zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri ele alınmaktadır. Zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemin zamansal çözümünü yaklaşık olarak elde etmek için Gegenbauer

polinomları temel alınan bir spektral yöntem ve uzayda bir yerleştirme yöntemi kullanılmıştır. Önerilen bu yöntem, söz konusu denklemi bir lineer cebirsel sistem çözümüne dönüştürür. Ayrıca, önerilen metodun etkinliğini ve doğruluğunu göstermek amacıyla çeşitli sayısal örnekler sunulmuştur (Izadkhah 2015).

Bu çalışmada, Bakhvalov tipi ağlar kullanılarak konveksiyon-difüzyon denkleminin lineer sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü gerçekleştirilmiştir. Çözüm sürecinde, Bakhvalov tipi ağlar üzerinde ilk defa aşırı yakınlık sonucuna ulaşılmıştır (Zhang and Liu 2021).

Makine mühendisliği alanlarında, özellikle akışkanlar dinamiği ve yapısal analiz gibi konularda problem çözme amacıyla sonlu elemanlar yöntemini incelemektedir. Sonlu elemanlar yöntemi, çözüm teknikleri açısından sonlu farklar yöntemiyle birçok benzerlik taşımaktadır. Her iki yöntem de benzer fiziksel problemleri çözmek için kullanılır ve çözümleri genellikle $Ax = b$ şeklinde bir matris-vektör denkleminin çözülmesiyle sonuçlanır (Nagel 2012).

Bu makale, katı oksit yakıt hücreleri (SOFC) için performans tahmini yapabilen matematiksel modellerin nasıl anlaşılacağına ve geliştirileceğine dair bilgiler sunmaktadır (Asinari 2007).

Çiftçi (2012) yapmış olduğu araştırmada, başlangıçta konveksiyon-difüzyon denkleminin sabit difüzyon katsayısı ile bir ve iki boyutlu uzaylardaki çözümleri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak formüle edilmiştir. Ardından, bu formülasyonlar değişken difüzyon katsayılı denklemlere uyarlanmıştır. Son aşamada ise, geliştirilen formülasyonlar bir ve iki boyutlu uzaylardaki örnek problemler üzerinde test edilerek sonuçlar değerlendirilmiştir.

Kitabın birinci bölümü, metodun temel kavramlarını matematiğe girmeden ve tarihsel arka planıyla birlikte sunan bir giriş bölümü (Bölüm 1) ile başlamaktadır. Takip eden üç bölüm (Bölümler 2-4), fiziksel düşüncelerden yola çıkarak sonlu elemanların matematiksel formülasyonlarını, sağlam bir şekilde oturtulmuş varyasyonel yaklaşımı ve

ardından daha geniş kapsamlı ağırlıklı artıklar metodunu ele alarak açıklamaktadır (Huebner 2001).



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Sonlu Farklar/Sonlu Elemanlar Sayısal Yönteminin Sönümlemeli Dalga Tür Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Problemine Uygulanması

SEY, en etkin sayısal yöntemler arasında yer alır. Bu yöntem, diferansiyel denklemlerin sınırlı sayıdaki ağ noktalarına detaylı bir şekilde ayrıştırılması ve sonrasında çözümün elde edilmesiyle bilinir (Lima et al. 2021). Problemin zaman değişkeninin ayrıklaştırması için sonlu farklar metodunun kullanıldığı sönümlemeli dalga tür konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerinin sayısal çözümü için Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak bir formülasyon geliştirilecektir.

3.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları

- SEY, karmaşık olan geometrilerin incelenmesinde kolaylık sağlar. Çözüm bölgesi alt bölgelere bölündükten sonra bölgenin yapısına uygun olarak farklı sonlu elemanlar kullanılabilir.
- Değişken, sürekli ya da süreksiz etkileri de inceleneme fırsatı sunar.
- Mühendislik perspektifiyle inceleme yapıldığında, değişken ve karmaşık malzeme özelliklerine sahip sistemler üzerine kolayca uygulanabilir.
- Sistem için temel denklemler kurulduktan sonra, sınır şartları oldukça basit bir işlemle bu denklemlere entegre edilebilir. Bu, SEY'in en dikkate değer özelliklerinden biridir.
- İsteğe göre bazı alanlarda daha detaylı ve hassas hesaplamalar yapılabilir.
- Yöntem matematiksel olarak genişletilebildiğinden dolayı bu özelliği sayesinde çok çeşitli problemleri çözmek için etkili ve çok yönlü bir araç olarak işlev görebilir (Logan 2016).

Bu özellikleriyle SEY, diğer sayısal metotlara kıyasla daha esnek ve pratik olduğundan çokça tercih edilen bir yöntem olmuştur.

3.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Dezavantajları

- Teknolojik olarak gelişmiş bilgisayarların kullanımına ihtiyaç duyar.
- Sonuç, kullanılan verilerin doğruluğuyla doğru orantılıdır.
- Doğru ve en yakın sonuçlara ulaşabilmek için alanın ayrıklaştırılması tecrübe gerektirir.
- Diğer metotlar da olduğu gibi, SEY ile elde edilen sonucun doğruluğuna özen gösterilmeli ve fiziksel problem detaylıca analiz edilmelidir. Elde edilecek sonuç önceden tahmin edilmeli ve buna göre şekillendirilmelidir (Yahnioğlu 2012).

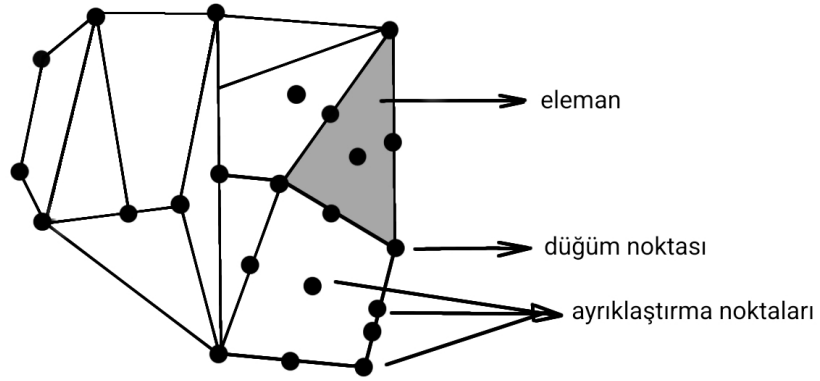
3.4. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Bu başlık altında, diferansiyel denklemlere Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin uygulanışı, aşağıda belirtilen aşamadakiler gibi incelenecektir (Reddy 2005).

1. Çözüm, alanı sonlu elemanlara ayırarak başlanır.
2. Zayıf veya ağırlıklı integral formülleri oluşturulur.
3. Uygun şekil fonksiyonları seçilir.
4. Zayıf formu kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi güçlendirilir.
5. Alt eleman matrisinden alınan denklemler ana matrise entegre edilir.
6. Çözüm alanına sınır şartları uygulanır.
7. Son olarak oluşan cebirsel denklem sistemi çözülerek yöntem uygulanmış olur.

3.4.1. Elemanlar

Sonlu elemanlar yöntemi uygulanırken problemin tanım bölgesi, ayrıklaştırma işlemi sırasında eleman olarak adlandırdığımız daha basit alt bölgelere ayrılır. Bu elemanları birbirlerine bağlanarak oluşturduğu noktalara düğüm noktası (node) denir. Bu noktaların dışında yani elemanın içerisindeki bölgede ya da kenarları üzerinde de noktalar seçilebilir. Tüm bu noktaların hepsine ayrıklaştırma noktaları adı verilir (Selvitopi 2016).

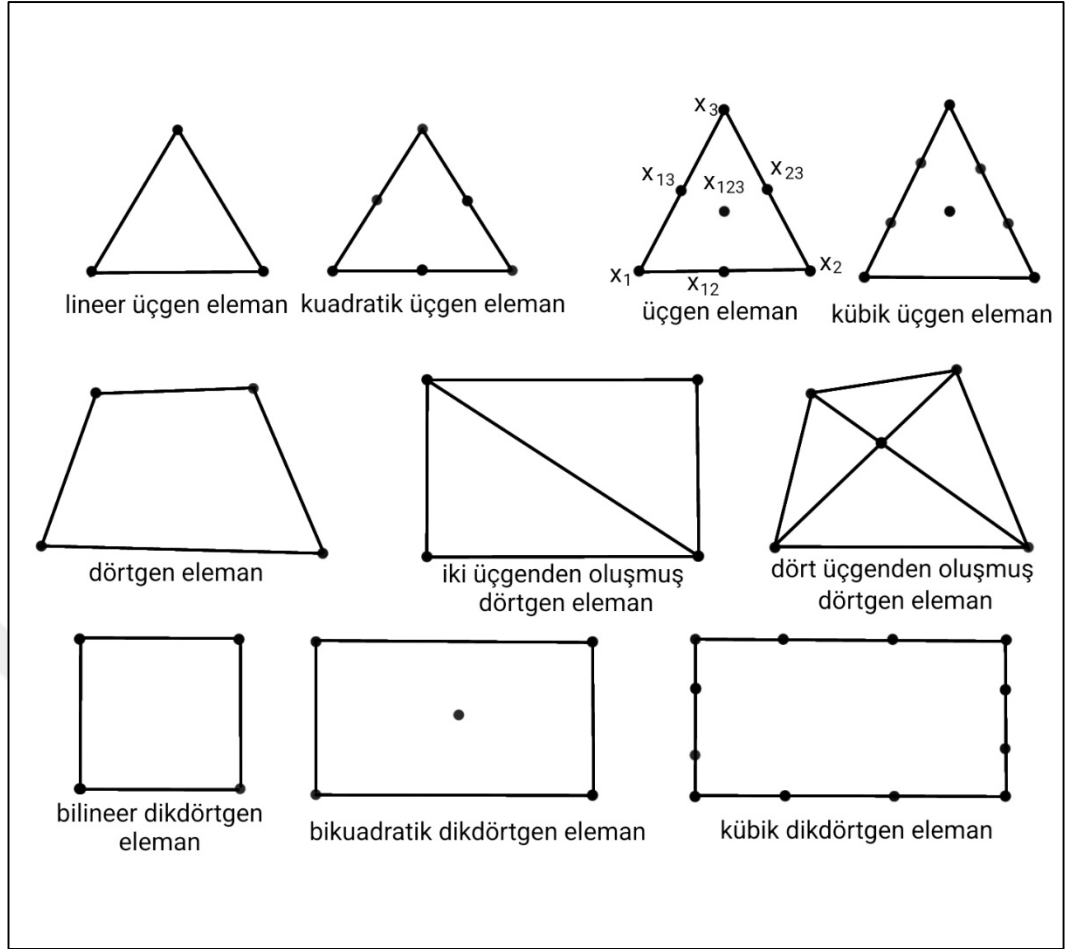


Şekil 3.1. Bir sonlu elemanlar modelinin elemanları ve ayrıklaştırma noktaları (Selvitopi 2016).

