

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK – BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

1. BASAMAKTAN DALGA DENKLEMİ
İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN
ZAYIF ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi
Ayşe Özge ÖRS (TÜRK)

İstanbul – 2008

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK – BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

1. BASAMAKTAN DALGA DENKLEMİ
İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN
ZAYIF ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi
Ayşe Özge ÖRS (TÜRK)
Öğrenci No = 060860005

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahir RESULOV

İstanbul – 2008

YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi, Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendim hazırladığıma and içerim.
15/07/2008

Aday: Ayşe Özge ÖRS (TÜRK)

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda benden yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Mahir Resulov'a, tezin bütün aşamalarında verdiği destekten dolayı Sayın Prof. Mehmet Erdoğan'a ve bütün eğitim hayatım boyunca bana hep destek olan aileme ve eşime yardımlarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe Özge ÖRS (TÜRK)

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
I- Yemin Metni.....	i
II- Önsöz.....	ii
III- İçindekiler.....	iii
IV- Juri Sayfası.....	iv
V- Özet.....	v
VI- Abstract.....	vi
1- Giriş.....	1
1.1 Hoph Denkleminin Çıkarılışı.....	2
1.2 Kumlu ortamlarda suyun süzülmesi.....	4
1.3 Otobandaki arabaların hareketinin denklemi.....	4
2- 1. Basamaktan Bir Boyutlu Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler.....	5
2.1- Süreksizliğin Mevcut Olma Koşulu.....	5
2.2- Suni Özlülük Yöntemi.....	7
2.3- Hal Fonksiyonunun Aşağı (Üste) Kabarık Olduğu Durum Riemann Problemi.....	14
3- Hal Fonksiyonunun Kabarık Olmadığı Durum İçin Riemann Problemi.....	20
3.1- $f(x) = \frac{u^3}{3}$ Olduğu Durum.....	20
3.2- $f(x) = \sin u$ Olduğu Durum.....	35
4- 1. Basamaktan İki Boyutlu Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler.....	41
4.1- Lineer Durum.....	42
4.2- Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Yöntemi.....	46
4.3- Bilgisayar Testleri.....	49
5- Sonuçlar ve İrdeleme.....	57
6- Kaynaklar	58
7- Özgeçmiş.....	59

ÖZET

Tezde, birinci basamaktan kuazi lineer diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy problemlerinin zayıf çözümünü bulmak için genel teori incelenmiştir. Tezin birinci bölümünde kabarık hal fonksiyonuna sahip bir boyutlu kuazi lineer diferansiyel denklemler için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümleri elde edilmiştir. Entropinin artma koşulu da bu bölümde incelenmiştir.

Elde edilmiş sonuçları kullanarak, kabarık olmayan hal fonksiyonuna sahip bir boyutlu kuazi lineer diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümleri elde edilmiştir.

Tezin sonuncu bölümünde 2-boyutlu denklem için yazılmış başlangıç değer problemlerinin gerçek çözümünü bulmak için yeni bir yöntem önerilmiştir. Bu amaçla, esas problemden farklı avantajları olan yardımcı problem önerilmiştir. Önerilmiş yardımcı problemi kullanarak 2-boyutlu denklem için yazılmış Cauchy probleminin nümerik çözümü için yeni bir sayısal algoritma da önerilmiştir.

ABSTRACT

In this thesis the general theory for obtaining weak solutions of the Cauchy problem for the first order quasi linear differential equations is investigated. In the first part, the exact solution of the Cauchy problem for one dimensional quasi linear equations with convex state function is developed. The entropy condition has been studied.

Using the obtained results the initial value problem of one dimensional differential equation with non convex state function has also been found.

Finally, a new method for finding the exact solution of the Cauchy problem for 2- Dimensional equation is suggested.

For this aim, the auxiliary problem having some advantages over the main problem is introduced. Using these advantages of the suggested auxiliary problem the a algorithm for obtaining the numerical solution is constructed.

1. Giriş

Literatürden bilindiği üzere, birinci basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklem (KTDD) için yazılmış başlangıç değer probleminin çözümünü bulmak için geliştirilmiş ilk yöntem karakteristikler yöntemi olmaktadır. Karakteristikler yöntemi, lokal çözümler için, yani çözümü başlangıç verilerin yakın civarında ve genelde kapalı fonksiyon şeklinde elde etmeye imkan sağlamaktadır.

Pratik problemler için çözümün $t \rightarrow \infty$ olduğu durumlarını da incelemek gerekiyor. Global teoremin incelenmesi yani matematiksel araçlar, yeni kavramların geliştirilmesine neden olmuştur.

Kuazi lineer denklemlerin global teorisi, yani birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler türev kavramından hemen sonra ortaya çıkmıştır. Birinci mertebeden KTDD 'in lokal teorisi ise XVIII. asırda ifade edilen bir yön (doğrultu) boyunca türev ve karakteristikler kavramına dayanmaktadır.

Söz konusu birinci mertebeden KTDD yardımı ile ifade edilen problemlerde çoğu zaman değişkenlerden biri zaman değişkeni olur ve süreç yeteri kadar uzun süre devam eder. Zaman arttıkça problemin klasik çözümünde bazı özellikler ortaya çıkabilir. Genelde bu özellikler iki şekilde ortaya çıkar: birincisi zayıf çözümlerdir-bu durumda, çözümün kendisi sürekli, fakat birinci mertebeden türevi ise süreksiz olur, ikincisi ise darbe dalgasıdır. Bu durumda çözüm sonlu zaman zarfında birinci tür süreksizlik noktalarına sahip olurlar. Bazı durumlarda çözümde daha da kuvvetli singülerlik (blow-up) da mevcut olabilir ki, bu durumda çözümde sonlu zaman zarfında ikinci tür süreksizlik noktaları oluşur. Şimdilik “blow-up” durumun incelemeyeceğiz.

Açıktır ki, bu tür süreksizliklerin ortaya çıkmasından sonra, süreksiz fonksiyonların türevleri kavramlarının içerilmesi zorunluluğu ortaya çıkar. Bunun dışında süreksiz başlangıç koşullarını da incelemek yeni bir yaklaşım tarzı ister. Uzun zamanlar bu durumlara nasıl davranılacağı belli bile değildi.

Bu tür problemlerin çözümü XX. Asrın ortalarında “genelleştirilmiş fonksiyonların” aksiyomatik teorisi kurulduktan sonra incelenmeye başlanmıştır. Bu yönde ilk araştırma 1950 yılında Hoph tarafından yapılmıştır ve şimdi Hoph denklemi olarak anılan

$$u_t + uu_x = 0$$

denklemini için aşağıdaki başlangıç koşullu

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

probleminin lokal olmayan (global) teorisi incelenmiştir. Burada $u_0(x)$ sınırlı ölçülebilen fonksiyon olmaktadır.

Hoph denkleminin doğal genelleştirilmesi

$$u_t + f_x(u) = 0$$

gibi yazılabilir. Burada, $f(u)$ belli koşulları koruyan bilinen bir fonksiyondur, ve $f(u)$ fonksiyonuna hal (state) fonksiyonu denir.

Genelleştirilmiş Hoph denklemi için yazılmış başlangıç değer probleminin çözümünde çok önemli sonuçlar kronolojik olarak O.A. Oleynik, A.N. Tikonov, A.A. Samarskii, P. Lax, O.A. Ladyjenskaya, I.M. Gelfand tarafından elde edilmiştir.

Önemle belirtmek gerekir ki, bu türlü denklemler birçok doğa problemlerini matematiksel modellerken ortaya çıkarmaktadır.

Bu tezde önce birinci mertebeden KTDD'in lokal teorisi kısaca hatırlatılacak, sonra ise global teoride genelleştirilmiş çözümler kullanılarak çözümdeki sıçrayışların oluşma dinamiği ve zaman evrimi incelenecektir.

Daha sonra ise, yer değişkenlerinin sayısının $n = 2$ olduğu durumda alınan bazı sonuçları inceleyeceğiz.

1.1. Hoph Denkleminin Çıkarılışı

İvme kuvveti etkisi altında (dış kuvvetlerin ve parçacıkların karşılıklı etkisi dikkate alınmadan) parçacıkların bir yön boyunca hareketini göz önüne alalım.

$u(x, t)$ ile t zamanında x noktasında bulunan parçacığın hızını gösterelim. Eğer $x = \varphi(t)$ herhangi bir parçacığın hareket yörüngesini gösterirse, parçacığın hareket hızı

$$\dot{\varphi}(t) = u(t, \varphi(t))$$

ve ivmesi, $\ddot{\varphi}$ ise sifıra eşit olmaktadır; yani,

$$0 = \ddot{\varphi} \equiv \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}u(t, \varphi(t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\varphi = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

olur. Bu denkleme Hoph denklemi denir.

Çok boyutlu durumda, bu denklem sıvının (gazın) R'' Euklid uzayındaki hareketini ifade eder. $v(x, t)$ ($v(x, t) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$) ile sıvının hareket vektörünü, $\rho(x, t)$ ile onun yoğunluğunu gösterelim. V ile R'' de bir hacmini gösterelim. t zamanında V hacmindeki kütle

$$M_v(t) = \int_v \rho(x, t)dx$$

ve bu kütlenin zamana göre değişmesi $\frac{dM_v}{dt}$ olmaktadır.

Eğer V hacminde dışarıdan içeriye ve içerden dışarıya bir akış olmadığını varsayarsak, M_v kütlesinin zamana göre değişimi sadece V nin sınırı ∂V 'den akan sıvıya göre gerçekleşir ve bu değişim

$$\frac{dM_v}{dt} = - \int_{\partial V} (v(x, t), \nu) \rho(x, t) dS_x$$

formülü ile ifade edilir. Burada, (v, v) , v - hız vektörü ile keyfi $x \in \partial V$ noktasındaki dış normal v 'ın iç çarpımını, dS_x ise ∂V elemanını göstermektedir.

Bu durumda

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dx = - \int_{\partial V} (v(x, t), v) \rho(x, t) dS_x$$

olur. Eğer $\rho(x, t)$ ve $v(x, t)$ yeteri kadar pürüzsüz fonksiyonlar ise son eşitliğin sağ tarafındaki ifadeye Gauss-Ostrogradskii formülünü uygularsak

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_V \text{div}(\rho v) dx$$

elde ederiz. Burada div , x değişkenine göre diverjans operatörü olmaktadır, yani

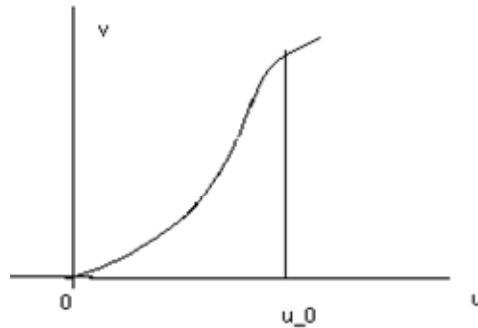
$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}$$

dır. V bölgesinin keyfi olması koşulundan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$$

denklemini elde ederiz.

Birinci mertebeden KTDD'e indirgenebilen pratik problemler:



Şekil 1. Suyun süzülme hızı ile yoğunluk arasındaki bağlantı

1.2 Kumlu ortamlarda suyun süzülmesi

Varsayalım ki, suyun süzülmesi yalnız ağırlık kuvveti etkisi altında gerçekleşmektedir; yani süzülme sadece dikey doğrultuda olmakta, yatay koordinata bağlı olmamaktadır. Eğer dış kaynak mevcut değilse, süzülme hızı $v = v(u)$ yalnız $u = \rho(x, t)$ yoğunluğunun fonksiyonu olmaktadır. Deneysel yolla ispatlanmıştır ki, v 'nin u 'ya bağımlılığı şekil 1.de gösterildiği gibi olmaktadır.

$[0, u_0]$ aralığında bu eğri $v(u) = cu^2$ formülü ile iyi ifade edilebilir. Bu ifadeyi dikkate alırsak

$$u_t + [u(x, t)v(u(x, t))]_x = 0$$

veya

$$u_t + p(u)u_x = 0$$

denklemini elde ederiz. Burada $p(u) = v(u) + v'(u)u$ olmaktadır. $v(u) = cu^2$ de dikkate alırsak

$$u_t + u^2u_x = 0$$

veya

$$u_t + \frac{1}{3} \frac{\partial u^3}{\partial x} = 0$$

şeklinde denklem elde ederiz.

1.3. Otobandaki arabaların hareketinin denklemi

Bu denklem de yukarıda sözünü ettiğimiz suyun kumlu ortamdaki süzülmesi gibi bir boyutlu (yer değişkenine göre) denklem yardımı ile ifade edilir. Bu örnekte de deneysel yolla ispatlanmıştır ki, otobandaki arabaların hızı V , araba yoğunluğuna $u(x, t)$ bağlı olmaktadır.

Tipik fonksiyonel bağlantı

$$v(u) = Au(1 - u), \quad A = \text{const} > 0$$

olmaktadır. Bu ifadeyi dikkate alırsak, denklem

$$u_t + A(2u - 3u^2)u_x = 0$$

olur.

İspatlanmıştır ki, başlangıç değer problemi için yazılmış problemin başlangıç fonksiyonu hem negatif hem de pozitif eğime sahipse, problemin global çözümü yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır. Dolayısıyla problemin klasik çözümü mevcut olmamaktadır.

Limit durum, yani başlangıç fonksiyonun süreksiz olduğu durumların incelenmesi

(Riemann Problemi) hem teorik hem de pratik açıdan önem taşımaktadır.

Söz konusu problemler hal fonksiyonunun kabarık olduğu durumlarda iyice incelenmiştir. Hal fonksiyonunun kabarık olmadığı durumda gerçek çözümlerin ele alınması temelli bir araştırma söz konusu olmaktadır.

Tezin 1. bölümünde, 1. basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış başlangıç değer probleminin çözümü hal fonksiyonu kabarık olduğu durum incelenmiştir. Rankino Hugoniot koşulunun geometrik yorumu verilmiştir.

Hal fonksiyonun kabarık olmadığı durum incelenmiş ve bazı problemlerin gerçek çözümleri elde edilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde yer değişkenlerin sayısı iki olan durum incelenmiş ve lineer diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümünün elde edilmesi için bir yöntem geliştirilmiştir.

Bunun için özel şekilde kurulmuş ve esas problemden farklı bazı avantajları olan yardımcı problem önerilmiştir. Yardımcı problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliği esas problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliğinden bir merteye çok olmaktadır. Bu da esas problemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında çözümünü elde etmeye imkan sağlamaktadır.

Önerilmiş yardımcı problem 1. Basamaktan kuazi lineer diferansiyel denklem için yazılmış başlangıç değer (veya başlangıç-sınır değer) probleminin sayısal çözümlerini bulmaya imkan sağlamaktadır.

2. Birinci Basamaktan Bir Boyutlu Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde bir boyutlu Hoph denklemi için yazılmış başlangıç değer problemini inceleyeceğiz.

2.1 Süreksizliğin Mevcut Olma Koşulu

Aşağıdaki problemi inceleyelim

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

Burada $u_0(x)$ bilinen fonksiyon olmaktadır ve varsayalım ki, $f''(u) > 0$, $f(u) \in C_{loc}^3$ ve $u_0(x) \in C^2$.

Şimdi, sırf matematiksel düşüncelere dayanarak (1) denkleminin $t < T$ değerleri için sürekli olan çözümün özelliklerini araştıralım. Bu çözümün, hangi $t = T$ kritik değerlerinde bozulduğunu (veya korunduğunu) bulalım.

$z = u_x(t, x)$ olsun ve (1) denklemini x 'e göre diferansiyelleyelim,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + f'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$z = u_x$ olduğunu dikkate alırsak

$$\frac{\partial z}{\partial t} + f''(u) z^2 + f'(u) \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

veya

$$0 \geq \frac{\partial z}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial z}{\partial x}$$

olduğunu alırız. $x = x(t)$ karakteristikleri üzerinde $\frac{dx}{dt} = f'(u)$ olduğundan

$$0 \geq \frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{dz}{dt}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\frac{dz}{dt} \leq 0$, yani, $z(t, x)$ karakteristikler üzerinde artmayan fonksiyondur. Böylelikle, herhangi bir $(t, x) \in D$ için,

$$z(t, x) = u_x(t, x) \leq \text{Sup} u_0(x) = K_0, \quad x \in R. \quad (3)$$

$u_x(t, x)$ fonksiyonunu $t = T$ değerleri için, tüm x 'ler için tanımlı olmadığında, (3) denklemini

$$\frac{u(t, x_2) - u(t, x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_0, \quad \forall x_1, x_2 \quad (4)$$

formda yazalım.

$$(4) \text{ 'den, } x_1 < x_2 \text{ olan durumlar için } u(t, x_2) - u(t, x_1) \leq K_0 (x_2 - x_1) \text{ ve}$$

$x_2 \rightarrow x^* + 0, \quad x_2 \rightarrow x^* - 0$ yazılabilir ($x^* - u(T, x)$ fonksiyonu için süreksizlik noktasıdır). Limite geçerse $u(t, x)$ fonksiyonunun

$$u_+ = u(t, x^* + 0) < u(t, x^* - 0) = u_- \quad (5)$$

parça-parça sürekli fonksiyon olduğunu görebiliriz.

(5) türünden olan eşitsizliğe sıçrayışın mevcut olma koşulu (veya O. A. Oleynik koşulu) denir. $f''(u) < 0$ olduğu durumda $u = -v$ değişken dönüşümü ile (1) denklemini $v_t + (\tilde{f}(v))_x = 0$ şeklinde yazabiliriz. Burada $\tilde{f}(v) \equiv -f(-v)$ dir. Ayrıca

$f''(v) = -f''(-v) > 0$ dir. Bu durumda, sıçrayış $u_+ > u_-$ durumunda mevcut olmaktadır.

