

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1/2. MERTEBEDEN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEMİN
ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKMİL YILDIZ

HAZİRAN 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1/2. MERTEBEDEN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEMİN
ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökmil YILDIZ

DANIŞMAN: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

ZONGULDAK

Haziran 2019

KABUL:

Gökmil YILDIZ tarafından hazırlanan “1/2. Mertebeden Kesirli Bir Difüzyon Denklemi için Bir Ters Problemin Çözümünün Kararlılığının Araştırılması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 26/06/2019

Danışman: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



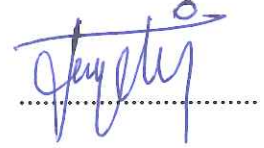
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ali BAŞHAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye : Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK

Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2019



Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Göknil YILDIZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

1/2. MERTEBEDEN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Gökmil YILDIZ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Haziran 2019, 43 sayfa

Bu tezde, kesirli mertebeden bir difüzyon denklemi için bir ters problem ele alınmıştır. Carleman eşitsizlikleri kullanılarak problemin çözümünün kararlılığı araştırılmıştır. Bu kapsamda Xu vd. (2011) ve Yamamoto ve Zhang (2012) tarafından elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Tezin ilk bölümünde bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde; Xu vd. (2011), Eller ve Isakov (2000) de ispat edilen sırasıyla kesirli mertebeden difüzyon denklemi ve eliptik operatör için iki Carleman eşitsizliği incelenmiştir. Son bölümde ise ele alınan problemin çözümünün kararlılığının araştırılması için Yamamoto ve Zhang (2012) de sunulan bir yöntem analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: 1/2. Mertebeden Difüzyon Denklemi, Ters Problem, Carleman Değerlendirmesi, Kararlılık.

Bilim Kodu: 403.06.00



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF THE SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM FOR A HALF-ORDER FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Gökmil YILDIZ

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

June 2019, 43 pages

In this thesis, an inverse problem for a fractional diffusion equation is considered. By using the Carleman type inequalities, stability of the solution of the problem is investigated. In this context, the results obtained by Xu et al. (2011) and Yamamoto and Zhang (2012) are discussed. In the first chapter of the thesis, some basic definitions and theorems are given. In the second chapter, two Carleman inequalities for a fractional order diffusion equation and an elliptic operator which were proved by Xu et al. (2011), Eller and Isakov (2000) respectively are examined. In the last chapter, a method for investigating the stability of the solution of the problem which was presented in the paper Yamamoto and Zhang (2012) is analysed.

Keywords: Half-Order Fractional Diffusion Equation, Inverse Problem, Carleman Estimate, Stability.

Science Code: 403.06.00



TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve değerli vakitlerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Hayatımın her aşamasında maddi ve manevi olarak desteklerini hep yanımda hissettiğim sevgili anne ve babama şükranlarımı sunarım. Tezin yazım aşamasında bana yardımcı olan Arş. Gör. Özge ARIBAŞ'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
BÖLÜM 1 ÖNBİLGİLER	1
1.1 GİRİŞ.....	1
1.2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
1.3 RIEMANN-LIOUVILLE VE CAPUTO ANLAMINDA TÜREV	7
BÖLÜM 2 CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ	17
2.1 1/2. MERTEBEDEN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ.....	17
2.2 ELİPTİK OPERATÖR İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ.....	18
BÖLÜM 3. 1/2. MERTEBEDEN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM..	19
3.1 TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞI.....	19
3.2 SONUÇ.....	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

φ	: Verilen bir fonksiyon
Ω	: Verilen bir bölge
$\bar{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$\mathbb{N}$	: $\{1,2,3, \dots\}$
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı k . mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
$L^1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$	: $L^2(\Omega)$ da iç çarpım
$H^k(\Omega)$	: Kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$D_{a+}^\alpha \varphi$	: α . mertebeden Riemann-Liouville anlamında sol-terafllı kesirli türev
$D_{b-}^\alpha \varphi$	: α . mertebeden Riemann-Liouville anlamında sağ-terafllı kesirli türev
${}^c D_{a+}^\alpha \varphi$	: α . mertebeden Caputo anlamında sol-terafllı kesirli türev
${}^c D_{b-}^\alpha \varphi$	: α . mertebeden Caputo anlamında sağ-terafllı kesirli türev
$D_x^\alpha \varphi$	: α . mertebeden Riemann-Liouville anlamında sol-terafllı kesirli türev
$\partial_x^\alpha \varphi$	: α . mertebeden Caputo anlamında sol-terafllı kesirli türev



BÖLÜM 1

ÖNBİLGİLER

1.1 GİRİŞ

Newton'dan bu yana fiziksel modellerde tam sayı mertebeden türevler yer almaktadır. Diğer taraftan 1695 yılında Leibnitz, kesirli mertebeden türevlerin ileride çok faydalı sonuçlar vereceğine işaret etmiştir.

Doğada ortaya çıkan fiziksel ve dinamik sistemler kalıtsal ve hafızalı olma özelliklerine sahiptir. Sistemlerin geçmişlerine dayanan bu özelliklerin bilinmesi şu anki ve gelecekteki işleyişleri hakkında kolayca öngörüde bulunabilme imkanı sağlar. Söz konusu özellikleri tanımlamak için klasik analizin temel kavramları yeterli olmamaktadır. Bu noktada kesirli türevler ve integraller önemli rol oynamaktadır. Ayrıca kesirli türev operatör tanımlarının birden fazla olması, birbirleri arasındaki ilişkiler ve farklılıklar sistemin yapısına en uygun olanını seçme fırsatı sunar (Avcı 2013).

Günümüzde özellikle düzensiz yayılım (anomalous diffusion) olaylarının matematiksel tasvirinde kesirli mertebeden diferensiyel denklemler karşımıza çıkmaktadır. Bir dış hız veya kuvvet alanının varlığı ve/veya yokluğu durumunda düzensiz yayılım olaylarının çeşitli yollarla modellenmesi mümkündür: i) kesirli Brown hareketi ii) genelleşmiş yayılım denklemleri iii) sürekli zaman rasgele yürüyüş modelleri iv) Langevin denklemleri v) genelleşmiş Langevin denklemleri vi) genelleşmiş termostatistik. Düzensiz yayılım için sadece (iii) ve (v) yaklaşımları sistem hafızası ve olasılık dağılım fonksiyonları için söz konusu olan özel durumları içermektedir. Sürekli zaman rasgele yürüyüş modeli ve genelleşmiş temel denklemler yaklaşımının dezavantajı, kuvvet alanlarının, sınır değer problemlerinin ve faz uzayındaki dinamiklerin direkt olarak dikkate alınamamasıdır (Metzler and Klafter 2000).

Düzensiz kinetik olaylar için alternatif bir yaklaşım, kesirli mertebeden denklemler yardımı ile verilmektedir. Bu yaklaşımla, dış alanların ve sınır değer problemlerinin varlığı durumunda da daha etkin sonuçlar elde edilebilmektedir. Difüzyon denkleminde, yerel zamana

göre türev yerine kesirli bir operatörün yazılmasının birçok karmaşık sistemle ilgili olan hafıza etkilerinin hesaba katılmasını sağladığı Balakrishnan (1985) te gösterilmiştir. Bu tür kesirli kinetik denklemler; düzensiz yayılım süreçlerinin dış kuvvet ve hız alanının varlığı veya yokluğu durumunda modellenmesinde önemli bir araç haline gelmiştir. Özellikle ilk durumda, bu denklemlerin matematiksel yapısı bilinen çözüm yöntemlerinin uygulanmasına imkan tanımaktadır. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda, kesirli reolojik modeller, kesirli yayılım (difüzyon) denklemleri, kesirli taşınım-yayılım (advection-diffusion) denklemleri ve kesirli FokkerPlanck denklemleri farklı açılardan ele alınmıştır. Bu çalışmalarda, zamansal ve/veya uzaysal türevler yerine farklı kesirli operatörler tanımlanmıştır (Metzler and Klafter 2000).

Bu tür denklemlerin başlıca uygulama alanlarından bazıları; biyoloji, biyomühendislik, fizik, elektromanyetik teori, termodinamik, mekanik, sinyal ve sistem teorisi, kaos teorisi ve fraktallar, jeoloji, akışkanlar mekaniği ve kompleks sistemler içerisindeki madde iletimi teorisi, olasılık ve istatistik teorileri, elektrik-elektronik ve kontrol teorisi olarak sıralanabilir (Avcı 2013).

Bu tezde kesirli difüzyon denklemi için bir ters problemin çözümünün kararlılığı, Carleman değerlendirmeleri yardımıyla araştırılmıştır. Burada, ters problemin çözümü ile ilgili fiziksel modeldeki bazı önemli parametrelerin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu tür problemler uzaktan algılama ve tahribatsız değerlendirme ile ilgili birçok problemin matematik modelinde ortaya çıkmaktadır.

1.2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1 *X bir küme olsun. X üzerinde bir topoloji, aşağıda verilen özellikleri sağlayan ve X in alt kümelerinin bir koleksiyonu olan τ kümesi olarak tanımlanır. τ nun elemanlarına açık küme denir.*

- a) *Eğer A herhangi bir küme ve her $\alpha \in A$ için $U_\alpha \in \tau$ ise, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$ dur.*
- b) *Eğer bir F sonlu kümesinin her bir α elemanı için $U_\alpha \in \tau$ ise, $\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha \in \tau$ dur.*
- c) *$X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$ dur.*

τ , X üzerinde bir topoloji olmak üzere, (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir (Browder 1995, s. 123).

Örnek 1.1 $\mathbb{R}$ üzerinde bir τ_u topolojisi; $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(-\infty, a)$ sınırsız açık aralıkları açık küme seçilerek, $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ ile birlikte tanımlanabilir. Benzer şekilde, $\mathbb{R}$ üzerinde bir τ_ℓ topolojisi; $\emptyset$, $\mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ için tüm $(a, +\infty)$ aralıklarının koleksiyonu ile tanımlanabilir.

Tanım 1.2 X bir topolojik uzay, F , X in bir alt kümesi olsun. Eğer F nin tümleyeni $F^c = X \setminus F$ açık ise, F kapalıdır denir.

Açıktır ki kapalı kümeler sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlar:

- a) Eğer F_α her bir $\alpha \in A$ için kapalı ise, $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ kapalıdır.
- b) Eğer $F_1, F_2, \dots, F_n$ kapalı ise, $\bigcup_{k=1}^n F_k$ kapalıdır.
- c) X ve $\emptyset$ kapalıdır (Browder 1995, s. 124).

Tanım 1.3 X bir küme, d de $X \times X$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise, d , X üzerinde bir metriktir (veya X üzerinde uzaklık fonksiyonu) denir ve (X, d) ikilisi bir metrik uzay olarak adlandırılır.

M1) d reel değerli, sonlu ve negatif olmayandır.

M2) $d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olmasıdır.

M3) $d(x, y) = d(y, x)$ simetri özelliği sağlanır.

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ üçgen eşitsizliği sağlanır (Kreyszig 1978, s. 3).

Tanım 1.4 (X, d) bir metrik uzay olsun. Her bir $a \in X$ ve $r > 0$ için a merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

kümesiyle tanımlanır (Browder 1995, s. 128).

Tanım 1.5 X bir metrik uzay, E de X in bir alt kümesi olsun. E alt kümesinin çapı

$$\text{diam} E = \sup \{d(x, y) : x, y \in E\}$$

ile tanımlanır. Eğer $\text{diam} E < +\infty$ ise, E kümesi sınırlıdır denir.

Kolayca görülebilir ki, E nin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul keyfi $a \in X$ ve $r > 0$ için $E \subset B(a, r)$ olmasıdır (Browder 1995, s. 142).

Örnek 1.2 R^1 bütün reel sayıların kümesini gösterir ve genellikle reel sayı doğrusu olarak adlandırılır. R^2 ise düzlem veya kompleks düzlem olarak adlandırılır. Aşağıda verilen alt kümeler R^2 de göz önüne alınmıştır.

	Küme	Kapalı	Açık	Sınırlı
a)	$A = \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$	Hayır	Evet	Evet
b)	$B = \{z \in \mathbb{C} : z \leq 1\}$	Evet	Hayır	Evet
c)	C , boştan farklı ve sonlu bir küme	Evet	Hayır	Evet
d)	$\mathbb{Z}$	Evet	Hayır	Hayır
e)	$D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$	Hayır	Hayır	Evet
f)	$\mathbb{C}$	Evet	Evet	Hayır
g)	(a, b)	Hayır		Evet

Burada dikkat edilmelidir ki D kümesinin bir limit noktası vardır ve $z=0$ dır ancak D nin hiçbir noktası bir limit noktası değildir. Dolayısıyla bir limit noktasının varlığı ve ilgili küme tarafından kapsanması farklı durumlar olup yukarıdaki tabloda ifade edilmiştir. Ayrıca g) şıkında ikinci sütun boş bırakılmıştır. Bunun sebebi (a, b) kümesinin $\mathbb{R}^1$ de açık $\mathbb{R}^2$ de kapalı olmasıdır (Rudin 1976, s. 33).