3.4.2. 2-D Elemanlar

Genelde iki boyutlu uzayda tercih edilen üçgen ve dörtgen türündeki elemanlar seçilir. Bu gruptaki en temel eleman, üç düğümlü olan üçgen elemandır. Üçgen elemanından altı, dokuz ve daha çok ayrıştırma noktası da belirlenebilir. Seçilecek şekil fonksiyonlarının derecesine göre ayrıklaştırma nokta sayısı belirlenir. Bu ayrıklaştırma noktalarının sayısı, seçilen şekil fonksiyonlarının derecesine bağlıdır. Düzgün olmayan alanlar, daha düzgün basit alt bölgelere ayrıştırılabildiği için bu tür bölgelerin ayrıklaştırılmasın da genellikle üçgen eleman tercih edilir.

Lineer (doğrusal) üçgen eleman, ayrıklaştırma noktalarının üçgenin köşelerinden seçilmesi ile elde edilirken; kuadratik üçgen eleman ise hem üçgenin köşe noktalarından hem de her kenardan birer nokta alınmasıyla elde edilir. Dörtgen eleman, genelde tanım bölgesinin şekil yapısına uygun olduğu yerlerde tercih edilen eleman türüdür. Bu elemanda dört veya daha fazla ayrıklaştırma noktası belirlenebilir (Reddy 2005; Çiftçi 2012).



Şekil 3.2. İki boyutlu uzayda kullanılan elemanlar (Breas 2011)

3.4.3. Şekil fonksiyonları

Sonlu elemanlar yönteminde bilinmeyen fonksiyonlar, bölgenin ayrıklaştırılmasından sonra elde edilir. Elde edilen elemandan seçilen ayrıklaştırma noktalarında tanımlanan şekil fonksiyonlarının (N_i) lineer kombinasyonu olarak; bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, e elemanı üzerinde olan düğüm noktalarındaki u_e^i değerleri ile

$$u(x) \approx u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n e_i^e N_i^e(x) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

3.4.4. Üçgen eleman şekil fonksiyonları

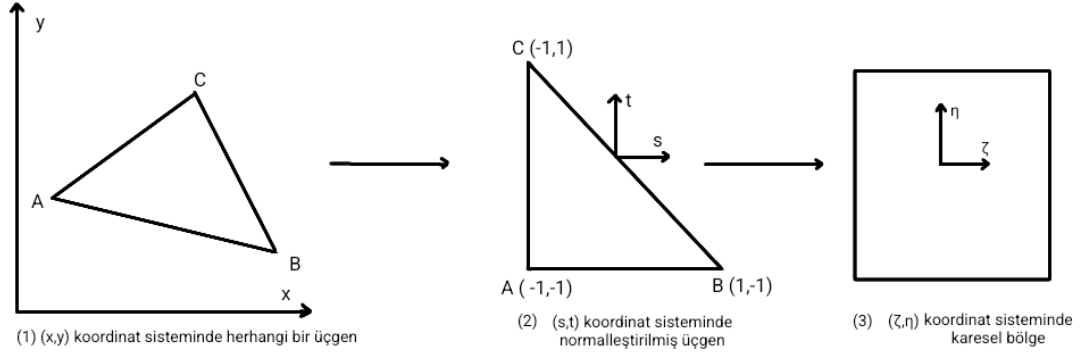
Modelleme sürecindeki uygulanan ilk adım, çözüm bölgesinin üçgen elemanlar kullanılarak ayrıklaştırılmasıdır. Bu ayrıklaştırma işleminde dikkat edilen en önemli husus, bölgeyi hiç boşluk kalmayacak şekilde üçgenlere ayırmak ve bu üçgenleri birbiri üzerine denk getirmemektir. Diğer dikkat edilen önemli bir husus ise, üçgenlerin birbirine köşelerinden bağlı olmalarıdır. Buradaki amaç, bir üçgenin köşesinin diğer bir üçgenin kenarına denk gelmemesidir. Tüm bunlara ek olarak üçgenleri eşkenar üçgene yakın seçmek en iyi sonucu bulmamızı sağlar. Üçgenlerin iç açı ölçüleri küçüldükçe hata oranı arttığından, ölçüleri küçültmek yerine boyutu daha küçük ve iç açı ölçüsü daha büyük üçgen kullanmak oldukça iyi sonuçlar elde etmemizi sağlar. Üçgenlerin tanımı, köşe noktaları aracılığıyla yapılır; bu köşeler aynı zamanda düğüm noktalarını da oluşturur. Dolayısıyla bir üçgenin üç kenarı ve üç düğüm noktası vardır. Üçgenlerin köşe noktaları, ya saat yönünde ya da saat yönü tersine göre sıralanır ve bu sıralama herhangi bir köşeden başlayarak yapılabilir.

Önemli olan, başlangıç noktası ne olursa olsun, diğer iki köşenin belirlenen dönüş yönüne uygun olarak dizilmesidir. Bu yöntemle alan üçgenlere bölünmüş olur. Ayrıca, her üçgen üzerinde de noktalar seçilir ve şekil fonksiyonları tespit edilir (Selvitopi 2016; Uğurlu 2007).

3.4.5. Üçgen eleman için sayısal integral

Üçgen elemanlar üzerinde alan integrallerinin sayısal hesaplaması genellikle Gauss-Kuadratur yöntemi kullanılarak yapılır. Bu yöntemde, Gauss noktaları ve bunlara ilişkin ağırlık katsayıları, literatürde sınırlı sayıda ve tablo şeklinde sunulmuştur. Ayrıca,

Hussain ve Karim (2012) tarafından geliştirilen bir sayısal integral hesaplama tekniği de bu çalışmada kullanılacaktır.



Şekil 3.3. Sayısal integral için bölge dönüşümü (Selvitopi 2016)

Yukarıdaki şekilde görüldüğü üzere (1) numaralı üçgensel bölge, (2)'deki üçgensel bölgeye, en sonunda ise (3)'deki karesel bölgeye dönüştürülür. Bu dönüşüm, kare şeklindeki bir bölge üzerinde istenilen derecede Legendre polinomunun köklerini hesaplayarak, belirlenen sayıda noktayı kullanarak sayısal integralin hesaplanmasını sağlar.

Bahsedilen bölge dönüşümleri aşağıda verilmiştir.

"Şekil 1.4'de, (1) numarada gösterilen rastgele seçilmiş bir üçgen bölge, (2) numarada gösterilen normalleştirilmiş üçgen bölgeye dönüştürülelim.

(1)'de ki üçgensel bölgenin köşe noktaları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_4)$ olarak adlandıralım. Burada $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}$ dir. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ olsun,

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad (3.2)$$

hesaplayacağız. Buradaki bölge dönüşümleri;

$$x = a_1 + b_1 s + c_1 t \quad (3.3)$$

$$y = a_2 + b_2 s + c_2 t$$

eşitlikleri aracılığıyla sağlanır.

Şekil fonksiyonları ise;

$$N_1 = -\frac{1}{2}(s + t), \quad N_2 = \frac{1}{2}(s + 1) \quad N_3 = \frac{1}{2}(t + 1) \quad (3.4)$$

x ve y eşitliklerinde Şekil 3.3.'deki (1) ve (2)'deki bölgelerin köşe noktaları yazılırsa;

$$x_1 = a_1 - b_1 - c_1$$

$$y_1 = a_2 - b_2 - c_2$$

$$x_2 = a_1 + b_1 - c_1 \quad (3.5)$$

$$y_2 = a_2 + b_2 - c_1$$

$$x_3 = a_1 - b_1 + c_1$$

$$y_3 = a_2 - b_1 + c_1$$

olur. Bu eşitlikler matris formunda yazılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

şeklini alacaktır. (3.5) deki eşitliklerden $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ ifadeleri $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ türünden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$a_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

$$b_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$c_1 = \frac{x_3 - x_1}{2}$$

(3.7)

$$a_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$c_2 = \frac{y_3 - y_1}{2}$$

Jacobian matrisinin determinanı ise;

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_2 - x_1}{2} & \frac{x_3 - x_1}{2} \\ \frac{y_2 - y_1}{2} & \frac{y_3 - y_1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{2} \frac{y_3 - y_1}{2} - \frac{x_3 - x_1}{2} \frac{y_2 - y_1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\} = \frac{ALAN}{4} \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak bulunur. (3.2) deki integral;

$$I = \frac{ALAN}{4} \int_{t=-1}^1 \int_{s=-1}^{-t} f(x(s,t), y(s,t)) dt ds \quad (3.9)$$

integraline dönüşür. Böylece (1) şekilden (2) şekle dönüşüm yapılmış olur.