Sonuç olarak, kabarık $f(u)$ fonksiyonu için çözümde sıçrayışın mevcut olma koşulu aşağıdaki gibi olmaktadır:

I. $f(u)$ fonksiyonu aşağı kabarık ise (örneğin; $f(u) = \frac{u^2}{2}, e^u, \dots$) (1) denkleminin çözümünde, $u_- > u_+$ olduğunda, u_- 'den u_+ 'ya doğru sıçrayış mevcut olur, (Şekil 2)

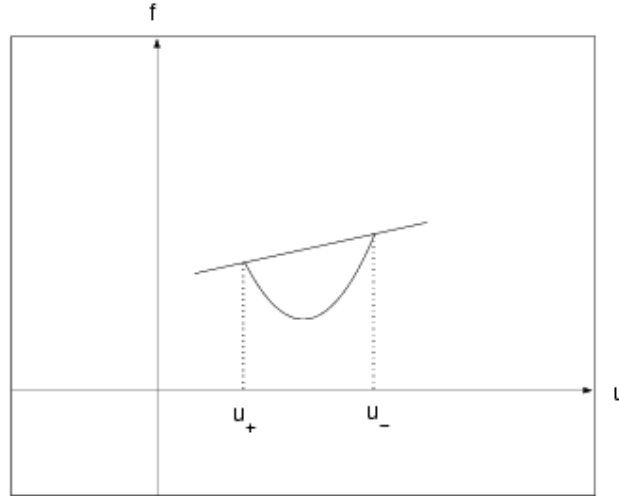
II. $f(u)$ üste kabarık fonksiyon ise (örneğin; $f(u) = -u^2, \ln u, \dots$) sıçrayış $u_- < u_+$ olduğunda u_- 'den u_+ 'ya doğru mevcut olur, (Şekil 3)

2.2 Suni Özlülük Yöntemi

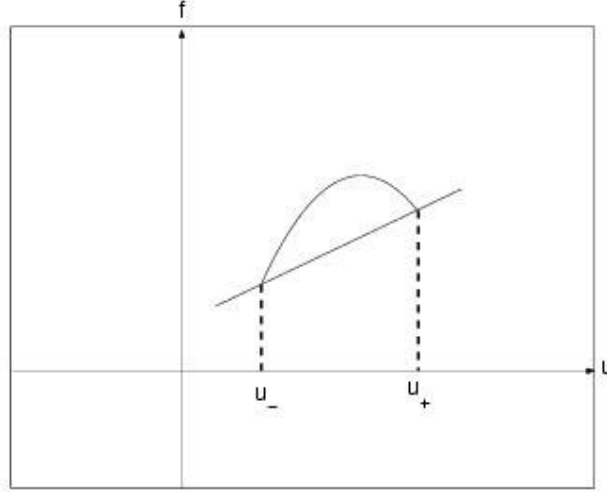
Şimdi, $f(u)$ fonksiyonun kabarık olmadığı durumları inceleyelim. Yukarıda ele aldığımız sıçrayışın mevcut olma koşullarının geometrik yorumunu verelim:

1) $u_- > u_+$ olduğu durumda $f(u)$ fonksiyonu alta kabarık ise, onun grafiği $(u_-, f(u_-))$ ve $(u_+, f(u_+))$ noktalarından geçen doğrunun üstünde olamaz. (Şekil 2)

2) $u_- < u_+$ olduğunda ise $f(u)$ fonksiyonu üste kabarık ise, onun grafiği $(u_-, f(u_-))$ ve $(u_+, f(u_+))$ noktalarından geçen doğrunun altında yerleşemez. (Şekil 3)



Şekil 2. $f(u)$ fonksiyonunun alta kabarık olduğu durum



Şekil 3. $f(u)$ fonksiyonunun üste kabarık olduğu durum

Bu muhakemeler doğrultusunda, bu bilgileri kabarık olmayan fonksiyonlar için geliştirebiliriz. Bu olayı detaylı bir şekilde inceleyebilmek için ideal ve reel gazların özelliklerine dayanarak fiziksel (daha doğrusu hidrodinamik) kavramlardan yararlanalım.

Eğer, $x = x(t)$ bir boruda hareket eden parçacığın yörüngesi, $u(t, x)$ fonksiyonu ise t zamanında x noktasındaki bu parçacığın hızı olursa, bu takdirde,

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = u(t, x(t)),$$

ve

$$\ddot{x}(t) = \frac{du}{dt}$$

olmaktadır.

Eğer, sabit hızlı akışları incelersek $\frac{du}{dt} = 0$ oluyor. Buradan Hopf denklemini ele almış oluyoruz.

İdeal gaz, prensipçe teorik olarak mevcut olmaktadır. Yani reel gazlarda viskozite dikkate alınmazsa, bu gaza bir ideal gaz gibi bakabiliriz.

ε ile real gazın genleşme katsayısını gösterelim. Bu durumda, viskoteze deki sürtünme kuvvetini, birim kitlede bulunan $x(t)$ noktasındaki parçacığı etkileyen (belirli koşullar çerçevesinde) $\varepsilon u_{xx}(x, t)$ olarak alabiliriz. O zaman,

$$\ddot{x} = \frac{du}{dt} = \varepsilon u_{xx}$$

oluyor, ve buradan aşağıdaki denklemi elde ederiz ki,

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \quad (6)$$

buna Burgers denklemi denir.

Hoph denkleminin kabul gören tüm zayıf çözümleri, (6) denkleminin $u_\varepsilon(t, x)$ çözümünün $\varepsilon \rightarrow 0$ limit durumu olmaktadır.

Yukarıdaki yöntemin (6) denkleminin uygulanmasından önce Burgers denkleminin lineerleştirilmesi için bir yöntem inceleyelim. (6) denklemini

$$u_t = \left(\varepsilon u_x - \frac{u^2}{2} \right)_x$$

gibi yazalım. Aşağıdaki gibi tanımlanan

$$U(t, x) = \int_{(0,0)}^{(t,x)} \left[u dx + \left(\varepsilon u_x - \frac{u^2}{2} \right) dt \right],$$

potansiyel fonksiyonunu içereyim. Buradan,

$$u = U_x,$$

olduğunu elde ederiz ve bu ifade (6)'da yerine konursa

$$U_t + \frac{1}{2} U_x^2 = \varepsilon U_{xx} \quad (7)$$

olarak ele alırız.

(7) denkleminde $U = -2\varepsilon \ln z$ değişken dönüşümünü yapalım

$$U_t = -2\varepsilon \frac{1}{z} z_t, \quad U_x = -2\varepsilon \frac{1}{z} z_x, \quad U_{xx} = -2\varepsilon \left(\frac{z_x}{z} \right)_x = -2\varepsilon \left(\frac{zz_{xx} - z_x^2}{z^2} \right).$$

Bu ifadeleri (7)'de dikkate alırsak

$$\begin{aligned} -2\varepsilon \frac{z_t}{z} + \frac{1}{2} \left(-2\varepsilon \frac{z_x}{z} \right)^2 &= -2\varepsilon^2 \frac{zz_{xx}}{z^2} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2}, \\ -2\varepsilon \frac{z_t}{z} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2} &= -2\varepsilon^2 \frac{zz_{xx}}{z^2} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2}, \end{aligned}$$

veya

$$z_t = \varepsilon z_{xx} \quad (8)$$

olduğunu alırız. (8) denklemi $z(t, x)$ fonksiyonuna göre linear ısı dağılım denklemi olmaktadır. (7) ve (8) 'den

$$u = U_x = -2\varepsilon \frac{z_x}{z}$$

olur.

Şimdi varsayalım ki,

$$u(t, x) = u_+ - \frac{u_+ - u_-}{2} [1 + \text{sign}(x - \omega t)] = \begin{cases} u_-, & x < \omega t \\ u_+, & x > \omega t \end{cases} \quad (9)$$

fonksiyonu (1) denkleminin zayıf çözümü olmaktadır, burada ω –sabit, $t > 0$. Bunun için yeterli ve gereken koşul, $x(t) = \omega t$ sıçrayış eğrisi üzerinde Rankino-Hugoniot

$$\omega = \frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad (10)$$

koşulunun korunmasıdır.

Kayıp olan özlülük yönteminin esas amacı aşağıdaki gibidir. Varsayacağız ki, (9) cinsinden olan darbe dalgası şeklindeki çözüm yararlı çözümdür.

Burgers denkleminin çözümünün yapısını inceleyelim.

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \quad (11)$$

denkleminin $x \neq \omega t$ olmak üzere noktasal çözümü $u^\varepsilon(t, x)$ olsun. (11) denkleminin $u(t, x)$ çözümünü aşağıdaki gibi koşan dalga

$$u^\varepsilon(t, x) = v(\xi), \quad \xi = \frac{x - \omega t}{\varepsilon} \quad (12)$$

şeklinde arayacağız. (12) ifadesi (11)'de yerine konursa,

$$u_t^\varepsilon = v'(\xi) \xi_t = v'(\xi) \left(-\frac{\omega}{\varepsilon}\right), \quad u_x^\varepsilon = v'(\xi) \frac{1}{\varepsilon}, \quad u_{xx}^\varepsilon = v''(\xi) \frac{1}{\varepsilon^2}$$

ve olduğunu dikkate alarak

$$v'(\xi) \left(-\frac{\omega}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} (f(v))' = \varepsilon v'' \frac{1}{\varepsilon^2}$$

veya

$$-\omega v'(\xi) + (f(v))' = v'' \quad (13)$$

sonucunu alırız.

Diğer taraftan da, $u^\varepsilon = v\left(\frac{x - \omega t}{\varepsilon}\right)$, (9) eşitliği ile tanımlanan çözüme noktasal olarak ($x \neq \omega t$) yaklaşıyorlar. Bu denklemi çözmek için aşağıdaki başlangıç

$$v(-\infty) = u_-, \quad v(+\infty) = u_+ \quad (14)$$

koşulunu ekleyelim.

(13)'ü integrallersek

$$-\omega v + f(v) = v' + C$$

veya

$$v' = F(v) + C \quad (15)$$

olarak elde ederiz. Burada, $F(v) = -\omega v + f(v)$, C =sabit olmaktadır.

(15) otonom denkleminin, (14) koşulunu koruması için gereken ve yeterli koşul aşağıda verilmiştir:

1) u_- ve u_+ özel noktalarında (15) denkleminin sağ tarafı 0'a çevrilir.

$$F(u_-) + C = F(u_+) + C = 0$$

Yani, $C = -F(u_-) = -F(u_+)$. Buradan $-F(u_-) = -F(u_+)$ koşulu $f(u_-) - \omega u_- = f(u_+) - \omega u_+ = 0$ eşitliği dikkate alınırsa Rankino-Hugoniot koşulunun aynısıdır.

u_- ve u_+ arasında başka özel nokta yoksa ve (15) söz konusu aralıkta,

$$F(v) - F(u_-) = F(v) - F(u_+)$$

ifadesi

a) $u_- < u_+$ olursa pozitiftir. Bu durumda $v(\xi)$ artar, yani

$$F(v) - F(u_-) > 0 \quad \forall v \in (u_-, u_+), \quad u_- < u_+ \quad (16)$$

b) $u_- > u_+$ olduğunda negatiftir. Bu durumda $v(\xi)$ azalır, yani

$$F(v) - F(u_+) < 0 \quad \forall v \in (u_+, u_-), \quad u_+ < u_-. \quad (17)$$

Bu koşullar korunduğu taktirde bizi ilgilendiren çözüm

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v) - F(u_-)} = \xi - \xi_0,$$

$$v_0 = \frac{u_+ + u_-}{2}$$

şeklinde yazılır. (16) ve (17) koşulları mevcutluk koşullarının analitik yazılım formudur.

Şimdi bu koşullara geometrik anlam verelim. Bunun için $F(v) = f(v) - \omega v$ ifadesini (16) ve (17)'de yerine yazalım.

$$F(v) - F(u_-) = f(v) - \omega v - (f(u_-) - \omega u_-) > 0,$$

$$\forall v \in (u_-, u_+), \quad u_- < u_+,$$

$$f(v) - f(u_-) > \omega(v - u_-).$$

Son olarak,

$$f(v) - f(u_+) > \omega(v - u_+), \quad \forall v \in (u_+, u_-), \quad u_+ < u_-.$$

Rankino-Hugoniot koşulunu dikkate alırsak

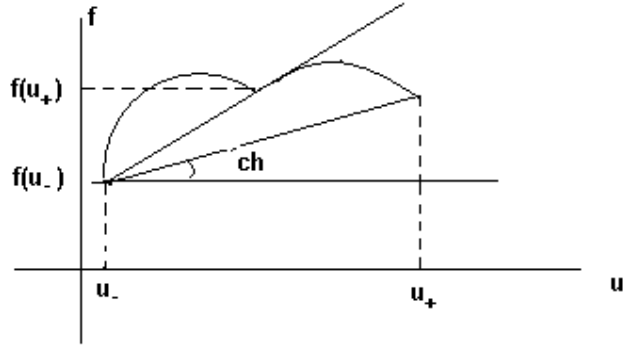
$$\frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} > \omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad \forall u \in (u_-, u_+) \text{ eğer } u_- < u_+, \quad (18)$$

veya

$$\frac{f(u) - f(u_+)}{u - u_+} < \omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad \forall u \in (u_+, u_-) \text{ eğer } u_+ < u_-, \quad (19)$$

olduğunu alırsak.

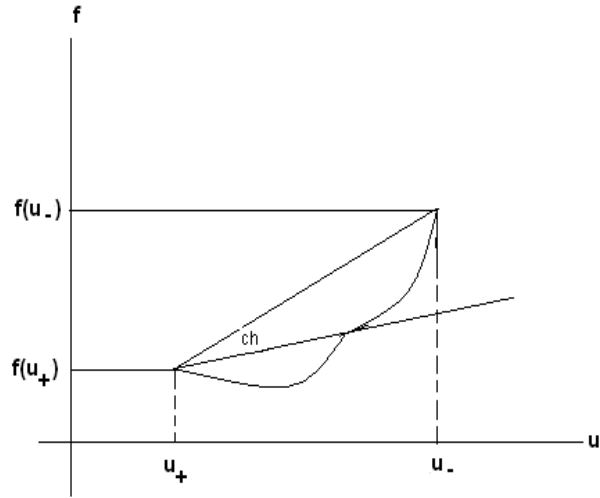
Rankino-Hugoniot koşulunun geometrik anlamını ifade etmek için önce $f(u)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



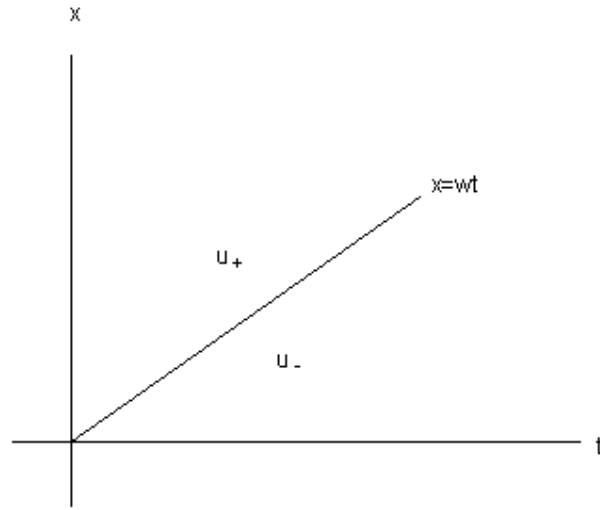
Şekil 4. $f(u)$ fonksiyonunun kabarık olmadığı durum

(18) koşulunun anlamı şudur: ch kiriş ve $((u_-, f(u_-))$ ve $(u_+, f(u_+))$ noktalarını birleştiren doğru) ou eksenini ile oluşturduğu eğim açısı, $(u_-, f(u_-))$ ve $(u_+, f(u_+))$ kesenin eğim açısından küçük olmaktadır. Böylelikle, $(u, f(u))$ noktası ve $f(u)$ fonksiyonunun (u_-, u_+) aralığındaki tüm grafiği ch kirişinin üstünde olmaktadır.

Analoji olarak (19) koşulunun anlamı da, $f(u)$ fonksiyonunun (u_+, u_-) aralığındaki grafiği ch veterinin altında olmasıdır.



Şekil 5. $f(u)$ fonksiyonunun kabarcık olmadığı durum



Şekil 6. (x, t) düzleminde zayıf çözüm

Sonuç olarak, (1) denkleminin $u(t, x)$ çözümünde u_- 'den u_+ 'ya doğru sıçrayışın olması için (x 'in artan tarafında) aşağıdaki sıçrayışın mevcut olma koşullarını ele alırız:

- $u_- < u_+$ olduğunda $f(u)$ fonksiyonunun $[u_-, u_+]$ aralığındaki grafiği $(u_-, f(u_-))$ ve $(u_+, f(u_+))$ noktalarını birleştiren kirişin üstüne yerleşmesi gerekmektedir.

- $u_- > u_+$ olduğunda ise $f(u)$ fonksiyonunun $[u_+, u_-]$ aralığındaki grafiği $(u_+, f(u_+))$ ve $(u_-, f(u_-))$ noktalarını birleştiren kirişin altına yerleşmesi gerekmektedir.

2.3 Hal Fonksiyonu Aşağı Kabarık (Üste Kabarık) Olduğu Durumlar İçin

Riemann Problemi

Biz bu bölümde 1. basamaktan olan nonlinear diferansiyel denklemler için Riemann problemini göz önüne alacağız (Buna sıçrayışların kaybı da deniliyor). Diğer bir deyimle, $D_T = \{-\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$ bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_-, & x < 0 \\ u_+, & x > 0 \end{cases} \quad (21)$$

probleminin çözümünü inceleyeceğiz. Burada u_- ve u_+ sabitlerdir ve $f(u)$ kabarık bir fonksiyondur. $u_- > u_+$ olduğunda çözüm parça-parça sürekli fonksiyon olacak, ve ayrıca sürekli olduğu kısımlarda (20) denklemini klasik anlamda koruyacaktır. Çözüm, süreksizlik eğrisi üzerinde Rankino-Hugoniot ve entropinin artma koşulunu sağlayacaktır. Elde edilmiş $u(t, x)$ fonksiyonu, $(t \rightarrow 0)$ yaklaştığında $x = 0$ noktası hariç, diğer yerlerde $u_0(x)$ yaklaşacaktır.

Kolayca görmek mümkündür ki, (20) denklemi $x \rightarrow kx$, $t \rightarrow kt$ değişken dönüşümüne invariant kalıyor. Başlangıç koşul da $x \rightarrow kx$, $k > 0$ olduğunda ise kendi kendine dönüşüyor.

Bunun yanı sıra entropinin artma koşulu da söz konusu dönüşüme invariant kalır. Böylelikle çözümün tekliğinden

$$u(kt, kx) = u(t, x), \quad \forall k > 0$$

olmaktadır.