Tanım 1.6 $A \subseteq \mathbb{C}$ olmak üzere, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon, z_0 , A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcutsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında diferensiyellenebilir denir ve

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.1)$$

ile gösterilir. (1.1) eşitliği

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

şeklinde de gösterilebilir (Palka 1991, s. 62).

Karmaşık fonksiyonlar için türev tanımı reel fonksiyonlardaki tanıma oldukça benzerdir. Ancak bu iki durum arasında önemli bir fark vardır ve bu fark karmaşık fonksiyonların türevlerindeki h sayısının karmaşık oluşundan gelmektedir. Burada $h \rightarrow 0$ için limit alınırken h nın orijinden geçen her eğri boyunca, özel olarak reel ve sanal eksen boyunca da, sıfıra yaklaştığı varsayılır ve bütün bu yaklaşımlarda limitin aynı değeri alması gerekir. Reel değerli fonksiyonlarda ise sadece reel eksen boyunca yaklaşım söz konusudur (Başkan 2012, s. 85).

Bunu bir örnekle görelim:

Örnek 1.3 $f(z) = \bar{z}$ fonksiyonu verilsin. Tanım gereği,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}, \quad (h \neq 0)$$

var olmalıdır. Ancak $h = r + is$ yazılırsa iki durum ile karşılaşılır:

1. Durum: h reelse, yani $h = r$ ise $h \rightarrow 0$ için yukarıdaki ifadenin limiti 1 dir.
2. Durum: h sanalsa, yani $h = is$ ise $h \rightarrow 0$ için yukarıdaki ifadenin limiti -1 dir.

Bu nedenle $f(z) = \bar{z}$ fonksiyonu hiçbir yerde diferensiyellenemez.

Reel değerli fonksiyonlardaki türev kavramı ile kompleks değerli fonksiyonlar için türev kavramı arasındaki önemli bir fark ise, karmaşık fonksiyonlar bir açık kümede birinci mertebeden türeve sahip iseler bu kümede her mertebeden türeve sahiptirler (Başkan 2012, s. 85).

Tanım 1.7 $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu analitiktir denir eğer f fonksiyonu A da sürekli diferensiyellenebilir ise. Eğer f analitik ise bu durumda f sonsuz mertebeden diferensiyellenebilirdir (Conway 1973, s. 34, 73).

Teorem 1.1 $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ve $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları bir z_0 noktasında diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

dır (Palka 1991, s. 65).

Tanım 1.8 (Gamma Fonksiyonu) $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re } z > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir (Samko et al. 1993, s. 15).

Tanım 1.9 Eğer u , G üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise, u nun supportu

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\text{supp}(u) \subseteq \Omega$ ise, Ω da u nun kompakt supportu vardır denir. Burada $G \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı ise, G nin $\mathbb{R}^n$ de kapanışı $\bar{G}$ şeklinde gösterilir. Eğer $\bar{G} \subset \Omega$ ve $\bar{G}$, $\mathbb{R}^n$ in kompakt altkümesi (kapalı ve sınırlı) ise, $G \Subset \Omega$ olarak yazılır (Adams and Fournier 2003, s. 2).

Tanım 1.10 (Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $D(\Omega)$ ile gösterilir:

- i) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için $\text{supp } \varphi_k \in K$ dır.
- ii) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $k \rightarrow \infty$ için $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ yakınsaması Ω bölgesinde düzgün yakınsak ise $k \rightarrow \infty$ için $\varphi_k \xrightarrow{D(\Omega)} \varphi$ yakınsar denir.

$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere, genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1971, s. 66).

Tanım 1.11 (Genelleşmiş Türev) $f \in D'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^\alpha f(\Omega)$ (genelleşmiş) türevi,

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \varphi \in D(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1971, s. 79).

Tanım 1.12 ($H^k(\Omega)$ Uzayı) $H^k(\Omega)$, kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. $H^k(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f_1 D^\alpha \overline{f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir (Mikhailov 1978, s. 121).

Tanım 1.13 ($AC(\Omega)$, $AC^n(\Omega)$ Uzayları) Ω , herhangi bir çifti kesişmeyen $[a_k, b_k] \subset \Omega$ ($k = 1, 2, \dots, n$) aralıklarından oluşan sonlu bir küme olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ olduğunda $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ kalacak bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, o takdirde $f(x)$ fonksiyonuna, Ω bölgesinde mutlak süreklidir denir. Bu fonksiyonların uzayı $AC(\Omega)$ ile gösterilir.

$n \in \mathbb{N}$ ve Ω bir bölge olsun. Ω bölgesinde $(n - 1)$ mertebeye kadar sürekli türevlere sahip ve $f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$ şartını sağlayan f fonksiyonlarının uzayı $AC^n(\Omega)$ ile gösterilir (Samko et al. 1993).

1.3 RIEMANN-LIOUVILLE VE CAPUTO ANLAMINDA TÜREV

Bu bölümde verilecek olan tanımlarda, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $[a, b]$ reel sayılar kümesinde sonlu bir aralık olarak alınmıştır.

Tanım 1.14 (Riemann-Liouville Kesirli Türevi) $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için, α -ıncı mertebeden sol-terafli ve sağ-terafli kesirli türevler sırasıyla

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x - t)^{\alpha}}, \quad (1.2)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t - x)^{\alpha}} \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanır. (1.2) ve (1.3) kesirli türevleri Riemann-Liouville türevleri olarak adlandırılır (Samko et al. 1993, s. 35).

Tanım 1.15 (Caputo Kesirli Türevi) $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için, α -ıncı mertebeden sol-terafli ve sağ-terafli Caputo anlamında kesirli türevler sırasıyla

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) = (D_{a+}^{\alpha} [f(t) - f(a)])(x), \quad (1.4)$$

$$({}^c D_{b-}^{\alpha} f)(x) = (D_{b-}^{\alpha} [f(t) - f(b)])(x) \quad (1.5)$$

şeklinde Riemann-Liouville türevi yardımıyla tanımlanır (Kilbas et al. 2006, s. 91).

Bu tezde sol-terafli Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri göz önüne alınacak olup sırasıyla

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) := D_x^{\alpha} f(x),$$

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) := \partial_x^{\alpha} f(x)$$

gösterimleri kullanılacaktır. Şimdi Caputo kesirli türevi için daha kullanışlı bir tanım verilecektir. Bunun için (1.4) eşitliğini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha f(x) &= (D_x^\alpha[f(t) - f(a)])(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) - f(a)}{(x-t)^\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - f(a) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - f(a) \frac{d}{dx} \left(\frac{(x-t)^{-\alpha+1} (-1)}{-\alpha+1} \Big|_{t=a}^x \right) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - f(a) \frac{d}{dx} \left(0 + \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - f(a) \frac{(-\alpha+1)(x-a)^{-\alpha}}{-\alpha+1} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} \right) \tag{1.6}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
u &= f(t), \quad dv = (x-a)^{-\alpha} \\
du &= f'(t) dt, \quad v = \frac{(x-t)^{-\alpha+1}}{-(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

değişken dönüşümü ile kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{f(t)(x-t)^{-\alpha+1}}{-(1-\alpha)} \Big|_{t=a}^x - \int_a^x f'(t) \frac{(x-t)^{-\alpha+1}}{-(1-\alpha)} dt \right) - \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{f(x)(x-x)^{-\alpha+1}}{-(1-\alpha)} - \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha+1}}{-(1-\alpha)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_a^x f'(t) \frac{(x-t)^{-\alpha+1}}{-(1-\alpha)} dt \right) - \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[0 + \frac{d}{dx} \left(\frac{f(a)(x-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} + \int_a^x f'(t) \frac{(x-t)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} dt \right) - \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{1-\alpha} (1-\alpha)(x-a)^{-\alpha} + \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f'(t)(x-t)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} dt - \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f'(t)(x-t)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} dt - \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f'(t)(x-t)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha+1} dt
\end{aligned}$$

elde edilir ve Leibnitz İntegral Formülü gereği

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dz = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f}{\partial z} dx + f(b(z), z) \frac{db}{dz} - f(a(z), z) \frac{da}{dz}$$

olduğu göz önüne alınıp, son bulunan eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \left[\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (f'(x)(x-t)^{-\alpha+1}) dt \right. \\
&\quad \left. + f'(x) \cdot 0^{-\alpha+1} \cdot 1 - f'(a)(x-a)^{-\alpha+1} \cdot 0 \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \left[\int_a^x f'(t)(1-\alpha)(x-t)^{-\alpha} dt \right] \\
&= \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt
\end{aligned} \tag{1.7}$$

bulunur.

Örnek 1.4 Şimdi $[0, 1]$ aralığında tanımlı bir $f(x) = x + 1$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ -inci mertebeden Riemann-Liouville anlamında kesirli türevini hesaplayalım. f fonksiyonunun x 'e göre $\frac{1}{2}$ -inci mertebeden Riemann-Liouville anlamında tanıma kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(D_x^{1/2} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t+1}{(x-t)^{1/2}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x t(x-t)^{-1/2} dt + \int_0^x (x-t)^{-\alpha} dt \right]
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve

$$\begin{aligned}
t &= u, \quad dv = (x-t)^{-1/2} dt \\
dt &= du, \quad v = -\frac{(x-t)^{-1/2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = -2(x-t)^{1/2}
\end{aligned}$$

değişken dönüşümü yapılarak

$$(D_x^{1/2} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[-\frac{t(x-t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{t=0}^x - \int_0^x -2(x-t)^{1/2} dt + (-2(x-t)^{1/2}) \Big|_{t=0}^x \right]$$

bulunur. Tekrar

$$x - t = s, \quad t \rightarrow 0 \Rightarrow s \rightarrow x$$

$$-dt = ds, \quad t \rightarrow x \Rightarrow s \rightarrow 0$$

değişken değişimi yardımıyla

$$\begin{aligned}
(D_x^{1/2} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[0 - 0 + \int_x^0 2u^{1/2}(-du) - 2 \cdot 0 - (-2x^{1/2}) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x 2u^{1/2} du - 2x^{1/2} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[\frac{2u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_{u=0}^x - 2x^{1/2} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[\frac{4u^{3/2}}{3} \Big|_{u=0}^x - 2x^{1/2} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[\frac{4x^{3/2}}{3} - 0 - 2x^{1/2} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[\frac{4 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2}}{3} - 2 \frac{1}{2} x^{-1/2} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} [2x^{1/2} - x^{1/2}]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\Gamma(\frac{1}{2})$ değerini hesaplayalım. Bunun için Gamma fonksiyonunun tanımını ele alalım.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

şeklinde tanımlı olup bu integralde

$$u^2 = z, 2u du = dz$$

değişken değişimi yapılarak,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{2\alpha-2} e^{-u^2} 2u du$$

bulunur. $\alpha = \frac{1}{2}$ için yukarıdaki integralin ifadesi

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty u^{1-2} e^{-u^2} 2u du \\
&= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du
\end{aligned}$$

olur. $\Gamma(\frac{1}{2})$ değerinin karesini alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(2 \int_0^\infty e^{-u^2} du\right) \left(2 \int_0^\infty e^{-v^2} dv\right) \\
&= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du dv
\end{aligned}$$

yazılır. Burada kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$u = r \cos \theta, v = r \sin \theta, 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta - (-r \sin^2 \theta) \\ &= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 4 \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \end{aligned}$$

olup

$$-r^2 = t, -2r dr = dt, r \longrightarrow 0 \implies t \longrightarrow 0, r \longrightarrow \infty \implies t \longrightarrow -\infty$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \left(\int_0^\infty e^t \left(\frac{-dt}{2} \right) \right) \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \\ &= -2 \left(\int_0^\infty e^t dt \right) \left(\theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= -2 \left(\lim_{s \rightarrow -\infty} \int_0^s e^t dt \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\pi \left(\lim_{s \rightarrow -\infty} e^t \Big|_0^s \right) \\ &= -\pi \left(\lim_{s \rightarrow -\infty} e^s - 1 \right) \\ &= -\pi(0 - 1) \\ &= \pi \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, her $u \geq 0$ için $e^{-u^2} > 0$ olduğundan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du \right) \geq 0$$

dır. Bu durumda

$$[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)]^2 = \pi \implies \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla $f(x) = x + 1$ fonksiyonunun Riemann-Liouville anlamında türevi

$$(D_x^{1/2} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [2x^{1/2} - x^{1/2}]$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 1.5 Şimdi Örnek 1.4 de ele alınan $f(x) = x+1$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ -inci mertebeden Caputo anlamında türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} (\partial_x^{1/2} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{1}{2})} \int_0^x \frac{f'(t) dt}{(x-t)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{1 dt}{(x-t)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-1/2} dt \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$u = (x-t), \quad t=0 \Rightarrow u=x$$

$$du = -dt, \quad t=x \Rightarrow u=0$$

değişken dönüşümü ile

$$\begin{aligned} (\partial_x^{1/2} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_x^0 u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{u=x}^0 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2u^{1/2} \Big|_{u=x}^0 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2(x^{1/2} - 0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2x^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2x^{1/2} \end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 1.2 Kabul edelim ki $f(x) \in AC([a, b])$ olsun. Bu durumda $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, $D_{a+}^\alpha f$ ile $D_{b-}^\alpha f$ kesirli türevleri hemen hemen her yerde mevcuttur. Ayrıca $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$ için, $D_{a+}^\alpha f, D_{b-}^\alpha f \in L^r(a, b)$ dir ve

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t) dt}{(x-t)^\alpha} \right], \\ D_{b-}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(x-b)^\alpha} + \int_x^b \frac{f'(t) dt}{(t-x)^\alpha} \right] \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır (Samko et al. 1993, s. 35).