Şimdi (2) şekilden (3) şekle geçiş yapmaya çalışalım.

$$s = \zeta, \quad t = \frac{(1-\zeta)(1+\eta)}{2} - 1 \quad (3.10)$$

alınıp (3.7) eşitlikleri (3.3) de yazılırsa;

$$x = \frac{x_2 + x_3}{2} + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\zeta + \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)\left(\frac{(1-\zeta)(1+\eta)}{2} - 1\right) \quad (3.11)$$

$$y = \frac{y_2 + y_3}{2} + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)\zeta + \left(\frac{y_3 - y_1}{2}\right)\left(\frac{(1-\zeta)(1+\eta)}{2} - 1\right)$$

denklemleri elde edilir. Yapılan bu bölge dönüşümü için Jacobian matrisinin determinantı hesaplandığı zaman;

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(1+\eta) & \frac{(1-\zeta)}{2} \end{vmatrix} = \frac{(1-\zeta)}{2} \quad (3.12)$$

bulunur.

Bu dönüşümleri I integralinde yerine yazarsak;

$$I = \frac{ALAN}{4} \int_{\zeta=-1}^1 \int_{\eta=-1}^{-t} f \left(x \left(\zeta, \frac{(1-\zeta)(1+\eta)}{2} - 1 \right), y \left(\zeta, \frac{(1-\zeta)(1+\eta)}{2} - 1 \right) \right) \frac{(1-\zeta)}{2} dt ds \quad (3.13)$$

halini alır. I integrali;

$$I = ALAN \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{(1-\zeta_i)}{8} w_i w_j f \left(\zeta_i, \frac{(1-\zeta_i)(1+\eta_j)}{2} - 1 \right) \quad (3.14)$$

bu şekilde hesaplanmaktadır.

Şekil fonksiyonları ise;

$$N_1 = \frac{1}{4}(\zeta\eta - \zeta - \eta + 1), N_2 = \frac{1}{2}(\zeta + 1), N_3 = \frac{1}{4}(\eta - \zeta - \zeta\eta + 1) \quad (3.15)$$

ile hesaplanır.

3.5. Cranck Nicolson Şeması

Cranck-Nicolson şeması, ilk olarak 1947 yılında Cranck ve Nicolson tarafından keşfedilmiştir. Zamanda geriye doğru merkezi fark yöntemi, fonksiyonun zamana göre türevini birinci dereceden hesap ederken; Crank-Nicolson şeması, zamanda tek bir aşama yerine, mevcut ve bir sonraki adımın ortalamasını alarak hesaplamaları yapar ve bu da yöntemi ikinci dereceden yapar.

Cauchy problemi, uygun başlangıç koşulları verildiği zaman vektörel veya skaler bir diferansiyel denklemin çözümünü bulmayı amaçlar. Özellikle skaler durumda, t_0 'ı içeren $\mathbb{R}$ nin bir I aralığında, Cauchy problemi;

$$y' = f(t, y), \quad t \in I \quad (3.16)$$

$$y_0 = y(t_0)$$

diferansiyel denklemi sağlayan $y \in C^1(I)$ fonksiyonunu bulmayı içerir.

Burada $f(t, y)$ fonksiyonu, $S = I \times (-\infty, \infty)$ üzerinde gerçel değerli olup, t ve y değişkenlerine göre sürekli. Eğer f fonksiyonu t ye göre sürekli ise, aşağıdaki çözüm sağlanmaktadır.

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.17)$$

Eğer y fonksiyonu tanımlı ise I üzerinde sürekli ve $y(t_0) = y_0$ olur. Ayrıca y fonksiyonunun $f(\cdot, y(\cdot))$ sürekli fonksiyonun bir ilkel olarak ifade edilebildiği için y fonksiyonu $C^1(I)$ 'nin bir elemanıdır ve $y' = f(t, y)$ denklemi sağlanmaktadır. Böylelikle, Cauchy problemi için f fonksiyonu sürekli olduğunda, problem bir integral denkleme eşdeğer hale gelir (Quarteroni et al. 2000).

Crank-Nicolson yönteminde, verilen integral denkleminde $\int f(t, y) dt$ integraline ulaşmak için, f nin t_n ve t_{n+1} in orta noktasındaki interpolasyon polinomu yazılır.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (3.18)$$

Gerçek çözüm denklemde yerine yazılırsa yönteminin mertebesine ulaşılır.

Yani $y(t_n + 1)$ t_n civarında taylor serisine açıldığında;

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \\ = [y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2} h^2 y''(t_n) + O(h^3)] - y(t_n) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$-\frac{h}{2}[(t_n) + y'(t_n) + hy''(t_n) + O(h^2)]$$

$$= O(h^3) = O(h^{p+1})$$

elde edilir. Burada $p=2$ olduğu görülür. O halde Crank-Nicolson yönteminin mertebesi 2 olduğu sonucuna ulaşılır (Quarteroni et al. 2000).

3.6. Sonlu Elemanlar Yönteminin Sönümlemeli Dalga Tür Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Denkleminin Uygulanması

Bu bölümde, sönümlemeli dalga tür konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin üç farklı durumu olan güçlü hal, zayıf hal ve varyasyonel halleri verilecektir.

3.6.1. Güçlü hal

Sönümlemeli dalga tür konveksiyon difüzyon reaksiyon denklemi Ω bölgesinde; şartları ile tanımlanmaktadır. Denkleminde u bilinmeyen fonksiyon olup $\vec{h}(t)$ zamana bağlı

$$\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \vec{h}(t) \nabla u + \sigma u = f(x, y)$$

$$u(0, x, y) = u_0(t, x, y), u(t, \partial\Omega) = u_1(t, x, y) \quad (3.20)$$

$$u_t(0, x, y) = u_2(x, y)$$

konveksiyon katsayısı, $\frac{1}{\tau^2}$ dalga fonksiyonunun katsayısını ve f ise dış fonksiyon olmak üzere;

$$\nabla u(x, y) = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.21)$$

$$h\nabla u = h_1 \frac{\partial u}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u}{\partial y}(t)$$

olarak ifade edilir.

Çözümü aranan u fonksiyonu, denklemi Ω bölgesinde olup, sınır şartlarını bütün sınırlarda sağlayacağından, bu problem türüne güçlü hal (strong form) adı verilir (Çiftçi 2012).

3.6.2. Zayıf hal

Bu kısımda, öncelikle bazı uzayları tanıyalım.

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\} \\ H^1(\Omega) &= \{ u \in L^2(\Omega): u' \in L^2(\Omega) \} \\ V &= H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega): u = 0, \quad \partial\Omega \} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Öyle ki;

$L^2(\Omega)$: Ω bölgesinde karesi integrallenebilir fonksiyonları,

H^1 : $L^2(\Omega)$ da fonksiyonun birinci türevlerinin karesinin integrallenebildiği Sobolev alt uzayını,

$H_0^1(\Omega)$: Ω bölgesinin sınırlarında sıfır değerini $H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayını gösterir.

Sönümlemeli dalga tür konveksiyon difüzyon reaksiyon probleminin zayıf halini elde etmek için, önce yukarıda verilen diferansiyel denklemin güçlü hale ulaşmasını sağlayan $u \in V$ için, denklemin homojen formu yazılır. Daha sonra, problemin tanım bölgesindeki bir ağırlık fonksiyonu olan w ile çarpılır ve integral alınarak değeri sıfıra

eşitlenir. Bu işleme ağırlıklı rezidü yöntemi (weighted residual method) denir (Selvitopi 2016).

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \vec{h}(t) \nabla u + \sigma u - f \right) w dx dy = 0 \quad (3.23)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot w + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} \cdot w - \varepsilon \Delta u \cdot w + \vec{h}(t) \nabla u \cdot w + \sigma u \cdot w - f \cdot w \right) dx dy = 0 \quad (3.24)$$

olup

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot w \right) dx dy \\ & + \int_{\Omega} \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot w \right) dx dy \\ & - \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u \cdot w) dx dy + \int_{\Omega} (\vec{h}(t) \nabla u \cdot w) dx dy \\ & + \int_{\Omega} (\sigma u \cdot w) dx dy - \int_{\Omega} (f \cdot w) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

eşitliği elde edilir. (3.25) denkleminde $-\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u \cdot w) dx dy$ ifadesine Divergence teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot w \right) dx dy \\ & + \int_{\Omega} \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot w \right) dx dy \\ & + \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w) dx dy - \oint_{\partial \Omega} (\vec{n} \cdot \nabla u) w ds \\ & + \int_{\Omega} (\vec{h}(t) \nabla u \cdot w) dx dy \\ & + \int_{\Omega} (\sigma u \cdot w) dx dy - \int_{\Omega} (f \cdot w) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

eşitliği elde edilir. Burada $n = (n_x, n_y)$ $\partial\Omega$ sınırında birim vektördür.

$$(\vec{n} \cdot \nabla u) = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.27)$$

olarak tanımlanır.

Verilen (3.23) denkleminin elde edilen (3.26) ifadesindeki indirgenmiş haline zayıf hal denir (Kuzulugil 2022).

Galerkin sonlu elemanlar yönteminde, (3.20) ele alınan problemin sınır koşulları Dirichlet tür sınır koşulu olduğu için ağırlık fonksiyonu sınırlarda sıfır olarak alınır. Bu durumda denklem (3.26) de bulunan sınır integralinin sonucu sıfırdır. Dolayısıyla (3.26) denklemi,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot w \right) dx dy &+ \int_{\Omega} \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot w \right) dx dy \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w) dx dy + \int_{\Omega} (\vec{h}(t) \nabla u \cdot w) dx dy \\ &+ \int_{\Omega} (\sigma u \cdot w) dx dy - \int_{\Omega} (f \cdot w) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklini alır.