Dolayısıyla, $u(t, x)$ fonksiyonu koordinat başlangıcından çıkan keyfi $x = \xi t$, $t > 0$ ışınları üzerinde sabit kalır. Yani, $u(t, x)$ $\xi = \frac{x}{t}$ 'nin fonksiyonu olmaktadır

$$u(t, x) = u\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0. \quad (22)$$

Bu türlü çözümlere otomodel çözümler denir. Otomodel çözümlerde süreksizlik eğrileri orijinden çıkan doğrular olmaktadır.

Sadelik için önce, $f(u) = \frac{u^2}{2}$ olsun. Bu durumda (20) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemi (21) başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim.

Şimdi, Hopf denklemi için tüm sürekli otomodel çözümleri ele alalım. (22) ifadesini (23)'de yerine yazarsak

$$-\frac{x}{t^2} u' \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} u \left(\frac{x}{t} \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{1}{t} u' \left(\frac{x}{t} \right) \left(u \left(\frac{x}{t} \right) - \frac{x}{t} \right) = 0$$

elde ederiz.

Buradan, $u' = 0$ veya $u = \frac{x}{t}$ olmak zorundadır. Böylelikle, Hopf denkleminin tüm otomodel çözümleri sabittir.

Bizim sonraki işimiz ele aldığımız sürekli çözümleri düzgün (yani süreksizlik eğrisi üzerinde Rankino-Hugoniot ve entropinin artma koşulunun korunmasını sağlamakla) şekilde birleştirip, başlangıç koşulunu da korumasını sağlamaktır. Önce, çeşitli sabitleri ve $\frac{x}{t}$ cinsinden olan sabitleri hangi ışınlar üzerinde, nasıl bağlayacağımızı araştıralım.

Rankino-Hugoniot koşulundan görüldüğü gibi, $u(t, x) \equiv u_1$ ve $u(t, x) \equiv u_2$, (burada u_1, u_2 sabitlerdir) sabitleri

$$x = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} t = \frac{1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1} t = \frac{u_2 + u_1}{2} t$$

doğrusu ile kesişirler. Fakat, bu kesişme, sıçrayışın varlık koşulundan x 'in artması ve u 'nun azalmasıyla ortaya çıkabilir.

Böylelikle, eğer $u_2 > u_1$ ise $x < \frac{u_1 + u_2}{2} t$ olduğunda $u(x, t) \equiv u_2$ olur ve $x > \frac{u_1 + u_2}{2} t$ olduğunda $u(x, t) \equiv u_1$ olur.

$u(t, x) \equiv u_3 = \text{sabit}$ ile $u(x, t) = \frac{x}{t}$ 'nin kesişmesi, bunların $x = \xi t$ doğrusu ile kesiştikleri zaman mümkün olur. Bu durumda $\frac{x}{t}$ limitte ξ 'ye eşit olur.

$$\xi = \frac{dx}{dt} = \frac{f(u_3) - f(\xi)}{u_3 - \xi} = \frac{1}{2} \frac{u_3^2 - \xi^2}{u_3 - \xi} = \frac{u_3 + \xi}{2}, \quad u_3 = \xi.$$

Bu, ele alınan sürekli fonksiyonun $x = \xi t = u_3 t$, $t > 0$, doğrusu ile kesiştiği anlamına geliyor.

Şimdi biz Riemann problemini çözebiliriz. Burada iki önemli durum vardır:

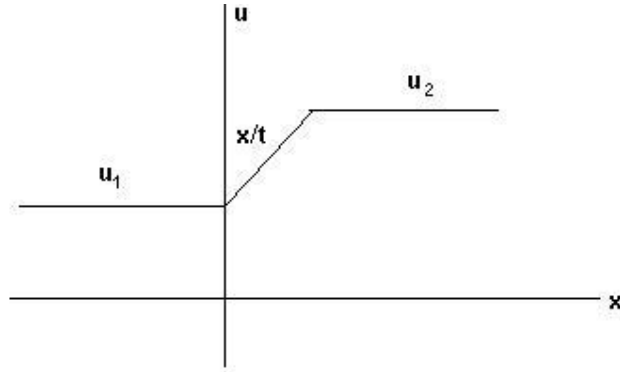
1) $u_- > u_+$ olduğu takdirde çözüm, Rankino-Hugoniot koşuluna uygun olarak $x < \frac{u_1 + u_2}{2} t$ ile bağlanan darbe dalgası şeklinde ifade edilebiliyor.

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, & x < \frac{u_- + u_+}{2} t \\ u_+, & x > \frac{u_- + u_+}{2} t. \end{cases} \quad (24)$$

2) $u_- < u_+$ olduğu zaman ise çözümün sürekli olması nedeniyle çözümü darbe dalgası şeklinde ele alamayız. Çünkü bu durumda sıçrayış, entropinin artma koşulunu sağlamaz. Bu durumda bize u_- ve u_+ sabitleri ile kesişen $\frac{x}{t}$ doğrusu yardımcı oluyor. Bu durumda problemin çözümü aşağıdaki şekilde oluyor,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, & x < u_- t \\ \frac{x}{t}, & u_- t < x < u_+ t \\ u_+, & x > u_+ t. \end{cases} \quad (25)$$

Ele alınan bu çözüm, $t > 0$ değerleri için süreklidir. (25) formülü ile tanımlanan çözümün grafiği Şekil 7 de gösterilmiştir.



Şekil 7. Çözümün dağılımı, $u_1 < u_2$ olan durum

Başlangıç dağılımında bulunan sıçrayış kaybolduğundan $u_- t < x < u_+ t$ bölgesine sıçrayışın kayıp bölgesi denir.

Şimdi kullandığımız Rankino-Hugoniot koşulunun geometrik anlamını araştıralım.

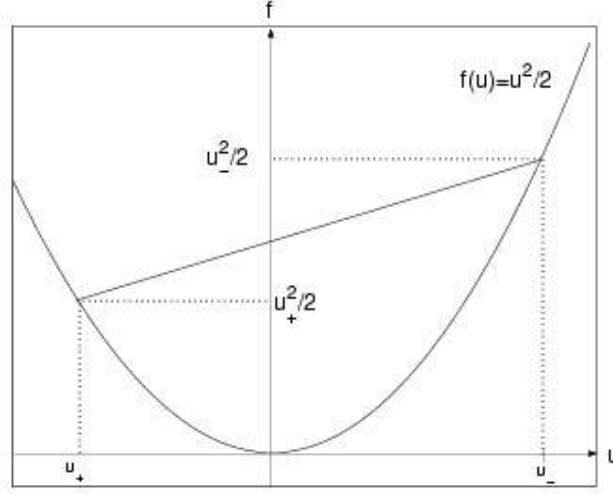
$f(u) = \frac{u^2}{2}$ fonksiyonun (x, t) düzlemindeki eksenlere paralel olan (u, f) düzlemindeki grafiğini kuralım. Bu fonksiyon üzerinde $(u_+, \frac{u_+^2}{2})$ ve $(u_-, \frac{u_-^2}{2})$ noktalarını kaydedelim.

Söz konusu noktalardan geçmekte olan doğrunun denklemi

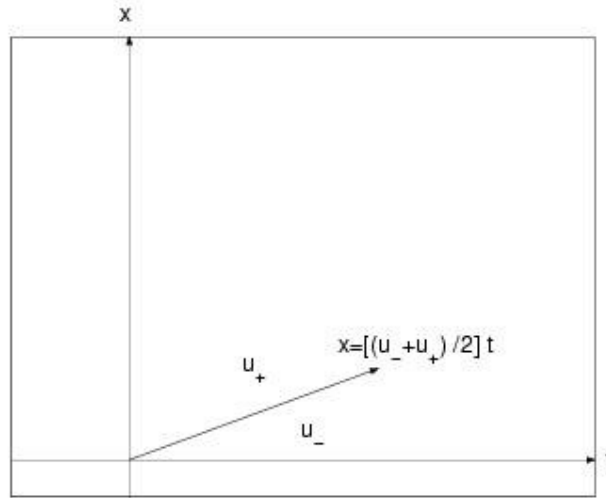
$$f(u) = ku + b,$$

burada $K = \frac{u_+ + u_-}{2}$, $b = \frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2} - \frac{u_- + u_+}{2}$ olmaktadır.

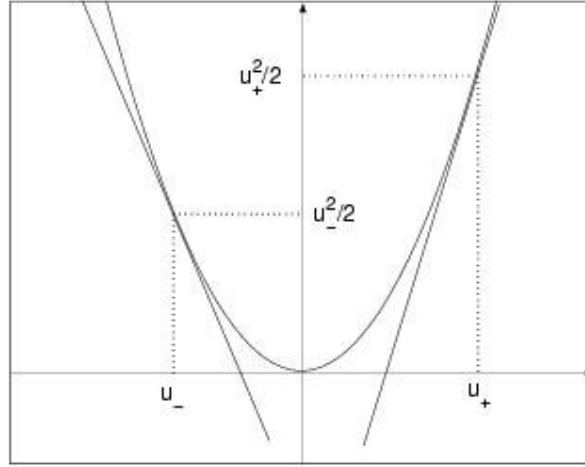
Göründüğü gibi, sıçrayış doğrusu olan $x = \frac{u_- + u_+}{2} t$, $(u_+, \frac{u_+^2}{2})$ ve $(u_-, \frac{u_-^2}{2})$ noktalarından geçen doğruya paralel olmaktadır, (Şekil 8, Şekil 9).



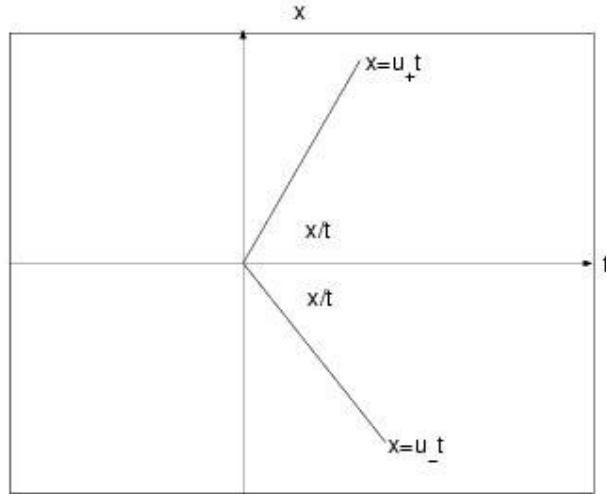
Şekil 8. Rankino-Hugoniot koşulunun geometrik anlamı ($u_+ < u_-$ olan durum)



Şekil 9. Zayıf çözüm



Şekil 10. $u_- < u_+$ olan durum



Şekil 11. Zayıf çözüm

(25) formülü ile verilen çözüm için ise aşağıdakileri söyleyebiliriz. (25) formülü ile verilen çözümün türevlerinin süreksiz olduğu eğriler $x = u_- t$ ve $x = u_+ t$ doğrularıdır. Bu doğrular ise, $f(u) = \frac{u^2}{2}$ eğrisine, $(u_-, f(u_-))$ ve $(u_+, f(u_+))$ noktalarından çıkan teğetlere paralel olmaktadır, (Şekil 10, Şekil 11).

Şimdi genel (20) denklemini göz önüne alalım. Varsayalım ki, $f(u)$ hal fonksiyonu

$f''(u) \geq 0$ ($f''(u) \leq 0$) koşulunu korumaktadır.

(20) denkleminin otomodel çözümü, bu durumda $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ cinsinden olmaktadır. Şimdi bu çözümü bulalım. Yukarıda olduğu gibi (22) ifadesini (20) de yerine yazalım,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} &= u' \left(\frac{x}{t}\right) \left(-\frac{x}{t^2}\right) + f'(u) \frac{1}{t} u' \left(\frac{x}{t}\right) \\ &= \frac{1}{t} u' \left(\frac{x}{t}\right) \left(f' \left(u \left(\frac{x}{t}\right)\right) - \frac{x}{t}\right) = 0.\end{aligned}$$

Böylelikle, $u' \left(\frac{x}{t}\right) = 0$ 'dan alınan sabit çözümden farklı olarak başka bir çözüm de $u(\xi) = \psi(\xi)$, $\left(\xi = \frac{x}{t}\right)$ olmaktadır. Bu çözüm, $f'(\psi) = \xi$ denkleminde bulunur. Buradan da, $\psi = (f')^{-1}$ olmaktadır. f kabarcık fonksiyon olduğundan, f^{-1} mevcut olmaktadır. Böylelikle f^{-1} monoton fonksiyondur. Ele alınan $u = \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ fonksiyonu, $(0,0)$ noktasında süreksizdir. Fakat, $t > 0$ olduğunda sürekli olur. (Böyle dalgalara refraction dalgası denir.)

Böylelikle (20) problemini aşağı kabarcık $f(u)$ fonksiyonu için ($f''(u) \geq 0$) şöyle yazabiliriz.

1) Eğer $u_- > u_+$ ise çözüm dalga şeklindedir ve Rankino-Hugoniot koşulu

$$\frac{x}{t} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad t > 0$$

şeklinde oluyor ve problemin çözümü ise

$$u(t, x) = \begin{cases} u_-, & x < \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} t \\ u_+, & x > \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} t \end{cases} \quad (26)$$

gibi yazılıyor.

Bu çözümde entropinin artma koşulu korunmaktadır.

2) Eğer $u_- < u_+$ ise (26) şeklinde olan çözüm entropinin artma koşulunu korumaz. Bu takdirde u_- ve u_+ sabitlerini $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ fonksiyonu ile dikmek gerekir. Çözümün sürekli olma koşulundan çözümü

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, & x \leq f'(u_-)t, \\ \psi\left(\frac{x}{t}\right), & f'(u_-)t < x < f'(u_+)t, \\ u_+, & x \geq f'(u_+)t \end{cases} \quad (27)$$

şeklinde ele alırız.

Eğer $f(u)$ fonksiyonu aşağı kabarık ise (27) formülü ile bulunan fonksiyon $t > 0$ olduğunda net olarak tanımlanır. Böylelikle $f'(u)$ monoton artar ve $f'(u_-) < f'(u_+)$, eğer $u_- < u_+$.

Refraction dalgası olan $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ $t < 0$ 'da tanımlı fonksiyondur ve u_- ile u_+ arasındaki tüm değerleri almaktadır.

$\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ fonksiyonu f' fonksiyonunun tersi olarak tanımlandığından, yani

$$\xi = f'(u) \Rightarrow \psi\left(\frac{x}{t}\right) = (f')^{-1}$$

$\psi\left(\frac{x}{t}\right) = u_0$ olması $x = f'(u_0)t$ anlamına gelmektedir. Böylelikle $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ refraction dalgası u_0 değerini $x = f'(u_0)t$, $t > 0$ ışını üzerinde alıyor. Bu ışın ise $f(u)$ fonksiyonunun $(u_0, f(u_0))$ noktasında çizilmiş teğete paralel olmaktadır.

Özel durumda, yukarıda incelediğimiz Hopf denkleminin çözümünün türevinin süreksiz olduğu eğriler $x = f'(u_{\pm})t$ olduğunu ispatlamış olduk.

Yani $x = f'(u_{\pm})t$ ışınları $f(u)$ fonksiyonunun $(u_{\pm}, f(u_{\pm}))$ noktalarından çizilmiş teğetlere paralel olmaktadır.

Eğer $f(u)$ fonksiyonu üste kabarık fonksiyon olursa (20) probleminin çözümü yukarıdakine analogik olarak ele alınır, $u_- > u_+$ olduğunda ise (27) cinsinden çözüm alınır. Bu durumda $f'(u)$ azalan fonksiyon olur ve $f'(u_-) < f'(u_+)$ dır.

3. Hal Fonksiyonunun Kabarık Olmadığı Durum İçin Riemann Problemi

Yukarıdaki bölümde hal fonksiyonunun kabarık olduğu durumu inceledik. Bu bölümde ise hal fonksiyonunun kabarık olmadığı durumu inceleyeceğiz.

3.1. $f(u) = \frac{u^3}{3}$ Olduğu Durum

Bu bölümde amacımız, $f(u)$ fonksiyonunun kabarık olmadığı durumlarda (1), (2) probleminin gerçek çözümünü incelemektir. Örneğin, $f(u)$ fonksiyonu u^3 , $\sin u$ veya Buckley-Leverett fonksiyonu vs. olabilir.

Öncelikle $f(u) = \frac{u^3}{3}$ olduğu durumda Riemann problemini inceleyeceğiz. (2) koşuluna bağlı olarak bu denklemin çözümünü bulmak için, aşağıdaki tanımları verelim. $\mathfrak{K}$ ile $[\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı ve $\tilde{f} \geq f(u)$ koşulunu koruyan $\tilde{f}$ fonksiyonlar kümesini göstereyim.

Tanım 1. $\tilde{f} = \inf_{\tilde{f} \in \mathfrak{K}} \tilde{f}(u)$ eşitliği ile tanımlanan $\tilde{f}(u)$ fonksiyonuna $f(u)$ fonksiyonunun $[\alpha, \beta]$ aralığındaki üste kabarık katmanı denir.

Tanım 2. $\tilde{f} = \sup_{\tilde{f} \in \mathbb{K}} \tilde{f}(u)$ eşitliği ile tanımlanan $\tilde{f}(u)$ fonksiyonuna $f(u)$ fonksiyonunun $[\alpha, \beta]$ aralığındaki alta kabarik katmanı denir.