Yukarıda verilen Lemma 1.2 nin ifadesi Önerme 1.3 ün ispatında kullanılacaktır.

Önerme 1.3 $0 < \alpha < 1$ olsun. Eğer $\varphi \in C[0, T] \cap W^{1,1}(0, T)$ ise, hemen hemen her yerde bir

$$D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds, 0 < \alpha < 1$$

biçiminde tanımlanan Riemann-Liouville anlamında türev vardır. Ayrıca, $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$ için $D_t^\alpha \varphi \in L_r(a, b)$ ve

$$D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\varphi(0)}{t^\alpha} + \partial_t^\alpha \varphi(t) \quad (1.8)$$

dir (Yamamoto and Zhang et al. 2012, s. 4).

İspat. Lemma 1.2 gereği $D_t^\alpha \varphi \in L_r(a, b)$ olduğu görülür. (1.6) eşitliği ile verilen Caputo türev tanımında $a = 0$ alınarak

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_a^t \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^\alpha} - \frac{\varphi(a)}{(t-a)^\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\varphi(0)}{t^\alpha} \\ &= D_t^\alpha \varphi(t) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\varphi(0)}{t^\alpha} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\partial_t^\alpha (\varphi(t)) + \frac{\varphi(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} = D_t^\alpha (\varphi(t))$$

elde edilir. ■

Önerme 1.4 $\varphi \in C[0, T] \cap W^{1,1}(0, T)$ olsun ve

$$\varphi(0) = \partial_t^\beta \varphi(0) = 0$$

sağlansın. Bu durumda

$$\partial_t^\alpha \partial_t^\beta \varphi = \partial_t^{\alpha+\beta} \varphi, 0 < \alpha + \beta \leq 1$$

dir (Yamamoto and Zhang et al. 2012, s. 4).

İspat. Önerme 1.3 gereği, (1.8) den $0 < \alpha < 1$ iken

$$D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\varphi(0)}{t^\alpha} + \partial_t^\alpha \varphi(t)$$

dir. $\varphi(0) = 0$ hipotezini yerine yazarsak

$$D_t^\alpha \varphi(t) = \partial_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds$$

elde edilir. Bu eşitliği kullanarak $\partial_t^\alpha \partial_t^\beta \varphi(t)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha (\partial_t^\beta \varphi(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial_t^\beta \varphi(\mu)}{(t-\mu)^\alpha} d\mu \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\mu \frac{\varphi'(\tau)}{(\mu-\tau)^\beta} d\tau}{(t-\mu)^\alpha} d\mu \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^\mu \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\mu)^\alpha (\mu-\tau)^\beta} d\tau d\mu \\ &\equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} (I). \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \int_0^\mu \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\mu)^\alpha (\mu-\tau)^\beta} d\tau d\mu \\ &= \int_0^t \int_\tau^t \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\mu)^\alpha (\mu-\tau)^\beta} d\mu d\tau \\ &= \int_0^t \varphi'(\tau) \left(\int_\tau^t \frac{d\mu}{(t-\mu)^\alpha (\mu-\tau)^\beta} \right) d\tau \end{aligned}$$

olup

$$t - \mu = u \Rightarrow t - u = \mu,$$

$$-d\mu = du, \quad t - u - \tau = \mu - \tau,$$

$$\mu = \tau \Rightarrow u = t - \tau,$$

$$\mu = 0 \Rightarrow u = 0$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \varphi'(\tau) \left(\int_{t-\tau}^0 \frac{-du}{u^\alpha (t-\tau-u)^\beta} \right) d\tau \\ &= \int_0^t \varphi'(\tau) \left(\int_0^{t-\tau} \frac{du}{u^\alpha (t-\tau-u)^\beta} \right) d\tau \\ &= \int_0^t \varphi'(\tau) \left(\int_0^{t-\tau} \frac{du}{u^\alpha (t-\tau)^\beta \left(1 - \frac{u}{t-\tau}\right)^\beta} \right) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\tau)^\beta} \left(\int_0^{t-\tau} \frac{du}{u^\alpha \left(1 - \frac{u}{t-\tau}\right)^\beta} \right) d\tau ; \end{aligned}$$

bulunur. Tekrar,

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{t-\tau} u = t - \tau \implies v = \frac{t-\tau}{t-\tau} = 1 \\ dv &= \frac{du}{t-\tau} u = 0 \implies v = \frac{0}{t-\tau} = 0 \end{aligned}$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\tau)^\beta} \left(\int_0^1 \frac{(t-\tau) dv}{v^\alpha (t-\tau)^\alpha (1-v)^\beta} \right) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)(t-\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+\beta}} \left(\int_0^1 v^{-\alpha} (1-v)^{-\beta} dv \right) d\tau \\ &= \left(\int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \right) \left(\int_0^1 v^{-\alpha+1-1} (1-v)^{-\beta+1-1} dv \right) \\ &= \left(\int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \right) \beta(1-\alpha, 1-\beta) \end{aligned} \tag{1.9}$$

elde edilir. Yani $\alpha + \beta < 1$ ise,

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha (\partial_t^\beta \varphi(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \right) \beta(1-\alpha, 1-\beta) \right] \\ &= \frac{\beta(1-\alpha, 1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \right) \\ &= \frac{\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha+1-\beta)}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \right). \end{aligned}$$

Burada

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

olduğu göz önüne alınır ve

$$\begin{aligned} dv &= \varphi'(\tau) d\tau, u = (t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} \\ v &= \varphi(\tau), du = -(1-(\alpha+\beta))(t-\tau)^{-(\alpha+\beta)} d\tau \end{aligned}$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha(\partial_t^\beta \varphi(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left((t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} \varphi(\tau) \Big|_{\tau=0}^t \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \frac{\varphi(\tau)(1-(\alpha+\beta))}{(t-\tau)^{(\alpha+\beta)}} d\tau \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left(0 \cdot \varphi(t) - (t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} \varphi(0) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \frac{\varphi(\tau)(1-(\alpha+\beta))}{(t-\tau)^{(\alpha+\beta)}} d\tau \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \frac{\varphi(\tau)(1-\alpha-\beta)}{(t-\tau)^{(\alpha+\beta)}} d\tau \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha+\beta)}} d\tau \right) \\
&= \partial_t^{\alpha+\beta} \varphi(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\alpha + \beta = 1$ durumunda ise (1.9) eşitliği

$$\begin{aligned}
I &= \left(\int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)^{1-1} d\tau \right) \beta(1-\alpha, 1-\beta) \\
&= \left(\int_0^t \varphi'(\tau) d\tau \right) \beta(1-\alpha, 1-\beta) \\
&= (\varphi(t) - \varphi(0)) \beta(1-\alpha, 1-\beta) \\
&= \varphi(t) \beta(1-\alpha, 1-\beta)
\end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha(\partial_t^\beta \varphi(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial I}{\partial t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi(t) \beta(1-\alpha, 1-\beta)) \\
&= \frac{\beta(1-\alpha, 1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \varphi'(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \varphi'(t); \alpha + \beta = 1 \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} \varphi'(t) \\
&= \varphi'(t) \\
&= \partial_t^{\alpha+\beta} \varphi(t)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

BÖLÜM 2

CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ

2.1 1/2. MERTEBEDEN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

Bu bölümde, ispatı Xu et al. (2011) de verilen $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli bir difüzyon denklemi için bir Carleman değeriendirme ele alınacaktır. Carleman değeriendirme, bir kısmi türevli denklemin çözümü için ağırlıklı L_2 uzayında elde edilmiş olan ve büyük bir parametre içeren bir eşitsizliktir.

Lemma 2.1 *Bir $\lambda_0 > 0$ vardır öyle ki her $\lambda \geq \lambda_0$ için $s_0 > 0$ ve $C > 0$ sayıları seçilebilir öyle ki her $s \geq s_0$ için ve $\text{supp}(u) \subset Q_\varepsilon$, $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq \ell$ şartlarını sağlayan her $u \in C([\varepsilon_0, T - \varepsilon_0]; H^4(\Omega)) \cap C^1[\varepsilon_0, T - \varepsilon_0]; L^2(\Omega)$ için*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_0} \left(\frac{1}{s\varphi} |\partial_t u|^2 + s\lambda^2 \mu^2 \varphi |\partial_x^3 u|^2 + s^3 \lambda^4 \mu^4 \varphi^3 |\partial_x^2 u|^2 \right. \\ & \quad \left. + s^5 \lambda^6 \mu^6 \varphi^5 |\partial_x u|^2 + s^7 \lambda^8 \mu^8 \varphi^7 u^2 \right) e^{2s\varphi} dx dt \\ & \leq C \int_{Q_0} |(\partial_t - \partial_x^4) u|^2 e^{2s\varphi} dx dt \end{aligned} \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır (Xu et al. 2011, s. 1358).

Aşağıda Lemma 2.1 in ispatının genel aşamaları sunulmuştur.

1. Adım: Öncelikle, yoğunluk tanımından dolayı ispat $C_0^\infty(Q)$ uzayında yapılır.
2. Adım: Yeni bilinmeyen bir fonksiyon ve bir operatör tanımlanır:

$$w = e^{s\varphi} u, Pw = e^{s\varphi} (\partial_t - \partial_1^4)(e^{-s\varphi} w).$$

3. Adım:

$$\|Pw\|^2 = \|P_1 w\|^2 + \|P_2 w\|^2 + 2(P_1 w + P_2 w)$$

eşitsizliğinde $(P_1 w, P_2 w)$ ifadesi için bir alt sınıır bulunması hedeflenir.

4. Adım: $(P_1 w, P_2 w) = \sum_{k=1}^9 J_k$ eşitliğinde J_k terimleri tek tek değerlendirilerek

$$\begin{aligned}
& (P_1 w, P_2 w) + \varepsilon \int_Q |P_2 w|^2 dx dt \\
& \geq 2 \int_Q s \lambda^2 \varphi \mu^2 |\partial_1^3 w|^2 dx dt \\
& \quad + 65 \int_Q s^3 \lambda^4 \varphi^3 \mu^4 \left(1 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{\lambda}\right) |\partial_1^2 w|^2 dx dt \\
& \quad - (19 + \delta) \int_Q (s^5 \lambda^6 \varphi^5 \mu^6 + C s^3 \lambda^6 \varphi^3 \mu^6 + C s^4 \lambda^6 \varphi^4 \mu^6) |\partial_1 w|^2 dx dt \\
& \quad + 13 \int_Q s^7 \lambda^8 \varphi^7 \mu^8 w^2 dx dt.
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dikkat edilirse burada $|\partial_1 w|^2$ ifadesini içeren integralin katsayısı negatiftir. Bu nedenle başka bir değerlendirme elde etmek gerekir.

5. Adım: $\int_Q (Pw) \times s^3 \lambda^4 \varphi^3 \mu^4 w dx dt = \sum_{k=1}^6 I_k$ integralini değerlendirmek için I_k terimleri tek tek incelenir.

6. Adım: 4. Adım ve 5. Adım'da elde edilen eşitsizlikler toplanır.

7. Adım: Son olarak $s > 0$ büyük parametresi yardımıyla ve w fonksiyonu u cinsinden yazılarak istenen eşitsizlik elde edilir.

2.2 ELİPTİK OPERATÖR İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

Aşağıda eliptik denklem için Isakov (2006) da verilmiş olan ve ispatı Eller ve Isakov (2000) tarafından yapılan bir Carleman değerlendirmesi sunulmuştur.

Teorem 2.2 (Teorem 3.3.7, Isakov 2006, s. 62) *A ikinci mertebeden bir eliptik operatör ve Ω sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda $C_1 = C_1(\varepsilon)$, $C_2 = C_2(\varepsilon, \sigma)$ sabitleri vardır öyleki her $u \in C_0^2(\Omega)$ ve $|\alpha| \leq 2$ için $C_1 < \sigma$, $C_2 < \sigma$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\sigma \int_{\Omega} (\sigma \tau \varphi)^{3-2|\alpha|} e^{2\tau \varphi} |\partial^\alpha u|^2 \leq C_1 \int_{\Omega} e^{2\tau \varphi} |Au|^2.$$

Burada τ birinci, σ ikinci büyük parametre olup $\psi(x) = |x - b|^2$, $\varphi = e^{\sigma \psi}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{\varepsilon < \psi\}$ şeklinde tanımlıdır.

