



**2 VE 3 BOYUTLU UZAYDA ZAMAN BAĞIMLI
KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON
DENKLEMLERİNİN FİZİK BİLGİLİ SİNİR AĞI İLE
ÇÖZÜMÜ**

Furkan BEYAZLI

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Harun SELVİTOPI**

**2025
Her hakkı saklıdır.**



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

2 VE 3 BOYUTLU UZAYDA ZAMAN BAĞIMLI KONVEKSİYON DİFÜZYON
REAKSİYON DENKLEMLERİNİN FİZİK BİLGİLİ SINIR AĞI İLE ÇÖZÜMÜ

Furkan BEYAZLI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Harun SELVİTOPI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2025

Her hakkı saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

**2 VE 3 BOYUTLU UZAYDA ZAMAN BAĞIMLI KONVEKSİYON DİFÜZYON
REAKSİYON DENKLEMLERİNİN FİZİK BİLGİLİ SINIR AĞI İLE ÇÖZÜMÜ**

Doç. Dr. Harun SELVİTOPI danışmanlığında, Furkan BEYAZLI tarafından hazırlanan bu çalışma 12/06/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile (3/3)** kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. İbrahim Yücel ÖZBEK

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Işıl KARABEY AKSAKALLI

İmza :

Üye : Doç. Dr. Harun SELVİTOPI

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Doç. Dr. Bünyamin ÖZGERİŞ
Enstitü Müdürü

*Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

12/06/2025

İmzası

Furkan BEYAZLI

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2 VE 3 BOYUTLU UZAYDA ZAMAN BAĞIMLI KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMLERİNİN FİZİK BİLGİLİ SINIR AĞI İLE ÇÖZÜMÜ

Furkan BEYAZLI

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Harun SELVİTOPI

Birçok mühendislik ve fizik problemi, konveksiyon-difüzyon-reaksiyon (KDR) denklemleri ile matematiksel olarak modellenebilmektedir. Bu tez çalışmasında, ızgarasız bir yöntem olan Fizik Bilgili Sınır Ağı (FBSA) kullanılarak, bir, iki ve üç boyutlu doğrusal olmayan KDR denklemlerinin çözümü gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sayısal çözümler, analitik çözümlerle karşılaştırılmış ve L2 hata normu, KOKH ve maksimum mutlak hata gibi metrikler kullanılarak değerlendirilmiştir. Sonuçlar, FBSA yönteminin özellikle yüksek boyutlu ve konveksiyon-baskın problemlerde etkin ve doğru çözümler üretebildiğini göstermektedir. Bu çalışma, literatürde FBSA tabanlı 3D KDR çözümü sunması açısından özgün bir katkı sağlamaktadır.

2025, 85 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi, Fizik Bilgili Sınır Ağı, Doğrusal Olmayan Diferansiyel Denklemler

ABSTRACT

MS. Thesis

SOLUTION OF TIME-DEPENDENT CONVECTION DIFFUSION EQUATIONS IN 2- AND 3-DIMENSIONAL SPACE WITH A PHYSICS- INFORMED NEURAL NETWORK

Furkan BEYAZLI

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Harun SELVİTOPI

Many engineering and physics problems can be mathematically modeled by convection-diffusion-reaction (CDR) equations. In this thesis, Physics-Informed Neural Networks (PINN), a mesh-free method, is employed to solve one-, two-, and three-dimensional nonlinear CDR equations. The numerical solutions obtained are compared with analytical solutions and evaluated using L2 error norm, RMS error, and maximum absolute error metrics. The results demonstrate that the PINN method can produce accurate and efficient solutions, particularly for high-dimensional and convection-dominant problems. This study provides an original contribution to the literature by presenting a PINN-based 3D CDR solution.

2025, 85 page

Keywords: Convection-Diffusion-Reaction Equation, Physics-Informed Neural Networks Nonlinear Differential Equation

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca yol göstericiliği, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen, süreçteki sabrı ve desteğiyle her zaman yanımda olan yüksek lisans tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Harun SELVİTOPI'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez jürimde yer alarak değerli görüş ve katkılarını paylaşan Prof. Dr. İbrahim Yücel ÖZBEK ve Dr. Öğretim Üyesi Işıl Karabey hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki değerli hocalarıma, yüksek lisans eğitimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalanma imkânı sundukları için şükranlarımı sunarım.

Her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Son olarak, yüksek lisans eğitimim süresince maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) tarafından yürütülen 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında sağlanan destekten dolayı teşekkür ederim.

Furkan BEYAZLI
Haziran 2025

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi	1
1.2. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denkleminin Tarihsel Gelişimi	2
1.3. Fizik Bilgili Sinir Ağları	4
1.4. Klasik ve Modern Yaklaşımlar: Makine Öğrenmesinden Fizik Bilgili Sinir Ağı Yöntemine Evrim	6
2. KAYNAK ÖZETLERİ	10
3. MATERYAL ve YÖNTEM	14
3.1. Fizik Bilgili Sinir Ağı Yapısı ve Zaman Bağımsız Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulaması	14
3.2. Fizik Bilgili Sinir Ağları: Yapısı ve Zaman Bağımlı Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulaması	17
3.3. Sonuçların Değerlendirilmesinde Kullanılan Hata Ölçütleri	20
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	22
4.1. Bir Boyutlu Problemlerin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü	23
4.2. İki Boyutlu Problemlerin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü	49
4.3. Üç Boyutlu Problemlerin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile çözümü	64
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	80
KAYNAKLAR	82

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

Ω	Tanım Bölgesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
ε	Difüzyon Katsayısı
k	Konveksiyon Katsayısı
$U(x, t)$	Taşınan türün konsantrasyonunu
$\mathbf{k}$	Akışkanın hız vektörünü
D	Sistemin difüzyon katsayısı
$R(U, x, t)$	İlgili türün reaksiyon terimini
∇	Dağılma (diverjans) operatörü
∇^2	Laplace operatörü (difüzyon)

Kısaltmalar

FBSA	Fizik Bilgili Sinir Ağları
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklemler
YSA	Yapay Sinir Ağları
HAD	Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği
MÖ	Makine Öğrenmesi
YZ	Yapay Zeka
TVA	Toplam Varyasyon Azaltıcı
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi
SFY	Sonlu Farklar Yöntemi
SHY	Sonlu Hacimler Yöntemidir
KDR	Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon
KOKH	Kök Ortalama Kare Hata
MMH	Maksimum Mutlak Hata
ADD	Adi Diferansiyel Denklemler

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Zaman bağımlı denklemler için FBSA mimarisi.	18
Şekil 4.1. $\varepsilon = 1$ ve $k = 1$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.	26
Şekil 4.2. $\varepsilon = 1$ ve $k = 1$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.	26
Şekil 4.3. $\varepsilon = 1$ ve $k = 1$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.	27
Şekil 4.4. $\varepsilon = 0,01$ ve $k = 0,1$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.	28
Şekil 4.5. $\varepsilon = 0,01$ ve $k = 0,1$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.	28
Şekil 4.6. $\varepsilon = 0,01$ ve $k = 0,1$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.	29
Şekil 4.7. $\varepsilon = 1$ ve $k = 15$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.	30
Şekil 4.8. $\varepsilon = 1$ ve $k = 15$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.	30
Şekil 4.9. $\varepsilon = 1$ ve $k = 15$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.	31
Şekil 4.10. $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $k = 1$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.	34
Şekil 4.11. $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $k = 1$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.	34
Şekil 4.12. $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $k = 1$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.	35
Şekil 4.13. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.	36
Şekil 4.14. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.	37
Şekil 4.15. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.	37
Şekil 4.16. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ için FBSA çözümü ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması.	41
Şekil 4.17. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ için FBSA modeli için eğitim sürecinde toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.	41
Şekil 4.18. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için FBSA çözümü ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması.	42
Şekil 4.19. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için FBSA modeli için eğitim sürecinde toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişim anlarındaki karşılaştırması.	43
Şekil 4.20. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ için FBSA çözümü ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması.	46
Şekil 4.21. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ için FBSA modeli için eğitim sürecinde toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.	47
Şekil 4.22. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 10$ için FBSA çözümü ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması.	48

Şekil 4.23. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 10$ için FBSA modeli için eğitim sürecinde toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişim anlarındaki karşılaştırması.	48
Şekil 4.24. Örnek 1 için FBSA ve analitik çözümün karşılaştırmalı kontur grafikleri.	51
Şekil 4.25. Örnek 1 için mutlak hata grafiği.	51
Şekil 4.26. Örnek 1 için iterasyona göre kayıp fonksiyonu değişimi.	52
Şekil 4.27. Örnek 2 için FBSA ve analitik çözümün karşılaştırmalı kontur grafikleri.	53
Şekil 4.28. Örnek 2 için mutlak hata grafiği.	54
Şekil 4.29. Örnek 2 için iterasyona göre kayıp fonksiyonu değişimi.	54
Şekil 4.30. $\varepsilon = 0,1$ ve $kx = ky = 1$ için FBSA modelinin toplam kayıp değerinin iterasyonlara göre değişimi.	57
Şekil 4.31. $\varepsilon = 0,1$ ve $kx = ky = 1$ için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,1$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.	57
Şekil 4.32. $\varepsilon = 0,1$ ve $kx = ky = 1$ için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,3$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.	58
Şekil 4.33. $\varepsilon = 0,1$ ve $kx = ky = 1$ için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,5$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.	58
Şekil 4.34. $\varepsilon = 0,1$ ve $kx = ky = 1$ için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,7$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.	58
Şekil 4.35. $\varepsilon = 0,1$ ve $kx = ky = 1$ için $t = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ zaman adımlarında FBSA ve analitik çözümler arasındaki mutlak hata dağılımı.	59
Şekil 4.36. Örnek 4 için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,1$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.	62
Şekil 4.37. Örnek 4 için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,3$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.	62
Şekil 4.38. Örnek 4 için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,5$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.	62
Şekil 4.39. Örnek 4 için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,5$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.	63
Şekil 4.40. Örnek 4 için FBSA ve analitik çözümün zaman adımlarına göre karşılaştırmalı kontur grafikleri.	63
Şekil 4.41. Örnek 4 için mutlak hata grafiği.	64
Şekil 4.42. Örnek 1 için $z = 0,2$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	66
Şekil 4.43. Örnek 1 için $z = 0,2$ kesitinde mutlak hata.	67

Şekil 4.44. Örnek 1 için $y = 0,2$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	67
Şekil 4.45. Örnek 1 için $y = 0,2$ kesitinde mutlak hata.	67
Şekil 4.46. Örnek 1 için analitik çözüm ve FBSA çözümünün üç boyutlu karşılaştırması.	68
Şekil 4.47. Örnek 1 için eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun değişimi.	68
Şekil 4.48. Örnek 1 için çözümün üç boyutlu mutlak hata dağılımı.	69
Şekil 4.49. Örnek 2 için $z = 0,2$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	71
Şekil 4.50. Örnek 2 için $z = 0,5$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	72
Şekil 4.51. Örnek 2 için $z = 0,5$ kesitinde elde edilen mutlak hata.	72
Şekil 4.52. Örnek 2 için $x = 1$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	72
Şekil 4.53. Örnek 2 için $x = 1$ kesitinde elde edilen mutlak hata.	73
Şekil 4.54. Örnek 2 için $y = 1$ için FBSA ve analitik çözüm karşılaştırması.	73
Şekil 4.55. Örnek 2 için $y = 1$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	73
Şekil 4.56. Örnek 2 için eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun değişimi.	74
Şekil 4.57. Örnek 3 için $t = 0,2$ ve $y = 0,526$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	77
Şekil 4.58. Örnek 3 için $t = 0,2$ ve $y = 0,526$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	77
Şekil 4.59. Örnek 1 için $t = 1$ ve $y = 0,526$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	77
Şekil 4.60. Örnek 3 için $t = 1$ ve $y = 0,526$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.	78
Şekil 4.61. Örnek 3 için çözümün $t = 0,1$ $0,3$ $0,5$ $1,0$ anlarında üç boyutlu mutlak hata dağılımlarının karşılaştırılması.	78
Şekil 4.62. Örnek 3 için eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun değişimi.	79

ÇİZELGELER DİZİNİ

Tablo 2.1. Literatürde kullanılan yöntemlerin özeti.	12
Tablo 4.1. Zaman adımlarında hata değerleri.	40
Tablo 4.2. Zaman adımlarında hata değerleri.	42
Tablo 4.3. Zaman adımlarında hata değerleri.	45
Tablo 4.4. Zaman adımlarında hata değerleri.	47
Tablo 4.5. Zaman adımlarına göre hata değerleri.	56
Tablo 4.6. Zaman adımlarına göre hata analizleri.	60
Tablo 4.7. Örnek 3 için zaman adımlarına göre hata değerleri.	76



1. GİRİŞ

1.1 Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon (KDR) süreci, birçok fiziksel, kimyasal ve mühendislik probleminin temelini oluşturan karmaşık bir süreç olarak tanımlanmaktadır. Bu süreç, ortam içerisindeki bir niceliğin (örneğin sıcaklık, madde yoğunluğu, kimyasal konsantrasyon vb.) zamanla ve uzayda taşınımı, yayılması ve yerel değişimini birlikte modellemek amacıyla geliştirilmiş kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilmektedir (İnce 2001).