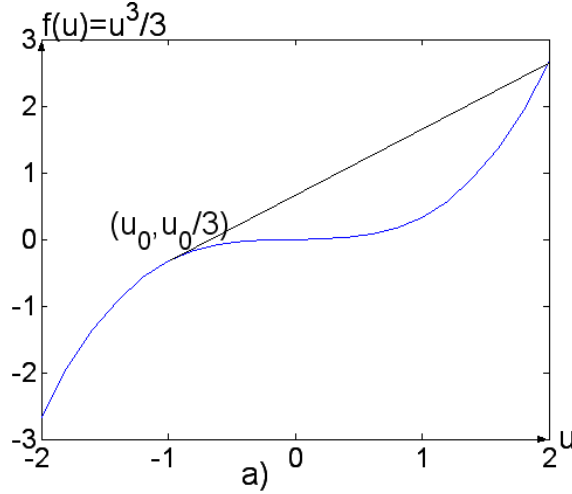
Önce $u_1 > u_2$ olan durumu göz önüne alalım

1.Durum. Bu durumda (1) denkleminin çözümünü aşağıdaki başlangıç koşulu çerçevesinde

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_2, & x > 0, \end{cases} \quad (28)$$

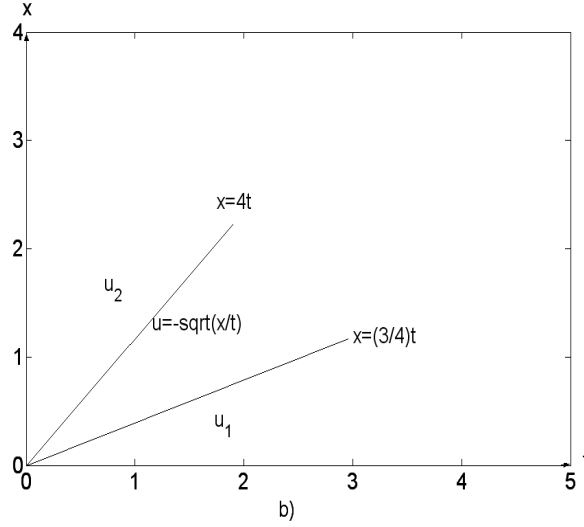
inleyeceğiz. Burada $u_1 = 2$; $u_2 = -2$.

İlk olarak, $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun $[-2,2]$ aralığında üste kabarik katmanını kuralım. Bu amaçla, $A\left(2, \frac{8}{3}\right)$ noktasından $\frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun grafiğine teğet çekelim. $\frac{u^3}{3}$ 'ün grafiğiyle, kesişme noktasını $(u_0, \frac{u_0^3}{3})$ ile gösterelim. Açık ki u_0 , $m = f'(u_0) = \frac{f(u_1) - f(u_0)}{u_1 - u_0}$ denkleminden $u_0 = -1$ olarak bulunur.



Şekil 12 a) $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun $[-2,2]$ aralığındaki üste kabarik katmanı

$\frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun üste kabarik katmanı, $\frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun $\left[-2, -\frac{1}{3}\right]$ aralığındaki grafiği ile $(-1, -\frac{1}{3})$ ve $(2,2)$ noktalarını birleştiren doğrudan oluşur. (Şekil 12a)



Şekil 12 b) (x, t) düzleminde zayıf çözüm

Böylelikle problemin çözümü, teğete paralel $x = \xi t$, $t > 0$ üzerinde sıçrayışa sahip olacaktır. Rankino-Hugoniot koşulundan $\xi = \frac{f(u_2) - f(u_0)}{u_2 - u_0} = 1$ olarak bulunur. Bu sıçrayış, $u_0 = -1$ ($x > \xi t$ için) sabiti ile $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ fonksiyonu arasında yerleşmektedir. Burada $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$, $\xi = f'(u) = u^2$ fonksiyonunun $[-2, -1]$ aralığındaki ters fonksiyonu olmaktadır. $u = \psi\left(\frac{x}{t}\right) = (f')^{-1} = -\sqrt{\frac{x}{t}}$, $1 \leq \xi \leq 4$.

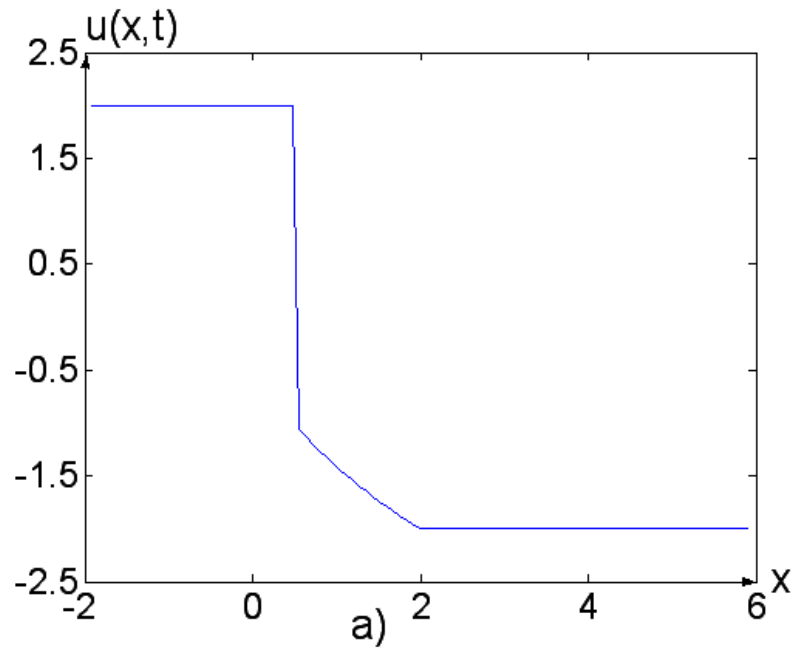
$\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ fonksiyonu ile $u_2 = -2$ sabitinin kesiştiği nokta $x = 4t$ ışını üzerinde gerçekleşir. Bu ışın $(u_2, f(u_2)) = (u_2, \frac{u_2^3}{3})$ noktasından çıkan teğete paralel doğru olmaktadır.

Böylelikle, (1), (28) probleminin gerçek çözümü

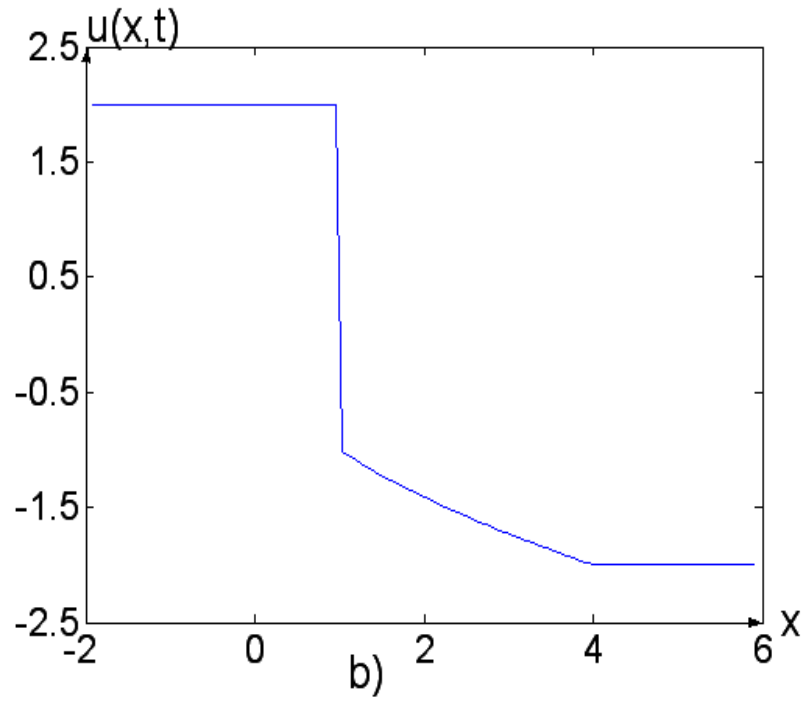
$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < t \\ -\sqrt{\frac{x}{t}}, & t < x < 4t \\ -2, & x \geq 4t \end{cases} \quad (29)$$

olur.

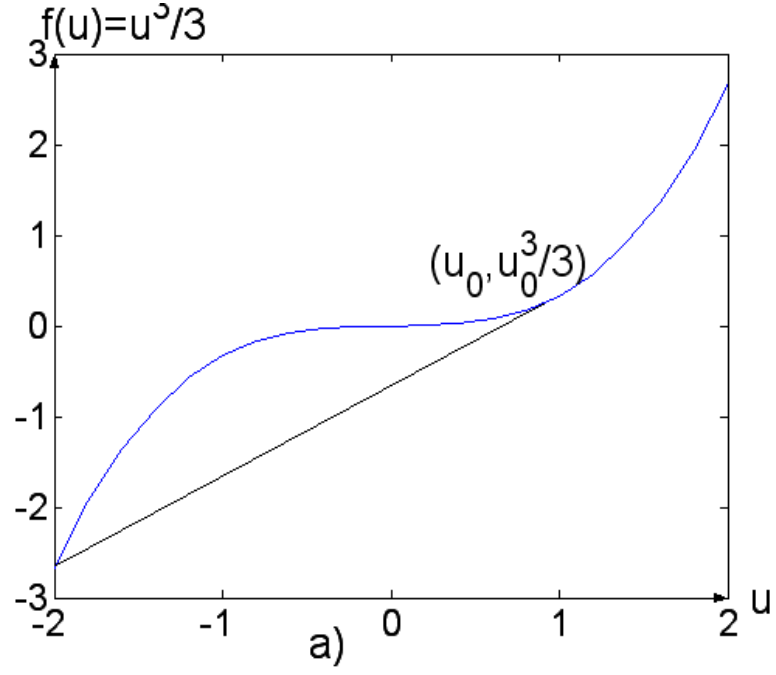
(x, t) düzleminde (1), (28) probleminin zayıf çözümü Şekil 12b'de gösterilmiştir. (28) çözümünün $T = 0.5; 1.0$ değerlerindeki grafikleri Şekil 13a ve 13b'de belirtilmiştir.



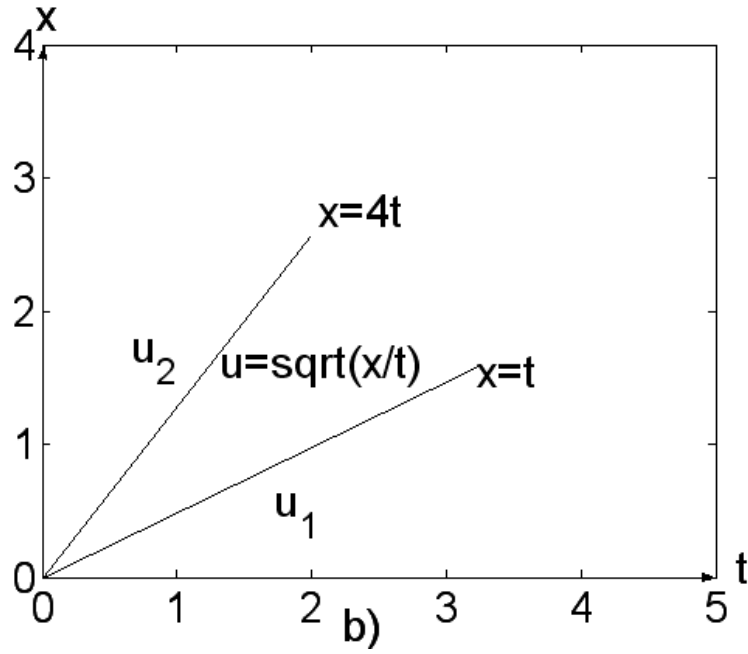
Şekil 13 a) $u(x, t)$ gerçek çözümünün $T = 0.5$ zamanındaki grafiği



Şekil 13 b) $u(x, t)$ gerçek çözümünün $T = 1.0$ zamanındaki grafiği



Şekil 14 a) $F(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun alta kabarık katmanı



Şekil 14 b) (x, t) düzleminde zayıf çözüm

Şimdi, $u_1 = -2$ ve $u_2 = 2$, $u_1 < u_2$ olan durumu inceleyelim. Bu durumda, $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun $[u_1, u_2]$ aralığında alta kabarık katmanını kuralım. $A(-2, f(u)) = A(-2, -\frac{8}{3})$ noktasından $f(u)$ 'nun grafiğine teğet çizelim. Bu amaçla, $A(-2, -\frac{8}{3})$ noktasından $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun grafiğine teğet çekelim. Açıktır ki, $f(u) = \frac{u^3}{3}$ 'ün grafiğiyle kesişme noktası $(u_0, \frac{u_0^3}{3}) = (1, \frac{1}{3})$ olur.

$\frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun üste kabarık katmanı, $\frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun $[u_1, u_2]$ aralığındaki grafiği ile $(1, \frac{1}{3})$ ve $(-2, -\frac{8}{3})$ noktalarını birleştiren doğrudan oluşur. (Şekil 14a)

Böylelikle problemin çözümü, teğete paralel $x = \xi t$, $t > 0$ üzerinde sıçrayışa sahip olacaktır. Rankino-Hugoniot koşulundan $\xi = 1$ olarak bulunur. Bu sıçrayış, $u_0 = 2$ ($x > t$ için) sabiti ile $\psi(\frac{x}{t})$ fonksiyonu arasında yerleşmektedir. Burada $\psi(\frac{x}{t})$, $\xi = f'(u) = u^2$ fonksiyonunun $[1, 2]$ aralığındaki ters fonksiyonu olmaktadır. $u = \sqrt{\xi}$, $1 \leq \xi \leq 4$.

Böylelikle, (1), (28) probleminin $u_1 < u_2$ durumunda gerçek çözümü

$$u(x, t) = \begin{cases} -2, & x < t \\ \sqrt{\frac{x}{t}}, & t < x < 4t \\ 2, & x \geq 4t \end{cases} \quad (30)$$

olur. (x, t) düzleminde (1), (28) probleminin zayıf çözümü Şekil 14b'de gösterilmiştir. (30) çözümünün $T = 0.5; 1.0$ değerlerindeki grafikleri Şekil 15a ve 15b'de belirtilmiştir.

Örnek 1.

a) $f(u) = \frac{u^3}{3}$ olduğunda $u_+ > u_-$ olan durum

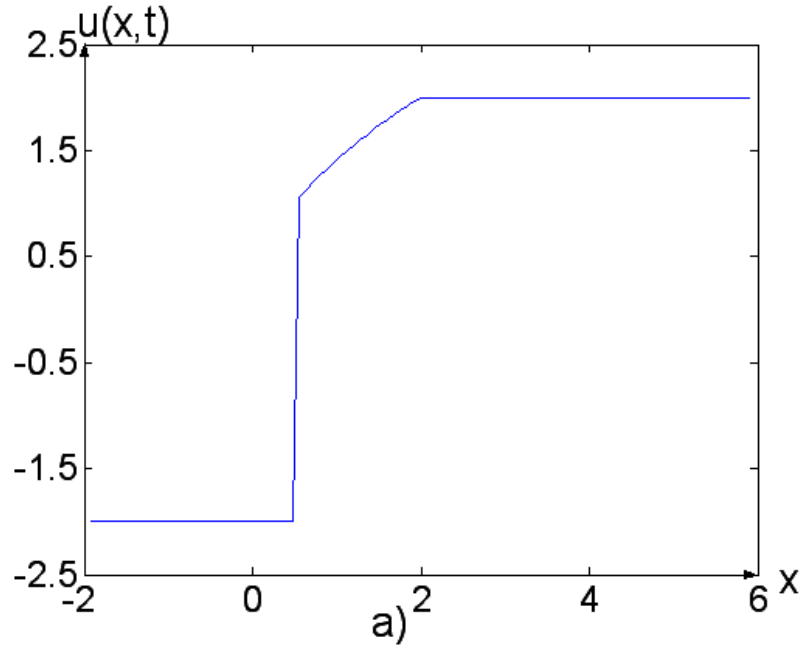
Bu bölümde aşağıdaki problemi

$$u_t + u^2 u_x = 0$$

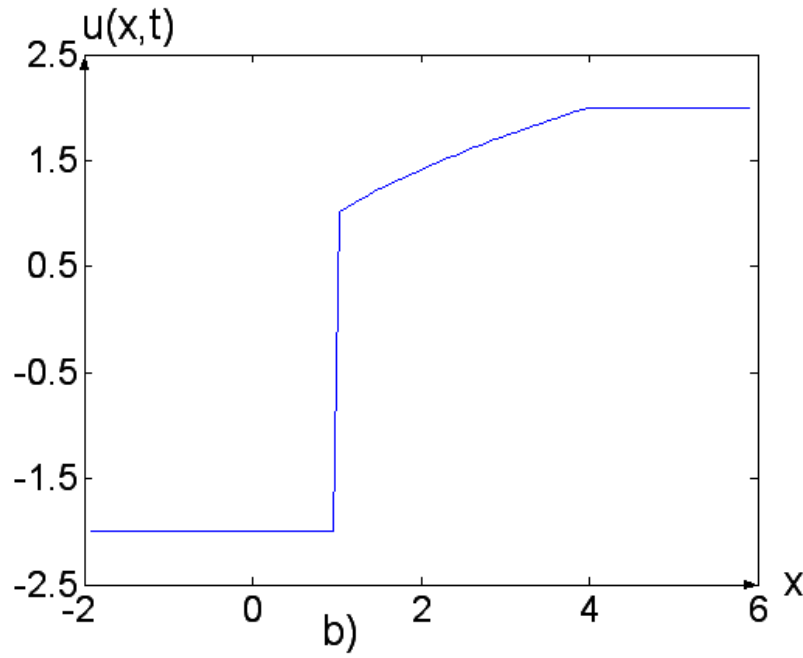
$$u_0(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2, & x > 0, \end{cases}$$

inceleyelim.

Sıçrayışın mevcut olma koşuluna göre $u_- > u_+$ olursa darbe dalgası vardır. $u_- = 0$, $u_+ = 2$ olduğunda bu durumda darbe dalgası yoktur.

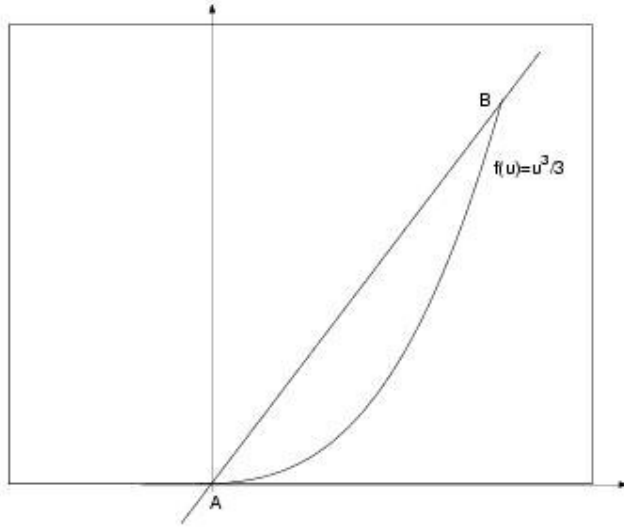


Şekil15 a) $u(x, t)$ gerçek çözümünün $T = 0.5$ zamanındaki grafiği



Şekil15 b) $u(x, t)$ gerçek çözümünün $T = 1.0$ zamanındaki grafiği

Hal fonksiyonu, $\frac{u^3}{3}$ 'ün grafiği Şekil 16 da gösterilmiştir.