BÖLÜM 3

1/2. MERTEBEDEN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu bölümde bir

$$Q = \{(x, t); x \in \Omega, t \in (0, T)\}, \Omega = (0, \ell)$$

bölgesinde

$$(\partial_t^{1/2} - \partial_x^2)u(x, t) = p(x)u(x, t), (x, t) \in Q \quad (3.1)$$

1/2. mertebeden kesirli difüzyon denklemi

$$u(x, 0) = a(x), x \in (0, \ell) \equiv \Omega$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = g(t), \partial_x u(0, t) = h(t)$$

Cauchy verisi ile birlikte ele alınmıştır. Burada $a(x), g(t)$ ve $h(t)$ bilinen fonksiyonlardır. Q bölgesinde $a \not\equiv 0$ veya $(0, T)$ aralığında $g, h \not\equiv 0$ dır. $\partial_t^{1/2}$ gösterimi Caputo anlamında kesirli türevi ifade etmektedir.

Problem 3.1 (3.1) denkleminde $u(., t_0)$, $t_0 > 0$ ek bilgisi yardımıyla $p(x)$ bilinmeyen katsayısının bulunması ters problemini ele alalım.

3.1 TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞI

Kabul edelim ki $t_0 \in (0, T)$ keyfi sabitlenmiş bir nokta olsun. Ayrıca $x_0 - \ell > 0$ yeterince küçük olacak şekilde $x_0 > \ell$ seçelim. Böylece $(x_0 - \ell)^2 < \frac{1}{3}x_0^2$ olduğu görülür.

İspat için öncelikle bazı gösterimleri tanımlayalım:

$$d(x) = |x - x_0|^2,$$

$$\psi(x, t) : = d(x) - \beta(t - t_0)^2 > 0, (x, t) \in \overline{Q},$$

burada $\beta > 0$ sabiti

$$\sqrt{\frac{x_0^2}{\beta}} < \min \{t_0, T - t_0\} \quad (3.2)$$

eşitsizliğini sağlar. (3.2) gereği, eğer $\psi(x, t) > 0$ ve $0 < x < \ell$ ise, o halde $0 < t < T$ dir.

Ek olarak

$$x_0^2 > \varepsilon > (x_0 - \ell)^2$$

için

$$Q_\varepsilon \equiv \{(x, t) \in Q; \psi(x, t) > \varepsilon\}, \quad \Omega_\varepsilon \equiv Q_\varepsilon \cap \{t = t_0\}$$

kümelerini tanımlayalım. Dikkat edilirse $x_0^2 > \varepsilon > (x_0 - \ell)^2$ için $\Omega_\varepsilon = (0, x_0 - \sqrt{\varepsilon}) \neq \emptyset$ dır.

Aşağıda Yamamoto ve Zhang (2012) de yer alan bir teorem verilmiştir.

Teorem 3.1 *Kabul edelim ki p ve q katsayılarına karşılık gelen (3.1) denkleminin iki çözümü sırasıyla $u(p)$ ve $u(q)$ olsun. Ayrıca $M > 0$ ve yeteri kadar küçük $\varepsilon_0 > 0$ sayıları vardır öyle ki*

$$\|u(p)\|_{C^2([\varepsilon_0, T-\varepsilon_0]; W^{2,\infty}(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \cap C^3([\varepsilon_0, T-\varepsilon_0]; L^2(\Omega))} + \|u(p)\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} \leq M, \quad (3.3)$$

$$\|u(q)\|_{C^2([\varepsilon_0, T-\varepsilon_0]; W^{2,\infty}(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \cap C^3([\varepsilon_0, T-\varepsilon_0]; L^2(\Omega))} + \|u(q)\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} \leq M, \quad (3.4)$$

$$\partial_x^j p(0) = \partial_x^j q(0), \quad j = 0, 1, \quad \|p\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}, \quad \|q\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} < M, \quad (3.5)$$

bağıntıları sağlanır. Ek olarak

$$u(p)(x, t_0), \quad u(q)(x, t_0) \neq 0, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (3.6)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda her

$$\varepsilon \in ((x_0 - \ell)^2, \frac{1}{3}x_0^2)$$

için ε ve M 'ye bağlı $C > 0$ ve $\kappa \in (0, 1)$ sabitleri vardır öyle ki

$$\|p - q\|_{H^2(\Omega_{3\varepsilon})} \leq C \|(u(p) - u(q))(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^\kappa \quad (3.7)$$

dır. Ayrıca belirtmek gerekir ki $(x_0 - \ell) < \varepsilon < \frac{1}{3}x_0^2$ şartı ile $\Omega_{3\varepsilon} = (0, x_0 - \sqrt{3\varepsilon}) \neq \emptyset$ olur.

Uyarılar

(3.7) değerlendirmesi, $\kappa \in (0, 1)$ olduğundan Hölder tipinde bir koşullu kararlılık değerlendirmesidir ve önceden belirlenmiş (3.3)-(3.5) sınırlılık koşullarının sağlanması durumunda gerçekleşir. Doğal sayı mertebeli katsayı ters probleminin aksine burada $u(., 0)$ ve $u(., t_0)$ şeklinde iki uzaysal veriye ihtiyaç duyulur.

Sınır koşulu $x = \ell$ de $u(\ell, t) = \tilde{g}(t)$, $0 < t < T$ olarak verilmiştir. Eğer $\overline{\Omega}$ üzerinde $a > 0$, $(0, T)$ içinde $g, \tilde{g} > 0$ ise, kesirli denklemler için maksimum prensibi gereği, her $(x, t) \in \overline{Q}$ için $u(p)(x, t)$, $u(q)(x, t)$ çözümünü pozitif olur ve böylece (3.6) sağlanır.

Yeterince düzgün $a, g, \tilde{g}, p, q$ ve $a(0) = g(0)$ ve $a(\ell) = \tilde{g}(0)$ gibi yeterli bağdaşabilirlik koşulları ile (3.3)-(3.5) ispatlanabilir (Sakamoto and Yamamoto 2011). Bu çalışmada ters problem üzerine odaklandığımızdan, (3.1) denklemi için sınır değer/başlangıç değer problemlerinin regülerliği tartışılmayacaktır.

İspat. İlk olarak Problem 3.1'i bir ters kaynak problemine (lineer probleme) indirgeyelim. Bu amaçla (3.1) denklemi sırasıyla $p(x)$ ve $q(x)$ katsayıları için yazılarak taraf tarafa çıkarılır ve

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(p)(x, t) - u(q)(x, t), r(x) = p(x) - q(x), \\ R(x, t) &= u(p)(x, t) \end{aligned}$$

gösterimleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (\partial_t^{1/2} - \partial_x^2)u(x, t) &= p(x)u(p)(x, t) - q(x)u(q)(x, t) \\ &= p(x)u(p)(x, t) - q(x)u(q)(x, t) - q(x)u(p)(x, t) + q(x)u(p)(x, t) \\ &= q(x)u(x, t) + r(x)R(x, t), (x, t) \in Q; \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad x \in (0, l), \\ u(0, t) &= 0, \quad \partial_x u(0, t) = 0, t \in (0, T) \end{aligned}$$

homojen koşulları bulunur. Bu durumda katsayı ters problemi

$$\begin{aligned} \left(\partial_t^{\frac{1}{2}} - \partial_x^2\right) u(x, t) &= q(x)u(x, t) + r(x)R(x, t), (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) &= 0, x \in (0, l) \equiv \Omega, \\ u(0, t) &= 0, \partial_x u(0, t) = 0, t \in (0, T) \end{aligned} \tag{3.8}$$

kaynak ters problemine dönüştürülür. Burada q ve R bilinen fonksiyonlar olup

$$\|q\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \leq M$$

ve

$$\begin{aligned} R &\in C^2((0, T); W^{2,\infty}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^\infty(\Omega)), \\ \partial_t^{\frac{1}{2}} R &\in C^2((0, T); L^\infty(\Omega)), \\ R(x, t_0) &\neq 0, \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{3.9}$$

olduğu kabul edilir. O halde yukarıdaki ters kaynak problemi için aşağıdaki lemmayı verebiliriz. ■

Lemma 3.2 *Kabul edelim ki*

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^2((0, T); W^{2,\infty}(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \cap C^3((0, T); L^2(\Omega)) \tag{3.10}$$

fonksiyonu (3.8) problemini ve $r \in W^{2,\infty}(\Omega)$ fonksiyonu da $r(0) = \partial_x r(0) = 0$ koşullarına sağlasın. (3.9) kabulleri altında $C > 0$ ve $\kappa \in (0, 1)$ sabitleri vardır öyle ki

$$\|r\|_{H^2(\Omega_{3\varepsilon})} \leq C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^\kappa \tag{3.11}$$

sağlanır.

Bu lemmanın ispatı beş adımda gerçekleştirilecektir. Birinci adımda (3.8) probleminde geçen denklem, kesirli türevden kurtarılarak dördüncü mertebeden bir denkleme indirgenecektir. İkinci adımda bu denklemin t -ye göre türevi alınıp, yeni bilinmeyen fonksiyonlar tanımlamak suretiyle iki yeni denklem elde edilecektir. Ayrıca ters problemin çözümünün kararlılığı için bir Carleman değerlendirmesi verilecektir. Üçüncü adımda kararlılık için temel bir eşitsizlik gösterilecektir. Dördüncü adımda ortaya çıkan ikinci mertebeden bir eliptik denklem için bir Carleman eşitsizliği verilecektir. Beşinci adımda da ispat tamamlanacaktır.

Adım 1. İlk olarak kesirli türevden normal türeve geçmek için Önerme 1.3 ve Önerme 1.4'ü kullanacağız. Daha sonra t -ye göre katsayısı singüler olan bir ikinci mertebeden operatörde r nin bulunması ters problemini göz önüne alacağız.

Dikkat edilmesi gerekir ki,

$$\partial_x^2 u(x, 0) = 0$$

dır. Gerçekten

$$u(x, 0) = 0$$

olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} u_x(x, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, 0) - u(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \\ \partial_x^2 u(x, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_x u(x+h, 0) - \partial_x u(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

gösterilebilir. Dolayısıyla (3.8) probleminde geçen denklemde $t = 0$ için $u(x, t)$ çözümü

$$\begin{aligned} (\partial_t^{1/2} - \partial_x^2)u(x, 0) &= q(x)u(x, 0) + r(x)R(x, 0), \\ \partial_t^{1/2}u(x, 0) &= r(x)R(x, 0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer yandan $r(x)R(x, 0)$ ifadesinin sıfıra eşit olup olmadığını bilmediğimizden Önerme 1.3 ve Önerme 1.4 ün hipotezlerini sağlayıp sağlamadığını bilemeyiz. Bunun için $u(x, t)$ fonksiyonuna bağlı başka bir $v(x, t)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{2r(x)R(x, 0)t^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

(3.2) den, yeterince küçük $\varepsilon_0 > 0$ için $\{(x, t); 0 \leq x \leq \ell, \psi(x, t) > 0\} \subset (\varepsilon_0, T - \varepsilon_0)$ olduğu dikkate alınmalıdır. Böylece, $Q_0 \cap \bar{\Omega} \subset (\varepsilon_0, T - \varepsilon_0)$ yazılabilir. Ayrıca, $\frac{1}{3}x_0^2 > \varepsilon > (x_0 - \ell)^2$ olduğundan, $\bar{Q}_\varepsilon$ üzerinde u ve R , $v(x, t)$ yeterince regülerliğe sahiptir ve bu eşitlik (3.9) ve (3.10) dan elde edilmektedir. O halde