KDR yapısı, üç temel fiziksel bileşenin etkileşimini içermektedir. Bunlardan ilki olan difüzyon (yayılma), bir maddenin yüksek konsantrasyonlu bölgeden düşük konsantrasyonlu bölgeye doğru rastgele moleküler hareketler yoluyla yayılması sürecidir. Bu mekanizma, maddelerin homojen bir şekilde dağılmasına ve olası reaksiyon süreçleri için uygun ortamın oluşmasına katkıda bulunur. Difüzyon hızı, ortamın sıcaklığı ve maddenin fiziksel özelliklerine bağlıdır (İnce 2001). Bu duruma örnek olarak, bir gazın (örneğin amonyak ve klor) kapalı bir odada zamanla tüm ortama yayılması veya uçucu bir sıvının buharının ortam havasına karışması verilebilir. İkinci bileşen olan konveksiyon (taşınım), bir akışkan içerisindeki veya akışkanla temas eden katı yüzey arasındaki kütle veya ısı taşınımı sürecini ifade eder. Akışkan içerisindeki akımlar vasıtasıyla gerçekleşen bu taşınım, genellikle sıcaklık gradyanları veya yoğunluk farklarının etkisiyle ortaya çıkar (Sanver 1983). Isınan akışkanın yoğunluğunun azalması ve yükselmesi, soğuyan akışkanın ise yoğunlaşarak aşağıya hareket etmesi bu sürecin temelini oluşturur. Bu mekanizma, ısı ve madde transferinin mekânsal dağılımını belirleyen önemli bir etkidir. Üçüncü bileşen olan reaksiyon ise, konveksiyon ve difüzyon süreçlerine sıklıkla eklenen ve modeldeki büyüklüğün (örneğin kimyasal konsantrasyon veya sıcaklık) zamanla yerel olarak üretilmesini ya da tüketilmesini temsil eden bir terimdir. Matematiksel olarak bu etki, genellikle σu şeklinde ifade edilir ve burada σ reaksiyon katsayısıdır (Tsega et al. 2024). Pozitif σ değerleri üretim süreçlerini, negatif değerler ise tüketim veya bozunma süreçlerini modellemektedir.

1. GİRİŞ

Bu üçlü mekanizma, özellikle akışkanlar dinamiği, ısı ve kütle transferi, kimyasal reaktör mühendisliği, çevresel modelleme ve biyomedikal uygulamalar gibi birçok farklı disiplinde kritik öneme sahiptir. Örneğin iyon taşınımı, yakıt hücrelerinde reaktif akışlar (Asinari et al. 2007), gözenekli ortamlarda yüzey reaksiyonları ve atmosferik kirlilik yayılımı gibi uygulamalarda bu yapı yaygın olarak kullanılmaktadır.

Konveksiyon-Difüzyon-reaksiyon süreçleri, aşağıdaki genel kısmi diferansiyel denklem (KDR denklemi) ile matematiksel olarak ifade edilir:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla(kU) = D\nabla^2 + R(U, x, t) \quad (1.1)$$

$U = U(x, t)$	: Taşınan türün konsantrasyonunu
k	: Akışkanın hız vektörünü (konveksiyon etkisi)
D	: Sistemin difüzyon katsayısı
$R(U, x, t)$	: İlgili türün reaksiyon terimini (üretim veya tüketim)
∇	: Dağılma (diverjans) operatörü
∇^2	: Laplace operatörü (difüzyon)

KDR denklemlerinin matematiksel çözümüne yönelik çalışmalar, matematiksel fizik ve uygulamalı matematik alanlarındaki ilerlemelerle birlikte gelişmiş ve modern nümerik yöntemlerin yanı sıra fizik bilgisi ile zenginleştirilmiş makine öğrenmesi tabanlı yöntemlerin de bu alanda kullanımına zemin hazırlamıştır.

1.2 Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denkleminin Tarihsel Gelişimi

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi, taşınım ve yayılım süreçlerinin birlikte etkili olduğu fiziksel olayları tanımlayan temel bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklem, akışkanlar mekaniği başta olmak üzere birçok bilimsel disiplinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Tarihsel gelişimi incelendiğinde, konvektif ve difüzyif süreçlerin önce ayrı ayrı, ardından birlikte ele alındığı görülmektedir.

1. GİRİŞ

Maddelerin yayılma sürecine yönelik ilk sistematik yaklaşım, Joseph Fourier'in 1822 yılında yayımladığı *Isının Analitik Teorisi* adlı eserinde sunulmuştur. Fourier, bu çalışmasında katı cisimlerdeki sıcaklık dağılımının zaman bağımlı değişimini tanımlayan ısı iletim denklemini türetmiş ve ısı yayılımını matematiksel bir çerçevede ifade etmiştir (Fourier 1822).

Adolf Fick, 1855 yılında konsantrasyon gradyanına bağlı madde taşınımını açıklayan yasalarını yayımlayarak kütle difüzyonunu kuramsal temellere oturtmuştur (Fick 1855). Bu yasalar günümüzde Fick Yasaları olarak bilinmekte ve difüzyonun fiziksel sistemlerde matematiksel modellenmesine zemin hazırlamaktadır.

Konveksiyon süreçleri ise Claude-Louis Navier (1823) ve George Stokes'un (1845) çalışmalarıyla akışkanlar mekaniğinde ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu çalışmalar sonucunda ortaya çıkan ve günümüzde Navier-Stokes Denklemleri olarak bilinen denklemler, akışkanların hareketini konvektif ve viskoz etkilerle tanımlar (Navier 1823; Stokes 1845). Böylece, 19. yüzyılın ortalarında konveksiyon ve difüzyon süreçlerinin bütüncül olarak incelenebileceği bir matematiksel yapı oluşturulmuştur.

20. yüzyılın başlarında Albert Einstein'ın Brown hareketini inceleyerek difüzyon sürecini istatistiksel mekanikle ilişkilendirmesi, mikroskobik düzeyde temel bir anlayış sağlamıştır (Einstein, 1905). Bu temel üzerine Adriaan Fokker (1914) ve Max Planck (1917), stokastik süreçleri konveksiyon ve difüzyon terimleriyle açıklayan Fokker-Planck denklemini geliştirmiştir (Fokker 1914; Planck 1917).

Denklemin daha basit ve çözülebilir bir yapıya dönüştürülmesi amacıyla Johannes M. Burgers, 1940'lı yıllarda türbülanslı akışları modellemek için Burgers Denklemi'ni geliştirmiştir (Burgers 1948). Bu denklemin analitik çözümünü kolaylaştırmak amacıyla Eberhard Hopf (1950) ve Julian Cole (1951) tarafından bağımsız olarak geliştirilen Hopf-Cole dönüşümü, diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir yöntem olarak kabul edilmiştir (Hopf 1950; Cole 1951).

Sayısal çözüm yöntemleri de 20. yüzyılın ikinci yarısında hız kazanmıştır. John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından 1947 yılında geliştirilen Crank-Nicolson yöntemi,

1. GİRİŞ

zaman bağımlı difüzyon problemlerinin çözümünde yaygın olarak benimsenmiştir (Crank ve Nicolson 1947). Konveksiyonun baskın olduğu rejimlerde ortaya çıkan nümerik salınımları önlemek amacıyla Sergei Godunov'un (1959) önerdiği şema ve Ami Harten'in (1983) geliştirdiği Toplam Varyasyon Azaltıcı (TVA) yöntemleri, kararlı çözümler elde etmeye olanak sağlamıştır (Godunov 1959; Harten 1983).

Reaksiyon-difüzyon sistemlerine yönelik ilk kuramsal çalışmalar 20. yüzyılın başlarında ortaya çıkmıştır. Ronald A. Fisher, 1937 yılında yayımladığı çalışmasında, popülasyon genetiğini modellemek amacıyla doğrusal olmayan bir reaksiyon terimi ile birlikte difüzyon içeren diferansiyel denklemi tanımlamıştır. Bu denklem, günümüzde Fisher-KPP denklemi olarak bilinmekte ve birçok biyolojik ve kimyasal sürecin modellenmesinde temel alınmaktadır (Fisher 1937).

Sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemleri üzerine çalışmalar, konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünde önemli bir yer tutmaktadır. Topcu ve Irk (2018), septik B-spline Galerkin yöntemi ile konveksiyon-difüzyon problemlerini ele almış ve yüksek doğrulukta sonuçlar elde etmiştir. Çiftçi (2012), değişken difüzyon katsayılı problemler için sonlu elemanlar yöntemini uygulamış ve yöntemin etkinliğini göstermiştir. Ünal ve Akkaş (2022), kübit-TVD yöntemi ile konveksiyon ağırlıklı problemleri yüksek doğrulukla çözmüş ve yapay salınımları önemli ölçüde azaltmıştır. Alanbay (2004) ise Richardson ekstrapolasyon tekniği kullanarak yüksek mertebeli sonlu fark yöntemleri geliştirmiştir.

Son yıllarda yapay zekâ ve makine öğrenimi alanlarındaki ilerlemelerle birlikte Fizik Bilgili Sinir Ağı (FBSA) gibi yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler, denklemlerin çözümlerini fiziksel ve veriye dayalı biçimde öğrenerek, özellikle karmaşık geometriye sahip sistemlerde alternatif çözüm stratejileri sunmaktadır (Raissi et al. 2019).

1.3 Fizik Bilgili Sinir Ağları

Son yıllarda fizik tabanlı problemlerin çözümünde yapay zekâ ve makine öğrenmesi (MÖ) yöntemlerinin kullanımı önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir. Ancak geleneksel MÖ algoritmaları, büyük ölçüde veri odaklı çalıştıkları için, çözümün

1. GİRİŞ

fiziksel yasalarla uyumlu olmasını garanti edemezler (Karniadakis et al. 2021). Bu boşluğu doldurmak amacıyla geliştirilen Fizik Bilgili Sinir Ağı (FBSA), İngilizce literatürde Physics-Informed Neural Networks (PINNs) adıyla bilinmekte ve fiziksel bilginin doğrudan öğrenme sürecine entegre edilmesini hedeflemektedir (Raissi et al. 2019).

FBSA yönteminde sinir ağı sadece gözlemsel verileri değil, aynı zamanda probleme özgü KDD oluşturduğu fiziksel kısıtlamaları da öğrenir. Bu, ağı eğitim sürecinde kullanılan kayıp fonksiyonuna diferansiyel denklem kalıntılarının doğrudan eklenmesi ile sağlanır. Böylece ağ hem veri hem de fizik kurallarına uygun bir çözüm üretmeye zorlanır.

Bu yöntemin tercih edilmesinin temel nedenleri şu şekilde özetlenebilir:

- Ağ Geometrisi ve Boyut Bağımsızlığı: FBSA yöntemleri, klasik nümerik yöntemlerin (sonlu farklar, sonlu elemanlar, sonlu hacimler gibi) gerektirdiği ızgara (grid) yapılarına ihtiyaç duymaz. Bu da karmaşık geometrilere ve yüksek boyutlu problemlere doğrudan uygulanabilmelerini sağlar (Raissi et al. 2019; Schoder et al. 2024).
- Veri Azlığına Dayanıklılık: Gerçek hayatta birçok fiziksel sistem için yüksek kaliteli ve yoğun veri elde etmek zordur. FBSA yöntemleri, az sayıda veri noktası ile de etkili şekilde çalışabilir çünkü fiziksel yasalar doğrudan modele entegre edilmiştir.
- Fiziksel Tutarlılık: Çözümün fiziksel sistemin yasaları ile uyumlu olması, modelin genelleme kabiliyetini ve güvenilirliğini artırır (Karniadakis et al. 2021).
- KDD Çözümlerine Uygunluk: KDD içeren mühendislik ve fizik problemlerinde FBSA yöntemleri, KDD'nin her noktasında kalıntıyı minimize ederek sürekli bir çözüm üretir. Bu özellik, özellikle yüksek boyutlu ve zaman bağımlı KDD'ler için büyük avantaj sağlar.
- Diğer yöntemlerden farkı: Geleneksel yöntemler tipik olarak ayar gerektiren ağ yapılarına bağımlıyken, FBSA yöntemleri ağsız çalışır ve çözümü doğrudan sürekli bir fonksiyon şeklinde üretir. Ayrıca FBSA yöntemleri, klasik yöntemlere göre yüksek frekanslı bileşenleri daha iyi modelleyebilme potansiyeline sahiptir (Jagtap et al. 2020).

"Fizik bilgili" terimi, bu yöntemde fiziksel kısıtlamaların doğrudan öğrenme sürecine katılmasından kaynaklanmaktadır. Geleneksel MÖ algoritmalarının aksine, FBSA modelleri yalnızca istatistiksel ilişkileri değil, aynı zamanda fizik yasalarını da öğrenir ve bu yasaları ihlal etmeyen çözümler üretmeye çalışır.

Özellikle bu çalışmada ele alınan doğrusal olmayan (non-linear) konveksiyon-difüzyon denklemleri gibi karmaşık KDD'ler için FBSA yöntemleri alternatif bir çözüm stratejisi sunmaktadır. Karmaşık sınır koşulları ve yüksek boyutlu çözüm alanlarında, klasik yöntemlerle karşılaştırıldığında daha esnek, ölçeklenebilir ve genelleştirilebilir çözümler üretme potansiyeline sahiptir.

1.4 Klasik ve Modern Yaklaşımlar: Makine Öğrenmesinden Fizik Bilgili Sinir Ağı Yöntemine Evrim

Makine öğrenmesi kavramı, yapay zekâ alanındaki gelişmelerle birlikte 1950'li yıllardan itibaren bilimsel tartışmalarda yer bulmaya başlamıştır (Russell et al. 2010). Bu dönemde bilgisayarların öğrenme yeteneği büyük ölçüde kavramsal düzeyde ele alınmış; uygulama olarak ise daha çok oyun oynama ve basit problem çözme gibi görevlerde sınırlı denemeler yapılmıştır (Samuel 1959). Bu öncü çalışmalar, makine öğrenmesinin temel ilkelerini ortaya koyarken aynı zamanda hesaplama gücü ve veri erişiminin sınırlılıkları nedeniyle uygulama alanlarının da oldukça dar kalmasına yol açmıştır.

1980'li ve 1990'lı yıllarda, özellikle istatistiksel yöntemlerin ve temel denetimli öğrenme algoritmalarının gelişimi ile makine öğrenmesi önemli bir ilerleme kaydetmiştir. Ancak bu dönemin algoritmaları, büyük veri kümelerine ve yüksek hesaplama kapasitelerine duyulan ihtiyaç nedeniyle belirli sınırların ötesine geçememiştir.

Bu tablo, 2000'li yılların sonlarına doğru değişmeye başlamıştır. Derin öğrenme (deep learning) tekniklerinin geliştirilmesi ve paralel hesaplama olanaklarının yaygınlaşması sayesinde makine öğrenmesi yeni bir ivme kazanmıştır (Krizhevsky et al. 2012). Özellikle derin sinir ağlarının görüntü işleme ve doğal dil işleme gibi karmaşık problemlerdeki başarısı, bu yöntemlerin çok daha geniş bir uygulama yelpazesinde kullanılmasının önünü açmıştır.