Şekil 16. $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun grafiği ($u_1 < u_2$)

Normal çözüm ise,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq f'(0)t, \\ \psi\left(\frac{x}{t}\right), & f'(0)t < x < f'(2)t, \\ 2, & x \geq f'(2)t \end{cases}$$

$f'(u) = u^2$ olduğundan $f'(0) = 0$, $f'(2) = 4$

Şimdi $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ 'yi bulalım. $\psi(\xi) = (f')^{-1}$ olduğuna göre $-\frac{x}{t} = -u^2$; $u = \sqrt{\frac{x}{t}}$ oluyor.

O zaman, gerçek çözümü

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{\frac{x}{t}}, & 0 < x < 4t \\ 2, & x \geq 4t \end{cases} \quad (31)$$

şeklinde ele alırsak.

b) $f(u) = \frac{u^3}{3}$ olduğunda $u_+ < u_-$ olan durum

Şimdi aşağıdaki problemi

$$u_t + u^2 u_t = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

inceleyeceğiz. Başlangıç profilin grafiği Şekil 18’de gösterilmiştir.

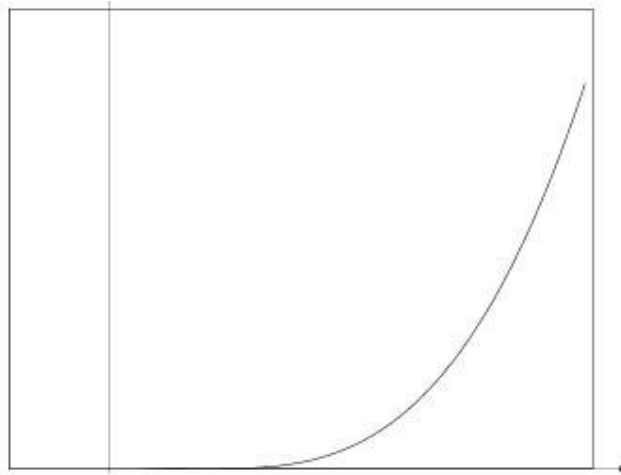
Bu durumda $u_- > u_+$ olduğundan darbe dalgası mevcuttur. Rankino-Hugoniot koşulunu dikkate alarak

$$\frac{x}{t} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{\frac{8}{3} - 0}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$$

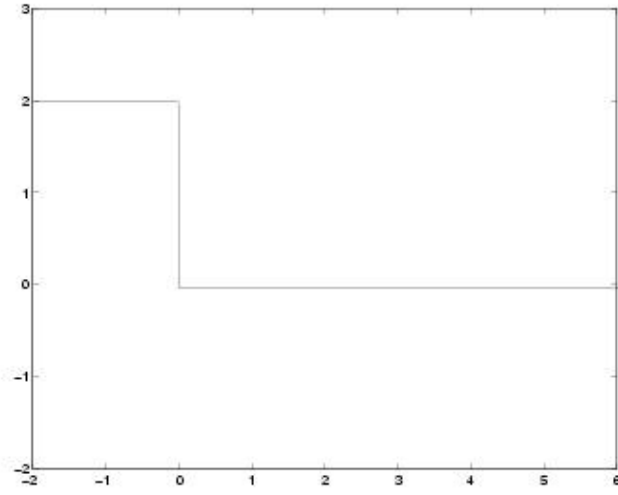
çözümü

$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & x < \frac{4}{3}t, \\ 0, & x > \frac{4}{3}t, \end{cases} \quad (32)$$

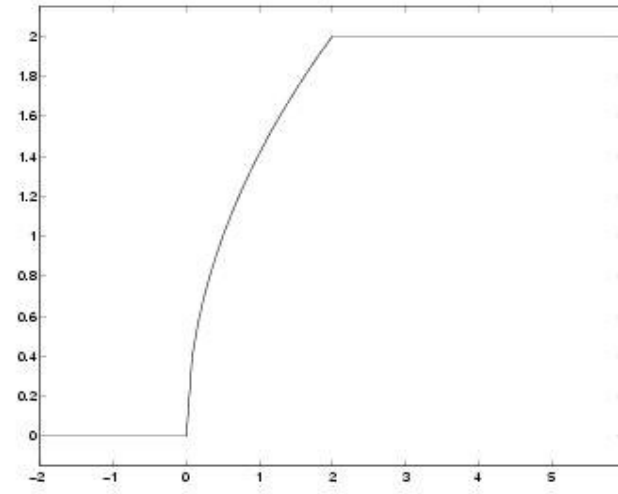
şeklinde yazabiliriz. (32) formülü ile bulunan çözümün grafiği Şekil 19 da gösterilmiştir.



Şekil 17. $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun grafiği ($u_1 > u_2$)



Şekil 18. Başlangıç profil



Şekil 19. $u(x, t)$ fonksiyonunun zaman evrimi

a) $u_+ > u_-$ olduğu durum

Örnek 2.

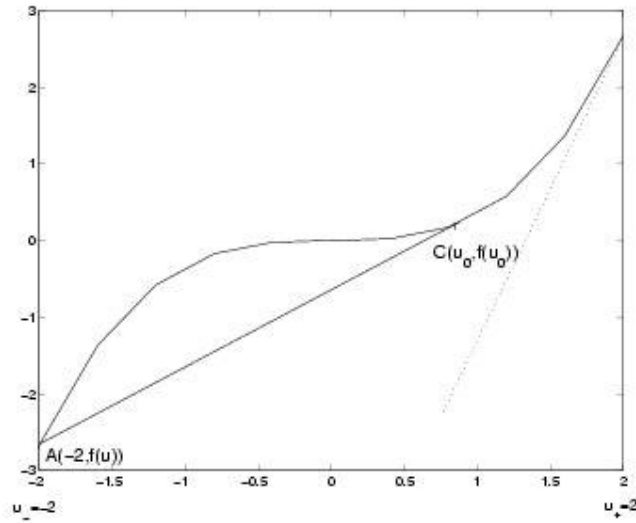
Bu bölümde daha genel bir problemi,

$$u_t + u^2 u_x = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} -2, & x < 0, \\ 2, & x > 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} u_- = -2, \\ u_+ = 2, \end{matrix}$$

inceleyelim.

Bu durumda $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun alta kabarık katmanını kuralım.



Şekil 20. $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun $-2 \leq u \leq 2$ aralığındaki alta kabarık katmanı

$A(-2, f(u)) = A\left(-2, -\frac{8}{3}\right)$ noktasından $f(u)$ 'nun grafiğine teğet çizelim. Dokunma noktasını $C(u_0, f(u_0))$ ile gösterelim. Açıktır ki, söz konusu teğet noktası aşağıdaki denklemden bulunur,

$$m = f'(u_0) = \frac{f(u_0) - f(-2)}{u_0 - (-2)}.$$

$f(u) = \frac{u^3}{3}$ ve $f'(u) = \frac{3u^2}{3} = u^2$ olduğundan

$$u_0^2 = \frac{\frac{u^3}{3} - \frac{8}{3}}{u_0 + 2}$$

$$3u_0^2 = \frac{u_0^2 + 2^3}{u_0 + 2} = \frac{(u_0 + 2)(u_0^2 - 2u_0 + 4)}{u_0 + 2}$$

$$3u_0^2 = u_0^2 - 2u_0 + 4$$

$$2u_0^2 + 2u_0 - 4 = 0$$

$$u_0^2 + u_0 - 2 = 0;$$

$$u_0^{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; \quad u_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1; \quad \text{Bu taktirde } C(u_0, f(u_0)) = C(1, \frac{1}{3})$$

Böylelikle problemin çözümü AC doğrusuna paralel $x = \xi t$, $t > 0$ doğrusu üzerinde sıçrayışa sahip olacaktır. Burada ξ aşağıdaki denklemden bulunur. Rankino-Huoniot koşulu

$$\xi = \frac{f(u_0) - f(u_-)}{u_0 - u_-} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{8}{3}}{1 - (-2)} = \frac{3}{3} = 1$$

$x = t$ doğrusu üzerinde sıçrayışa sahip olmaktadır, bu doğru AC doğrusuna paralel bir doğru olmaktadır.

(x, t) düzleminde AB 'nin (f, u) düzlemindeki eğimi $m = 1$ olmaktadır.

Bu sıçrayış $(+2)$ ile $(x > \xi t)$ tarafından $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ fonksiyonu arasında baş vermek zorundadır.

$$\psi\left(\frac{x}{t}\right) = \sqrt{\frac{x}{t}}, \quad u_+ = \psi(\xi) \text{ olduğundan ve } 2 = \sqrt{\frac{x}{t}}; \quad x = 4t \text{ oluyor.}$$

$D(2, \frac{8}{3})$ noktasından çıkan teğet paralel $((x, t)$ düzleminde) doğru üzerinde gerçekleşmektedir.

$$x = f'(u_+)t = u^2|_{u=u_+=2}t = 4t$$

ve problemin gerçek çözümü

$$u(x, t) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ \sqrt{\frac{x}{t}}, & t \leq x \leq 4t \\ 2, & x > 4t \end{cases} \quad (33)$$

olmaktadır. (33) formülü ile bulunan çözümün grafiği Şekil 21'de gösterilmiştir.

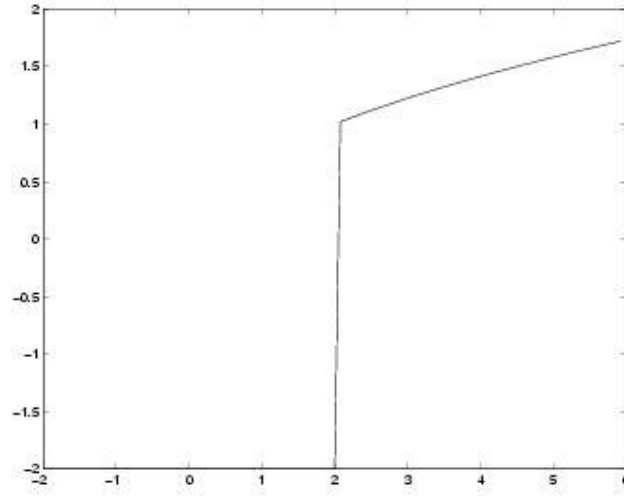
b) $u_+ < u_-$

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ -2, & x > 0. \end{cases}$$

Burada, $f(u) = \frac{u^3}{3}$; $f'(u) = 2u$, $u_- = 2$, $u_+ = -2$



Şekil 21. $u(x, t)$ fonksiyonunun zamana göre değişimi

$u_- > u_+$ olduğundan , $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun $[-2, 2]$ aralığında üste kabarık katmanını kuralım. Bundan dolayı $C(u_+, f(u_+)) = C\left(2, \frac{8}{3}\right)$ nokasından $\frac{u^3}{3}$ 'ün grafiğine teğet çekelim. Kesişme noktasını u_0 ile gösterelim. Açıkktır ki, u_0

$$m = f'(u_0) = \frac{f(u_{\pm}) - f(u_0)}{u_{\pm} - (u_0)}.$$

denkleminde bulunur. Buradan

$$u_0^2 = \frac{\frac{8}{3} - \frac{u^3}{3}}{2 - u_0} =$$

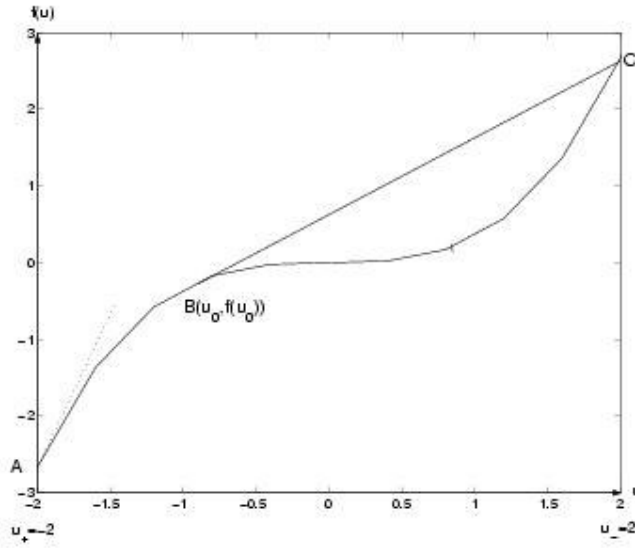
$$u_0^2 = \frac{1}{3} \frac{2^3 - u_0^2}{2 - u_0} = \frac{1}{3} \frac{2 - u_0)(4 + 2u_0 + u_0^2)}{2 - u_0}$$

$$3u_0^2 = 4 + 2u_0 + u_0^2$$

$$2u_0^2 - 2u_0 - 4 = 0$$

$$u_0^2 - u_0 - 2 = 0;$$

$$u_0^{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; u_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1, u_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2; u_0 = -1.$$



Şekil 22. $f(u) = \frac{u^3}{3}$ fonksiyonunun üste kabarık katmanı

Böylelikle teğetin fonksiyonun grafiği ile kesiştiği nokta $B\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ olmaktadır.

Böylelikle problemin çözümü BC doğrusuna paralel $x = \xi t$ ışını üzerinde sıçrayışa sahip olacaktır. Burada ξ Rankino-Hugoniot koşulundan bulunur. (Rankino-Hugoniot koşulu BC 'nin eğimi anlamına geliyor.)

$$\xi = \frac{f(u_-) - f(u_0)}{u_- - u_0} = \frac{\frac{8}{3} - (-\frac{1}{3})}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\xi = 1, x = t$$

oluyor.

Bu sıçrayış $u_- = -2$ sabiti ile $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ fonksiyonu arasında yerleşmektedir. Burada $\psi(\xi)$, u^2 fonksiyonunun $[-2,-1]$ aralığındaki ters fonksiyonu olmaktadır.

$$u = -\sqrt{\frac{x}{t}} = -\sqrt{\xi}$$

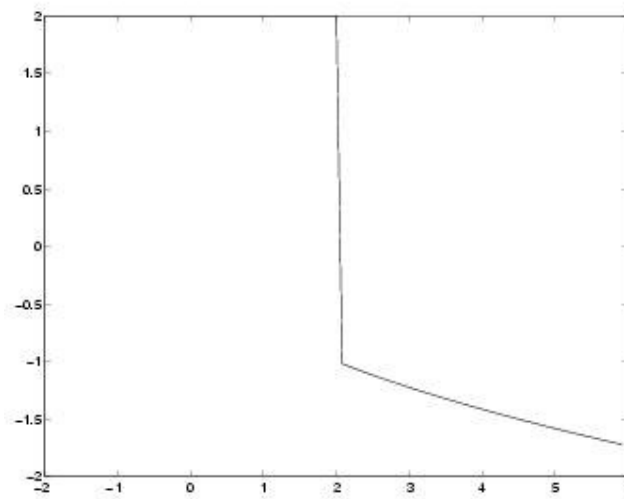
$\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ fonksiyonu ile $u_+ = -2$ sabitinin kesiştiği nokta $-2 = -\sqrt{\frac{x}{t}} \Rightarrow x = 4t$ ışını üzerinde gerçekleşir. Bu ışın $(u_+, f(u_+))$ noktasından çıkan teğete paralel doğru olmaktadır, yani

$$x = f'(u_+)t = 4t$$

Böylelikle,

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < t \\ -\sqrt{\frac{x}{t}}, & t < x < 4t \\ -2, & x \geq 4t \end{cases} \quad (34)$$

oluyor. (34) formülü ile bulunan çözümün grafiği Şekil 23’de gösterilmiştir.



Şekil 23. $u(x, t)$ fonksiyonunun dinamik dağılımı

3.2. $f(u) = \sin u$ olduğu durum

a) $u_+ < u_-$ olan durum

Aşağıdaki problemi göz önüne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sin u}{\partial x} = 0, \quad (35)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 3\pi, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (36)$$

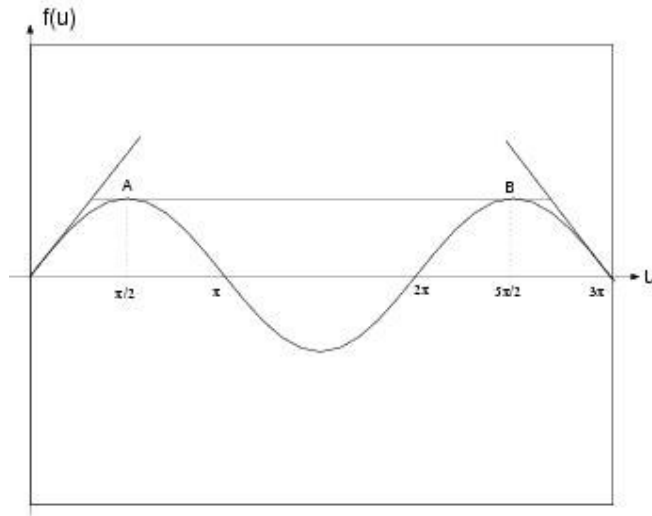
alalım. $u_+ < u_-$ olduğundan $f(u) = \sin u$ fonksiyonunun $[0, 3\pi]$ aralığındaki üste kabarık katmanını bulalım. Bundan dolayı, $[0, 3\pi]$ aralığında $\sin u = 1$ denkleminin çözümlerini bulalım. Bu denklemin baş çözümünün $u_1 = \frac{\pi}{2}$ olduğu açıktır. $[0, 3\pi]$ aralığındaki diğer çözüm $u_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ olmaktadır.

$\sin u$ fonksiyonunu üste kabarık katmanı $A = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ve $B = \left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$ noktalarını birleştiren doğru ve $\sin u$ fonksiyonunun $[0, \frac{\pi}{2}]$ ve $[\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$ aralığında kalan kısımlardan oluşur.