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(x, 0) - \frac{2r(x)R(x, 0)0}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 0, \\ \partial_t^{1/2}v(x, t) &= \partial_t^{1/2}u(x, t) - \frac{2r(x)R(x, 0)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\partial_t^{1/2}(t^{1/2}), \\ \partial_t^{1/2}v(x, 0) &= r(x)R(x, 0) - \frac{2r(x)R(x, 0)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\partial_t^{1/2}\partial_t^{1/2}v = \partial_t v$$

eşitliği sağlanır. O halde (3.12) denkleminin her iki tarafına $\partial_t^{1/2}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\partial_t^{1/2}\partial_t^{1/2}v &= \partial_t^{1/2}\left(\partial_t^{1/2}u(x,t) - \frac{2r(x)R(x,0)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\partial_t^{1/2}(t^{1/2})\right) \\
&= \partial_t^{1/2}\left(\partial_x^2u(x,t) + q(x)u(x,t) + r(x)R(x,t) - \frac{2r(x)R(x,0)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \partial_t^{1/2}\left(\partial_x^2u(x,t) + q(x)\partial_t^{1/2}u(x,t) + r(x)\partial_t^{1/2}R(x,t) - \partial_t^{1/2}(r(x)R(x,0))\right) \\
&= \partial_x^2(\partial_t^{1/2}u(x,t)) + q(x)\partial_t^{1/2}u(x,t) + r(x)\partial_t^{1/2}R(x,t) - 0 \\
&= \partial_x^2(\partial_x^2u(x,t) + q(x)u(x,t) + r(x)R(x,t)) \\
&\quad + q(x)(\partial_x^2u(x,t) + q(x)u(x,t) + r(x)R(x,t)) + r(x)\partial_t^{1/2}R(x,t) \\
&= \partial_x^4u(x,t) + \partial_x(q(x)(\partial_xu(x,t)) + q'(x)u(x,t)) \\
&\quad + \partial_x(r'(x)R(x,t) + r(x)\partial_x(R(x,t))) + q(x)\partial_x^2u(x,t) \\
&\quad + [q(x)]^2u(x,t) + q(x)r(x)R(x,t) + r(x)\partial_t^{1/2}R(x,t) \\
&= \partial_x^4u(x,t) + q'(x)\partial_xu(x,t) + q(x)\partial_x^2u(x,t) \\
&\quad + q''(x)u(x,t) + q'(x)\partial_xu(x,t) + r''(x)R(x,t) \\
&\quad + r'(x)\partial_xR(x,t) + r'(x)\partial_xR(x,t) + r(x)\partial_x^2R(x,t) + \\
&\quad q(x)\partial_x^2u(x,t) + [q(x)]^2u(x,t) + q(x)r(x)R(x,t) + r(x)\partial_t^{1/2}R(x,t) \\
&= \partial_x^4u(x,t) + 2q(x)\partial_x^2u(x,t) + 2q'(x)\partial_xu(x,t) \\
&\quad + [q''(x) + (q(x))^2]u(x,t) + r(x)\partial_x^2R(x,t) + 2r'(x)\partial_xR(x,t) \\
&\quad + [r''(x) + q(x)r(x)]R(x,t) + r(x)\partial_t^{1/2}R(x,t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. Burada $0 < \alpha < 1$ olmak üzere t^α nın Caputo anlamında türevi alınarak

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha t^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{(s^\alpha)'}{(t-s)^{\alpha+1-1}} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\alpha s^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha} ds \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{-\alpha} ds \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} t^{-\alpha} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} ds \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} t^{-1} ds
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}\frac{s}{t} &= u, \quad \frac{ds}{t} = du, \\ s &\longrightarrow 0 \implies u \longrightarrow 0, \\ s &\longrightarrow t \implies u \longrightarrow 1\end{aligned}$$

değişken dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha t^\alpha &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} t^{-1} ds \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{-\alpha} du \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \beta(-\alpha+1, \alpha) \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(-\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} \\ &= \alpha\Gamma(\alpha) \\ &= \Gamma(\alpha+1)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ için

$$\partial_t^{1/2} t^{1/2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

dir. Ayrıca $v(x, t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi alınıp

$$\begin{aligned}\partial_t v(x, t) &= \partial_t u(x, t) - \frac{2r(x)R(x, 0)}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{2} t^{-1/2} \\ &= \partial_t u(x, t) - \frac{r(x)R(x, 0)}{\Gamma(1/2)t^{1/2}}\end{aligned}\tag{3.14}$$

yukarıda elde ettiğimiz

$$\partial_t^{1/2} \partial_t^{1/2} v = \partial_t v$$

eşitliği kullanılarak (3.13) ve (3.14) ün sağ tarafları eşitlenirse

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \partial_x^4 u + 2q\partial_x^2 u + 2(\partial_x q)(\partial_x u) + (\partial_x^2 q + q^2)u \\ &\quad + \left[R\partial_x^2 r + 2(\partial_x R)(\partial_x r) + (\partial_t^{1/2} R + \partial_x^2 R + qR)r + \frac{r(x)R(x, 0)}{\Gamma(1/2)t^{1/2}} \right] \\ : &= Lu + \tilde{F}\end{aligned}\tag{3.15}$$

dördüncü mertebeden denklemi elde edilir.

Adım 2. Şimdi (3.15) denkleminin t -ye göre türevlerini alalım:

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u &= Lu_t + \tilde{F}_t, \\ \partial_t^3 u &= Lu_{tt} + \tilde{F}_{tt}\end{aligned}$$

ve

$$u_1 = \partial_t u, \quad u_2 = \partial_t^2 u \quad (3.16)$$

gösterimlerini kullanalım. Burada

$$\partial_t u_1 = Lu_1 + \partial_t \tilde{F}, \quad (3.17)$$

$$\partial_t u_2 = Lu_2 + \partial_t^2 \tilde{F} \quad (3.18)$$

bulunur. Bu işlemler sırasında genelleşmiş türev alınırken türevin sırasının değiştirilebileceği unutulmamalıdır.

Lemma 2.1 ile verilen Carleman değerlendirmesini problemimize uygulayabilmek için bir kesme fonksiyonu tanımlamak gerekir. Çünkü Lemma 2.1, kompakt supporta sahip fonksiyonlar için sağlanmaktadır. Bu amaçla bir kesme fonksiyonunu

$$\chi(x, t) = \begin{cases} 1, & Q_{2\varepsilon}, \\ 0, & Q \setminus \overline{Q_\varepsilon} \end{cases} \quad (3.19)$$

ve buna bağlı olarak

$$v_1 = u_1 \chi, \quad v_2 = u_2 \chi \quad (3.20)$$

yeni bilinmeyen fonksiyonlarımızı tanımlayalım. Bu durumda (3.17) denkleminde (3.20) deki ilk eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 &= Lu_1 + \partial_t \tilde{F} \\ &= \partial_x^4 u_1 + 2q(x)\partial_x^2 u_1 + 2q'(x)(\partial_x u_1) + (q^2(x) + q''(x))u_1 + \partial_t \tilde{F} \\ &= \partial_x^4 (v_1 \chi^{-1}(x, t)) + 2q(x)(\partial_x^2 (v_1 \chi^{-1}(x, t))) + 2q'(x)(\partial_x (v_1 \chi^{-1}(x, t))) \\ &\quad + (q^2(x) + q''(x))(v_1 \chi^{-1}(x, t)) + \partial_t \tilde{F}\end{aligned} \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21) deki türevleri hesaplayalım:

$$\partial_x (v_1 \chi^{-1}) = (\partial_x v_1) \chi^{-1} + v_1 (\partial_x \chi^{-1}),$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 (v_1 \chi^{-1}) &= \partial_x (\partial_x (v_1 \chi^{-1})) \\
&= \partial_x ((\partial_x v_1) \chi^{-1} + v_1 (\partial_x \chi^{-1})) \\
&= (\partial_x^2 v_1) \chi^{-1} + (\partial_x v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + (\partial_x v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + v_1 (\partial_x^2 \chi^{-1}) \\
&= (\partial_x^2 v_1) \chi^{-1} + 2(\partial_x v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + v_1 (\partial_x^2 \chi^{-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^3 (v_1 \chi^{-1}) &= \partial_x (\partial_x^2 (v_1 \chi^{-1})) \\
&= \partial_x ((\partial_x^2 v_1) \chi^{-1} + 2(\partial_x v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + v_1 (\partial_x^2 \chi^{-1})) \\
&= (\partial_x^3 v_1) \chi^{-1} + (\partial_x^2 v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + 2(\partial_x^2 v_1) (\partial_x \chi^{-1}) \\
&\quad + 2(\partial_x v_1) (\partial_x^2 \chi^{-1}) + (\partial_x v_1) (\partial_x^2 \chi^{-1}) + v_1 (\partial_x^3 \chi^{-1}) \\
&= (\partial_x^3 v_1) \chi^{-1} + 3(\partial_x^2 v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + 3(\partial_x v_1) (\partial_x^2 \chi^{-1}) + v_1 (\partial_x^3 \chi^{-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^4 (v_1 \chi^{-1}) &= \partial_x ((\partial_x^3 v_1) \chi^{-1} + 3(\partial_x^2 v_1) (\partial_x \chi^{-1}) \\
&\quad + 3(\partial_x v_1) (\partial_x^2 \chi^{-1}) + v_1 (\partial_x^3 \chi^{-1})) \\
&= (\partial_x^4 v_1) \chi^{-1} + (\partial_x^3 v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + 3(\partial_x^3 v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + 3(\partial_x^2 v_1) (\partial_x^2 \chi^{-1}) \\
&\quad + 3(\partial_x^2 v_1) (\partial_x^2 \chi^{-1}) + 3(\partial_x v_1) (\partial_x^3 \chi^{-1}) + (\partial_x v_1) (\partial_x^3 \chi^{-1}) + v_1 (\partial_x^4 \chi^{-1}) \\
&= (\partial_x^4 v_1) \chi^{-1} + 4(\partial_x^3 v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + 6(\partial_x^2 v_1) (\partial_x^2 \chi^{-1}) + 4(\partial_x v_1) (\partial_x^3 \chi^{-1}) \\
&\quad + v_1 (\partial_x^4 \chi^{-1}).
\end{aligned}$$

Şimdi bu türevleri (3.21) eşitliğinde yazalım:

$$\begin{aligned}
\partial_t u_1 &= (\partial_x^4 v_1) \chi^{-1} + 4(\partial_x^3 v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + 6(\partial_x^2 v_1) (\partial_x^2 \chi^{-1}) + 4(\partial_x v_1) (\partial_x^3 \chi^{-1}) \\
&\quad + v_1 (\partial_x^4 \chi^{-1}) + 2q(x) ((\partial_x^2 v_1) \chi^{-1} + 2(\partial_x v_1) (\partial_x \chi^{-1}) + v_1 (\partial_x^2 \chi^{-1})) \\
&\quad + 2q'(x) ((\partial_x v_1) \chi^{-1} + v_1 (\partial_x \chi^{-1})) + (q^2(x) + q''(x)) (v_1 \chi^{-1}) + \partial_t \tilde{F}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ayrıca (3.22) ifadesini

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)} \right)' &= \frac{0 \cdot g(x) - 1g'(x)}{[g(x)]^2} \\
&= (-g'(x)) [g(x)]^2
\end{aligned}$$

eşitliği yardımı ile hesaplayalım. Denklemin sağ tarafında olan türevler

$$\partial_t (\chi^{-1}) = -\chi^{-2} (\partial_t \chi),$$

$$\partial_x (\chi^{-1}) = -\chi^{-2} (\partial_x \chi),$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 (\chi^{-1}) &= \partial_x (-\chi^{-2}(\partial_x \chi)) \\
&= (-(-2)\chi^{-3}(\partial_x \chi))(\partial_x \chi) - \chi^{-2}(\partial_x^2 \chi) \\
&= 2\chi^{-3}(\partial_x \chi)^2 - \chi^{-2}(\partial_x^2 \chi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^3 (\chi^{-1}) &= \partial_x (\partial_x^2 (\chi^{-1})) \\
&= \partial_x (2\chi^{-3}(\partial_x \chi)^2 - \chi^{-2}(\partial_x^2 \chi)) \\
&= (2(-3)\chi^{-4}(\partial_x \chi))(\partial_x \chi)^2 + 2\chi^{-3}(2(\partial_x \chi)(\partial_x^2 \chi)) \\
&\quad - ((-2)\chi^{-3}(\partial_x \chi))(\partial_x^2 \chi) - \chi^{-2}(\partial_x^3 \chi) \\
&= -6\chi^{-4}(\partial_x \chi)^3 + 6\chi^{-3}(\partial_x^2 \chi)(\partial_x \chi) - \chi^{-2}(\partial_x^3 \chi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^4 (\chi^{-1}) &= \partial_x (\partial_x^3 \chi^{-1}) \\
&= \partial_x (-6\chi^{-4}(\partial_x \chi)^3 + 6\chi^{-3}(\partial_x^2 \chi)(\partial_x \chi) - \chi^{-2}(\partial_x^3 \chi)) \\
&= (-6(-4)\chi^{-5}(\partial_x \chi))(\partial_x \chi)^3 - 6\chi^{-4}(3(\partial_x \chi)^2(\partial_x^2 \chi)) \\
&\quad + 6(-3\chi^{-4}(\partial_x \chi))(\partial_x^2 \chi)(\partial_x \chi) + 6\chi^{-3}(\partial_x^3 \chi)(\partial_x \chi) \\
&\quad + 6\chi^{-3}(\partial_x^2 \chi)(\partial_x^2 \chi) - (-2\chi^{-3}(\partial_x \chi)(\partial_x^3 \chi) + \chi^{-2}(\partial_x^4 \chi)) \\
&= 24\chi^{-5}(\partial_x \chi)^4 - 36\chi^{-4}(\partial_x \chi)^2(\partial_x^2 \chi) \\
&\quad + 8\chi^{-3}(\partial_x^3 \chi)(\partial_x \chi) + 6\chi^{-3}(\partial_x^2 \chi)^2 - \chi^{-2}(\partial_x^4 \chi)
\end{aligned}$$

şeklindedir ve denklemin sol tarafındaki türev

$$\begin{aligned}
\partial_t u_1 &= \partial_t (v_1 \chi^{-1}) = (\partial_t v_1) \chi^{-1} + v_1 (\partial_t \chi^{-1}) \\
&= (\partial_t v_1) \chi^{-1} - v_1 \chi^{-2} (\partial_t \chi)
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır.