3.6.3. Sonlu farklar yönteminin uygulanması

Elde edilen (3.8) eşitliğinde zaman değişkeni için Cranck Nicolson sayısal şeması uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\tau^2} \int_{\Omega} w \left(\frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\delta t^2} \right) dx dy \\
 & + \int_{\Omega} w \gamma \left(\frac{u^{k+1} - u^k}{\delta t} \right) dx dy \\
 & + \varepsilon \left[\theta \int_{\Omega} (\nabla u^{k+1} \cdot \nabla w) dx dy + (1 \right. \\
 & \left. - \theta) \int_{\Omega} (\nabla u^k \cdot \nabla w) dx dy \right] \\
 & + \left[\theta \int_{\Omega} (\vec{h}(t) \nabla u^{k+1} \cdot w) dx dy + (1 \right. \\
 & \left. - \theta) \int_{\Omega} (\vec{h}(t) \nabla u^{k+1} \cdot w) dx dy \right] \\
 & + \left[\theta \int_{\Omega} (\sigma u^{k+1} \cdot w) dx dy + (1 \right. \\
 & \left. - \theta) \int_{\Omega} (\sigma u \cdot w) dx dy \right] - \int_{\Omega} (f \cdot w) dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

θ 'ya bağlı (3.29) eşitliği elde edilir.

3.6.4. Varyasyonel hal

Ω bölgesindeki her bir e elemanı üzerinde bulunan, bilinmeyen u fonksiyonu;

$$u(x) \cong u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(x) \tag{3.30}$$

ayrıklaştırılmış hali ile tanımlansın.

Eşitlikte $u_i^e = u(x_i)$, $N_i^e(x)$ ve δ_{ij} kronecker delta fonksiyonunu ifade etmek üzere;

$$N_i^e(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (3.31)$$

lineer nitelikteki şekil fonksiyonlarıdır.

Gerçek çözüme yaklaşım sağlamak amacıyla, $u_h^e(x)$ yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki koşullar belirtilmektedir.

$u_h^e(x)$ fonksiyonu eleman ve elemanların bağlantı noktalarında sürekli olmalıdır.

Baz polinomlarının tüm terimleri lineer olarak bağımsız olmalıdır.

$u_h^e(x)$ fonksiyonunu temsil eden polinomlar tam olmalıdır.

Sonlu elemanlar yaklaşımı, problemin zayıf formuna yerleştirildiğinde, elde edilen integral denklem Ω bölgesinde ayrıştırılan her bir alt bölge için hesaplanır. Böylece, problemin varyasyonel (ayrıklaştırılmış) formu elde edilmiş olur (Kuzulugil 2022).

İki boyutlu uzayda varyasyonel hali yazmak için zayıf halinde u yerine $u(x)$ 'in yaklaşık değeri yerine yazılır.

Elde edilen bu eşitliğe de problemin ayrıklaştırılmış hali denir.

Ω bölgesi üzerinde ki u fonksiyonu

$$u(t, x, y) \cong \sum_{i=1}^n u_i^e(t) N_i^e(x, y) \quad (3.32)$$

şeklinde tanımlansın.

$$w = N_j^e(x, y) \quad (3.33)$$

olarak alalım. Ayrıca denklemin tüm çözümlerinde $\gamma = 1$ alınmıştır.

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Omega_e} w \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{1}{\Delta t^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) N_i^e d\Omega \right. \\ & \quad + \varepsilon \theta \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{dw}{dx} \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} d\Omega + \frac{dw}{dy} \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} d\Omega \right\} \\ & \quad + \theta \int_{\Omega_e} w \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} \left(h_1(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + h_2(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) d\Omega \\ & \quad \left. + \theta \int_{\Omega_e} w \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} N_i^e d\Omega \right] \\ & \quad + \left[\int_{\Omega_e} w \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{-2}{\Delta t^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) N_i^e d\Omega + \varepsilon (1 \right. \\ & \quad - \theta) \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{dw}{dx} \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} d\Omega + \frac{dw}{dy} \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} d\Omega \right\} + (1 \\ & \quad - \theta) \int_{\Omega_e} w \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} \left(h_1(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + h_2(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) d\Omega + (1 \\ & \quad - \theta) \int_{\Omega_e} w \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} N_i^e d\Omega \left. \right] + \int_{\Omega_e} w \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k-1}} \frac{1}{\Delta t^2} N_i^e \\ & = \int_{\Omega_e} f(x) N_i^e d\Omega \end{aligned} \quad (3.34)$$

Burada w yerine N_j^e yazalım ve dışarıda kalan terimleri de toplam sembolünün içine alarak yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{1}{\Delta t^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) N_i^e N_j^e d\Omega \right. \\
 & \quad + \varepsilon \theta \int_{\Omega_e} \left\{ \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{dN_j^e}{dx} d\Omega + \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{dN_j^e}{dy} d\Omega \right\} \\
 & \quad + \theta \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} \left(h_1(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e + h_2(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e \right) d\Omega \\
 & \quad + \theta \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k+1}} N_i^e N_j^e d\Omega \left. \right] \\
 & \quad + \left[\int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{-2}{\Delta t^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) N_i^e N_j^e d\Omega + \varepsilon (1 \right. \\
 & \quad - \theta) \int_{\Omega_e} \left\{ \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{dN_j^e}{dx} d\Omega + \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{dN_j^e}{dy} d\Omega \right\} + (1 \\
 & \quad - \theta) \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} \left(h_1(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e + h_2(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e \right) d\Omega + (1 \\
 & \quad - \theta) \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n u_i^{e^k} N_i^e N_j^e d\Omega \left. \right] + \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n u_i^{e^{k-1}} \frac{1}{\Delta t^2} N_i^e N_j^e \\
 & = \int_{\Omega_e} f(x) N_i^e d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

denklemini elde edilir. Aşağıdaki gibi gruplandırılan

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^e &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \\
 L_{ij}^e &= \int_{\Omega} \left(h_1(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e + h_2(t) \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e \right) d\Omega \\
 f_i^e &= \int_{\Omega} f(x, y, t) N_i^e d\Omega \\
 M_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} N_i^e N_j^e d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

elemanlar yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{1}{\tau^2} \frac{1}{\Delta t^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) M \right] \{u_i^{e^{k+1}}\} + \varepsilon \theta [K] \{u_i^{e^{k+1}}\} + \theta [L] \{u_i^{e^{k+1}}\} + \theta \{u_i^{e^{k+1}}\} \{f\} \\
 & = \{f\} - \{u_i^{e^k}\} \left[\left(\frac{1}{\tau^2} \frac{-2}{\Delta t^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) M \right] - \varepsilon (1 - \theta) \{u_i^{e^k}\} [K] \\
 & - (1 - \theta) \{u_i^{e^k}\} [L] - (1 - \theta) \{u_i^{e^k}\} \{f\} - \{u_i^{e^{k-1}}\} \left[\frac{1}{\Delta t^2} M \right]
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

biçiminde matris forma çevrilmiş olunur.

Matris formuna indirgendikten sonra $n \times n$ boyutlarında denklem sistemi elde edilir.

$$\nabla w = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x}, \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \tag{3.38}$$

$$\nabla u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}, \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) u_i^e$$

şeklini temsil etmektedir.

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{ileri fark} \\ \frac{1}{2} & \text{Crank Nicolson} \\ 1 & \text{geri fark} \end{cases}$$

Bu tezde elde edilen bütün formülasyonlarda $\theta = \frac{1}{2}$ Crank Nicolson şeması kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir.

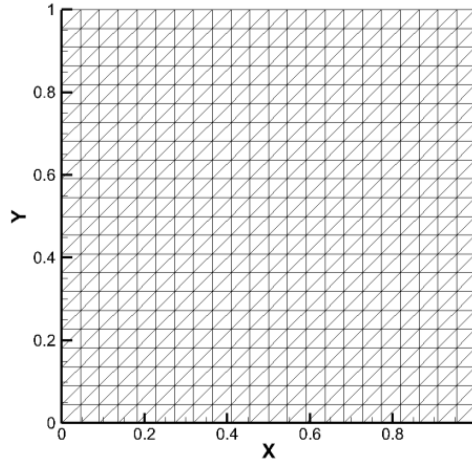
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

ÖRNEK 1.

$$\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \vec{h}(t) \nabla u + \sigma u = f(x, y) \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (4.1)$$

Eşitliği ve $u(0, x, y) = u_0(t, x, y)$, $u(t, \partial\Omega) = u_1(t, x, y)$, $u_t(0, x, y) = u_2(t, x, y) = 0$ başlangıç ve, $u_0(t, x, y) = 0$, $u_1(t, x, y) = 0$ sınır koşullarında farklı parametre değerleri için incelenmiştir.

$f(x, y) = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $\sigma = 1$, $\tau = 1$ ve aşağıda verilen şartlar altında inceleyelim.