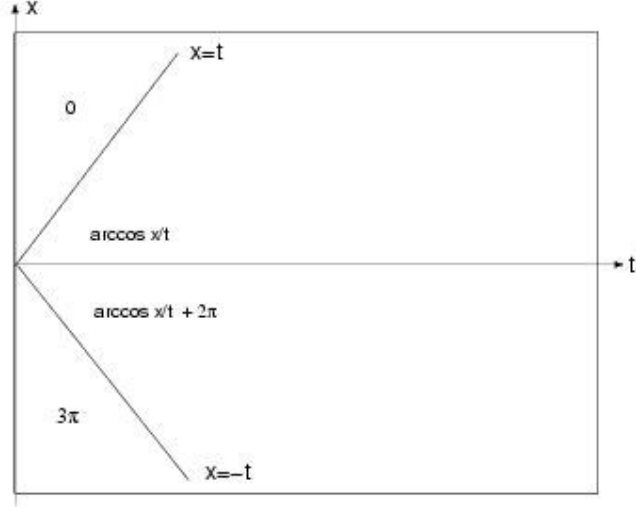
$(0, 0)$ ve $(0, 3\pi)$ noktalarından çıkan teğetlerin denklemlerini yazalım,

$$x = f'(u)|_{u=0}t = \cos 0t = t,$$

$$x = f'(u)|_{u=3\pi}t = \cos 3\pi t = -t.$$



Şekil 24. $\sin u$ fonksiyonunun $[0, 3\pi]$ aralığındaki üste kabarık katmanı



Şekil 25. Zayıf çözüm

Açıktır ki, (35) denkleminin çözümü $x = t$ ve $x = -t$ ışınları üzerinde sıçrayışa sahip olacak, ve çözüm $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, t) = \frac{5\pi}{2}$ den $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, t) = \frac{\pi}{2}$ ye kadar sıçrayış gerçekleştirecektir.

(35), (36) probleminin çözümünü yazabilmemiz için önce $\xi = \cos u$ denkleminin $[0, \frac{\pi}{2}]$ ve $[\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$ aralığındaki çözümleri ele alalım.

Sonuncu ifadeyi dikkate alırsak $\xi = \cos u$ denkleminin $[0, \frac{\pi}{2}]$ ve $[\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$ aralığındaki çözümleri sırasıyla $u = \arccos \xi$ ve $u = \arccos \xi + 2\pi$ oluyorlar.

Kolayca göstermek olur ki, bu fonksiyon (35) denklemini koruyor. Gerçekten de $u = \arccos \frac{x}{t}$ fonksiyonu (35) denklemini korur.

$$u = \arccos \frac{x}{t}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}} \left(-\frac{x}{t^2}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}} \left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{x}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}} - \cos u \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}} = 0$$

$$0 = 0.$$

Bu durumda (35),(36) probleminin çözümünü

$$u(x, t) = \begin{cases} 3\pi, & x < -t \\ \arccos \frac{x}{t} + 2\pi, & -t < x < 0 \\ \arccos \frac{x}{t}, & 0 \leq x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz.

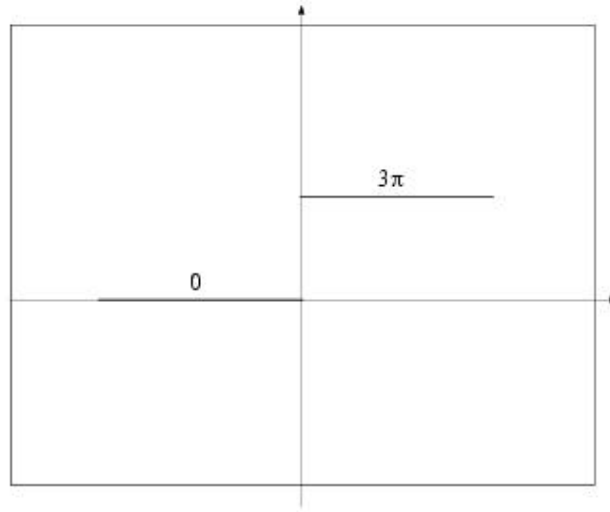
b) $u_+ > u_-$ olan durum

Şimdi aşağıdaki gibi problemleri göz önüne

$$u_t + (\sin u)_x = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3\pi, & x > 0 \end{cases}$$

alalım.



Şekil 26. Başlangıç profil

Çözüm. Önce $u_0(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim (Şekil (14)). Bu durumda $\sin u$ fonksiyonunun alta kabarık katmanını oluşturalım.

Bu amaçla $(0,0)$ ve $(3\pi,0)$ noktalarından $\sin u$ fonksiyonunun $[\pi, 2\pi]$ aralığındaki alta kabarık olan kısmına teğetler indirelim. Bu taktirde $\sin u$ fonksiyonunun alta kabarık katmanı $(0,0)$ ve $(3\pi,0)$ noktalarından çıkan ve sinisoidanın $(u_1, \sin u_1)$ ve $(u_2, \sin u_2)$ noktaları arasında kalan parçası olmaktadır. Kolayca göstermek oluyor ki,

$u_1 + u_2 = 3\pi$ ve $\sin u_1 = \sin u_2$, ayrıca teğetlerin eğim açıları birbirinden yalnız işaret bazında farklı olurlar.

$$-K = \frac{f(u_1) - f(0)}{u_1 - 0} = \frac{\sin u_1}{u_1} = f'(u_1) = \cos u_1$$

olur. Bu ifade $(0,0)$ noktasından çıkan teğetin eğim açısı olmaktadır. O zaman, $(3\pi,0)$ noktasından çıkan teğetin eğim açısı K olur. Kullandığımız u_1, u_2 ve dolayısıyla K 'nın değerlerini bulamayız. Ama şunu söyleyebiliriz ki u_1 sayısı $\tan u_1 = u_1$ denkleminin en küçük pozitif kökü olmaktadır. Buradan $u_2 = 3\pi - u_1$ ve $K = -\cos u_1 = \cos u_2$ olarak ele alırız.

Bilindiği gibi $\tan x = x$ denkleminin sonsuz çözümleri olmaktadır.

$$\tan x = x \quad (*)$$

denkleminin en küçük pozitif kökünü bulalım. $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığını göz önüne alalım. $(*)$ denkleminin söz konusu aralıkta çözümü vardır. Bunun için $(*)$ denklemini $f(x) = \sin x - x \cos x \equiv 0$ cinsinden yazalım ve $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ve $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 'yi hesaplayalım.

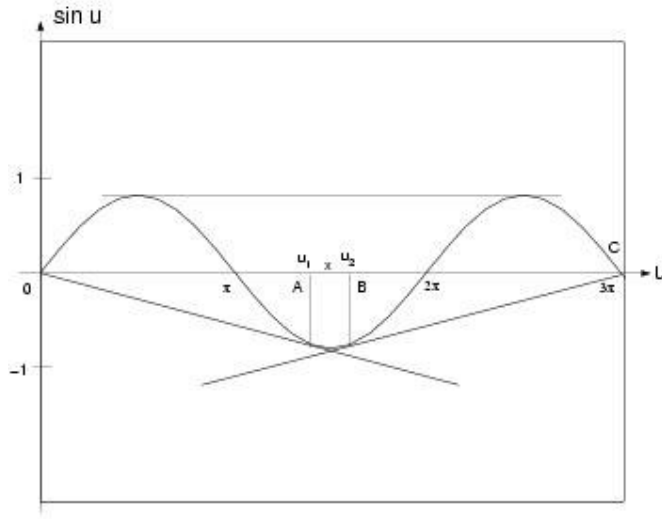
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{5\pi}{4} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ olduğundan}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\pi}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{5\pi}{4}\right) > 0,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \cos\frac{3\pi}{2} = -1$$

oluyor.



Şekil 27. $\sin u$ fonksiyonunun $[0, 3\pi]$ aralığındaki alta kabarık katmanı

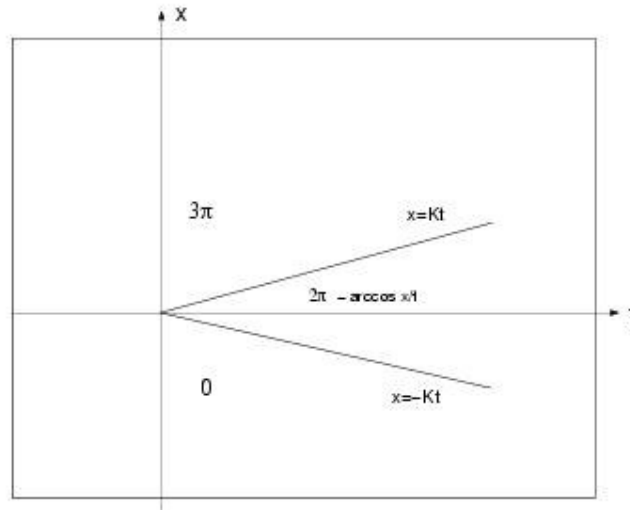
$\tan x = x$ denklemini Newton iterasyon yöntemi ile de çözebiliriz. Newton iterasyon yöntemine göre yazabiliriz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

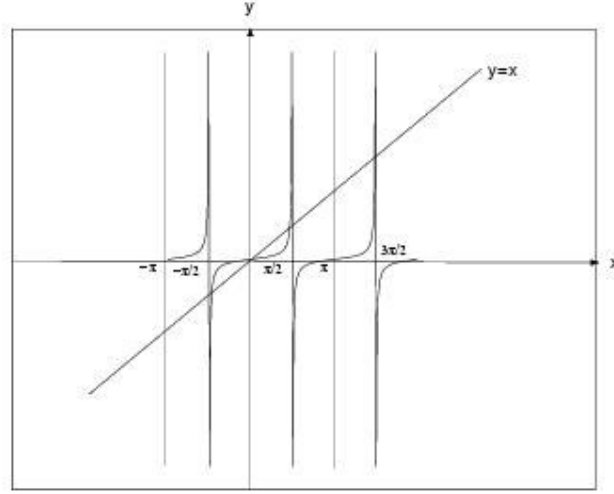
$f'(x) = \cos x - (\cos x + x(-\sin x)) = -x \sin x$ olur ve 0. yaklaşım olarak

$$x_0 = \frac{3\pi}{2}$$

olsun ve kökün 1. ve 2. yaklaşımlarını bulalım



Şekil 28. (x, t) diyagramında karakter



Şekil 29. $\tan x = x$ denkleminin kökleri

$$x_1 = x_0 - \frac{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 4.50004,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4.5000406,$$

$\xi = 4.49340$ olarak ele alırsak.

Böylelikle $\tan u_1 = u_1$ denkleminin en küçük pozitif kökü $u_1 \cong 1.4\pi(251^\circ)$ olmaktadır.

$$u_1 = 3\pi - 1.4\pi \approx 1.6\pi, \quad ve$$

$$-K = \cos u_1 = \cos 251 \quad veya \quad (\cos 1.4\pi) = \cos 4.39 = \dots$$

olarak buluruz.

Şimdi $f'(u) = \cos u = \xi$ fonksiyonunun $[u_1, u_2] \subset [\pi, 2\pi]$ parçasındaki ters fonksiyonunu bulalım. Söz konusu fonksiyon

$$u = \arccos \xi + 2\pi; \quad -K < \xi < K$$

şeklinde olmaktadır.

Sonuç olarak problemin gerçek çözümünü

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < -Kt \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{t}, & -Kt < x < Kt \\ 3\pi, & x > Kt \end{cases} \quad (37)$$

şeklinde ele alırsak.

4. Birinci Basamaktan İki Boyutlu Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde lineer iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında çözümünü bulmak için bir yöntem önereceğiz.

Aşağıdaki problemi göz önüne

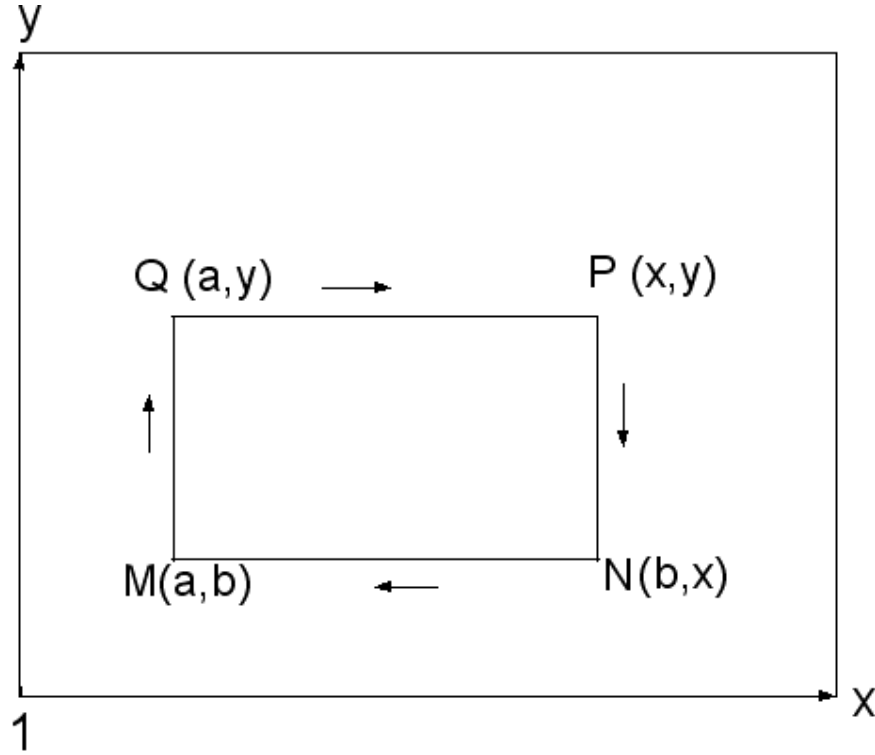
$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + A \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + B \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = 0 \quad (38)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (39)$$

alalım.

Burada A ve B sabitler, $u_0(x, y)$ ise bilinen fonksiyondur, ve $A \neq B$ olsun. (38), (39) problemini tezin sonraki bölümlerinde esas problem olarak adlandıracacağız.

$D_{xy} = \{(\xi, \eta), a \leq \xi \leq x, b \leq \eta \leq y\} \subseteq R^2, t \in R_+^1$ ile aşağıdaki bölgeyi gösterelim, (Şekil 31).



Şekil 30. D_{xy} bölgesi

4.1. Lineer Durum

(38), (39) probleminin karakteristikler yöntemi ile çözümünü aşağıdaki şekilde

$$u(x, y, t) = u_0(x - At, y - Bt) \quad (40)$$

elde edebiliriz. (40) ifadesine (38),(39) probleminin yumuşak (soft) çözümü denir.

Tanım 3. (39) başlangıç koşulunu ve üst yarım düzlemde tanımlı, tüm argümanlarına göre sürekli diferansiyelle bilen ve $\sqrt{x^2 + y^2} + t$ 'nin yeteri kadar büyük değerlerinde sıfıra eşit olan her hangi bir $\varphi(x, y, t)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliği

$$\begin{aligned} \int_{R^2} \int_{R_+^1} \{u(x, y, t)[\varphi_t(x, y, t) + A\varphi_x(x, y, t) + B\varphi_y(x, y, t)]\} dx dy dt + \\ \int_{R^2} \varphi(x, y, 0)u_0(x, y) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

koruyan $u(x, y, t)$ fonksiyonuna (38),(39) probleminin zayıf çözümü denir.

Teorem1. Eğer $u_0(x, y)$ fonksiyonu sürekli ise, (40) eşitliği ile tanımlanan $u(x, y, t) = u_0(x - At, y - Bt)$ esas problemin zayıf çözümü olmaktadır.

İspat. Zayıf çözümün tanımına göre $\sqrt{x^2 + y^2} + t$ 'nin yeteri kadar büyük değerlerinde sıfıra dönüşen her hangi bir $v(x, y, t)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \int_{R^2} \int_{R_+^1} \{u(x, y, t)[v_t(x, y, t) + Av_x(x, y, t) + Bv_y(x, y, t)]\} dx dy dt + \\ \int_{R^2} \varphi(x, y, 0)u_0(x, y) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

olmaktadır.

Aşağıdaki değişken dönüşümlerini

$$\xi = x - At, \eta = y - Bt, \tau = t. \quad (43)$$

yapalım.

Bu değişkenlerde (42) aşağıdaki gibi

$$\int_{R^2} \int_{R_+^1} \{u(\xi, \eta, \tau)v_\tau(\xi, \eta, \tau)\} d\xi d\eta + \int_{R^2} v(\xi, \eta, \tau)u_0(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

veya

$$\int_{R^2} \left\{ \int_0^\infty u(\xi, \eta, \tau)v_\tau(\xi, \eta, \tau) d\tau + v(\xi, \eta, 0)u(\xi, \eta, 0) \right\} d\xi = 0$$

yazılabilir. Buradan,

$F(\xi, \eta) = \int_0^\infty u(\xi, \eta, \tau) v_\tau(\xi, \eta, \tau) d\tau$ olsun sonuncu eşitliği

$$\int_{R^2} [F(\xi, \eta) + u(\xi, \eta, 0) v(\xi, \eta, 0)] d\xi d\eta = 0$$

şeklinde yazalım.

Bu $F(\xi, \eta) + u(\xi, \eta, 0) v_\tau(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta$ ifadesinin, $[\xi_1, \xi_2] \times [\eta_1, \eta_2]$ bölgesinde sıfırdan farklı olduğu anlamına gelmektedir. Buradan

$$\int_{R^2} [\bar{F}(\xi, \eta) + u(\xi, \eta, 0) \bar{v}(\xi, \eta, 0)] d\xi d\eta > 0$$

elde edilir bu ise bir zıtlık oluşturur. Yani

$$\int_{R_+^1} u(\xi, \eta, \tau) v_\tau(\xi, \eta, \tau) d\tau + v(\xi, \eta, 0) u(\xi, \eta, 0) = 0$$

olmak zorundadır. $\int_{R_+^1} v_\tau(\xi, \eta, \tau) d\tau = -v(\xi, \eta, 0)$ olduğundan

$$\int_{R_+^1} v_\tau(\xi, \eta, \tau) u(\xi, \eta, 0) d\tau = -v(\xi, \eta, 0) u_0(\xi, \eta, 0),$$

ve

$$\int_{R_+^1} [u(\xi, \eta, \tau) - u(\xi, \eta)] v_\tau(\xi, \eta, \tau) d\tau = 0$$

elde ederiz ve u 'nun sürekliliğinden

$$u(\xi, \eta, \tau) = u(\xi, \eta) = u_0(x - At, y - Bt)$$

sonucunu alırız.

Teorem 2. $u_0(x - At, y - Bt)$ fonksiyonu integrallenebilirse, $u(x, y, t)$ fonksiyonu esas problemin zayıf çözümüdür.

