

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Yavuz ATABAY
(Yüksek Lisans Tezi)

İstanbul, 2020

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

ANALYZING 11TH GRADE STUDENTS' PROCESSES OF MATHEMATICAL
THOUGHT EXPERIMENTS

Yavuz ATABAY
(Yüksek Lisans Tezi)

Danışman
Prof. Dr. Sare ŞENGÜL

İstanbul, 2020

**Tüm kullanım hakları
M.Ü. Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne aittir.**

© 2020

ETİK BEYAN

Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığım çalışmamda;

- Sunduğum bilgileri, dokümanları ve verileri akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Çalışmamda yararlandığım eserlerin tamamına atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Elde ettiğim verilerde ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı bildirir, aksi bir durumda aleyhimde doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

06/09/2020

Yavuz ATABAY

ÖZGEÇMİŞ

Öğrenim

- 2006 – 2010 Balıkesir Anadolu Öğretmen Lisesi
- 2010 – 2016 Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Matematik Öğretmenliği Lisansla Birleştirilmiş Tezsiz Yüksek Lisans Programı
- 2018 – 2020 Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Tezli Yüksek Lisans Programı

Öğretmenlik Deneyimi

- 2016 - Özel Tarhan Koleji, Lise Matematik Öğretmeni

İletişim Bilgisi

E-posta: yavuz.atabay@hotmail.com

ÖNSÖZ

11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünce deneyi süreçlerinin incelendiği bu çalışmada mantıksal düşünme becerilerine göre belirlenen 11. sınıf öğrencilerinin yaptıkları matematiksel düşünce deneyi süreçlerinin niteliği ve bu süreçlerindeki kavram yapılandırmalarının o kavramın tarihsel gelişimi ile benzerlikleri ve farklılıkları sunulmuştur. Ülkemizde bu alanda henüz yapılmış bir çalışma olmaması nedeniyle çalışmanın matematik eğitimi literatürüne katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Tez çalışmam boyunca benden yardımlarını ve zamanını hiçbir zaman esirgemeyen, bana her zaman yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Sare Şengül'e şükranlarımı sunarım. Tez çalışmamda görüş ve önerilerinden yararlandığım değerli hocalarım Doç. Dr. Gülseren Karagöz Akar, Doç. Dr. Fatma Aslan Tutak, Doç. Dr. Güneş Yavuz ve Dr. Öğr. Üyesi Orhan Çanakçı'ya ayrıca çok teşekkür ederim. Lisans ve yüksek lisans öğrenimim süresince bana katkı sağlayarak yolumu aydınlatan tüm hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Araştırmayı uygulamamda destek olan okul idareme ve bu çalışmaya katılan tüm sevgili öğrencilerime teşekkür ederim.

Bana her zaman güvenen ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım anneme, babama ve abime en içten duygularıyla teşekkür ederim. Ayrıca, hayatımın her anında olduğu gibi çalışmam boyunca da ihtiyaç duyduğum her an yanımda olan sevgili eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yavuz ATABAY

ÖZET

Çalışmanın amacı, 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünce deneyleri süreçlerini incelemek ve bu süreçte yapılandıkları kavramların matematik tarihindeki kullanımı ve gelişimi arasında nasıl benzerlikler veya farklılıklar gösterdiğini belirlemektir. Çalışmada düşünce deneyleri süreçleri Gilbert ve Reiner'ın düşünce deneyi öğeleri (hipotez kurma, hayali dünya yaratma, düşünce deneyini tasarlama, düşünce deneyini yürütme, tespitte bulunma ve sonuç çıkarma) çerçevesinde incelenmiştir.

Bu araştırma pilot uygulaması nicel, ana uygulaması nitel olan bir karma yöntem araştırmasıdır. Araştırmanın uygulamaları 2019-2020 eğitim öğretim yılında İstanbul ili Beyoğlu ilçesinde özel bir Anadolu Lisesinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın pilot uygulaması uygun örnekleme yöntemi ile seçilen 10. sınıfta öğrenim gören 21 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Ana uygulama ise Mantıksal Düşünme Becerisi Testi uygulanarak maksimum çeşitlilik örnekleme ile seçilen 11. sınıfta öğrenim gören 6 öğrenci ile yapılmıştır.

Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testi önce uzman görüşüne sunulmuş, sonra 10. sınıfta öğrenim gören 21 öğrenciye uygulanmıştır. Elde edilen nicel veriler bir istatistik programı ile analiz edilerek Matematiksel Düşünce Deneyi Testi geliştirilmiştir. 11. Sınıfta öğrenim gören 6 öğrenci ile yapılan ana uygulamada bu teste verilen cevaplar ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler ve görüşme gözlemlerinden elde edilen veriler betimsel ve içerik analizi ile değerlendirilmiştir.

Araştırma sonucunda mantıksal düşünme becerisi zayıf öğrencilerin yaptıkları matematiksel düşünce deneylerinde sadece hipotez kurma ve hayali dünya yaratma öğelerine rastlanmıştır. Mantıksal düşünme becerisi orta düzey öğrencilerde bu iki öğenin dışında düşünce deneyi tasarlama ve yürütme öğeleri de gözlemlenmiştir. Mantıksal düşünme becerisi iyi öğrencilerin yaptıkları matematiksel düşünce deneylerinde ise tüm öğeler tespit edilmiştir. Öğrencilerin yaptıkları matematiksel düşünce deneylerindeki kavram yapılandırmaları ve yanılgıları ile o kavramların tarihte matematikçiler tarafından yapılandırılma süreci ve düştükleri kavram yanılgıları ile aynı olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Düşünce Deneyi, Mantıksal Düşünme Becerisi, Matematik Tarihi, Matematik Felsefesi, Problem Çözme

ABSTRACT

ANALYZING 11TH GRADE STUDENTS' PROCESSES OF MATHEMATICAL THOUGHT EXPERIMENTS

The aim of the research is to analyze 11th grade students' processes of mathematical thought experiments and determine the similarities and differences between students' concept constructions in these processes and the historical development of the concepts. In the study the processes of thought experiment were examined within the framework of Gilbert and Reiner's elements of thought experiment.

This research is a mixed method research. Its pilot study is quantitative and main study is qualitative. The study is conducted at a private high school in İstanbul, Beyoğlu in 2019-2020 academic year. 10th grade 21 students selecting by convenience sampling method participated in the first step. For the second step, Logical Ability Test is applied to 11th grade 20 students and 6 of them selecting by maximum variation sampling method.

Draft Mathematical Thought Experiment Test was first submitted to expert opinion and then given to 21 10th grade students. By analyzing qualitative data collecting from students' answer sheets via statistics programme, Mathematical Thought Experiment Test was developed. Data collecting from 6 11th grade students' answer sheets, semi-structured interviews and interview observations in the main study is analyzed by using descriptive and content analyses.

As a result of the research, only the elements of hypothesis and creation an imagined world were found in mathematical thought experiments conducted by students with poor logical thinking skills. In addition to these two elements, designing and running thought experimentation were observed in students with medium level logical thinking skills. In mathematical thought experiments conducted by students with high logical thinking skills, all elements were determined. Also, it has been observed that students' concept constructions and misconceptions in their mathematical thought experiments are the same as those of mathematicians throughout history.

Keywords: Mathematical Thought Experiment, Logical Thinking Ability, History of Mathematics, Philosophy of Mathematics, Problem Solving

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN.....	i
ÖZGEÇMİŞ.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar VE GRAFİKLER LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	x
EKLER LİSTESİ.....	xi
BÖLÜM I: GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.1.1. Problem Cümlesi.....	3
1.1.2. Alt Problemler.....	4
1.2. Araştırmanın Amacı.....	4
1.3. Araştırmanın Önemi.....	4
1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları.....	5
1.5. Araştırmanın Varsayımları.....	6
1.6. Araştırmadaki Tanımlar.....	6
BÖLÜM II: KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	7
2.1. Düşünce Deneyi.....	7
2.2. Düşünce Deneyinin Özellikleri.....	8
2.3. Düşünce Deneyinin Öğeleri.....	8
2.4. Tarihte Düşünce Deneyi Örnekleri.....	9
2.4.1. Platon'un Mağarası.....	9
2.4.2. İbn Sina'nın Uçan Adamı.....	11
2.4.3. Galileo'nun Serbest Düşme Deneyi.....	11
2.4.4. Theseus'un Gemisi.....	12

2.4.5. Newton'un Top Mermisi Deneyi.....	12
2.4.6. Hume'un Ekonomi Alanındaki Düşünce Deneyi.....	13
2.4.7. Olbers Paradoksu.....	14
2.5. Matematiksel Düşünce Deneyi.....	14
2.6. Matematiksel Düşünce Deneyi Örnekleri.....	15
2.6.1. Örnek 1: Satranç Tahtası.....	15
2.6.2. Örnek 2: Sonsuz Küçükler Hesabı İle Piramidin Hacminin Hesaplanması....	16
2.6.3. Örnek 3: Görsel İspat.....	17
2.6.4. Örnek 4: Lakatos'un 'Euler Formülü' Üzerinden Yaptığı Düşünce Deneyi...	17
2.7. Matematik Tarihi ve Felsefesinde Düşünce Deneyi.....	18
2.8. Düşünce Deneyinin Eğitim Alanında Kullanılması ve Eğitim Alanına Katkıları...	19
2.9. Düşünce Deneyi ve Mantıksal Düşünme.....	21
2.10. Haeckel'in Yineleme Teorisinin Eğitim Bilimine Uyarlanması.....	21
2.11. Çalışmada Kullanılan Bazı Matematiksel Kavramların Tarihçesi.....	22
2.11.1. Olasılık ve Binom Kavramlarının Tarihçesi.....	22
2.11.2. Sonsuzluk Kavramının Tarihçesi.....	23
BÖLÜM III: YÖNTEM.....	25
3.1. Araştırma Modeli.....	25
3.2. Çalışma Grubu.....	25
3.3. Veri Toplama Araçları.....	26
3.4. Verilerin Toplanması.....	27
3.4.1. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin Madde Güçlük Analizi.....	30
3.4.2. Pilot Uygulamanın Güvenirliği ve Geçerliği.....	31
3.5. Verilerin Analizi.....	36
3.5.1. Ana Uygulamada Yapılan Görüşme ve Gözlem Verilerinin Analizi.....	36
3.5.2. Ana Uygulamanın Güvenirliği ve Geçerliği.....	36
BÖLÜM IV: BULGULAR VE YORUMLAR.....	38
4.1. Öğrencilerin Matematiksel Düşünce Deneyi Süreçlerinin Mantıksal Düşünce Becerileri ve Düşünce Deneyi Öğeleri Açısından İncelenmesi.....	38
4.1.1. 'Orman Gezintisi' Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar.....	38
4.1.2. 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar.....	46
4.1.3. 'Şans Makinesi' Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar.....	56

4.1.4. ‘Sonsuzluk’ Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar.....	65
4.2. Öğrencilerin Matematiksel Düşünce Deneyi Süreçlerindeki Kavram Yapıları ve Bu Kavramların Tarihsel Gelişimi Arasındaki İlişkinin İncelenmesi.....	75
4.2.1. ‘Şans Makinesi’ Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar.....	76
4.2.2. ‘Sonsuzluk’ Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar.....	80
BÖLÜM V: SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	84
5.1. Sonuçlar ve Tartışma.....	84
5.2. Öneriler.....	86
Kaynakça.....	87



TABLÖLAR VE GRAFİKLER LİSTESİ

Tablo 3.2. Öğrencilerin Mantıksal Düşünme Yeteneği Puanları.....	26
Tablo 3.4.1. Veri Toplama Süreci.....	27
Tablo 3.4.2. Görüş Alınan Uzman Profilleri.....	28
Tablo 3.4.3. Uzmanların Görüş Birliği.....	28
Tablo 3.4.4. Matematiksel Düşünce Deneyi Testi Problemlerinde Yapılan Düzenlemelere Örnek.....	29
Tablo 3.4.1.1. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testine Ait Madde Güçlük İndeksleri ve Varyansları.....	30
Tablo 3.4.2.1. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testine Ait Madde Basıklık ve Çarpıklık Değerleri.....	32
Tablo 3.4.2.2. Puanlayıcılar Arası Korelasyon.....	32
Tablo 3.4.2.3. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin Cronbach Alfa Güvenirlik Katsayısı.....	33
Tablo 3.4.2.4. Öğrencilerle Yapılan Görüşmelerin Süreleri.....	34
Tablo 3.4.2.5. Matematiksel Düşünce Deneyi Testi Dereceli Puanlama Anahtarı Örneği.....	35
Tablo 4.1.1. ‘Orman Gezintisi’ Probleminde Tespit Edilen Düşünce Deneyi Öğeleri.....	39
Tablo 4.1.2. ‘Satranç Tahtası’ Probleminde Tespit Edilen Düşünce Deneyi Öğeleri.....	46
Tablo 4.1.3. ‘Şans Makinesi’ Probleminde Tespit Edilen Düşünce Deneyi Öğeleri.....	57
Tablo 4.1.4. ‘Sonsuzluk’ Probleminde Tespit Edilen Düşünce Deneyi Öğeleri.....	66
Grafik 4.1.4.1. Öğrencilerin Yaptıkları Düşünce Deneylerinde Tespit Edilen Öğrenci Bazlı Toplam Öğe Sayısı.....	74
Grafik 4.1.4.2. Öğrencilerin Yaptıkları Düşünce Deneylerinde Tespit Edilen Öğe Bazlı Toplam Öğe Sayısı.....	75

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.4.1. Platon'un Mağarası.....	10
Şekil 2.4.3. Galileo'nun Serbest Düşme Deneyi.....	12
Şekil 2.4.5. Newton'un Top Mermisi Deneyi.....	13
Şekil 2.6.1. Satranç Tahtası.....	15
Şekil 2.6.2. Sonsuz Küçükler Hesabı İle Piramidin Hacminin Hesaplanması.....	16
Şekil 2.6.3. Görsel İspat.....	17
Şekil 4.1.1.1. Begüm'ün 'Orman Gezintisi' Problemine Ait Görüşmesinde Yaptığı Çizim.	42
Şekil 4.1.1.2. Aslı'nın 'Orman Gezintisi' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek....	45
Şekil 4.1.2.1. Cansu'nun 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek..	48
Şekil 4.1.2.2. Begüm'ün 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek...	51
Şekil 4.1.2.3. Aslı'nın 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek-1...	53
Şekil 4.1.2.4. Aslı'nın 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek-2...	54
Şekil 4.1.2.5. Aylin'in 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek.....	55
Şekil 4.1.3.1. Begüm'ün 'Şans Makinesi' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek....	61
Şekil 4.1.3.2. Aslı'nın 'Şans Makinesi' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek.....	62
Şekil 4.1.3.3. Aylin'in 'Şans Makinesi' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek.....	64
Şekil 4.1.4.1. Cansu'nun 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek.....	67
Şekil 4.1.4.2. Cihan'ın 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek.....	68
Şekil 4.1.4.3. Bahar'ın 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek.....	70
Şekil 4.1.4.4. Aslı'nın 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek.....	72
Şekil 4.1.4.5. Aylin'in 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek-1.....	72
Şekil 4.1.4.6. Aylin'in 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek-2.....	73

EKLER LİSTESİ

EK 1. MANTIKSAL DÜŞÜNME YETENEĞİ TESTİ.....	93
EK 2. MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ.....	99
EK 3. UZMAN GÖRÜŞÜ FORMU ÖRNEK SAYFASI.....	103
EK 4. TASLAK MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ DERECELİ PUANLAMA ANAHTARI (RUBRİK) (NİCEL VERİ İÇİN).....	104
EK 5. MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ DERECELİ PUANLAMA ANAHTARI (RUBRİK) (NİTEL VERİ İÇİN).....	106
EK 6. GÖRÜŞME SORULARI.....	109
EK 7. GÖRÜŞME VE GÖZLEM FORMU.....	110
EK 8. MANTIKSAL DÜŞÜNME YETENEĞİ TESTİ KULLANIM İZNİ.....	111
EK 9. MEB ARAŞTIRMA UYGULAMA İZNİ.....	112

BÖLÜM I: GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın konusundan kısaca bahsedilerek araştırma probleminin ne olduğuna, araştırmanın amacına, araştırmanın önemine, araştırmanın sınırlılıklarına ve araştırmaya başlarken yapılan varsayımlara ilişkin bilgilere yer verilecektir.

1.1. Problem Durumu

Sosyal yaşantımızda karşılaştığımız güçlükler, zorluklar ve sorunlar için ‘problem’ kelimesini kullanmayı uygun buluruz (Dede ve Yaman, 2006). Literatürde ise bu terimin farklı tanımlarına ulaşmak mümkündür. Dewey (1916) problemi insanda tedirginlik yaratan veya belirsizlik içeren durumlar olarak tanımlamaktadır (Luntley, 2016). Torp ve Sage (1998)’ye göre ise problem iyi yapılandırılmamış, çözümü açık olmayan ve sistematik bir düşünme gerektiren durumdur (Kılıç, 2016). Baki (2014) ise problemi bireyde rahatsızlığa neden olan ve bireyi kendi bilgi ve tecrübelerini kullanarak çözüm aramaya yönlendiren bir kavram olarak ifade etmektedir. Bu tanımlar ışığında genel bir ifadeyle problem giderilmek istenen bir güçlük ya da çözüm aranan bir durumdur.

Problem çözme ise bir sorunun üstesinden gelmek için geçmiş deneyimler aracılığıyla öğrenilen kuralların basit bir biçimde uygulanmasının ötesine geçerek yeni çözüm yolları bulabilmek olarak tanımlanabilir (Korkut, 2002). Başka bir tanımla belirli bir durum ile başa çıkabilmek için çeşitli stratejiler üretmeyi, bu stratejilerden en uygun olanını seçmeyi ve seçilen stratejiyi uygulamayı içeren bilişsel ve davranışsal süreç olarak da ifade edilebilir (Güçlü, 2003). Daha kapsayıcı bir şekilde problem çözme; analiz etme, yorumlama, akıl yürütme, tahminde bulunma, değerlendirme ve yansıtıcı düşünme gibi süreçleri içeren önemli bir yaşamsal beceri olarak görülebilir (Anderson, 2009).

Matematiğin tarihsel sürecine bakıldığında da matematikçiler çözülen her problemin ardından yeni bir problem durumu ile karşı karşıya kalmışlar ve bunları bazen yanıtızsız bırakmışlar bazen de doğru ya da yanlış bir takım çözümler üretmişlerdir (Boyer, 2015; Yıldırım, 2018). Önemli bir diğer nokta bu problemleri çözebilmek için sezgilerinden, yaptıkları deney ve gözlemlerinden ve mantıksal akıl yürütmelerinden yararlanmış olmalarıdır.

Günümüz eğitim anlayışında da öğrencilerin aynı süreçlerden geçirilmesi matematik öğretiminde önemli bir yer tutar. Bu yüzden matematik öğretim programlarında öğrencilere kazandırılması hedeflenen temel becerilerden bir tanesi de problem çözme becerisidir.

Düşünce deneyi ise rutin olmayan bir problem çözerken ilk kez karşılaşılan durumlarda kendiliğinden ortaya çıkan bir uygulama olarak görülebilir (Bademci, 2008). Bu uygulama laboratuvar ortamında yapılabilecek bir deneyin zorluğu ya da imkansızlığı söz konusu olduğunda devreye girer ve laboratuvar ortamında yapılamayan deney zihinde tasarlanır ve yürütülür (Acar, 2013).

Fen ve felsefe alanında daha yaygın olarak kullanılan düşünce deneyi son dönemde matematik, ekonomi, tarih gibi farklı alanların da çalışma konusu olmuştur (Stuart, Fehige ve Brown, 2018). Eğitim alanında da kullanımının öğrencilerin mantıksal düşünme, kavram gelişimi, kavramsal ve işlemsel anlama, bilim dilini etkin kullanma gibi becerilerinin gelişimine yönelik katkıları fark edilmiştir (Reiner ve Gilbert, 2000; Karakuyu ve Tortop, 2009). MEB (2013; 2018) Matematik dersi ortaöğretim programlarına göre de yetiştirilmesi beklenen öğrencilerin karşılaştığı problemlere çözüm üretebilme, matematiksel dili etkin kullanabilme, matematiksel akıl yürütme ve ispat yapabilme, matematiksel kavramları birbiri ile ilişkilendirebilme gibi üst düzey bilişsel becerileri yerine getirebilmesi beklenmektedir. Türkiye’de yapılan akademik çalışmalar ve PISA sonuçları ülkemizde ortaöğretim kurumlarında öğrenim gören öğrencilerin bu becerilere sahip olma düzeylerinin düşük olduğunu göstermektedir (Aylar, 2014; MEB, 2018). Pedagojik amaçlı kullanılan düşünce deneyleri öğrencilerin problem çözme becerilerinin gelişmesine katkıda bulunmasının yanında kavram gelişimine yardımcı olmaktadır (Reiner ve Gilbert, 2000). Bu anlamda düşünce deneyi, öğrencilerdeki kavram yanlışlarının tespiti ve giderilmesinde kullanılabilecek bir öğretim metodu olarak da karşımıza çıkmaktadır. Düşünce deneyi öğrencilerin bilimsel düşünmesini de desteklemektedir çünkü öğrenciler düşünce deneyi yaparken bir bilim insanının geçtiği düşünsel süreçlerden geçme imkanı bulmaktadır (Reiner ve Gilbert, 2000). Karakuyu ve Tortop (2009) ise öğrencilere düşünce deneyi yapacakları ortamın sağlanmasının onların kavramsal ilişkilendirme, hipotez kurma, test etme, genelleme gibi mantıksal düşünme becerilerine yaptığı olumlu etkiden bahsetmektedir. Ayrıca, matematikte ispat yapmak sadece matematiksel bilgiye ulaşmak değil; matematik bilmek ve yapmak olup matematiksel algının temelini oluşturmaktadır (Aylar ve Şahin, 2016). Bu sebeptir ki matematik eğitiminde her düzeyde ispat gerekli ve şart bir konumdadır (Aylar, 2014). Bu bağlamda matematiksel düşünce deneyleri öğrencilere ispat yapma süreçlerini de yaşatma imkânı sunmaktadır. Fakat öğrencilerin ispat kavramına uzak oldukları bilinen bir gerçektir (Weber, 2001; Thompson, Senk, ve Gwendolyn , 2012; Gökçurt, Deniz, Akgün ve Soylu, 2014). Öğrencilerde olumsuz bir tutum olarak da gelişen

ispat yapma, düşünce deneyi yoluyla olumlu bir tutuma çevrilebilir ve bir beceri olarak kazandırılabilir. Düşünce deneyinin rutin olmayan bir problem durumu ile karşılaştığında ortaya çıkması onu yeri geldiğinde soyut, yeri geldiğinde esnek düşünmeye itecek ve hipotezler kurup onları test edebileceği durumlara sürükleyecektir (Acar, 2013). Bu bağlamda öğrencileri düşünce deneyi yapmalarını gerektirecek sınıf içi uygulamalar ile yüz yüze getirmek yapılan öğretimin niteliğini artıracak ve içeriğini zenginleştirecektir (Acar, 2013). Bu ise mevcut eğitimi MEB (2018)'in hedeflerine bir adım daha yaklaştıracak bir adım olarak görülmelidir.

Düşünce deneyi konulu çalışmalara fen eğitimi alanında daha sık karşılaşılmaktadır. Gilbert ve Reiner (1998), Acar ve Gürel (2016), Bademci (2008), Tüzün (2010) yaptıkları çalışmalarda düşünce deneyinin fen eğitiminde kullanımının öğrencilerin kavram gelişimini günlük hayat bağlamında düşünme yolu ile desteklediği sonuçlarını çıkarmışlardır. Reiner (1998) düşünce deneyinin öğrencilere bilimi sosyal bir etkinlik olarak görme imkanı sunmakla beraber bilimsel düşünme yöntemlerini öğrettiğini gözlemlemiştir. Karakuyu ve Tortop (2009) ise fizik eğitiminde düşünce deneyi uygulamalarının öğrencilerin mantıksal düşünme becerilerinde artışa sebep olduğunu ifade etmektedir. Bahsedilen bu çalışmalar ise düşünce deneyi kullanımının öğrencilerin kavram gelişimlerini, bilimsel ve mantıksal düşünme becerilerini desteklemesi gibi fen eğitimine olumlu yansımalarının gün yüzüne çıkarılması anlamını taşımaktadır. Ulaşılabildiği ölçüde matematik eğitimi alanında düşünce deneyi konulu bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Düşünce deneyi konusunun matematik eğitiminde de aynı değeri görmesi, matematik derslerinde uygulamalarının yapılabilmesi ve böylece karşılaştığı problemlere akılcı çözümler üretebilen, eleştirel ve esnek düşünebilen bireylerin yetiştirilmesi açısından pedagojik amaçlı matematiksel düşünce deneyini konu alan bu çalışma ayrı bir önem taşımaktadır.

Belirtilen durumlar gereğince bu araştırmada 11. sınıf öğrencilerine verilen problem durumları üzerinden onların yürüttükleri matematiksel düşünce deneyleri incelenecektir.

1.1.1. Problem Cümlesi

Araştırmanın problem cümlesi “11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünce deneyi süreçleri nelerdir?” şeklindedir.

1.1.2. Alt Problemler

1a) Mantıksal düşünme beceri düzeyleri farklı 11. sınıf öğrencilerinin yaptıkları matematiksel düşünce deneyleri Gilbert ve Reiner (2000)'ın belirlediği hangi öğeleri içermektedir?

1b) Mantıksal düşünme beceri düzeyleri farklı 11. sınıf öğrencilerinin yaptıkları matematiksel düşünce deneyleri içerdikleri öğeler açısından nasıl benzerlikler ve farklılıklar göstermektedir?

2) Matematiksel düşünce deneyleri kapsamında kullandıkları kavramlar ve yapılandırma süreçleri o kavramın tarihsel gelişim süreci ile benzerlik veya farklılık göstermekte midir?

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı 11. sınıf öğrencilerinin gerçekleştirdikleri matematiksel düşünce deneyi süreçlerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda düşünce deneyi, düşünce deneyinin tarihteki kullanımı, matematik alanında düşünce deneyi, düşünce deneyinin eğitimde kullanımı konuları ile ilgili literatür taranarak yapılandırılmış olan problem durumları karşısında mantıksal düşünme becerilerine göre seçilen 11. sınıf öğrencilerinin gerçekleştirdikleri düşünce deneyi süreçlerinin incelenmesi ve karşılaştırılması hedeflenmiştir.

1.3. Araştırmanın Önemi

MEB (2018)'in tüm öğretim programları ile gerçekleştirmek istediği temel hedeflerinden biri üst düzey bilişsel becerilere (eleştirel, analitik, özgün ve yenilikçi düşünebilen, sorgulayan, yorum yapan vb.) sahip öğrenciler yetiştirmektir. Matematik dersi öğretim programları (2013; 2018) ile de öğrencilerin;

- Problemlere farklı açılardan yaklaşabilmeleri ve çözüm getirebilmeleri,
- Matematiksel düşünme ve uygulama becerileri kazanmaları,
- Kavramsal anlama ve işlemsel akıcılığı kazanmaları,
- Matematiksel ilişkilendirme yapabilmeleri,
- Matematiğin tarihsel gelişim sürecini, matematiğin gelişimine katkı sağlayan bilim insanlarını ve onların çalışmalarını tanımaları amaçlanmıştır.

Yetiştirilmeye çalışılan yukarıdaki becerilere sahip öğrenci profili için nitelikli ve zengin bir öğrenme ortamı en temel koşuldur (Karakuyu ve Tortop, 2009). Matematiksel düşünce deneyi üzerine yapılan bu çalışma da bu amaca hizmet edecektir.

Düşünce deneyinin tarih boyunca kullanılan bir yöntem olduğu göz önüne alınırsa konunun önemi daha net anlaşılacaktır (Glas, 1999). Öğrencinin pedagojik amaçlı bir matematiksel düşünce deneyi ile matematiksel bilginin elde edilmiş yöntemine, bir matematikçinin düşünsel süreçlerine ve matematiğin tarihsel gelişimine daha yakından bakabilme imkanı doğmaktadır. Düşünce deneyi öğrencilerin hayal gücünü geliştirmelerine, buna bağlı pratik ve yaratıcı düşüncelerine, tasarım yapma yeteneklerine katkı sağlamaktadır (Acar ve Gürel, 2016). Gilbert ve Reiner (2000) ise düşünce deneyinin öğrencilerin kavram gelişimini desteklediğini ifade etmektedir. Bunlar ışığında matematiksel düşünce deneyi yaparak öğrenme yaklaşımının pedagojik temellerinin atılması ve sınıf içi kullanımının öğrencilere sağlayacağı matematiksel düşünme, kavramsal öğrenme, matematiksel iletişim gibi katkılarının gözlemlenebilmesi yönlerinden bu çalışmanın eğitim alanına kazandıracağı boyutun önemi kaçınılmazdır. Mantıksal düşünme ile matematiksel düşünme arasındaki ilişkinin ortaya konulabilmesi açısından da bu araştırma büyük önem taşımaktadır. Ayrıca öğrencilerin matematiksel düşünce deneyi süreçlerinin kavramların tarihsel gelişim süreci ile benzerlik veya farklılıklar göstermesinin incelenmesi de çalışmanın özgünlüğü açısından kayda değer bir durumdur. Bu süreçte öğrencilerin kendilerini bilim insanı yerine koyarak çalışma ve araştırmaya yönlendikleri gözlenmiştir. Bu sonuçta çalışmanın öğrenme ortamına katkısı olarak söylenebilir.

Düşünce deneyi, düşünce deneyinin tarihteki kullanımı, matematik alanındaki düşünce deneyi, düşünce deneyinin eğitimde kullanımı konuları ile ilgili ulaşılabildiğimiz ölçüde ulusal ve uluslararası literatür taranmış ve matematik eğitiminde düşünce deneyi üzerine yapılan bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu araştırmanın matematik eğitimi literatüründeki bu boşluğun doldurulmasına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırma;

- 1) 2019-2020 eğitim öğretim yılında İstanbul ili, Beyoğlu ilçesinin sınırları içerisinde kalan bir kolejde 11. sınıfa devam eden 6 öğrenci,
- 2) Uygulama okulunun çalışma süreci için belirlediği zaman,
- 3) Matematiksel düşünce deneyi yapılmasını gerektiren 8 problem durumu,
- 4) Mevcut Matematik dersi öğretim programındaki kazanımlar ile sınırlıdır.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmada uygulama ve veri toplama sürecinde öğrencilerin birbirlerinden olumlu ya da olumsuz etkilenmedikleri varsayılmaktadır.

1.6. Araştırmadaki Tanımlar

Araştırmada sıkça kullanılan kavramların tanımları aşağıda verilmiştir.

Mantıksal düşünme becerisi: Bireyin sayıları etkili kullanma, problemlere bilimsel çözümler üretme, kavramlar arası ilişkileri ayırt etme, sınıflama, genelleme yapma, matematiksel formülle ifade etme, hesaplama, hipotez kurma, test etme, benzetmeler yapma gibi davranışları gösterebilme yeteneğidir (Demirel, 2002).

Düşünce deneyi: Hayali dünya bağlamında, araç gereç kullanmadan, bir problem durumu üzerinden zihinde sonuçların gözlenmesi yolu ile yapılan deneydir (Acar ve Gürel, 2016).

Matematiksel düşünce deneyi: Düşünce deneyinin matematik alanı özeline indirgenmesinden hareketle matematiksel bir ispatın sezilmesini ya da matematiksel bir kavramın yaratılmasını sağlayan düşünce tasarımlarıdır (Glas, 1999; Van Bendegem, 2003). Bu çalışmada kullanılan matematiksel düşünce deneylerinin pedagojik amaçlı olması sebebi ile matematik tarihinde karşılaşılan örneklerinden zayıf olduğu unutulmamalıdır (bu zayıflık düşünce deneyi yapılmasını gerektirecek problem durumlarının öğrencilere en uygun halde sunulması ve bu sebeple öğrencilerin istenilen bağlamda kalmalarının sağlanmasıdır).

Düşünce deneyi öğeleri: Gilbert ve Reiner'ın (2000) bir düşünce deneyinde var olduğunu belirttiği 6 öğedir. Bunlar; i) hipotez kurma, ii) hayali dünya yaratma, iii) düşünce deneyi tasarlama, iv) düşünce deneyini yürütme, v) geçmiş deneyimlere, sezgilere ve mantıksal çıkarım kurallarına bağlı tespite bulunma ve vi) bunlardan sonuç çıkarmadır.

BÖLÜM II: KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde araştırmanın kavramsal çerçevesini ortaya koymak amacıyla düşünce deneyi, düşünce deneyinin özellikleri, düşünce deneyinin tarihteki örnekleri, matematikte düşünce deneyi ve örnekleri, matematikteki düşünce deneylerinin matematik tarihi ve felsefesi ile ilişkisi, düşünce deneyinin eğitimde kullanılması konularına literatür ışığında yer verilecektir.

2.1. Düşünce Deneyi

İnsanoğlu var olduğu günden itibaren sahip olduğu merak duygusu sayesinde her alanda çeşitli başarılar yakalamıştır. İçinde yaşadığı evrende doğal gerçekleşen olaylar dikkatini çekmiş, bu olayların ardındaki sebepleri araştırmış ve bir takım sorunlarına cevaplar bulma ihtiyacı hissetmiştir. Bu ihtiyaçlarını karşılarken, başka bir deyişle evreni anlamlandırmaya çalışırken şüphesiz en büyük dayanakları deney, gözlem ve akıl olmuştur.

Merak ettiği evrendeki gizemi açığa çıkarmak için deney yapmanın zor hatta imkansız olduğu durumlarla karşılaştıklarında ise yapmak istedikleri deneyleri zihinlerinde tasarlamışlar ve akıl yürütme yoluyla bu deneylerini gerçekleştirmişlerdir. Zihinde tasarlanan bu deneyler literatüre *düşünce deneyleri* ismiyle Hans Christian Örsted tarafından kazandırılmıştır (Klassen, 2006). Fakat bu alanda yapılan çalışmalar incelendiğinde düşünce deneylerinin doğasına ilişkin ilk detaylı incelemeyi yapan ve bu alanda yaptığı öncü yayınlarla büyük bir tartışmayı başlatan kişinin Ernst Mach (1897) olduğunu söyleyebiliriz (Ateş, 2012; Karakuyu ve Tortop, 2009). Mach düşünce deneyine ilişkin şu ifadeleri söylemiştir:

Gerçek fiziksel deneye ek olarak, yaygın bir biçimde ve daha yüksek bir entelektüel düzeyde yürüttüğümüz bir diğer deney de, isim vermek gerekirse, düşünce deneyidir. (Mach, 1897/1973, akt. Ateş,2012)

En basit haliyle zihinde yürütülen deneyler olarak tanımlayabileceğimiz düşünce deneylerinin literatürde farklı tanımları mevcuttur. Sorensen (1992) düşünce deneylerini amacına uygulamaya başvurmadan ulaşan deneyler olarak görmektedir. Reiner ve Gilbert (2000) düşünce deneyinin bir iddianın geçerliliğini test etmek ve başkalarını bu konuda ikna etmek için hazırlanmış düşünce tasarımları olduğunu söyler. Acar ve Gürel (2016) ise düşünce deneylerini hayali dünya bağlamında, araç gereç kullanmadan, bir problem durumu üzerinden zihinde sonuçların gözlenmesi yolu ile yapılan deneyler olarak tanımlamaktadır. Brown (2019)'a göre düşünce deneyleri nesnelerin doğasını (doğayı) araştırmak için

kullanılan hayal gücünün araçlarıdır (Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2019). Norton (2004)'a göre ise düşünce deneyleri varsayımsal ya da olgu karşıtı (conterfactual) durumlarda öne sürülen etkili argümanlardır. Galili'ye (2009) göre ise düşünce deneyi gerçek nesnelerin dünyasındaki olgulara ilişkin hipotetik-dedüktif¹ düşünceler dizisidir. Özetle, düşünce deneyi için verilen tanımların bu kavramı her seferinde açıklamada yetersiz kaldığı, tanımının verilmesinin zor bir kavram olduğu sonucu çıkarılabilir.

2.2. Düşünce Deneyinin Özellikleri

Literatür ışığında düşünce deneyinin özelliklerini aşağıdaki gibi listeleyebiliriz.

- 1) Düşünce deneyi zihnin laboratuvarında yürütülür (Brown, 2004; Ireson, 2005).
- 2) Düşünce deneyi geçmiş deneyimlerden yararlanılarak yürütülür (Ireson, 2005).
- 3) Düşünce deneyi varsayımsal ya da olgu karşıtı bir akıl yürütme içerir (Norton, 2004; Ateş, 2012).
- 4) Düşünce deneyi onu yürüten kişiye mevcut problemin çözümünü görme ve sezme imkanı sağlar (Ireson, 2005).
- 5) Düşünce deneyleri bilimsel ya da felsefi bir soruya yanıt arar (Ateş, 2012).

Düşünce deneyinin yukarıda da belirtildiği gibi en temel özelliklerinden bir tanesi de zihinde yürütülmesi, yani herhangi bir deneysel girdiden yoksun olmalarıdır (Georgiou, 2005). Bu özellik düşünce deneyinin maddeden bağımsız ve daha uçlarda yapılabilme imkanı sağlarken bir yandan da ona bir dezavantaj getirmektedir. Düşünce deneyinin gücü varsayımlarının gücü kadardır. Varsayımların güçlü olmaması durumunda düşünce deneyleri yanıltıcı sonuçlar verebilir (Acar, 2013).

2.3. Düşünce Deneyinin Öğeleri

Gilbert ve Reiner (2000) bir düşünce deneyinde 6 temel öğenin varlığından söz eder. Bunlar;

- 1) Hipotez kurma,
- 2) Hayali dünya yaratma,
- 3) Düşünce deneyi tasarlama,
- 4) Düşünce deneyini yürütme,
- 5) Geçmiş deneyimlere, sezgilere ve mantıksal çıkarım kurallarına bağlı tespitte bulunma,

¹ Tümdengelim ve tümevarım yöntemlerinin beraber kullanıldığı akıl yürütme biçimi.

6) Bunlardan sonuç çıkarmadır.

Kusursuz bir düşünce deneyinde bu öğelerin eksiksiz şekilde verilen sıra ile gözlemlenmesi gerektiği ifade edilir (Reiner ve Gilbert, 2000).

2.4. Tarihte Düşünce Deneyi Örnekleri

Tarihteki örneklerine bakıldığında düşünce deneylerinin zihinsel bir araç olarak kullanımı fen ve felsefe alanında daha eskidir (Ateş, 2012). Bu sayede bilim insanları ve filozoflar tarafından bir problemin çözümü için üretilen düşünce deneyleri insanlığın gelişimine büyük katkılar sağlamıştır (Stuart, Fehige ve Brown, 2018).