1. GİRİŞ

Bu süreçte dikkat çekici bir gelişme de makine öğrenmesinin geleneksel veri odaklı uygulamalardan çıkarak fizik tabanlı problemlere yönelmesidir. Sayısal bilimler ve mühendislik alanlarında, özellikle kısmi diferansiyel denklemler gibi karmaşık matematiksel yapıların çözümünde makine öğrenmesinin sunduğu esneklik önemli bir avantaj sağlamaya başlamıştır (Brunton et al. 2020). Ancak klasik makine öğrenmesi yöntemleri doğrudan veri öğrenmeye dayandığından, fiziksel yasaların veya sistem kısıtlarının doğrudan modele entegre edilmesi her zaman mümkün olamamıştır. Bu durum, fiziksel tutarlılığı garanti eden çözümler üretme konusunda sınırlamalara yol açmıştır (Karniadakis et al. 2021).

Tam da bu boşluğu doldurmak üzere fizik tabanlı makine öğrenmesi (physics-based machine learning) yaklaşımları geliştirilmiştir. Bu çerçevede ortaya çıkan en önemli yöntemlerden biri Physics-Informed Neural Networks (PINNs) olmuştur (Raissi et al. 2019). FBSA yaklaşımı, fiziksel bilgiyi doğrudan öğrenme sürecine entegre ederek, sinir ağlarının sadece verilere değil aynı zamanda fiziksel modellere de uymasını sağlar.

FBSA fikrinin temelleri aslında 1990'lı yıllara kadar uzanmaktadır. Dissanayake ve Phan-Thien (1994), konveksiyon-difüzyon türü KDD çözümleri için sinir ağlarını kullandıkları öncü çalışmaları ile bu yaklaşımın ilk uygulamalarından birini gerçekleştirmiştir. Bunu takip eden Lagaris ve çalışma arkadaşları (Lagaris et al. 1998), başlangıç ve sınır değer problemlerine sinir ağlarının uygulanmasını daha sistematik bir biçimde ele almış ve kalıntı terimlerin kayıp fonksiyonuna doğrudan entegre edilmesini önermiştir. Ancak dönemin sınırlı ağ mimarileri ve optimizasyon teknikleri bu fikirlerin yaygınlaşmasını engellemiştir.

Asıl atılım ise modern derin öğrenme tekniklerinin olgunlaşmasıyla birlikte yaşanmıştır. Raissi ve çalışma arkadaşlarının (Raissi et al. 2019) PINN yöntemini sistematik bir çerçeve içinde tanımladığı çalışması, bu alanda önemli bir dönüm noktası olmuştur. Bu yöntem sayesinde sinir ağları, yalnızca gözlem verilerine değil aynı zamanda fiziksel sistemlerin diferansiyel denklemleri tarafından tanımlanan kısıtlamalara da uymaya zorlanmaktadır. Böylece hem veri tutarlılığı hem de fiziksel tutarlılık açısından daha güvenilir çözümler elde edilmektedir.

1. GİRİŞ

FBSA yönteminin ortaya çıkışı, beraberinde çeşitli genişletilmiş yaklaşımları da getirmiştir. Jagtap ve çalışma arkadaşları (Jagtap et al. 2020), adaptif aktivasyon fonksiyonlarının eğitim performansını artırabileceğini göstermiştir. Krishnapriyan ve arkadaşları (Krishnapriyan et al. 2021) ise FBSA'ların zorlu problemlerde karşılaştığı başarısızlık modlarını analiz etmiş ve eğitim sürecine daha dengeli teknikler (örneğin curriculum learning) kazandırılabilceğini ortaya koymuştur.

FBSA uygulama alanları da zaman içinde oldukça genişlemiştir. Guan ve Elman (2024), konveksiyon-difüzyon denklemlerinin çözümünde FBSA yapılarının doğruluğunu artırmak için girdi dönüşümü (input transformation) tekniklerini önermiştir. Özdemir (2025), FBSA yöntemlerinin manyetohidrodinamik (MHD) problemlerinde klasik yöntemlere göre daha verimli çözümler sunabileceğini göstermiştir.

Ayrıca, FBSA mimarisi üzerinde alan ayrıştırma yaklaşımı (domain decomposition) yaklaşımıyla geliştirilen XPINN ve cPINN gibi yapılar, büyük ölçekli problemlerin daha verimli çözülmesine olanak tanımaktadır. Fourier tabanlı girişlerle çalışan F-PINN mimarileri, periyodik ve yüksek frekanslı çözümler için daha etkili performans göstermektedir. Bunun yanı sıra, belirsizlik modellemesi için Bayesian PINN yaklaşımları da aktif araştırma konuları arasındadır.

Son dönemde FBSA yöntemleri klasik sayısal yöntemlerle de hibrit biçimde entegre edilmektedir. Stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemleri (Baysal 2012) ya da sınır elemanlar yöntemi (Fendoğlu 2020) ile oluşturulan hibrit FBSA yapıları, özellikle konveksiyon baskın problemlerde çözüm kararlılığını artırmaktadır. Yüksek boyutlu Helmholtz denklemleri gibi karmaşık problemlerde de PINN yaklaşımlarının başarılı çözümler üretebildiği gösterilmiştir (Schoder et al. 2024).

Bugün itibarıyla PINN ve türev yöntemleri; akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, malzeme bilimi, biyomedikal mühendislik ve kuantum fiziği gibi çok çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Gelişen optimizasyon algoritmaları (örneğin Adam (Kingma ve Ba 2014), L-BFGS (Liu ve Nocedal 1989)) ve daha derin ağ mimarileri sayesinde bu yöntemlerin performansı da sürekli olarak artmaktadır.

1. GİRİŞ

PINN yaklaşımları, klasik sayısal yöntemlerin sınırlarını aşma potansiyeline sahip olmakla birlikte, veri odaklı ve fizik bilgili modelleme arasında güçlü bir köprü kurarak, özellikle hibrit modelleme ihtiyaçları için önümüzdeki dönemin en önemli araştırma araçlarından biri haline gelmektedir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerinin zaman bağımlı ve değişken katsayılı türlerinin nümerik çözümüne yönelik literatürde pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar hem klasik sayısal yöntemlerle hem de yeni nesil yapay zekâ destekli tekniklerle gerçekleştirilmiştir. Özellikle sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi geleneksel yöntemler, bu tür problemlerin çözümünde uzun yıllardır başarıyla kullanılmaktadır. Örneğin, Adıgüzel (2024) tarafından yapılan çalışmada, iki boyutlu zaman bağımlı ve sönümlemeli konvektif katsayılı dalga türü konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi, zamansal olarak Crank-Nicolson şeması ile, uzaysal olarak ise sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmüştür. Bu çözüm sırasında hareketli alanlarda ortaya çıkan sayısal salınımların kontrolüne özel önem verilmiştir.

Benzer şekilde, Baysal (2012), Şendur (2012) ve Yılmaz (2016) tarafından gerçekleştirilen tezlerde, düşük difüzyon katsayılı problemler için stabilize sonlu eleman yöntemlerinin geliştirilmesi ve değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bu çalışmalarda özellikle SUPG (Streamline-Upwind Petrov-Galerkin), RFB (Residual-Free Bubbles) ve MS (Multiscale Stabilization) gibi uzay ayrıklaştırma teknikleri kullanılmış, zaman entegrasyonu için ise genelleştirilmiş Euler ve Crank-Nicolson yöntemlerine yer verilmiştir. Stabilizasyonun sağladığı avantajlar sayesinde yüksek Péclet sayılarında dahi kararlı çözümler elde edilebilmiştir. Topcu ve Irk (2018) ise sabit katsayılı bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünde Sextic B-spline Galerkin yöntemini önermiş ve zaman entegrasyonunda Crank-Nicolson ile yüksek doğruluk sağlamıştır.

Doğrusal olmayan adveksiyon-difüzyon problemlerinde ise doğrusallaştırma yöntemleri öne çıkmaktadır. Sakai ve Kimura (2005), Cole-Hopf dönüşümünü kullanarak doğrusal olmayan iki boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemini doğrusal (linear) hâle getirmiş ve ardından spektral yöntemlerle çözüm gerçekleştirmiştir. Bu yöntemle elde edilen sayısal algoritma, toplam varyasyon azaltıcı özelliği sayesinde salınımları başarıyla bastırmıştır. Benzer bir yaklaşım fractional türevli problemlerde de görülmektedir. Kurt, Cenesiz ve Taşbozan (2016) tarafından yapılan çalışmada, fractional Burgers denkleminin yine Cole-Hopf dönüşümü uygulanarak Fourier dönüşümü

2. KAYNAK ÖZETLERİ

aracılığıyla kapalı formda çözüm elde edilmiştir. Bu yaklaşım, conformable fractional türev tanımının uygulanabilirliğini de göstermiştir.

Karmaşık yapılı hiperbolik sistemler için yüksek çözünürlüklü şemaların geliştirilmesi de literatürde geniş yer bulmuştur. Harten (1983) tarafından önerilen yüksek çözünürlüklü sonlu fark şemaları, toplam varyasyon azaltıcı (TVD) özellikleri sayesinde özellikle hiperbolik korunum yasalarının zayıf çözümleri için oldukça uygundur. Bu şemalar, entropi koşulları ile uyumlu bir yapıdadır ve sayısal salınımların engellenmesi açısından oldukça etkilidir. Bu yaklaşım, zaman bağımlı dalga propagasyonu problemlerinde başarıyla uygulanmıştır.

Son yıllarda fiziksel bilgiyle bütünleştirilmiş yapay zekâ tabanlı yöntemler (PINN- Physics-Informed Neural Networks) kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde giderek daha fazla kullanılmaktadır. Raissi, Perdikaris ve Karniadakis (2019), PINN yöntemi ile sınırlı veriyle spatio-temporal çözümler üretmiş ve bu yöntemin Burgers, Schrödinger ve Navier-Stokes gibi denklemler üzerinde oldukça başarılı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Jagtap, Kawaguchi ve Karniadakis (2020), bu mimariyi geliştirerek adaptif aktivasyon fonksiyonları ile özellikle yüksek gradyanlı bölgelerde daha hızlı yakınsama sağlamıştır. PINN tabanlı yöntemlerin doğruluk ve kararlılık açısından geliştirilmesine yönelik olarak Frerichs-Mihov, Henning ve John (2024) tarafından crosswind loss ve limited residual loss gibi yeni kayıp fonksiyonları önerilmiş ve büyük Péclet sayılı konveksiyon-baskın problemlerde yüksek performans elde edilmiştir.

PINN mimarisinin daha esnek ve bölgesel hale getirilmesi adına cPINN (Conservative PINN) ve FBPINN (Finite Basis PINN) gibi yeni yöntemler de önerilmiştir. Jagtap, Kharazmi ve Karniadakis (2020) tarafından geliştirilen cPINN yöntemi, çözüm alanını alt bölgelere ayırarak her bölgeye PINN uygulamakta ve akı sürekliliği ile yüksek gradyanlı bölgelerde hata azaltımı sağlamaktadır. Öte yandan, Moseley, Markham ve Nissen-Meyer (2021) tarafından önerilen FBPINN yaklaşımı, klasik PINN'lere kıyasla çok ölçekli problemler için daha uygun bir yapıda olup, temel fonksiyonlar yardımıyla düşük hesap yükü ve yüksek doğruluk sunmaktadır. Yapay sinir ağı tabanlı diğer yaklaşımlar da literatürde mevcuttur. Gör (2020), ileri beslemeli sinir

2. KAYNAK ÖZETLERİ

ağları ile diferansiyel denklemlerin çözümünü amaçlamış ve çeşitli optimizasyon algoritmalarını eğitim sürecinde kullanarak klasik yöntemlerle karşılaştırmalı başarı elde etmiştir. Bu alandaki öncü çalışmalardan biri olan Lagaris, Likas ve Fotiadis (1998) ise sınır ve başlangıç koşullarını sağlamak üzere tasarlanmış iki terimli bir çözüm fonksiyonu kullanarak sinir ağı yaklaşımının adi diferansiyel denklem (ADD) ve KDD problemlerine uygulanabilirliğini göstermiştir.

Sonuç olarak, konveksiyon-difüzyon-reaksiyon türü diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik olarak klasik nümerik yöntemler, doğrusallaştırma teknikleri ve modern yapay zekâ destekli modeller arasında çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu çalışmalar hem teorik hem uygulamalı yönleriyle bu tür problemlerin çözümüne katkı sağlamış ve güncel tezlerde temel dayanak noktası hâline gelmiştir. Tez çalışmamda da bu yöntemlerin avantajlarından faydalanılarak hem kararlı hem de fiziksel gerçeklikle uyumlu çözümler elde etmeye odaklanılmıştır.

Tablo 2.1. Literatürde kullanılan yöntemlerin özeti.