İspat. $\sqrt{x^2 + y^2} + t$ yeteri kadar büyük değerlerinde v düzgün bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeyi göz önüne

$$\begin{aligned} \int_{R^2} \int_{R_+^1} u_0(x - At, y - Bt) \{v_t(x, y, t) + Av_x(x, y, t) + Bv_y(x, y, t)\} dx dy dt + \\ + \int_{R^2} v(x, y, 0) u_0(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (44)$$

alalım.

(43) denklemini dönüşümlerini dikkate alırsak,

$$\int_{R^2} \int_{R_+^1} u_0(\xi, \eta) v_\tau(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau + \int_{R^2} v(x, y, 0) u_0(x, y) dx dy$$

olur.

τ 'nın yeterli büyük değerlerinde $v = 0$ olmak üzere, τ 'ya göre integralleme işlemi yapıldıktan sonra u_0 fonksiyonu esas problemin zayıf çözümü olduğunu görmek zor değildir. .

(38) denklemini D_{xy} bölgesinde x ve y 'ye göre integrallersek,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{D_{xy}} u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \iint_{D_{xy}} \left[A \frac{\partial u(\xi, \eta, t)}{\partial \xi} + B \frac{\partial u(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta = 0 \quad (45)$$

elde ederiz. Green formülünü kullanarak

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \int_{\partial D_{xy}} A u dy - B u dx = 0 \quad (46)$$

veya

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + A \int_b^y [u(x, \eta, t) - u(a, \eta, t)] d\eta \\ & - B \int_b^x [u(\xi, \eta, t) - u(\xi, b, t)] d\xi = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

olduğunu alırsız.

Son olarak denklemi şu şekilde

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + A \int_b^y u(x, \eta, t) d\eta \\ & - B \int_b^x u(\xi, \eta, t) d\xi = \varphi(a, y, t) + \psi(x, b, t) \end{aligned} \quad (48)$$

yazabiliriz. Burada,

$$\varphi(a, y, t) = A \int_b^y u(a, \eta, t) d\eta \quad (49)$$

$$\psi(x, b, t) = B \int_b^x u(\xi, b, t) d\xi \quad (50)$$

olmaktadır.

(47), (39) problemini birinci türden yardımcı problem olarak adlandırılır. Aşağıdaki operatörü

$$\mathfrak{I}(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y}. \quad (51)$$

oluşturalım. Buradan

$$v(x, y, t) = \int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \Phi(a, y, t) + \Psi(x, b, t). \quad (52)$$

fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\varphi(a, y, t) + \psi(x, b, t) \in \ker \mathfrak{I}$ olduğunu göstermek oldukça kolaydır. Gerçektende,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[\varphi(a, y, t) + \psi(x, b, t)] &= \mathfrak{I} \left[A \int_b^y u(a, \eta, t) d\eta + B \int_b^x u(\xi, b, t) d\xi \right] \\ &= A \frac{\partial u(a, \eta, t)}{\partial x} + B \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Kolaylık için $H(a, b, x, y, t) = \varphi(a, y, t) + \psi(x, b, t)$ olsun ve (51) 'e göre $\mathfrak{I}H(a, b, x, y, t) = 0$. (52) ifadesini dikkate alırsak yardımcı denklemi

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} + A \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} + B \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = 0 \quad (53)$$

şeklinde yazabiliriz. (52)'den

$$u(x, y, t) = \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} \quad (54)$$

elde ederiz. Gerçekten de, eğer (52) eşitliği bir kere x 'e bir kere y 'ye göre diferansiyellenirse (54) eşitliğinin doğruluğunu ispatlamış oluruz.

(53) denklemi için başlangıç koşul aşağıdaki gibi

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (55)$$

olmaktadır. Burada $v_0(x, y)$, fonksiyonu aşağıdaki denklemin

$$\frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} = u_0(x, y) \quad (56)$$

herhangi bir çözümü olmaktadır.

(53), (55) problemini biz, ikinci türlü yardımcı problem olarak adlandıracğız. Söz konusu yardımcı problemin aşağıdaki avantajları vardır:

- $v(x, y, t)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre diferansiyellenebilme özelliği $u(x, y, t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliğinden bir mertebe çoktur.
- $u(x, y, t)$ fonksiyonu süreksiz fonksiyon da olabilir.

- (53), (55) probleminin çözümü olan $u(x, y, t)$ fonksiyonunu bulmak için u_x, u_y, u_t türevlerini kullanmaya gerek kalmıyor. Zaten bu türevler mevcut olmayabilir.

Açıktır ki yardımcı problemin çözümü tek olmamaktadır. Aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3. Eğer $v(x, y, t)$ fonksiyonu (53), (55) yardımcı probleminin yumuşak çözümü ise (54) eşitliği ile tanımlanan $u(x, y, t)$ fonksiyonu esas problemin zayıf çözümü olmaktadır.

İspat: $\varphi(x, y, t)$ temel fonksiyonlar sınıfından olan herhangi bir fonksiyon olsun ve aşağıdaki ifadeyi

$$0 = \int_{D_{ab \times [0, T)}} \Im \varphi(x, y, t) \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy dt$$

göz önüne alalım.

Birkaç basit işlemlerden sonra

$$0 = \int_{D_{ab \times [0, T)}} \varphi(x, y, t) \left\{ \frac{\partial \Im v}{\partial t} + A \frac{\partial \Im v}{\partial x} + B \frac{\partial \Im v}{\partial y} \right\} dx dy dt = 0. \quad (57)$$

formülünü elde ederiz. Sonuncu ifadeye t, x, y değişkenlerine göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak aşağıdaki eşitliği

$$0 = \int_{D_{ab \times [0, T)}} \varphi(x, y, t) \left\{ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + A \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + B \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right\} dx dy dt = 0 \quad (58)$$

elde ederiz.

Bununla da teorem ispatlanmış olur.

4.2. Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Yöntemi

Bu bölümde (38) (39) problemi için nümerik bir yöntem geliştireceğiz ve nümerik çözümün bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Yukarıda söylediğimiz gibi, esas problemin çözümü, yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarına sahip olabilir. Bu özellik de nümerik çözümü ele almak için literatürde mevcut olan klasik nümerik yöntemleri uygulamaya imkan vermemektedir. Lakin önerilmiş yardımcı problemin özelliklerinden faydalananak yeni bir nümerik algoritma üreteceğiz.

Nümerik yöntemi geliştirmek için önce (38) (39) probleminin çözümünün tanım bölgesini aşağıdaki gibi ağ ile

$$\omega_{h_1, h_2, \tau} = \{(x_i, y_j, t_k), x_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau, \\ i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; h_1 > 0, h_2 > 0, \tau > 0\}$$

örtelim. Burada, h_1, h_2, τ sırasıyla x, y ve t değişkenlerine göre ağın adımlarını göstermektedir.

(47), (39) problemini sonlu farklara ayrıklaştırmak için (47) denkleminin içerdiği integralin aşağıda gösterildiği gibi

$$\int_a^x u(\xi, y, t) d\xi = h_1 \sum_{v=1}^i U_{v,j,k}, \quad (59)$$

$$\int_b^y u(x, \eta, t) d\eta = h_2 \sum_{\mu=1}^j U_{i,\mu,k}, \quad (60)$$

ve

$$\int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = h_1 h_2 \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U_{v,\mu,k}. \quad (61)$$

sonlu fark karşılığını yazalım. (59) - (61) ifadelerini (47) denkleminde dikkate alarak bu denklemi $\omega_{h_1, h_2, \tau}$ ağının keyfi i, j, k noktasında aşağıdaki gibi sonlu farklara

$$U_{i,j,k+1} = (1 - \tau h_1 A - \tau h_2 B) U_{i,j,k} + \tau h_1 A \sum_{\mu=1}^j U_{0,\mu,k} \\ + \tau h_2 B \sum_{v=1}^i U_{v,0,k} - \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} (U_{v,\mu,k+1} - U_{v,\mu,k}) \\ - \tau h_1 A \sum_{\mu=1}^{j-1} U_{i,\mu,k} - \tau h_2 B \sum_{v=1}^{i-1} U_{v,j,k}, \quad (62) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, N \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, k = 0, 1, 2, \dots,)$$

ayrıklaştıralım.

(62) denkleminde başlangıç koşul olarak şunları ekleyelim

$$U_{i,j,0} = u_0(x_i, y_j), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N \quad j = 0, 1, 2, \dots, M). \quad (63)$$

Aşağıdaki notasyonları

$$f(x_i, y_i, t_k) = f_{i,j}, \quad f(x_i, y_i, t_{k+1}) = \hat{f}_{i,j},$$

$$\Delta_{\bar{x}\bar{y}}^j f = (\Delta_{\bar{x}}^j f_i - \Delta_{\bar{x}}^j f_{i-1}), \quad \Delta_{\bar{y}}^i f = (\Delta_{\bar{y}}^i f_j - \Delta_{\bar{y}}^i f_{j-1})$$

içerelim. Bu notasyonlar çerçevesinde (53) denklemini aşağıdaki gibi sonlu farklara

$$\hat{V}_{i,j} = V_{i,j} - A \frac{\tau}{h_1} \Delta_{\bar{x}}^j V_{i,j} - B \frac{\tau}{h_2} \Delta_{\bar{y}}^i V_{i,j}. \quad (64)$$

ayrıklaştıralım.

Kolayca ispatlamak mümkündür ki, keyfi (i, j, k) için aşağıdaki eşitlik

$$\hat{U}_{i,j} = \frac{1}{h_1 h_2} \Delta_{\bar{x}\bar{y}} \hat{V}_{i,j} \quad (65)$$

doğrudur.

Burada, $U_{i,j}$. ve $V_{i,j}$. ağ fonksiyonları sırasıyla $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ fonksiyonlarının (i, j, k) noktasındaki yaklaşık değerlerini gösterir.

(65) eşitliğinin doğruluğunu göstermek için, önce (64) denklemini $(i-1, j, k)$ noktasında yazıp ve (64) denkleminde çıkarıp h_1 'e bölmek, sonra (64) denklemini $(i, j-1, k)$ noktasında yazıp ve (64) denkleminde çıkarıp h_2 'ye bölmek ve elde ettiğimiz ifadeleri birbirinden çıkarmak yeterlidir. Gerçektende,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \hat{V}_{i,j} &= \frac{1}{h_1} V_{i,j} - A \frac{\tau}{h_1 h_2} (\Delta_{\bar{x}}^j V_{i,j} - \Delta_{\bar{x}}^j V_{i-1,j}) - B \frac{\tau}{h_1 h_2} (\Delta_{\bar{y}}^i V_{i,j} - \Delta_{\bar{y}}^i V_{i-1,j}) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} (\Delta_{\bar{x}}^j \hat{V}_{i,j} - \Delta_{\bar{x}}^{j-1} \hat{V}_{i,j}) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} (\Delta_{\bar{x}}^j V_{i,j} - \Delta_{\bar{x}}^{j-1} V_{i,j}) \\ &\quad - A \frac{\tau}{h_1 h_2} [(\Delta_{\bar{x}}^j V_{i,j} - \Delta_{\bar{x}}^j V_{i-1,j}) - (\Delta_{\bar{x}}^{j-1} V_{i,j} - \Delta_{\bar{x}}^{j-1} V_{i-1,j})] \\ &\quad - B \frac{\tau}{h_1 h_2} [(\Delta_{\bar{y}}^i V_{i,j} - \Delta_{\bar{y}}^i V_{i-1,j}) - (\Delta_{\bar{y}}^i V_{i,j-1} - \Delta_{\bar{y}}^i V_{i-1,j-1})]. \end{aligned} \quad (66)$$

Burada (65)'i dikkate alarak göstermek mümkündür ki, , $U_{i,j}$. ağ fonksiyonu aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini

$$\hat{U}_{i,j} = U_{i,j} - A \frac{\tau}{h_1} \Delta_{\bar{x}}^j U_{i,j} - B \frac{\tau}{h_2} \Delta_{\bar{y}}^i U_{i,j} \quad (67)$$

korumaktadır.

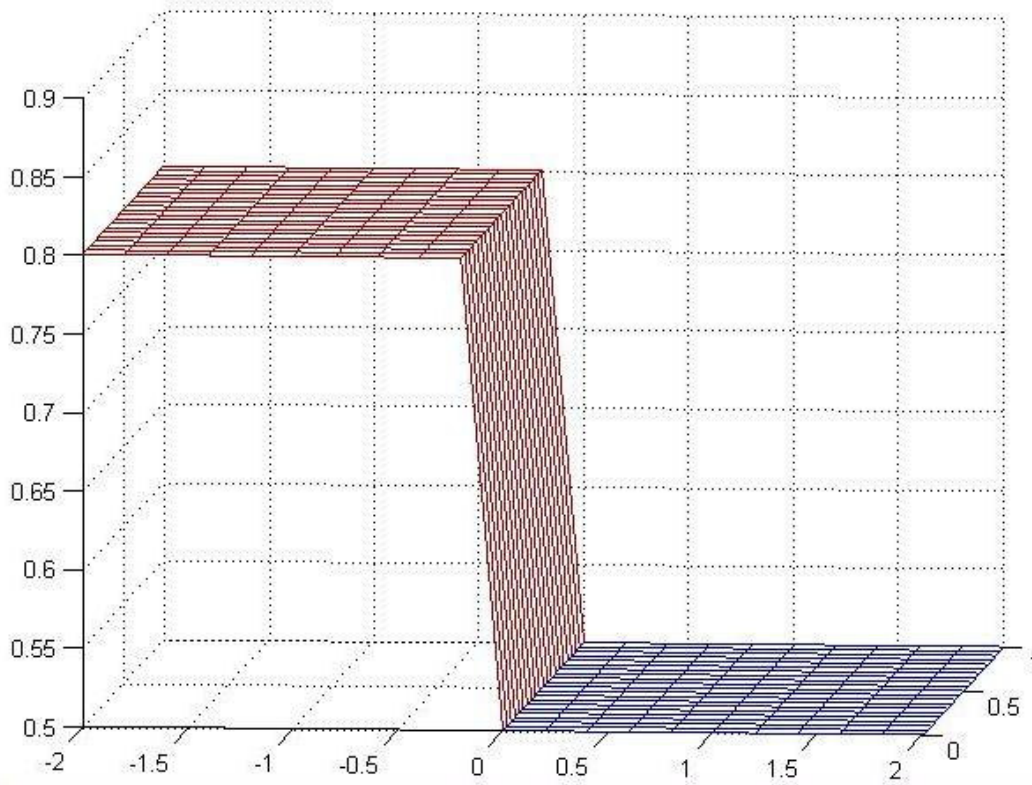
4.3. Bilgisayar Testleri

Bu bölümde, önerilen sayısal yöntemin etkinliğini göstermek için bir sürü bilgisayar testleri yapılmıştır. Önce (38) (39) probleminin gerçek çözümü ele alınır. Sonra ise yardımcı problemin çözümü ve bu çözümden üretilen $v(x, y, t)$ fonksiyonu elde edilir. Elde edilen çözümle klasik çözümün karşılaştırılması yapılmıştır.

1.Durum: Önce, $u_0(x, y)$ başlangıç fonksiyonu için aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım.

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_1, & -2 \leq x < 0 \\ u_2, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad (68)$$

Burada u_1 ve u_2 verilerin reel sabitlerdir. (68) ifadesi ile tanımlanan $u_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 31a ve 31b de gösterilmiştir.



Şekil 31 a) Başlangıç profil, $u_1 > u_2$

Karakteristikler yöntemi ile elde edilen $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 32a ve 32b de verilmiştir.

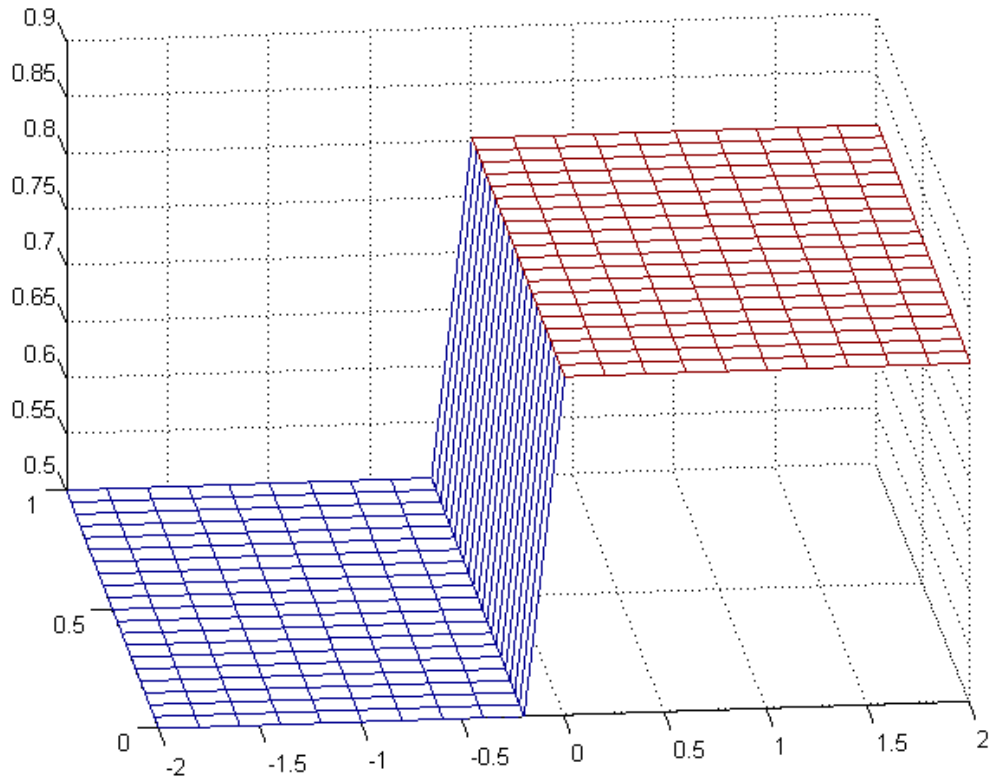
Şimdi yukarıda verilen iki durum için yardımcı (38) (39) problemini çözeelim. Söz konusu problemi çözmek için uygun $v_0(x, y)$ başlangıç fonksiyonunun vermek gerekiyor. (55) formülünü dikkate alarak $v_0(x, y)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi

$$v_0(x, y) = \begin{cases} u_1xy, & -2 \leq x \leq 0 \\ u_2xy, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (69)$$

seçelim. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 33a ve 33b de gösterilmiştir. (53)(69) probleminin gerçek çözümü

$$v(x, y, t) = \begin{cases} u_1(x - At)(y - Bt), & \xi \leq 0 \\ u_2(x - At)(y - Bt), & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (70)$$

olmaktadır.