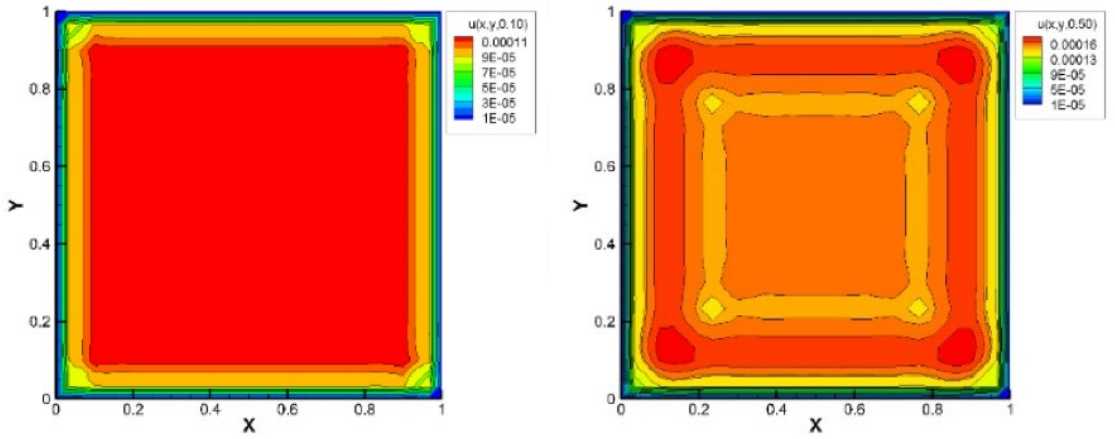


Şekil 4.1. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmış hali

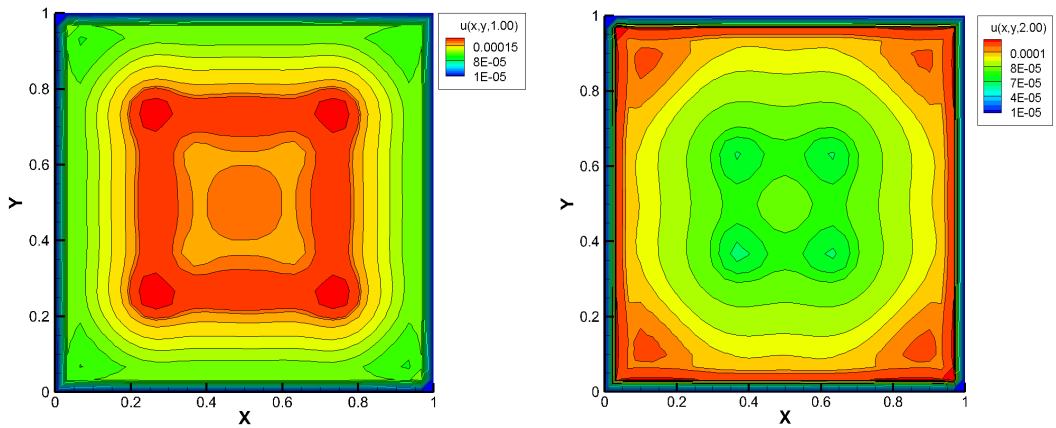
Şekil 4.1'de verilen problemin alınan farklı ε değerleri ve $h(t)$ fonksiyonu için $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ bölgesi üzerinden sayısal çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca çözüm sürecinde tüm durumlar için zaman adım uzunluğu $t = 0,01$ olarak alınmıştır.

Şekil (4.1) 'de, problem çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması için bir örnektir. Çözüm alanı ayrıklaştırılırken, 1681 düğüm noktası, 3200 üçgen eleman sayısı ve 160 sınır noktası oluşturulmuş ve bu elemanlar çözüm aşamasında kullanılmıştır.

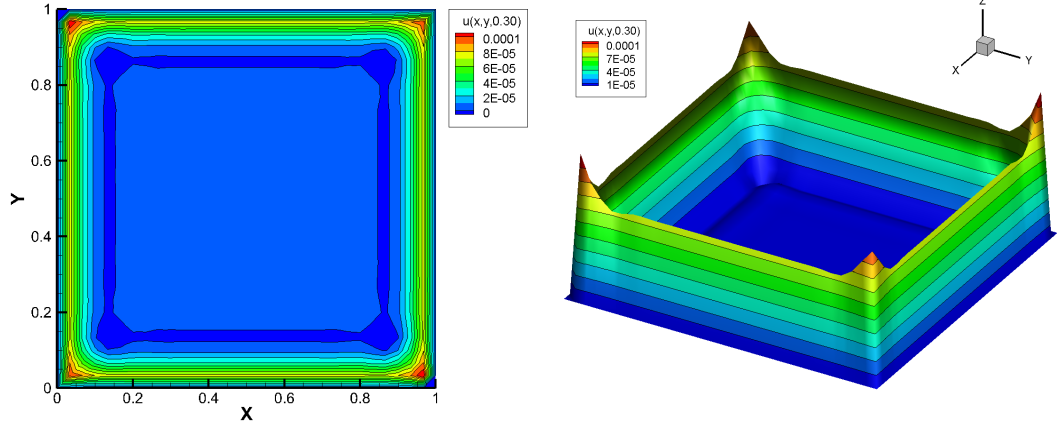
Şekil (4.2), (4.3) ve (4.4) ile $\varepsilon = 1$, $\vec{h}(t) = (1,1)$, $\tau = 1$ değerleri için önerilen sayısal şema ile elde edilen sayısal çözümler kontur eğrisi olarak verilmiştir. Verilen sayısal çözümler incelendiğinde çözümlerde osilasyonlar ve kararsızlıklar meydana geldiği gözlemlenmiştir. $t = 0,1$ için sınırlara yakın bölgede kararlı çözüme yakın çözümler elde edilmiş olsa bile beklenen sayısal çözümün uzak çözümlerdir. $t = 0,3$ için Şekil (4.4) zaman anında sayısal çözümlerde oluşan sınır katmaları ve sınırların dışında ise çözümlerde oluşan osilasyonlar istenilen kararlı sayısal çözümler değildir. Zaman ilerledikçe yukarıda ki zaman adımlarında sayısal çözümlerde oluşan kararsızlıklar verilen parametre değerleri için kararlı çözüm elde edilemediği sonucuna varılır.



Şekil 4.2. u fonksiyonunun $\varepsilon = 1, \theta = 0,5, \tau = 1, t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve $\varepsilon = 1, \theta = 0,5, t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sağ).



Şekil 4.3. u fonksiyonunun $\varepsilon = 1, \theta = 0,5, \tau = 1, t = 1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve $\varepsilon = 1, \theta = 0,5, t = 2$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sağ).

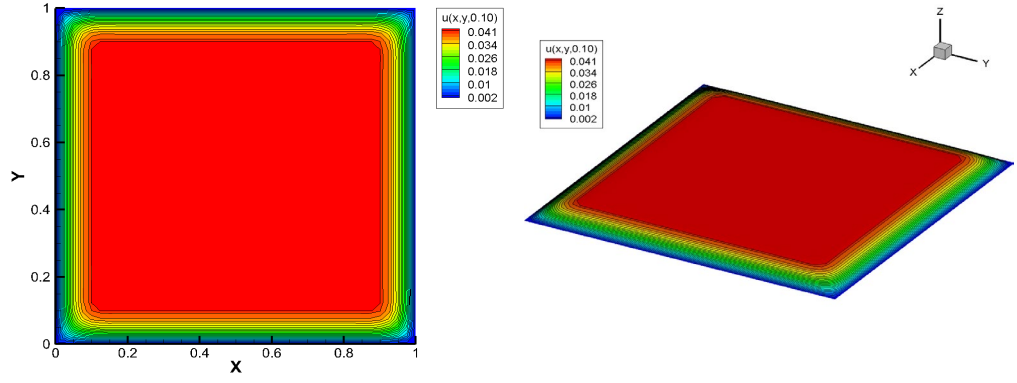


Şekil 4.4. u fonksiyonunun $\varepsilon = 1, \tau = 1, \theta = 0,5, t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).

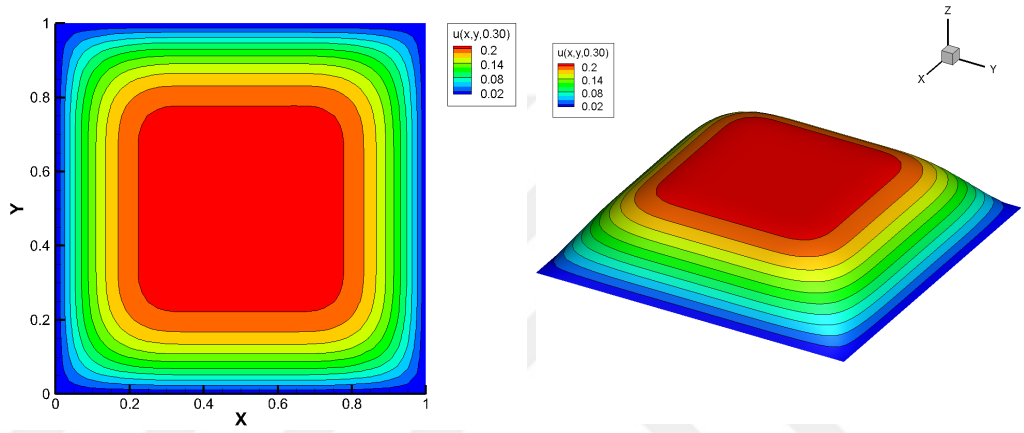
Ele alınan problemin farklı ε, h_1 ve h_2 değerleri için elde edilen sayısal çözümler Şekil (4.5)- Şekil (4.17) grafikleri ile verilmiştir.

Şekil (4.5)- Şekil (4.6)- da $\varepsilon = 0,1$ ve $\overline{g(t)} = (t, t)$ değerleri için giderek artan t zaman adımlarında $\tau = 0,1$ için sayısal çözümler verilmiştir. Sayısal çözümler analiz edildiğinde t zamanı ilerledikçe elde edilen sayısal çözüm değerlerinin büyüdüğü gözlemlenmiştir. Ele alınan problem sönümlmeli dalga tür problemidir. Problemin bu yapısı Şekil (4.10) ve Şekil (4.11) de gözlemlenmiştir. Grafiklerde $t = 2$ ve $t = 3$ farklı zamanda sayısal çözümlerin grafikleri verilmiş ve elde edilen sayısal çözümlerin çok yakın olduğu gözlemlenmiştir. Yani, $(n + 1)$ zaman seviyesi için $\max_i |u_i^{n+1} - u_i^n| < ts$ olduğu durumda, kararlı bir çözüm elde edilmiştir. Burada ts , tolerans değeri olarak tanımlanmaktadır ve hesaplamalarda $ts = 2.89 \times 10^{-4}$ değeri kullanılmıştır. Bahsedilen tolerans sayısına $t = 2$ zaman adımında ulaşılp, kararlı çözüm elde edilmiştir.