Yazar (Yıl)	Problem Türü	Yöntemler	Zaman Yöntemi	Uygulama/Konu	Notlar
Adıgüzel (2024)	2D ADR, zaman bağımlı, sönümlemeli	FEM + Sonlu Farklar	Crank-Nicolson	Salınım kontrolü	FORTTRAN ile uygulanmış
Baysal (2012)	Doğrusal/Doğrusal olmayan taşıma	SUPG, RFB, MS	Genelleştirilmiş Euler	Operatör ayırma stratejisi	Stabilizasyon detaylı incelenmiş
Şendur (2012)	Konveksiyon-difüzyon	Stabilize FEM (SUPG, RFB)	Crank-Nicolson	1D-2D uygulamalar	Bubble fonksiyonlar kullanılmış
Yılmaz (2016)	Zaman bağımlı konveksiyon-difüzyon	SDFEM	θ -yöntemler i, CN	Hata & dalga analizi	Yüksek Peclet için test edilmiş
Topcu & Irk (2018)	1D sabit katsayılı adveksiyon-difüzyon	B-spline Galerkin	Crank-Nicolson + yüksek	Hata normları ile analiz	Yüksek doğruluk gösterilmiş
Sakai & Kimura (2005)	Doğrusal olmayan adveksiyon-difüzyon	Cole-Hopf + Spektral	-	Burgers & Şok dalgası	TVD özelliği vurgulanmış

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Yazar (Yıl)	Problem Türü	Yöntemler	Zaman Yöntemi	Uygulama/Konu	Notlar
Kurt et al. (2016)	Fractional Burgers	Cole-Hopf + Fourier	-	Fractional çözüm	Conformable türev kullanılmış
Harten (1983)	Hiperbolik sistemler	Yüksek çöz. sonlu farklar	-	TVD şemalar	Entropi uyumlu
Raissi et al. (2019)	Çeşitli KDD'ler	PINN	Sürekli & ayrık zaman	Burgers, Schrödinger , vs.	Az veri ile çözüm
Jagtap et al. (2020a)	Yüksek gradyanlı KDD'ler	PINN + Adaptif aktivasyon	-	Klein-Gordon, Helmholtz	Yakınsama iyileştirilmiş
Frerichs-Mihov et al. (2024)	Konveksiyon-baskın KDD'ler	PINN + Özel kayıplar	-	Büyük Peclet	Crosswind/limited loss önerisi
Jagtap et al. (2020b)	Korunum yasaları	cPINN	-	Burgers, Euler	Alan bölmeli PINN
Moseley et al. (2021)	Çok ölçekli KDD'ler	FBPINN	-	Geniş alanlarda çözüm	Düşük maliyetli çözüm
Gör (2020)	ODE çözümleri	FFNN + PSO/GSA/ABC/ACO	-	Başlangıç-sınır değerli ODE	Esneklik gösterilmiş
Lagaris et al. (1998)	ODE/KDD	FFNN + iki terimli çözüm	-	Poisson, vs.	Sınır koşulu sağlanmış yapay ağ
Tsega (2024)	2D ADR (doğrusal olmayan, değişken katsayılı)	CN + Newton + Gauss-Seidel	Crank-Nicolson	Kirlilik taşınımı	MATLAB ile uygulanmış

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde yapay sinir ağları (YSA) temelli yaklaşımların fiziksel yasalarla bütünleşmiş hali olan FBSA yöntemi ayrıntılı olarak tanıtılmaktadır. Özellikle doğrusal olmayan konveksiyon-difüzyon denklemlerinin FBSA ile modellenme süreci, kullanılan hiper parametre seçimleri ve yöntemin sağladığı avantajlar literatür desteği ile açıklanmıştır.

3.1 Fizik Bilgili Sinir Ağı Yapısı ve Zaman Bağımsız Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulaması

Yapay sinir ağları, biyolojik sinir sistemlerinden esinlenilerek geliştirilmiş çok katmanlı, parametrik ve yüksek genelleme kapasitesine sahip öğrenme modelleridir. Bu modeller, giriş verileri ile hedef çıktılar arasındaki karmaşık ilişkileri öğrenerek, doğrudan modellenmesi zor problemler için etkili alternatifler sunmaktadır (Goodfellow et al. 2016).

Son yıllarda, kısmi diferansiyel denklem çözümlerinde yapay sinir ağlarının kullanımına yönelik ilgi artmıştır. Özellikle fiziksel yasaların ağ eğitime doğrudan dahil edildiği FBSA yöntemi, yüksek boyutlu problemlerde ve karmaşık geometrilere sahip sistemlerde geleneksel sayısal yöntemlere göre belirgin avantajlar sunmaktadır (Raissi et al. 2019).

FBSA yönteminde temel fikir, aşağıdaki genel formdaki KDD sisteminin yaklaşık çözümünü sinir ağı ile öğrenmektir:

$$\begin{cases} \mathcal{N}[u(x)] = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Bu genel ifadede $u(x)$ çözüm fonksiyonunu $\mathcal{N}$ diferansiyel operatörü altında verilen kaynak fonksiyon $f(x)$ ile uyum sağlaması gerektiğini ve aynı zamanda sınır koşullarını $g(x)$ ile tanımlandığını göstermektedir. FBSA yöntemi, bu koşulları sağlamak üzere $\hat{u}(x)$ tahminini üretecek bir sinir ağı eğitir.

FBSA mimarisi, ileri beslemeli bir sinir ağı olarak modellenmektedir. Ağı katmanları arasında aşağıdaki hesaplamalar şu şekilde gerçekleştirilir:

$$z^k = \sigma(W^{(k)}z^{(k-1)} + b^{(k)}), k = 1, 2, 3, \dots, L \quad (3.2)$$

Bu ifadede, σ aktivasyon fonksiyonunu, W ağırlık matrislerini ve b bias terimlerini temsil eder; $\theta = (W, b)$ şeklinde ifade edilir. FBSA için literatürde yaygın biçimde tercih edilen hiperbolik tanjant ($\tanh$) aktivasyon fonksiyonu kullanılmıştır. Yapılan çalışmalar, $\tanh$ 'nın sürekli ve türevlenebilir olması nedeniyle kısmi diferansiyel denklem çözümlerinde yüksek performans gösterdiğini ortaya koymaktadır (Raissi et al. 2019; Jagtap et al. 2020).

Eğitim sürecinde kullanılan veri noktaları, herhangi bir harici ya da hazır veri setine dayanmamakta; doğrudan diferansiyel denklemler ve sınır koşulları üzerinden oluşturulmaktadır. Bu kapsamda, çözüm bölgesinde yer alan iç noktalar (collocation points) olarak adlandırılmakta ve uniform rastgele örnekleme (uniform random sampling) yöntemiyle seçilmektedir. Sınır yüzeylerindeki noktalar ise her bir yüzey için düzenli yapılandırılmış ızgara (uniform structured grid) yöntemiyle üretilmiştir. Böylece ağ, yalnızca fizik tabanlı bilgiye dayalı olarak çözüm öğrenmekte ve herhangi bir veri setine bağımlı olmamaktadır.

Giriş verileri, her bir değişken için belirlenen alt sınır (x_{min}) ve üst sınır (x_{max}) kullanılarak:

$$\hat{x} = 2 \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} - 1 \quad (3.3)$$

Denklem (3.3) ile $[-1, 1]$ aralığında ölçeklendirilmiştir. Bu normalizasyon işlemi, eğitim sırasında aktivasyon fonksiyonlarının daha kararlı çalışmasını ve ağı daha hızlı öğrenmesini sağlar (Raissi et al. 2019).

FBSA eğitim süreci, literatürde önerilen iki aşamalı optimizasyon stratejisi ile gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada, Adam optimizasyon algoritması (Kingma ve Ba 2014)

kullanılarak hızlı ve kararlı bir ön optimizasyon yapılmakta; ikinci aşamada ise L-BFGS algoritması (Liu ve Nocedal 1989) kullanılarak kayıp fonksiyonunun daha düşük değerlerine ulaşılması hedeflenmektedir. Bu stratejinin, eğitim sürecinde yakınsama hızını ve çözüm doğruluğunu artırdığı bilinmektedir (Raissi et al. 2019).

Eğitim sırasında diferansiyel denklem kalıntısı ve sınır koşulları ile uyum sağlamak amacıyla toplam kayıp fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$L(\theta) = L_{PDE}(\theta) + L_{BC}(\theta) \quad (3.4)$$

Tanımlanan toplam kayıp fonksiyonunda $L_{PDE}(\theta)$ ve $L_{BC}(\theta)$ terimleri, sırasıyla çözüm bölgesindeki iç noktalar ve sınır koşulu noktaları üzerinde hesaplanmaktadır. Bu noktalar, literatürde iç nokta (collocation point) olarak adlandırılır ve bu çalışmada da çözüm bölgesine ve sınır yüzeylerine rastgele ve eş dağılımlı şekilde seçilmektedir (Raissi et al. 2019).

Kullanılan iç ve sınır noktaları sayıları $\mathcal{N}_f$ ve $\mathcal{N}_{BC}$ olarak ifade edilmekte ve ilgili kayıp terimlerinde aşağıdaki şekilde kullanılmaktadır. FBSA eğitimi sırasında, KDD yapısına ilişkin kalıntı hatası, çözüm bölgesindeki $\mathcal{N}_f$ adet iç nokta üzerinden aşağıdaki şekilde minimize edilmektedir:

$$L_{PDE}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_f} |\mathcal{N}[\hat{u}(x_i; \theta)] - f(x_i)|^2 \quad (3.5)$$

Sınır koşullarına ilişkin kayıp terimi ise aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$L_{BC}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{N}_{BC}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{BC}} |\mathcal{N}[\hat{u}(x_i; \theta)] - g(x_i)|^2 \quad (3.6)$$

Bu toplam kayıp fonksiyonu $L(\theta)$, FBSA yönteminin temel öğrenme mekanizmasını oluşturur ve diferansiyel denklemin fiziksel yapısına ve sınır koşullarına aynı anda uyum sağlayacak şekilde optimize edilir.

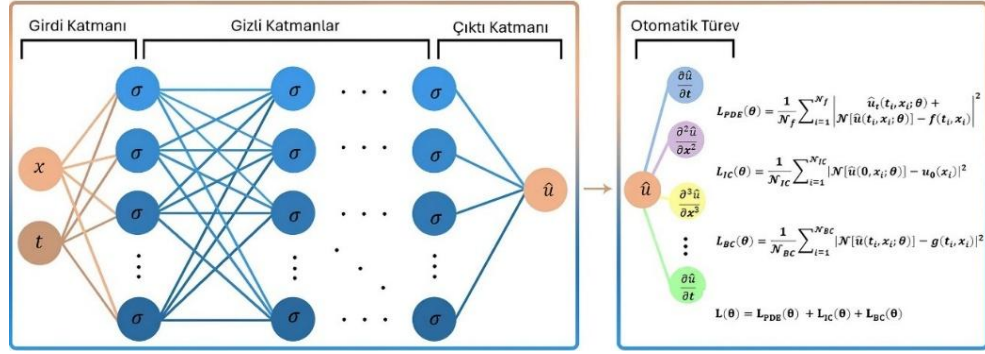
Bu iki terimin toplamı, optimizasyon sürecinde minimize edilerek modelin hem fiziksel yasaları hem de sınır koşullarını aynı anda yüksek doğrulukla öğrenmesi sağlar. Böylece sonraki bölümlerde sunulacak örnek problemlerde kullanılan kayıp fonksiyonları da bu genel yapı temel alınarak modellenmektedir.

FBSA modellerinin en güçlü yönlerinden biri, bu otomatik türevleme (autograd) kapasitesidir. Bu yöntem, ağın çıktılarının hem uzay hem de zaman değişkenlerine göre türevlerinin yüksek hassasiyetle hesaplanmasını sağlar. Böylece diferansiyel denklemlerle tanımlanan fiziksel yasalar, ağın öğrenme sürecine doğrudan dahil edilmiş olur.

Bu bütüncül yapı sayesinde FBSA yöntemi, yalnızca geleneksel sayısal yöntemlere bir alternatif sunmakla kalmaz; aynı zamanda yüksek boyutlu ve karmaşık geometrilere sahip problemlerin çözümünde güçlü bir yaklaşım olarak öne çıkar.

3.2 Fizik Bilgili Sınır Ağları: Yapısı ve Zaman Bağımlı Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulaması

Önceki bölümde, zaman bağımsız kısmi diferansiyel denklemler için FBSA yönteminin temel yapısı ve uygulanma biçimi ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu bölümde ise, çözümün yalnızca uzay değişkenlerine değil, aynı zamanda zaman değişkenine de bağlı olduğu fiziksel sistemler için FBSA yaklaşımının nasıl genişletildiği açıklanmaktadır.



Şekil 3.1. Zaman bağımlı denklemler için FBSA mimarisi.

Zaman bağımlı KDD problemlerinde çözüm fonksiyonu hem zaman (t) hem de uzay (x) değişkenlerine bağlıdır ve genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$u: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.7)$$

Bu tür denklemler genellikle şu genel formda ifade edilir:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{N}[u(t, x)] = f(t, x), & t > 0, x \in \Omega \\ u(t, x) = g(t, x), & t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

Burada $\mathcal{N}[u(t, x)]$, çözüm fonksiyonunun uzay değişkenine göre türevlerini içeren bir diferansiyel operatördür. $f(t, x)$ sistemin dışsal etkilerini, $g(t, x)$ sınır koşullarını ve $u_0(x)$ başlangıç durumunu temsil eder.

FBSA yaklaşımı, bu denklemleri çözmek amacıyla $u(t, x)$ fonksiyonunu yaklaşık olarak temsil eden bir sinir ağı modeli inşa eder. Zaman bağımsız yapıya benzer şekilde, bu model de giriş, gizli ve çıkış katmanlarından oluşur. Ancak bu durumda ağın giriş vektörü yalnızca uzay konumlarını değil, aynı zamanda zaman bilgisini de içerir: (t, x) .

Bu farklılığa rağmen, ağ mimarisi, parametre güncelleme mekanizması ve aktivasyon fonksiyonlarının genel yapısı önceki bölümde açıklanan zaman bağımsız yapı ile büyük ölçüde benzerlik göstermektedir. Bu nedenle, bu bölümde sadece zaman bağımlı problemlerin gerektirdiği yeni bileşenlere odaklanılacaktır.

Zaman bağımlı KDD'ler için ağın öğrenmesi gereken temel fark, çözüm fonksiyonunun artık zaman türevini de içermesidir. Bu kapsamda, diferansiyel denklemin kalıntı (residual) terimi için kullanılan kayıp fonksiyonu şu şekilde genişletilmektedir:

$$L_{PDE}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_f} |\hat{u}_t(t_i, x_i; \theta) + \mathcal{N}[\hat{u}(t_i, x_i; \theta)] - f(t_i, x_i)|^2 \quad (3.9)$$

Zaman türevlerinin ağın öğrenme sürecine doğrudan dahil edilebilmesi, FBSA yaklaşımının güçlü yönlerinden biri olan otomatik türevleme (autograd) yetenekleri sayesinde sağlanmaktadır. Bu sayede, modelin çıktılarının hem zamana hem de uzaya göre türevleri yüksek hassasiyetle hesaplanır.