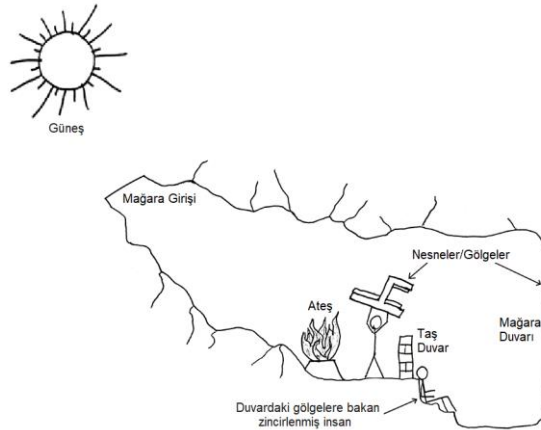
Düşünce deneyinin fen ve felsefe alanında daha sık kullanıldığı bilinen bir gerçekse de tarihsel süreçte matematik, teoloji, ekonomi, tarih, sanat gibi farklı alanlarda da örneklerine rastlanmaktadır (Stuart, Fehige ve Brown, 2018). Aşağıda kronolojik sıraya göre çeşitli alanlarda yapılan düşünce deneyi örnekleri verilmiştir.

2.4.1. Platon'un Mağarası

Platon '*Devlet*' adlı eserinde gerçek olanı ve gerçeğe ulaşan insanı yani filozofu kurduğu diyalog üzerinden şöyle anlatmaya çalışır:

- Yeraltında mağaramsı bir yer, içinde insanlar. Önde boydan boya ışığa açılan bir giriş... İnsanlar çocukluklarından beri ayaklarından, boyunlarından zincire vurulmuş, bu mağarada yaşıyorlar. Ne kımıldanabiliyorlar ne de burunlarının ucundan başka bir yer görebiliyorlar. Öyle sıkı sıkıya bağlanmışlar ki, kafalarını bile oynatamıyorlar. Yüksek bir yerde yakılmış bir ateş parlıyor arkalarında. Mahpuslarla ateş arasında dimdik bir yol var. Bu yol boyunca alçak bir duvar, hani şu kukla oynatanların seyircilerle kendi arasına koydukları ve üstünde marifetlerini gösterdikleri bölme var ya, onun gibi bir duvar... bu alçak duvarın arkasında insanlar düşün. Ellerinde türlü türlü araçlar, taştan, tahtadan yapılmış, insana, hayvana ve daha başka şeylere benzer kuklalar taşıyorlar. Bu taşıdıkları şeyler, bölmenin üstünde görülüyor. Gelip geçen insanların kimi konuşuyor, kimi susuyor.
- Garip bir sahne doğrusu ve garip mahpuslar.
- Ama tıpkı bizler gibi! Bu durumdaki insanlar kendilerini ve yanlarındakileri nasıl görürler. Ancak arkalarındaki ateşin aydınlığıyla mağarada karşılına vuran gölgeleri görebilirler, değil mi?
- Ömürleri boyunca başlarını oynatamadıklarına göre, başka türlü olamaz.
- ...
- Şimdi bu adamlar aralarında konuşacak olurlarsa, gölgelere verdikleri adlarla gerçek nesneleri anlattıklarını sanırlar, değil mi?
- Öyle ya.

- Bu zindanın içinde bir de yankı düşün. Geçenlerden biri her konuştuğunda, mahpuslar bu sesi karşılarındaki gölgenin sesi sanmazlar mı?
- ...
- Şimdi düşün: Bu adamların zincirlerini çözer, bilgisizliklerine son verirken her şeyi olduğu gibi görürlerse ne yaparlar? Mahpuslardan birini kurtaralım; zorla ayağa kaldıralım; başını çevirelim, yürütelim onu; gözlerini ışığa kaldırsın. Bütün bu hareketler ona acı verecek. Gölgelelerini gördüğü nesnelere gözü kamaşarak bakacak. Ona demin gördüğün şeyler sadece boş gölgelerdi, şimdiyse gerçeğe daha yakınsın, gerçek nesnelere daha çevriksin, daha doğru görüyorsun, dersek; önünden geçen her şeyi birer birer ona gösterir; bunların ne olduğunu sorarsak ne der? Şaşakalmaz mı? Demin gördüğü şeyler, ona şimdikilerden daha gerçek gibi gelmez mi?... Ya onu aydınlığın ta kendisine bakmaya zorlasak? Gözlerine ağrı girmez mi? Boyuna başını bakabildiği şeylere çevirmez mi? Kendi gördüğü şeyleri, sizin gösterdiklerinizden daha açık daha seçik bulmaz mı?... Onu zorla alıp götürsek, dik ve sarp yokuştan çıkarıp, dışarıya, gün ışığına sürükleysek, canı yanmaz, karşı koymaz mı bize? Gün ışığında gözleri kamaşıp bizim şimdi gerçek dediğimiz nesnelerin hiçbirini göremeyecek hale gelmez mi?
- İlk bir şey göremez herhalde.
- Yukarı dünyayı görmek isterse, buna alışması gerekir.
- ...
- O zaman ilk yaşadığı yeri, orada bildiklerini, zindan arkadaşlarını hatırlayınca, haline şükretmez, orada kalanlara acımaz mı?... Bir de şunu düşün: Bu dediğimiz adam yeniden mağaraya dönüp eski yerini alsa; gün ışığından ayrılan gözleri karanlıklara dayanabilir mi?... Daha gözleri karanlıklara alışmadan, ki kolay kolay da alışamaz, yeniden bu karanlıklar içinde düşünmek, zincirlerinden hiç kurtulmamış mahpuslarla gördükleri üzerinde tartışmak zorunda kalsa, herkes gülmez mi ona? Yukarıya boşu boşuna çıkmış, üstelik de gözlerini bozup dönmüş demezler mi? Bu adam onları çözmeye, yukarıya götürmeye kalkışınca, ellerinden gelse öldürmezler mi onu?
- ...
- Bu benzetmeyi demin söylediklerimize uyduralım. Görünen dünya mağara zindanı olsun. Mağarayı aydınlatan ateş de güneşin yeryüzüne vuran ışığı. Üst dünyaya çıkan yokuş ve yukarıda seyredilen güzellikler de, ruhun düşünceler dünyasına yükselişi olsun (Platon, 2015).



Şekil 2.4.1. Platon'un Mağarası

2.4.2. İbn Sina'nın Uçan Adamı

'Uçan Adam' düşünce deneyi İbn Sina'nın insan ruhunun canlı bir beden bir parçası olarak mı yoksa yaşamın maddi olmayan ilkesi olarak mı görülmesi gerektiğine dair yaptığı düşünce deneyidir. Kaukua (2018) bu düşünce deneyini İbn Sina'dan aşağıdaki gibi aktarmaktadır:

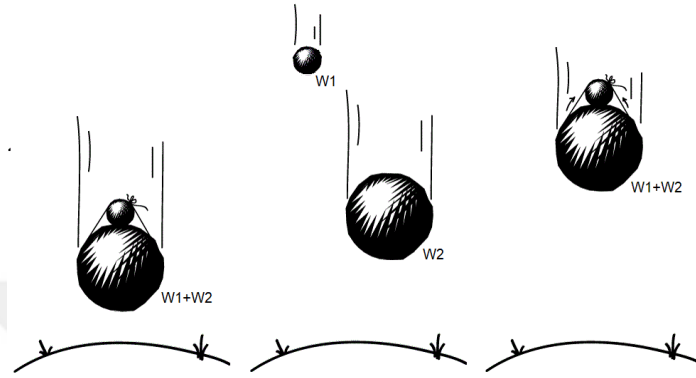
“Biz de diyoruz ki; herhangi birimiz kendisinin birdenbire ve mükemmel olarak ama dışsal şeyleri müşahededen engellenmiş olarak yaratıldığını; havada veya boşlukta salınabilecek biçimde yaratıldığını ve havanın mukavemetinin kendi üzerinde – duyuyla algılamak durumunda kalacağı – bir baskı yapmayacağını; organlarının da birbirlerine değmeyecek veya birbirleriyle karşılaşmayacak denli ayrı olduğunu farz etmek zorunda kalsın. Bu kişi sonra [bu durumda] kendinin (zâtühû) varlığını olumlayıp (isbât) olumlamayacağı üzerine düşünmek durumunda kalsın. O, kendinin (zâtühû) var olduğunu olumlamada hiç tereddüt etmeyecektir. Ama bu olumlamaya herhangi bir dışsal uzvunun, kalp veya beyin gibi herhangi bir iç organının, dışsal herhangi bir şeyin olumlanması eşlik etmeyecektir. Bu kişi aksine, kendini olumlayacak ama kendine ait bir uzunluk, genişlik ve derinlik olumlamayacaktır. Söz konusu durumda bu kişinin [kendisine ait bir] bir el veya başka bir uzuv tahayyül etmesi olanaklı olsa bile bu kişi söz konusu uzvu kendinin bir parçası veya kendine gerekli bir şey olarak tahayyül etmez. Şimdi bilirsin ki olumlanan, olumlanmayandan başka bir şeydir; onaylanan da onaylanmayandan farklıdır. O hâlde varlığı olumlanan kendiliğin (zât) ona has bir özelliği vardır; o kişi bu kendilikle, olduğu şeyle (bi-'aynihi) varlıkları olumlanmayan bedeninden ve uzuvlarından farklı bir şeydir. O hâlde buradan, [zatını] bu şekilde olumlayan kişinin, ruhunun (nefs) varlığının cisminden, hatta mutlak olarak tüm cisimlerden, ayrı olduğunu olumlayacağı ve onu bu şekilde tanıyıp bu şekilde bilincine varacağı bir yol vardır.”

2.4.3. Galileo'nun Serbest Düşme Deneyi

Galileo serbest düşme deneyinde Aristo'nun 'ağır cisimler hafif cisimlere göre daha hızlı düşer' fikrinin tutarsız olduğunu, buna karşın 'ağır cisimler hafif cisimler ile aynı hızda düşer' fikrinin benimsenmesi gerektiğini açıklamaya çalışır. Bunun için şöyle bir düşünce deneyi tasarlar:

Ağırlıkları birbirinden farklı W_1 ve W_2 olan iki cisim ve bunların aynı anda aynı noktadan serbest bırakıldığını hayal edin. Aristo fiziğine göre ağır cismin yere düşene kadar olan ortalama hızının hafif olana göre daha fazla olduğunu söyleyebiliriz çünkü ağır olan cisim hafif olandan daha önce yere düşecektir. Yine Aristo fiziğine sadık kalarak iki cismin birbirlerine bir ip ile bağlandığını ve bu şekilde serbest düşmeye bırakıldığını düşünelim. Buna göre $W_1 + W_2 > W_2$ olacağından $V_{(1+2)} > V_2$ olur, yani yeni oluşturduğumuz cisim daha ağır olacağından yere daha hızlı düşmesi gerekir. Fakat aynı zamanda birbirine bağlı cisimlerden ağır cismin yavaş cismi hızlandıracağı, yavaş cismi ise ağır cismi yavaşlatacağı

düşünülürse bu cismin yere düşene kadar olan ortalama hızının $V_{(1+2)} < V_2$ olması da beklenir. Bu iki eşitsizlik ya da durum birbiri ile çelişir. Dolayısıyla Aristo'nun fikrinin yanlış olduğu ve cisimlerin yere düşene kadar olan ortalama hızlarının ağırlığından bağımsız olduğu, yani $V_1 = V_{(1+2)} = V_2$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır (Gilbert ve Reiner, 2013).



Şekil 2.4.3. Galileo'nun Serbest Düşme Deneyi

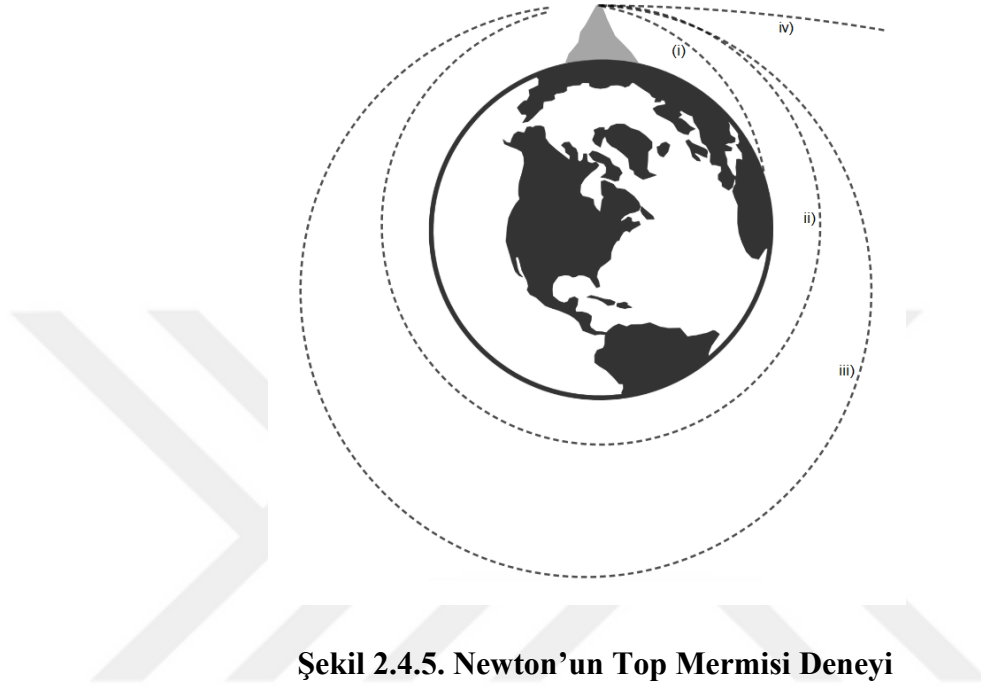
2.4.4. Theseus'un Gemisi

Ünlü İngiliz filozof Thomas Hobbes, Antik Yunan tarihçisi Plutark'ın aktardığı efsaneden esinlenerek adını efsanevi Atina kralından alan 'Theseus'un gemisi' düşünce deneyini yapar (Worley, 2020). Bu düşünce deneyine göre, Atina'da limanlayan Theseus'un gemisi zamanla eskir. Eskiye parça oldukça bunlar kopyalarıyla değiştirilir. Aynı zamanda eskiyen parçalar da bir araya getirilerek bir gemi daha inşa edilir (Hughes,1997). O halde, bu gemilerden hangisi Theseus'un gemisidir? Zihinde tasarlanan bu duruma felsefeciler farklı bakış açılarıyla farklı yanıtlar vermişlerdir.

2.4.5. Newton'un Top Mermisi Deneyi

Newton bu deney ile yerçekimi kuvvetinin farklı açı ve hızlarla Kuzey Kutbunda yüksek bir dağdan ateşlenen top mermilerinin yörüngelerini nasıl etkileyeceğini test etmeye çalışmıştır. Newton'un eğer bir top mermisi tam olarak doğru yükseklik, açı ve hızda atılırsa dünyanın etrafında düşmeden, yörüngesel bir hareket izleyeceğini düşünmekteydi. Top mermisinin doğru ölçüler ile atılmadığı durumda ortaya çıkan durumlar ise şöyleydi: i) Eğer yavaş bir hızla atılırsa top mermisi yeryüzüne düşecektir. ii) Eğer hızı o yükseklikteki yörüngesel hız kadarsa top mermisi, tıpkı ay gibi, dünyanın etrafında sabit dairesel bir yörüngede yol alacaktır. iii) Eğer hızı yörüngesel hızdan fazla ise (yörüngeden kurtulma hızından fazla

olmamak kaydıyla) top mermisi dünya etrafında eliptik bir yörüngede hareketine devam edecektir. iv) Eğer hızı yörüngeden kurtulma hızından da fazlaysa yerçekiminden kurtulacaktır. Newton'un bu düşünce deneyi dünyanın ilk yapay uydusu olan Sputnik'in 4 Ekim 1957'de fırlatılmasıyla fiziksel olarak da ilk defa gerçekleşme imkanı bulmuştur (Bolstridge, 2019).



Şekil 2.4.5. Newton'un Top Mermisi Deneyi

2.4.6. Hume'un Ekonomi Alanındaki Düşünce Deneyi

Ekonomi alanında da kullanımına rastladığımız düşünce deneyinin bu alandaki en klasik örneklerinden birini David Hume 1758 yılında yayımladığı '*Essays Moral, Political and Literacy*' adlı eserinde vermiştir. Düşünce deneyi şu şekildedir: Mucizevi bir şekilde, bir gecede Büyük Britanya'daki her vatandaşın cebine 5 pound girmiş olsun. İnsanların cebine giren bu para o dönem krallıkta mevcut olan tüm paranın iki katından daha fazla olmasına rağmen ne ertesi gün ne de başka bir zaman daha fazla borç veren kimse ya da faiz oranında bir değişiklik olmayacaktır. Çünkü bu paranın toplanmasının imkanı olmadığı için herkesin cebine giren bu para malların fiyatlarının artmasından başka bir şeye sebebiyet vermeyecektir. Tutumsuz olan derebeyleri o parayı alır almaz harcayacaklardır. Yoksul köylülerin ise o para ile geçim kaynaklarını, hayat standartlarını artırma gibi bir düşünce ya da tutkuları olmayacaktır. Böylece borçluların sayısının borç verenlerin sayısına olan üstünlüğü devam edecek ve bu devamlılık faiz indirimini getirmeyecektir (Hume , 2011).

2.4.7. Olbers Paradoksu

1610 yılında Johannes Kepler'in sonsuz sayıda yıldız içeren sonsuz evren fikrine karşı Alman gökbilimci Heinrich Olbers'in 1823 yılında ortaya attığı düşünce deneyidir. Olbers evren durağan, sonsuz ve sonsuz sayıda yıldız içeriyor ise her çizgisel bakış doğrultusunun eninde sonunda bir yıldızın yüzeyinde sonlanacağını söyler. Fakat bu çıkarıma göre, gece gökyüzünün karanlık değil, aksine tamamen aydınlık olması yani yıldızlar arasında karanlık tek bir nokta dahi olmaması gerekir. O halde, sonsuz sayıda yıldız içeren sonsuz evren fikri kusurludur (Encyclopedia Britannica, 2020).

Yukarıda belirtilen düşünce deneyi örneklerinin yanı sıra her düşünce tasarımı bir düşünce deneyi olmak zorunda değildir. Örneğin; Ateş (2012), Lewis Carroll'ın '*Alice Harikalar Diyarında*' adlı eserindeki Alice'in başından geçen ilginç serüveninin bir düşünce deneyinin sağlaması gereken bilimsel ya da felsefi bir soruya cevap arama özelliğinden yoksun olduğunu ifade etmektedir. Bu sebeple de Alice'in macerasının bir düşünce deneyi olarak nitelendirilemeyeceğini belirtmektedir.

2.5. Matematiksel Düşünce Deneyi

Matematik alanı özeline inildiğinde düşünce deneyi kavramının bu alanda daha az çalışılmış olmasının matematiğin doğasının araştırılmasının zor bir alan olmasından kaynaklandığı ifade edilebilir (Buzzoni, 2011). Sağlaması gereken özellik bakımından farklılık göstermeyen fakat konu ve içerik itibarıyla ayrıştıkları noktalar olan literatürde matematiksel düşünce deneyi olarak da adlandırılan matematik alanına ait düşünce deneyi kavramı fen bilimlerine göre daha yenidir. Matematikteki düşünce deneyinin fen bilimlerinininkinden farklı yönlerini anlamak için bu iki alanın farklılıklarına da iyi odaklanmak gerekir. Doğa bilimlerinin uğraştığı nesneler olgusaldır. Örneğin; bir maddesel parçacığın kütlesi, devinimi, enerjisi gibi. Oysa matematik bu tip olgusal nesnelerle uğraşmaz. Matematiğin nesneleri kavramsaldır. Örneğin; sayılar, üçgenler vs. doğada bulduğumuz nesneler değildir. O halde, bir matematikçinin görevi de doğa bilimcilerden farklı olarak algıladığı olgusal bir ilişkiyi açıklamak yerine algıladığı kavramsal bir ilişkiyi ispatlamaktır (Yıldırım, 2018). Bu bağlamda, matematiksel düşünce deneyi;

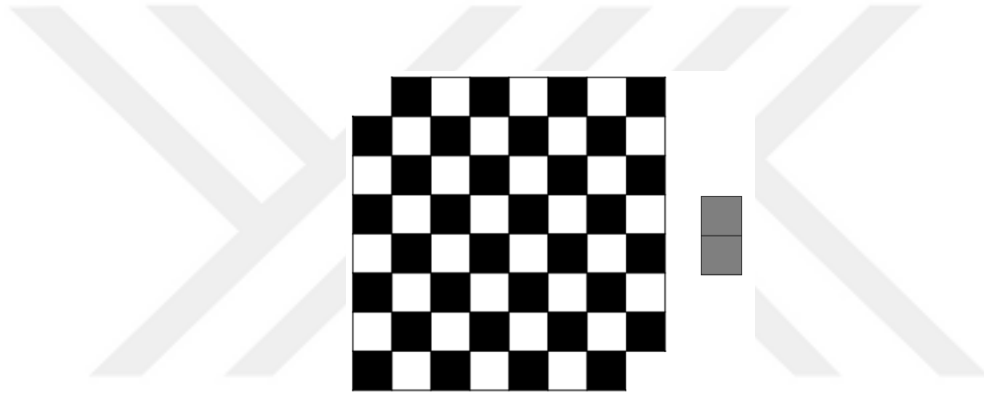
- i) henüz yapılmamış ispatların nasıl olması gerektiğine dair bir yol gösterici,
- ii) yapılan ispatların daha iyi anlaşılmasını sağlayan bir yöntem olarak tanımlanabilir (Van Bendegem, 2003).

Matematiksel düşünce deneyi bizi bir matematiksel ispata götüren bir tasarım olmanın yanında yeni matematiksel kavramlar yaratmanın bir yolu olarak da literatürde kabul görmektedir (Glas, 1999; Van Bendegem, 2003). O halde, matematiksel düşünce deneyini varsayımsal ya da olgukarşıtı akıl yürütme içeren matematiksel bir ispatı sezmemize ya da kavramamıza yardımcı olan ya da matematiksel bir kavram yaratmanın yolunu açan düşünce tasarımları olarak tanımlayabiliriz.

2.6. Matematiksel Düşünce Deneyi Örnekleri

2.6.1. Örnek 1: Satranç Tahtası

Şekildeki gibi çapraz iki köşesinden iki karesi çıkartılan satranç tahtası bir tanesi iki kareyi kaplayan domino taşları ile kaplanabilir mi? (Brown, 2005:50)



Şekil 2.6.1. Satranç Tahtası

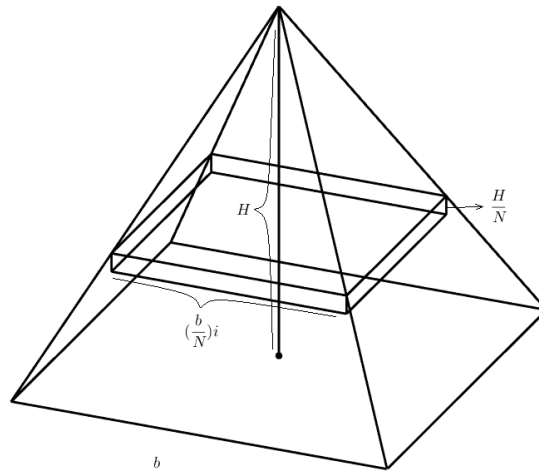
Cevap “hayır, kaplanamaz” olacaktır. Bendegem (2003), çözüme ulaşmak için formel bir ispat yapmak yerine aşağıdaki gibi bir düşünce deneyi kullanılabileceğini ifade etmektedir.

- 1) Bir domino taşı bir beyaz ve bir siyah kare kaplar.
- 2) n tane domino taşı n beyaz ve n siyah kare kaplar.
- 3) Satranç tahtasının domino taşları ile tamamen kaplanması için gerekli domino taşı sayısı m olsun.
- 4) O halde, m tane domino taşı m beyaz ve m siyah kare kaplar.
- 5) Yani, domino taşları eşit sayıda siyah ve beyaz kare kaplar.
- 6) Satranç tahtasının köşelerinde eşit sayıda (2şer tane) siyah ve beyaz kare vardır.
- 7) Satranç tahtasının karşılıklı köşelerinden çıkardığımız kareler aynı renktedir.
- 8) Bu nedenle, iki kare parça çıkarılmış satranç tahtasındaki siyah ve beyaz karelerin sayısı birbirine eşit değildir.

- 9) 5 ve 8. Maddeler arasında çelişki vardır. Dolayısıyla, domino taşları ile bu tahtayı kaplayamayız.

2.6.2. Örnek 2: Sonsuz Küçükler Hesabı İle Piramidin Hacminin Hesaplanması

Analizin sağlam temellere henüz oturtulamadığı 17. yüzyılda sonsuz küçükler hesabının kullanımı da matematiksel bir düşünce deneyi olarak kabul görmektedir (Van Bendegem, 2003). Türev ve integral kavramlarına zemin oluşturan fakat o dönem temelinde hatalı olan sonsuz küçükler hesabı uygulamalarında doğru sonuçlar vermekteydi. Piramidin hacminin hesaplanmasında da bir yöntem olarak kullanılan sonsuz küçükler hesabı aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.6.2. Sonsuz Küçükler Hesabı İle Piramidin Hacminin Hesaplanması

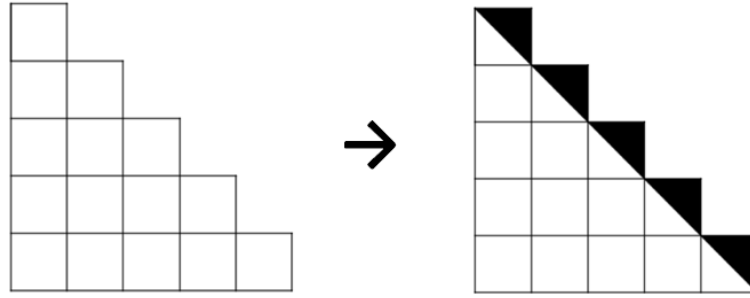
Bir kare piramidin hacminin tüm dilimlerin toplam hacmine eşit olduğu kabul edilsin. Buna göre;

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{b}{N}\right)^2 \cdot i^2 \cdot \frac{H}{N} = b^2 \cdot H \cdot \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^N i^2 = b^2 \cdot H \cdot \frac{1}{N^3} \cdot \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6} = b^2 \cdot H \cdot \frac{1}{N^3} \cdot \frac{2N^3 + \dots}{6} \text{ olur.}$$

N^2 ve daha küçük değerler ihmal edildiğinde piramidin hacminin $\frac{b^2 \cdot H}{3}$ olduğu sonucuna ulaşılır (Van Bendegem, 2003).

2.6.3. Örnek 3: Görsel İspat

$1 + 2 + 3 + \dots + n$ ifadesinin eşitini bulmaya çalıştığımızı düşünelim. Çözümüne ulaşmak için standart matematiksel işlemler yapmak dışında aşağıdaki görsellerden de yararlanılabilir.



Şekil 2.6.3. Görsel İspat

Görsellerden hareketle $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ eşitliğine ulaşılır (Brown, 2004).

2.6.4. Örnek 4: Lakatos'un 'Euler Formülü' Üzerinden Yaptığı Düşünce Deneyi

En klasik matematiksel düşünce deneylerinden biri de Lakatos'un 1976 yılında yayımladığı '*Kanıtlar ve Çürütmeler*' adlı kitabında hayali bir sınıf ortamında kurduğu diyaloglar ile gerçekleştirdiği Euler formülü üzerine olanıdır. Kitabın çıkış noktası V köşelerin sayısı, E ayrıtların sayısı ve F yüzlerin sayısı olmak üzere çok yüzlüler için geçerli olan $V - E + F = 2$ formülüdür. Lakatos'un yaptığı düşünce deneyi bu bölüme sığamayacak kadar geniş olduğundan detaylı tartışması burada yapılmamakla beraber ilgili kitabın okunması tavsiye edilmektedir.

Literatür incelendiğinde, matematiksel düşünce deneyi örneklerinin yanı sıra her matematiksel düşünce tasarımı matematiksel düşünce deneyi olmak zorunda değildir. Örneğin; Bendegem (2003), İngiliz teolog ve eğitimci Edwin Abbott'un 1884 yılında yazmış olduğu matematiksel bir kurgu ile toplumsal sorunları ele aldığı romanı '*Düzülke*'nin matematiksel düşünce deneyine bir örnek olamayacağını belirtmektedir. Kitap okuyucuya noktaülke (boyutsuz olan noktaların yaşadığı ülke), çizgiülke (düz çizgilerin yaşadığı doğrusal ülke), düzülke (kare, üçgen, daire gibi iki boyutluların yaşadığı ülke) ve uzayülke (küp, prizma, küre gibi üç boyutluların yaşadığı ülke) isimlendirmeleri ile sıfır, bir, iki ve üç

boyutlu dünya tasvirleri sunmakta ve böylece boyut kavramının daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır. Fakat bu roman matematiksel bir ispatı sezmemize yardımcı olmadığı ya da sahip olduğumuz matematiksel bilgiyi geliştirmede için matematiksel düşünce deneyi tanımına uygun düşmemektedir.

2.7. Matematik Tarihi ve Felsefesinde Düşünce Deneyi

Matematiksel bilginin epistemolojik yapısı hakkında süregelen tartışmalar düşünce deneyi konusunun da doğrudan merkezinde yer almaktadır. Geleneksel matematik felsefesinde mutlakçı görüşe sahip matematikçiler matematiksel bilginin kesin ve yanlışlanamaz olduğu inancını savunmaktaydılar. En büyük güç aldıkları nokta da günümüzden 2500 yıl önce Öklid'in *Elementlerinde* kurduğu aksiyomatik yapıydı. Öklid *Elementlere* postulat ve aksiyom isimlerini verdiği, doğruluklarının şüphe götürmediğini düşündüğü bir takım varsayımları kabul ederek başlar ve bu varsayımlardan hareketle sadece tümdengelim, yani mantıksal çıkarım yoluyla geometrideki teoremleri inşa edebilme becerisi gösterir. Bu aksiyomların mutlak doğru ve tümdengelim de yeni bilgiye ulaşmanın tek yöntemi olarak düşünüldüğü dönemlere kadar geometri gibi aritmetiğe ve cebire de temel arama, başka bir deyişle aksiyomatik bir zemine oturtma, geleneksel matematik felsefesinin ana uğraşı olmuştur. Fakat Öklid-dışı geometrilerin bulunması ve Gödel (1914)'in eksiklik teoremi mutlakçı görüşe sahip matematikçilerin temel arama arayışlarını kökten sarsmıştır (Gür, 2011).

Matematik dünyasında yaşanan bu kırılmalar matematiğin doğasını anlamak için farklı yollar izlenmesi gerektiği sonucunu doğurmuştur. Böylelikle mutlakçılığın karşısına Lakatos (1976)'un öncülük ettiği yarı-deneysellik görüşü çıkmıştır. Bu görüşe göre matematikte mükemmellik ve kesinlik arayışı yoktur. Matematik tarihten ve kültürden bağımsız değildir ve bununla bağlantılı olarak insan ürünü olan matematiğin hatalı olabileceği düşüncesi benimsenir. Matematiksel bilgi zaman ile etkileşimli olarak yenilenmekte, evrilmekte ve gelişmektedir. Bu bağlamda matematik felsefesinde düşünce deneyi teriminin Lakatos'un doktora tezinin genişletilmiş versiyonu olan '*Kanıtlar ve Çürütmeler*' adlı kitabı ile popüler nitelik kazanmaya başladığı söylenebilir (Glas, 1999). Szabo (1958, akt. Lakatos, 2017) düşünce deneyinin ilkel bir matematiksel kanıt olarak düşünülebileceğini ve Öklid-öncesi Yunan matematiğinde hüküm sürdüğünü öne sürmektedir. Tarih boyunca da çoğu matematikçinin birçok teoremi önce sezdiğini, sonra

ispatlamaya giriştiğini belirtmekte ve bunu örneklendirmektedir². Lakatos'un ise bir yöntem olarak gördüğü düşünce deneyinde teoremler biçimsel bir şekilde ispatlanmak yerine açıklanmaya ve bu açıklamalara da karşı örnekler bulunmaya çalışılır. Uygun karşı örnekler bulunamadığında da teoremin doğruluğunun belirtilen tanımlara ve varsayımlara bağlı olduğu söylenir (Baki, 2014). Bu yönüyle Lakatos'un matematik felsefesinde, matematiksel bilginin bilimsel bilgiye yaklaştığı görülür (Glas, 1999). Ayrıca, mutlakçı görüşün benimsediği matematiksel bilginin ispatlandığı takdirde doğru olduğu görüşü, yarı-deney selci görüşte yerini matematiksel bilginin asla ispatlanamayacağı, her zaman yanlışlanabilirlik potansiyeli olduğu fikrine bırakmıştır (Baki, Matematik tarihi ve felsefesi, 2014).

Lakatos'un yarı-deney selci görüşünün matematik çevrelerince destek bulması, mutlakçı görüşün geleneksel inançlarını yıkmaya ve onu evrilmeye zorlaması ile düşünce deneyi kavramı da matematiksel düşünmenin etkili yöntemlerinden biri olarak kabul görmeye başlamıştır.

2.8. Düşünce Deneyinin Eğitim Alanında Kullanılması ve Eğitim Alanına Katkıları

Düşünce deneylerinin eğitimde kullanımından bahseden ilk kişi ise yine düşünce deneyleri ile ilgili süregelen tartışmaları başlatan isim olan Ernst Mach'tır. Eğitim amaçlı kullanılan düşünce deneyleri literatürde pedagojik düşünce deneyleri olarak da adlandırılmıştır (Klassen, 2006). Düşünce deneylerinin fen bilimleri alanında popüler olmasının doğal sonucu olarak bu konu fen bilimleri eğitim literatüründe de daha fazla çalışılmıştır. Düşünce deneylerinin fen eğitimine entegre edilmesinin öğrencilerin öğrenme süreçlerine olası yansımaları çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Acar ve Gürel (2016) çalışmasında kavramları günlük hayat bağlamında düşünebilmelerine imkan veren düşünce deneyinin kavram gelişimini desteklediği sonucuna varmıştır. Bademci ve Sarı (2014) düşünce deneyi yoluyla öğrencilerin kavram yanlışlarını giderebildiği ve yeni kavramlar inşa edebildiğini gözlemlemiştir. Ayrıca, Reiner (1998) düşünce deneyinin bir bilim insanının keşif süreçlerini sınıfa taşıdığını belirtirken, Karakuyu ve Tortop (2009) ise düşünce deneyinin öğrencilerin mantıksal düşünme becerilerini, hayal güçlerini ve yaratıcılıklarını geliştirdiğini iddia etmektedir.

² Szabo bu düşüncesine Chgrysiippus 'un Cleanthes'e "Bana sadece kuramları yolla, ben de ispatlarını yapayım" yazmasını, Gauss'un "Uzun süredir sonuçlarım elimde, fakat hala onlara nasıl eriştiğimi bilmiyorum", Riemann'ın "Sadece teoremlerim olsaydı! Sonra kanıtları kolaylıkla bulurdum" demesini ve Polya'nın *Matematik ve Akla Yakın Muhakeme* adlı kitabında "Bir matematiksel teoremi kanıtlamadan önce tahmin etmek zorundasınız" yazmasını delil olarak sunmaktadır (Lakatos, 2017).

Gilbert ve Reiner (2000) yaptıkları araştırmalarında düşünce deneylerinin fen eğitime katkılarını iki ana başlık altında toplamıştır. Birincisi, düşünce deneylerinin öğrencilerin kavram gelişimini desteklemesidir. İkincisi ise düşünce deneylerinin öğrencinin bilimin entelektüel ve sosyal bir eylem olarak geliştiğinin ve evrildiğinin farkına varmasına bulunduğu katkıdır.

Acar ve Gürel (2016) ise düşünce deneylerinin eğitim sürecine katkılarını şu şekilde özetlemiştir:

Düşünce deneyleri öğrencilerin kendi deneyimlerinden yararlanarak, kendi içsel süreçlerini geliştirerek ve aktif katılımlarını sağlayarak öğrenmelerine katkıda bulunabilecek bir araçtır. Öğrenciler problem çözerken formül ezberlemek ve ileri derecede matematiksel işlem kullanmak yerine düşünce gücüyle var olan durumu ele alıp zihinsel işlemler yaparak, daha başarılı olabilirler. Öğrenciler düşünce deneyi yaparak; pratik düşünme, yaratıcı düşünme, tasarım yapabilme yeteneği kazanabilir; hayal güçlerini geliştirebilirler. Düşünce deneyi yapmak; öğrencilere yapıcı, eleştirel ve bilimsel düşünme yeteneği kazandırır. Düşünce deneyi yaparken öğrenciler hayal güçlerini kullanırlar, deneyi kendi zihinsel dünyalarında işletirler ve pratik düşünürler.

Yukarıda belirtilen becerilerin geliştirilmesinde matematiksel düşünce deneylerinin de kullanılabileceğini söylemek akla uygun gelir. Buna inanmamız için iki sebep yeterli gelecektir. Birincisi, bilimsel düşünme ile matematiksel düşünme arasında her ne kadar farklılıklar yok değilse de iki düşünme yöntemi temelde benzerdir (Yıldırım, 2018). Ayrıca, Yıldırım (2018) her iki düşünme yönteminin de benzer şekilde iki aşamadan oluştuğunu ifade etmektedir:

- 1) Sorunu açıklayıcı ya da giderici çözümü bulma veya oluşturma,
- 2) Bulunan ya da oluşturulan çözümün doğruluğunu yoklama.

İki düşünme yöntemini de ne tümüyle indüktif (tümevarımlı) ne de dedüktif (tümdengelimli) kabul edebiliriz. Çünkü iki düşünme yönteminde hem dedüktif hem de indüktif akıl yürütme kullanılır, dolayısıyla iki düşünme yöntemini de hipotetik-dedüktif olarak nitelendirmek daha uygun olur (Yıldırım, 2018). İkincisi, bahsedilen alanlar farklı olsa da iki alandaki düşünce deneyleri de sağladıkları temel özellikler bakımından benzerdir (Brown, 2004; Norton, 1996).

2.9. Düşünce Deneyi ve Mantıksal Düşünme

Gardner'ın çok boyutlu zeka kuramında da yer alan mantıksal zeka ya da mantıksal düşünme becerisi bireyin sayıları etkili kullanma, problemlere bilimsel çözümler üretme, kavramlar arası ilişkileri ayırt etme, sınıflama, genelleme yapma, matematiksel formülle ifade etme, hesaplama, hipotez kurma, test etme, benzetmeler yapma gibi davranışları gösterebilme yeteneğidir (Demirel, 2002). Başerer ve Duman (2018) ise bir düşünme biçimi olan bilimi, matematiği, hatta felsefeyi anlamak için mantığı bilmenin gerekli olduğunu çünkü mantığın bilimsel ya da matematiksel düşünmenin zorunlu bir aracı olduğunu ifade etmektedir. Mantıksal düşünme becerisi üzerine yapılan çalışmalar bu becerinin öğrencilerin başarısında ve kavram yapılandırmalarında önemli rolü olduğunu ortaya koymuştur (Lawson, 1992; Tobin ve Capie, 1981). Öğrencilerin karşılaştıkları problemlerin çözümünde de mantıksal düşünme stratejilerinden yararlanmak zorunda oldukları bilinmektedir (Linn, Pulos ve Gans, 1981). Bunlardan hareketle, problem durumları bağlamında ortaya çıkan bir düşünce dizisi olarak ifade ettiğimiz düşünce deneyinin merkezinde mantıksal düşünmenin yattığı açıkça görülmektedir.