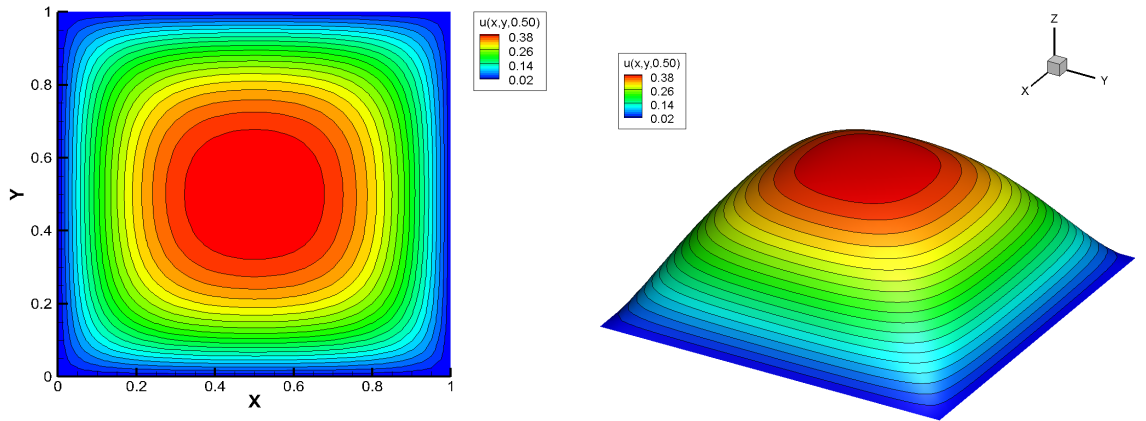
Bu durum ise problemin belli bir zamandan sonra sönümlendiği ve ısı tür problemler gibi davrandığını yani kararlı hale ulaştığını ortaya koymaktadır.



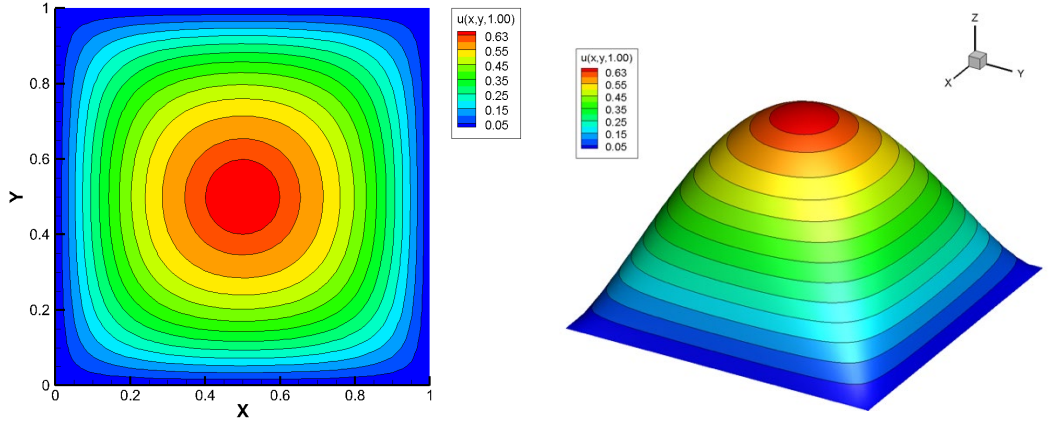
Şekil 4.5. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,1$, $\theta = 0,5$, $h_1 = t$, $h_2 = t$, $t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



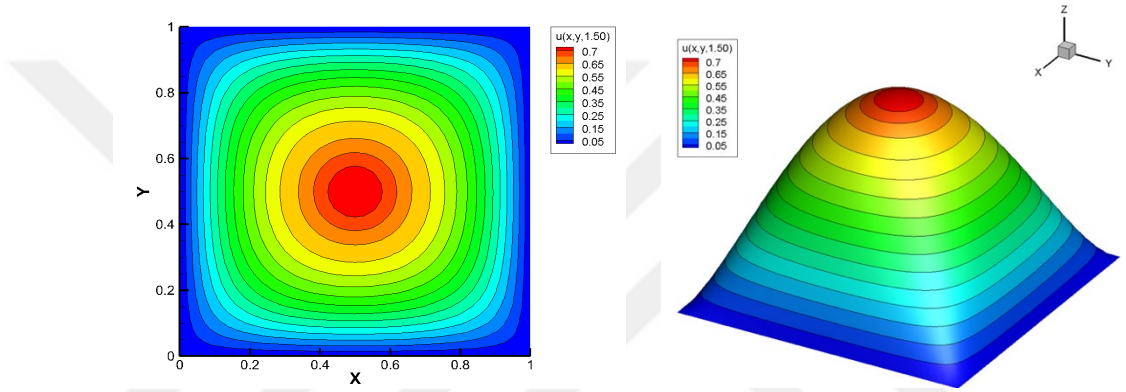
Şekil 4.6. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,1$, $\theta = 0,5$, $h_1 = t$, $h_2 = t$, $t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



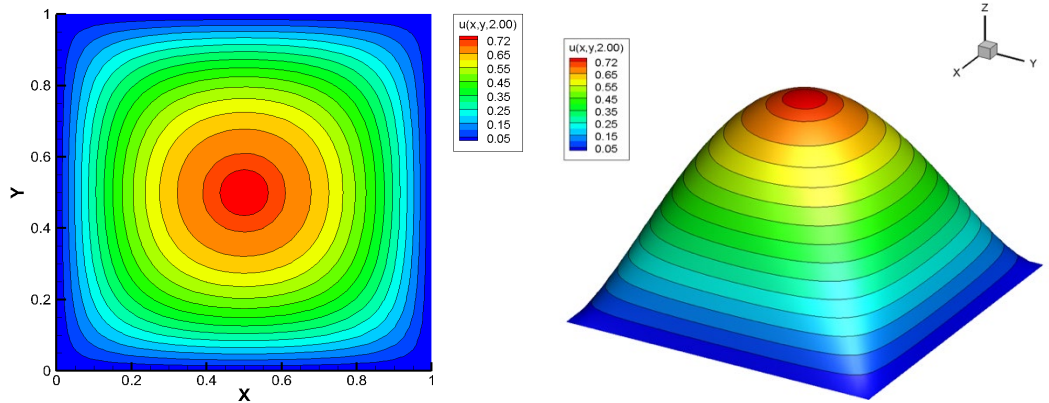
Şekil 4.7. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,1$, $\theta = 0,5$, $h_1 = t$, $h_2 = t$, $t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



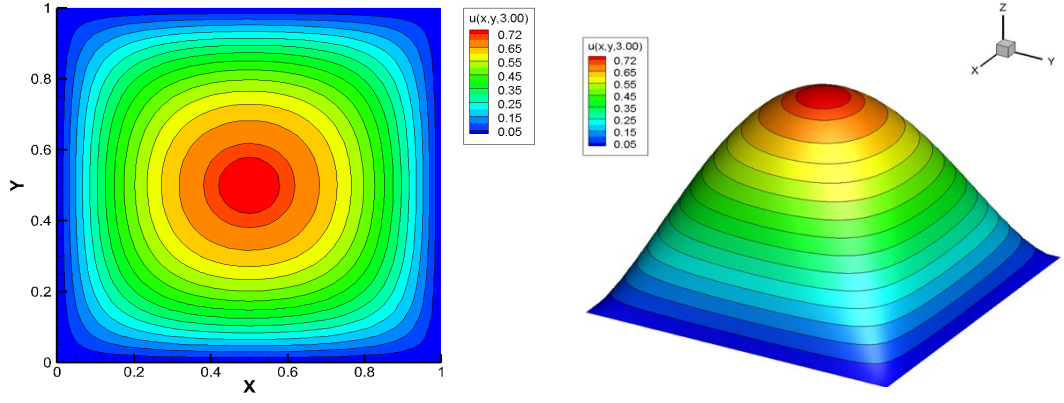
Şekil 4.8. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,1$, $\theta = 0,5$, $h_1 = t$, $h_2 = t$, $t = 1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



Şekil 4.9. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,1$, $\theta = 0,5$, $h_1 = t$, $h_2 = t$, $t = 1,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).

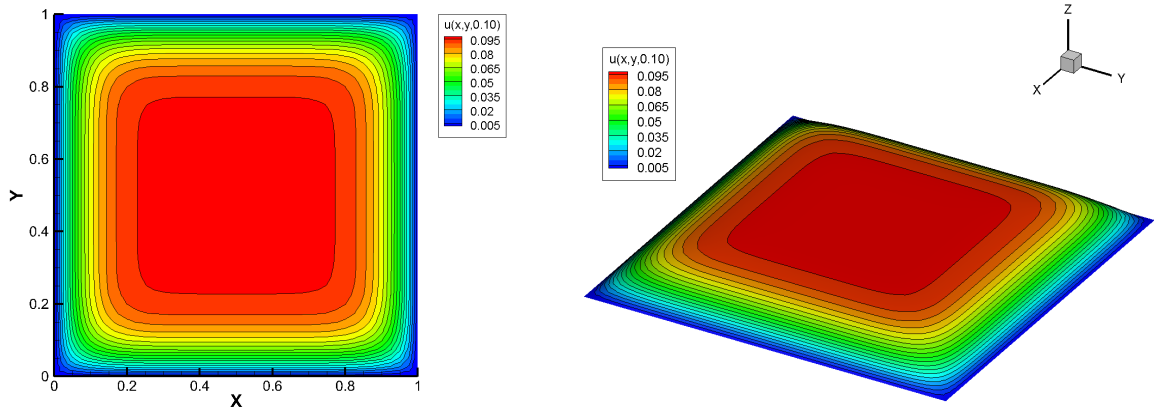


Şekil 4.10. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,1$, $\theta = 0,5$, $h_1 = t$, $h_2 = t$, $t = 2$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).