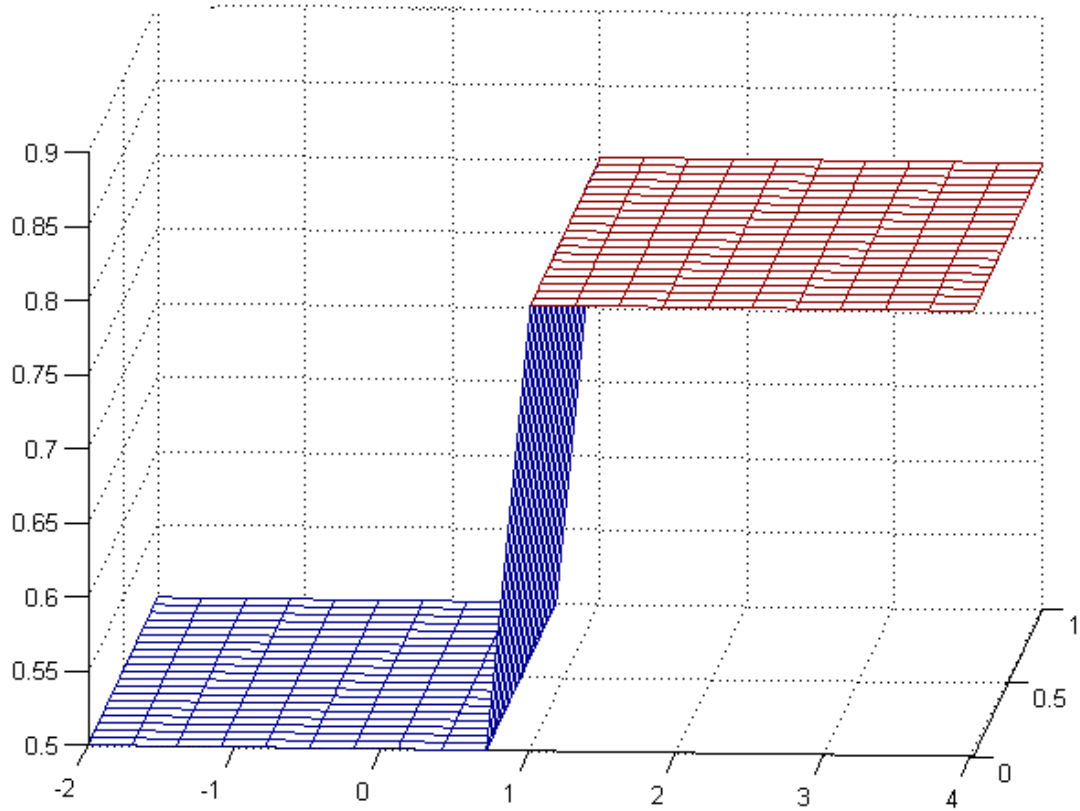


Şekil 31 b) Süreksiz başlangıç fonksiyon $u_1 < u_2$

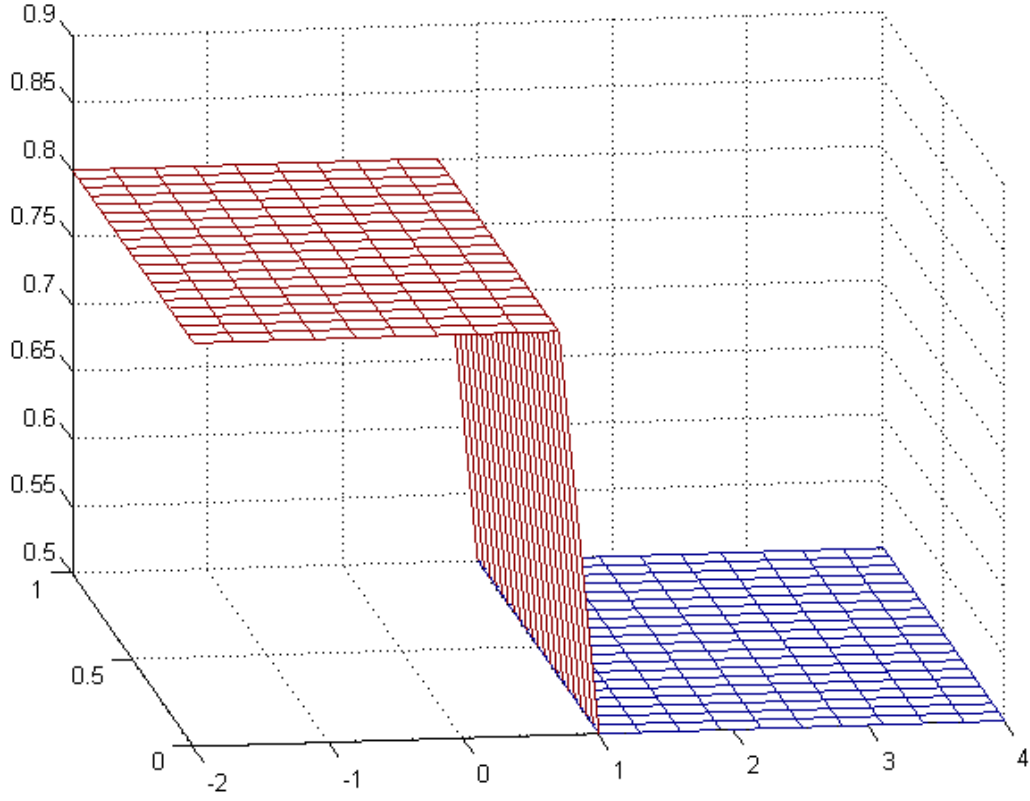
2.Durum: Bu durumda $u_0(x,y)$ fonksiyonunun sürekli ve kompakt taşıyıcıya sahip olduğunu varsayalım. Yani $u_0(x,y)$ olarak aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım.

$$u_0(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > 1. \end{cases} \quad (71)$$

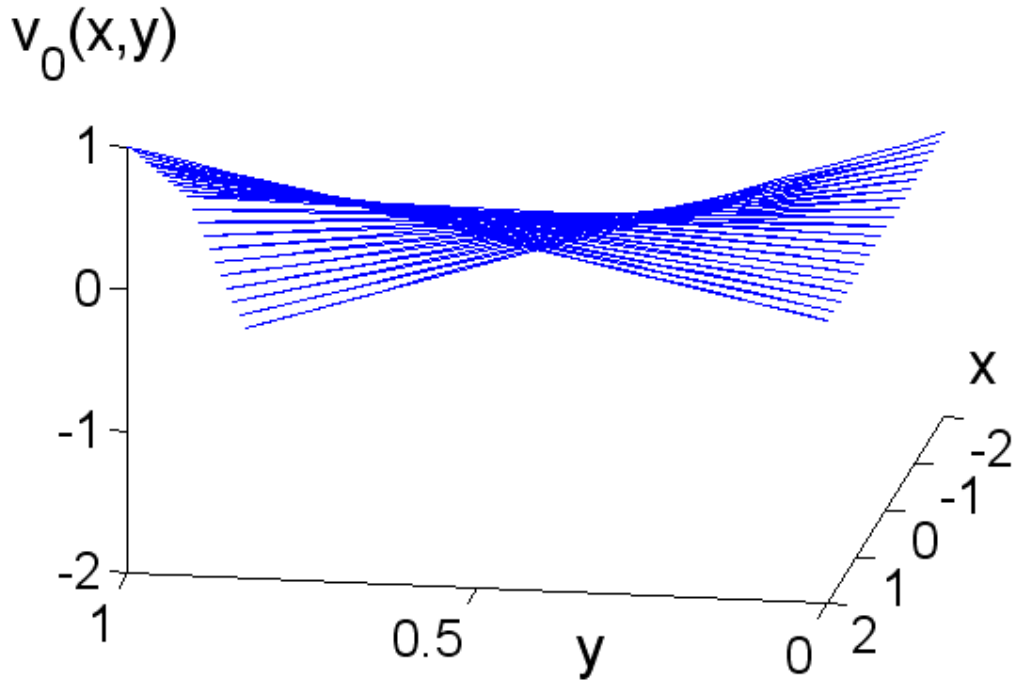
$u_0(x,y)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 34 de gösterilmiştir.



Şekil 32 a) $u(x,t)$ fonksiyonunun evrimi $u_1 < u_2$, $T = 0.8$



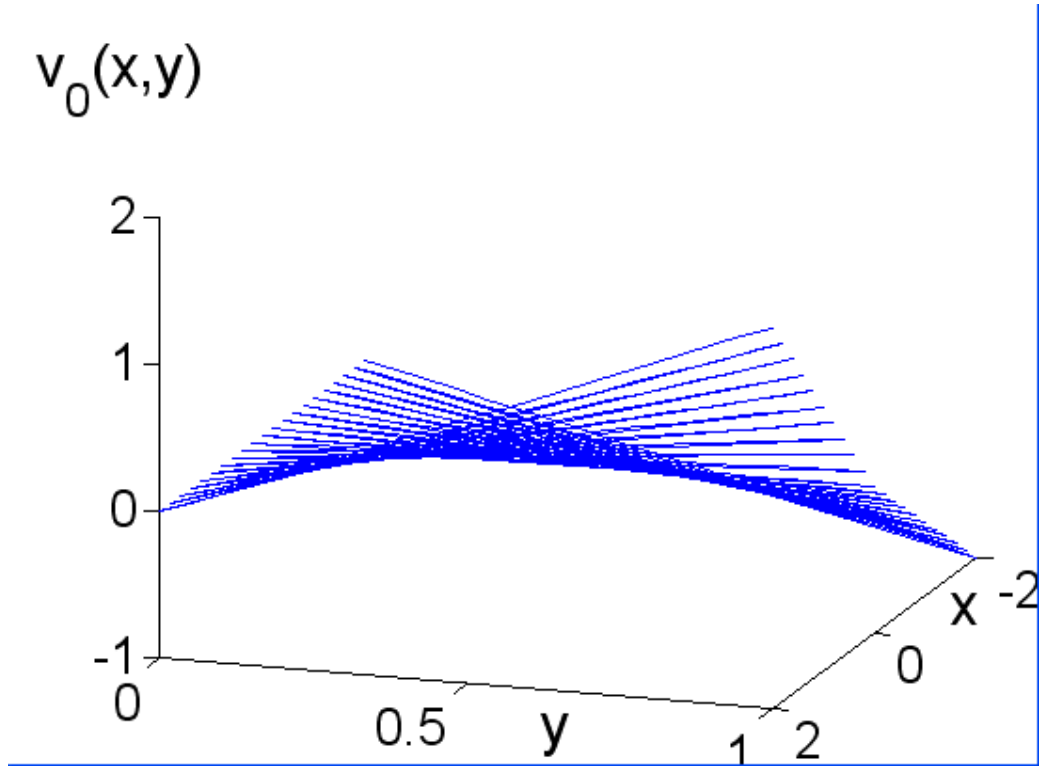
Şekil32 b) $u(x, t)$ fonksiyonunu evrimi $u_1 > u_2$, $T = 1.0$



Şekil 33 a) $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2$

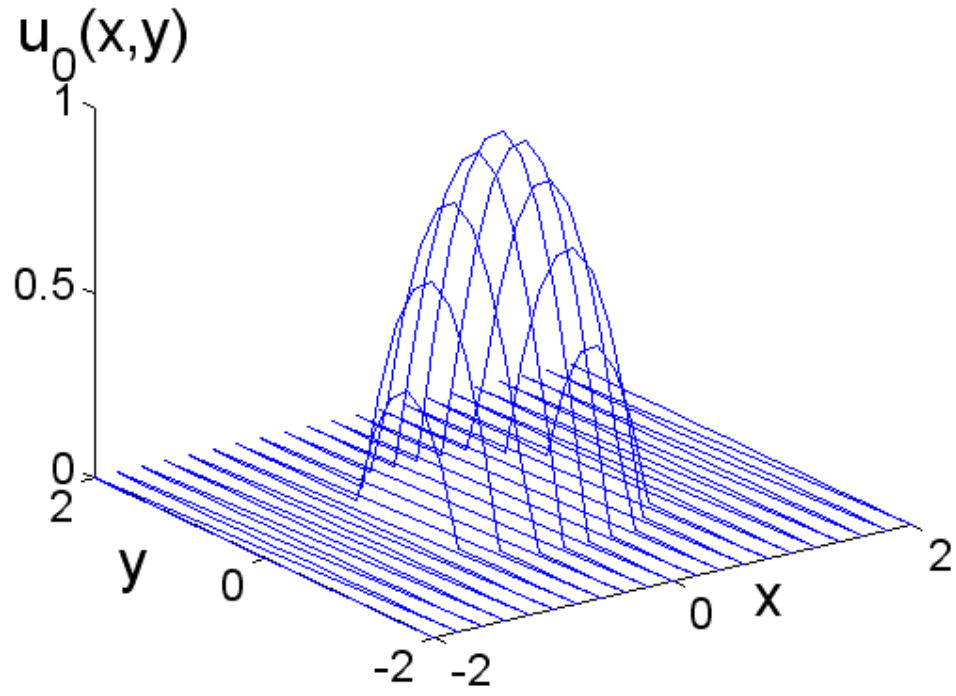
$$v_0(x, y) = \begin{cases} xy - \frac{yx^3 + xy^3}{3}, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \end{cases}$$

(53) (54) probleminin çözümünü aşağıdaki gibi bulmak mümkündür.

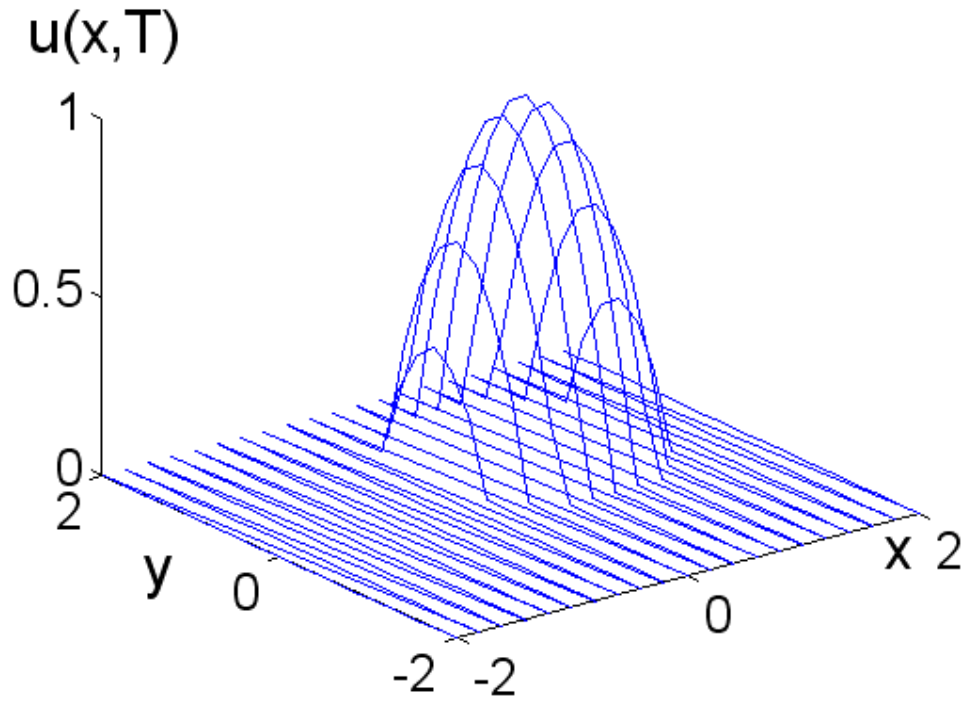


Şekil 33 b) $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2$

(40) formülü ile tanımlanan $u(x, y, t)$ fonksiyonunun $T = 0.6$ değerindeki grafiği Şekil 35 de verilmiştir.



Şekil 34. $u_0(x,y) = \frac{\partial^2 v_0(x,y)}{\partial x \partial y}$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 35. $u(x, y, t)$ fonksiyonunun dinamik dağılımı

5. Sonuçlar ve İrdeme

Tezde elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür.

- 1. Basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış başlangıç değer probleminin gerçek çözümünün bulunması detaylı bir şekilde incelenmiş ve irdelenmiştir.
- Süreksizliğin mevcut olma koşulu ve Rankino-Hugoniot koşulunun geometrik anlamı verilmiştir.
- Hal fonksiyonu kabarık olmadığı durumda bazı problemlerin gerçek çözümü elde edilmiştir.
- İki boyutlu lineer diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında gerçek çözümünün ele alınması için bir yöntem önerilmiştir. Bunun için birkaç avantajlara sahip yardımcı problem önerilmiştir. Önerilmiş yardımcı problem üzerinde efektif ve ekonomik sonlu farklar yöntemi de önerilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1]. John F., Partial Diferansiyel Equations , Springer- Verlag , New York , Heidelberg , Berlin,1986

[2]. Le Vegue R.J., Finite Volume Methods for Hyperbolic Prolems.Cambiridge Universty Pres ,2002

[3]. Rasulov M.A. On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First – Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition Soviet Math. Dokl Vol 43 (1991), No 1

[4] Whitham G.B., Linearand Nonlinear Waves, John Wiky and Sons, New York. Chichester. Brisbane Toronto, 1974

7. ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında İzmit'te doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Antalya'da Merkez İlköğretim Okulu'nda 1998 yılında, liseyi 2002 yılında Adem Tolunay Anadolu Lisesi'nde tamamladım. 2002 yılında Beykent Üniversitesi Matematik – Bilgisayar Bölümü'nü kazandım. 2003 yılında okulumuzda Bilgisayar Mühendisliği bölümünde başladığım çift ana dalı 2007 yılında bitirdim. 2006 yılında Beykent Üniversite'nde başladığım Uygulamalı Matematik Bölümü'nde eğitimimi halen devam ettirmekteyim. 2007 yılında Antalya'da Vakıflar Bankası'nda başladığım iş hayatıma halen devam etmekteyim.