Bu türevler (3.22) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
(\partial_t v_1) \chi^{-1} - v_1 \chi^{-2} (\partial_t \chi) &= (\partial_x^4 v_1) \chi^{-1} + 4(\partial_x^3 v_1) [-\chi^{-2} (\partial_x \chi)] \\
&+ 6(\partial_x^2 v_1) [2\chi^{-3} (\partial_x \chi)^2 - \chi^{-2} (\partial_x^2 \chi)] \\
&+ 4(\partial_x v_1) [-6\chi^{-4} (\partial_x \chi)^3 + 6\chi^{-3} (\partial_x^2 \chi) (\partial_x \chi) - \chi^{-2} (\partial_x^3 \chi)] \\
&+ v_1 [24\chi^{-5} (\partial_x \chi)^4 - 36\chi^{-4} (\partial_x \chi)^2 (\partial_x^2 \chi) \\
&+ 8\chi^{-3} (\partial_x^3 \chi) (\partial_x \chi) + 6\chi^{-3} (\partial_x^2 \chi)^2 + 2\chi^{-2} (\partial_x^4 \chi)] \\
&+ 2q(x) [(\partial_x^2 v_1) \chi^{-1} + 2(\partial_x v_1) (-\chi^{-2} (\partial_x \chi))] \\
&+ v_1 (2\chi^{-3} (\partial_x \chi)^2 - \chi^{-2} (\partial_x^2 \chi)) \\
&+ 2q'(x) [(\partial_x v_1) \chi^{-1} + v_1 (-\chi^{-2} (\partial_x \chi))] \\
&+ (q^2(x) + q''(x)) v_1 \chi^{-1} + \partial_t \tilde{F}
\end{aligned}$$

elde edilir ve eşitliğin her iki tarafı χ ile genişletilip v_1 e göre en yüksek mertebeden türevler eşitliğin sol tarafında yalnız bırakılırsa,

$$\begin{aligned}
\partial_t v_1 - \partial_x^4 v_1 &= \chi \partial_t \tilde{F} + v_1 \chi^{-1} (\partial_t \chi) - 4\chi^{-1} (\partial_x^3 v_1) (\partial_x \chi) \\
&+ 12\chi^{-2} (\partial_x^2 v_1) (\partial_x \chi)^2 - 6\chi^{-1} (\partial_x^2 v_1) (\partial_x^2 \chi) \\
&- 24\chi^{-3} (\partial_x v_1) (\partial_x \chi)^3 + 24\chi^{-2} (\partial_x v_1) (\partial_x^2 \chi) (\partial_x \chi) \\
&- 4\chi^{-1} (\partial_x v_1) (\partial_x^3 \chi) + 24v_1 \chi^{-4} (\partial_x \chi)^4 - 36v_1 \chi^{-3} (\partial_x \chi)^2 (\partial_x^2 \chi) \\
&+ 8v_1 \chi^{-2} (\partial_x^3 \chi) (\partial_x \chi) + 6v_1 \chi^{-2} (\partial_x^2 \chi)^2 - v_1 \chi^{-1} (\partial_x^4 \chi) \\
&+ 2q(x) (\partial_x^2 v_1) - 4q(x) (\partial_x v_1) \chi^{-1} (\partial_x \chi) + 2v_1 q(x) [2\chi^{-2} (\partial_x \chi)^2 - \chi^{-1} (\partial_x^2 \chi)] \\
&+ 2q'(x) [(\partial_x v_1) - v_1 \chi^{-1} (\partial_x \chi)] + (q^2(x) + q''(x)) v_1 \\
&: = \chi \partial_t \tilde{F} + \tilde{g}_1
\end{aligned} \tag{3.23}$$

bulunur. Yani

$$\partial_t v_1 - \partial_x^4 v_1 := \chi \partial_t \tilde{F} + \tilde{g}_1 \tag{3.24}$$

yazılır.

Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1 &= v_1 \chi^{-1} (\partial_t \chi) - 4 \chi^{-1} (\partial_x^3 v_1) (\partial_x \chi) + 12 \chi^{-2} (\partial_x^2 v_1) (\partial_x \chi)^2 \\
&\quad - 6 \chi^{-1} (\partial_x^2 v_1) (\partial_x^2 \chi) - 24 \chi^{-3} (\partial_x v_1) (\partial_x \chi)^3 \\
&\quad + 24 \chi^{-2} (\partial_x v_1) (\partial_x^2 \chi) (\partial_x \chi) - 4 \chi^{-1} (\partial_x v_1) (\partial_x^3 \chi) \\
&\quad + 24 v_1 \chi^{-4} (\partial_x \chi)^4 - 36 v_1 \chi^{-3} (\partial_x \chi)^2 (\partial_x^2 \chi) \\
&\quad + 8 v_1 \chi^{-2} (\partial_x^3 \chi) (\partial_x \chi) + 6 v_1 \chi^{-2} (\partial_x^2 \chi)^2 - v_1 \chi^{-1} (\partial_x^4 \chi) \\
&\quad + 2q(x) (\partial_x^2 v_1) - 4q(x) (\partial_x v_1) \chi^{-1} (\partial_x \chi) \\
&\quad + 2v_1 q(x) [2 \chi^{-2} (\partial_x \chi)^2 - \chi^{-1} (\partial_x^2 \chi)] \\
&\quad + 2q'(x) [(\partial_x v_1) - v_1 \chi^{-1} (\partial_x \chi)] + (q^2(x) + q''(x)) v_1 \\
&= u_1 (\partial_t \chi) - 4 \chi^{-1} ((\partial_x^3 u_1) \chi + 3 (\partial_x^2 u_1) (\partial_x \chi) \\
&\quad + 3 (\partial_x u_1) (\partial_x^2 \chi) + u_1 (\partial_x^3 \chi)) (\partial_x \chi) \\
&\quad + 12 \chi^{-2} ((\partial_x^2 u_1) \chi + 2 (\partial_x u_1) (\partial_x \chi) + u_1 (\partial_x^2 \chi)) (\partial_x \chi)^2 \\
&\quad - 6 \chi^{-1} ((\partial_x^2 u_1) \chi + 2 (\partial_x u_1) (\partial_x \chi) + u_1 (\partial_x^2 \chi)) (\partial_x^2 \chi) \\
&\quad - 24 \chi^{-3} ((\partial_x u_1) \chi + u_1 (\partial_x \chi)) (\partial_x \chi)^3 \\
&\quad + 24 \chi^{-2} ((\partial_x u_1) \chi + u_1 (\partial_x \chi)) (\partial_x^2 \chi) (\partial_x \chi) \\
&\quad - 4 \chi^{-1} ((\partial_x u_1) \chi + u_1 (\partial_x \chi)) (\partial_x^3 \chi) \\
&\quad + 24 u_1 \chi^{-3} (\partial_x \chi)^4 - 36 u_1 \chi^{-2} (\partial_x \chi)^2 (\partial_x^2 \chi) \\
&\quad + 8 u_1 \chi^{-1} (\partial_x^3 \chi) (\partial_x \chi) + 6 u_1 \chi^{-1} (\partial_x^2 \chi)^2 \\
&\quad + 2 u_1 (\partial_x^4 \chi) + 2q(x) ((\partial_x^2 u_1) \chi + 2 (\partial_x u_1) (\partial_x \chi) + u_1 (\partial_x^2 \chi)) \\
&\quad - 4q(x) ((\partial_x u_1) \chi + u_1 (\partial_x \chi)) \chi^{-1} (\partial_x \chi) \\
&\quad + 2 u_1 \chi q(x) [2 \chi^{-2} (\partial_x \chi)^2 - \chi^{-1} (\partial_x^2 \chi)] \\
&\quad + 2q'(x) [(\partial_x u_1) \chi + u_1 (\partial_x \chi) + 2 u_1 (\partial_x \chi)^2] + (q^2(x) + q''(x)) u_1 \chi
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu eşitlik hesaplanırken $v_1 = \chi u_1$ olduğu kullanılmıştır. Benzer şekilde

$$\partial_t u_2 = Lu_2 + \partial_t^2 \tilde{F}$$

eşitliğinden yararlanarak

$$\partial_t v_2 - \partial_x^4 v_2 = \chi \partial_t^2 \tilde{F} + \tilde{g}_2 \tag{3.25}$$

eşitliği gösterilebilir. Bunun için

$$\partial_t u_2 = Lu_2 + \partial_t^2 \tilde{F}$$

denklemini göz önüne alıp (3.21)-(3.23) arası işlemlerde u_1 yerine u_2 , v_1 yerine v_2 yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\partial_t v_2 - \partial_x^4 v_2 &= \chi \partial_t^2 \tilde{F} + v_2 \chi^{-1} (\partial_t \chi) - 4 \chi^{-1} (\partial_x^3 v_2) (\partial_x \chi) \\
&\quad + 12 \chi^{-2} (\partial_x^2 v_2) (\partial_x \chi)^2 - 6 \chi^{-1} (\partial_x^2 v_2) (\partial_x^2 \chi) \\
&\quad - 24 \chi^{-3} (\partial_x v_2) (\partial_x \chi)^3 + 24 \chi^{-2} (\partial_x v_2) (\partial_x^2 \chi) (\partial_x \chi) \\
&\quad - 4 \chi^{-1} (\partial_x v_2) (\partial_x^3 \chi) + 24 v_2 \chi^{-4} (\partial_x \chi)^4 - 36 v_2 \chi^{-3} (\partial_x \chi)^2 (\partial_x^2 \chi) \\
&\quad + 8 v_2 \chi^{-2} (\partial_x^3 \chi) (\partial_x \chi) + 6 v_2 \chi^{-2} (\partial_x^2 \chi)^2 \\
&\quad - v_2 \chi^{-1} (\partial_x^4 \chi) + 2q(x) (\partial_x^2 v_2) - 4q(x) (\partial_x v_2) \chi^{-1} (\partial_x \chi) \\
&\quad + 2v_2 q(x) [2 \chi^{-2} (\partial_x \chi)^2 - \chi^{-1} (\partial_x^2 \chi)] \\
&\quad + 2q'(x) [(\partial_x v_2) - v_2 \chi^{-1} (\partial_x \chi)] \\
&\quad + (q^2(x) + q''(x)) v_2 \\
: &= \chi \partial_t^2 \tilde{F} + \tilde{g}_2
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_2 &= v_2 \chi^{-1} (\partial_t \chi) - 4 \chi^{-1} (\partial_x^3 v_2) (\partial_x \chi) \\
&\quad + 12 \chi^{-2} (\partial_x^2 v_2) (\partial_x \chi)^2 - 6 \chi^{-1} (\partial_x^2 v_2) (\partial_x^2 \chi) \\
&\quad - 24 \chi^{-3} (\partial_x v_2) (\partial_x \chi)^3 + 24 \chi^{-2} (\partial_x v_2) (\partial_x^2 \chi) (\partial_x \chi) \\
&\quad - 4 \chi^{-1} (\partial_x v_2) (\partial_x^3 \chi) + 24 v_2 \chi^{-4} (\partial_x \chi)^4 - 18 v_2 \chi^{-3} (\partial_x \chi)^2 (\partial_x^2 \chi) \\
&\quad - 18 v_2 \chi^{-3} (\partial_x^2 \chi) (\partial_x \chi) + 8 v_2 \chi^{-2} (\partial_x^3 \chi) (\partial_x \chi) + 6 v_2 \chi^{-2} (\partial_x^2 \chi)^2 \\
&\quad + 2 v_2 \chi^{-1} (\partial_x^4 \chi) + 2q(x) (\partial_x^2 v_2) - 4q(x) (\partial_x v_2) \chi^{-1} (\partial_x \chi) \\
&\quad + 2v_2 q(x) [2 \chi^{-2} (\partial_x \chi)^2 - \chi^{-1} (\partial_x^2 \chi)] \\
&\quad + 2q'(x) [(\partial_x v_2) + 2v_2 \chi^{-2} (\partial_x \chi)^2 - v_2 \chi^{-2} (\partial_x \chi)] \\
&\quad + (q^2(x) + q''(x)) v_2 \\
&= u_2 (\partial_t \chi) - 4 \chi^{-1} ((\partial_x^3 u_2) \chi + 3 (\partial_x^2 u_2) (\partial_x \chi) \\
&\quad + 3 (\partial_x u_2) (\partial_x^2 \chi) + u_2 (\partial_x^3 \chi)) (\partial_x \chi) \\
&\quad + 12 \chi^{-2} ((\partial_x^2 u_2) \chi + 2 (\partial_x u_2) (\partial_x \chi) + u_2 (\partial_x^2 \chi)) (\partial_x \chi)^2 \\
&\quad - 6 \chi^{-1} ((\partial_x^2 u_2) \chi + 2 (\partial_x u_2) (\partial_x \chi) + u_2 (\partial_x^2 \chi)) (\partial_x^2 \chi) \\
&\quad - 24 \chi^{-3} ((\partial_x u_2) \chi + u_2 (\partial_x \chi)) (\partial_x \chi)^3 \\
&\quad + 24 \chi^{-2} ((\partial_x u_2) \chi + u_2 (\partial_x \chi)) (\partial_x^2 \chi) (\partial_x \chi) \\
&\quad - 4 \chi^{-1} ((\partial_x u_2) \chi + u_2 (\partial_x \chi)) (\partial_x^3 \chi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +24u_2\chi^{-3}(\partial_x\chi)^4 - 36u_2\chi^{-2}(\partial_x\chi)^2 (\partial_x^2\chi) \\
& +8u_2\chi^{-1} (\partial_x^3\chi) (\partial_x\chi) + 6u_2\chi^{-1} (\partial_x^2\chi)^2 \\
& +2u_2 (\partial_x^4\chi) + 2q(x)((\partial_x^2u_2)\chi + 2(\partial_xu_2)(\partial_x\chi) + u_2(\partial_x^2\chi)) \\
& -4q(x)((\partial_xu_2)\chi + u_2(\partial_x\chi))\chi^{-1}(\partial_x\chi) \\
& +2u_2\chi q(x) [2\chi^{-2}(\partial_x\chi)^2 - \chi^{-1}(\partial_x^2\chi)] \\
& +2q'(x) [(\partial_xu_2)\chi + u_2(\partial_x\chi) + 2u_2(\partial_x\chi)^2] + (q^2(x) + q''(x))u_2\chi
\end{aligned}$$