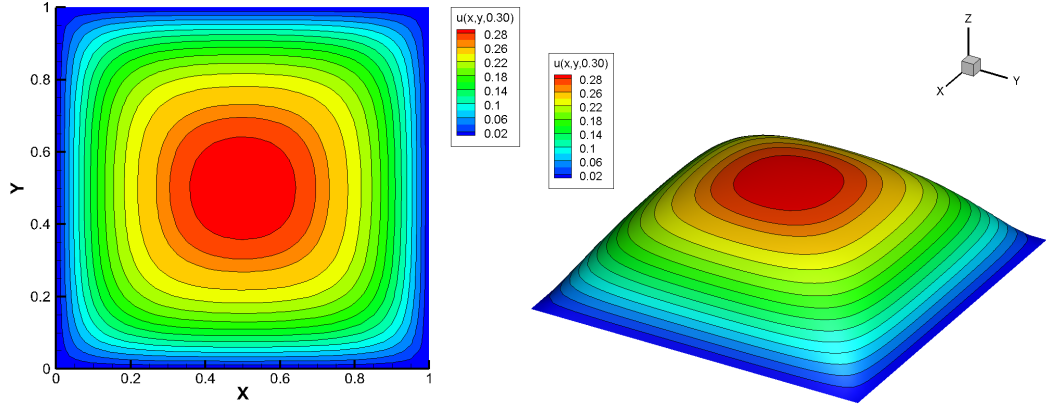


Şekil 4.11. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,1$, $\theta = 0,5$, $h_1 = t$, $h_2 = t$, $t = 3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).

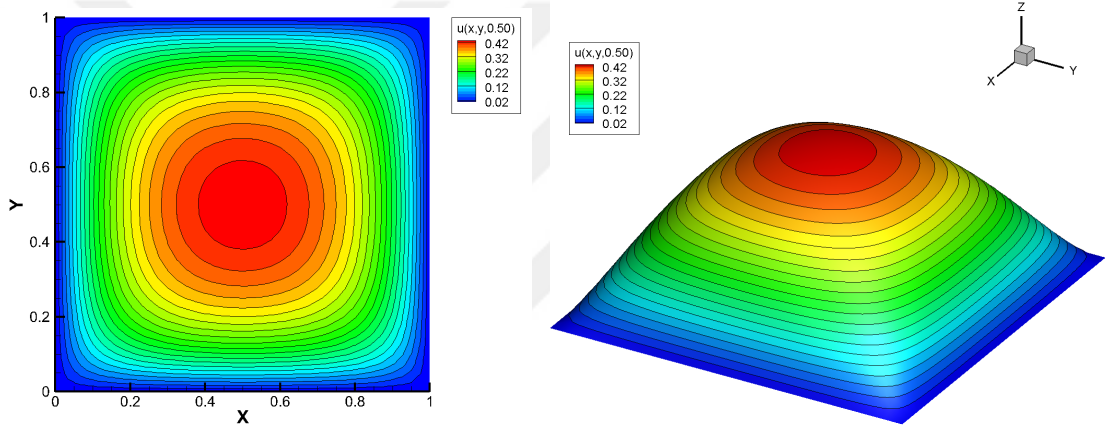
Şekil (4.12)-Şekil (4.17) şekillerinde ise $\varepsilon = 0,1$ ve $\overline{g(t)} = (tant, tant)$ değerleri için giderek artan t zaman adımlarında $\tau = 0,01$ için sayısal çözümler elde edilmiştir. Sayısal çözümler analiz edildiğinde t zamanı ilerledikçe sınırlarda katman oluşturmaya zorlanan çözümler zaman ilerledikçe çözüm bölgesinin merkezine doğru dağılmakta ve dalga oluşturmaya başlamaktadır. Zaman ilerledikçe ele alınan parametreler için elde edilen sayısal çözümlerin birbirine çok fazla yaklaştığı ve sönümlmeli dalga tür denklem olma özelliğini gösterdiği gözlemlenmiştir.



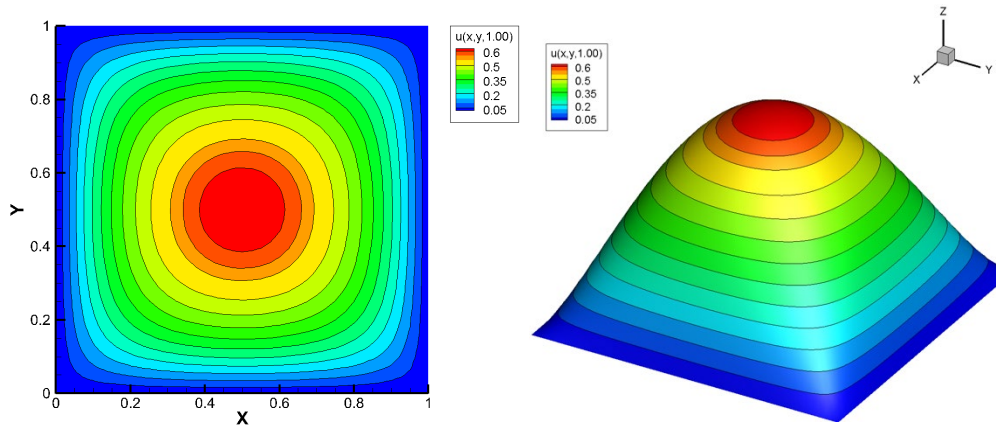
Şekil 4.12. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = tant$, $h_2 = tant$, $t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



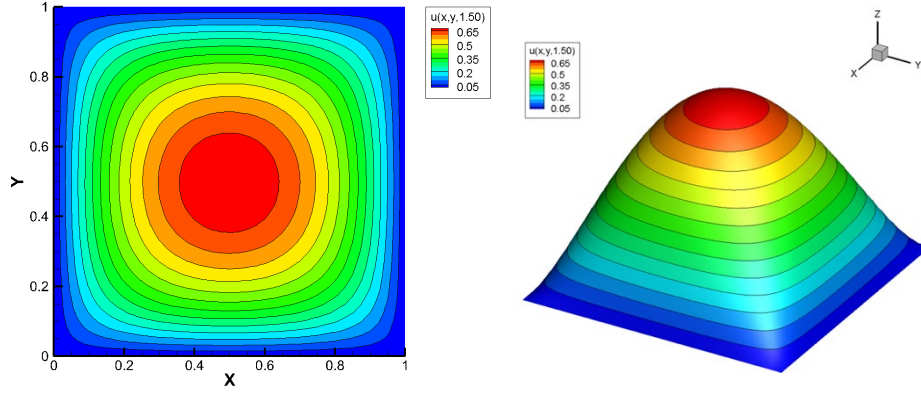
Şekil 4.13. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = \tan t$, $h_2 = \tan t$, $t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



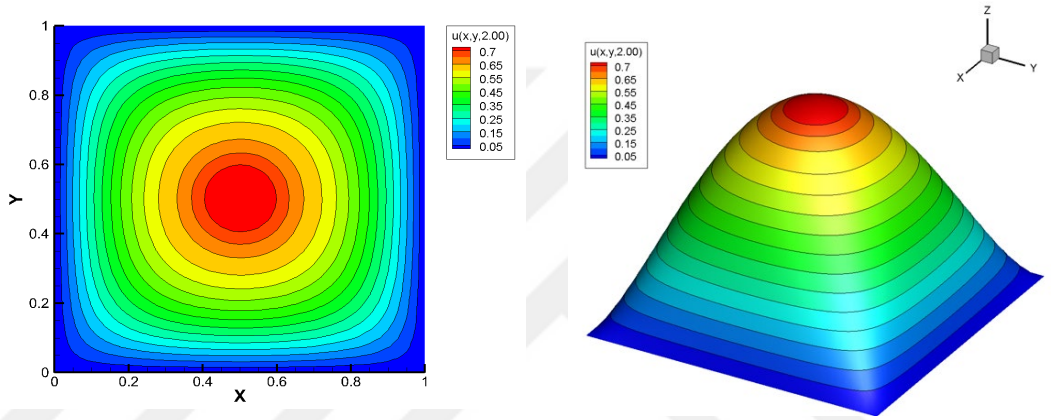
Şekil 4.14. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = \tan t$, $h_2 = \tan t$, $t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



Şekil 4.15. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = \tan t$, $h_2 = \tan t$, $t = 1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



Şekil 4.16. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = tant$, $h_2 = tant$, $t = 1,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



Şekil 4.17. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\theta = 0,5$, $h_1 = tant$, $h_2 = tant$, $t = 2$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında iki boyutlu sönümlmeli dalda tür konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin uygulanması için elde edilen sonuçlar analiz edildiğinde,