2.10. Haeckel'in Yineleme (Recapitulation) Teorisinin Eğitim Bilimine Uyarlanması

Keiser (2004), Haeckel'in 1874 yılında ortaya attığı yineleme (recapitulation) teorisini³ eğitim araştırmalarına uyarlamıştır. Bu uyarlamada yazar, bireyin bilgiyi kendi zihninde geliştirip evrimleştirmesi ile bilginin tarihsel süreçteki gelişimi ve evrimi arasındaki ilişkiye odaklanır. Ontogeni bir fikrin bireyin kendi zihninde gelişimi iken filogeni ise bu fikrin tarihsel gelişimi olarak düşünülür. Bu bağlamda, öğrencilerin kavramları yapılandırma süreci ile bu kavramların tarihsel gelişimi arasında bir paralellik mevcuttur. Aynı paradigma öğrencilerin yaptıkları düşünce deneyinin tasarlama ve yürütme süreçleri ile bu düşünce deneyinde sezilecek ispat ya da kavramın tarihsel arka planının karşılaştırılmasında da gözlemlenebilir. Bilim adamlarının kendinden önceki bilim adamlarının geliştirip bir yere kadar getirdiği bir kavramı daha da geliştirmesi ya da çözümünü bir yere kadar getirilmiş bir problemin çözümüne kalınan yerden devam etmesi gibi deneyimledikleri sürecin aynısını o kavram ya da problem ile uğraşan bir öğrencinin de deneyimlemesi beklenebilir. Bu sürecin onların matematiğin ve bilimin gelişim ve evrim süreçlerine olan farkındalıklarını artıracığı söylenebilir.

³ Yineleme teorisi ontogeni ve filogeni arasındaki ilişkiyi açıklar. Teoriye göre ontogeni (bireyoluş) filogeniyi (soyoluş) tekrarlar. Yani bir canlının embriyo dönemindeki gelişimi, atalarının evrimsel gelişimini tekrarlar.

2.11. Matematiksel Kavramların Tarihçesi

Bu kısımda yalnızca çalışmanın 2. alt probleminin değerlendirilmesi için gerekli olan binom ve sonsuzluk kavramlarının tarihçesi hakkında bilgi sunulmuştur.

2.11.1. Olasılık ve Binom Dağılımı Kavramlarının Tarihçesi

İsviçreli matematikçi Jakob Bernoulli'nin ölümünden sonra yayımlanan 1713 tarihli bir kanıtında iki sonuçlu (gerçekleşmek/gerçekleşmemek) bir deneyin bağımsız olarak n defa tekrarlanışında bunun k defa gerçekleşme ihtimalinin $(p + q)^n$ ifadesinin binom katsayıları ile ilişkisini belirlemiştir (Routledge, 2020). Bernoulli'nin bu ilişkiyi bulmasında şüphesiz olasılığın yeni bir matematik alanı olarak kuramsallaşması ve dönemin matematikçileri arasında tartışılmaya başlanmış olmasının etkisi vardır. Olasılık kuramının ortaya çıkışı ile ilgili şu anlatı mevcuttur. Chevalier de Mere olarak da bilinen Antoine Gombaud, Blaise Pascal ile beraber gerçekleştirdiği bir fayton yolculuğu esnasında ona bir şans problemi yöneltir. Pascal bu ve benzeri problemlere yanıt vermeyi başarır. Ancak kimi konularda tartışmak üzere Pierre de Fermat ile mektuplaşmaya başlar. Olasılık kuramının temelleri de bu mektuplarda atılır. Fakat olasılığın bu dönemde kuramsallaşmış olması onun daha önceki dönemlerde üzerine çalışılmaların olmadığı, varlığının bilinmediği bir kavram olduğu anlamına da gelmemektedir⁴. Nitekim 15. yüzyılda Fra Luca Bartolomeo de Pacioli, 16. yüzyılda Gerolamo Cardano'nun yaptığı çalışmalar olduğu bilinmektedir. Fakat bu ve ismini zikretmediğimiz diğer birçok çalışma olasılığı bir matematik alanına dönüştürecek zenginliğe sahip değildiler (Korkmaz ve Avar, 2019). Bilinen tarihte olasılık kavramını dayandırabileceğimiz belki en eski dönem Antik Yunan dönemidir. Aristo'nun kitaplarında karşımıza çıkan kavramın şimdiki anlamından oldukça uzak ve matematiksel bir anlamdan yoksun olduğunu söylemek zor değildir (Durusoy, 2004). Matematiksel bir anlam kazanmaya başlamasının ise bölüştürme ve şans problemleri ile gerçekleştiği söylenebilir. Örneğin; bilimde Arap üstünlüğünün olduğu dönemlerde çokça uğraşılan daha sonra batı kitaplarına da geçmiş bir bölüştürme sorusu şöyledir: “Bir oyuncu 2, diğeri 1 oyun daha kazanacak olursa ödülü kazanmaktadır. Oyun bir kaza sonucu burada kesilirse, ödül nasıl paylaştırılmalıdır?” (Güzel ve Ünal, 2015) Bu bağlamda, bu tür problemlere çözüm üretmek ile başlayıp kombinatorik hesaplama yöntemleri daha ötelere taşınan olasılık kuramının 17. yüzyılda bir matematik dalına dönüştüğü görülmektedir. Doğu matematiğinde karşılaşılan

⁴ Olasılık kuramının kurucuları sayılan Pascal ya da Fermat'ın bulmadığı, çok sezgisel olan bu klasik olasılık formülü $P(A) = \frac{s(A)}{s(N)}$ belki de düşünce tarihi kadar eskidir (Çapar, 2014).

aritmetik üçgen de (yaygın şekilde Pascal üçgeni olarak bilinir) bu dönemde kombinatorik işlemler ile yeniden tanımlanmıştır (Karaçay, 2006; Baki, 2014).

2.11.2. Sonsuzluk Kavramının Tarihçesi

Sonsuzluk düşünce tarihi boyunca gizemini koruyan ve anlaşılması güç bir kavram olmuştur. Bu yüzden her disiplinin kendi sonsuzluk kavramını oluşturduğunu söylemek de zor olmaz. Örneğin felsefecilerin bahsettiği sonsuzluk ile fizikçilerin ya da matematikçilerin bahsettiği sonsuzluklar arasında benzerliklerin yanı sıra farklılıkları olacaktır (Çevik, 2019). Burada sonsuzluk matematiksel bir kavram olarak tarihi süreci ile birlikte irdelenecektir. Bu kavramın matematik zemininde tartışılmasını ilk olarak gördüğümüz Antik Yunan’da bu tartışmaların paradoksları da beraberinde getirdiği söylenebilir. Bu bağlamda Elea’lı Zeno’nun paradoksları incelenmelidir⁵. Zeno’nun paradoksları sezgisel olarak bilinen limit kavramının formel tanımlamasının yapılabildiği 19. yüzyıla kadar paradoks olarak kalmıştır (Aztekin, 2015; Çevik, 2019). Antik Yunan döneminde sonsuzluk kavramına dair yapılan en önemli tanımlardan biri de Aristoteles’e aittir. Aristoteles iki tür sonsuzluktan bahsetmektedir: fiili ve potansiyel sonsuzluk. Aristoteles’e göre fiili sonsuz mutlak bir tamamlanmışlıktır ve kabulü ortaya atılan paradokslara cevap verememesi sebebi ile mümkün değildir. Potansiyel sonsuz ise tamamlanmamış fakat sürekli devam eden potansiyel bir süreç olarak görülmelidir. Örneğin; $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$ kümesi kendisi alındığında tamamlanmış yani fiili bir sonsuz olarak edilir. Fakat $0,1,2,3, \dots$ şeklinde giden tamamlanmamış ama sürekli devam eden bir dizi potansiyel sonsuzu barındırır, henüz sonsuz olmasa bile “sonsuz olacak” olandır (Çevik, 2019; Özmantar, 2015). Aristoteles’in sonsuzluk kavramına getirdiği bu yenilikçi bakış matematikçileri 19. yüzyıla kadar etkilemiş ve kavram hakkında o döneme kadar köklü bir değişiklik olmamıştır. Yine de bu doktrine karşı dönem dönem çeşitli argümanlar ortaya atılmıştır. Örneğin; Galileo doğal sayılar kümesi ile doğal sayıların karelerinin kümesi arasında birebir eşleştirmenin mümkün olduğunu ve bunun sonucunda bu iki kümenin eşit sayıda elemana sahip olabileceğini düşünmüştür. Fakat bu fikir Öklid’in Elemanlarındaki “bütün, parçalarından büyüktür”

⁵ Elea’lı Zeno’nun bir paradoksu şöyledir: yarıtancı Aşil ile kaplumbağa bir gün yarışmaya karar verirler. Kaplumbağa Aşil’den çok daha yavaş olduğu için Aşil’in önünden başlar yarışmaya. Burada Zeno Aşil’in kaplumbağayı asla yakalayamayacağını iddia eder. Çünkü kaplumbağayı yakalayabilmesi için Aşil’in önce kaplumbağanın başladığı noktaya erişmesi gerekir. Aşil bu noktaya eriştiğinde ise kaplumbağa biraz daha ileride olacaktır. Şimdi Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya erişmelidir. Aşil kaplumbağanın bulunduğu bu noktaya vardığıdaysa, kaplumbağa biraz daha ileride olacaktır. Çünkü kaplumbağa hiç durmamakta ve devamlı ileri gitmektedir. Bu böyle süreceği için Aşil, kaplumbağaya asla erişemez (Nesin, 2017).

aksiyomu ile çelişmektedir. Galileo buradan hareketle sonsuzluk içeren olguları, sonlular üzerinde geçerli olan ilişkiler ile açıklamanın doğru olmayacağı fikrine varmıştır. Bu durum literatürde “Galileo paradoksu” olarak bilinmektedir. Sonsuzluk kavramının paradokslardan uzak matematiksel zemine oturtulması ve kabulü 19. yüzyılda George Cantor’un özgün çalışmaları sonucunda olmuştur. O döneme kadar bütün sonsuz kümeler denk kabul edilirken bu çalışmalar sonsuzluğun matematiksel olarak kıyaslanabilmesi imkanını doğurmuş ve iki sonsuz küme arasında en az bir 1-1 ve örten fonksiyon bulunabildiği durumda bu iki kümenin birbirine denk (kardinalitelerinin aynı), aksi durumda denk olmadığı ortaya konmuştur.



BÖLÜM III: YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeline, çalışma grubuna, veri toplama araçlarına, verilerin toplanma sürecine ve analizine yer verilecektir.

3.1. Araştırma Modeli

Bu araştırma 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünce deneyi yapma süreçlerinin incelendiği bir karma yöntem araştırmasıdır. Karma yöntem araştırmaları nicel ve nitel yöntemleri birlikte kullanmanın bu yöntemleri tek başına kullanmaya kıyasla araştırma probleminin daha iyi anlaşılmasını sağlayacağını varsaymaktadır. Daha detaylı şekilde ifade edilirse karma yöntem araştırmaları nicel verilerden elde edilecek istatistiksel çıktılar ile nitel verilerden elde edilecek sürece dair çıktıları harmanlama ve birlikte değerlendirebilme, böylece araştırılan problemin daha bütüncül bir resminin çıkarılmasına imkan sunmaktadır (Creswell, 2012).

3.2. Çalışma Grubu

Bu araştırmaya İstanbul ilinin Beyoğlu ilçesinde bulunan bir Özel Anadolu Lisesinin 10. ve 11. sınıflarında öğrenim gören öğrencileri gönüllü olarak katılmıştır. Araştırmaya başlamadan önce katılımcılara araştırmanın konusu ve nasıl yürütüleceği hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca, katılımcıların kimliğinin gizli kalması için her biri farklı bir isimle adlandırılmıştır.

Araştırmanın pilot uygulaması olasılıksız örnekleme yaklaşımının bir türü olan uygun örnekleme kullanılarak seçilen 10. sınıfta öğrenim gören 21 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Ana uygulamanın çalışma grubunu belirleyebilmek için ise öncelikle yine uygun örnekleme yöntemi ile 11. sınıfta öğrenim gören 20 öğrenci seçilmiştir. Seçilen 20 öğrenciye Tobin ve Capie (1981) tarafından geliştirilen ve Türkçeye Geban ve arkadaşları (2010) tarafından uyarlanan 10 soruluk Mantıksal Düşünme Yeteneği Testi (EK 1) uygulanmıştır. Bu uygulamanın ardından araştırmanın ana uygulamasının nitel yapısına uygun olarak amaçlı örnekleme yaklaşımının bir türü olan maksimum çeşitlilik örneklemesi kullanılarak (Creswell, 2012) mantıksal düşünme becerilerine göre iyi, orta ve zayıf olmak üzere her kategoriden 2 öğrenci olacak şekilde seçilen 5 i kız, 1 i erkek ve yaş ortalamaları 16,5 olan toplamda 6 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Bu öğrencilerin yaşları ve Mantıksal Düşünme Yeteneği Testinden aldıkları puanlar Tablo 3.2. de verilmiştir.

Tablo 3.2. Öğrencilerin Mantıksal Düşünme Yeteneği Puanları

Öğrenci	Aslı	Aylin	Bahar	Begüm	Cansu	Cihan
Yaş	17	17	16	16	16	17
Puan (10 üzerinden)	9	9	7	6	3	3

Çalışma grubunun 10. ve 11. sınıf düzeyinden seçilmesinin ardındaki sebepler bu düzeylerdeki öğrencilerin 9. sınıf düzeyindeki öğrencilere göre daha fazla matematik konusu işlemiş olmaları ve 12. sınıf düzeyindeki öğrencilerin üniversiteye giriş sınavı sebebi ile araştırmaya katılım göstermelerinde yaşanabilecek olası sorunlardır. Görüşmelerde veri toplanması noktasında yaşanılacak sorunu asgari düzeyde tutabilmek için seçilen öğrencilerin kendini ifade edebilen, iletişimi kuvvetli olan öğrenciler olmasına dikkat edilmiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları

Araştırmada 2 veri toplama aracı kullanılmıştır. Bunlardan ilki örneklem seçimi için kullanılan Tobin ve Capie (1982)'nin geliştirdiği ve Geban, Aşkar ve Özkan (1992)'in Türkçeye uyarladığı “Mantıksal Düşünme Yeteneği Testi”dir. Testin Cronbach Alfa güvenirlik katsayısı 0,77 olarak hesaplanmıştır. Bu test değişkenleri kontrol etme, orantısal düşünme, olasılıklı düşünme, ilişkisel düşünme ve birleşik düşünme olmak üzere beş mantıksal işlemi ölçen 10 adet maddeden oluşmaktadır. İlk 8 madde iki aşamalıdır. Her maddenin ilk aşasında doğru cevabın işaretlenmesi, ikinci aşamasında ise verilen cevabın neden verildiğine dair açıklamalardan birinin işaretlenmesi beklenmektedir. Her maddede iki aşama da doğru olarak işaretlenirse tam puan verilmekte, herhangi bir aşamanın yanlış olması durumunda ise puan verilmemektedir. Son iki soruda ise öğrencilerden cevaplarını yazmaları istenmektedir. Bu iki soruda cevaplar tamamen doğru ise tam puan verilmekte, cevap eksik ise puan verilmemektedir. Test her bir maddesi 1 puan olmak üzere toplamda 10 puanlıktır. Testten alınan 1-3 puan öğrencinin mantıksal düşünme becerisinin zayıf, 4-7 mantıksal düşünme becerisinin orta düzey, 8-10 ise mantıksal düşünme becerisinin iyi düzeyde olduğunu göstermektedir.

İkinci veri toplama aracı ise 11. sınıf öğrencilerin matematiksel düşünce deneyi süreçlerinin incelenmesi için geliştirilen 8 açık uçlu problemten oluşan “Matematiksel Düşünce Deneyi Testi”dir (EK 2).

3.4. Verilerin Toplanması

Çalışmanın pilot uygulamasının tamamı ve ana uygulamanın veri toplama süreci bu başlık altında verilecektir. Ana uygulama sonucunda elde edilen verilerin analizi ise sonraki başlığın konusu olacaktır. Tablo 3.4.1. de veri toplama süreci özetlenmektedir.

Tablo 3.4.1. Veri Toplama Süreci

Süreç Basamakları	Açıklama
Problem havuzunun oluşturulması	Literatürden 10 problem
Problem havuzunun daraltılması	Danışman öğretim üyesinin görüşleriyle 10 problemden 8 probleme düşürülmesi
Uzman görüşü	Problemlerin akademik düzey, ifade ediliş ve düşünce deneyi öğelerinin sınanabilirliği yönlerinden uygunluğu hakkında görüş alınması
Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin oluşturulması	8 problem
Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Rubriklerinin oluşturulması	Bademci ve Sarı (2014)’den esinlenerek
Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin uygulanması	10. sınıfta öğrenim gören 21 öğrenci ile
Pilot Uygulamanın Nicel Analizi	Madde güçlük analizi, madde basıklık ve çarpıklık değerleri, puanlayıcılar arası Pearson korelasyonu, Cronbach Alfa güvenirlik katsayısı
Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin uygulanması	11. sınıfta öğrenim gören 6 öğrenci ile
Birebir yarı-yapılandırılmış görüşmeler	Her oturum sonrasında 5-15 dk arasında
Nitel veri analizi	Araştırmanın ilk alt problemi için içerik, ikinci alt problemi için betimsel analiz

Araştırmacı tarafından ilgili literatürün taranması ile 2019-2020 eğitim öğretim yılında 10. sınıf Anadolu Lisesi öğrencilerinin mevcut Matematik dersi öğretim programında 10. sınıfın birinci döneminin sonuna kadar olan konuları kapsayan, çözüme ulaşması için düşünce deneyi yapmasını gerektirecek bir problem havuzu oluşturulmuştur. Bu havuz danışman öğretim üyesi ile yapılan görüşmeler sonucunda öğrenci düzeyi için zor olacağı düşünülen iki tanesi çıkarılarak 8 probleme indirgenmiştir. Daha sonra bu 8 problemin ifade ediliş, akademik düzeye uygunluk ve düşünce deneyi öğelerinin sınanabilirliği yönlerinden uygunluğu için Uzman Görüş Formu (EK 3) hazırlanarak İstanbul’da bir devlet üniversitesinin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde görev yapan 2 öğretim üyesinin görüşlerine sunulmuştur. Danışman öğretim üyesinin görüşlerinin de uzman görüşü olarak değerlendirilmesi nedeniyle iki öğretim üyesinin görüşlerinin alınması yeterli bulunmuştur. Görüşleri alınan öğretim üyelerinin cinsiyet, unvan ve mesleki deneyimleri Tablo 3.4.2. de verilmiştir.

Tablo 3.4.2. Görüş Alınan Uzman Profilleri

Öğretim Üyeleri	Cinsiyet	Ünvan	Mesleki Deneyim (yıl)
1	Kadın	Doç. Dr.	12
2	Kadın	Doç. Dr.	10

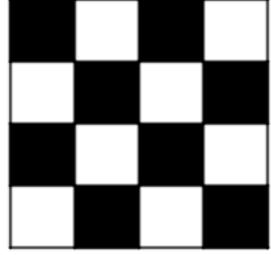
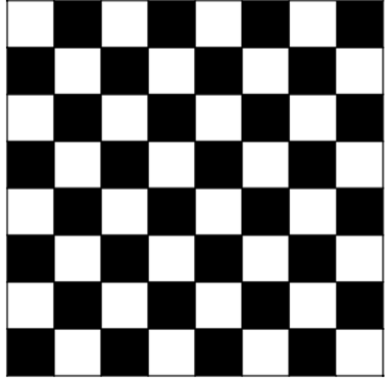
Öğretim üyelerinin değerlendirmelerindeki uyum yüzdesi ise Miles ve Hubermann (1994)’ın belirlediği Uzlaşma Yüzdesi = $[(\text{Görüş Birliği}) / (\text{Görüş Birliği} + \text{Görüş Ayrılığı})] \times 100$ formülü ile hesaplanmıştır. İki kodlama arasındaki uyum için yukarıda verilen formüle göre hesaplanan uzlaşma yüzdesi 87,5 olup bu ise Miles ve Hubermann (1994)’a göre kabul edilecek uyum yüzdesi kapsamındadır. Uzmanların uyum yüzdesi Tablo 3.4.3. de sunulmuştur.

Tablo 3.4.3. Uzmanların Görüş Birliği

Madde Sayısı	8
Görüş Birliği Sağlanan Maddeler / (Sayısı)	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 / 7
Görüş Birliği Bulunmayan Maddeler / (Sayısı)	4 / 1
Uzlaşma Yüzdesi	87,5

Uzmanların uyuşmadığı durumlar göz önünde bulundurularak istenilen düzenlemeler yapılmış ve test pilot uygulamaya hazır hale getirilmiştir. Uzmanların isteği üzerine yapılan düzenleme okuyucuya fikir vermesi açısından Tablo 3.4.4. örneklendirilmiştir.

Tablo 3.4.4. Matematiksel Düşünce Deneyi Testi Problemlerinde Yapılan Düzenlemelere Örnek

Düzenlemeden Önce	
4x4 lik bir satranç tahtasının en üst sol karesine bir tavla pulu koyduğunuzu düşünün. Bu pulla bir kare aşağı, yukarı, sağa ya da sola hamle yapabiliyorsunuz. Her kareden yalnızca bir kere geçerek pulu tahtanın en alt sağ karesine götürebilir misiniz? Evet ise nasıl, hayır ise neden?	
Düzenlemeden Sonra	
8x8 lik bir satranç tahtasının en üst sol karesine bir tavla pulu koyduğunuzu düşünün. Bu pulla bir kare aşağı, yukarı, sağa ya da sola hamle yapabiliyorsunuz. Her kareden yalnızca bir kere geçmek şartıyla pulu tahtanın en alt sağ karesine götürebilir misiniz? A) Evet B) Hayır Açıklama:	

Bu düzenlemelerden sonra uygun görülen bu 8 problem durumunu içeren Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testi 10. sınıfta öğrenim gören 21 gönüllü öğrenciye bireysel olarak uygulanmıştır. Uygulama, testin her problemi için 30 dakikalık sürenin öğrencilerin düşünceleri ve çözümlerini kağıda aktarabilmeleri açısından yeterli geleceği düşüncesi ile 4 farklı oturumda uygulanmıştır. Uygulama her bir oturumda 2 problem durumu yöneltmiş 60 dakikalık oturumlar halinde tamamlanmıştır. Uygulama sürecinde öğrencilerden çözümlerini açık bir şekilde kendilerine verilecek olan çalışma kağıtlarına yazmaları istenmiştir. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinde öğrencilerin verdiği cevaplar Bademci ve Sarı (2014)'dan esinlenerek hazırlanan bu teste ait dereceli puanlama anahtarına (rubrik) (EK 4) göre değerlendirilmiştir. Bu değerlendirme iki farklı araştırmacı tarafından

doğru, yarı doğru ve yanlış olmak üzere sırasıyla 2, 1 ve 0 şeklinde derecelendirilerek nicel verilere dönüştürülmüştür. Bu süreç 3.4.1. başlığında detaylandırılmıştır.

3.4.1. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin Madde Güçlük Analizi

Bir testin ölçülebilen yani puanlanabilen en küçük bileşenine madde denir (Güler, 2011). Başka bir ifadeyle, ölçme teorisinde her bir soru için kullanılan terimdir. Bir testin niteliği testi oluşturan maddelerin niteliğine bağlıdır. Bu niteliklerden ikisi maddenin güçlüğü ve varyansıdır. Maddenin güçlüğü belirlemeye yarayan güçlük indeksi, ölçme aracındaki maddenin kolay veya zor olup olmadığını gösterir. Güçlük indeksi 0 ile 1 arasında değer alır ve güçlük indeksi 0 a yaklaştıkça maddenin kolay, 1 e yaklaştıkça maddenin zor olduğu yorumu yapılabilir. Ölçme aracındaki maddelerin güçlük dağılımlarının normal olması beklenir. Bir test içerisinde hem kolay, hem orta, hem de zor güçlükte maddeler barındırmalıdır. Dolayısıyla, ideal bir testin güçlük indeksinin yani, testi oluşturan maddelerin güçlük indekslerinin aritmetik ortalamasının 0,50 olması beklenir (Hasançebi, Terzi ve Küçük, 2020). Madde varyansı, ölçme aracını alan cevaplayıcıların bir soruya verdiği cevaplar bakımından ne kadar çeşitlik gösterdiklerini belirtir. 0 ile 1 arasında değer alır. İdeal bir testin varyansı da, yani testi oluşturan maddelerin varyanslarının aritmetik ortalaması da 0,25 olmalıdır (Tan, Kayabaşı ve Erdoğan, 2002).

Çalışmanın pilot uygulamasında kullanılan Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin rubriğine göre puanlandırılmasının sonucunda elde edilen madde güçlük indeksi ve madde varyansı hesaplamaları Tablo 3.4.1.1. de verilmiştir.

Tablo 3.4.1.1. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testine Ait Madde Güçlük İndeksleri ve Varyansları

Madde	p	q	p.q
1	0,7857	0,2143	0,1684
2	0,5238	0,4762	0,2494
3	0,3571	0,6429	0,2296
4	0,6905	0,3095	0,2137
5	0,6190	0,3810	0,2358
6	0,2143	0,7857	0,1684
7	0,5238	0,4762	0,2494
8	0,1905	0,8095	0,1542
Ortalama	0,4881	0,5119	0,2086

p : maddeyi doğru cevaplandırma oranı (madde güçlük indeksi)

q : maddeyi yanlış cevaplandırma oranı

p.q : madde varyansı

Tabloda da görüldüğü gibi Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin güçlük indeksi 0,4881 ve varyansı 0,2086 olarak hesaplanmıştır. Buna göre, testte kullanılan soruların amaca uygun ve testin orta güçlükte olduğu söylenebilir (Tan, Kayabaşı ve Erdoğan, 2002).

3.4.2. Pilot Uygulamanın Güvenirliği ve Geçerliği

Veri toplama araçlarında aranılan temel iki ölçüt güvenilirlik ve geçerliktir. Nicel araştırmalar için güvenilirlik, temel olarak ölçümlerin duyarlılığı, tutarlılığı veya tekrar edilebilirliğidir (Karaca, Yurdabakan, Çetin, Nartgün, Bıçak ve Gömleksiz, 2010). Yürütülen çalışmalarda aynı süreçlerin izlenmesi ile benzer sonuçlara varılması beklenir. Yani, başka bir araştırmacı tarafından bulunan bir sonucun başka bir araştırmacı tarafından da bulunabilmesi gerekir (Yılmaz, 2015).

Güvenirliğin sağlanması için, çalışmanın pilot uygulaması araştırmacı tarafından yürütülmüş ve Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin öğrencilere uygulanması esnasında öğrencilerin araştırmacıdan bir işaret alma olasılığının ortadan kaldırılması için araştırmacı, katılımcı olmayan gözlemci rolünü üstlenmiştir. Öğrencilerin Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testine verdikleri cevapların dereceli puanlama anahtarı ile araştırmacı tarafından puanlandırılmasının yanında örneklemin yaklaşık %20 sine tekabül edecek şekilde rastgele seçilen 5 öğrencinin cevapları aynı zamanda matematik eğitimi alanında doktorasını yapan bir başka araştırmacı tarafından da puanlandırılmıştır. Öğrencilerden toplanan verilerin normalliği her madde için basıklık ve çarpıklık değerlerine bakılarak kontrol edilmiştir. Basıklık ve çarpıklık değerlerinin -1,5 ile 1,5 arasında olması verilerin normal dağıldığını söylemek için yeterlidir (Tabachnick ve Fidell, 2013). Verilen madde bazlı basıklık ve çarpıklık değerleri Tablo 3.4.2.1. de verilmiştir.

Tablo 3.4.2.1. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testine Ait Madde Basıklık ve Çarpıklık Değerleri

Maddeler	Kurtosis (Basıklık)	Skewness (Çarpıklık)
1	0,652	-1,464
2	-1,040	-0,077
3	-1,078	0,576
4	-1,073	-0,876
5	0,027	0,200
6	-0,394	0,662
7	-1,040	-0,077
8	-1,579	0,763

Basıklık ve çarpıklık değerleri verilerin normal dağıldığını göstermektedir. Normallik varsayımı altında iki değerlendirme arasındaki ilişki Pearson korelasyonu ile hesaplanarak sonuçları Tablo 3.4.2.2. de sunulmuştur.

Tablo 3.4.2.2. Puanlayıcılar Arası Korelasyon

Pearson Korelasyonu ($N = 40$, $\alpha = 0,01$ çift kuyruk)	Puanlayıcı1	Puanlayıcı2
Puanlayıcı1	1	0,927
Puanlayıcı2	0,927	1

N : veri sayısı

α : anlamlılık seviyesi

Pearson korelasyonu değerinin 0,7 ve üzeri olması puanlayıcıların değerlendirmelerinin arasında yüksek düzeyde ilişki olduğunu göstermektedir (Durmuş , Yurtkoru ve Çinko, 2018). Testin güvenilirliği ise Cronbach Alfa katsayısı ile de hesaplanmış ve sonuçları Tablo 3.4.2.3 de sunulmuştur. Sonucun 0,7 olması nedeniyle testin güvenilir olduğu söylenebilir (Durmuş , Yurtkoru ve Çinko, 2018).

Tablo 3.4.2.3. Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin Cronbach Alfa Güvenirlik Katsayısı

Madde Sayısı	8
Cronbach'ın Alfa Güvenirlik Katsayısı	0,701

Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testi için hesaplanan bu katsayının da 0,701 çıkması testin güvenilir olduğuna işaret etmektedir.

Ölçümdeki ikinci temel kavram olan geçerlik ise nicel çalışmalarda ölçmeye dayalı tahminlerin uygunluğuna, anlamlılığına ve kullanılabilirliğine ilişkin kanıtlar toplanmasını gerektirir. Bu ise kullanılan ölçme aracının ölçülmek istenilen özelliğe uygun olduğu, verilerin ölçülmek istenilen özelliği tam olarak yansıttığı ve amaca yönelik kullanılabileceğinin gösterir (Ataseven, 2012). Bu durumda geçerlilik, ölçme aracının ölçtüğü öne sürülen şeyi ne ölçüde ölçtüğünün bir göstergesidir (Punch, 2016). Geçerliği etkileyen faktörler i) ölçümün güvenilirliği, ii) ölçme yöntemi ve madde sayısı, iii) puanlayıcı yanlılığı ve iv) uygulama koşulları olmak üzere dört ana maddede ifade edilebilir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013). Bu bağlamda araştırmanın geçerliğinin; araştırmanın güvenilirliğine, araştırmada uygulanan testin niteliğine (testteki maddelerin sayısı, içeriği ve uygunluğu vb.), puanlayıcının puanlamasına ölçülen özellik dışında farklı değişkenlerin (cevaplayıcının yazısının güzel olmaması, tutum ve davranışları vb.) karışmamasına ve uygulamanın uygun bir zaman ve ortamda (gürültüsüz, fiziksel olarak yeterli vb.) yapılmasına bağlı olduğu söylenebilir.

Bu düşüncelerden hareket edilerek Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinin uygulanmasının geçerliğinin sağlanması için, geçerliğin önkoşullarından biri olan güvenilirliğin sağlanmasının yanında; oluşturulan düşünce deneyi testindeki problem durumlarının 4 tanesi doğrudan literatürden alınmış, 4 tanesi ise literatürden faydalanılarak düzenlenmiştir (Brousseau, 2002; Brown, 2005; Halıcı, 2013; Nesin, 2015; Nesin, 2017; Oral ve Can, 2009; Stuart, Fehige ve Brown, 2018; Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı , 2011). Belirtilen 8 problem durumunun seçim ve düzenlenme süreci boyunca danışman öğretim üyesinin görüşleri alınmıştır. Puanlayıcıların yanlılık ihtimalini ortadan kaldırmak için, puanlayıcıların cevap kağıtlarını ad ve soyad yazılı bölümü kapalı bir şekilde okumaları ve ikinci puanlayıcının katılımcı öğrencileri tanımaması gibi önlemler alınmıştır. Uygulama

esnasında öğrencilerin dikkatlerinin dağılacığı bir ortamın oluşmaması için azami özen gösterilmiştir.

Yapılan nicel analizler sonucunda 8 problemlik Taslak Matematiksel Düşünce Deneyi Testinden herhangi bir problemin çıkarılmasına gerek olmadığı görülmektedir. Bu nedenle taslak olarak öne sürülen test nihai test olarak “Matematiksel Düşünce Deneyi Testi” olarak isimlendirilmiştir.

Araştırmanın yapıldığı okulun idaresinin uygulama süreci için zaman sınırlamasına gitmesi nedeniyle Matematiksel Düşünce Deneyi Testindeki 8 problemten sadece 4 tanesinin uygulanması mümkün olabilmektedir. Uygulanacak olan bu 4 problemin seçimi danışman öğretim üyesinin görüşleri alınarak belirlenmiştir.

Testin öğrencilere her oturumda bir problem durumu için 30 dakika verilecek şekilde 4 farklı oturumda uygulanması kararlaştırılmıştır. Öğrencilerden çözümlerini açık bir şekilde kendilerine verilecek olan çalışma kağıtlarına yazmaları istenmiştir.

Çalışma kağıtlarına yaptıkları çözümlerin daha net anlaşılması ve öğrencilerin düşünsel süreçlerini daha detaylı inceleyebilmek adına aynı gün içerisinde 6 öğrenci ile de 5 - 15 dakika arasında değişen birebir yarı-yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerin süreleri Tablo 3.4.2.4. te verilmiştir.

Tablo 3.4.2.4. Öğrencilerle Yapılan Görüşmelerin Süreleri

Öğrenciler	Görüşme Süresi Problem 1 (dk)	Görüşme Süresi Problem 2 (dk)	Görüşme Süresi Problem 3 (dk)	Görüşme Süresi Problem 4 (dk)
Aslı	5	12	12	14
Aylin	5	8	8	8
Bahar	7	9	8	15
Begüm	10	7	13	11
Cansu	7	5	9	12
Cihan	7	5	5	13

Görüşme soruları öğrencilere görüşme sırasında yazılı olarak verilmiştir (EK 6). Görüşmeler kayıt altına alınmıştır ve istenildiği takdirde araştırmacılarla paylaşılabilir. Ayrıca, Bademci (2008) den düzenlenerek hazırlanan görüşme ve gözlem formu (EK 7) Matematiksel

Düşünce Deneyi Testine ait rubriğe göre araştırmacı tarafından öğrencilerden gelen veriler doğrultusunda görüşme esnasında doldurulmuştur.

Öğrencilerin çözümleri Bademci ve Sarı (2014)'dan esinlenerek hazırlanan bu teste ait dereceli puanlama anahtarına göre (rubrik) (EK 5) analiz edilmiştir. Fikir vermesi açısından bu rubrikten bir örnek Tablo 3.4.2.5. te sunulmuştur.

Tablo 3.4.2.5. Matematiksel Düşünce Deneyi Testi Dereceli Puanlama Anahtarı
Örneği

ORMAN GEZİNTİSİ Her ağaçta en az bir yaprağın bulunduğu bir ormandasınız. Ormandaki ağaçların sayısı herhangi bir ağaçtaki yaprakların sayısından daha fazla. Bu durumda ormandaki en az iki ağacın yaprak sayısının birbirine eşit olduğunu söyleyebilir misiniz? A) Evet B) Hayır	
Düşünce Deneyi Öğeleri	Ölçüt
Hipotez kurma	Ormanda en az iki yaprağın eşit olduğu söyleyebilirim/ söyleyemem. Ormanda en az iki yaprağın eşit olup olmadığını ağaç ve yaprak sayıları arasındaki ilişkiden çıkarabilirim.
Hayali dünya yaratma	Diyelim ki n ağaçlı bir ormandayız.
Düşünce deneyi tasarlama	Her ağaçtaki yaprak sayısı birbirinden farklı olsun.
Düşünce deneyi yürütme	Her ağaca ve her ağacın yaprak sayısına bir sayı atayalım. Ağaç no: 1 2 3 ... n Yaprak Sayısı: 1 2 3 ... n
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitite bulunma	Ormandaki ağaç sayısının n olduğu durumda bu ormanda n yapraklı bir ağaç olamaz. Yukarıdaki numaralandırmada çelişki vardır.
Sonuç çıkarma	Çelişkinin ortadan kalkması ormandaki en az iki ağacın yaprak sayısının eşit olmasıyla giderilir. En az iki ağacın yaprak sayısı birbirine eşittir.

3.5.Verilerin Analizi

3.5.1. Ana Uygulamada Yapılan Görüşme ve Gözlem Verilerinin Analizi

Nitel çalışmalardaki çeşitlilik bu çalışmalardan elde edilen verilerin analizinde de çeşitliliği beraberinde getirmektedir. Nitel veri analizinde kullanılan teknikler genelde birbirine bağlı, birbiri ile örtüşen veya birbirini tamamlar niteliktedir (Punch, 2016). Bunlardan betimsel analiz ve içerik analizi en yaygın olarak kullanılan nitel veri analiz yöntemlerinden ikisidir. Betimsel analizde elde edilen veriler daha önceden belirlenen başlıklar altında özetlenir ve yorumlanır. İçerik analizinde ise bu biraz daha ileri düzeyde yapılır. Birbirine benzeyen veriler (örneğin; diyaloglardan tespit edilen benzer sözcük grupları vs.) belirli kategoriler çerçevesinde bir araya getirilir ve okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenlenerek yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Araştırmanın alt problemlerine uygun olacak şekilde çalışmanın ana uygulamasında öğrencilerden elde edilen verilerde bu analiz yöntemlerinden yararlanılmıştır. Araştırmanın ilk alt problemine yönelik öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerindeki öğelerin tespiti için içerik analizi, ikinci alt problemine yönelik öğrencilerin kavram yapılandırması ile o kavramın tarihsel gelişimi arasındaki ilişkinin var ise ortaya çıkarılması için betimsel analiz kullanılmıştır.

3.5.2. Ana Uygulamanın Güvenirliği ve Geçerliği

Çalışmanın nitel yapısı gereği araştırılan konuya yorumlayıcı ve doğal bir şekilde yaklaşılacağından veri toplama araçlarında aranılan iki temel ölçüt olan geçerlik ve güvenilirlik, nitel araştırmalara uygun alternatif yöntemlerle sağlanır (Bademci, 2008). Geleneksel anlamda güvenilirlik, bir araştırmadan elde edilen sonuçların başka bir araştırmacı tarafından da elde edilmesi şeklinde ifade edilirken; nitel araştırmaya temel oluşturan ilkelerden birisi gerçeklerin bireylere ve içinde bulunulan ortama göre sürekli bir değişim içinde olduğu ve tekrarlanması sonucunda aynı sonuçlara ulaşamayacağıdır. Bu sebeple nitel araştırmaların güvenirliliği araştırmacının veri toplarken uygulayacağı stratejiler (çalışma süresince izlediği yolun işlem şemasını veya aldığı kararları bir doküman haline getirmek) ile sağlanabilir. Nitel araştırmalarda geçerlik ise araştırmacının araştırdığı olguyu olduğu biçimiyle veya olabildiğince yansız gözlemesi anlamına gelmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Geçerliğin sağlanması yani, yanlılığın en düşük seviyeye indirilmesi toplanan verilerin ayrıntılı bir şekilde rapor edilmesi ve araştırmacının sonuçlara nasıl ulaştığını açıklaması ile mümkündür (Yıldırım, 2010).

Çalışmanın geçerlik ve güvenirliğinin sağlanması için uygulama sürecinde izlenen yol (çalışma grubu, testi oluşturacak problemlerin ve rubriğin belirlenmesi, görüşme ve gözlem formu (EK 8) oluşturulması) açık bir şekilde ifade edilmiştir.