Zaman bağımlı problemlerde ayrıca, başlangıç koşulları ve zamana göre değişen sınır koşulları da modele uygun şekilde dahil edilmelidir. Bu nedenle, toplam kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibi üç bileşenli olarak tanımlanmaktadır:

Başlangıç koşulu (Initial condition):

$$L_{IC}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{N}_{IC}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{IC}} |\mathcal{N}[\hat{u}(0, x_i; \theta)] - u_0(x_i)|^2 \quad (3.10)$$

Sınır koşulu (Boundary condition):

$$L_{BC}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{N}_{BC}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{BC}} |\mathcal{N}[\hat{u}(t_i, x_i; \theta)] - g(t_i, x_i)|^2 \quad (3.11)$$

Toplam kayıp fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$L(\theta) = L_{PDE}(\theta) + L_{IC}(\theta) + L_{BC}(\theta) \quad (3.12)$$

Bu yapı sayesinde, zaman bağımlı sistemlerde fiziksel yasalar hem diferansiyel yapı hem de başlangıç ve sınır koşulları düzeyinde öğrenilebilir. FBSA'nın bu bütüncül yaklaşımı, klasik yöntemlerin sıklıkla yetersiz kaldığı karmaşık ve yüksek boyutlu zaman bağımlı problemlerin çözümünde esnek, veriye uyumlu ve fizik temelli çözümler üretme potansiyeline sahiptir.

3.3 Sonuçların Değerlendirilmesinde Kullanılan Hata Ölçütleri

Bu çalışmada, KDD çözüm doğruluğunu değerlendirmek amacıyla L_2 görelî hata, maksimum mutlak hata (MMH) ve kök ortalama kare hatası (KOKH) olmak üzere üç temel hata ölçütü kullanılmıştır. Bu ölçütler, FBSA yöntemiyle elde edilen sayısal çözümlerin literatürdeki analitik çözümlerle karşılaştırılmasına olanak sağlamaktadır. Burada:

- N : Çözüm alanında karşılaştırma yapılan test noktalarının toplam sayısını
- $\hat{u}^{(i)}$: FBSA yöntemi ile elde edilen FBSA çıktısını
- u^i : İlgili problem için bilinen analitik (gerçek) çözüm değerini

ifade etmektedir.

Aşağıda, çalışmada kullanılan hata ölçütlerinin matematiksel tanımları verilmiştir.

L_2 Görelî Hata:

$$L_2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{u}^{(i)} - u^i)^2}{\sum_{i=1}^N (\hat{u}^{(i)})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

KOKH:

$$RMS = RMS \text{ Hata} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{u}^{(i)} - u^i)^2} \quad (3.14)$$

MMH:

$$\text{Maksimum Mutlak Hata} = MMH = \max_{1 \leq i \leq N} |\hat{u}^{(i)} - u^i| \quad (3.15)$$

L_2 görelî hata, modelin genel doğruluğunu değerlendirmeye olanak sağlamaktadır.

L_2 değeri sıfıra yaklaştıkça, modelin analitik çözüme olan yakınlığı artmakta; bu durum genel model başarısının bir göstergesi olarak yorumlanmaktadır.

Benzer şekilde, KOKH, çözüm alanındaki ortalama hata büyüklüğünü ifade etmektedir. KOKH değeri düşük olduğunda, modelin tüm çözüm alanı boyunca ortalama olarak küçük hatalarla çalıştığı anlaşılır.

Son olarak, MMH, çözüm alanında ortaya çıkan en büyük noktasal hatayı göstermektedir. MMH değeri, modelin en kötü durumda ne kadar hata yaptığına dair bir fikir verir. Bu nedenle, MMH değeri düşük ise, modelin tüm noktalar için güvenilir bir çözüm sağladığı söylenebilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, FBSA yöntemi kullanılarak bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu zaman bağımlı ve bağımsız konveksiyon-difüzyon denklemlerinin doğrusal ve doğrusal olmayan yapıdaki çözümleri gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın temel amacı, FBSA yaklaşımının farklı yapıdaki fiziksel sistemler üzerindeki performansını değerlendirmek ve yöntemin etkinliğini analiz etmektir.

Çalışmada ele alınan tüm problemlerde Dirichlet tipi sınır koşulları kullanılmıştır. Bu sınır koşulları, analitik çözüm fonksiyonundan elde edilen değerlerle doğrudan uygulanmış ve böylece sayısal çözümün fiziksel doğruluğu garanti altına alınmıştır. Bu tercih aynı zamanda, FBSA yönteminin sınır verilerine olan duyarlılığının etkili bir biçimde gözlemlenmesine olanak sağlamaktadır.

Kullanılan FBSA modeli, tam bağlantılı bir yapay sinir ağı mimarisiyle yapılandırılmış olup, aktivasyon fonksiyonu olarak tanh tercih edilmiştir. Eğitim süreci iki aşamalı olarak yürütülmüştür: ilk aşamada Adam optimizasyon algoritması ile model parametreleri güncellenmiş; ikinci aşamada ise L-BFGS algoritması kullanılarak daha hassas bir optimizasyon gerçekleştirilmiştir.

Kayıp fonksiyonu, her problem türüne göre özelleştirilmiş olup, yalnızca bir boyutlu denklemler için detaylı formülasyonu ilgili problem yapısına göre açık şekilde sunulmuştur. İki ve üç boyutlu problemlerde ise temel yapı korunmuş, formülasyonun tekrarı yapılmaksızın sonuçlar üzerinden değerlendirme gerçekleştirilmiştir.

FBSA modeli, genel olarak tüm bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu test problemlerinde ortak yapı ile kullanılmıştır. Bununla birlikte, problem tipine bağlı olarak Adam ve L-BFGS algoritmaları için kullanılan iterasyon sayıları, nöron sayısı ve katman sayısı gibi hiper parametreler gerektiğinde değiştirilmiş ve ilgili bölümlerde belirtilmiştir.

Her problem tipi için farklı karşılaştırma grafikleri ve hata metrikleri hesaplanmış; elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak analiz edilmiş ve yorumlanmıştır.

Tüm hesaplamalar, belirli donanım özelliklerine sahip bir kişisel bilgisayar üzerinde gerçekleştirilmiştir. Kullanılan sistemde Intel® Core™ i7-13700H (14 çekirdek, 20 iş parçacığı, 2,40 GHz temel frekans), 40 GB DDR4 RAM ve NVIDIA GeForce RTX 4050 grafik kartı bulunmaktadır. Hesaplamalarda PyTorch kütüphanesi kullanılmıştır. CPU ve GPU kullanım süreleri, her problem türü için ayrı ayrı kaydedilmiş ve karşılaştırmalı analizlere konu edilmiştir.

4.1 Bir Boyutlu Problemlerin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu bölümde, bir boyutlu konveksiyon-difüzyon-reaksiyon türü diferansiyel denklemlerin FBSA yöntemiyle çözümü ele alınmaktadır. Farklı parametreler ile başlangıç ve sınır koşulları altında hem doğrusal hem de doğrusal olmayan zaman bağımlı ve zaman bağımsız problemler üzerinde FBSA yaklaşımının etkinliği sayısal deneylerle incelenmiştir. Her bir örnek problemde modelin başarısı, analitik çözümlerle karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiş ve elde edilen hata analizleri sunulmuştur. Böylece FBSA yönteminin bir boyutlu problemlerdeki performansına dair kapsamlı bir değerlendirme yapılmıştır.

Örnek 1. Bir Boyutlu Zaman Bağımsız Doğrusal Konveksiyon Difüzyon Denkleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu çalışmada, bir boyutlu, zaman bağımsız, doğrusal konveksiyon-difüzyon probleminin çözümü FBSA yöntemi ile ele alınmıştır. Bu bağlamda ele alınan problem, aşağıda verilen konveksiyon-difüzyon denklemi ve ilgili sınır koşulları ile tanımlanmaktadır:

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & , \quad x \in [0,1] \\ u(0) = 0 & , \quad u(1) = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Burada ε difüzyon katsayısını; k ise konveksiyon katsayısını temsil etmektedir. $u(x)$ ise çözümü aranan fonksiyondur. Denklemin analitik çözümü kapalı formda elde

edilebildiğinden, FBSA yöntemi ile elde edilen sonuçların doğruluğu doğrudan analitik çözüm ile karşılaştırılabilmektedir.

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 20 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 10.000 iterasyon Adam kullanılırken 500 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon gerçekleştirilmiştir. Eğitim sırasında çözüm aralığında $\mathcal{N}_f = 1000$ adet iç nokta kullanılmış olup, sınır koşulları için kullanılan noktalar bir boyutlu denklemden dolayı 2 adettir.

Modelin eğitimi sırasında kullanılan kayıp fonksiyonu, tez kapsamında (3.4) numaralı denklemde genel haliyle sunulan formülün bu probleme özgü olarak uyarlanmış şeklidir. Bu uyarlamada, toplam kayıp fonksiyonu; diferansiyel denklem kalıntısı ve sınır koşulu hatalarının toplamı olarak tanımlanmıştır. Kullanılan kayıp fonksiyonu aşağıda verilmektedir:

$$L(\theta) = L_{PDE}(\theta) + L_{BC}(\theta) \quad (4.2)$$

Bu yapı içerisinde, L_{PDE} ve L_{BC} terimleri, çözülen denklemin özelliklerine göre aşağıdaki şekilde özelleştirilmiştir:

$$R(x) = -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.3)$$

Burada $\hat{u}(x)$, FBSA modeli tarafından öğrenilen yaklaşık çözüm fonksiyonudur; θ model parametrelerini temsil etmektedir. Bu ifade kullanılarak L_{PDE} terimi, çözüm aralığındaki $\mathcal{N}_f$ adet iç nokta üzerinde ortalama karesel hata (MSE) olarak hesaplanmaktadır:

$$L_{PDE} = \frac{1}{\mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_f} |R(x_i)|^2 = \frac{1}{\mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_f} |\varepsilon u_{xx}(x_i) + k u_x(x_i)|^2 \quad (4.4)$$

Buna ek olarak, sınır koşullarının sağlanması amacıyla L_{BC} terimi iki sınır noktası $x = 0$ ve $x = 1$ için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$L_{BC} = \frac{1}{2} [(\hat{u}(0) - 0)^2 + (\hat{u}(1) - 1)^2] \quad (4.5)$$

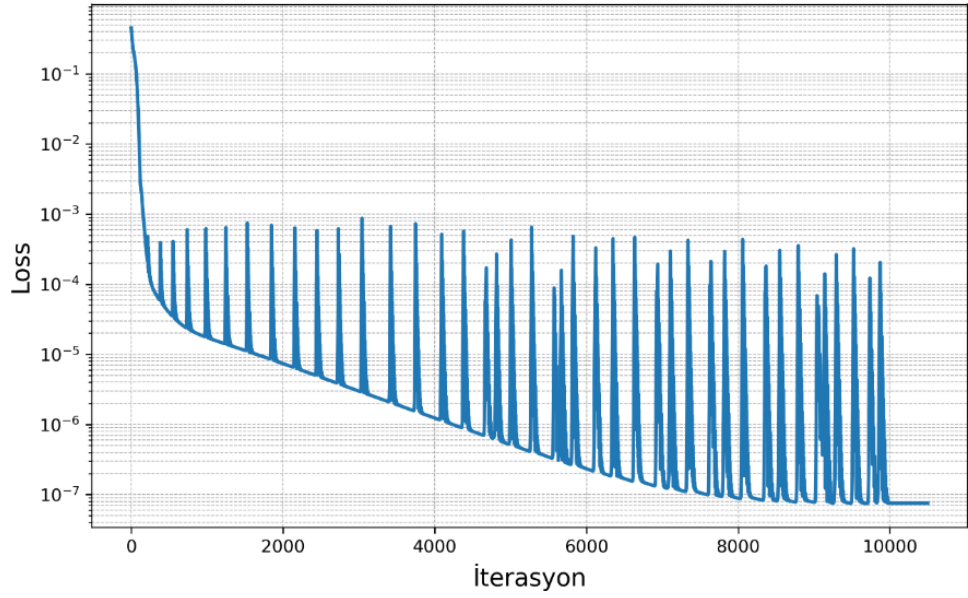
Sonuç olarak, bu problem için toplam kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibi açık şekilde ifade edilmektedir:

$$L(\theta) = \frac{1}{\mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_f} |\varepsilon \hat{u}_{xx}(x_i) + k \hat{u}_x(x_i)|^2 + \frac{1}{2} [(\hat{u}(0) - 0)^2 + (\hat{u}(1) - 1)^2] \quad (4.6)$$

Bu formülasyon sayesinde, FBSA modeli eğitim süreci boyunca hem diferansiyel denklem koşullarını hem de sınır koşullarını eşzamanlı olarak optimize ederek öğrenmektedir.

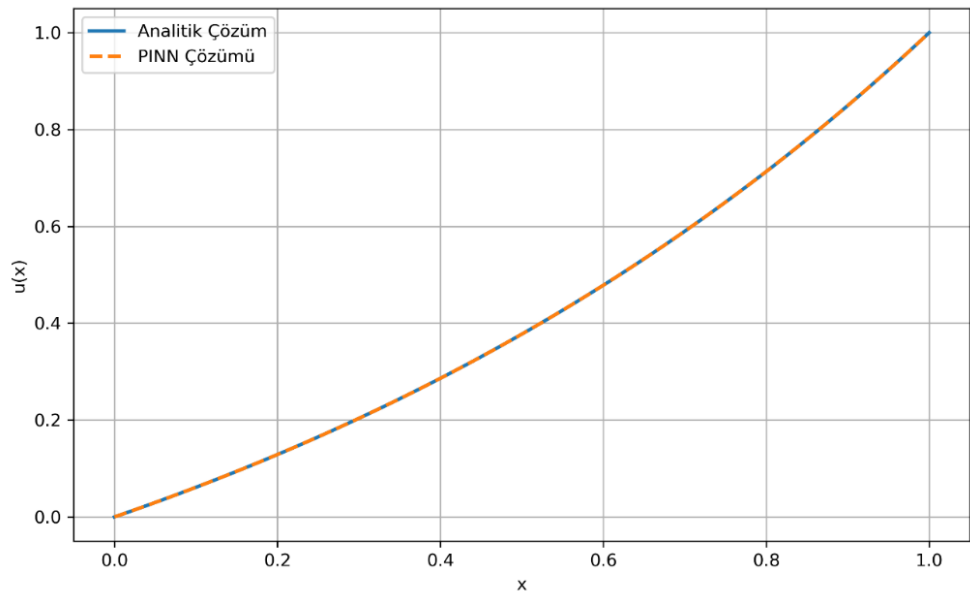
Bu kısımda $\varepsilon = 1$ ve $k = 1$ parametreleri için elde edilen sonuçlar sunulmaktadır. Eğitim sürecinin tamamlanmasının ardından elde edilen sonuçlar hem FBSA çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması hem de hata analizleri açısından değerlendirilmiştir. Bu kapsamda, eğitim sürecindeki toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi, FBSA çözümü ile analitik çözüm karşılaştırması ve mutlak hata dağılımı aşağıda sunulmaktadır.