- Tez çalışmasında ele alınan sönümlmeli dalga tür konveksiyon difüzyon reaksiyon probleminin sayısal çözümleri incelendiğinde büyük τ değerleri için sayısal çözümlerde kararsızlıkların meydana geldiği, küçük τ değerleri için ise kararlı çözümlerin elde edildiği gözlemlenmiştir. Kararlı çözümler değerlendirildiğinde ise zaman ilerledikçe beklenildiği ve problemin yapısına uygun şekilde sayısal çözümlerin kararlı ve sönümlendiği gözlemlenmiştir.
- Crank-Nicolson/Sonlu elemanlar hibrit sayısal yönteminin zamana bağlı konvektif katsayılı sönümlmeli dalga tür konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemini için uygulanabilir bir yöntem olduğu gözlemlenmiştir.
- Sabit ve zamana bağlı konvektif katsayılı sönümlmeli dalga tür konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemini için kararlı sonlu elemanlar yöntemine gerek duyulmaksızın kararlı sayısal çözümler elde edilmiştir. Bu durum ise sayısal çözüm elde edilmesini daha ekonomik hale getirmiştir.
- Bu tezde uygulanan hibrit sayısal yöntem sönümlmeli dalda tür zamana bağlı konvektif katsayılı problemlere kolaylıkla uygulanabilir.
- Bu tez çalışmasında iki boyutlu uzayda sayısal çözümü elde edilen problemin, üç boyutlu modelinin çözümü aynı sayısal yöntem ile elde edilebilir.
- En iyi literatür bilgimize göre (1+2) boyutlu zamana bağlı konvektif katsayılı sönümlmeli dalga tür konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin sayısal çözümleri ilk kez bu tez çalışmasında göz önüne alınmış ve kararlı sayısal çözümler elde edilmiştir. Elde edilen kararlı sayısal çözümler benzer tür

problemlerin bu tez çalışmasında kullanılan sayısal yöntemle kararlı çözümlerinin elde edilebilirliği için önemli bir yol gösterici olacağı düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Akkaya, V. 2000. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analitik yöntemleri. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana bilim Dalı, 86, İstanbul.
- Asinari, P., Quaglia, M. C., Von Spakovsky, M. R. ve Kasula, B. V. 2007. Direct numerical calculation of the kinematic tortuosity of reactive mixture flow in the anode layer of solid oxide fuel cells by the lattice Boltzmann method. *Journal of Power Sources*, 170(2), 359-375.
- Baliga, B. R. ve Patankar, S. V. 1980. A new finite-element formulation for convection-diffusion problems. *Numerical Heat Transfer*, 3(4), 393-409.
- Bakhvalov, N. S. 1969. On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 9(4), 841-859.
- Braess, D. 2007. *Finite elements: Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, 150, United Kingdom.
- Bucholz, T. L., Hulvey, M. K., Reardon, J. P., Rambo, B. M., Pulvirenti, D. C. ve Weber, L. E., Zaks, A. 2015. Development of an organosilica coating containing carbonic anhydrase for applications in CO₂ capture. *Novel Materials for Carbon Dioxide Mitigation Technology*, 117-147.
- Cannarsa, P., Da Prato, G. ve Zolesio, J. P. 1990. The damped wave equation in a moving domain. *Journal of Differential Equations*, 85(1), 1-16.
- Çepni, M. S. ve Deniz, R. 2005. Sonlu elemanlar yönteminin dönüşümlerde kullanılması. *Jeodezi ve Jeoinformasyon Dergisi*, (93), 20-29.
- Davies, A. J. 2011. *The finite element method: An introduction with partial differential equations*. Oxford University Press, 296, USA.
- Dhatt, G., Lefrançois, E. ve Touzot, G. 2012. *Finite element method*. John Wiley & Sons, 624, USA.
- Eisenstat, S. C., Elman, H., Schultz, M. H. ve Sherman, A. H. 1979. Solving approximations to the convection diffusion equation, In *SPE Reservoir Simulation Symposium (SPE-7684)*, 31 January – 2 February, Book of Abstracts, 117-124, Denver, Colorado.
- Ergün, A. 2001. İnce plakların sonlu eleman metodu ve sonlu farklar metodu ile çözümü ve bu iki metodun karşılaştırılması. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 1(1), 1999.

- Fırat, T. 2015. Bazı kısmi türevli denklemlerin sonlu fark yöntemiyle çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana bilim Dalı, 86, Ankara.
- Grafton, P. E. ve Strome, D. R. 1963. Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method. AIAA Journal, 1(10), 2342-2347.
- Güler, M. ve Şen, S. 2016. Sonlu elemanlar yöntemi hakkında genel bilgiler. Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 5(1), 56-66.
- Huebner, K. H., Dewhirst, D. L., Smith, D. E. ve Byrom, T. G. 2001. The finite element method for engineers. John Wiley & Sons, 744, Canada.
- Il'in, A. M. 1969. Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, 6(2), 596-602.
- Izadkhah, M. M. ve Saberi-Nadjafi, J. 2015. Gegenbauer spectral method for time-fractional convection–diffusion equations with variable coefficients. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 38(15), 3183-3194.
- İnce, E. 2001. İkili sıvı sistemlerinin difüzyon katsayılarının tayini. Mühendislik Bilimleri Dergisi, 7(3), 409-413.
- John, V. ve Schreyer, E. 2008. Finite element methods for time-dependent convection–diffusion–reaction equations with small diffusion. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(3-4), 475-494.
- Koçaslan, A. 2015. Sonlu farklar yöntemi ile çok yüksek frekanslı elektromanyetik dalga alanı hesabı. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana bilim Dalı, 269, Ankara.
- Koenig, H. A. ve Davids, N. 1968. Dynamical finite element analysis for elastic waves in beams and plates. International Journal of Solids and Structures, 4(6), 643-660.
- Kuzulugil, S. D. 2022. Zamana bağlı konvektif katsayılı kararsız konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Erzurum Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana bilim Dalı, 51, Erzurum.
- Lima, S. A., Kamrujjaman, M. ve Islam, M. S. 2021. Numerical solution of convection–diffusion–reaction equations by a finite element method with error correlation. AIP Advances, 11(8), 085225.
- Logan, D. L. 2016. A first course in the finite element method. Cengage Learning, 992, USA.
- Logan, D. L. 2010. First Course In The Finite Element Method, Fifth Edition. CL Engineering, 976, USA.

- Maghsoudi Khouzani, S. 2019. Bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümleri için metotlar. Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, 65, Denizli.
- Morton, K. W. 2019. Numerical solution of convection-diffusion problems. Computer Science, Mathematics & Statistics Press, 286, New York.
- Nagel, J. R. 2012. Introduction to the finite element method. Department of Electrical and Computer Engineering University of Utah, Salt Lake City, 5, Utah.
- Özkul, Y. 1992. Sonlu farklar yöntemi ve uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, 85, Bursa.
- Pinchover, Y. ve Rubinstenin, J. 2005. An Introduction to Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 366, United Kingdom.
- Quarteroni, A. ve Sacco, R. Saleri, F. 2000. Numerical Mathematics. Springer, 654, New York.
- Rao, S. S. 2017. The finite element method in engineering. Butterworth-heinemann, 764, USA.
- Reddy, J. N. 2005. An Introduction to the Finite Element Method. The McGraw-Hill Companies, 761, New York.
- Sanver, M. 1983. Yerkürenin ısı evrimi ve günümüzde yerinin sıcaklığı. Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Maden Mühendisliği Ana Bilim Dalı, 798, İstanbul.
- Selvitopi, H. 2016. Manyetik ortamda magnetohidrodinamik kanal akım problemlerinin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi ile çözümü. Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana bilim Dalı, 115, Trabzon.
- Stynes, M. 2013. Numerical methods for convection-diffusion problems or the 30 years war. Web Sitesi: <http://arxiv.org/abs/1306.5172>, Erişim Tarihi: 23.01.2024.
- Suzue, Y., Shikazono, N. ve Kasagi, N. 2008. Micro modeling of solid oxide fuel cell anode based on stochastic reconstruction. Journal of Power Sources, 184(1), 52-59.
- Thomée, V. 2001. From finite differences to finite elements A short history of numerical analysis of partial differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 128(1-2), 1-54.
- Topçu, M. ve Taşgetiren, S. 2011. İki boyutlu problemler için sonlu elemanlar ağı oluşturulması. Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 3(2), 315-322.

- Uğurlu, E. 2007. İki irisli paralel levhalı dalga kılavuzunun sonlu elemanlar metodu kullanılarak incelenmesi. Yüksel Lisans Tezi, Gebze Teknik Üniversitesi, Gebze Yüksek Teknoloji Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı, 72, Gebze.
- Wang, M., Wang, J., Pan, N. ve Chen, S. 2007. Mesoscopic predictions of the effective thermal conductivity for microscale random porous media. *Physical Review E*, 75(3), 036702.
- Wang, Y. M. 2015. A compact finite difference method for a class of time fractional convection-diffusion-wave equations with variable coefficients. *Numerical Algorithms*, 70(3), 625-651.
- Willingham, T. W., Werth, C. J. ve Valocchi, A. J. 2008. Evaluation of the effects of porous media structure on mixing-controlled reactions using pore-scale modeling and micromodel experiments. *Environmental Science & Technology*, 42(9), 3185-3193.
- Xie, X., Zhao, W. ve Lin, P. 2021. A simple and efficient curved boundary scheme of the lattice Boltzmann method for Robin boundary conditions of convection–diffusion equations. *Applied Mathematics Letters*, 122, 107536.
- Yahnioğlu, N., 2012. Sonlu elemanlar yöntemi. <https://www.coursehero.com/file/66097606/Sonlu-elemanlar-yontemi-sunuppt/>, Erişim Tarihi, 02.01.2024.
- Zhang, J. ve Liu, X. 2021. Supercloseness of linear finite element method on Bakhvalov-type meshes for singularly perturbed convection–diffusion equation in 1D. *Applied Mathematics Letters*, 111, 106624.
- Zhong, J., Zeng, C., Yuan, Y., Zhang, Y. ve Zhang, Y. 2018. Numerical solution of the unsteady diffusion-convection-reaction equation based on improved spectral Galerkin method. *AIP Advances*, 8(4), 045314.108.