dır. Bu eşitlik hesaplanırken $v_2 = \chi u_2$ olduğu kullanılmıştır. Dikkat edilirse $\tilde{g}_j$ ($j = 1, 2$) fonksiyonları $\partial_t\chi$, $\partial_x^i\chi$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ifadelerini içeren $\partial_x^i u_j$ fonksiyonunun lineer bir terkidir. u nun regülerliği ve χ nin tanımından $\tilde{g}_j \in L_2(Q_\epsilon)$ dır. Burada Lemma 2.1 ile verilen Carleman eşitsizliği kullanılacaktır.

O halde Lemma 2.1 i (3.23)-(3.24) denklemlerine Q_ϵ alt bölgesinde uygulayalım:

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_\epsilon} s^7(v_1^2 + v_2^2)e^{2s\varphi} dxdt \\
& \leq C \int_{Q_\epsilon} \chi^2 \left(\left| \partial_t \tilde{F} \right|^2 + \left| \partial_t^2 \tilde{F} \right|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt + C \int_{Q_\epsilon} (|\tilde{g}_1|^2 + |\tilde{g}_2|^2) e^{2s\varphi} dxdt \\
& = C \int_{Q_\epsilon} \chi^2 \left(\left| \partial_t \tilde{F} \right|^2 + \left| \partial_t^2 \tilde{F} \right|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt + C \int_{Q_\epsilon \setminus Q_{2\epsilon} \cup Q_{2\epsilon}} (|\tilde{g}_1|^2 + |\tilde{g}_2|^2) e^{2s\varphi} dxdt \\
& = C \int_{Q_\epsilon} \chi^2 \left(\left| \partial_t \tilde{F} \right|^2 + \left| \partial_t^2 \tilde{F} \right|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt + C \int_{Q_\epsilon \setminus Q_{2\epsilon}} (|\tilde{g}_1|^2 + |\tilde{g}_2|^2) e^{2s\varphi} dxdt \\
& \quad + C \int_{Q_{2\epsilon}} (|\tilde{g}_1|^2 + |\tilde{g}_2|^2) e^{2s\varphi} dxdt \\
& \leq C \int_{Q_\epsilon} \left(\left| \partial_t \tilde{F} \right|^2 + \left| \partial_t^2 \tilde{F} \right|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt + C \int_{Q_\epsilon \setminus Q_{2\epsilon}} (|\tilde{g}_1|^2 + |\tilde{g}_2|^2) e^{2s\varphi} dxdt. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $\chi \leq 1$ olması ve $Q_{2\epsilon}$ da g_j lerin çarpan olarak χ fonksiyonunun türevlerini içermesi gerçeği göz önüne alınmıştır. Ayrıca $\varphi(x, t) = e^{\lambda\psi(x, t)}$ ve $\mu(x) = 2(x - x_0)$ şeklinde tanımlanmıştır.

Burada dikkat edilmesi gerekir ki,

$$Q_{2\epsilon} \text{ da } v_1 = u_1, v_2 = u_2 \tag{3.27}$$

ve

$$Q_\epsilon \setminus Q_{2\epsilon} \text{ da } 1 \leq e^{s\varphi} \leq e^{s \exp(2\lambda\epsilon)} \tag{3.28}$$

dır. (3.9) un kabulü altında

$$\int_{Q_{2\epsilon}} s^7 (u_1^2 + u_2^2) e^{2s\varphi} dxdt \leq C \int_{Q_\epsilon} \left(\left| \partial_x^2 r \right|^2 + \left| \partial_x r \right|^2 + |r|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt + Ce^{2s \exp(2\lambda\epsilon)} \tag{3.29}$$

bulunur.

Adım 3. Şimdi ispatın esas bölümüne başlayabiliriz. Burada (3.2) kabulünden dolayı $Q_\varepsilon \cap \{t = 0\}$ kümesinin boş olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca (3.19) dan açıktır ki $x \in \Omega_{2\varepsilon}$ için $\chi(x, t_0) = 1$ ve $\partial Q_\varepsilon \cap \{x > 0\}$ üzerinde $\chi = 0$ dir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{2\varepsilon}} |\partial_t u(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx &= \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |u_1(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&= \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |u_1(x, t_0)\chi|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&= \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |v_1(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |v_1(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&= \int_{Q_\varepsilon \cap \{t < t_0\}} \partial_t (|u_1\chi|^2 e^{2s\varphi}) dx dt \\
&\leq C \int_{Q_\varepsilon} (\chi |\partial_t \chi| |u_1|^2 + \chi^2 |u_1| |u_2| + s\chi^2 |u_1|^2) e^{2s\varphi(x, t)} dx dt \\
&\leq C \int_{Q_\varepsilon} s(|u_1|^2 + |u_2|^2) e^{2s\varphi(x, t)} dx dt + C e^{2s \exp(2\lambda\varepsilon)} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Yukarıda dördüncü adımdan beşinci adıma geçilirken $Q_\varepsilon \cap \{t = 0\}$ kümesinin boş kümeye eşit olduğu kullanılmıştır. Bilindiği üzere boş kümenin ölçümü sıfırdır. Ayrıca beşinci adımdan altıncı adıma geçerken aşağıdaki değerlendirmeler göz önünde tutulmalıdır:

$$\begin{aligned}
|(p + iq)(m + in)| &= \sqrt{(pm - qn)^2 + (qm + pn)^2} \\
&= \sqrt{p^2 m^2 + q^2 n^2 - 2pmnq + q^2 m^2 + p^2 n^2 + 2pmnq} \\
&= \sqrt{p^2 m^2 + q^2 n^2 + q^2 m^2 + p^2 n^2} \\
&= \sqrt{p^2(m^2 + n^2) + q^2(m^2 + n^2)} \\
&= \sqrt{p^2 + q^2} \sqrt{m^2 + n^2} = |p + iq| |m + in|
\end{aligned}$$

olduğundan $u_1 = p + iq$ seçilerek

$$\begin{aligned}
|u_1\chi|^2 &= |u_1\chi| |u_1\chi| = |u_1| |\chi| |u_1| |\chi| = |u_1| \chi |u_1| \chi \\
&= |u_1|^2 \chi^2 = (p^2 + q^2) \chi^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\begin{aligned}
\partial_t (|u_1 \chi|^2 e^{2s\varphi}) &= \partial_t (|u_1|^2 \chi^2 e^{2s\varphi}) \\
&= \partial_t (|u_1|^2) \chi^2 e^{2s\varphi} + |u_1|^2 \partial_t (\chi^2 e^{2s\varphi}) \\
&= \partial_t (p^2 + q^2) \chi^2 e^{2s\varphi} + (p^2 + q^2) \partial_t (\chi^2 e^{2s\varphi}) \\
&= (2pp_t + 2qq_t) \chi^2 e^{2s\varphi} \\
&\quad + (p^2 + q^2) [\partial_t (\chi^2) e^{2s\varphi} + \chi^2 \partial_t (e^{2s\varphi})] \\
&= (2pp_t + 2qq_t) \chi^2 e^{2s\varphi} \\
&\quad + (p^2 + q^2) [2\chi \partial_t (\chi) e^{2s\varphi} + \chi^2 2s (\partial_t \varphi) e^{2s\varphi}] \\
&= 2e^{2s\varphi} [(pp_t + qq_t) \chi^2 + (p^2 + q^2) \chi \partial_t (\chi) \\
&\quad + (p^2 + q^2) \chi^2 2s (\partial_t \varphi)]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

bulunur. Şimdi bu işlemdeki $(pp_t + qq_t)$ terimi incelenecektir. Burada $(A - B)^2 \geq 0$ olduğundan $2AB \leq A^2 + B^2$ yazılabildiği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
pp_t + qq_t &= \sqrt{(pp_t + qq_t)^2} \\
&= \sqrt{p^2 p_t^2 + 2pp_t qq_t + q^2 q_t^2} \\
&\leq \sqrt{p^2 p_t^2 + p^2 p_t^2 + q^2 q_t^2 + q^2 q_t^2} \\
&= \sqrt{2} \sqrt{p^2 p_t^2 + q^2 q_t^2} \\
&\leq \sqrt{2} \sqrt{p^2 p_t^2 + q^2 q_t^2 + p^2 q_t^2 + p_t^2 q^2} \\
&= \sqrt{2} \sqrt{p^2 (p_t^2 + q_t^2) + q^2 (p_t^2 + q_t^2)} \\
&= \sqrt{2} \sqrt{(p^2 + q^2) (p_t^2 + q_t^2)} \\
&= \sqrt{2} \sqrt{(p^2 + q^2)} \sqrt{(p_t^2 + q_t^2)} \\
&= \sqrt{2} |u_1| |\partial_t u_1| \\
&= \sqrt{2} |u_1| |u_2|
\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınarak (3.31) eşitliğini göz önünde bulunduralım:

$$\partial_t (|u_1 \chi|^2 e^{2s\varphi}) \leq 2e^{2s\varphi} \left[\sqrt{2} |u_1| |u_2| \chi^2 + |u_1|^2 \chi \partial_t (\chi) + \chi^2 |u_1|^2 s (\partial_t \varphi) \right]$$

dır.