Şekil 4.1'de eğitim boyunca toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi gösterilmektedir. İlk aşamada Adam algoritması ile hızlı bir şekilde 10^{-7} seviyelerine yakınsama sağlanmış, ardından L-BFGS algoritması bu seviyede durağanlaşmıştır.



Şekil 4.1. $\varepsilon = 1$ ve $k = 1$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.

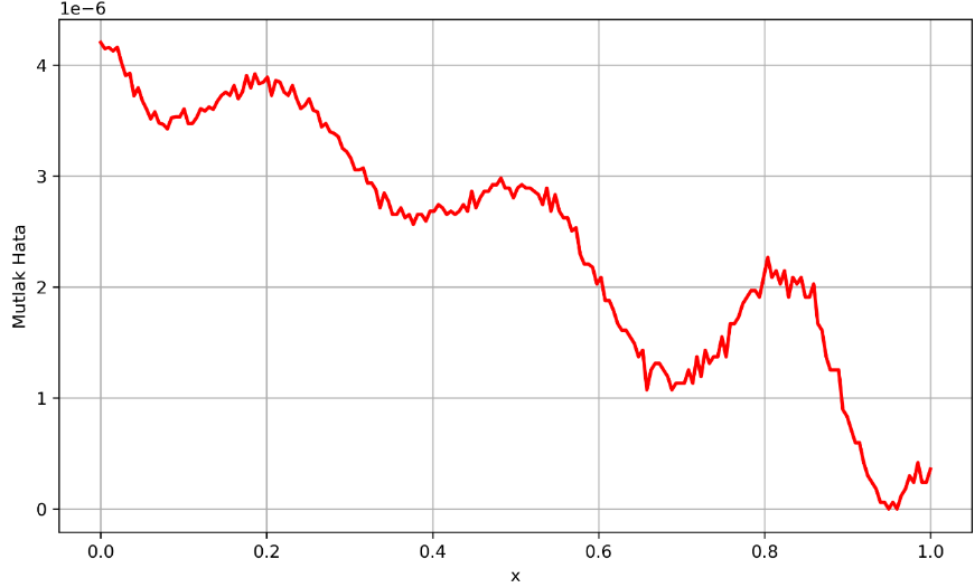
Şekil 4.2’de FBSA yöntemi ile elde edilen çözüm ve analitik çözüm karşılaştırmalı olarak sunulmaktadır. Görüldüğü üzere, her iki çözüm yüksek düzeyde uyum göstermekte ve FBSA modeli diferansiyel denklem yapısını doğru bir şekilde öğrenmektedir.



Şekil 4.2. $\varepsilon = 1$ ve $k = 1$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Şekil 4.3’de ise çözüm aralığında elde edilen mutlak hata dağılımı gösterilmektedir. Hata seviyesinin tüm çözüm alanında oldukça düşük olduğu ve 10^{-6} mertebesinde seyrettiği gözlemlenmektedir.



Şekil 4.3. $\varepsilon = 1$ ve $k = 1$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.

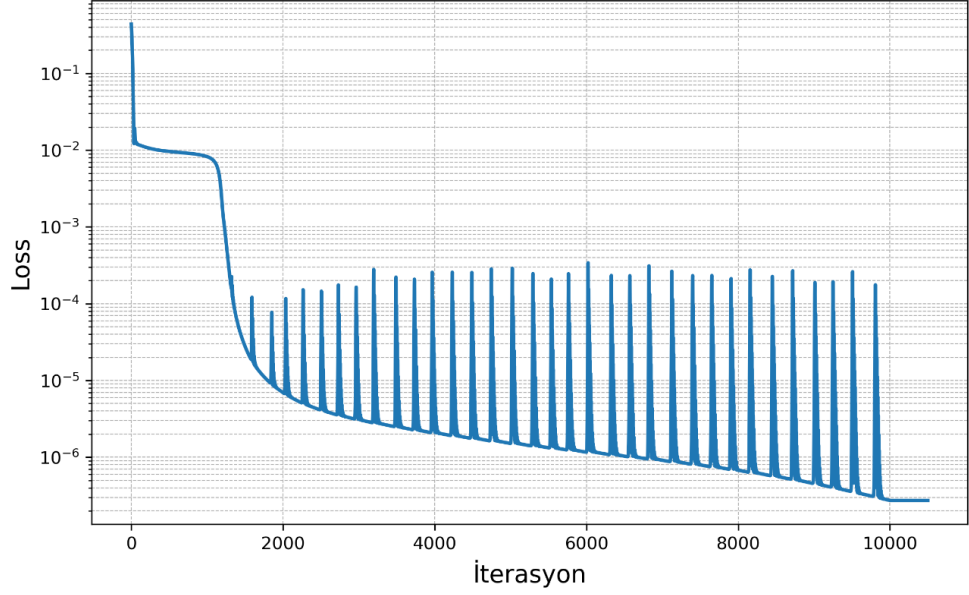
Bu parametre seti için elde edilen hata değerleri aşağıda özetlenmiştir. L2 göreceli hata $5,266 \times 10^{-6}$ ve KOKH $2,674 \times 10^{-6}$ hesaplanmış olup, maksimum mutlak hata $4,202 \times 10^{-6}$ seviyesindedir. Bu sonuçlar modelimizin iyi öğrendiğini göstermektedir. Ayrıca, toplam eğitim süresi GPU üzerinde 57 saniye iken CPU üzerinde 140 saniye olarak ölçülmüştür.

Bu kısımda $\varepsilon = 0,01$ ve $k = 0,1$ parametreleri için elde edilen sonuçlar sunulmaktadır. Eğitim sürecinin tamamlanmasının ardından elde edilen sonuçlar hem FBSA çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması hem de hata analizleri açısından değerlendirilmiştir. Bu kapsamda, eğitim sürecindeki toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi, FBSA çözümü ile analitik çözüm karşılaştırması ve mutlak hata dağılımı aşağıda sunulmaktadır.

Şekil 4.4’te eğitim boyunca toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi gösterilmektedir. İlk aşamada Adam algoritması ile hızlı bir 10^{-7} şekilde

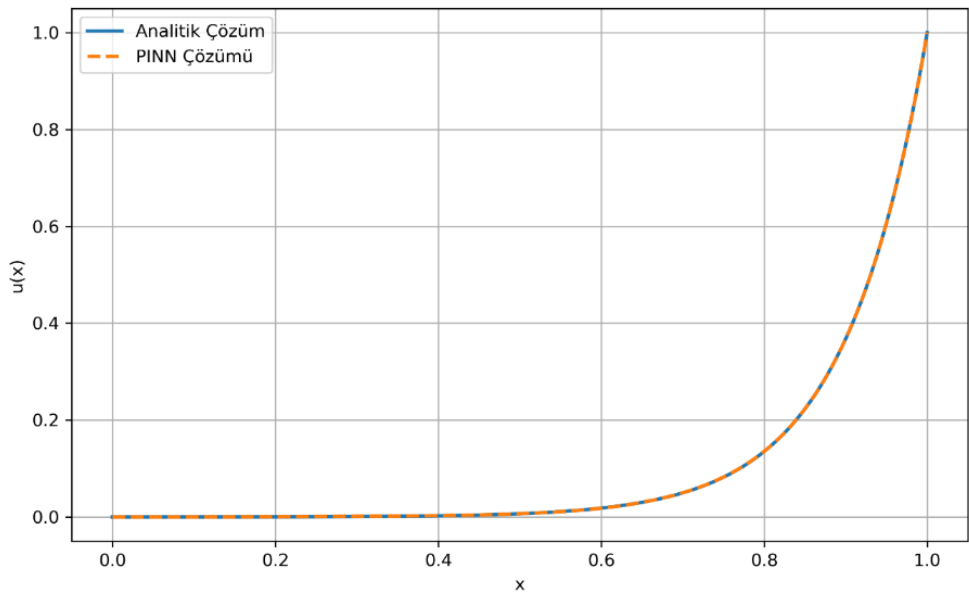
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

seviyelerine yakınsama sağlanmış, ardından L-BFGS algoritması bu seviyede durağanlaşmıştır.



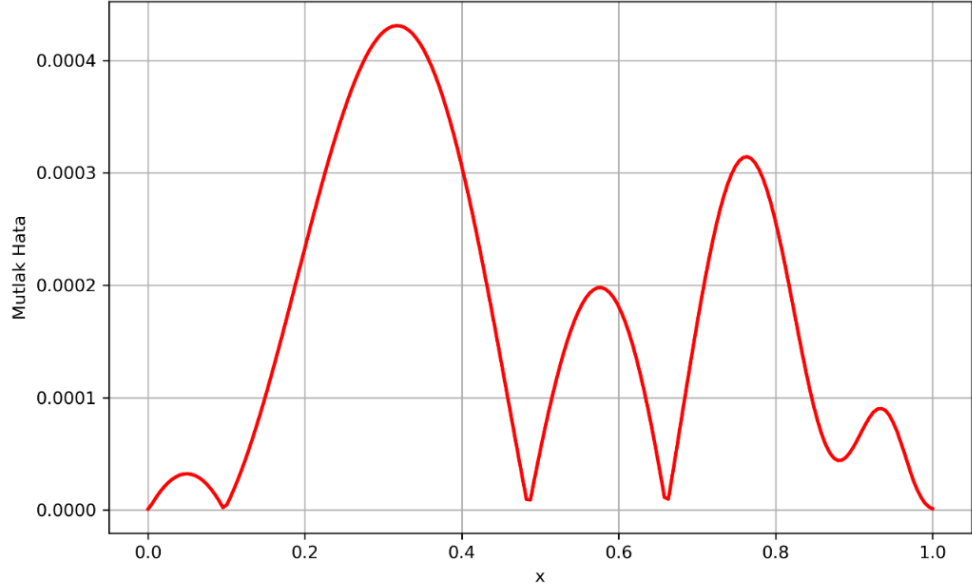
Şekil 4.4. $\varepsilon = 0,01$ ve $k = 0,1$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.

Şekil 4.5'te FBSA yöntemi ile elde edilen çözüm ve analitik çözüm karşılaştırmalı olarak sunulmaktadır. Düşük difüzyon katsayısının yarattığı belirgin konveksiyon etkisine rağmen, FBSA çözümünün analitik çözümle oldukça yüksek uyum gösterdiği gözlemlenmektedir.



Şekil 4.5. $\varepsilon = 0,01$ ve $k = 0,1$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.

Şekil 4.6’da ise çözüm aralığında elde edilen mutlak hata dağılımı gösterilmektedir. Hatanın özellikle çözüm alanının orta bölgelerinde bir miktar artış gösterdiği, ancak genel olarak 10^{-4} mertebesinde kaldığı görülmektedir.

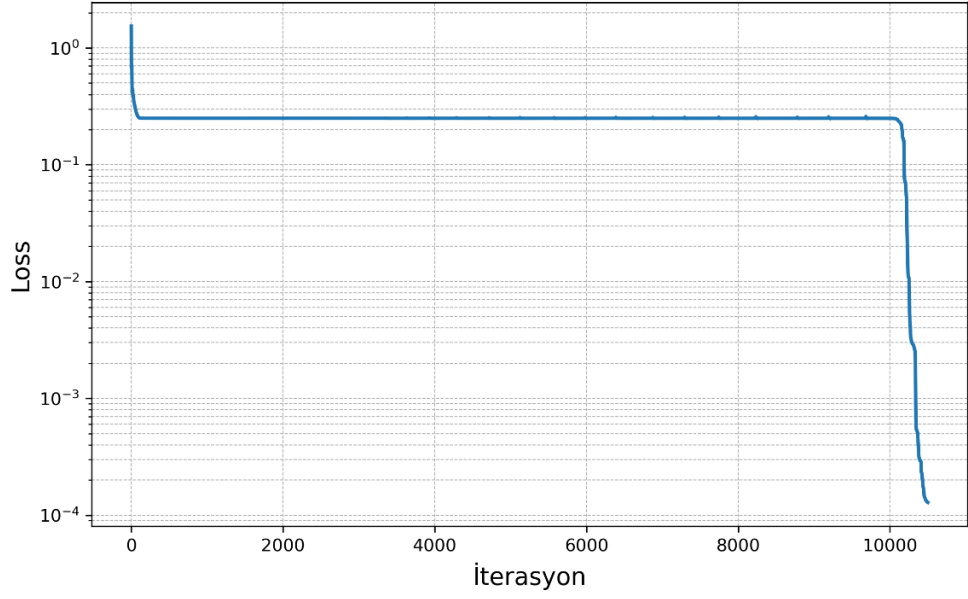


Şekil 4.6. $\varepsilon = 0,01$ ve $k = 0,1$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.

Bu parametre seti için elde edilen hata değerleri aşağıda özetlenmiştir. L2 göreceli hata $9,309 \times 10^{-4}$ ve KOKH $9,309 \times 10^{-4}$ hesaplanmış olup, maksimum mutlak hata $4,202 \times 10^{-6}$ seviyesindedir. Ayrıca, toplam eğitim süresi GPU üzerinde 56 saniye iken, CPU üzerinde 142 saniye olarak ölçülmüştür.