Araştırmacı öğrencilerin kendinden bir işaret alma olasılığını ortadan kaldırmak için görüşmelerde katılımsız gözlemci rolünde kalmıştır. Öğrencilerin cevap kağıtlarının incelenmesi, öğrencilerle birebir gerçekleştirilen görüşmeler ve bu görüşmelerde araştırmacının gözlemleri toplanılan verilerin çeşitlenmesini sağlamıştır. Bu kaynaklardan elde edilen bulgular ve yorumlar öğrencilerin cevap kağıtlarından ve görüşme kayıtlarından doğrudan alıntılarla desteklenmiştir.



BÖLÜM IV: BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde çalışmanın ana uygulamasına ait nitel verilerden elde edilen bulgulara ve bu bulgulara ilişkin yorumlara yer verilecektir. Bu bağlamda araştırmanın alt problemlerine iki ayrı başlık halinde cevap verilecektir.

4.1. Öğrencilerin Matematiksel Düşünce Deneyi Süreçlerinin Düşünce Deneyi Öğeleri Açısından İncelenmesi

Bu başlık araştırmanın 1. alt problemi ile ilgilidir. Öğrencilerin Matematiksel Düşünce Deneyi Testine ait cevap kağıtlarına yazdıkları çözümleri, görüşme kayıtları ve gözlem notları Gilbert ve Reiner (2000)'ın belirlediği düşünce deneyi öğeleri çerçevesinde hazırlanmış olan Matematiksel Düşünce Deneyi Testi Dereceli Puanlama Anahtarına (EK 5) göre analiz edilerek öğrencilerin düşünce deneyi yapma süreçlerine dair bulgular tespit edilmiş ve bu bulgular yorumlanmıştır. EK 5 in dışında yukarıda verilen Tablo 3.4.2.5. te de bu puanlamanın nasıl yapılacağına dair bir örnek sunulmuştur.

4.1.1. ‘Orman Gezintisi’ Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar

ORMAN GEZİNTİSİ

Her ağaçta en az bir yaprağın bulunduğu bir ormandasınız. Ormandaki ağaçların sayısı herhangi bir ağaçtaki yaprakların sayısından daha fazla. Bu durumda ormandaki en az iki ağacın yaprak sayısının birbirine eşit olduğunu söyleyebilir misiniz?

- A) Evet
- B) Hayır

Öğrencilerin Carl Friedrich Gauss'a atfedilen bir hikayeden uyarlanılan yukarıda verilen ‘orman gezintisi’ problemini çözerken zihinlerinde gerçekleştirdikleri eylemler neticesinde eksiksiz ya da kısmen tamamladıkları düşünce deneyleri, içerdiği öğelerine bağlı olarak öğrencilerin bir ispatı ne derece sezdiklerini ve sonucunda güvercin yuvası prensibini kavrayıp kavrayamadıklarını incelemeyi amaçlamaktadır.

Mantıksal düşünme becerisine göre belirlenen öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinde tespit edilen ve edilmeyen öğeler Tablo 4.1.1. de belirtilmiştir.

Tablo 4.1.1. ‘Orman gezintisi’ Probleminde Tespit Edilen Düşünce Deneyi Öğeleri

	Mantıksal Düşünme Becerisi İyi Düzeyde Olan Öğrenciler		Mantıksal Düşünme Becerisi Orta Düzeyde Olan Öğrenciler		Mantıksal Düşünme Becerisi Zayıf Düzeyde Öğrenciler	
	Aslı	Aylin	Bahar	Begüm	Cansu	Cihan
Düşünce Deneyi Öğeleri						
Hipotez kurma	*	*	*	*	*	*
Hayali dünya yaratma	*	*	*	*	*	*
Düşünce deneyi tasarlama	*	*	*	*		
Düşünce deneyi yürütme	*	*	*	*		
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma	*	*	*	*		
Sonuç çıkarma	*	*	*	*		

Yukarıdaki tabloda mantıksal düşünme becerisi iyi (Aslı ve Aylin) ve orta düzeyde olan öğrencilerin (Bahar ve Begüm) bu problem durumunun çözümüne ilişkin yaptıkları matematiksel düşünce deneylerinde her ögenin tespit edildiği görülmektedir. Mantıksal düşünme becerisi zayıf düzeyde olan öğrencilerin (Cansu ve Cihan) ise gerçekleştirdikleri ögeler hipotez kurma ve hayali dünya yaratma ile sınırlı kalmış ve gerçekleştirdikleri zihinsel eylemler onlara yaptıkları düşünce deneyini eksiksiz bir şekilde tamamlama imkanı vermemiştir. Mantıksal düşünme becerilerine göre sırasıyla zayıf, orta ve iyi düzeyde olan öğrencilerin çalışma kağıtlarından ve görüşme kayıtlarından alınan dikkat çekici bölümler aşağıda sunulmuştur.

Alıntı 1:

Cansu: Bir ağaçta en az bir yaprak var. Ve yaprak sayıları her ağaçta aynı değil. Ama ormandaki ağaçlar da yaprak sayılarından fazla. Atıyorum bir tanesinde 1 ise... nasıl desem. 5 ise 6 mesela.

Görüşmeci: Ne 5 ise ne 6?

Cansu: 5 yapraksa 6 ağaç mesela.

Görüşmeci: Biraz daha açık olabilir misin?

Cansu: Ağaçta sadece 100 yaprak varsa 101 olur. Yani, ne kadar sayı verirsem o kadar fazla ağaç olarsa sonsuz da olabilir ağaçlar.

Görüşmeci: Sonsuz ağaçlı bir orman? Dünya üzerinde göremeyeceğimiz bir orman oldu galiba? 100 ağaçtan sonsuz ağaca geçtin ve bunu eşit sayıda yaprak içeren ağaçların

varlığına dayandırmak niyetindesin diye düşünüyorum. Ama o aradaki bağlantıyı tam anlayamadım.

Cansu: Şimdi şöyle, 100 yapraklı bir ağaç varsa 101 ağaç var. 101 ağacın içinde yine 100 yapraklı ağaç da olabilir, 99 da olabilir. Böyle ağaçlar da artıyor. Yaprak sayılarının eşit olma şeyi de ihtimali de olanaklaşıyor.

Görüşmeci: Yanlış anlamıyorum değil mi? Ormandaki ağaç sayısını artırırsam eşit yaprak görme olasılığım mı artacak?

Cansu: Evet.

Alıntı 2:

Cihan: Şöyle bir şey yaptım. İlk önce kendi kafamda 100 ağaçlık bir orman düşündüm... Bunları çınar ağacı varsaydım ki yaprakları çok olduğu için. Baharın ortasında bir çınar ağacında hayal ettim kendimi. Her ağaçta en az bir yaprak vardı. Ağaçlardaki yaprak sayısı belli değildi. Yani, şu ağaca baktığımda kaç yaprak olduğunu göremiyorum. Tam olarak bulamam yani. Ondan sonra bu düşünce daha zorlu çıkmaya başlamadı düşündüğümünden. Buradan bakmaya çalışsam da çözemeyeceğim dedim. Ondan sonra şöyle bir şey yaptım. Yine çınar ağaçlarından oluşan çok ama çok geniş bir alan hayal ettim. Alanı ne kadar büyültürsem ağaçlar da o kadar artacak ve benim bunları bulmam da zorlaşacak... Benim hayal ettiğim ormanda ağaçlar 1 den başlıyor ve sonsuza kadar gidiyor. Ve yaprak sayısı birbirini tekrar edebilir mi, herhangi bir kesinliğim yok. Tekrar edebilir, bilemem. Bunu aklıma yazarken karmaşanın içinde buldum kendimi... Fakat aradığım her sayı bu karmaşıklığın içerisinde var. Yani, bence bu problemdeki ağaç ve yaprak şeysi tamamen sonsuzluğu ifade ediyordu.

Görüşmeci: Hmm... Sonsuzluk fikrinden yola çıkıyorsun.

Cihan: Evet. Herhangi bir ağaç kendini tekrarlayabilir. Yani, bir ağaçtaki yaprak sayısı o ormanın başka bir ucundaki bir ağacın yaprak sayısıyla aynı olabilir.

...

Görüşmeci: Peki, burada senin sonsuz kabul ettiğin şey sadece ormandaki ağaç sayısı değil mi?

Cihan: Ağaç sayısı ve ağaçlardaki yaprak sayısı.

Görüşmeci: Peki, sonsuzluk fikrinin yanında sonlu olarak düşünemez miydik bu problemi? En başta 100 ağaçlık bir orman düşündüm demiştin çünkü.

Cihan: Sonlu olarak düşündüm de işin içinden çıkamaz hale geldim. Zaten sonlu olarak düşündüğümde aklıma direk şu yatmadı. Bir ağaçta herhangi bir sayıda yaprak var ama öyle bir ormandayım ki herhangi bir ağaçtaki yaprak sayısından fazla bir ağaç var. Yani, bir ağaçtaki yaprak sayısı ne kadar fazla olursa ondan daha fazla sayıda ağaç olacak. Ben bir ağaçtaki yaprak sayısına bir sınır koyamıyorsam da bu kesinlikle sonsuzdur.

Yukarıda Cansu ve Cihan ile yapılan görüşmelerden alıntılanan iki diyalogdan hareketle mantıksal düşünme becerisi zayıf düzeyde olan öğrencilerin problemin sonucuna dair bir öngörüye sahip olmalarına, hatta bunun için hayali bir dünya yaratmalarına rağmen öngörülerini ispatlamaya ya da yanlışlamaya götürecek bir düşünce deneyi tasarlama noktasında sorun yaşadıkları görülmektedir. Bu sorun sürecin devamını da etkilemekte ve öğrenciler hipotez kurma ve hayali dünya yaratmanın devamında gelecek olan diğer öğeleri gerçekleştirememektedirler. İki öğrencinin de ortaya attığı sonsuz ağaçlı bir orman düşüncesi gerçeklikten uzak olmakla birlikte böyle bir varsayım altında gerçekleştirdikleri akıl yürütmelerinde de bir takım çelişkiler göze çarpmıştır. Örneğin; 1. alıntıda Cansu ormandaki herhangi iki ağacın eşit sayıda yaprağa sahip olmasını kesinlikten ziyade ağaç sayısı arttıkça artacak olan bir olasılık olarak ifade etmiştir. 2. alıntının sonunda görüldüğü üzere Cihan ise bir ağaçtaki yaprak sayısının sonsuza kadar artabileceği ve bu yüzden herhangi bir ağaçtaki yaprak sayısından fazla olan ormandaki ağaç sayısının da sonsuza kadar artabileceği bir durum hayal etmiştir. Fakat bu akıl yürütmelerini mantıksal bir zemine oturtmak yerine sonsuzluk var ise içerisinde her durum mevcuttur tarzı bir düşünceden yola çıkmış ve herhangi iki ağaçtaki yaprak sayısının eşit olduğunu öne sürmüştür.

Alıntı 3:

Begüm: Öncelikle, sonsuz ağacın bulunduğu bir ormanda olduğumuzu varsayalım. Yönergenin de dediği gibi ağaçların her birinde en az bir yaprak bulunmak zorunda. Yani, her bir ağaçta en az bir yaprak veya birden daha fazla yaprak bulunmak zorunda. Sonsuz tane ağacımız varsa her ağaçta en az bir yaprak varsa ve birden başlarsak sonsuza kadar uzanacağımızı söyleyebiliriz. Ağaç sayımız da sonsuz. O yüzden iki ağacın yaprak sayısının eşit olduğunu söyleyemeyiz.

Görüşmeci: Peki, bir şey diyeceğim. Senin buradaki varsayımın...

Begüm: Sonsuzluk.

Görüşmeci: Sonsuz sayıda ağaç.

Begüm: Evet.

Görüşmeci: Ormandaki ağaç sayısı sonlu olsaydı da bu böyle mi olurdu?

Begüm: Mmm... Değişir.

Görüşmeci: Nasıl?

Begüm: Mmm... Tamam. Değişir, şeye göre değişir. İki düşünce de zıt. Kendimi çürütüyorum ama.

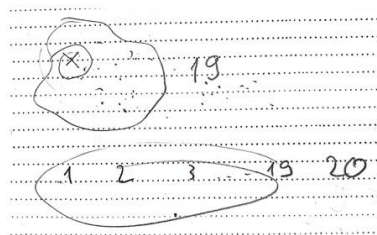
Görüşmeci: Olabilir. Varsayımların farklı.

Begüm: Peki, ağaç sayısı sonlu olsaydı. 1 den başlayıp gitseydim illa ki olurdu en az iki tanesi eşit.

Görüşmeci: Nasıl olurdu?

Begüm: Atıyorum, 20 tane ağaç olsun. Herhangi bir ağaçtaki yaprak sayısından daha fazla olmalı. O yüzden, bir ağaçta en fazla 19 yaprak bulunabilir. Yani, sınırlı sayıda oldu şu an. 1 den 19 a kadar gidiyoruz. Ama 20 tane ağaç var. Mecburen iki tane ağacın aynı sayıda olması gerekiyor diye düşünüyorum yaprak sayısı.

Görüşmeci: Çizerek gösterebilir misin?



Şekil 4.1.1.1. Begüm'ün 'Orman Gezintisi' Problemine Ait Görüşmesinde Yaptığı Çizim

Begüm: Bir ağaçta 1 yaprak var, diğer ağaçta 2 yaprak, diğerinde 3 tane. 19 a kadar geldim. Yani, 19 tane ağaç oldu. Şimdi, 20. ye geleceğim. 20 ye gelemiyorum çünkü 20 tane ağacım var ve herhangi bir ağaçtaki yaprak sayısı 20 olamaz. Çünkü 20 ağacım var, 20 den az olmalı. Şu 1 den 19 a kadar geldiğim sayılardan birine eşit olmalı. Diğer fikrimi çürüttüm eğer sonlu ağaç olursa.

Görüşmeci: ... Sonludan devam edelim. Sen bunu 20 ağaçta gösterdin. Atıyorum 100 ağaç, 1000 ağaç, 1 milyon ağaç. Herhangi bir sayıda da bu durum geçerli olacak mıydı?

Begüm: Aynısı geçerli olur.

Görüşmeci: Nereden biliyorsun?

Begüm: Çünkü tekrardan 1 den başlıyorum. 1000 tane ağaç olsun. 999 a geldiğimde tekrardan 1000 e ulaşamıyorum. O son ağaç 1000 olamaz. O yüzden, tekrardan 1 den 999 a kadar olan sayılardan birini kullanmak zorundayım.

Görüşmeci: 1000 ağaçlıda da geçerliymiş o zaman.

Begüm: Her zaman geçerli olur. Çünkü her seferinde 1 den başlıyoruz. 1 milyon ağaç için 999999 a kadar geliriz. 1 milyon olamaz. Son ağaç tekrarlayacak.

Alıntı 4:

Bahar: En fazla yaprak sayısına sahip olan ağacın yaprak sayısı... mmm... İşte küçük sayılarla denedim. 11 tane ağaç seçtim. En fazla yaprak sayısı da 10 olsa. Bu yaprak sayılarını küçükten büyüğe sıralayınca 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 deyince 10 tane ağaç ediyor. Ama ben 11 tane ağaç... yani yaprak sayısından fazla olacağı için... en az 11 ağaç olacaksa iki sayının tekrar etmesi gerekiyor diye düşündüm.

Görüşmeci: Sen 11 tane ağaç olan bir orman hayal ettin ve her ağaçta birbirinden farklı sayıda yaprak olsun istedin. Doğru mu anladım?

Bahar: Evet. İlk birbirinden farklı olsun dedim. Yani, hiçbirisi eşit olmazsa 11 ağacı sağlamıyor. En az iki tanesi tekrar ederse 11 tane ağacı sağlıyor. Bu en az 11 olursa. 12 13 olursa bu tekrarlar artacak ki ağaç sayısını sağlaması için.

Görüşmeci: Sen burada 11 ağaçlı bir orman örneği verdin ve çözümünü bunun üzerinden sundun. Ama ağaç sayısı farklılaştığında da bu durum devam edecek mi? Mesela, 50 ağaçlı,

1000 ağaçlı, 1 milyon ağaçlı bir ormanda olduğunu düşün. Her zaman bu durumun sağlanacağını garanti edebilir misin?

Bahar: (Evet anlamında başını sallıyor.)

Görüşmeci: Neden?

Bahar: *Çünkü yaprak sayısından büyük olacağı için ağaç sayısı, yaprak sayısını küçükten büyüğe sıraladığımızda o ağaç sayısına eremiyor. 49 tane yaprak... en fazla yaprak sayısı 49 sa 50 ağaç varsa en az da 1 yaprak olacağı için 49 a kadar sıralayınca 49 tane ağaç ediyor. 50 ağaç etmiyor mesela. Yani, en az iki tane ağacın eşit sayıda yaprağı olması lazım.*

Bahar ve Begüm'ün çalışma kağıtları ve görüşme kayıtlarının incelenmesinin sonucunda düşünce deneyi yapma sürecinde mantıksal düşünme becerisi zayıf düzeyde olan öğrencilere kıyasla mantıksal düşünme becerisi orta düzeyde olan öğrencilerin hipotez kurma ve hayali dünya yaratmanın devamında 'şu kadar ağaç olsun' düşüncesi ile düşünce deneyi yapma sürecine geçtikleri görülmektedir. Yani, problemin çözümüne ulaşmak için "ağaç sayısı 20 olsun, 11 olsun" şeklinde bir takım denemeler yapmaktadırlar. Bu denemelerin öğrenciler için öngörülerini kesinliğe doğru götürecek olan yolda bir basamak olduğu söylenebilir. Çünkü öğrencilerin sonuçlarından emin hale gelmeleri sadece yaptıkları denemeler ile ilişkilendirilebilir. Örneğin; 3. alıntıda önce sonsuz ağaçlı bir orman ile sonlu ağaçlı bir orman fikri arasında tereddüt yaşayan Begüm'ün daha sonra sonlu ağaçlı orman fikri üzerinden yaptığı denemelerdeki tutarlılığı benimsediği görülmektedir. Her iki alıntıda da görüldüğü gibi öğrencilerin son aşamada denemelerden bağımsız olarak birebir eşleştirme mantığına vardıkları, bu sayede ağaç sayısı ne olursa olsun her durumda eşitliğin varlığını sezdikleri ve güvercin yuvası prensibinin işleyişini kavradıkları rahatlıkla söylenebilir.

Alıntı 5:

Aylin: *... 5 ağaç aldım. İlk 4 ağaca, birinci ağaca 1, ikinci ağaca 2, üçüncü ağaca 3 ve dördüncü ağaca 4 yaprak verdim. Beşinci ağaçta 5 yaprak olamayacağı için daha önce verdiğim yaprak sayısına dönmek zorunda kaldım. 1, 2, 3 veya 4 de versem, hangi sayıyı verirsem vereyim en az iki ağacın yaprak sayısı eşit oldu. Bu yüzden de evet cevabından emin oldum.*

Görüşmeci: *Şimdi sen bunu 5 ağaçta denedin ve oldu. Fakat 99 ağaçta bir takım ihtimallerden bahsettin. 99 ağaçlık bir ormanda eşitlikten emin olabilecek miydin?*

Aylin: Yine olacaktım çünkü elimde 100 ağaç var, yerleştirebileceğim 99 adet sayım var. 99 unu yerleştirdikten sonra yüziüncü ağaçta yine 1 den 99 a kadar bir sayıyı koymak zorunda kalacaktım ve o da daha önce kullandığım bir sayıya eşit olacaktı diye düşündüm.

Görüşmeci: 5 ağaçta ve 99 ağaçta denedin. Tamam. 1 milyon ağaçlı bir orman, 1 milyar ağaçlı bir orman veya herhangi bir sayıda ağaçlı bir ormanda da bu sonucun geçerli olacak mı? Tüm sayılar için bunu sürekli deneyecek misin?

Aylin: Sonucum geçerli olacaktır, en sonunda yazdım (cevap kağıdını kastediyor). Elimde ağaç da olsa, yer de olsa, sıra da olsa ve yerleştireceğim şeyler yaprak, insan, eşya da olsa; yerleştireceğim şey sayısı her zaman eksik olacak. Elimde kaç tane sıra olursa olsun yerleştireceğim şey sayısı en az bir eksik olacak veya bu şekilde o elimde birebir eşleştirme yaptığımda elimde kalan +1 e daha önce eşleştirdiğim bir şeyi göstermek zorunda kalacağım.

Alıntı6:

En az yaprak 1 olan ağacın deni başlayarak n'e kadar birer birer
gitsen n'e ulaştığında n. sıradaki ağacın yaprak
sayısı n kadar olur. Ancak ağaçtaki yaprak sayısını
n den küçük alması gerekmezdir. Örneğin (n-1) ve
bundan daha (n-1) ağaçta ve n. ağaçta aynı
sayıda yaprak buluruz. Aynı şekilde verilen boşluk sayılarına
Ağaçlarımıza deni yaprak sayı en büyük alınının yaprak
sayısını ağaç sayısına eşitlediğimiz süreçte Örneğin
a. sıradaki her sayıyı ağaçlarımıza yaprak sayı olarak
verebiliriz. 0-1 ve 1 dahil her doğal sayıyı bir
g. setindeki farklı ağaçlar yaprak sayı olarak edebiliriz.

Şekil 4.1.1.2. Aslı'nın 'Orman Gezintisi' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

5. ve 6. alıntılar incelendiğinde mantıksal düşünme becerisi yüksek olan öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinde her ögenin rahatlıkla görülebildiği söylenebilir. Bu problem özelinde mantıksal düşünme becerisi orta ve yüksek düzeyde olan öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerindeki mevcut öğeler arasında bir fark gözlemlenmemiş olup 6. alıntıda Aslı'nın diğer 5 öğrenciden farklı olarak probleme dair geliştirdiği çözümün matematiksel anlamda daha şık olduğu ek olarak ifade edilebilir. Aslı çözümünde ağaç sayısı için rastgele

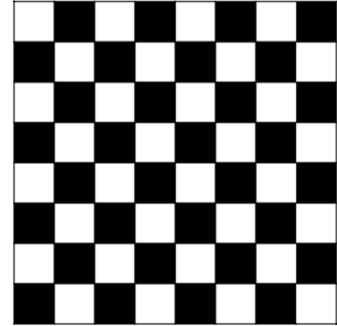
bir değer vermek yerine her durum için konuşabileceği, genelleme yapabileceği n ağaçlı bir orman varsayımını kullanmıştır.

4.1.2. ‘Satranç Tahtası’ Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar

SATRANÇ TAHTASI

8x8 lik bir satranç tahtasının en üst sol karesine bir tavla pulu koyduğunuz düşünün. Bu pulla bir kare aşağı, yukarı, sağa ya da sola hamle yapabiliyorsunuz. Her kareden yalnızca bir kere geçmek şartıyla pulu tahtanın en alt sağ karesine götürebilir misiniz?

- A) Evet
- B) Hayır



Brown (2005)’dan uyarlanan satranç probleminin sonucuna dair fikir sahibi olabilmek için bir takım kombinatorik işlemler ya da formal mantık kullanılarak yapılacak matematiksel bir ispat oldukça zorlayıcı olacaktır. Fakat bu problemin ya da ispatın sonucunu görebilmek için yapılacak matematiksel bir düşünce deneyi çok daha kullanışlıdır. Bu problem öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinin içerdiği öğelerine bağlı olarak problemin çözümüne dair bir ispatı ne derece sezebildiklerini incelemeyi hedeflemektedir.

Mantıksal düşünme becerisine göre belirlenen öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinde tespit edilen ve edilmeyen öğeler Tablo 4.1.2. de belirtilmiştir.

Tablo 4.1.2. ‘Satranç Tahtası’ Probleminde Tespit Edilen Düşünce Deneyi Öğeleri

	Mantıksal Düşünme Becerisi İyi Düzeyde Olan Öğrenciler		Mantıksal Düşünme Becerisi Orta Düzeyde Olan Öğrenciler		Mantıksal Düşünme Becerisi Zayıf Düzeyde Öğrenciler	
	Aslı	Aylin	Bahar	Begüm	Cansu	Cihan
Düşünce Deneyi Öğeleri						
Hipotez kurma	*	*	*	*	*	*
Hayali dünya yaratma	*	*	*	*	*	*
Düşünce deneyi tasarlama	*	*	*	*	*	
Düşünce deneyi yürütme	*	*	*	*		
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma	*	*				
Sonuç çıkarma	*	*				

Yukarıdaki tabloda mantıksal düşünme becerisi iyi düzeyde olan öğrencilerin problemin çözümüne ulaşmak için yaptıkları düşünce deneylerini eksiksiz bir şekilde tamamladıkları görülmektedir. ‘Orman gezintisi’ probleminden elde edilen tablodan farklı olarak bu

problemde mantıksal düşünme becerisi orta düzeyde olan öğrenciler yaptıkları düşünce deneylerinde büyük bir yol kat etmelerine rağmen deneylerinden elde ettikleri verilerden bir çıkarımda bulunamamış ve bunun doğal sonucu olarak da problemin yanıtına dair olan öngörülerini kesinleştirememişlerdir. Mantıksal düşünme becerisi zayıf düzeyde olan öğrenciler ise çözüme ulaşmak için gerçekleştirdikleri düşünce deneylerinde tasarlama ve yürütme aşamalarında sıkıntı yaşamışlar ve bu öğelerin ilerisine geçememişlerdir. Mantıksal düşünme becerilerine göre sırasıyla zayıf, orta ve iyi düzeyde olan öğrencilerin çalışma kağıtlarından ve görüşme kayıtlarından alınan dikkat çekici bölümler aşağıda sunulmuştur.

Alıntı 7:

Cihan: ... Şekiller çizdim, denedim. Ama ne sağdan ne soldan ne yukarıdan ne de aşağıdan ne çizersem çizeyim böyle bir şey olamayacağına kanaat getirdim. Buna kanaat getirmemin sebebi... Önce aşağı yukarı çizdim oluyor mu diye (Şekil üzerinde önce tamamen aşağı gidip bir hamle sağ yapıp tamamen yukarı gidip yine bir hamle sağ yaptığını gösteriyor). Olmadı çünkü bu şeklin kare olduğunu unutmuştum çözüme odaklanmışken. Sonra şöyle yaptım. İlk önce 8 kare vardı buraya 7 kare kalıyordu. Ben bu 7 kareyi çizdim. Sonra aşağı indim, yaptım. Bundan sonra şekil değiştirdim. Aşağı indim şöyle yapmaya başladım (Şekil üzerinde önce büyük zikzaklar sonra küçük zikzaklar yaptığını gösteriyor).

Görüşmeci: Zikzaklar yaptın.

Cihan: Evet ama zikzaklar da bir çözüm vermedi. Bu sefer dedim ki ben bunu belirli bir seviyeden başlatayım. Şu 3. Ya da 4.satırda olması lazım. Yine olmadı. 44 tane deneme yaptım üstünde. Önce 16, bir daha okudum bir 24 deneme daha yaptım. 40 tan sonra dedim ki ben pes ediyorum. Pes etmedim. 4 tane deneme daha yaptım. Toplam 44 tane. 44 ünde de başarısız oldum.

Görüşmeci: Başarısız oldum dediğin ulaşamadın.

Cihan: Ulaşamadım ve ucunu kapatamıyorum yani.

Görüşmeci: Deneyerek bir sonuca ulaşabileceğini düşündün aslında. Çok sayıda deneme yaptın ve bunların sonucunda hayır ulaşamam dedin.

Cihan: Evet. Ulaşamayacağımı düşünüyorum. Yani deneme yaparak ulaşabileceğimi düşünmüştüm en başta. Hayıra daha yakınım. Ufak bir pay bırakıyorum yine evet için de.

Alıntı 8:

Cansu: 8x8 olduğu için tablo ne denersem deneyeyim... böyle gidersem de (sürekli sağa, bir kare aşağı, sürekli sola, bir kare aşağı ve yine sürekli sağa düzeninde çizerek), böyle yaparsam da (bir kare aşağı, bir kare sağa, bir kare yukarı, bir kare sağa düzeninde çizerek) olmuyordu. Başka denemeler de yaptım o an. Olmuyordu hiçbir şekilde. Sebebini de şey olarak... 8x8 lik olduğunda ya da 6x6 lık olduğunda olmayacaktı. 7x7 ya da 5x5 olsaydı oluyordu.

Görüşmeci: Nereden biliyorsun?

Cansu: Denedim.

Görüşmeci: Gösterebilir misin?

Cansu: Şöyle düşündüm, (şekil üzerinde en sağ satır ve en sol sütunu karalayarak) burayı çıkardım.

Görüşmeci: 7x7 lik bir tahta oluşturdun.

Cansu: Şöyle çizdim mesela. Oldu.

Görüşmeci: 7x7 de olduğunu gördün. Bunu 6x6, 5x5 te de denedin değil mi?

Cansu: Evet. 5x5 te oldu, 6x6 da olmadı.

Görüşmeci: Anladım. Peki, neden bazılarında oluyor da bazılarında olmuyor?

Cansu: Çiftlerde olmuyor, teklerde oluyor.

Görüşmeci: İşte bunun nedenini soruyorum aslında, buna dair bir açıklaman var mı?

Cansu: Yok.

*Her kareden en az bir kere geçerek tahtanın en alt
sağ karesine gelmek mümkün olmalıdır.
Sebebi ise 8x8'lik bir tahta olmasıdır.*

Şekil 4.1.2.1 Cansu'nun 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Mantıksal düşünme becerisi zayıf olan öğrenciler bu problemde sonuca ulaşmak için gerçekleştirmeleri gereken düşünce deneyinin hipotez kurma ve hayali dünya yaratma öğelerini eksiksiz sağlamışlar fakat düşünce deneyini tasarlama ya da yürütme aşamasında

sorun yaşamışlardır. 7. alıntıdan hareketle Cihan'ın problemin çözümüne dair bir öngörüsünün mevcut olduğu, bunu hayal edebilmesine karşın çözümüne bir kesinlik kazandırması için gerekli düşünce deneyi tasarımını gerçekleştiremediği görülmektedir. Öngörüsünü yaptığı denemeler sonucu elde etmiş fakat yaptığı sınırlı sayıda denemenin problemin sonucu hakkında kesin olarak karara varmasını sağlamadığının da farkındadır. Toplam 44 tane deneme yaptığını ve cevabın hayır olduğunu düşündüğünü ifade etmesi ile beraber onu istenilen kareye ulaştıracak bir yolun yokluğuna dair bir şey söylememiş ve evet ihtimaline de kapıları kapatmamıştır. 8. alıntıda Cihan'dan farklı olarak Cansu'nun farklı boyutlarda satranç tahtalarını inceleme ve karşılaştırma fikri ile düşünce deneyi tasarlama aşamasında başarılı olduğu rahatlıkla söylenebilir. Fakat bu düşünce deneyini yürütecek ipuçlarını (hedefe ulaşmak için yapacağı hamle sayısı, karelerin rengine odaklanma gibi) elde edememiş olduğu da görülmektedir. Denemeleri sonucu pulu istenilen kareye ulaştıramayacağını ifade etmiş ve yine bu denemelerindeki gözlemleri sonucu bunun sebebini tahtanın boyutu ile açıklamıştır. Bu açıklamalarının ötesinde bir şey söyleyememiş olması Cansu'nun yaptığı düşünce deneyinde bir noktaya kadar gelmesine rağmen öngörüsünü kesinleştirememesine sebep olmuştur.

Alıntı 9:

Bahar: (Şekil üzerinde önce tamamen aşağı gidip bir hamle sağ yapıp tamamen yukarı gidip yine bir hamle sağ yaptığını gösteriyor ve bunu tüm karelerden geçene kadar devam ettiriyor) İlk böyle denedim. Yani, sonra buradan (en alt sağ kareyi göstererek) geçtiğimi fark edince bıraktım. Sonra, tüm sütunları doldurarak gitmek yerine böyle yarıya kadar yapmayı denedim. İşte, üç ya da dört kare gidip geri dönüp... Sonra buradan böyle devam etmeyi denedim, olmadı. Bu taraftan da aynı şekilde denemeler yapınca ya buralar boş kalıyor. Üstünden geçmem gerekiyor. Direk (tahtanın siyah köşelerini işaret ederek) bu köşelere varıyorum yani.

Görüşmeci: Peki, neden istenilen köşeye değil de diğer istenmeyen köşelere varıyorsun?

Bahar: Bence...

Görüşmeci: Kağıdına farklı boyutlarda satranç tahtaları da çizmişsin. Bu neden?

Bahar: Evet. Mesela, 16lıda denedim. Bir de çiftte belki olmuyordur diye de 25lide denedim. Şurada bir yerde çizmiştim onu da. O yüzden, çift olduğu için (8x8 lik kareyi göstererek) varamadığımı fark ettim.

Görüşmeci: Farklı boyutlardaki karelerde denedin ve çift olduğu zaman, mesela 4x4, 6x6, 8x8 de olmadığını fark ettin. Peki, tek birim karelikler ile bu çift birim karelikler arasında ne fark var ki birinde istenilen kareye varıyorsun da diğerinde varamıyorsun?

Bahar: Biri tek sayıda kareye sahip. Diğeri çift sayıda kareye sahip.

Görüşmeci: Evet.

Bahar: Çiftlerde renkler eşit sayıda iken teklerde renkler eşit sayıda değil.

Görüşmeci: Biraz daha açıklayabilir misin?

Bahar: (3x3 lük ve 4x4 lük iki şekil çizip siyah renkli olacak kareleri boyuyor.) Tek sayılı alanlarda beyaz ile siyah renkli karelerin sayısı eşit olmuyor. Çift sayılı alanlarda eşit çıkıyor.

Görüşmeci: Alanlarından, renklerinden bahsediyorsun. Problemimize dönecek olursak 8x8 lik satranç tahtasında tavla pulunu sol üstten sağ alta getiremeyeceğimizi söylemiştin.

Bahar: Çift sayılı alanlarda beyaz kareden başlıyorum ve yine beyaz kareye geliyorum. Çünkü renkler eşit sayıda. Ama teklerde beyazdan başlayıp siyaha gelmeliyim. Renkler eşit sayıda değil.

Görüşmeci: Bunların arasında kurduğun ilişkiyi tam kafamda oturtamadım. Biraz daha açık ifade edebilir misin?

Bahar: Ben de tam sebebini açıklayamıyorum. Bilmiyorum.

Alıntı 10:

Görüşmeci: Hareket doğrultusu dediğin şeyi, yani pul ile yapabileceğin olası tüm hareketleri tek tek saymadığını sanıyorum. Tahta çok büyük olsa gerek. Nasıl emin olabildin ulaşamayacağından?

Begüm: Mesela, 3x3 lük bir karede oluyor. Ama ben bu kare üzerinden düşündüm. Yani, 8x8 lik karede. Çift veya tek olduğu için.

Görüşmeci: Satranç tahtasının boyutunu mu diyorsun?

Begüm: Evet. Alanı ile ilgili. Bizim tahtamızda 64 kare var. 3x3 lük karede 9 kare. Çift sayılarda hareket doğrultusunda olduğu için oluyor. Tek sayılarda olmadığı için olmuyor. Deneyebiliriz.

Görüşmeci: Sen denedin mi hepsini?

Begüm: Gözümlle biraz denedim.

Görüşmeci: Ama her seferinde neden böyle oluyor ya da olmak zorunda mı? Buna dair bir fikrin var mı?

Begüm: Yani, kesin olarak var diyemem.

Görüşmeci: Bir de cevap kağıdında 63 hamle yapman gerektiğinden bahsetmişsin.

Öncelikle satranç tahtasının sol üstünde bir adet tahta pulu var ve bu pulu her kareden yalnızca bir kere geçirmek zorundayız. Tahtada toplam bu tane kare var ve pulumu zaten bir tanesinin üstünde. Yani geriye geçirmek zorunda olduğumuz 63 karemi, yani hamlemiz kalıyor.

Şekil 4.1.2.2. Begüm'ün 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Begüm: Evet, alanı ile ilgili. 64 kare var. Pulumuz bu karelerden bir tanesinin üstünde. Her karenin üstüne sadece bir kez geleceğim. Ulaştığım 63 yeni kare, yani yapmak zorunda olduğum 63 hamle var. 3x3 lük karede de 8 hamle gerekli. Birinde 8 hamlede ulaşıyorum diğerinde ulaşamıyorum.

Görüşmeci: Nedeni hakkında...

Begüm: Onu bilmiyorum.

Mantıksal düşünme becerisi orta düzeyde olan öğrenciler problemin çözümüne ulaşmak için o durumu zihinlerinde hayal edebilmiş, bu sayede problemdeki nesneleri manipüle edebilmiş, devamla düşünce deneyi tasarımı yapmış ve bunu yürütmeye koyulmuşlardır. Mantıksal düşünme becerisi zayıf öğrencilere kıyasla çözüme ulaşmak için deneme yapmanın ötesinde farklı fikirler ortaya atmışlardır. İki öğrencide de ortak olarak gördüğümüz boyut ve alan fikridir. Problemin sonucuna ulaşmak için iki öğrenci de farklı boyutlardaki satranç tahtaları üzerinde çalışmışlardır. Bunun sonucu olarak da pulun istenilen noktaya getirilip getirilememesini farklı boyutlardaki satranç tahtası üzerindeki kare sayısı ile ilişkilendirmişlerdir. Çift sayıda kareye sahip bir satranç tahtasında pulun

istenilen noktaya getirilmesinin mümkün iken tek sayıda kareye sahip bir satranç tahtasında bunun mümkün olmadığını belirtmişlerdir. Begüm'ün problemin çözümünde geldiği son noktada 3x3 lük ve 8x8 lik satranç tahtalarında tüm karelerden sadece bir kez geçmek için kaç hamle yaptırması gerektiğini düşünmüş fakat bu düşüncesini karelerin rengi ile ilişkilendiremediği için yaptığı düşünce deneyini tamamlayamamıştır. Bahar ise farklı boyutlardaki satranç tahtalarının kare sayılarına, aynı zamanda Begüm'den farklı olarak bu satranç tahtalarında hangi renkten kaç kare olduğuna, bulunduğu ve varmak istediği karenin rengine odaklanmıştır. Çözüme oldukça yaklaşan Begüm ve Bahar zihinlerinde tasarladıkları ve yürüttükleri düşünce deneyinden elde ettikleri verilerden bir tespitle bulunamamışlardır. Gerçekleştirdikleri düşünce deneylerinin sağladığı öğeler böylece 4 ile sınırlı kalmıştır.

Alıntı 11:

Aslı: Şimdi birincide (cevap kağıdında numaralandırdığı denemeleri kastederek) satırlar arasında bu şekilde hareketlerde bulundum, gitgellerde bulundum (Şekil üzerinde gösteriyor). Pulum benim bu noktaya geldi. İkincisinde de (cevap kağıdında numaralandırdığı denemeleri kastederek) aynısını sütunlara uyguladım, dikey bir şekilde geldim. O da bu sefer bu köşeye geldi. Daha sonra dedim ki, hani bunlar çok basit işlemler. Belki böyle değil de aralarında dolanarak gidip ilerlediğimde oluyordur diye düşündüm, belki olabilir dedim. Üçüncüye (cevap kağıdında numaralandırdığı denemeleri kastediyor) geldim, şu şekilde ilerledim. Ama böyle olduğunda belli noktaya geldikten sonra tekrardan o karelerin arasından geçerek dönmem gerekiyor. Yani, şöyle gelip bu şekil gitmem gerekiyordu.

Görüşmeci: Bir daha gösterebilir misin? Tam göremedim.