Adım 4. Şimdi (3.15) denkleminde $t = t_0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \partial_t u(x, t_0) - \partial_x^4 u(x, t_0) \\
&= R(x, t_0) \partial_x^2 r(x) + 2 \partial_x R(x, t_0) \partial_x r(x) \\
&+ \left(\partial_t^{1/2} R(x, t_0) + \partial_x^2 R(x, t_0) + \frac{R(x, 0)}{\Gamma(1/2) t_0^{1/2}} + q(x) R(x, t_0) \right) r(x) \\
&+ 2q \partial_x^2 u(x, t_0) + 2(\partial_x q) \partial_x u(x, t_0) + (q^2 + \partial_x^2 q) u(x, t_0)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse son eşitliğin sağ tarafı $r(x)$ fonksiyonuna göre ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemdir. (3.32) de kaynak terimde bulunan $r(x)$ fonksiyonu için bir değerlendirme elde etmek gerekir. Bu amaçla, Bölüm 2.2 de yer alan bir eliptik operatör için Isakov (2006) da verilmiş olan bir Carleman değerlendirmesi (3.32) denklemini için uyarlanacaktır:

Lemma 3.3 *Kabul edelim ki*

$$\begin{aligned}
P_0 g(x) &= R(x, t_0) \partial_x^2 g(x) + 2 \partial_x R(x, t_0) \partial_x g(x) \\
&+ \left(\partial_x^2 R(x, t_0) + \partial_t^{1/2} R(x, t_0) + \frac{R(x, 0)}{\Gamma(1/2) t_0^{1/2}} + q(x) R(x, t_0) \right) g(x)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olsun. Burada R fonksiyonu (3.9) ile verilen şartları sağlamaktadır. Bu durumda öyle $s_1 > 0$ ve $C_1 > 0$ seçilebilir ki her $s \geq s_1$ ve $g \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $\text{supp } g \subset \Omega$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 g|^2 + s |\partial_x g|^2 + s^3 |g|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\leq C_1 \int_{\Omega} |P_0 g|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Görüldüğü gibi bu Carleman değerlendirmesini kullanabilmek için ilgili fonksiyonun kompakt supportta sahip olması gerekir. Bunun için bir kesme fonksiyonu

$$\tilde{\chi} \in C^\infty(\bar{\Omega}), 0 \leq \tilde{\chi} \leq 1, \tilde{\chi} = \begin{cases} 1, & \Omega_{2\varepsilon}, \\ 0, & \Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon. \end{cases}$$

ve $\tilde{r} = r \tilde{\chi}$ yeni bilinmeyen fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned}
(P_0 \tilde{r})(x) &= \tilde{\chi} P_0 r(x) + 2R(x, t_0) (\partial_x \tilde{\chi}) \partial_x r(x) \\
&+ R(x, t_0) (\partial_x^2 \tilde{\chi}) r(x) + 2 \partial_x R(x, t_0) (\partial_x \tilde{\chi}) r(x) \\
&\equiv \tilde{\chi} P_0 r(x) + \tilde{g}_3
\end{aligned}$$

bulunur. (3.32) eşitliği son eşitlikle kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(P_0 \tilde{r})(x) &= \tilde{\chi}(\partial_t u(x, t_0) - \partial_x^4 u(x, t_0)) \\
&\quad - \tilde{\chi}(2q \partial_x^2 u(x, t_0) + 2(\partial_x q)(\partial_x u)(x, t_0) \\
&\quad + (q^2 + \partial_x^2 q)u(x, t_0)) + \tilde{g}_3
\end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.36) denkleminde Ω_ε bölgesinde Lemma 3.3 uygulanırsa $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}$ da χ nin türevleri sıfır olacağından

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 \tilde{r}|^2 + s |\partial_x \tilde{r}|^2 + s^3 |\tilde{r}|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 \tilde{r}|^2 + s |\partial_x \tilde{r}|^2 + s^3 |\tilde{r}|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{\chi}^2 (|\partial_t u(x, t_0)|^2 + \sum_{j=0}^4 |\partial_x^j u(x, t_0)|^2) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\quad + C \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}} |\tilde{g}_3|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx
\end{aligned} \tag{3.37}$$

yazılabilir. Diğer yandan $\Omega_{2\varepsilon}$ bölgesinde $\tilde{r} = r$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} (|\partial_t u(x, t_0)|^2 + \sum_{j=0}^4 |\partial_x^j u(x, t_0)|^2) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx + C e^{2s \exp(2\lambda\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

olduğu görülür.

Adım 5. Bu bölümde (3.38) eşitsizliğinin sağ ve sol tarafları incelenecektir. (3.38), (3.29), (3.30) birleştirilerek

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx &\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{j=0}^4 |\partial_x^j u(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\quad + \frac{C}{s^6} \int_{Q_\varepsilon} \left(|\partial_x^2 r|^2 + |\partial_x r|^2 + |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t)} dx dt \\
&\quad + C e^{2s \exp(2\lambda\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilir. $\overline{Q}_\varepsilon$ üzerinde tanım gereği $\varepsilon \leq \psi \leq |x_0|^2$ olduğu görülür. Şimdi (3.39) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimler incelenecektir. İlk terim

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{j=0}^4 |\partial_x^j u(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \leq C e^{2s \exp(\lambda|x_0|^2)} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{j=0}^4 |\partial_x^j u(x, t_0)|^2 dx \tag{3.40}$$

biçimindedir. İkinci terim ise Q da $\varphi(x, t) \leq \varphi(x, t_0)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \frac{C}{s^6} \int_{Q_\varepsilon} \left(|\partial_x^2 r|^2 + |\partial_x r|^2 + |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t)} dx dt \\
& \leq \frac{C}{s^6} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}} \left(|\partial_x^2 r|^2 + |\partial_x r|^2 + |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
& \quad + \frac{C}{s^6} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left(|\partial_x^2 r|^2 + |\partial_x r|^2 + |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx
\end{aligned} \tag{3.41}$$

yazılır ve s parametresi yeterince büyük seçilerek (3.41) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim (3.39) eşitsizliğinin sol tarafına absorbe edilebilir. $r \in W^{2, \infty}(\Omega)$ ve $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}_{2\varepsilon}$ bölgesinin içinde $\psi(x, t_0) \leq 2\varepsilon$ olduğundan

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}} \left(|\partial_x^2 r|^2 + |\partial_x r|^2 + |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \leq C e^{2s \exp(2\lambda\varepsilon)} \tag{3.42}$$

hesaplanabilir. Yani (3.40), (3.41) ve (3.42) eşitsizlikleri (3.39) da göz önünde alındığında

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx & \leq C e^{2s \exp(\lambda|x_0|^2)} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{j=0}^4 |\partial_x^j u(x, t_0)|^2 dx \\
& \quad + C e^{2s \exp(2\lambda\varepsilon)} \\
& = C e^{2s \exp(\lambda|x_0|^2)} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2 \\
& \quad + C e^{2s \exp(2\lambda\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

yazılır. Şimdi (3.43) ün sol tarafı incelenecektir. $\Omega_{3\varepsilon} \subset \Omega_{2\varepsilon}$ ve $\Omega_{3\varepsilon}$ bölgesinde $\psi(x, t_0) > 3\varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
& \geq \int_{\Omega_{3\varepsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
& \geq e^{2s \exp(3\lambda\varepsilon)} \int_{\Omega_{3\varepsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) dx
\end{aligned} \tag{3.44}$$

bulunur. (3.43) ve (3.44) birlikte göz önüne alınıp

$$\begin{aligned}
& e^{2s \exp(3\lambda\varepsilon)} \int_{\Omega_{3\varepsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) dx \\
& \leq C e^{2s \exp(\lambda|x_0|^2)} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2 + C e^{2s \exp(2\lambda\varepsilon)}
\end{aligned}$$

elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı $e^{2s \exp(3\lambda\epsilon)}$ ile bölüntürse

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{3\epsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) dx \\ & \leq C e^{2s \exp(\lambda|x_0|^2) - 2s \exp(3\lambda\epsilon)} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2 + C e^{2s \exp(2\lambda\epsilon) - 2s \exp(3\lambda\epsilon)} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $\nu = \exp(3\lambda\epsilon) - \exp(2\lambda\epsilon) > 0$ seçimi yapılarak

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{3\epsilon}} \left(\frac{1}{s} |\partial_x^2 r|^2 + s |\partial_x r|^2 + s^3 |r|^2 \right) dx \\ & \leq C e^{-2s\nu} + C e^{Cs} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. Değerlendirmenin tamamlanması için iki farklı durum ele alınacaktır.

1. Durum: $\|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)} \geq 1$ olsun. O halde (3.45) gereği

$$\|r\|_{H^2(\Omega_{3\epsilon})}^2 \leq C e^{Cs} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2$$

olduğu görülür.

2. Durum: $\|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)} < 1$ olsun. Bu durumda

$$C e^{-2s\nu} = C e^{Cs} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} e^{-2s\nu - Cs} &= \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2, \\ e^{s(2\nu + C)} &= \frac{1}{\|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2}, \end{aligned}$$

$$s = \frac{2}{2\nu + C} \log \left(\frac{1}{\|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2} \right) > 0$$

bulunur. (3.45) eşitsizliğinde s 'nin yerine değeri yazılırsa

$$\begin{aligned} \|r\|_{H^2(\Omega_{3\epsilon})}^2 &\leq C e^{-2\left(\frac{2}{2\nu + C}\right) \log \left(\frac{1}{\|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2} \right) \nu} + C e^{C \left(\frac{2}{2\nu + C} \right) \log \left(\frac{1}{\|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2} \right)} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2 \\ &= C e^{-2\left(\frac{2}{2\nu + C}\right) (-\log \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}) \nu} + C e^{C \left(\frac{2}{2\nu + C} \right) (-\log \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)})} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2 \\ &= C e^{\frac{4\nu}{2\nu + C} (\log \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)})} + C e^{\frac{-2C}{2\nu + C} (\log \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)})} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2 \\ &= C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^{\frac{4\nu}{2\nu + C}} + C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^{\frac{-2C}{2\nu + C}} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^2 \\ &= C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^{\frac{4\nu}{2\nu + C}} + C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^{\frac{-2C + 4\nu + 2C}{2\nu + C}} \\ &= C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^{\frac{4\nu}{2\nu + C}} + C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^{\frac{4\nu}{2\nu + C}} \\ &= 2C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^{\frac{4\nu}{2\nu + C}} \\ &\leq C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\epsilon)}^{\frac{4\nu}{2\nu + C}} \end{aligned}$$

elde edilir. O takdirde

$$\|r\|_{H^2(\Omega_{3\varepsilon})}^2 \leq C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^{2\kappa}$$

bulunur. Burada $\kappa = \frac{2\nu}{2\nu+C} \in (0, 1)$ dir.

Böylece 1. ve 2. Durum birleştirilerek

$$\begin{aligned} \|r\|_{H^2(\Omega_{3\varepsilon})}^2 &\leq C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^{2\kappa} + C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &= C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^{2\kappa} \left(1 + \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^{2-2\kappa}\right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

elde edilir. Ayrıca teoremin kabullerinden

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^{2-2\kappa} &= \left(\|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2\right)^{1-\kappa} \\ &\leq CM^{1-\kappa} \leq C \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda bir $C > 0$ sabiti için

$$\|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^{2\kappa} \left(1 + \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^{2-2\kappa}\right) \leq C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^{2\kappa}$$

elde edilir. Buradan

$$\|r\|_{H^2(\Omega_{3\varepsilon})} \leq C \|u(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^\kappa$$

yazılır. Böylece Lemma 3.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

Ayrıca (3.3)-(3.5) kabulleri altında Lemma 3.2 uygulanarak Teorem 3.1 in ispatı tamamlanır.

3.2 SONUÇ

Bu tezde, Xu vd. (2011) ve Yamamoto ve Zhang (2012) nin $\frac{1}{2}$. mertebeden difüzyon denklemi için bir ters problemin çözümünün kararlılığı üzerine yapmış oldukları çalışmalar incelenmiştir. Bu çalışmalarda temel aracın Carleman değerlendirmeleri olduğu görülmektedir. Sonraki çalışmalarda da α mertebesinin $(0, 1)$ aralığında değişken olma durumu incelenmiştir. Bu konu güncelliğini korumakta olup farklı denklemleri de kapsayacak şekilde çalışmalar yoğun olarak devam etmektedir.



KAYNAKLAR

- Adams R A and Fournier J J F** (2003) *Sobolev Spaces*. Elsevier, New York, 305 pp.
- Avcı D** (2013) Uzay-Zaman Kesirli Difüzyon Sistemlerinin Optimal Kontrolü. *Doktora Tezi*, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, 116 s.
- Balakrishnan V** (1985) Anomalous Diffusion in one Dimension. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 132(2): 569-580.
- Başkan T** (2012) *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*. Dora, Bursa, 342 s.
- Browder A** (1995) *Mathematical Analysis: An Introduction*. Springer Science & Business Media, 335 pp.
- Conway J B** (1973) *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, New York, 317 pp.
- Eller M and Isakov V** (2000) Carleman estimates with two large parameters and applications. *Contemp. Math.*, AMS, 268: 117-137.
- Isakov V** (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations* (Vol. 127). New York: Springer, 344 pp.
- Kilbas A A, Srivastava H M and Trujillo J J** (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 523 pp.
- Kreyszig E** (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York, 704 pp.
- Metzler R and Klafter J** (2000) The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: a Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*, 339(1): 1-77.
- Mikhailov V P** (1978) *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, Moscow, 396 pp.
- Palka B P** (1991) *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer, 559 pp.
- Rudin W** (1976) *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 342 pp.
- Sakamoto K and Yamamoto M** (2011) Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 382(1): 426-447.
- Samko S G, Kilbas A A and Marichev O I** (1993) *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers, 976 pp.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Xu X, Cheng J and Yamamoto M (2011) Carleman Estimate for a Fractional Diffusion Equation with Half Order and Application. *Applicable Analysis*, 90(9): 1355-1371.

Vladimirov V S (1971) *Equations of Mathematical Physics*. MIR, Moscow, 436 pp.

Yamamoto M and Zhang Y (2012) Conditional Stability in Determining a Zeroth-Order Coefficient in a Half-Order Fractional Diffusion Equation by a Carleman Estimate. *Inverse Problems*, 28(10):105010.



ÖZGEÇMİŞ

Gökmil YILDIZ, 1991 yılında Zonguldak'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini TED Zonguldak Koleji'nde tamamladıktan sonra, Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2015 yılında mezun oldu. Aynı yıl Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Bahçelievler Mah. Balkaya Sok. Rıhtım Apt. No:17 Merkez / ZONGULDAK.

Tel: (+90) 532 064 61 67

E-posta: gokmilyildiz@gmail.com