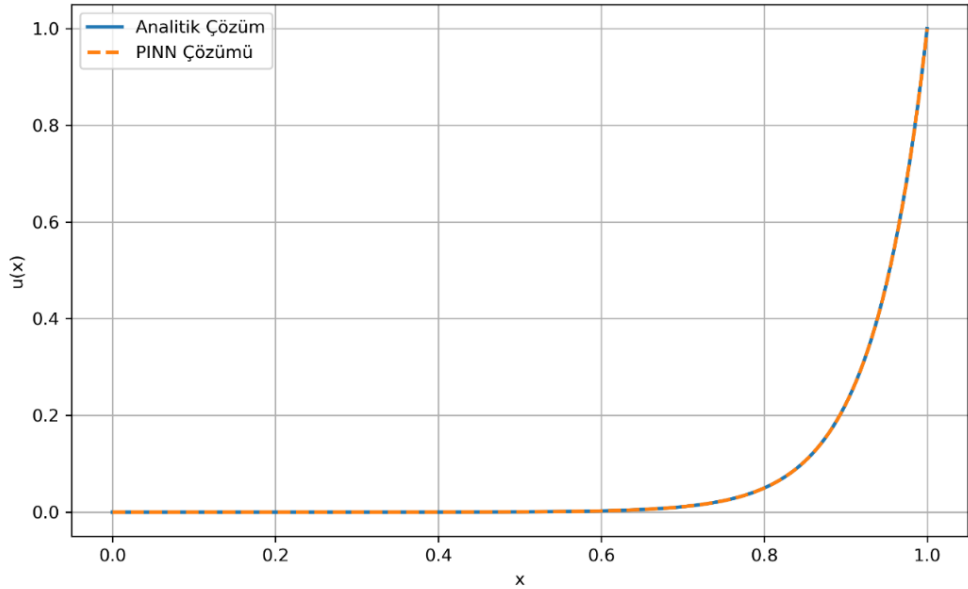
Bu kısımda $\varepsilon = 1$ ve $k = 15$ parametreleri seçilerek konveksiyon baskın olma durumunda modelimizin sonuçları gözlemlenmiştir. Eğitim sürecinin tamamlanmasının ardından elde edilen sonuçlar hem FBSA çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması hem de hata analizleri açısından değerlendirilmiştir. Bu kapsamda, eğitim sürecindeki toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi, FBSA çözümü ile analitik çözüm karşılaştırması ve mutlak hata dağılımı aşağıda sunulmaktadır.

Şekil 4.7’de görüldüğü üzere, ilk aşamada Adan algoritması ile 10^{-1} seviyelerine düşmüş ve durağanlaşmıştır. L-BFGS adımına geçişle birlikte kayıp fonksiyonunda belirgin bir düşüş görünmüştür.



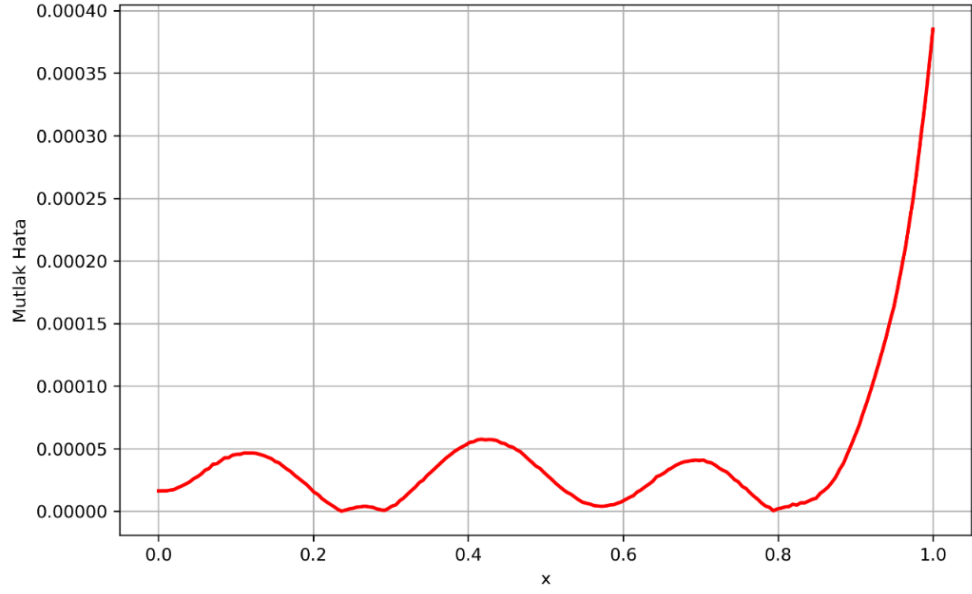
Şekil 4.7. $\varepsilon = 1$ ve $k = 15$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.

Şekil 4.8’de FBSA yöntemi ile elde edilen çözüm ve analitik çözüm karşılaştırmalı olarak sunulmaktadır. Yüksek konveksiyon etkisinin çözüm profilinde belirgin olduğu bu durumda da FBSA çözümünün analitik çözümle yüksek oranda uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 4.8. $\varepsilon = 1$ ve $k = 15$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.

Şekil 4.9’da ise çözüm aralığında elde edilen mutlak hata dağılımı gösterilmektedir. Hata dağılımının özellikle çözüm alanının üst bölgelerinde bir miktar artış gösterdiği, ancak genel olarak 10^{-4} mertebesinde kaldığı gözlemlenmektedir.



Şekil 4.9. $\varepsilon = 1$ ve $k = 15$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.

Bu parametre seti için elde edilen hata değerleri aşağıda özetlenmiştir. L2 hata $9,394 \times 10^{-4}$ ve KOKH $7,380 \times 10^{-5}$ olarak hesaplanmış olup, maksimum mutlak hata $3,852 \times 10^{-5}$ seviyesindedir. Ayrıca, toplam eğitim süresi GPU üzerinde 56 saniye, CPU üzerinde ise 147 saniye olarak ölçülmüştür.

Bu bölümde bir boyutlu zaman bağımsız doğrusal konveksiyon-difüzyon denklemi farklı parametre kombinasyonları için FBSA yöntemi ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. İncelenen tüm parametre setlerinde FBSA yöntemi analitik çözüme yüksek düzeyde uyum sağlamış ve düşük hata değerleriyle başarılı sonuçlar üretmiştir. Özellikle düşük difüzyon katsayısına ve yüksek konveksiyon katsayısına sahip durumlarda bile modelin stabil ve doğru bir öğrenme gerçekleştirdiği gözlemlenmiştir. Ayrıca, gerçekleştirilen CPU ve GPU karşılaştırmaları, GPU kullanımının hesaplama süresini önemli ölçüde azalttığını göstermiştir. Elde edilen bulgular, FBSA yönteminin doğrusal konveksiyon-difüzyon tipindeki problemler için etkili ve güvenilir bir alternatif çözüm yöntemi sunduğunu ortaya koymaktadır.

Örnek 2: Bir Boyutlu Zaman Bağımsız Doğrusal Olmayan Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Probleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu örnekte, zaman bağımsız ve doğrusal olmayan yapıda tanımlanmış bir boyutlu konveksiyon-difüzyon-reaksiyon problemi FBSA yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Çözüm bölgesi $x \in [0,1]$ olarak belirlenmiş ve problem aşağıdaki diferansiyel denklem ile tanımlanmıştır:

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \quad x \in [0,1] \quad (4.7)$$

Bu denklemde ε difüzyon katsayısını, k ise konveksiyon katsayısını temsil etmektedir. u^3 terimi doğrusal olmayan bir reaksiyon etkisini modellemektedir. Analitik çözüm olarak $u(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonu seçilmiş ve sağ taraf $f(x)$ fonksiyonu bu çözüme uygun olarak oluşturulmuştur. Bu problem, doğrusal olmayan yapısı nedeniyle önceki örneğe kıyasla daha karmaşık bir çözüm gerektirmektedir.

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 20 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 20.000 iterasyon Adam kullanılırken 500 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon gerçekleştirilmiştir. Eğitim sırasında çözüm aralığında $\mathcal{N}_f = 1000$ adet iç nokta kullanılmış olup, sınır koşulları için kullanılan noktalar bir boyutlu denklemden dolayı 2 adettir.

Modelin eğitiminde kullanılan toplam kayıp fonksiyonu, genel formu (3.5) numaralı denklemde verilen yapı esas alınarak bu probleme özgü olarak aşağıdaki şekilde özelleştirilmiştir. Çalışılan diferansiyel denklemin çözümünü sağlayan $u(x)$ fonksiyonunun artık fonksiyonu $R(x)$ şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$R(x) = -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 - f(x) \quad (4.8)$$

Bu ifade kullanılarak L_{PDE} terimi, çözüm aralığındaki $\mathcal{N}_f$ adet iç nokta üzerinde ortalama karesel hata (MSE) olarak hesaplanmaktadır:

$$L_{PDE} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |R(x_i)|^2 \quad (4.9)$$

Ayrıca sınır koşullarının sağlanması amacıyla L_{BC} terimi iki sınır noktası $x = 0$ ve $x = 1$ için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$L_{BC} = \frac{1}{2} [(u(0) - 0)^2 + (u(1) - 0)^2] \quad (4.10)$$

Sonuç olarak, bu problem için toplam kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibi açık şekilde ifade edilmektedir:

$$L(\theta) = L_{PDE} + L_{BC} \quad (4.11)$$

Bu kısımda $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $k = 1$ parametreleri için elde edilen sonuçlar sunulmaktadır. Eğitim sürecinin tamamlanmasının ardından elde edilen sonuçlar hem FBSA çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması hem de hata analizleri açısından değerlendirilmiştir. Bu kapsamda, eğitim sürecindeki toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi, FBSA çözümü ile analitik çözüm karşılaştırması ve mutlak hata dağılımı aşağıda sunulmaktadır.

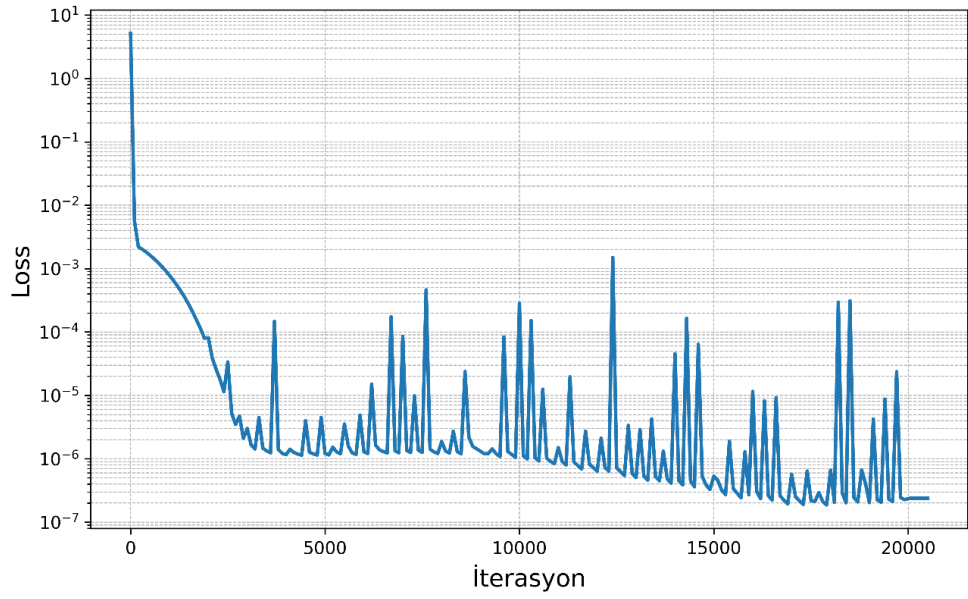
Şekil 4.10'da eğitim boyunca toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi gösterilmektedir. İlk aşamada Adam algoritması ile hızlı bir şekilde 10^{-7} , seviyelerine yakınsama sağlanmış, ardından L-BFGS algoritması bu seviyede durağanlaşmıştır.

Şekil 4.11'de ise çözüm aralığında elde edilen mutlak hata dağılımı gösterilmektedir. Hata seviyesinin tüm çözüm alanında oldukça düşük olduğu ve 10^{-5} mertebesinde seyrettiği gözlemlenmektedir.

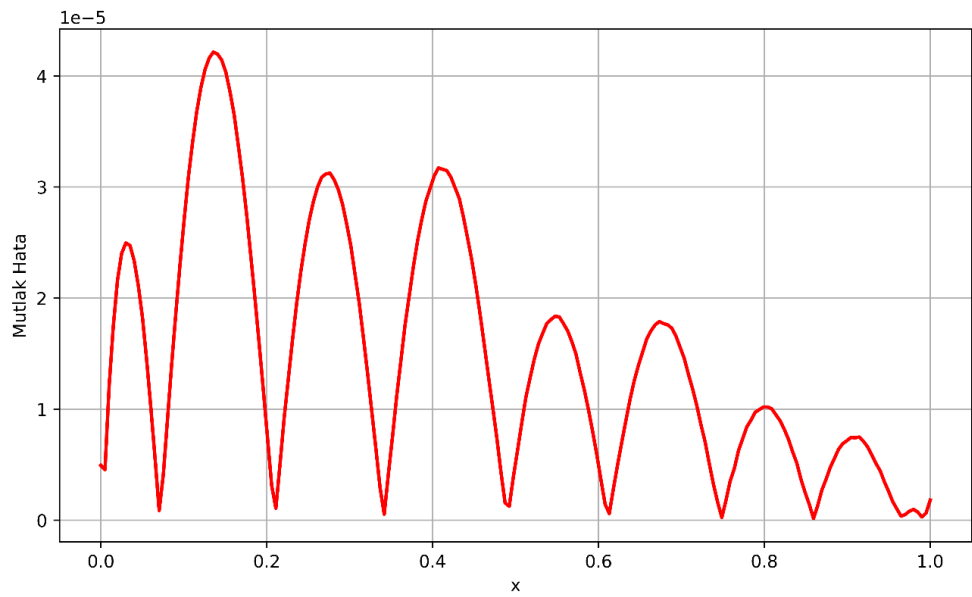
Şekil 4.12'de FBSA yöntemi ile elde edilen çözüm ve analitik çözüm karşılaştırmalı olarak sunulmaktadır. Görüldüğü üzere, her iki çözüm yüksek düzeyde

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

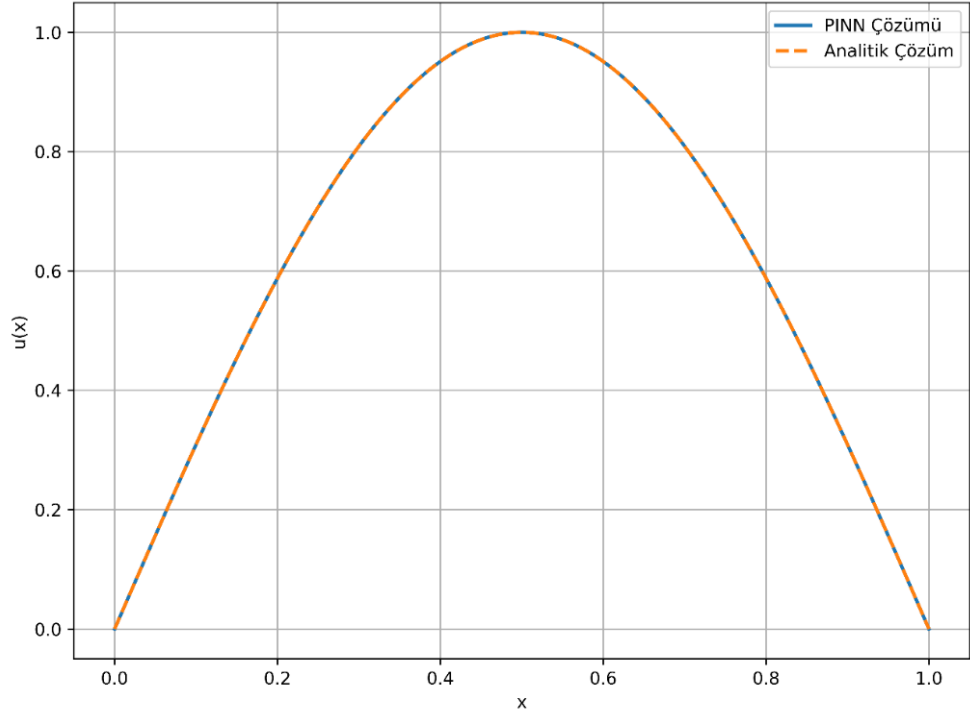
uyum göstermekte ve FBSA modeli diferansiyel denklem yapısını doğru bir şekilde öğrenmektedir.