Aslı: (Kalemin ucuyla takip ettiği yolu gösteriyor.) Bu şekilde gelip ilerledikten sonra burdan tekrardan geçmem gerekiyordu ama bu benden istediğiniz koşullara aykırı. O yüzden, bununla da daha fazla uğraşmadım ve dedim ki sağa gelmek yerine sola geleyim şöyle dedim. Ama bu sefer de ben yukarıya çıktığımda bu kare boş kaldı. Dedim bunlar da olmuyor. Sonra dedim ki beşinciye (cevap kağıdında numaralandırdığı denemeleri kastederek) geçtiğimde. Ben dedim bunların kenarlarını birer birim artırırsam benim alanım tek bir sayı oluyor. Yani, burada 64 iken, mesela bir birim artırdığımda 81 oluyor.

Görüşmeci: 9x9 luk satranç tahtası.

Aslı: Aynen 9x9 luk bir tahta elde ettiğimde... yine birinci ve ikinciye (cevap kağıdında numaralandırdığı denemeleri kastediyor) uyguladım ve gayet de ulaştım bu noktaya (problemin ulaşmasını istediği sağ alt köşeyi işaret ediyor). Eee... Şunu anladım burdan. Daha sonradan kafamdan da hani bir birim azaltsam, 2x2 lik bir kare olsa nasıl olur diye düşündüm. Yine çift. Çift yine sağlamadı.

Görüşmeci: Küçük karelerde denedin.

Aslı: Hıhı. Tekrardan bunu bir birim azalttığımda, yani 7x7 yaptığımda da sağladı. Dedim, demek ki benim alanım çift bir sayı olduğu zaman ben başladığım renge geri dönemiyorum ulaştım. Çünkü ben buraya tekrardan bir kare eklediğimde buraya yine beyaz gelirken sayım teke ulaşmış oluyor, buraya gelebiliyorum. Ama çift olduğunda, tekrardan aynı renge gelebilirim.

Görüşmeci: Kenar sayısı tek birim olanlarda, mesela 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 da istenilen noktaya ulaşabiliyorsun. Ama kenar sayısı çift birim olanlarda ulaşamıyorsun.

Aslı: Evet. Verilen şartları sağlayarak teklerde gelebiliyorum, bu köşede yine beyaz rengim oluyor. Çiftlerde ise başladığım rengin zıddına dönebiliyorum, yani siyaha. Fakat, benden istediği beyazda başlayıp beyazda bitirmem. Verdiği koşullar dahilinde, elimde bulunan 8x8 lik alanı çift sayı olan tahtada bunu yapamıyorum.

- 1-) Satırlar arasında paralel olarak ilerledim, her satır bitişinde bir aşağıya geçirdim. Ancak pulun sağ alt köşeye değil, sol alt köşeye ulaştı.
- 2-) 1. işlemin aynısını sütunlar boyunca uyguladım. Her satırda birimden önce ve sonra ilk satırın en sağ köşesine dönüş yaptım.
- 3-) Bir birim sağa, bir birim aşağıya bir birim sola olacak şekilde ilerledim. Bu işlemden sonra dönüş yapmam aynı kereden itibaren gerekti.
- 4-) Bir birim aşağıya kayarak birim kareler arasında sağa, aşağıya, sola vb. ile ilerledim. Başta kareler (üzerinde geometri) kareler bulunmaktaydı.
- 5-) Her bir satırda 64 kare birimden çift sayı. Ancak çift karelerde de işlemler devam etmekte. Ancak karelerdeki birim sayı tek olacağı için her 2. karede sol üstten başlayıp sağ alt köşeye

Şekil 4.1.2.3. Aslı'nın 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek-1

Alıntı 12:

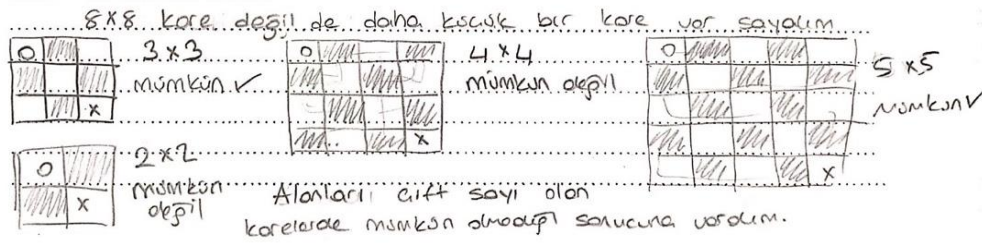
1. ve 2. yollarla ulaşabiliyor.
 Birim olarak hareketleri tek sayı olan karelerde
 işlem yapılabilirken çift sayılarda sol üstten başlayarak
 sonra sağ alt köşeye elinizdeki karelerle ulaş-
 ılamıyarsınız.
 İlk yöntemlerde hareketleri ulaşamayacağınızı düşünün
 ve birkaç yolla tespit etmeye çalışın, yeterli gelmedi.
 Birim sayıları farklıyken düşünün ulaşabilirliklerini incelediklerinde
 ise hareketleri ulaşamadığını anladım.
 Tavla pulu hareketleri renkli kare ile aynı
 renge sahip kareye ulaştırıyor. Yolda verilen şartları
 sağlanıyor. Mesela beyazda başlayıp siyahla bitirirse
 her karede 1 kare geçiyor oluyor.
 Bunun hem bir kare sayısını değiştirdiğim derayda kende
 ilk 2. derayda uygulanmış olurum.
 -1-) Tavla pulu hareketleri renkli karelerden hareketle başlıyor ve
 1. ve 2. uygulamaları (satır ve sütunları parçalar (kediye giden))
 gerçekleştiriliyor.
 1. uygulamada sol en alttaki siyah kareye ulaşılıyor.
 2. uygulamada ise sağ en üstteki siyah kareye ulaşılıyor.
 (Verilen şartlar sağlandığında).
 -2-) Hareketlerdeki birim kare sayısı 1 artırıldığında veya 1
 azaltıldığında karelerin altı tane sayıya düşüyor. Beyaz
 karede başlayan yol hareketleri sağ en alttaki beyaz kareye
 ulaşabiliyor. (Verilen şartlar sağlandığında).
 3.) Herhangi bir renkten başlanarak hareketleri o renge ulaşmak
 için kuralı. Sırtında altı alan da uygulanıyor. 1. hareket
 aynı karede geçiyor. 2. hareketi leşimden geçilmeden önce
 ulaşılıyor. 3. hareketi ise dönüş için hareket sağlanıyor.

Şekil 4.1.2.4. Aslı'nın 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek-2

Alıntı 13:

Aylin: ... o belirttiğim S şeklinde ilerleme yöntemini denedim. Bu da olmadı... Daha sonra daha küçük alanları olan kareler denedim. İşte mesela böyle (şekil üzerinde en sol üst kareden başlayarak sırasıyla bir kare aşağı, bir kare sağ, bir kare yukarı, bir kare sağ düzenini tekrarlayarak) denedim. Sonra burada tıkanıp, yukarıda kaldı. Dedim bu da olmuyor o zaman. Bu tarz şeyler denedim. Daha sonrasında özellikle satranç tahtası olduğunu belirttiği için renklere yoğunlaşmaya çalıştım ve renkleri hani... 64 kare çok fazla göz yoruyordu. Daha küçük karelere geçtim. Sonra daha küçük karelerde yaptığımda fark ettim ki alanı çift sayı olan karelerde olmuyor çünkü mesela en basitinden 4x4 bir karede benim 16 tane kare çizmem gerekiyor. Ve 16 tane kare yaptığımda benim 15 tane hamle

yapmam gerekiyor ve bu hamle siyah karede bitiyor hareketi. Beyaz taşla ulaşmam için ya bir kareyi atlamam gerekiyor ya da bir kareye bir tane fazla gitmem gerekiyor. Aynı zamanda eğer karenin alanı çift olursa, yani bir kenarının uzunluğu çift kareden oluşursa renkler satır başında ve satır sonunda farklı oluyor ve bu da benim durumumu engelliyor. Mesela 3x3 lük bir kareyi çizip aynı şeyi denediğimde ben rahatlıkla ulaşabiliyorum çünkü beyazda başlıyorum ve yine beyazda bitiyor. Böyle düşündüm. Yani benim hamlem beyaz karede başladığı için benim 1. hareketim siyah kare. O yüzden 15. hareketim de, 4x4 lük bir kare için konuşuyorum, siyah karede bitiyor. Ama benim tahtam 9 karelik olursa ilk hareketim beyazdan siyaha gitmek oluyor. Siyah 1. hareketim. Benim toplamda 8 hareket yapma hakkım var. O zaman 8.hareketim benim beyazda bitiyor ve beyazda başlamıştım beyazda bitirdim.



Şekil 4.1.2.5. Aylin'in 'Satranç Tahtası' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Görüşmeci: 64 karelik için de konuşabilir miyiz?

Aylin: Tamam. 64 karede benim 63 hamle yapmam lazım ve yine beyazda bitirmem lazım. Benim ilk hamlede aşağı ya da sağa gidebiliyorum, ikisi de siyah kare. Siyah kareye gittiğimde de ilk hamlem beyaz kareye varıyor. Yani, örüntü yaptım burada 1 siyah, 2 beyaz, 3 siyah, 4 beyaz diye gittiğimde 63. hareketimde yine siyah kareye denk geliyor. Bu yüzden imkansız.

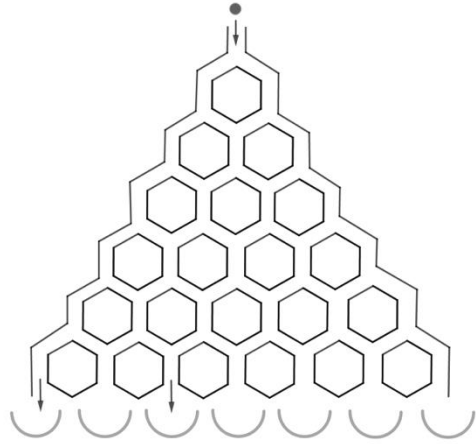
Mantıksal düşünme becerisi iyi düzeyde olan öğrenciler bu problemde mantıksal düşünme becerisi orta düzey olan öğrencilere göre daha iyi bir performans göstermişlerdir. 'Orman gezintisi' probleminde olduğu gibi bu problemde de Aslı ve Aylin yaptıkları düşünce deneyini tamamlayabilmiş ve sonuca ulaşmışlardır. Diğer öğrencilerin de yaptığı gibi önce verilen şekil üzerinde çeşitli denemeler yaparak bir öngörü sahibi olmaya çalıştıkları sonrasında problemdeki nesneleri manipüle etmeye başladıkları, farklı boyut ve alana sahip satranç tahtaları üzerine fikir yürütmeye başladıkları görülmektedir. İki öğrencinin de pulun bulunduğu ve varması istenilen karenin rengini ve istenilen kareye ulaşmak için yapılması gereken hamle sayısını bütünlüklü olarak ele alabilmeleri öngörülerini kesin bir zemine

oluşturmaları için gerekli tespiti yapabilmelerine ve bunlardan bir sonuç çıkarmalarına olanak sağlamıştır.

4.1.3. ‘Şans Makinesi’ Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar

ŞANS MAKİNESİ

Sağdaki gibi bir düzenek kurulmuştur. Şekilde gösterildiği gibi toplar yukarıdan düzeneğin içine atılmakta ve 6. yol ayrımından sonra düzeneğin altında bulunan çıkış noktalarındaki yeterince büyük haznelere düşmektedir. Atılan toplar her yol ayrımında eşit olasılıkla sağa ya da sola sapmaktadır.



Buna göre;

- Atılan bir topun oklar ile de gösterilen en soldaki hazneye düşme olasılığı ile soldan üçüncü hazneye düşme olasılığı hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 - En soldaki hazneye düşme olasılığı soldan üçüncü hazneye düşme olasılığından daha fazladır.
 - En soldaki hazneye düşme olasılığı soldan üçüncü hazneye düşme olasılığından daha azdır.
 - En soldaki hazneye düşme olasılığı ile soldan üçüncü hazneye düşme olasılığı birbirine eşittir.
- Düzeneğin yukarisından yeterince fazla sayıda top atılırsa hangi haznelerde daha çok hangi haznelerde daha az top birikmesi beklenir?
 - Haznelerde biriken top miktarı soldan sağa gidildikçe azalır.
 - Haznelerde biriken top miktarı soldan sağa gidildikçe artar.
 - En ortadaki haznede en fazla top birikirken köşedeki haznelere doğru gidildikçe biriken top miktarı azalır.
 - En köşelerdeki haznelerde en fazla top birikirken en ortadaki hazneye doğru gidildikçe biriken top miktarı azalır.
 - Her haznede eşit miktarda top birikir.

‘Şans makinesi’ problemi ile ilgili bir sonuca ulaşmak için öğrencilerin gerçekleştirmeleri gereken düşünce deneyleri, içerdiği öğelerine bağlı olarak olasılık kavramı üzerinden binom dağılımını ne derece sezdiklerini görebilmeyi amaçlamaktadır.

Mantıksal düşünme becerisine göre belirlenen öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinde tespit edilen ve edilmeyen öğeler Tablo 4.1.3. te belirtilmiştir.

Tablo 4.1.3. ‘Şans Makinesi’ Probleminde Tespit Edilen Düşünce Deneyi Öğeleri

	Mantıksal Düşünme Becerisi İyi Düzeyde Olan Öğrenciler		Mantıksal Düşünme Becerisi Orta Düzeyde Olan Öğrenciler		Mantıksal Düşünme Becerisi Zayıf Düzeyde Öğrenciler	
	Aslı	Aylin	Bahar	Begüm	Cansu	Cihan
Düşünce Deneyi Öğeleri						
Hipotez kurma	*	*	*	*	*	*
Hayali dünya yaratma	*	*	*	*	*	*
Düşünce deneyi tasarlama	*	*	*	*		
Düşünce deneyi yürütme	*	*	*	*		
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma	*	*				
Sonuç çıkarma	*	*				

‘Orman gezintisi’ ve ‘satranç tahtası’ problemlerinde olduğu gibi bu problemde de mantıksal düşünme becerisi iyi düzeyde olan öğrencilerin problemin çözümüne ulaşmak için yaptıkları düşünce deneylerini eksiksiz bir şekilde tamamladıkları görülmektedir. Mantıksal düşünme becerisi orta düzeyde olan öğrencilerinin ‘Orman gezintisi’ probleminde gösterdikleri performansı ‘satranç tahtası’ probleminde olduğu gibi bu problemde de gösteremedikleri görülmektedir. Yaptıkları düşünce deneylerinin tasarlama ve yürütme aşamasında başarı göstermelerine rağmen deneylerinden elde ettikleri verileri mantıksal ve matematiksel bir zemine oturtmada yaşadıkları sıkıntılar sebebi ile deneylerini sonuçlandıramamışlardır. Mantıksal düşünme becerisi zayıf düzeyde olan öğrenciler ise ‘orman gezintisi’ probleminde olduğu gibi çözüme ulaşmak için gerçekleştirdikleri düşünce deneylerinin tasarlama aşamasında sıkıntı yaşamışlar ve bu ögenin ilerisine geçememişlerdir. Mantıksal düşünme becerilerine göre sırasıyla zayıf, orta ve iyi düzeyde olan öğrencilerin çalışma kağıtlarından ve görüşme kayıtlarından alınan dikkat çekici bölümler aşağıda sunulmuştur.

Alıntı 14:

Cihan: ... Bu altıgenlerin sivri tarafı yukarı bakıyor ve bu altıgenlerin sivri köşesine çarpıp sağa ya da sola gitme olasılığı $\frac{1}{2}$. Yani, burada da diyor ki bize şu aşağıdaki kaplara her bir topun düşme olasılığı eşit. Yani, bir kaba bir topun düşme olasılığı burada her koşul eşit olduğundan dolayı $\frac{1}{7}$. Yani en soldaki kap ile soldan üçüncü kaba düşme olasılığı da $\frac{1}{7}$. 7 kaptan herhangi birine düşme olasılığı $\frac{1}{7}$. Hiçbir şey değişmeyecek. Ben de bundan yola

çıkarak ilk sorunun cevabını en soldaki hazneye düşme olasılığı ile en soldan üçüncü hazneye düşme olasılığını eşit kabul ederek buldum.

Görüşmeci: Hepsine eşit dedin. O halde, ikinci soruyu da ona göre cevapladın...

Cihan: Evet...

...

Görüşmeci: Kağıdında bir takım çizimler görüyorum. Hiç düzeneğin yukarisından bir top atıp bu topun hareketini gözlemledin mi?

Cihan: Tabii. Hareketini hayal ettim.

Görüşmeci: Nasıl?

Cihan: Mesela, bir tanesi önce sola saptı, sonra sağa, sonra böyle böyle ve soldan üçüncüye düştü.

Görüşmeci: Bir tanesi böyle oldu.

Cihan: Evet. Tüm topları hayal ettim ve eşit olasılık dedim.

Alıntı 15:

Cansu: ... zihnimde bu düzeneği canlandırmaya çalıştım. Tepeden topların düştüğü...

...

Cansu: Şimdi burada atılan ilk topun neden soldan üçüncüye değil de en soldakine düştüğünü düşündüm...eee...yani daha fazla ihtimali olduğunu düşündüm. Çünkü buradan gelince (ilk yol ayrımında sağa ya da sola sapacağını göstererek) ya buraya gidicek ya buraya gidicek. Bu arada şey diye düşündüm. Böyle engeller çıktıkça ortaya gitmesi daha az olasılık diye düşündüm çünkü çok fazla şey var ortada?

Görüşmeci: Çok fazla şey var dediğin nedir? Anlayamadım.

Cansu: Yol.

Görüşmeci: Ortaya gitmesi için daha çok yol var diyorsun değil mi?

Cansu: Evet ama önüne çok fazla engel çıkıyor. Böyle sapak gibi... ayrım yani. O yüzden ben de öyle düşündüm yani. En kenarlara daha fazla olur.

Görüşmeci: *Hmm.*

Cansu: *Yani mesela buraya çarptığı an (ikinci yol ayrımının ortanca olanını işaret ederek) bu tarafa doğru ya da bu tarafa doğru (sağa ya da sola gideceğini kastederek) düşecek. Bu da köşelere gitmesine daha fazla olanak veriyor bence.*

Mantıksal düşünme becerisi zayıf olan öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinde bir hipotez kurabildikleri ve bu hipotezlerini destekleyici argümanlar bulmaya çalıştıkları, aynı zamanda bu düzeneği zihinlerinde çalışır hale getirdikleri açıktır. Fakat hipotezlerini desteklemek için ortaya attıkları argümanları mantıksal veya matematiksel bir dayanaktan yoksundur. Örneğin; 14. alıntıda Cihan atılan bir topun her hazneye düşme olasılığının eşit olduğu iddiasını yol ayrımına gelen bir topun eşit ihtimallerle farklı yönlerde gitmesi ile açıklamaktadır. Cihan iddiasının gerekçesini bir temele dayandırmamakta ve tamamen yanıltıcı bir sezgi ile probleme bir çözüm getirmeye çalışmaktadır. Bu durum onun düşünce deneyinin tasarım aşamasına geçememesine sebep olmaktadır. 15. alıntıda Cansu ise atılan topların haznelere köşelerden ortaya gidildikçe düşme ihtimalinin ortadaki haznelere göre daha yüksek olduğunu ifade etmektedir. Fakat bunun gerekçesinde bir çelişki göze çarpmaktadır. Önce topun ortadaki hazneye ulaşması için daha çok yol olduğunu söylemektedir ki bu ortadaki hazneye ulaşma ihtimalinin diğerlerine kıyasla daha yüksek olduğunu gösterir. Ardından ise yol ayrımlarını topun ortadaki haznelere düşmesini engelleyen bir durummuş gibi düşünmesinden hareketle ortadaki haznelere açılan daha çok yol olmasına rağmen ortadaki haznelere ulaşan bir topun daha çok engel ile karşılaşacağını, bunun da ortadaki haznelere düşmesinin daha düşük bir ihtimale sahip olmasına yol açtığını ifade etmektedir. Düşünce deneyine sezgisel ve aynı zamanda çelişkili bir zemin ile başlaması Cansu'nun sağlam temelli bir düşünce deneyi tasarımı yapamamış ve dolayısıyla problemin çözümüne dair bir akla uygun bir çözüme gidememiş olmasını açıklamaktadır.

Alıntı 16:

Bahar: *... En soldaki bölmeye direk, yani soldan başlarsa gidiyor. Çünkü... yani, şuradan devam ederse (ilk yol ayrımında sağa saptığını ve sonrasında hep sola saptığını göstererek) varamaz. Yani, sağa hiç sapmaması lazım.*

Görüşmeci: *Evet.*

Bahar: *Hep sola sapması gerek. Ama soldan üçüncü bölmeye hem sağdan hem soldan bölme açılıyor. Yani, buralara gelme... bunlar kendi içlerinde ayrılınca buna gelme olasılığı daha fazla oluyor.*

...

Görüşmeci: *... ikinciye geçelim. Bu haznelerden hangisinde daha çok ya da az ya da eşit birikecek onu sormuştuk.*

Bahar: *Bence ortadaki daha fazla. Yani, kenardakilerde daha fazla olma ihtimali bence yok. Ama diğerleri (kenar ve ortadaki haznelerin dışındakiler) birbirlerine eşit miktarda da olabilir ona karar veremedim. Ben bir şey denedim ama ilişkiyi kuramadım. Mesela şey bu solda kaldığı için (soldan ikinci hazneyi göstererek) bu tarafa geldikten sonra (ilk yol ayrımında sağa saptıktan sonra) sol tarafta kalması gerekiyor. Ama bu (ortadaki hazneyi göstererek) ortada yani tam karşıda. Her taraftan gelebilir (sağ ve sol yönlerini göstererek). O yüzden ortadakine daha fazla.*

Alıntı 17:

Begüm: *... Şimdi birinci soru bize topun en sol hazneye ulaşmasının olasılığı mı yoksa soldan üçüncü hazneye ulaşmasının olasılığı mı daha fazla diye soruyor. Ben buradan bakınca köşedeki haznelere ulaşmanın tek seçeneği olduğunu gördüm. Mesela en soldaki için tek seçenek bu (topu sürekli sola saparak izlediği yolu şekil üzerinde çiziyor). Diğer köşede olmayan ortadaki haznelerin ama en az iki seçenekten başladığını gördüm. Mesela, soldan üçüncü hazneye aşağıdan bakarsak buradan iki seçenek direk çıkıyor. O yüzden en soldaki haznenin olasılığının daha az olduğunu düşündüm ilk soruda.*

...

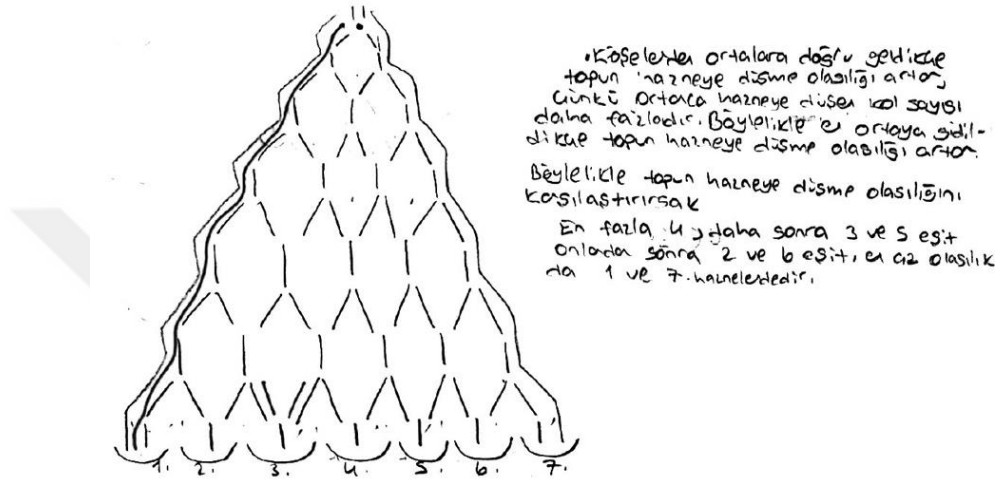
Görüşmeci: *... diğerleri arasında nasıl kıyaslama yaptın?*

Begüm: *Şimdi ortalara doğru gelince aşağıdan başlarsak (hazneden başlayıp yukarı çıktığını göstererek) önce iki seçeneğimiz var. Fakat köşelerde zaten direk bir seçenek olduğu için onlar gitti. En az seçeneğe sahip onlar. Mesela, soldan üçüncü ile dördüncü haznelere bakalım. Önce iki seçenekleri var ikisinin de. Burada eşitler seçenek bakımından. Ama yukarı doğru çıkınca şu şuraya geldi (soldan ikinci hazneden yukarı iki kere sol yaptı)*

ve sağa gidebilirim sadece. Diğerinin daha çok seçeneği var (Soldan üçüncü hazneden yukarı doğru çıkan rastgele bir yol çizdi).

Görüşmeci: Biraz daha açıklayabilir misin?

Begüm: Yani şöyle...ortadaki olasılığın artmasının sebebi köşelerdeki şeyler diye düşündüm. Hani köşelere çarpınca tek bir yönde aşağı gidecek top. Ama orta kısımda bir engel yok.

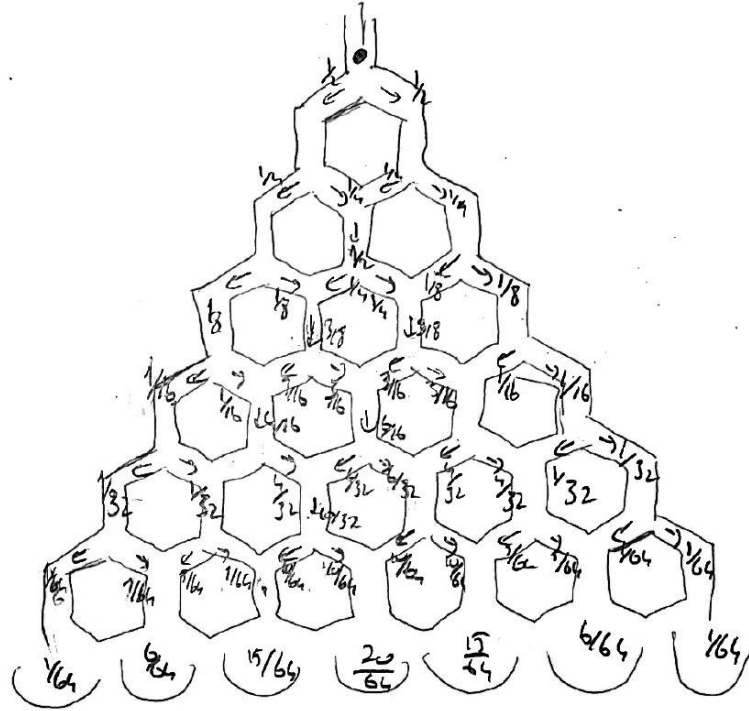


Şekil 4.1.3.1. Begüm'ün 'Şans Makinesi' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Mantıksal düşünme becerisi orta düzeydeki öğrencilerin mantıksal düşünme becerisi zayıf düzeydeki öğrencilere kıyasla diğer iki problemde olduğu gibi bu problemde de daha başarılı bir performans sergiledikleri görülmektedir. Mantıksal düşünme becerisi orta düzey olan öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinde 'satranç tahtası' probleminde olduğu gibi yine ilk 4 ögenin varlığı dikkat çekmektedir. Öğrencilerin zihinlerinde hatasız bir şekilde kurguladıkları düzeneği, yine zihinlerinde sezgisel ve mantıklı bir şekilde işletebilmeleri onların bu problemin çözümüne dair yaptıkları düşünce deneylerini tasarım ve yürütme açısından eksiksiz kılmaktadır. Fakat düzeneği işlettikleri sezgilerini matematiksel zeminde tartışamamaları vardıkları sonuçları şüpheyi yer bırakmayacak kuvvetten yoksun kılmaktadır. 16. ve 17. alıntılardan anlaşılacağı gibi her iki öğrenci de köşelerdeki haznelere köşelerde olmayan haznelere kıyasla top düşme ihtimalinin daha düşük olması gerektiğini çünkü köşelerdeki haznelere giden tek yol var iken diğerlerine giden kesinlikle daha fazla seçenek olduğunu söylemişler ve örneklerini göstermişlerdir. Fakat köşelerde olmayan haznelere ait top düşme olasılıklarının karşılaştırılması ile ilgili yaptıkları akıl yürütmeler

makul olmakla birlikte matematiksel bir zemine oturtulmamıştır. Bu matematiksel zeminin yokluğu onları problemin çözümüne ulaştıracak tespitlerde bulunmalarına ve dolayısıyla öngörülerini kesinleştirip sonuca ulaşmalarına engel olmuştur.

Alıntı 18:



Şekil 4.1.3.2. Aslı'nın 'Şans Makinesi' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Aslı: ... ilk başta şey yapmaya çalıştım. Biraz daha kolayla kaçmaya çalıştım... işlemden kaçınmaya çalıştım. Kaçındıkça da işin içinden çıkamamaya başladım... Oysaki direkt işleme dökerek kavşaklarda ayırsam, kavşakların birleşim noktalarında tolasam 5 dakikayı almayacak bir şekilde ilerleyecektim. Ama biraz zihnimden yapmaya çalıştım.

Görüşmeci: Anladım. İşlemsiz bir şekilde yapmaya çalıştın, sezgilerinle...

Aslı: Aynen, sezgisel yapmaya çalıştım. Bu da beni... sezgilerimi açıklayamadım. Açıklayamadığım zaman da şüpheye düştüm acaba böyle olmayabilir mi diye? Daha sonra bir kaç yol denemeye çalıştım şeklin üzerinden gidilebilecek şekilde. Onu en soldaki hazne için yaptım. Ona tek gidiş olduğunu buldum. Öyle olunca, ikinci... pardon üçüncü hazneye döndüm. Üçüncü hazneye dönünce de zaten direkt şekle bakınca da üçüncü haznenin üstünde iki tane yol var ona açılan ama en soldaki haznede yalnızca tek yol var ona açılan. Buradan

şunu çıkardım. Üçüncü hazneye düşme olasılığı daha yüksek çünkü ona giden daha çok yol var.

...

Görüşmeci: Birinci sorunun B olacağından eminsin ve matematiksel bir işleme girdiğini görmüyorum burada anlattıklarında. Çözümünde matematiksel olarak açıkladığını görüyorum.

Aslı: Matematiksel olarak topu bütün kavşaklardan tek tek geçirip birleşim noktalarında kavşaklara düşme olasılığını toplayıp daha sonra ikiye bölüp yeni kavşakları açıp hazneye düşene kadar bunu ilerlettim. En sonunda da solda ve sağda simetrik olmak üzere 20/64 ün sağında ve solunda aynı olasılıklarla düşme olasılıklarını buldum.

Görüşmeci: Anladım. Zaten görüyorum yazdığını en ortadaki hazneye düşme olasılığı 20/64 demişsin ve sağa sola gidildikçe haznelere topun düşme olasılığının simetrik bir şekilde azaldığını görüyorum. 2. sorunun da cevabını vermiş oldun aslında. Ama bu matematiksel işlemleri yapmadan önce sezgisel olarak düşündüm dediğin şeyi 2.soru için de anlatabilir misin?

Aslı: Aslında şöyle oldu. Birincinin cevabını oturttum bir şekilde sonra işleme de döktüm. Ama birinciden sonra ikinciye okuduğumda daha çok şunu yapmaya çalıştım. Bir şekilde yollar düşünmeye çalıştım haznelere düşen. Hatta ortadaki üç hazneye de eşit miktarda düşebilir diye de düşündüm. Ama daha sonra birinci soruda bulduğum cevaptan hareketle en sağdakine bir düşüyorsa diğer haznelere ona oranla daha çok var yani... haznelerde en sağdan ve soldan ortadaki hazneye geldikçe haznenin üstünde ona açılan, yani hazneye top düşmesini sağlayan yolların kavşaklarının sayısı artıyor. Bu yüzden ortada en fazla olasılık var.

Alıntı 19:

- ① Topun en soldaki hazineye olma olasılığı: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$
1. yol ayrımında kesinlikle sola ($\frac{1}{2}$ ihtimal)
2. - 3. - 4. - 5. - 6. yol ayrımında da kesinlikle sola gitmeli
- Çünkü bir kez sağa giderse diğer ayrımarda sola gitsa bile en sola ulaşamaz.
(Çizerek denedim)
- Topun soldan üçüncü hazineye olma olasılığı: $\frac{15}{64}$
- 4.kere sola 2.kere sağa giderse soldan üçüncü hazineye ulaşır.
- Sol - Sol - Sol - Sol - Sağ - Sağ farklı sıralanabilir.
- Tüm durumlar: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
- İstenen durum: $\binom{6}{4} \times \binom{2}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$
- ② İlk soruda da dediğim gibi kasetlere olma için hep sol ya da hep sağ yönde ilerlemesi gerekir. Ancak ortalara ilerledükçe topun hareket özgürlüğü artar. Bu yüzden ortalarla daha çok top kırılması mümkündür.
- Soldan sağa haznelere top düşme ihtimalleri
1. hazine $\rightarrow \frac{1}{64}$
2. hazine $\rightarrow \binom{6}{5} \times \binom{1}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \rightarrow \frac{6}{64}$
3. hazine $\rightarrow \frac{15}{64}$
4. hazine $\rightarrow \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \rightarrow \frac{20}{64}$
5. hazine $\rightarrow \frac{15}{64}$
6. hazine $\rightarrow \frac{6}{64}$
7. hazine $\rightarrow \frac{1}{64}$
1. soru B
2. soru C

Şekil 4.1.3.3. Aylin'in 'Şans Makinesi' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Mantıksal düşünme becerisi yüksek öğrencilerin ilk iki problem gösterdikleri başarıyı bu problemde de devam ettirdikleri görülmektedir. Onları mantıksal düşünme becerisi orta düzey olan öğrencilerden ayıran problemin çözümüne dair sezgisel yaklaşımlarının onları tatmin etmemesi, dolayısıyla yaptıkları düşünce deneylerinden elde ettikleri verileri matematiksel bir zeminde tartışabilmeleri ve bu verilerden makul tespitlerde bulunup sonuca gidebilmeleridir. Örneğin; 18. alıntıda Aslı'nın önce problemin sonucunu sezdiğini fakat bunun için yaptığı açıklamaları yeterli bulmaması sebebiyle düzeneğin yukarisından atılan bir topun düzenekteki her yol ayrımına gelme olasılıklarını tek tek hesaplamıştır. 19. alıntıda ise Aylin'in problemin sonucunu sezgisel olarak değerlendirebileceğimiz "hareket özgürlüğü" kelimesi ile ifade etmekle kalmadığı ve devamında kombinatorik işlemler ile

düzenekte topun takip edebileceği olası tüm yolları sistematik bir şekilde saydığı görülmektedir.

4.1.4. ‘Sonsuzluk’ Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar

SONSUZLUKLARIN KIYASLANMASI

Eğer iki sonlu kümenin * elemanları hiçbirini unutulmadan birbirleriyle eşlenebiliyorsa bu iki kümenin aynı sayıda elemanı olduğu; sonlu kümelerden birinde eşlenebilecek eleman kalmayıp diğerinde kaldığında ise bu iki kümenin birinin diğerinden fazla ya da eksik sayıda elemanı olduğu söylenir. Aynı yöntemle, iki sonsuz kümenin ** sonsuzluklarını da kıyaslamak mümkündür.

Tanım: Bir A kümesinin elemanları ile doğal sayılar kümesinin ($\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$) elemanlarının hiçbirini unutulmadan birbirleriyle eşlenebilmesinin en az bir yolu var ise A kümesine sayılabilir sonsuzlukta küme denir.

Pozitif rasyonel sayılar kümesinin *** ($\mathbb{Q}^+$) sayılabilir sonsuzlukta bir küme olup olmadığı ve pozitif rasyonel sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesinin sonsuzluğunun kıyaslanması hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir. $\mathbb{Q}^+$ ve $\mathbb{N}$ kümelerinin sonsuzluğu birbirine denktir.
- B) $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir küme değildir. $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$ den daha büyük bir sonsuzluğa sahiptir.
- C) $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir küme değildir. $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$ den daha küçük bir sonsuzluğa sahiptir.

* Sonlu küme: Eleman sayısı belirli bir doğal sayı ile ifade edilebilen kümedir.

** Sonsuz küme: Sonlu olmayan kümedir.

*** Rasyonel Sayı: $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ ve a, b aralarında asal olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılardır.

Kümeler kuramının kurucusu sayılan George Cantor’un öne sürdüğü iki sonsuz kümenin denkleğinin birebir eşleme yardımı ile kontrol edilmesi fikrinin⁶ öğrenciler tarafından ne derece sezilebileceğini incelemek için öğrencilere matematiksel düşünce deneyi yapmalarını gerektirecek ‘sonsuzluk’ problemi yöneltilmiştir.

Mantıksal düşünme becerisine göre belirlenen öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinde tespit edilen ve edilmeyen öğeler Tablo 4.1.4. te belirtilmiştir.

⁶ Cantor, aralarında en az bir bijektif (1-1 ve örten) fonksiyon tanımlanabilen kümelerin denk olduğu yaklaşımını şu tanım çerçevesinde ortaya koymuştur: $A \sim B \Leftrightarrow \{f|f: A \rightarrow B, \text{bijektif}\} \neq \emptyset$ (Güney ve Özkoç, 2015).

Tablo 4.1.4. ‘Sonsuzluk’ Probleminde Tespit Edilen Düşünce Deneyi Öğeleri

	Mantıksal Düşünme Becerisi İyi Düzeyde Olan Öğrenciler		Mantıksal Düşünme Becerisi Orta Düzeyde Olan Öğrenciler		Mantıksal Düşünme Becerisi Zayıf Düzeyde Öğrenciler	
	Aslı	Aylin	Bahar	Begüm	Cansu	Cihan
Düşünce Deneyi Öğeleri						
Hipotez kurma	*	*	*	*	*	*
Hayali dünya yaratma	*	*	*	*	*	*
Düşünce deneyi tasarlama	*	*	*			
Düşünce deneyi yürütme		*				
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma		*				
Sonuç çıkarma		*				

Öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerinde tespit edilen öge sayısının diğer problemlere kıyasla bu problemde daha düşük olmasına rağmen mantıksal düşünme becerisi arttıkça tespit edilen öge sayısındaki artış diğer problemlerdeki gibi gözlenebilmektedir. Hipotez kurma ve hayali dünya yaratma öğeleri her öğrencide tespit edilmiş olup mantıksal düşünme becerisi zayıf öğrencilerin genelde diğer problemlerde olduğu gibi bu problemde de bu aşamaların ötesine geçmekte sıkıntı yaşadıkları görülmektedir. Mantıksal düşünme becerisi orta düzeydeki öğrenciler için ‘orman gezintisi’ probleminde mantıksal düşünme becerisi yüksek öğrencilere yaklaşıırken burada zayıf öğrencilere daha yakın bir görüntü çizdikleri söylenebilir. Mantıksal düşünme becerisi yüksek öğrencilerin yaptıkları düşünce deneylerine baktığımızda ise tespit edilen öge sayısının diğer problemlerdekilere göre düştüğünü fakat diğer öğrencilere kıyasla genel olarak diğer problemlerdeki gibi yine daha çok ögenin tespit edildiği görülmektedir. Mantıksal düşünme becerilerine göre sırasıyla zayıf, orta ve iyi düzeyde olan öğrencilerin çalışma kağıtlarından ve görüşme kayıtlarından alınan dikkat çekici bölümler aşağıda sunulmuştur.

Alıntı 20:

Cansu: Ben ilk okuduğumda direk oluştu kafamda. Ama bulduğum sonuçla eşleşen bir şey oluşmadı.

Görüşmeci: Neydi öngörün?

Cansu: Öngörüm... iki kümenin de sonsuz olduğunu düşündüm. Sonsuzluk... ilk başta kıyaslanamaz dedim.

Görüşmeci: Nasıl?

Cansu: Yani, ikisi de sonsuz. Bir farkları yok diye düşündüm.

...

Görüşmeci: ... zihninde nasıl bir şey hayal ettin?

Cansu: Şey oldu. Aslında rasyonel sayılar doğal sayıları kapsıyor. Yani böyle kafamda. İç içe küme gibi.

...

Cansu: Şimdi ilk başta şey yaptım. ($\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$ yazdı.) Böyle sonsuza kadar gittiğini biliyorum zaten bunun. Sonra pozitif rasyonel sayılar için... İlk başta bunun için şey düşündüm direk. ($\mathbb{Q}^+ = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \dots\}$ yazdı.) Böyle düşündüm ama sadece bunlarla bitmiyor bunun devamı da var. ($\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \dots\}$ yazdı.) Şimdi eşleyeceğiz kümeleri. 0 ile $\frac{1}{2}$ yi eşledim. 1 ile $\frac{2}{2}$ yi eşledim. 2 ile $\frac{3}{2}$ yi eşledim. Sonra $\frac{4}{2}, \frac{5}{2}$ diye. Ama bu kümenin ($\mathbb{N}$) sonsuzluğu ile bu kümenin ($\mathbb{Q}^+$) sonsuzluğunun farklı olduğunu düşündüm. Pozitif rasyonel sayılar kümesinin elemanları daha fazla kalıyor.

Görüşmeci: Farklı eşleştirmeler mümkün mü sence? Tek seçeneğimiz bu mu? Çünkü bir tane eşleştirme örneği sundun ve olmadı dedin.

Cansu: Hmm... Yani, başka türlü de yapsam olmayacak diye düşünüyorum. Pozitif rasyonel sayılar hep daha fazla olacak.

B) $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir küme değildir. $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$ 'den daha büyük bir sonsuzluğa sahiptir.

$$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \dots\}, \{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

Şekil 4.1.4.1. Cansu'nun 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Alıntı 21:

Cihan: Soruyu okurken aklımda bir cevap vardı. İki sonsuzluk her zaman birbirine denktir. Adı üstünde sonsuzluk, nasıl birbiri ile eşlenmez dedim. Sonra biraz sonunun üstüne düşününce cevabın farklı olduğunu buldum. Çünkü doğal sayılar kümesi pozitif rasyonel sayılar kümesinin içinde olan bir küme zaten.

...

Cihan: ... sayı kümeleri vardı. Sayma sayıları, doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar diye giden. Kapsamlarını düşündüm... Pozitif rasyonel sayılar doğal sayıları kapsayan bir küme.

Görüşmeci: Değil. 0 var birinde diğerinde yok.

Cihan: Evet ama bir önemi yok. Çünkü doğal sayıları 0, 1, 2 diye yazıyorum. Rasyonel sayıları $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ diye yazsam buraya 0 ile 1 arasına sonsuz sayıda eleman koyarım ama bu aralığa doğal sayılarda bir şey koyamıyorum. Bu (rasyonel sayıları kastediyor) sadece kendi içinde bile bir sonsuzluk oluşturuyor.

Görüşmeci: Soruda bir tanım vermişti ve eşleştirmeden bahsediyordu. Ben burda öyle bir şey göremiyorum, kümelerin kapsamından bahsettin sadece.

Cihan: Şöyle yaptım onu. 1 ile 1 i eşleştirdim, 2 ile $\frac{1}{2}$ yi, 3 ile $\frac{1}{3}$ ü. Yani, 0 dan sonraki her doğal sayıyı sadece 0 ile 1 arasına sokabilirim eşleştirirsem.

Görüşmeci: 0 ı ne yaptın?

Cihan: Mesela onu da 2 ile eşleştirdim. 0 ile 1 arasında olmayan bir rasyonel sayı ile.

Görüşmeci: Sen burada bir eşleştirme örneği verdin. Farklı eşleştirmeler olamaz mıydı?

Cihan: Olur tabii. Farklı farklı yapabilirdim ama rasyonel sayılar kendi içinde de sonsuzluk barındırıyor. Mesela, doğal sayılarda 1 den 1000 e kadar olan elemanlar belli. Sonlu çünkü. Ama rasyonel sayılarda bu aralıkta sonsuzluk var.

Sonsuzluk kavramını düşünerek bir doğal sayı
Sonsun bir sayıdır ve Pisagor'un 3ten önceki sayıları ile birleştirildi
İk Sonsun bir birliğe karşılık bir bir bir bir bir bir bir bir
Olabilir bu kapsamları ile ilişkililer. Sayı kavramında
Kapsamları vardı. Sayma sayıları ile kapsamlı doğal sayılar ikinci bir sayı
Tam sayılar üçüncü kapsamdır ve bundan sonraki Rasyonel
Sayılar dördüncü kapsamdır. Bundan sonraki Sayılar beşinci
Tam sayılar içinde olan üstüne eklenir. Aynı bir kavram
bu kavramın beşinci olan doğal sayılardan sonraki sayılar
doğal sayılar bu kavramın içinde bir bir bir bir bir bir bir bir
bir bir bir bir bir bir bir bir bir bir bir bir bir bir bir bir
kapsamında. Doğal sayılar kavramının sonsuzluğu Rasyonel/Pozitif
Sayılarının kavramının sonsuzluğundan küçük bir kavramdır.
Sonuç B'dir.

Şekil 4.1.4.2. Cihan'ın 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Mantıksal düşünme becerisi zayıf olan öğrenciler problemin çözümüne ulaşmak için yaptıkları düşünce deneylerinde hipotez kurma ve hayali dünya yaratma öğelerini eksiksiz şekilde sağlamışlardır. Bu bağlamda zihinlerindeki $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Q}^+$ sonsuz kümelerinin elemanlarını birebir eşleştirme yoluyla bu iki sonsuz kümeyi karşılaştırmaya çalışmışlardır. Fakat iki öğrencinin de bu karşılaştırmayı yaparken yararlandıkları kavram alt küme kavramı olmuştur. Sonlu kümelerde eleman sayısı kıyaslaması yaparken işleyebilecek olan bu akıl yürütmenin (A ve B iki sonlu küme olsun. $A \subseteq B$ ise $s(A) \leq s(B)$ dir) sonsuz kümelerde işleyip işlenemeyeceği öğrenciler tarafından sorgulanmamış, problemde verilen sayılabilir sonsuzluk tanımı göz ardı edilmiştir. Bu düşünce o kadar ağır basmıştır ki farklı eşleştirmelerin yapılmasının da ulaştıkları sonucu değiştirmeyeceğini ifade etmişlerdir.

Alıntı 22:

Begüm: ... İki kümenin birbirine denk olmadığını düşündüm. Pozitif rasyonel sayılar kümesi doğal sayılar kümesinin tüm elemanlarını barındırıyor ve daha da fazla eleman barındırdığını söyledim. Bu yüzden kesinlikle birbirine denk değildir dedim. B şikkını seçtim. Yani, doğal sayılar daha sınırlı, tam şekilde gidiyor. Ama rasyonellerde kesirli de var.

Görüşmeci: Aslında sen alt küme, üst küme ilişkisinden bahsediyorsun. Dolayısıyla hep aynı elemanları birbiri ile eşleştiriyorsun. Bir de 0 elemanı pozitif rasyonel sayılar kümesinde yok. Ona dikkat etmemişsin.

Begüm: Aaa... evet. Ben onu görmemişim. Bir saniye... Şöyle bir şey de var doğal sayılarda sadece bir tane ortak elemanımız var. Pozitif rasyonel sayılar kümesinde sonsuza kadar arta kalan eleman olduğunu söyleyebiliriz. 0 ı pozitif rasyonel sayılarda ortak elemanlardan rastgele biri ile eşlerim.

Görüşmeci: Tamam... Farklı eşleştirme yolları da olabilir mi? Sen sadece bu şekilde, olabildiğince aynı elemanları aynı elemanlar ile eşleştirerek yaptın. Alternatif bir şeyler de olamaz mı?

Begüm: Benimkisi bir örnekti sadece, aynı elemanları eşleştirmeyebilirim. Ama doğal sayılardaki elemanlar sınırlı. Doğal sayıların elemanı kadar eleman ile eşleştirebilirim. O yüzden doğal sayıları hangi eleman ile eşleştirdiğimin de bir önemi kalmıyor.

Alıntı 23:

Bahar: Mesela, doğal sayılar 0,1,2,3 diye gidiyor ama rasyoneller öyle değil. Bu doğal sayıların aralarında da var. Oralarda da sonsuzluk oluşuyor. O yüzden rasyoneller daha bir büyük gibi geldi.

...

Bahar: Şimdi direk doğal sayılarda bir düzen var. Doğal sayıları 0 dan çok büyük şey yapmadan 10 a kadar yazdım. Altına pozitif rasyonel sayıları da düzenli şekilde yazıp eşleyeyim dedim. Mesela, 0.1, 0.2, 0.3, diye gitsem. Atlamış oluyorum. 0.1 den küçük olan sayılar da var çünkü. Başka şekilde yapsam da olmayacak. Çünkü doğal sayılarda başlangıç nokta var. Pozitif rasyonel sayıların en küçük değeri olsa oradan başlatsam eşleştirebilirim ama yok. Pozitif rasyonel sayılarda küçüklük de sonsuza gidiyor. Yani, doğal sayıları en küçükten başlatıp yazabiliriz ama rasyonelleri yazamayız. O yüzden, pozitif rasyonel sayılar kümesi sayılamaz sonsuzlukta bir küme ve doğal sayılardan daha büyük bir sonsuzluğa sahiptir dedim.

$\mathbb{Q}^+$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını bulabilmek için doğal sayılar kümesiyle eleman kalmıyacak şekilde eşleşip eşleşmediğini bulmak gerekir. Eğer eşleşebiliyorsa her iki küme de düzen içinde sonsuza kadar yazılabilir. Doğal sayılar düzen içinde yazılabiliriz, Fakat pozitif rasyonel sayıları yazamayız. Çünkü $\mathbb{Q}^+$ kümesinin 0'dan büyük sayıları kapsadığını biliriz ama hangi sayıdan başladığını yazamayız. Çünkü en küçük elemanı da sonsuzluktan başlar, böylelikle kalan elemanları da yazamayız.

Şekil 4.1.4.3. Bahar'ın 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Mantıksal düşünme becerisi orta düzeydeki öğrencilerin bu problemde diğer problemlere göre daha düşük bir performans sergiledikleri söylenebilir. 22. alıntıdan hareketle Begüm'ün çözümünün Cansu ve Cihan'ın çözümlerinden içerik olarak farklılaşmadığı açıktır. Diğerlerinin yaptığı gibi alt küme kavramından sıyrılamaması, sayılabilir sonsuzluk tanımını yakalayamaması onun düşünce deneyi tasarım aşamasında takılmasına sebep olmuştur. 23. alıntıda Bahar'ın yaklaşımına bakacak olursak alt küme kavramından uzaklaşıp birebir eşleştirme fikrini daha çok benimsediğini görmek mümkündür. İki küme arasında yapılan bu eşleştirmeyi fonksiyon ismini zikrederek ifade etmese de iki kümenin elemanlarının hiç

biri unutulmadan eşlenebilmesinin ancak o kümenin elemanlarının belli bir düzende yazılabilmesi durumunda olabileceğini ifade etmiştir. Düşünce deneyini başarılı bir şekilde tasarlayan Bahar deneyini yürütme aşamasında sorun yaşamış; rasyonel sayıları belli bir düzende yazma fikrinden hareketle farklı eşleştirmeler aramış fakat bunu bulamamıştır.

Alıntı 24:

Aslı: *Direk şöyle bir şey aklıma geldi. Doğal sayılarda kesirli ifadeler yok ama rasyonel sayılar kesirli ifadeleri kapsıyor. Sonsuz sayıda doğal sayı var tamam ama mesela 2 ile 3 arasında yine farklı sonsuz sayıda rasyonel sayı olabilir. O zaman rasyonel sayılar daha büyüktür. Doğal sayılar rasyonel sayıların alt kümesidir düşüncesi oluştu bende. Daha sonra işin içine girince biraz fikrim değişir gibi oldu ama tam da emin olamadım.*

Görüşmeci: *Sorudan ne anladın? ...*

Aslı: *Sorudan şunu anladım. Doğal sayılar ve pozitif rasyonel sayılar kümelerinin eleman sayıları birbirine eşit mi değil mi bunu soruyor bir bakıma aslında soru. Bunu anladım sorudan. Bir de 1-1 ve örten fonksiyon oluyor galiba, öyle bir şey düşündüm.*

Görüşmeci: *Hmm. Peki çözümün... Adım adım anlatabilir misin?*

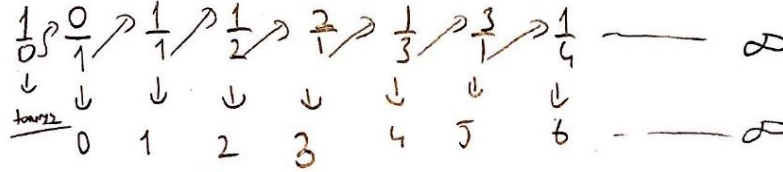
Aslı: *Şöyle ben ilk başta B şıkkı diye düşündüm. Soruyu biraz daha irdeleyince A şıkkına da yöneldim. Ama B şıkkını açıklamak daha kolay geldi bana çünkü onlara karşı kafamda direk bir şey oluşturabildim. Ama A şıkkını pozitif rasyonel sayılar sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir eee... bunu çok daha zor açıkladım kendime. Yani nasıl diyeyim bunu kanıtlamaya gereğim var diye düşündüm. Birden fazla yol denemeye çalıştım. Kuvvet, kat, fonksiyon, belli bir şekilde örüntüler denemeye çalıştım ama işin içinden çıkamadım çünkü sonu olmayan bir şeyden, sonsuzdan bahsediyoruz. Ben belli yere kadar gelebilirdim bunlarda ama belli yerlerden sonra sapabilirdi, böyle olduğunu garanti edemezdim. Dedim ki ben hep doğal sayıları rasyonel sayılara taşımaya çalıştım. Şimdi de rasyonellerden doğal sayılara taşıyayım bunu. Belki görüş açım daha açık olacak, kendimi daha iyi... aradaki bağlantıyı görebileceğim dedim. Birkaç şey denemeye çalıştım. Mesela bir yol buldum sandım. 0 tanımsız ama buradaki 0 ı taşımak için kullanıcam. $\frac{0}{1}$ dedim. Daha sonra buradaki 1 i ($\frac{0}{1}$ kesrinin paydasındaki 1 i göstererek) alıp buraya ($\frac{1}{1}$ kesrinin payını göstererek) taşıdım Bunu 0 ile eşleştirdim.*

Görüşmeci: *O kesrin paydasını bir sonra yazdığın kesrin payı olarak aldın.*

Aslı: Evet. Sonra $\frac{1}{2}$ yazdım. 1 ile eşleştirdim. $\frac{2}{1}$ yazdım. 2 ile eşleştirdim.

Görüşmeci: Payı taşıdın. Paydaya neden 1 yazdın.

Aslı: Rasyonellerin içerisine doğal sayıları da yerleştirebilmek için böyle yaptım. Ama atladığım kesirler olduğunu gördüm. İşin içinden çıkamadım.



Şekil 4.1.4.4. Aslı'nın 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek

Alıntı 25:

Aylin: Soruyu okudum. Sayılabilir sonsuzluk falan kafamı karıştırdı. Ama sonra soru kökünü okuduğumda şeyi sorduğunu anladım hani, pozitif rasyonel sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesinin birbirine dışarıda hiçbir eleman kalmadan her elemanın tek bir elemanla eşleştiği bir fonksiyon yazmam gerektiğini, eşleştirmem gerektiğini anladım.

Pozitif rasyonel sayılar kümesinin doğal sayılar kümesi ile birebir ve örten fonksiyon oluşturup oluşturamayacağımı soruyor.

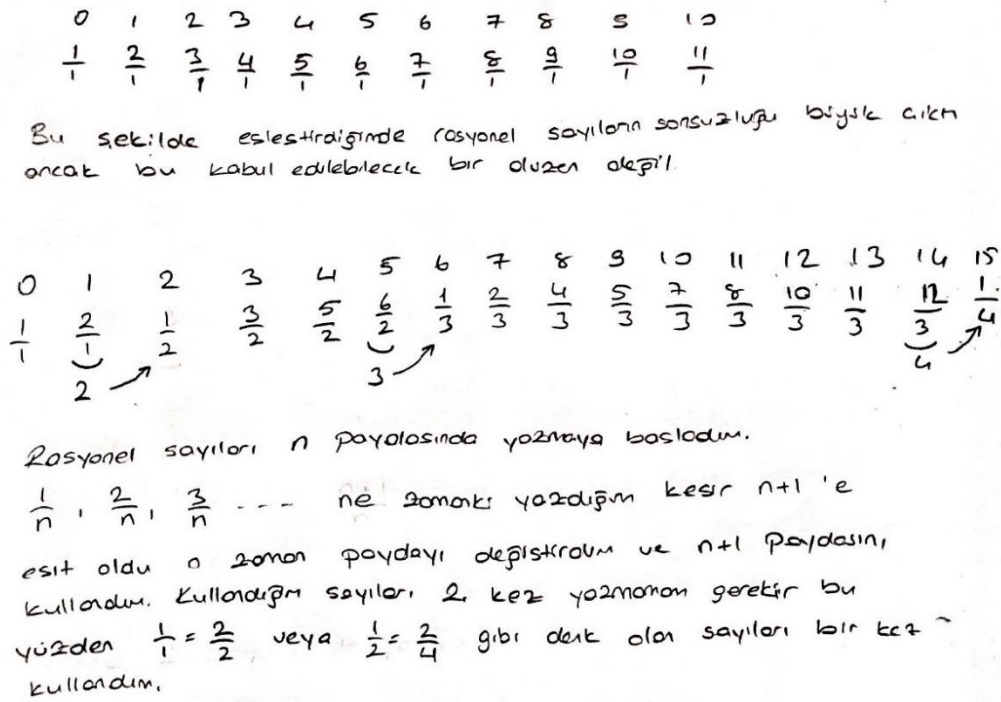
Şekil 4.1.4.5. Aylin'in 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek-1

Aylin: Doğal sayıları şöyle yazdığımız belli zaten. Hani, 0 dan 1, 2, 3 diye devam ediyor. Böyle yazdığım da ben hiçbir doğal sayıyı atlamıyorum. Ama rasyonel sayılarda atlama şansım çok fazla çünkü hani bileşik kesirler var, basit kesirler var, birçok sayı var hangisi payda hangisi paydada olacak yani. Bunu kaçırmamam için belli bir sırada yazmam gerekiyor. En basit yola gitti direk aklım ve hani tam sayıları rasyonel şekilde yazmak istedim ama baktım ki işin içinden çıkamıyorum.

Görüşmeci: Mesela 2 yi $\frac{2}{1}$, 3 ü $\frac{3}{1}$ şeklinde yazmaktan mı bahsediyorsun?

Aylin: Evet. Diyelim ki bayağı bir yazdım 99 a kadar geldim. 99 u $\frac{99}{1}$ ile eşleştiriyorum ama ben paydası 2 olanları 3 olanları ne zaman eşleştireceğim diye düşündüm ve bu düzenle eşleştiremeyeceğime karar verdim. Daha sonra aklıma hani ilk başta küçükleri bir elden çıkarayım gibi düşündüm. İşte 0 ile $\frac{1}{1}$ i eşleştirdim. 1 ile $\frac{2}{1}$ i eşleştirdim. Sonra dedim ki ben

1 i yazdım 2 yi yazdım ama o aralarında yarım dediğimiz $\frac{1}{2}$ yi yazmadım. 2 yi de o zaman $\frac{1}{2}$ ile eşleştireyim dedim. Sonra $\frac{2}{2}$ yi tekrar kullanmadım. Çünkü bunu ilk başta 0 ile eşleştirmiştım $\frac{1}{1}$ olarak. O zaman $\frac{3}{2}$ yi kullanayım dedim onu kullandım. Sonra $\frac{4}{2}$ yi kullanmadım çünkü onu da 1 ile eşleştirmiştım $\frac{2}{1}$ olarak. Yani birbirine denk olan kesirlerin sadece bir tanesini kullandım. Daha sonra $\frac{5}{2}$ yi kullandım. $\frac{6}{2}$ yi kullanınca fark ettim ki 3 eşit oldu. 3 e eşit olunca da paydası 3 olanlara geçtim. Bu şekilde yazdığım da hem paydası değişiyor. Hem payı değişiyor. Hem de tekrarlamaya gitmiyorum. Hiçbir elemanı atlamıyorum. Bu şekilde de eşleşmeyen eleman ya da iki elemanla eşleşen başka bir eleman olmuyor. Birebir ve örten fonksiyon oluşturuyor.

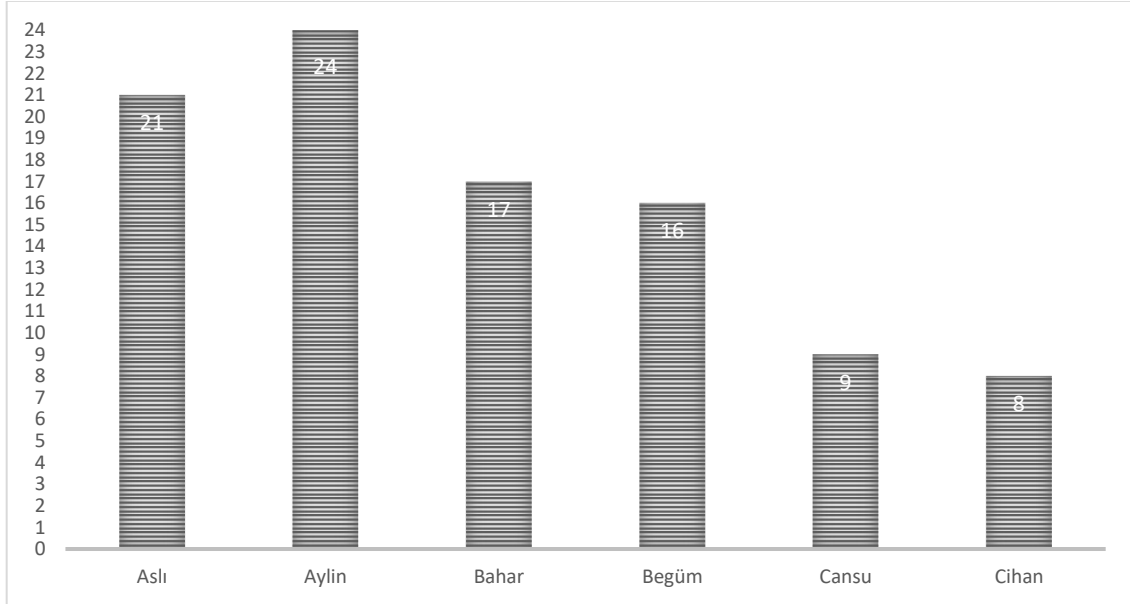


Şekil 4.1.4.6. Aylin'in 'Sonsuzluk' Problemine Ait Cevap Kağıdından Bir Örnek-2

Mantıksal düşünme becerisi iyi düzeyde olan öğrencilerin problemin çözümüne dair yaptıkları düşünce deneylerinin tasarımında yatan kavramın alt küme yerine fonksiyon olması ve bunu açık bir şekilde görüp ifade edebilmeleri onları diğer öğrencilerden ayırmaktadır. Örneğin; 24. alıntıda Aslı'nın sayılabilir sonsuzluk tanımında ifade edilenlerden bu iki küme arasında yapılan bu tür bir eşleştirmenin 1-1 fonksiyon belirteceğini yakaladığı görülmektedir. Aslı'nın iki kümenin elemanları arasında birebir eşleştirme çabasının bir sonuç vermemesi onun cevabı kesinleştirememesine sebep

olmuştur. 25. alıntıda ise Aylin'in verilen problemi "bu iki küme arasında yazılabilecek 1-1 ve örten bir fonksiyon bulabilir miyiz?" problemine dönüştürdüğü ve aradığı bu fonksiyonu bulduğu görülmektedir.

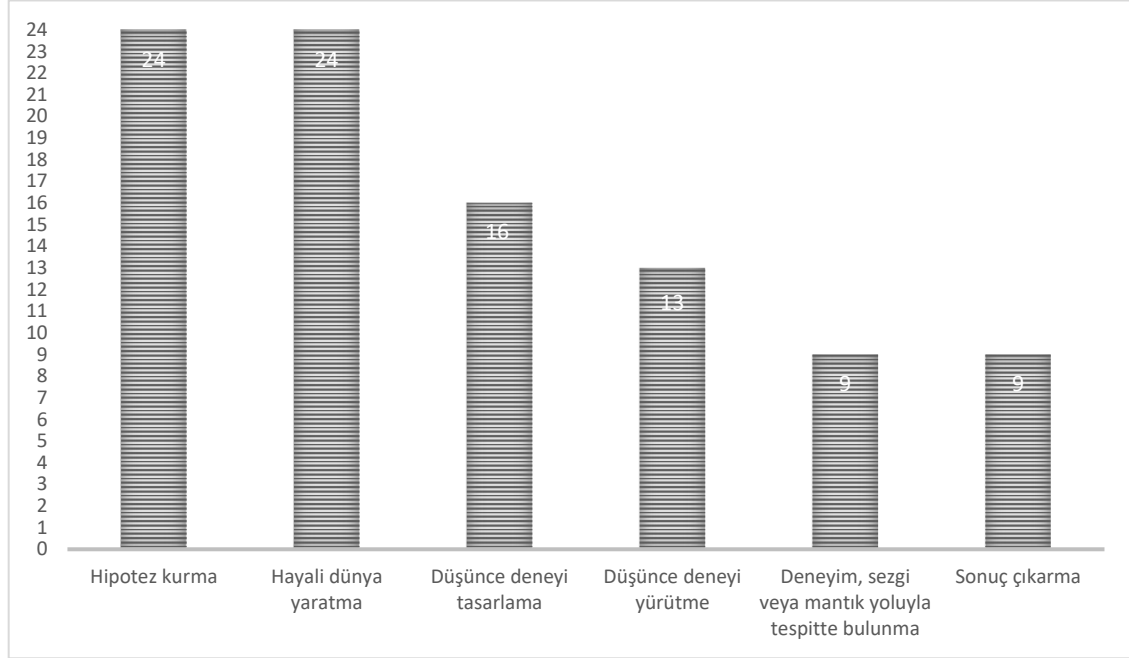
Uygulanan 4 problemin sonuçlarının bir araya getirildiği Grafik 4.1.4.1. her bir öğrencinin yaptığı düşünce deneylerinde toplam kaç öge tespit edebildiğini göstermektedir.



Grafik 4.1.4.1. Öğrencilerin Yaptıkları Düşünce Deneylerinde Tespit Edilen Öğrenci Bazlı Toplam Öge Sayısı

Öğrencilerde mantıksal düşünme becerisi arttıkça yaptıkları düşünce deneylerindeki öge sayısının da artışı açık bir şekilde görülmektedir.

Yine uygulanan 4 problemin sonuçlarının bir araya getirildiği Grafik 4.1.4.2 her düşünce deneyi ögesinin toplamda kaç kere tespit edilebildiğini göstermektedir.



Grafik 4.1.4.2. Öğrencilerin Yaptıkları Düşünce Deneylerinde Tespit Edilen Öge Bazlı Toplam Öge Sayısı

Düşünce deneyi yapan öğrenci hipotez kurma ve hayali dünya yaratma ögelerini kolay bir şekilde gerçekleştirirken, bundan sonra gelen ögeleri gerçekleştirmelerinin git gide zorlaşmakta olduğu söylenebilir. Düşünce deneyi tasarlama ve yürütme ögelerine de tespitte bulunma ve sonuç çıkarma ögelerine göre daha fazla ulaşıldığı görülmektedir.

4.2. Öğrencilerin Matematiksel Düşünce Deneyi Süreçlerindeki Kavram Yapıları ve Bu Kavramların Tarihsel Gelişimi Arasındaki İlişkinin İncelenmesi

Bu başlık araştırmanın 2. alt problemi ile ilgilidir. Öğrencilerin Matematiksel Düşünce Deneyi Testindeki ‘şans makinesi’ ve ‘sonsuzluk’ problemlerine ait cevap kağıtlarına yazdıkları çözümleri, görüşme kayıtları ve gözlem notları tekrar incelenerek Keiser (2004)’in Haeckel’in yinleme (recapitulation) teorisinin eğitim araştırmalarına uyarlaması çerçevesinde öğrencilerin düşünce deneyi sonucunda elde etmeleri beklenen kavramı ne dereceye kadar ve nasıl yapılandırdıkları, bu kavramların tarihsel süreçteki evrimi ile ilişkilendirilmeye çalışılmıştır.

4.2.1. ‘Şans Makinesi’ Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar

‘Şans makinesi’ problemi ile öğrencilerden olasılık kavramı üzerinden binom dağılımını sezmelerinin beklendiği belirtilmişti. Binom dağılımı kavramını doğru şekilde yapılandırmanın ön koşulunun ise olasılık kavramının farklı durumlar içerisinde (kombinatorik işlemler, Pascal üçgeni ile beraber) daha derinlikli düşünülebilmesi ile mevcut hale gelmektedir. Örneğin; bir madeni parayı yazı tura attığınızda yazı gelmesinin olasılığını hesaplamak ile beş madeni parayı attığınızda iki kez yazı gelmesi olasılığını hesaplamak arasında tarihsel süreçte de olduğu gibi ciddi zorluk farkı mevcuttur. Başka bir örnek verecek olursak “İki oyuncu da 1 oyun daha kazanacak olursa ödülü kazanmaktadır. Oyun bir kaza sonucu yarıda kesilirse, ödül nasıl paylaşılmalıdır?” sorusu şüphesiz bir olasılık hesabı barındırırken matematik ile ilgilenenler için üzerine eğilinecek ciddiyette bir problem değildir. Oysa bu bölüştürme sorusu bir önceki başlıkta olduğu gibi “Bir oyuncu 2, diğeri 1 oyun daha kazanacak olursa ödülü kazanmaktadır. Oyun bir kaza sonucu burada kesilirse, ödül nasıl paylaşılmalıdır?” şeklinde sorulduğunda o zaman matematik ile ilgilenenler için üzerine ciddi şekilde düşünülmesi gereken bir problem haline gelmektedir (Çapar, 2014). Buradan hareketle, verdiğimiz iki örneğin de ilk durumunun hesaplanabilmesi ciddi bir matematiksel akıl yürütme ve işlem gerektirmediği, sezgisel olarak da sonuca ulaşılabileceği, dolayısıyla bunların olasılığın bir matematik dalına dönüşmesi için yeterli gelmeyeceği; ikinci durumun üzerine yapılan çalışmaların ise olasılığın bir matematik dalına dönüşmesinin yolunu açtığı açıktır.

Öğrenciler de ‘şans makinesi’ problemi ekseninde yaptıkları düşünce deneylerinin niteliğine bağlı olarak olasılık ve binom dağılımı kavramlarına ait bir takım ipuçları elde etmişler ve tarihsel sürecin bir noktasında kendilerine yer edinmişlerdir. Başka bir deyişle bu probleme dair yaptıkları düşünce deneyleri aracılığıyla öğrencilerin olasılık ve binom dağılımı kavramlarını ne dereceye kadar ve nasıl yapılandırdıklarını bu kavramın yukarıda aktarılan tarihsel gelişiminde de görmek mümkündür. Bu bağlamda mantıksal düşünme becerilerine göre sırasıyla zayıf, orta ve iyi düzeyde olan öğrencilerin görüşme kayıtlarından alınan dikkat çekici bölümler aşağıda verilmiştir.

Alıntı 26:

Cihan: ... Bu top için bir sürü farklı yol var. Benim direk düşündüğüm tek şey şuydu. Bu altıgenler eşit. Bu altıgenler eşitse... düşecek top eşitse... bu altıgenin köşesine çarpıp herhangi bir yön çizmesi olasılığı $\frac{1}{2}$.

Görüşmeci: $\frac{1}{2}$ ihtimal sağa, $\frac{1}{2}$ ihtimal sola. Tamam.

Cihan: Dedim ki bu olasılık her yerde eşit ise... sonra sonuca bağladım.

...

Cihan: Eşit olasılıkla dağılıyorsa aşağıya da (hazneleri kastediyor) eşit olasılıkla dağılacaktır dedim.

Cihan'ın akıl yürütmesinin olasılık kavramına dair derinlikli bir fikirden yoksun olduğu görülebilir. Olasılık formülü $P(A) = \frac{s(A)}{s(N)}$ üzerinden istenilen hazne sayısını tüm hazne sayısına bölümü ile yapılan hesaplama düzeneğin işleyişindeki incelikleri yadsımaktadır. Cihan'ın bu probleme yaklaşımı bir zar ya da madeni para atma deneyi için yapılan olasılık yaklaşımları ile aynı düzeyde kalmıştır.

Alıntı 27:

Bahar: ... En soldaki bölmeye direk, yani soldan başlarsa gidiyor. Çünkü... yani, şuradan devam ederse (ilk yol ayrımında sağa saptığını ve sonrasında hep sola saptığını göstererek) varamaz. Yani, sağa hiç sapmaması lazım.

Görüşmeci: Tamam.

Bahar: Hep sola sapması gerek. Ama soldan üçüncü bölmeye hem sağdan hem soldan bölme açılıyor. Yani, buralara gelme... bunlar kendi içlerinde ayrılınca buna gelme olasılığı daha fazla oluyor.

...

Görüşmeci: ... ikinciye geçelim. Bu haznelerden hangisinde daha çok ya da az ya da eşit birikecek onu sormuştuk.

Bahar: Bence ortadaki daha fazla. Yani, kenardakilerde daha fazla olma ihtimali bence yok. Ama diğerleri (kenar ve ortadaki haznelerin dışındakiler) birbirlerine eşit miktarda da olabilir ona karar veremedim. Ben bir şey denedim ama ilişkiyi kuramadım. Mesela şey bu solda kaldığı için (soldan ikinci hazneyi göstererek) bu tarafa geldikten sonra (ilk yol ayrımında sağa saptıktan sonra) sol tarafta kalması gerekiyor. Ama bu (ortadaki hazneyi

göstererek) ortada yani tam karşıda. Her taraftan gelebilir (sağ ve sol yönlerini göstererek). O yüzden ortadakine daha fazla.

Alıntı 28:

Begüm: *Şimdi ortalara doğru gelince aşağıdan başlarsak (hazneden başlayıp yukarı çıktığını göstererek) önce iki seçeneğimiz var. Fakat köşelerde zaten direk bir seçenek olduğu için onlar gitti. En az seçeneğe sahip onlar. Mesela, soldan üçüncü ile dördüncü haznelere bakalım. Önce iki seçenekleri var ikisinin de. Burada eşitler seçenek bakımından. Ama yukarı doğru çıkınca şu şuraya geldi (soldan ikinci hazneden yukarı iki kere sol yaptı) ve sağa gidebilirim sadece. Diğerinin daha çok seçeneği var (Soldan üçüncü hazneden yukarı doğru çıkan rastgele bir yol çizdi).*

Görüşmeci: *Biraz daha açıklayabilir misin?*

Begüm: *Yani şöyle...ortadaki olasılığın artmasının sebebi köşelerdeki şeyler diye düşündüm. Hani köşelere çarpınca tek bir yönde aşağı gidecek top. Ama orta kısımda bir engel yok.*

27 ve 28. alıntılardan hareketle Bahar ve Begüm'ün Cihan'dan farklı olarak düzenekteki olasılık hesaplamalarının basit şekilde hesaplanabilecek bir olasılık hesabından daha karmaşık olduğunu gördükleri anlaşılmaktadır. Bunu yakalamalarında en büyük etken topun en köşedeki haznelere düşmesi için tek bir yolun mümkünken diğer haznelere açılan 1 den fazla yol olmasını görmeleri olmuştur. Bunun farkına varmalarına rağmen haznelere top düşme ihtimalleri arasındaki farkı matematiksel olarak ifade edememişlerdir. Bu sebeple açıklamaları kuvvetli bir sanı olmanın ötesine geçememiştir. Pascal ve Fermat'ın olasılık kuramının ortaya atılmasının öncesinde de benzer şekilde çözümü için kombinatorik işlemler gerektiren şans veya bölüştürme problemleri hakkında sezgisel açıklamalar veya basit olasılık hesaplamaları ile yapılan yanlış çözümlerden öteye gidilememiştir⁷.

⁷ Chevalier de Mere'in Blaise Pascal'a çözmesi için danıştığı problem şu şekildedir: Para karşılığında adil bir zarla 4 denemede en az bir kez 6 gelmesi üzerine mi yoksa adil iki zarla 24 denemede en az bir kez 6-6 gelmesi üzerine mi bahse girersem kazanma ihtimalim daha çoktur? Chevalier de Mere'in bu probleme ürettiği yanlış çözüm ise şöyledir: İlk durumun olasılığı $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, ikinci durumun olasılığı $24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$. Bu hesaba göre iki durumda da bahsi kazanma olasılığı aynıdır (Çapar, 2014).

Alıntı 29:

Aylin: ... Dedim ki 6 tane yol ayrımı var. Bunların hepsinde solu seçerse... Her bir yol ayrımı için dedim sağ ya da solu seçmesi $\frac{1}{2}$ ihtimal dedim ve bunu 6 kere çarptım. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ diye devam ettim. 6 kere çarpınca $\frac{1}{64}$ çıktı. Sonra topun soldan üçüncü hazneye düşme olasılığını hesapladım ve bunu yaparken de ilk çizimden yola çıktım. Dedim ki eğer bir kere sağ yaptığında ikinci hazneye düşüyse belki ikinci kez sağ yaptığımda da üçüncü hazneye düşer gibi düşündüm ve doğru çıktı. Toplamda 4 kez sol, 2 kez sağ yaptığımda top üçüncü hazneye düştü her şartta. Bir kaç tane çizip denedim. Daha sonra tüm durumları buldum bir olasılık çıkarabilmek için yine. Tüm durumlar 64 tane çünkü her yol ayrımında 2 farklı seçeneğim var. İstenen durum ise benim 4 tane sol 2 tane sağ yapmam. Ama bunu farklı şekilde sıralayabilirim. Daha sonra ben de $\binom{6}{4}$ ve $\binom{2}{2}$ ni çarptım. Ayı ayrı bulup çarptım. $\binom{6}{4} = 15$ ve $\binom{2}{2} = 1$ yapıyor ve çarptım 15 oluyor. O zaman topun soldan üçüncü hazneye düşme olasılığı $\frac{15}{64}$. Yani topun en soldaki hazneye düşme olasılığı $\frac{1}{64}$ ise soldan üçüncü hazneye düşme olasılığı daha fazladır dedim ve B şikkını seçtim.

Görüşmeci: Tamam.

Aylin: İkinci soruda sadece iki hazne değil 7 hazne için de ayrı ayrı yorum yapmam gerekiyor gibi düşündüm en başta ve dedim ki daha kolay kaçmak için en soldan bir tane sağa kaydardım bir tane sağa gitme ihtimali oldu. İki tane sağa kaydardım iki tane sağa gitme ihtimali oldu. Hani, sağa sola gitme, hareket özgürlüğü artıyor diye düşündüm ve bu şekilde yorumladım. Ama sadece sezgisel olarak kalmaması için bunu matematiğe vurdum. Ve dedim ki soldan sağa haznelere top düşme ihtimalini hesaplayayım. Birinci haznede hesaplamıştım. $\frac{1}{64}$ tü. İkinci hazneyi hesaplarken 1 kere sağ, 5 kere sol yapması gerekiyor dedim. Bunu hesapladım $\frac{6}{64}$ çıktı. Yani, 6 farklı yol var. Üçüncü hazneyi bulmuştum, 15 farklı yol olduğunu. 4. hazne için de 3 kere sağ, 3 kere sol yapması gerekiyor. Buradan da 20 çıktı. 20 farklı yol da 4. hazne için var. Daha sonra 20 yol çıkan 4. hazne tam ortası ve 5, 6, 7 de ilk üçte yaptığımızın solları sağ olan versiyonu oluyor. Yani sırasıyla 15, 6 ve 1 olarak devam ediyor. En sondaki için 6 kere sağ yapması lazım mesela. Daha sonra şıklardan yola çıktığımda yeteri kadar fazla sayıda top atılırsa en fazla ortada top birikecek. En az da köşelerde birikecek. Bu da C şikkı oluyor.

29. alıntıda Aylin'in çözüme ulaşmak için her hazneye açılan kaç yol olduğunu kombinatorik işlemler yardımıyla bulduğu görülüyor. Bu işlemler ona problemin sonucu hakkında kesin yargılarla konuşabilmesi ve sezgilerinin aldaticılığına düşmemesini sağlamaktadır. O halde, Aylin'in yaptığı düşünce deneyi ile Pascal ve Fermat'ın kurduğu olasılık kuramının eksiksiz bir uygulamasını gerçekleştirdiği söylenebilir.

Araştırmanın ilk problemine verdiğimiz yanıt doğrultusunda öğrencilerin mantıksal düşünme becerisi arttıkça yaptıkları matematiksel düşünce deneyi sürecinin niteliğinin de artmakta olduğu görülmektedir. 'Şans makinesi' problemine ait öğrencilerin yaptıkları matematiksel düşünce deneylerinin niteliği, o düşünce deneylerinde kullanılan olasılık kavramının gelişkinliği ile paralellik göstermektedir. Öğrencilerin yaptıkları deneylerde farklı seviyelerde kullanabildikleri olasılık kavramının da bu kavramın tarihsel sürecinde bir döneme denk geldiği gözlemlenmektedir. Öğrencinin olasılık kavramını yapılandırıp geliştirme aşaması, aynı kavramın tarihsel süreçteki gelişim aşamaları ile aynıdır. Örneğin; kombinatorik işlemleri olasılık problemlerine uygulamak öğrencinin en son geleceği aşamadır. Bunun öncesinde basit olasılık hesaplamaları ve sezgisel akıl yürütmelerin içselleştirilmesi ve yetersizliğinin fark edilmesi gereklidir.

4.2.2. 'Sonsuzluk' Problemine Ait Bulgular ve Yorumlar

'Sonsuzluk' problemi üzerinden öğrencilerin verilen tanım doğrultusunda yapacakları düşünce deneyleri ile sonsuzluk kavramı üzerindeki algılarının ne derece genişleyebileceği belirlenmek istenmişti. Bu kavramın doğru yapılandırılması için ise tarihsel süreçteki ile benzer şekilde, öğrencilerin de o zamana kadar bildiklerini sandıkları bu kavram üzerine daha derin düşünmeleri, çelişkiye düştüklerinde gerekiyorsa tabularını yıkmaları gerekmektedir. Öğrencilerin problemde verilen tanımdan hareketle sonlu kümelerde geçerli olan bir işleyişin (sonlu bir kümenin öz alt kümesi kendinden daha az elemana sahiptir) sorgulamadan sonsuz kümelerde kullanılamayacağını fark etmeleri ve buna bağlı kalarak ya da kalmayarak gerçekleştirdiği akıl yürütmeleri yaptıkları düşünce deneylerinin niteliğini belirlemektedir. Deney süreci içerisindeki bu akıl yürütmeleri sonsuzluk kavramının tarihsel sürecinde de tespit etmek mümkündür. Bu bağlamda mantıksal düşünme becerilerine göre sırasıyla zayıf, orta ve iyi düzeyde olan öğrencilerin görüşme kayıtlarından alınan dikkat çekici bölümler aşağıda verilmiştir.

Alıntı 30:

Cansu: Ben ilk okuduğumda direk oluştu kafamda. Ama bulduğum sonuçla eşleşen bir şey oluşmadı.

Görüşmeci: Neydi öngörün?

Cansu: Öngörüm... iki kümenin de sonsuz olduğunu düşündüm. Sonsuzluk... ilk başta kıyaslanamaz dedim.

Görüşmeci: Nasıl?

Cansu: Yani, ikisi de sonsuz. Bir farkları yok diye düşündüm.

...

Görüşmeci: ... zihninde nasıl bir şey hayal ettin?

Cansu: Şey oldu. Aslında rasyonel sayılar doğal sayıları kapsıyor. Yani böyle kafamda. İç içe küme gibi.

Alıntı 31:

Cihan: Soruyu okurken aklımda bir cevap vardı. İki sonsuzluk her zaman birbirine denktir. Adı üstünde sonsuzluk, nasıl birbiri ile eşlenmez dedim. Sonra biraz sonunun üstüne düşününce cevabın farklı olduğunu buldum. Çünkü doğal sayılar kümesi pozitif rasyonel sayılar kümesinin içinde olan bir küme zaten.

Alıntı 32:

Begüm: ... İki kümenin birbirine denk olmadığını düşündüm. Pozitif rasyonel sayılar kümesi doğal sayılar kümesinin tüm elemanlarını barındırıyor ve daha da fazla eleman barındırdığını söyledim. Bu yüzden kesinlikle birbirine denk değildir dedim. B şikkını seçtim. Yani, doğal sayılar daha sınırlı, tam şekilde gidiyor. Ama rasyonellerde kesirli de var.

30. ve 31. alıntılardan Cansu ve Cihan'ın ortak olarak öncelikle ilk bakışta sonsuzlukların kıyaslanamayacağını ya da hepsinin aynı olacağını düşünmesi ardından birebir eşleme yöntemini etkili şekilde kullanmayıp birinin diğerinin alt kümesi olduğu için pozitif rasyonel sayılar kümesinin doğal sayılar kümesinden daha büyük bir sonsuz olduğunu ifade

etmişlerdir. 32. alıntıda Begüm'ün de benzer bir yaklaşım sergilediği görülmektedir. (20, 21 ve 22. alıntılarda da görüldüğü gibi öğrencilerin doğal sayıların 0 ı barındırması sebebi ile pozitif rasyonel sayıların alt kümesi olmamasını daha sonrasında fark etmelerine rağmen fikirlerinde bir değişiklik olmamıştır). Bu anlamda Cansu, Cihan ve Begüm'ün zihinlerindeki sonsuzluk kavramı tarihsel süreçte matematiksel tanımının verilemediği ve verildiğinde paradokslara sebep olduğu sonsuzluk kavramı ile örtüşmektedir.

Alıntı 33:

Aylin: Soruyu okudum. Sayılabilir sonsuzluk falan kafamı karıştırdı. Ama sonra soru kökünü okuduğumda şeyi sorduğunu anladım hani, pozitif rasyonel sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesinin birbirine dışarıda hiçbir eleman kalmadan her elemanın tek bir elemanla eşleştiği bir fonksiyon yazmam gerektiğini, eşleştirmem gerektiğini anladım.

...

Aylin: Doğal sayıları şöyle yazdığımız belli zaten. Hani, 0 dan 1, 2, 3 diye devam ediyor. Böyle yazdığım da ben hiçbir doğal sayıyı atlamıyorum. Ama rasyonel sayılarda atlama şansım çok fazla çünkü hani bileşik kesirler var, basit kesirler var, birçok sayı var hangisi payda hangisi paydada olacak yani. Bunu kaçırmamam için belli bir sırada yazmam gerekiyor...

...

Aylin: ... Daha sonra aklıma hani ilk başta küçükleri bir elden çıkarayım gibi düşündüm. İşte 0 ile $\frac{1}{1}$ i eşleştirdim. 1 ile $\frac{2}{1}$ i eşleştirdim. Sonra dedim ki ben 1 i yazdım 2 yi yazdım ama o aralarında yarım dediğimiz $\frac{1}{2}$ yi yazmadım. 2 yi de o zaman $\frac{1}{2}$ ile eşleştireyim dedim. Sonra $\frac{2}{2}$ yi tekrar kullanmadım. Çünkü bunu ilk başta 0 ile eşleştirmiştik $\frac{1}{1}$ olarak. O zaman $\frac{3}{2}$ yi kullanayım dedim onu kullandım. Sonra $\frac{4}{2}$ yi kullanmadım çünkü onu da 1 ile eşleştirmiştik $\frac{2}{1}$ olarak. Yani birbirine denk olan kesirlerin sadece bir tanesini kullandım. Daha sonra $\frac{5}{2}$ yi kullandım. $\frac{6}{2}$ yi kullanınca farkettim ki 3 eşit oldu. 3 e eşit olunca da paydası 3 olanlara geçtim. Bu şekilde yazdığım da hem paydası değişiyor. Hem payı değişiyor. Hem de tekrarlamaya gitmiyorum. Hiçbir elemanı atlamıyorum. Bu şekilde de eşleşmeyen eleman ya da iki elemanla eşleşen başka bir eleman olmuyor. Birebir ve örten fonksiyon oluşturuyor.

33. alıntıda Aylin'in tanımdan hareketle iki sonsuz kümenin eleman sayılarının (kardinalitelerinin) kıyaslanmasına dair fikir yürütebilmek adına iki sonsuz küme arasında birebir ve örten bir fonksiyon araması gerektiğini tespit ettiği ve böyle bir fonksiyonu bulabilmek için doğal sayıları yazabildiği gibi pozitif rasyonel sayıları da belli bir düzen içerisinde yazmaya çalıştığı görülmektedir. Aylin'in bu çözümünden hareketle sonsuz kümelerin kıyaslanmasını sonlu kümelerin kıyaslanmasından ayırt edebildiği sonucu da çıkmaktadır çünkü o Cansu, Cihan ve Begüm'ün yaptığı gibi sonlu bir kümenin öz alt kümesi kendinden daha az elemana sahiptir düşüncesini sonsuz kümeler için kullanmayı tercih etmemiştir. Aylin'in bu probleme dair gerçekleştirdiği düşünce deneyi ile sonsuzluk kavramını yapılandırışı ile tarihte Galileo gibi birçok matematikçinin sonlu ve sonsuz kümelerin çalışma prensipleri arasında bir ayrım olması gerektiğini sezmesi ve Cantor'un bu düşünceyi kuramsallaştırıp geliştirmesi arasında benzerlikler bulunabilir.

Bu problemde de 'şans makinesi' problemine benzer şekilde öğrencilerin mantıksal düşünme becerisi arttıkça yaptıkları düşünce deneyinin niteliğinin de arttığı söylenebilir. Bu probleme ait yapılan düşünce deneylerin niteliği matematiksel anlamda sonsuzluğun nasıl bir şey olduğunu ne derece görebildikleri ile paralellik göstermektedir. Bu bağlamda sonlu işlemlerin çalışma prensibi ile sonsuz işlemlerin çalışma prensibini ayırt edebilmek önemlidir. Örneğin; sonlu bir sayı olan n ye 1 eklemek o sayıyı büyültür ve $n + 1$ yapar. Fakat matematikte sonsuz, bir sayı ya da nesne değil sıfattır. O yüzden $\infty + 1$ bir sayı olmadığı gibi ∞ dan büyük de değildir. Anlamı sınırsız büyüyen bir değişkene 1 eklersek elde ettiğimiz değişken de durmadan büyük şeklinde ifade edilebilir (Nesin, 2017). Tarihsel süreçte geline nokta sonsuzluğu bu şekilde yapılandırması öğrencinin gelmesini beklediğimiz son aşamadır.

BÖLÜM V: SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmanın sonuçlarına, bu sonuçların eğitimdeki yerinin tartışılmasına ve bu sonuçlara ilişkin önerilere yer verilecektir.

5.1. Sonuç ve Tartışma

Öğrencilerin yaptıkları düşünce deneyi süreçlerinde tespit edilen öğelerin azlığı ya da çokluğu o düşünce deneyinin niteliğini tayin etmekte bir kriter olmaktadır. Mantıksal düşünme becerisine göre belirlenen 11. sınıf öğrencilerinin cevap kağıtları ve görüşmelerinden öğrencilerde mantıksal düşünme becerisi arttıkça yaptıkları matematiksel düşünce deneyi süreçlerinde tespit edilen bu öğelerin de arttığı, dolayısıyla yapılan düşünce deneylerinin daha nitelikli olduğu görülmektedir. Bu ise düşünce deneyi yapmanın analitik düşünme, hipotez kurma, test etme gibi mantıksal düşünme becerilerine bağlı olduğu sonucunu göstermektedir (Karakuyu ve Tortop, 2009). Dolayısıyla bu becerilerin öğrencilere kazandırılmasının bir yolu da onlara düşünce deneyi yaptırmaktır. Mantıksal düşünme becerisi zayıf öğrencilerin problemi anlama ya da hayal etme noktalarında sorun yaşamadıkları fakat çözüm için matematiksel sezgilerinden ya da deneyimlerinden yararlanamadıkları açıktır. Uygulama esnasında da bu öğrencilerin problemleri diğer öğrencilere göre daha çabuk bitirdikleri gözlemlenmiş ve problemlere verdikleri cevaplar daha kısa ve net olmuştur. Mantıksal düşünme becerisi orta ve iyi düzeydeki öğrencilerin ise yaptıkları düşünce deneylerinde daha derinlikli akıl yürütmelere rastlanılmaktadır. İki düzeydeki öğrenciler de genel olarak düşünce deneyi tasarlama ve yürütme aşamalarında sorun yaşamamışlardır. Bu iki düzey arasındaki en belirgin farklardan biri düşünce deneyinde sonuca gitme noktasında olmuştur. Mantıksal düşünme becerisi orta düzeydeki öğrencilerin ‘orman gezintisi’ problemi dışında diğer problemlerde genel olarak ciddi ilerlemeler sağlamalarına rağmen yürüttükleri düşünce deneyinden gerekli çıkarımları yapamadıkları ve sonuca ulaşamadıkları görülmektedir. Orta ve iyi düzey arasında bir diğer belirgin fark ise matematiksel iletişim anlamındadır. Matematiksel iletişim (Kabel ve Baran, 2016) öğrencilerin matematiği anlamlandırma süreçlerinde matematiksel düşüncelerini görünür kılan ve matematiksel kavramlar ile bütüncül olarak geliştirilmesi gereken bir süreç becerisi olarak tanımlanmaktadır. Çalışmadan çıkarılan matematiksel iletişim ve düşünce deneyi yürütme sürecindeki ilerleme arasındaki ilişkiye benzer şekilde Bagley ve Gallenberger (1992) öğrencilerin problem çözme ve matematiksel iletişim becerileri arasında pozitif korelasyona sahip bir ilişki olduğunu söylemektedir. Problem

özme becerisi yüksek olan öğrencilerin özümlemlerini ve düşünsel süreçlerini daha net aktardıkları gözlemlenirken problem çözme becerisi daha zayıf olan öğrenciler düşündüklerini anlatırken zorlanmışlardır. MEB (2013) ortaöğretim programında da öğrencilerin matematik dilini kullanımında gelişebilmelerini sağlayacak ortamların hazırlanması vurgulanmaktadır. Bu noktada günümüz koşullarına uygun yetişmesi beklenen öğrencilere bu becerilerin düşünce deneyi yaparak öğrenme gibi farklı öğretim yöntemleri de dahil olmak üzere çeşitli şekillerde kazandırılması gerekmektedir. Mantıksal düşünme becerisi iyi düzeydeki öğrencilerin cevap kağıtları ile görüşmede anlattıkları arasında çok az fark varken orta düzeydeki öğrencilerin zihinlerinde kurdukları şeyleri kağıda aktarmada sorun yaşadıkları gözlemlenmiştir. Aynı sorun mantıksal düşünme becerisi zayıf öğrencilerde de kendini göstermiştir. Mantıksal düşünme becerisi iyi düzeydeki öğrencilerin problemlerde çözümüne ulaşabilmeleri problemi anladıktan sonra problemin çözümü için gerekli matematiksel kavramı matematik dilinde etkin kullanabilmeleri ile mümkün olmuştur.

Öğrencilerin yapılandırdıkları kavramlar incelendiğinde mantıksal düşünme becerisi zayıf düzeydeki öğrencilerin kavramları daha ilkel ya da tarihsel süreçteki yanlışları ile beraber yapılandırmış oldukları görülmektedir. Orta düzeydekilerin genel olarak zayıf düzeydekilere kıyasla kavramları yeterli olmasa bile daha gelişkin halde yapılandırdıkları ve yanlışları bir derece azalttıkları söylenebilir. İyi düzeydekilerin ise orta düzeye kıyasla kavramları daha derinlikli ve daha az yanlış ile yapılandırdıkları ifade edilebilir. Kavram yanlışlarının kavramsal öğrenmenin önündeki en büyük engellerden biri olduğu bilinmektedir (Türkdoğan, Güler, Bülbül, ve Danişman, 2015). Kavram yanlışları mevcut konunun doğru ve bütünlüklü bir şekilde anlaşılmasını engellediği gibi matematik dersinin birikimli (kümülatif) yapısından dolayı daha sonra öğretilecek konuların da yanlış öğrenilmesine ve farklı kavram yanlışlarının oluşmasına sebep olmaktadır (Şandır, Ubuz, ve Argün, 2007). Öğrenimin önündeki bu ciddi engelin öğrencilerin matematiğe karşı olan inanç ve tutumlarında da olumsuz etkilere neden olduğu bilinmektedir (Zembat, 2015). Tüm bunları göz önünde bulundurarak düşünce deneyi yaparak öğrenme yönteminin öğrencilerin zihinlerinde var olan kavramların ne dereceye kadar doğru yapılandırıldıklarını tespit etme ve yanlışlarının nasıl ortadan kaldırılacağına dair (gerekirse tarihten alıntılar ile) özüm üretme amaçlı kullanılabilir. Ayrıca bu tür uygulamaların işbirlikli öğrenme ortamlarında gerçekleştirilmesi ile öğrencilerin kavramları sorgulayarak, sorgulatarak ve birbirlerinden öğrenerek aşama aşama yapılandırmaları gerçekleştirilebilir (Reiner, 1998). Şüphesiz ki

düşünce deneyi yapmasını gerektirecek problemler onların problem çözme becerilerini de katkı sağlayacaktır çünkü bu problemler rutin olmayan sonucuna ulaşılması zorlu bir süreç gerektiren problemlerdir (Acar ve Gürel, 2016). Araştırmaya katılan öğrencilerin de oturum öncesi ve sonlarındaki olumlu geribildirimleri matematiksel düşünce deneyinin matematik eğitiminde kullanımı durumunda derse aktif katılan öğrenci sayısını artıracak ve bu sayede öğrenmelerinin daha kalıcı olacağını söylemek mümkündür.

5.2. Öneriler

Matematik öğretmeni ve matematik eğitimi araştırmacıları için araştırmadan çıkan sonuçlara ilişkin öneriler aşağıdaki gibidir.

- Matematiksel düşünce deneyinin matematik eğitiminde kullanımının öğrencilerin problem çözme becerileri ve kavram yapılandırma süreci üzerinde olumlu etkileri olduğundan öğretmenlere belirleyecekleri uygun durumlarda bu tür sınıf içi uygulamaların kullanımı tavsiye edilmektedir.
- Matematik tarihinde düşünce deneyi yapmayı gerektirmiş ve matematikçilerin uzun süreler çözmek için uğraş verdiği çok sayıda problem bulunabilir. Tarihi arka planı olan bir problemin seçilmesi öğrencilere bu problem üzerinden matematiğin gelişim aşamalarına da tanıklık etme imkanı sunar. Bu bağlamda kendini dönemin bir matematikçisinin yerine koyabilir ve onun tecrübelerini paylaşma imkanı bulabilir.
- Bu konuda çalışacak araştırmacılara sınıf seviyesi veya sosyo-ekonomik düzeyi farklı gruplarda daha fazla katılımcı ve daha fazla problem durumu ile düşünce deneyinin öğrencinin kavramsal gelişimine, mantıksal düşünme becerisine ve eleştirel düşünme becerisine etkisinin araştırılması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

- Acar, H. (2013). *Fizik öğrencilerinin düşünce deneyleri ile düşünme süreçlerinin incelenmesi*. İstanbul: Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı.
- Acar, H. ve Gürel, Z. (2016). Düşünce deneyleri yolu ile öğrencilerin eylemsizlik kavramının araştırılması. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 69-96.
- Anderson, J. (2009). Mathematics curriculum development and the role of problem solving. *ACSA Conference*, (s. 1-8).
- Application of complex number in engineering*. (2019, 10 30). <https://www.ukessays.com/essays/mathematics/application-of-complex-number-in-engineering.php> adresinden alındı
- Ataseven, B. (2012). Nitel bilimsel araştırmalarda veri kalitesinin önemi. *Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 543-564.
- Ateş, M. E. (2012). *Felsefe ve bilimlerde düşünce deneylerinin yapısı ve işlevi*. Muğla: Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Felsefe Anabilim Dalı.
- Aylar, E. (2014). *Yedinci sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Ankara: Hacettepe Üniversitesi İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Bilim Dalı.
- Aylar, E. ve Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 559-579.
- Aztekin, S. (2015). Matematiksel bir kavram olarak sonsuzluk ve ötesi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice, *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 501-516). Ankara: Pegem Akademi.
- Bademci, S. (2008). *Fizik problemleri çözmede düşünce deneylerinin yeri: birinci ve beşinci sınıf fizik öğretmen adayları üzerine bir inceleme*. Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Fizik Eğitimi Bilim Dalı.
- Bademci, S. ve Sarı, M. (2014). Fizik problemleri çözmede düşünce deneyleri fizik öğretmen adayları üzerine bir inceleme. *Eğitim ve Bilim*, 203-215.
- Bagley , T. ve Gallenberger, C. (1992). Assessing students' dispositions: using journal to improve students' performance. *Mathematics Teacher*, 660-663.
- Baki , A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.
- Baki, A. (2014). *Matematik tarihi ve felsefesi*. Ankara: PEGEM Akademi.

- Başer, D. ve Duman, E. Z. (2018). Akademisyenlerin mantıksal düşünmeye ilişkin algıları. *Yükseköğretim ve Bilim Dergisi*, 136-144.
- Bolstridge, K. (2019, 03 26). *Newton's thought experiment*. Honors Lab Physics - Universal Gravitation: <http://pvhslabphysics.weebly.com/newtons-thought-experiment-motion-of-planets-and-satellites.html> adresinden alındı
- Boyer, C. (2015). *Matematiğin tarihi*. Ankara: Doruk Yayınları.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations In mathematics*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Brown, J. R. (2004). Why thought experiments transcend experience. *Contemporary Debates in Philosophy of Science*, 23-43.
- Brown, J. R. (2005). *The laboratory of the mind thought experiments In the natural sciences*. London, New York: Taylor & Francis e-Library.
- Brown, J. R. (2008). *Philosophy of mathematics*. New York, Oxford: Routledge Taylor & Francis Group.
- Buzzoni, M. (2011). On mathematical thought experiments. *Epistemologia*, 61-88.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö., Karadeniz, Ş., ve Demirel, F. (2013). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi.
- Creswell, J. (2012). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Boston: Pearson Education.
- Çapar, U. (2014). Olasılık kuramının gelişimi - I. *Matematik Dünyası*, 57-66.
- Çevik, A. (2019). *Matematik felsefesi ve matematiksel mantık*. İstanbul: Nesin Yayıncılık.
- Dede, Y. ve Yaman, S. (2006). Fen ve matematik eğitiminde problem çözme: kuramsal bir çalışma. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 116-128.
- Demirel, Ö. (2002). *Planlamadan değerlendirmeye öğretme sanatı*. Ankara: Pegem A Yayınları.
- Durmuş , B., Yurtkoru, S. ve Çinko, M. (2018). *Sosyal bilimlerde SPSS'le veri analizi*. İstanbul: Beta Basım Yayım Dağıtım.
- Durusoy, A. (2004). Olanak, olasılık ve olabilirlik (imkan, ihtimal ve kuvve). *M.Ü. İlahiyat Fakültesi Dergisi*, 121-134.
- Encyclopedia Britannica. (2020, 01 31). *Olbers' paradox*. Encyclopedia Britannica: <https://www.britannica.com/science/Olbers-paradox> adresinden alındı
- Ersoy, E. ve Güner, P. (2014). Matematik öğretimi ve matematiksel düşünme. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 102-112.

- Galili, I. (2009). Thought experiments: determining their meaning. *Science & Education*, 1-23.
- Geban, Ö., Askar, P. ve Özkan, İ. (2010). Effects of computer simulations and problem-solving approaches on high school students. *The Journal of Educational Research*, 5-10.
- Georgiou, A. (2005). *Thought experiments in physics problem solving: on intuition and imagistic simulation*. UK: University of Cambridge, Faculty of Education.
- Glas, E. (1999). Thought-experimentation and mathematical innovation. *Studies in History and Philosophy of Science*, 1-19.
- Güçlü, N. (2003). Lise müdürlerinin problem çözme becerileri. *Milli Eğitim Dergisi*, 272-300.
- Güler, N. (2011). *Eğitimde ölçme ve değerlendirme*. Ankara: Pegem Akademi.
- Güney, Z. ve Özkoç, M. (2015). *Soyut matematik*. İzmir: Dinozor Kitabevi.
- Gür, B. (2011). *Matematik felsefesi*. Ankara: Kadim Yayınları.
- Güzel, N. ve Ünal, H. (2015). Olmak ya da olmamak: olasılık; işte bütün mesele! İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice, *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 699-720). Ankara: Pegem Akademi.
- Halıcı, E. (2013). *Zeka oyunları I*. Ankara: TÜBİTAK.
- Hasançebi, B., Terzi, Y. ve Küçük, Z. (2020). Madde güçlük indeksi ve madde ayırt edicilik indeksine dayalı çeldirici analizi. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 224-240.
- Hume, D. (2011). *Essays moral, political, literacy*. Indianapolis: The Online Library of Liberty.
- Ireson, G. (2005). Einstein and the nature of thought experiments. *School Science Review*, 47-51.
- Irvine, A. D. (1991). Thought experiments in scientific reasoning. T. Horowitz, & G. Massey, *Thought experiments in science and philosophy* (s. 149-165). Maryland: Rowman & Littlefield Publishers.
- Kabael, T. ve Baran, A. A. (2016). Matematik öğretmenlerinin matematiksel iletişim becerilerinin gelişimine yönelik farkındalıklarının incelenmesi. *İlköğretim Online*, 868-881.
- Karaca, E., Yurdabakan, İ., Çetin, B., Nartgün, Z., Bıçak, B. ve Gömleksiz, M. (2010). *Eğitimde ölçme ve değerlendirme*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

- Karaçay, T. (2006). Olasılığın matematiksel temelleri ve yeni arayışlar . *Mantık, Matematik ve Felsefe IV. Ulusal Sempozyumu* (s. 1-22). İzmir: İstanbul Kültür Üniversitesi Yayınları.
- Karakuyu, Y. ve Tortop, H. S. (2009). Düşünce deneyleriyle ilgili problem çözme etkinliğinin öğrencilerin mantıksal düşünme becerileri ve kavramsal anlama düzeylerine etkisinin araştırılması. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 42-58.
- Kaukua, J. (2018). İbn Sina'ya göre kendinin bilincinde olmak veya öz-bilinç. *Sabah Ülkesi*, 18-21.
- Kaya, S. (2013). *İşbirlikli öğrenme ve akran değerlendirmenin akademik başarı, bilişüstü yeti ve yardım davranışlarına etkisi*. Sivas: Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Eğitim Bilimleri Ana Bilim Dalı.
- Keiser, J. (2004). Struggles with developing the concept of angle. *Mathematical Thinking And Learning*, 285-306.
- Kılıç, H. (2016). Probleme dayalı öğretim. Komisyon, *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 643-654). Ankara: Pegem Akademi.
- Klassen, S. (2006). The science thought experiment how might it be used profitably in the classroom. *Interchange*, 77-96.
- Korkmaz, A. ve Avar, A. (2019). Olasılık kuramında veni, vidi, vici. *Uluslararası Bilimsel Araştırmalar Dergisi*, 435-446.
- Korkut, F. (2002). Lise öğrencilerinin problem çözme becerileri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 177-184.
- Laal, M. ve Ghodsi, S. M. (2012). Benefits of collaborative learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 486-490.
- Lakatos, I. (2017). *Kanıtlar ve çürütmeler*. İstanbul: Nesin Yayıncılık.
- Lawson, A. (1992). The development of reasoning among college biology students - a review of research. *Journal of College Science Teaching*, 338-344.
- Linn, M. C., Pulos, S. ve Gans, A. (1981). Correlates of formal reasoning: content and problem effects. *Journal of Research in Science Teaching*, 435-447.
- Luntley, M. (2016). What's the problem with Dewey? *European Journal of Pragmatism and American Philosophy*, 1-21.
- Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Thousand Oaks: SAGE.

- Nesin, A. (2015). *Sezgisel kümeler kuramı*. İstanbul: Nesin Yayınevi.
- Nesin, A. (2017). *Matematik ve develerle eşekler*. İstanbul: Nesin Yayınevi.
- Nesin, A. (2017). *Matematik ve gerçek*. İstanbul: Nesin Yayıncılık.
- Norton, J. (1996). Are thought experiments just what you thought. *Canadian Journal of Philosophy*, 333-366.
- Norton, J. (2004). On thought experiments is there more to the argument. *Philosophy of Science*, 1139-1151.
- Oral, H. ve Can, H. (2009). Güvercin yuvası ilkesi. *Matematik Dünyası*, 103-109.
- Özmantar, M. F. (2015). Sonsuzluk kavramı: tarihsel gelişimi, öğrenci zorlukları ve çözüm önerileri. M. F. Özmantar, E. Bingölbalı ve H. Akkoç, *Matematikselsel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (s. 151-180). Ankara: Pegem Akademi.
- Platon. (2015). *Devlet*. İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.
- Punch, K. (2016). *Sosyal araştırmalara giriş*. Ankara: Siyasal Kitabevi.
- Reiner, M. (1998). Thought experiments and collaborative learning in physics. *International Journal of Science Education*, 1043-1058.
- Reiner, M. ve Gilbert, J. (2000). Epistemological resources for thought experimentation in science learning. *International Journal of Science Education*, 489-506.
- Reiner, M. ve Gilbert, J. (2000). Thought experiments in science education potential and current realization. *International Journal of Science Education*, 265-283.
- Routledge, R. (2020, Mayıs 17). *Binomial distribution*. Encyclopedia Britannica: <https://www.britannica.com/science/binomial-distribution> adresinden alındı
- Saban, A. (2000). *Öğrenme öğretme süreci yeni teori ve yaklaşımlar*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Sorensen, R. (1992). *Thought experiments*. New York: Oxford University Press.
- Stanford Encyclopedia of Philosophy. (2019, 06 10). <https://plato.stanford.edu/entries/thought-experiment/> adresinden alındı
- Stuart, M., Fehige, Y. ve Brown, J. R. (2018). *The routledge companion to thought experiments*. London & New York: Routledge Taylor & Francis Group.
- Subaşı, M. ve Okumuş, K. (2017). Bir araştırma yöntemi olarak durum çalışması. *Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 419-426.
- Şandır, H., Ubuz, B. ve Argün, Z. (2007). 9. sınıf öğrencilerinin aritmetik işlemler, sıralama, denklem ve eşitsizlik çözümlerindeki hataları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 274-281.

- T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Genel Müdürlüğü. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı*. Ankara: T.C. Milli Eğitim Bakanlığı.
- Tabachnick, B. ve Fidell, L. (2013). *Using multivariate statistics*. New Jersey: Pearson.
- Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2011). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.
- Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı*. Ankara: T.C. Milli Eğitim Bakanlığı.
- Tan, Ş., Kayabaşı, Y. ve Erdoğan, A. (2002). *Öğretimi planlama ve değerlendirme*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Thompson, D. R., Senk, S. L. ve Gwendolyn, J. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 253-295.
- Tobin, K. ve Capie, W. (1981). The development and validation of a group test of logical thinking. *Educational and Psychological Measurement*, 413-423.
- Türkdoğan, A., Güler, M., Bülbül, B. Ö. ve Danişman, Ş. (2015). Türkiye’de matematik eğitiminde kavram yanlışlarıyla ilgili çalışmalar: tematik bir inceleme. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 215-236.
- Van Bendegem, J. P. (2003). Thought experiments in mathematics. *Philosophica*, 9-33.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 101-119.
- Worley, P. (2020, 01 30). *The ship of Theseus*. The Philosophy Foundation - Thinking Changes: <https://www.philosophy-foundation.org/enquiries/view/the-ship-of-theseus> adresinden alındı
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, C. (2018). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yıldırım, K. (2010). Nitel araştırmalarda niteliği artırma. *İlköğretim Online*, 79-92.
- Yılmaz, U. (2015). *Eğitimde ölçme ve değerlendirme*. Ankara: Teorem Yayıncılık.
- Zembat, İ. Ö. (2015). Kavram yanlışsı nedir? M. F. Özmantar, E. Bingölbali, ve H. Akkoç, *Matematiksek Kavram Yanlışları ve Çözüm Önerileri* (s. 1-7). Ankara.

EKLER

EK 1. MANTIKSAL DÜŞÜNME YETENEĞİ TESTİ

Açıklama: Bu test, çeşitli alanlarda, özellikle Fen ve Matematik dallarında karşılaşabileceğiniz problemlerde neden-sonuç ilişkisini görüp, problem çözme stratejilerini ne derece kullanabileceğinizi göstermesi açısından çok faydalıdır. Bu test içindeki sorular mantıksal ve bilimsel olarak düşünmeyi gösterecek cevapları içermektedir.

Not: Soru Kitapçığı üzerinde herhangi bir işlem yapmayınız ve cevaplarınızı yalnızca cevap kağıdına yazınız. Cevap kağıdını doldururken dikkat edilecek hususlardan birisi, 1 den 8 e kadar olan sorularda her soru için cevap kağıdında iki kutu bulunmaktadır. Soldaki ilk kutuya sizce sorunun uygun cevap şikkını yazınız, ikinci kutucuğa yani “Açıklaması” yazılı kutucuğa ise o soruyla ilgili soru kitapçığındaki Açıklaması kısmındaki şıkları okuyarak sizce en uygun olanını seçiniz. Örneğin 12’nci sorunun cevabı sizce b ise ve Açıklaması kısmındaki en uygun açıklama ikinci şık ise cevap kağıdını aşağıdaki gibi doldurun:

12. b Açıklaması 2

9. ve 10. soruları ise soru kitapçığında bu sorularla ilgili kısımları okurken nasıl cevaplayacağınızı daha iyi anlayacaksınız.

Soru 1: Bir boyacı, aynı büyüklükteki altı odayı boyamak için dört kutu boya kullandığına göre sekiz kutu boya ile yine aynı büyüklükte kaç oda boyayabilir?

- A) 7 oda
- B) 8 oda
- C) 9 oda
- D) 10 oda
- E) Hiçbiri

Açıklaması:

- 1) Oda sayısının boya kutusuna oranı daima $\frac{3}{2}$ olacaktır.
- 2) Daha fazla boya kutusu ile fark azalabilir.
- 3) Oda sayısı ile boya kutusu arasındaki fark her zaman iki olacaktır.
- 4) Dört kutu boya ile fark iki olduğuna göre, altı kutu boya ile fark yine iki olacaktır.
- 5) Ne kadar çok boyaya ihtiyaç olduğunu tahmin etmek mümkün değildir.

Soru 2: On bir odayı boyamak için kaç kutu boya gerekir? (Birinci soruya bakınız)

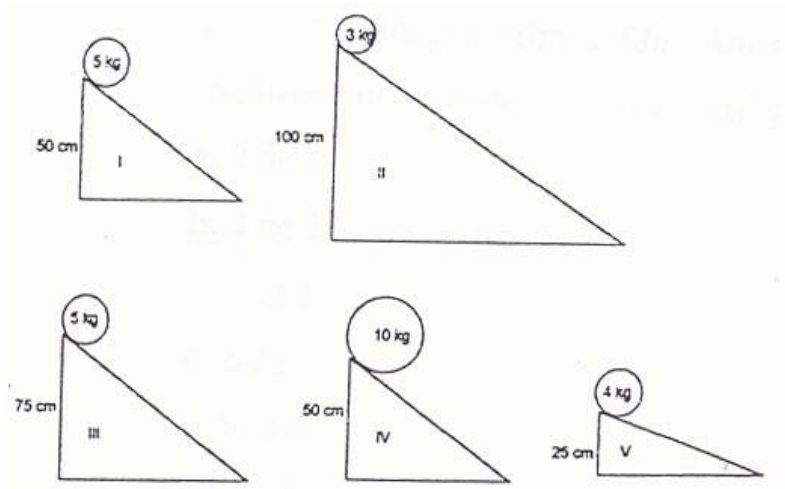
- A) 5 kutu
- B) 7 kutu
- C) 8 kutu
- D) 9 kutu
- E) Hiçbiri

Açıklaması:

- 1) Boya sayısı kutusunun oda sayısına oranı daima $\frac{2}{3}$ tür.
- 2) Eğer beş oda daha olsaydı, üç kutu boya daha gerekecekti.
- 3) Oda sayısı ile boya kutusu arasındaki fark her zaman ikidir.
- 4) Boya kutusu sayısı oda sayısının yarısı olacaktır.
- 5) Boya miktarını tahmin etmek mümkün değildir.

Soru 3: Topun eğik bir düzlemde (rampa) aşağı yuvarlandıktan sonra kat ettiği mesafe ile eğik düzlemin yüksekliği arasındaki ilişkiyi bulmak için deney yapmak isterseniz, aşağıda gösterilen hangi eğik düzlem setlerini kullanırdınız?

- A) I ve IV
- B) II ve IV
- C) I ve III
- D) II ve V
- E) Hepsi

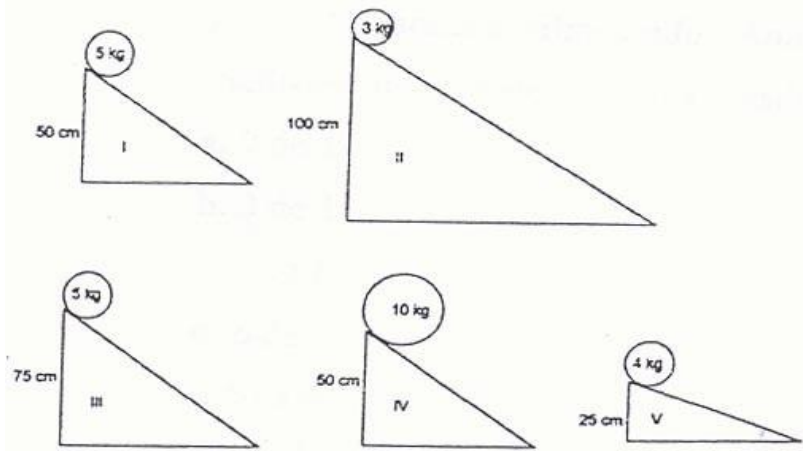


Açıklaması:

- 1) En yüksek eğik düzlemle (rampa) karşı en alçak olan karşılaştırılmalıdır.
- 2) Tüm eğik düzlem setleri birbiriyle karşılaştırılmalıdır.
- 3) Yükseklik arttıkça topun ağırlığı azalmalıdır.
- 4) Yükseklikler aynı fakat top ağırlıkları farklı olmalıdır.
- 5) Yükseklikler farklı fakat top ağırlıkları aynı olmalıdır.

Soru 4: Tepeden yuvarlanan bir topun eğik düzlemde (rampa) aşağı yuvarlandıktan sonra kat ettiği mesafenin topun ağırlığıyla olan ilişkisini bulmak için bir deney yapmak isterseniz, aşağıda verilen hangi eğik düzlem setlerini kullanırdınız?

- A) I ve IV
- B) II ve IV
- C) I ve III
- D) II ve V
- E) Hepsi



Açıklaması:

- 1) En ağır olan top en hafif olanla kıyaslanmalıdır.
- 2) Tüm eğik düzlem setleri birbiriyle karşılaştırılmalıdır.
- 3) Topun ağırlığı arttıkça, yükseklik azaltılmalıdır.
- 4) Ağırlıklar farklı fakat yükseklikler aynı olmalıdır.
- 5) Ağırlıklar aynı fakat yükseklikler farklı olmalıdır.

Soru 5: Bir Amerikalı turist Şark Ekspresi'nde altı kişinin bulunduğu bir kompartımana girer. Bu kişilerden üçü yalnızca İngilizce ve diğer üçü ise yalnızca Fransızca bilmektedir. Amerikalının kompartımana ilk girdiğinde İngilizce bilen biriyle konuşma olasılığı nedir?

- A) 2 de 1
- B) 3 de 1
- C) 4 de 1
- D) 6 da 1
- E) 6 da 4

Açıklaması:

- 1) Ardarda üç Fransızca bilen kişi çıkabildiği için dört seçim yapmak gerekir.
- 2) Mevcut altı kişi arasından İngilizce bilen bir kişi seçilmelidir.
- 3) Toplam üç İngilizce bilen kişiden sadece birinin seçilmesi yeterlidir.
- 4) Kompartımandakilerin yarısı İngilizce konuşur.
- 5) Altı kişi arasından bir İngilizce bilen kişinin yanısıra üç tane de Fransızca bilen kişi seçilebilir.

Soru 6: Üç altın, dört gümüş ve beş bakır para bir torbaya konulduktan sonra, dört altın, iki gümüş ve üç bakır yüzük de aynı torbaya konur. İlk denemede torbadan altın bir nesne çekme olasılığı nedir?

- A) 2 de 1
- B) 3 de 1
- C) 7 de 1
- D) 21 de 1
- E) Yukarıdakilerden hiçbiri

Açıklaması:

- 1) Altın, gümüş ve bakırdan yapılan nesneler arasından bir altın nesne seçilmelidir.
- 2) Paraların $\frac{1}{4}$ ü ve yüzüklerin $\frac{4}{9}$ u altından yapılmıştır.
- 3) Torbadan çekilen nesnenin para ve yüzük olması önemli olmadığı için toplam 7 altın nesneden bir tanesinin seçilmesi yeterlidir.
- 4) Toplam yirmi bir nesneden bir altın nesne seçilmelidir.
- 5) Torbadaki 21 nesnenin 7 si altından yapılmıştır.

Soru 7: Altı yaşındaki Ahmet'in şeker almak için 50 lirası vardır. Bakkaldaki kapalı iki şeker kutusundan birinde 30 adet kırmızı ve 50 adet sarı renkte şeker bulunmaktadır. İkinci bir kutuda ise 20 adet kırmızı ve 30 adet sarı şeker vardır. Ahmet kırmızı şekerleri sevmektedir. Ahmet'in ikinci kutudan kırmızı şeker çekme olasılığı birinci kutuya göre daha fazla mıdır?

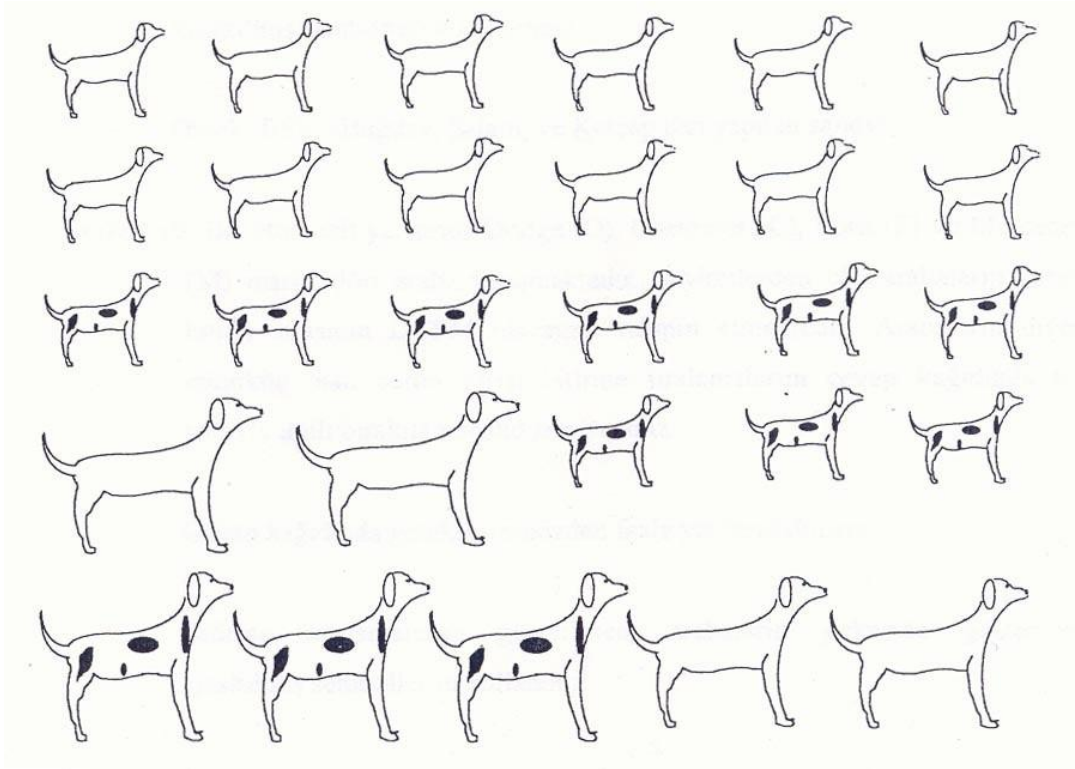
- A) Evet
- B) Hayır

Açıklaması:

- 1) Birinci kutuda 30, ikincisinde ise yalnızca 20 kırmızı şeker vardır.
- 2) Birinci kutuda 20 tane daha fazla sarı şeker, ikincisinde ise yalnızca 10 tane daha fazla sarı şeker vardır.
- 3) Birinci kutuda 50, ikincisinde ise yalnızca 30 sarı şeker vardır.
- 4) İkinci kutudaki kırmızı şekerlerin oranı daha fazladır.
- 5) Birinci kutuda daha fazla sayıda şeker vardır.

Soru 8: 7 büyük ve 21 tane küçük köpek şekli aşağıda verilmiştir. Bazı köpekler benekli bazıları ise beneksizdir. Büyük köpeklerin benekli olma olasılıkları küçük köpeklerden daha fazla mıdır?

- A) Evet
B) Hayır



Açıklaması:

- 1) Bazı küçük köpeklerin ve bazı büyük köpeklerin benekleri vardır.
- 2) Dokuz tane küçük köpeğin ve yalnızca üç tane büyük köpeğin benekleri vardır.
- 3) 28 köpekten 12 tanesi benekli ve geriye kalan 16 tanesi beneksizdir.
- 4) Büyük köpeklerin $\frac{3}{7}$ si ve küçük köpeklerin $\frac{9}{21}$ i beneklidir.
- 5) Küçük köpeklerden 12 sinin, fakat büyük köpeklerden ise sadece 4ünün beneği yoktur.

Soru 9: Bir pastanede üç çeşit ekmek, üç çeşit et ve üç çeşit sos kullanılarak sandviçler yapılmaktadır.

Ekmek Çeşitleri

Et Çeşitleri

Sos Çeşitleri

Buğday(B)

Salam(S)

Ketçap(K)

Çavdar(Ç)

Piliç(P)

Mayonez(M)

Yulaf(Y)

Hindi(H)

Tereyağı(T)

Her bir sandviç ekmek, et ve sos içermektedir. Yalnızca bir ekmek, bir et ve bir sos çeşidi kullanılarak kaç çeşit sandviç hazırlanabilir?

Cevap kağıdı üzerinde bu soruyla ilgili bırakılan boşluklara bütün olası sandviç çeşitlerinin listesini çıkarın. Cevap kağıdında gereksiniminizden fazla yer bırakılmıştır. Listeyi hazırlarken ekmek, et ve sos çeşitlerinin yukarıda gösterilen kısaltılmış sembollerini kullanınız. Örnek: BSK= Buğday, Salam ve Ketçap dan yapılan sandviç

Soru 10: Bir otomobil yarışında Dodge (D), Chevrolet (C), Ford (F) ve Mercedes (M) marka dört araba yarışmaktadır. Seyircilerden biri arabaların yarışı bitiriş sırasının DCFM olacağını tahmin etmektedir. Arabaların diğer mümkün olan bütün yarışı bitirme sıralamalarını cevap kağıdında bu soruyla ilgili bırakılan boşluklara yazınız.

Cevap kağıdında gereksiniminizden fazla yer bırakılmıştır. Bitirme sıralamalarını gösterirken, arabaların yukarıda gösterilen kısaltılmış sembollerini kullanınız. Örnek: DCFM yarışı sırasıyla önce Dodge'nin, sonra Chevrolet'in, sonra Ford'un ve en sonra Mercedes'in bitirdiğini gösterir.

EK 2. MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ

1.OTURUM

Sevgili öğrenciler,

Aşağıda problem bir cevaba ulaşabilmeniz için hayal gücünüzü kullanarak düşünce deneyi yapmanızı gerektirecek bir problemdir. Verilen problem durumunu zihninizde canlandırarak sonucunu zihin gözünüzle görmeye çalışınız. **Bu süreçte gerçekleştirdiğiniz akıl yürütmelerinizi ve sonucunuzu dayandırdığınız sebepleri cevap kağıdında açıklama bölümünde belirtiniz.** Problemi cevaplama süreniz 30 dakikadır. Vereceğiniz cevap araştırma amaçlı kullanılacaktır. Problem üzerinde dikkatlice düşünerek cevabınızı samimi olarak vereceğinizi umar ve araştırmaya katılımınız sebebiyle teşekkür ederiz.

Yavuz Atabay

ORMAN GEZİNTİSİ

Her ağaçta en az bir yaprağın bulunduğu bir ormandasınız. Ormandaki ağaçların sayısı herhangi bir ağaçtaki yaprakların sayısından daha fazla. Bu durumda ormandaki en az iki ağacın yaprak sayısının birbirine eşit olduğunu söyleyebilir misiniz?

- A) Evet
- B) Hayır

MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ

2.OTURUM

Sevgili öğrenciler,

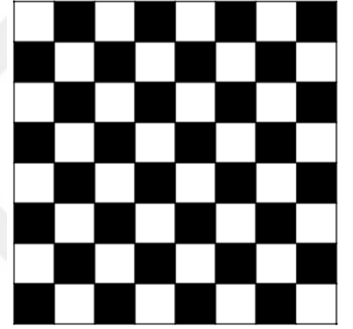
Aşağıda problem bir cevaba ulaşabilmeniz için hayal gücünüzü kullanarak düşünce deneyi yapmanızı gerektirecek bir problemdir. Verilen problem durumunu zihninizde canlandırarak sonucunu zihin gözünüzle görmeye çalışınız. **Bu süreçte gerçekleştirdiğiniz akıl yürütmelerinizi ve sonucunuzu dayandırdığınız sebepleri cevap kağıdında açıklama bölümünde belirtiniz.** Problemi cevaplama süreniz 30 dakikadır. Vereceğiniz cevap araştırma amaçlı kullanılacaktır. Problem üzerinde dikkatlice düşünerek cevabınızı samimi olarak vereceğinizi umar ve araştırmaya katılımınız sebebiyle teşekkür ederiz.

Yavuz Atabay

SATRAŇ TAHTASI

8x8 lik bir satranç tahtasının en üst sol karesine bir tavla pulu koyduğunuzu düşünün. Bu pulla bir kare aşağı, yukarı, sağa ya da sola hamle yapabiliyorsunuz. Her kareden yalnızca bir kere geçmek şartıyla pulu tahtanın en alt sağ karesine götürebilir misiniz?

- C) Evet
- D) Hayır



MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ

3.OTURUM

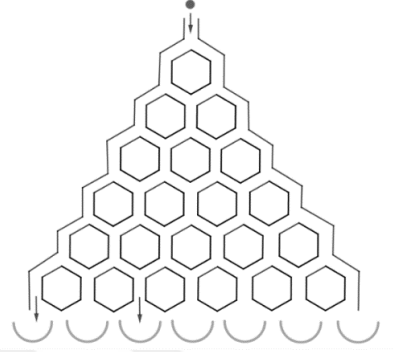
Sevgili öğrenciler,

Aşağıda problem bir cevaba ulaşabilmeniz için hayal gücünüzü kullanarak düşünce deneyi yapmanızı gerektirecek bir problemdir. Verilen problem durumunu zihninizde canlandırarak sonucunu zihin gözünüzle görmeye çalışınız. **Bu süreçte gerçekleştirdiğiniz akıl yürütmelerinizi ve sonucunuzu dayandırdığınız sebepleri cevap kağıdında açıklama bölümünde belirtiniz.** Problemi cevaplama süreniz 30 dakikadır. Vereceğiniz cevap araştırma amaçlı kullanılacaktır. Problem üzerinde dikkatlice düşünerek cevabınızı samimi olarak vereceğinizi umar ve araştırmaya katılımınız sebebiyle teşekkür ederiz.

Yavuz Atabay

ŞANS MAKİNESİ

Sağdaki gibi bir düzeneک kurulmuştur. Şekilde gösterildiği gibi toplar yukarıdan düzeneğin içine atılmakta ve 6. yol ayrımından sonra düzeneğin altında bulunan çıkış noktalarındaki yeterince büyük haznelere düşmektedir. Atılan toplar her yol ayrımında eşit olasılıkla sağa ya da sola sapmaktadır.



Buna göre;

1. Atılan bir topun oklar ile de gösterilen en soldaki hazneye düşme olasılığı ile soldan üçüncü hazneye düşme olasılığı hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 - A) En soldaki hazneye düşme olasılığı soldan üçüncü hazneye düşme olasılığından daha fazladır.
 - B) En soldaki hazneye düşme olasılığı soldan üçüncü hazneye düşme olasılığından daha azdır.
 - C) En soldaki hazneye düşme olasılığı ile soldan üçüncü hazneye düşme olasılığı birbirine eşittir.
2. Düzeneğin yukarisından yeterince fazla sayıda top atılırsa hangi haznelerde daha çok hangi haznelerde daha az top birikmesi beklenir?
 - A) Haznelerde biriken top miktarı soldan sağa gidildikçe azalır.
 - B) Haznelerde biriken top miktarı soldan sağa gidildikçe artar.
 - C) En ortadaki haznede en fazla top birikirken köşedeki haznelere doğru gidildikçe biriken top miktarı azalır.
 - D) En köşelerdeki haznelerde en fazla top birikirken en ortadaki hazneye doğru gidildikçe biriken top miktarı azalır.
 - E) Her haznede eşit miktarda top birikir.

MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ

4.OTURUM

Sevgili öğrenciler,

Aşağıda problem bir cevaba ulaşabilmeniz için hayal gücünüzü kullanarak düşünce deneyi yapmanızı gerektirecek bir problemdir. Verilen problem durumunu zihninizde canlandırarak sonucunu zihin gözünüzle görmeye çalışınız. **Bu süreçte gerçekleştirdiğiniz akıl yürütmelerinizi ve sonucunuzu dayandırdığınız sebepleri cevap kağıdında açıklama bölümünde belirtiniz.** Problemi cevaplama süreniz 30 dakikadır. Vereceğiniz cevap araştırma amaçlı kullanılacaktır. Problem üzerinde dikkatlice düşünerek cevabınızı samimi olarak vereceğinizi umar ve araştırmaya katılımınız sebebiyle teşekkür ederiz.

Yavuz Atabay

SONSUZLUKLARIN KIYASLANMASI

Eğer iki sonlu kümenin* elemanları hiçbirini unutulmadan birbirleriyle eşlenebiliyorsa bu iki kümenin aynı sayıda elemanı olduğu; sonlu kümelerden birinde eşlenebilecek eleman kalmayıp diğerinde kaldığında ise bu iki kümenin birinin diğerinden fazla ya da eksik sayıda elemanı olduğu söylenir. Aynı yöntemle, iki sonsuz kümenin** sonsuzluklarını da kıyaslamak mümkündür.

Tanım: Bir A kümesinin elemanları ile doğal sayılar kümesinin ($\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$) elemanlarının hiçbirini unutulmadan birbirleriyle eşlenebilmesinin en az bir yolu var ise A kümesine sayılabilir sonsuzlukta küme denir.

Pozitif rasyonel sayılar kümesinin*** ($\mathbb{Q}^+$) sayılabilir sonsuzlukta bir küme olup olmadığı ve pozitif rasyonel sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesinin sonsuzluğunun kıyaslanması hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir. $\mathbb{Q}^+$ ve $\mathbb{N}$ kümelerinin sonsuzluğu birbirine denktir.
- B) $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir küme değildir. $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$ den daha büyük bir sonsuzluğa sahiptir.
- C) $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir küme değildir. $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$ den daha küçük bir sonsuzluğa sahiptir.

* Sonlu küme: Eleman sayısı belirli bir doğal sayı ile ifade edilebilen kümedir.

** Sonsuz küme: Sonlu olmayan kümedir.

*** Rasyonel Sayı: $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ ve a, b aralarında asal olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılardır.

EK 3. UZMAN GÖRÜŞÜ FORMU ÖRNEK SAYFASI

Her ağaçta en az bir yaprağın bulunduğu bir ormandasınız. Ormandaki ağaçların sayısı herhangi bir ağaçtaki yaprakların sayısından daha fazla. Bu durumda ormandaki en az iki ağacın yaprak sayısının birbirine eşit olduğunu söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.

Ölçüt	Eksiklik veya Geliştirilebilecek Yönlerine Dair Açıklama
İfade ediliş	
Akademik düzeye uygunluk	
Düşünce deneyi öğelerinin sınanabilirliği	
Uygundur (...)	Uygun değildir (...)

İki kişi 20 sayısını söyleyenin kazandığı bir oyun oynamaktadır. Oyuna bir oyuncu 1 ve 2 sayılarından birini söyleyerek başlar. Diğer oyuncu ise rakibinin söylediği sayıya 1 ve 2 sayılarından birini ekleyip yeni bir sayı söyler. Oyuncular bu şekilde birbirlerinin söyledikleri sayıya 1 ve 2 sayılarından birini ekleyerek yeni bir sayı söyleyerek oyuna devam ederler. Oyunu kazanmayı garantilemek için nasıl bir strateji izlenmesi gerektiğini bulunuz.

Ölçüt	Eksiklik veya Geliştirilebilecek Yönlerine Dair Açıklama
İfade ediliş	
Akademik düzeye uygunluk	
Düşünce deneyi öğelerinin sınanabilirliği	
Uygundur (...)	Uygun değildir (...)

**EK 4. TASLAK MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ
DERCELİ PUANLAMA ANAHTARI (RUBRİK) (NİCEL VERİ İÇİN)**

1. Problem	
Puan	Ölçüt
0	Cevap yok veya hatalı bir şekilde akıl yürütmüş.
1	En az iki ağacın yaprak sayısının eşit olduğunu birebir eşleştirme ile sadece bir durum için (örneğin; ağaç sayısı 5 olsun diyerek) göstermiş.
2	En az iki ağacın yaprak sayısının eşit olduğunu birebir eşleştirme ile her durum için (örneğin; ağaç sayısı n olsun diyerek) göstermiş veya birkaç durumu örnek göstererek her durum için neden geçerli olacağını anlaşılır bir şekilde ifade etmiş.
2. Problem	
Puan	Ölçüt
0	Cevap yok veya tamamen yanlış bir strateji geliştirilmiş.
1	17,14,11 veya 8 sayılarından birine ulaşan kazanacağı saptanmış ama bu son aşamaya kadar getirilememiş veya rakibin 1 dediğinde 2, 2 dediğinde 1 demesi gerektiği saptanmış ama bu bütünlüklü bir strateji olarak sunulamamış.
2	Oyuna 2 diyerek başlayan rakip ne derse desin sırasıyla 5, 8, 11, 14 ve 17 sayılarını söylediğinde kesinlikle kazanacağı veya oyuna 2 diyerek başlayan rakip 1 derse 2, 2 derse 1 demesi durumunda oyunu kesinlikle kazanacağı açıklanmış.
3. Problem	
Puan	Ölçüt
0	Cevap yok veya tamamen yanlış çözüm yapılmış.
1	Sadece kombinatorik işlemlerin eksik veya hatalı yapılması sebebi ile olasılık değerleri doğru hesaplanamamış.
2	Binom açılımı veya kombinatorik işlemler yardımı ile olasılık değerleri doğru bir şekilde hesaplanmıştır.
4. Problem	
Puan	Ölçüt
0	Cevap yok veya ipi hareket ettirme adımları tamamen yanlış yapılmış.
1	İpi hareket ettirme adımlarından bazıları doğru iken bazıları yanlış veya eksik yapılmış.
2	İpi hareket ettirme adımları eksiksiz ve tamamen doğru yapılmış.
5. Problem	
Puan	Ölçüt
0	Cevap yok veya hatalı bir şekilde akıl yürütülmüş.
1	Tavla pulunun en sol üst kareden en alt sağ kareye götürülemeyeceğini, bunun satranç tahtasının bir kenarında veya alanında tek sayıda kare bulunmasından kaynaklandığını (eğer kenarında ya da alanında çift sayıda kare olsaydı götürülebileceğini) ifade etmiş fakat bunun sebebini sadece gerçekleştirdiği sınırlı sayıda tavla pulu hareketi denemeleri ile açıklamış.
2	Tavla pulunun en sol üst kareden en alt sağ kareye götürülemeyeceğini çünkü her kareden yalnız bir kere geçme şartı altında en üst soldaki siyah kareden hareket ettirilen pulun en alt sağ kareye ulaşabilmesi için 63 hamle yapması gerektiği ve her bir hamle sonrasında tavla pulunun bulunduğu karenin renginin değişeceğinden tek sayıda hamle yapıldığında pulun beyaz renkli kareye gelmesi gerekirken en alt sağ karenin renginin siyah olduğunu ifade etmiş.

6. Problem	
Puan	Ölçüt
0	Cevap yok veya hatalı bir şekilde akıl yürütmüş.
1	Dünyanın yuvarlak olduğu varsayımı ile dağın tepesinden ufuk çizgisine bakan birini hayal etmiş ve bunu geometrik olarak çemberin dışındaki bir noktadan çembere çizilen bir teğet olarak düşünmüş fakat dünyanın yarıçapına dair doğru bir hesap yapamamıştır.
2	Dünyanın yuvarlak olduğu varsayımı ile dağın tepesinden ufuk çizgisine bakan birini hayal etmiş, bunu geometrik olarak çemberin dışındaki bir noktadan çembere çizilen bir teğet olarak düşünmüş ve devamında trigonometriden yararlanarak dünyanın yarıçapını $\frac{h \cdot \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ olarak hesaplamıştır. * α : dağın tepesinden yeryüzüne dik bir şekilde inen doğru parçası ile ufuk çizgisi üzerindeki doğru parçası arasındaki açı.
7. Problem	
Puan	Ölçüt
0	Cevap yok veya harfler ile temsil edilen yolların gruplandırılması tamamen yanlış yapılmış.
1	Harfler ile temsil edilen yolların gruplandırılması kısmen doğru yapılmış.
2	Harfler ile temsil edilen yollar birbirleri ile kesişip kesişmeme durumuna göre A,C ve D yi bir grup; B ve E yi bir grup; F ve G yi bir grup olacak şekilde 3 farklı gruba ayrılmış veya görsel bir bütün olarak görülüp kesişmeyen yollar doğrudan 3 gruba ayrılmış.
8. Problem	
Puan	Ölçüt
0	Cevap yok veya hatalı bir şekilde akıl yürütülmüş.
1	İki kümenin elemanlarının eşleştirilebilmesi için iki kümenin de elemanları listelenmeye çalışılmış fakat listelemede veya eşleştirmede hatalar yapılmış ya da listelemede ve eşleştirmede hata yapılmamış fakat iki kümenin eleman sayılarının karşılaştırılmasında yanlış akıl yürütmüş (altküme bilgisi ile karıştırılmış).
2	İki kümenin elemanları doğru bir şekilde listelenmiş ve birebir eşleştirme sonucu hiçbir elemanın açık kalmamasından hareketle iki kümenin eleman sayılarının eşit olacağı ifade edilmiş.

**EK 5. MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE DENEYİ TESTİ
DERCELE PUANLAMA ANAHTARI (RUBRİK) (NİTEL VERİ İÇİN)**

‘Orman Gezintisi’ Problemi	
Düşünce Deneyi Öğeleri	Ölçüt
Hipotez kurma	Ormanda en az iki yaprağın eşit olduğu söyleyebilirim/ söyleyemem. Ormanda en az iki yaprağın eşit olup olmadığını ağaç ve yaprak sayıları arasındaki ilişkiden çıkarabilirim.
Hayali dünya yaratma	Diyelim ki n ağaçlı bir ormandayız.
Düşünce deneyi tasarlama	Her ağaçtaki yaprak sayısı birbirinden farklı olsun.
Düşünce deneyi yürütme	Her ağaca ve her ağacın yaprak sayısına bir sayı atayalım. Ağaç no: 1 2 3 ... n Yaprak Sayısı: 1 2 3 ... n
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma	Ormandaki ağaç sayısının n olduğu durumda bu ormanda n yapraklı bir ağaç olamaz. Yukarıdaki numaralandırmada çelişki vardır.
Sonuç çıkarma	Çelişkinin ortadan kalkması ormandaki en az iki ağacın yaprak sayısının eşit olmasıyla giderilir. En az iki ağacın yaprak sayısı birbirine eşittir.
‘Satranç Tahtası’ Problemi	
Düşünce Deneyi Öğeleri	Ölçüt
Hipotez kurma	Her kareden yalnızca bir kere geçmek şartıyla tavla pulunu tahtanın en üst sol karesinden en alt sağ karesine götürebilirim/götüremem. Tavla pulunu en üst sol kareden en alt sağ kareye götürüp götüremeyeceğime pulu izin verilen dört yönde hareket ettirerek karar verebilirim.
Hayali dünya yaratma	Tavla pulunu hareket ettirebileceğimiz 8x8lik bir satranç tahtamız olsun.
Düşünce deneyi tasarlama	Bu hareketi deneyebileceğim farklı boyutlarda siyah ve beyaz karelerden oluşan satranç tahtalarım olsun. İki siyah ya da iki beyaz kare komşu olmasın.
Düşünce deneyi yürütme	En üst sol kareden (siyah renkte) harekete başlattığımız tavla pulunun her hamlesinin sonunda geldiği karenin rengine bakarsak karenin rengi her hamle sonunda değişecektir. Her kareden yalnızca bir kere geçmek için 8x8 lük satranç tahtasında tavla pulu ile toplam 63 hamle yaparım. $S \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} S \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} S \xrightarrow{5} \dots \xrightarrow{63} B$
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma	Tek sayıda hamleden sonra pul her defasında beyaz bir karenin üzerine gelir. Sol üstteki siyah kareden başlayıp toplamda 63 hamle yaptığımızda pul beyaz bir karenin üzerine gelecektir.

Sonuç çıkarma	Fakat en alt sağ karenin rengi siyah olduğundan tavla pulunu izin verilen 4 yönde hareket ettirerek en üst sol kareden en alt sağ kareye götüremem.
‘Şans Makinesi’ Problemi	
Düşünce Deneyi Öğeleri	Ölçüt
Hipotez kurma	Yukarıdan düzeneğin içine atılan bir topun en soldaki hazneye düşme ihtimali soldan üçüncü hazneye düşme ihtimalinden (ihtimaline) fazladır/azdır/eşittir. Yukarıdan düzeneğin içine yeterince fazla sayıda top atılırsa haznelerde biriken top miktarı soldan sağa gidildikçe artar/soldan sağa gidildikçe azalır/ortadan köşeye gidildikçe artar/ortadan köşeye gidildikçe azalır/her haznede aynıdır. Düzeneğin çalışma prensibine uygun şekilde olasılık hesabı ile sonuca ulaşabilirim. Yukarıdan düzeneğin içine atılan topun takip edebilecekleri tüm olası yolları sayabilirsem sonuca ulaşabilirim.
Hayali dünya yaratma	Yukarıdan atılan ve aşağıya doğru $\frac{1}{2}$ olasılıkla sağa ya da $\frac{1}{2}$ olasılıkla sola saparak gidip en aşağıdaki haznelere düşen topun olduğu daha büyük (örneğin; 1000. yol ayrımından sonra hazneye ulaşan) ya da daha küçük boyutlu (örneğin; 2. yol ayrımından sonra hazneye ulaşan) düzeneklerimiz olsun.
Düşünce deneyi tasarlama	Atılan bir topun her yol ayrımında $\frac{1}{2}$ olasılıkla sağa ya da $\frac{1}{2}$ olasılıkla sola sapması ile her ayırım noktasına gelmesinin hesaplanabilir ve farklı olasılıkta olabileceği şekildekinin aynısı, şekildekinden daha büyük ya da daha küçük boyutlu düzenekler olsun. Atılan bir topun olası tüm yollarının listesinin çıkarılabileceği kendi içerisinde bir düzeni olan şekildekinin aynısı, şekildekinden daha büyük ya da daha küçük boyutlu düzenekler olsun.
Düşünce deneyi yürütme	Yukarıdan düzeneğin içine atılan bir topun her ayırım noktasına gelme olasılığına tek tek odaklanırım/hesaplarım. Yukarıdan düzeneğin içine atılan bir topun takip edebileceği olası tüm yolları listelerim.
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma	Hesaplanan olasılık değerleri ile Pascal üçgeni arasında bir ilişki kurarım. Hesaplanan olasılık değerlerinin kombinatorik işlemler sonucunda geldiğini tespit ettim. Yukarıdan düzeneğin içine atılan bir topun olası tüm yollarının kaç tanesinin hangi hazneye çıktığı ile Pascal üçgeni arasında bir ilişki kurarım.
Sonuç çıkarma	Haznelerde biriken top miktarı ortadan köşelere doğru azalmaktadır.

‘Sonsuzluk’ Problemi	
Düşünce Deneyi Öğeleri	Ölçüt
Hipotez kurma	$\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir. İki küme denktir. $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir küme değildir. $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$ den daha büyük bir sonsuzluğa sahiptir. $\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzlukta bir küme değildir. $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$ den daha küçük bir sonsuzluğa sahiptir.
Hayali dünya yaratma	Sayıları eşlemesi yapılabilecek nesnelermiş gibi düşünürüm.
Düşünce deneyi tasarlama	Her iki kümede de sonsuz sayıda eleman var ve doğal sayıların elemanları belli bir düzende ilerliyor. Tüm elemanlarını eşleştirebilmem için $\mathbb{Q}^+$ yı da belli bir düzende yazmalı ya da başka bir deyişle listelemeliyim.
Düşünce deneyi yürütme	Pozitif rasyonel sayıları pay ve payda toplamı 2 olanlardan başlatıp sırasıyla 3, 4 ve 5 olanlar diye sonsuza kadar düzenli bir şekilde yazabilirim. 0 ile $\frac{1}{1}$ i, 1 ile $\frac{1}{2}$ yi, 2 ile $\frac{2}{1}$ i, 3 ile $\frac{1}{3}$ ü eşleştiririm ve böyle devam ettiririm.
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma	Bu şekilde iki kümenin de hiçbir elemanını unutmadan birbiri ile eşleyebildim. Yani, her doğal sayının eşlendiği bir pozitif rasyonel sayı, her pozitif rasyonel sayının da eşlendiği bir doğal sayı vardır.
Sonuç çıkarma	$\mathbb{Q}^+$ sayılabilir sonsuzluktadır ve iki kümenin sonsuzlukları birbirine denktir.

EK 6. GÖRÜŞME SORULARI

- 1) Problemi okuyup anladıktan hemen sonra sonuca dair bir öngörün var mıydı? Eğer yoksa, şunu yaparsam sonuca dair bir fikir yürütebilirim dediğin şeyler oldu mu?
- 2) Sorudan ne anladın? Anladıklarından yola çıkarak zihninde nasıl bir şey hayal ettin?
- 3) Çözümünü adım adım ve detaylı bir şekilde açıklayabilir misin?



EK 7. GÖRÜŞME VE GÖZLEM FORMU

Oturum/Problem Numarası:

Görüşme Yapılan Kişi:

Görüşme Tarihi:

Görüşme Saati:

Düşünce Deneyi Öğeleri	Tespit edildi/edilmedi
Hipotez kurma	
Hayali dünya yaratma	
Düşünce deneyi tasarlama	
Düşünce deneyi yürütme	
Deneyim, sezgi veya mantık yoluyla tespitte bulunma	
Sonuç çıkarma	

Gözlem Notu:

EK 8. MANTIKSAL DÜŞÜNME YETENEĞİ TESTİ KULLANIM İZNİ

Re: ölçek kullanma izni



Ömer Geban göndericisinden 2020-08-10 16:46 tarihinde

 [Ayrıntılar](#)

Sayın Sare Hanım

Yurt disindan getirtip adapte ettigimiz ve Turkceye cevirdigimiz Mantiksal Dusunme Yetenegi Testini kullanabilirsiniz.

Kolay gelsin

Omer Geban

iPhone'umdan gönderildi

sare <zsengul@marmara.edu.tr> şunları yazdı (10 Ağu 2020 16:25):

Sayın Ömer Bey;

Ataürk Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünde öğretim üyesiyim. Yüksek lisans tez öğrencimin tezinde size ve arkadaşlarınıza ait Mantıksal Düşünme Yeteneği Testini kullanmak istiyoruz.Çalışmamızda atıf göstererek kullanma iznini rica ediyorum.Saygılar.

Prof.Dr. Sare ŞENGÜL

EK 9. MEB ARAŞTIRMA UYGULAMA İZNİ



T.C.
İSTANBUL VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 59090411-44-E.9040301
Konu : Anket Araştırma İzni

07.07.2020

MARMARA ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ'NE
(Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı)

İlgi : a) 16.06.2020 tarihli ve 2000166586 sayılı yazınız.
b) Valilik Makamının 03.07.2020 tarihli ve 59090411-20-E.8938285 sayılı oluru.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Yavuz ATABAY'ın "11.Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünce Deneyi Süreçlerinin İncelenmesi" konulu araştırma çalışması hakkındaki ilgi (a) yazınız ilgi (b) valilik onayı ile uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve araştırmacının söz konusu talebi; bilimsel amaç dışında kullanmaması, **uygulama sırasında bir örneği müdürlüğümüzde muhafaza edilen mühürlü ve imzalı veri toplama araçlarının kurumlarımıza araştırmacı tarafından ulaştırılarak uygulanması**, katılımcıların gönüllülük esasına göre seçilmesi, araştırma sonuç raporunun kamuoyuyla paylaşılmasında, gerekli duyurunun araştırmacı tarafından yapılması, okul idarecilerinin denetim, gözetim ve sorumluluğunda, eğitim-öğretimi aksatmayacak şekilde ilgi (b) Valilik Onayı doğrultusunda uygulanması ve işlem bittikten sonra 2 (iki) hafta içinde sonuçtan Müdürlüğümüz Strateji Geliştirme Bölümüne rapor halinde bilgi verilmesini arz ederim.

Levent ÖZİL
İl Millî Eğitim Müdürü a.
Müdür Yardımcısı

Ek:
1- Valilik Onayı
2- Ölçekler



İstanbul Millî Eğitim Müdürlüğü - Strateji Geliştirme Şb.Md.
birdirek Mh.Imran Öktem Cd. No:1 Sultanahmet-Fatih/İstanbul
Elektronik Adres: istanbul.meb.gov.tr
E-posta: ist.sgb34@gmail.com

Bilgi için: Aykut ÇELİK

Tel: 0 (212) 384 36 32
Faks: 0 () _____

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 55df-59fe-3f46-9230-ab95 kodu ile teyit edilebilir.



T.C.
İSTANBUL VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 59090411-20-E.8938285

03/07/2020

Konu : Anket ve Araştırma İzin Talebi.

VALİLİK MAKAMINA

- İlgi: a) Marmara Üniversitesinin 16.06.2020 tarihli ve 166586 sayılı yazısı.
b) Bakanlığımızın 21.01.2020 tarih ve 1563890/ 2020/2 No'lu genelgesi
c) Müdürlüğümüz Araştırma ve Anket Komisyonunun 03.07.2020 tarihli tutanağı.

Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Yavuz ATABAY'ın "**11.Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünce Deneyi Süreçlerinin İncelenmesi**" konulu tezine dair araştırma çalışmasını Mantıksal Düşünme Yeteneği Testi uygulama isteği hakkındaki ilgi (a) yazı ve ekleri müdürlüğümüzce incelenmiştir

Araştırmacının söz konusu talebi; bilimsel amaç dışında kullanılmaması, **uygulama sırasında bir örneği müdürlüğümüzde muhafaza edilen mühürlü ve imzalı veri toplama araçlarının kurumlarımıza araştırmacı tarafından ulaştırılarak uygulanması, katılımcıların gönüllülük esasına göre seçilmesi, araştırma sonuç raporunun kamuoyuyla paylaşılmaması** koşuluyla, okul idarelerinin denetim, gözetim ve sorumluluğunda, eğitim-öğretimi aksatmayacak şekilde ilgi (b) Bakanlık emri esasları dâhilinde uygulanması, sonuçtan Müdürlüğümüze rapor halinde (CD formatında) bilgi verilmesi kaydıyla Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Levent YAZICI
İl Millî Eğitim Müdürü

OLUR
03/07/2020
Dr. Hasan Hüseyin CAN
Vali a.
Vali Yardımcısı

Ek:

- 1- Genelge.
2- Komisyon Tutanağı.



Es: İstanbul Millî Eğitim Müdürlüğü - Strateji Geliştirme Şb.Md.
birdirek Mh.İmran Öktem Cd. No:1 Sultanahmet-Fatih/İstanbul
Elektronik Ağ: istanbul.meb.gov.tr
E-posta: ist.sgb34@gmail.com

Bilgi için: Aykut ÇELİK

Tel: 0 (212) 384 36 32
Faks: 0 ()

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 1c59-3b03-3c0c-bf41-ca4c kodu ile teyit edilebilir.