Şekil 4.10. $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $k = 1$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.



Şekil 4.11. $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $k = 1$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.



Şekil 4.12. $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $k = 1$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.

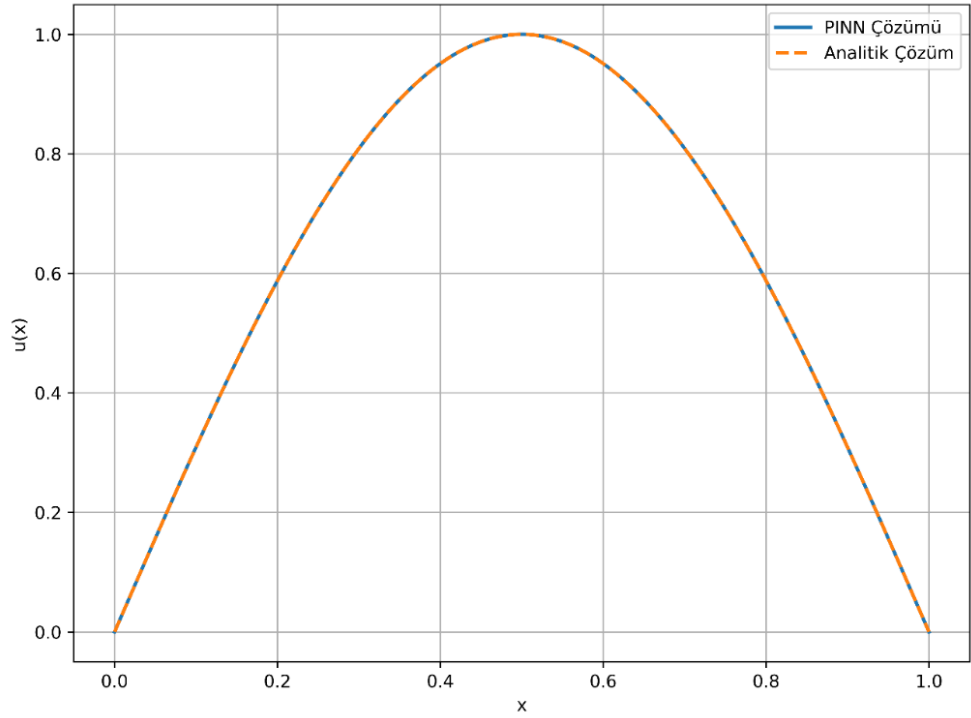
Gözlemlenen parametrelerin hata analizleri şu şekildedir: L2 hata $1,184 \times 10^{-3}$ ve KOKH $1,298 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanmış olup, maksimum mutlak hata $1,32 \times 10^{-3}$ seviyesindedir. Ayrıca, toplam eğitim süresi GPU üzerinde 56 saniye, CPU üzerinde ise 75 saniye olarak ölçülmüştür.

$\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ parametreleri seçilerek test gerçekleştirilmiştir. Bu parametre kombinasyonu, küçük difüzyon katsayısı ve yüksek konveksiyon katsayısı nedeniyle Peclet sayısının yüksek olmasına ve çözümün oldukça keskin gradyanlara sahip olmasına yol açmaktadır. Bu durum, modelin eğitim süreci açısından daha zorlu bir senaryo oluşturmaktadır.

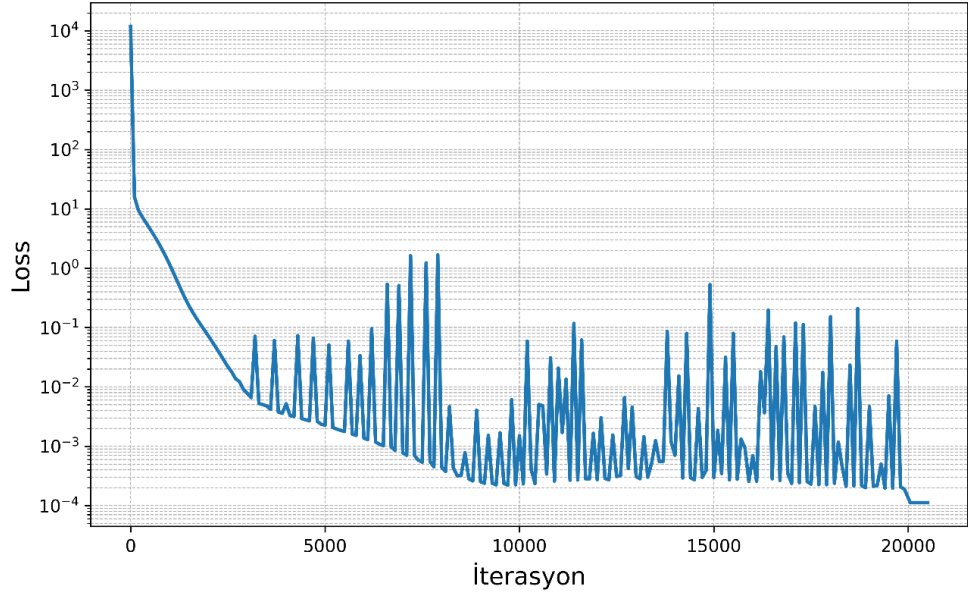
Şekil 4.13'te FBSA yöntemi ile elde edilen çözüm ve analitik çözüm karşılaştırmalı olarak sunulmaktadır. Görüldüğü üzere, her iki çözüm yüksek düzeyde uyum göstermekte ve FBSA modeli diferansiyel denklem yapısını doğru bir şekilde öğrenmektedir.

Şekil 4.14'te eğitim boyunca toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi gösterilmektedir. İlk aşamada Adam algoritması ile hızlı bir şekilde 10^{-3} , seviyelerine yakınsama sağlanmış, ardından L-BFGS algoritmasıyla daha da iyileşmiştir.

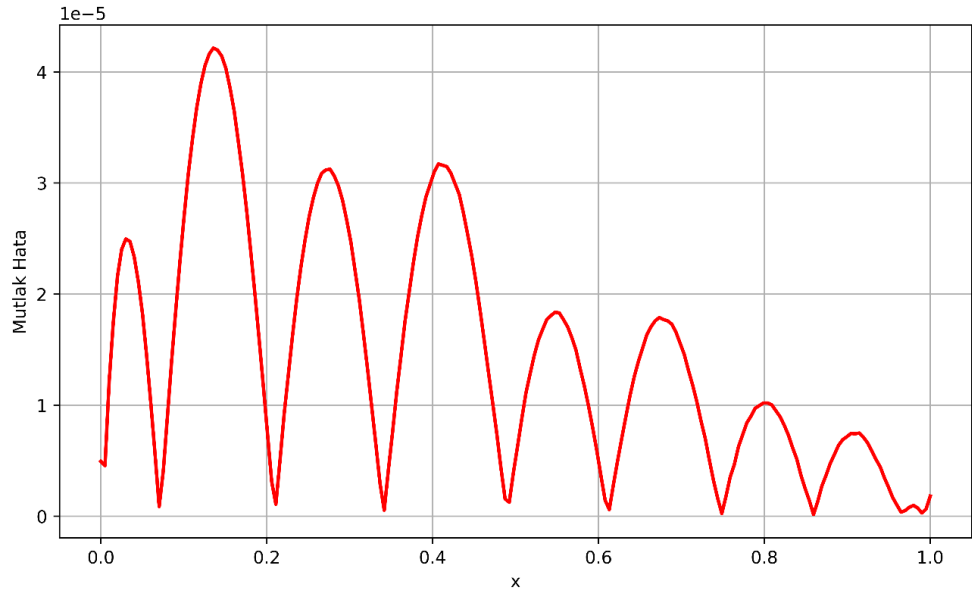
Şekil 4.15'te ise çözüm aralığında elde edilen mutlak hata dağılımı gösterilmektedir. Hata seviyesinin tüm çözüm alanında oldukça düşük olduğu ve 10^{-5} mertebesinde seyrettiği gözlemlenmektedir.



Şekil 4.13. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için FBSA çözümü ve analitik çözüm karşılaştırması.



Şekil 4.14. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.



Şekil 4.15. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için çözüm alanında mutlak hata dağılımı.

Bu test koşullarında L2 hata değeri $1,2982 \times 10^{-3}$, maksimum mutlak hata ise $1,3208 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanmıştır. Eğitim süresi GPU üzerinde 121 saniye, CPU üzerinde ise 480 saniye olarak ölçülmüştür.

Örnek 3: Bir Boyutlu Zaman Bağımlı Doğrusal Konveksiyon-Difüzyon Probleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu örnekte, zaman bağımlı ve doğrusal yapıda tanımlanmış bir boyutlu konveksiyon-difüzyon problemi FBSA yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Çözüm bölgesi $\Omega: (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$ olarak belirlenmiş ve problem aşağıdaki diferansiyel denklem ile tanımlanmıştır:

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} = f(x) & , \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ u(t, 0) = 0, u(t, 1) = 1 \\ u(0, x) = \sin(\pi x) \end{cases} \quad (4.12)$$

Bu denklemde ε difüzyon katsayısını, k ise konveksiyon katsayısını temsil etmektedir. Analitik çözüm olarak $u(t, x) = e^{-t} \sin(\pi x)$ fonksiyonu seçilmiş ve sağ taraf $f(x)$ fonksiyonu bu çözüme uygun olarak oluşturulmuştur.

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 20 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 10.000 iterasyon Adam kullanılırken 500 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon gerçekleştirilmiştir. Eğitim sırasında çözüm aralığında $\mathcal{N}_f = 1000$ adet iç nokta, $\mathcal{N}_{BC} = 200$ sınır koşulu noktası ve $\mathcal{N}_{IC} = 500$ başlangıç koşulu noktası kullanılmıştır.

Modelin eğitiminde kullanılan toplam kayıp fonksiyonu, genel formu (3.12) numaralı denklemde verilen yapı esas alınarak bu probleme özgü olarak aşağıdaki şekilde özelleştirilmiştir. Çalışılan diferansiyel denklemin çözümünü sağlayan $u(x)$ fonksiyonunun artık fonksiyonu $R(x)$ şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$R(x) = \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} - f(x) \quad (4.13)$$

Bu ifade kullanılarak L_{PDE} terimi, çözüm aralığındaki $\mathcal{N}_f$ adet iç nokta üzerinde ortalama karesel hata (MSE) olarak hesaplanmaktadır:

$$L_{PDE} = \frac{1}{\mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_f} |R(x_i)|^2 \quad (4.14)$$

Ayrıca sınır koşullarının sağlanması amacıyla L_{BC} terimi iki sınır noktası $x = 0$ ve $x = 1$ için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$L_{BC} = \sum_{i=1}^{N_{BC}} [|u(t_i, 0) - 0|^2 + |u(t_i, 1) - 1|^2] \quad (4.15)$$

Başlangıç koşulunun sağlanması amacı ile L_{IC} aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$L_{IC} = \sum_{i=1}^{N_{IC}} |u(0, x_i) - \sin(\pi x)|^2 \quad (4.16)$$

Sonuç olarak, bu problem için toplam kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibi açık şekilde ifade edilmektedir:

$$L(\theta) = L_{PDE} + L_{BC} + L_{IC} \quad (4.17)$$

Bu kısımda difüzyon katsayısı $\varepsilon = 10^{-8}$ gibi düşük bir seviyede seçilerek, konveksiyon katsayısı $k = 1$ belirlenmiş alınarak model analiz edilmiştir. Eğitim sürecinin tamamlanmasının ardından elde edilen sonuçlar hem FBSA çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması hem de hata analizleri açısından değerlendirilmiştir. Bu kapsamda, eğitim sürecindeki toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi, FBSA çözümü ile analitik çözüm karşılaştırması ve mutlak hata dağılımı aşağıda sunulmaktadır.

Bu parametre seti için elde edilen çözüm sonuçlarına ait çözüm alanı üzerinde hesaplanan hata değerleri olarak L2 hata $1,750 \times 10^{-3}$ ve KOKH $1,750 \times 10^{-4}$ olarak hesaplanmış olup, maksimum mutlak hata $3,146 \times 10^{-3}$ seviyesindedir. Ayrıca, Tablo 4.1’de seçilen zaman anlarındaki MMH, KOKH ve L2 göreceli hata hesaplanmıştır.

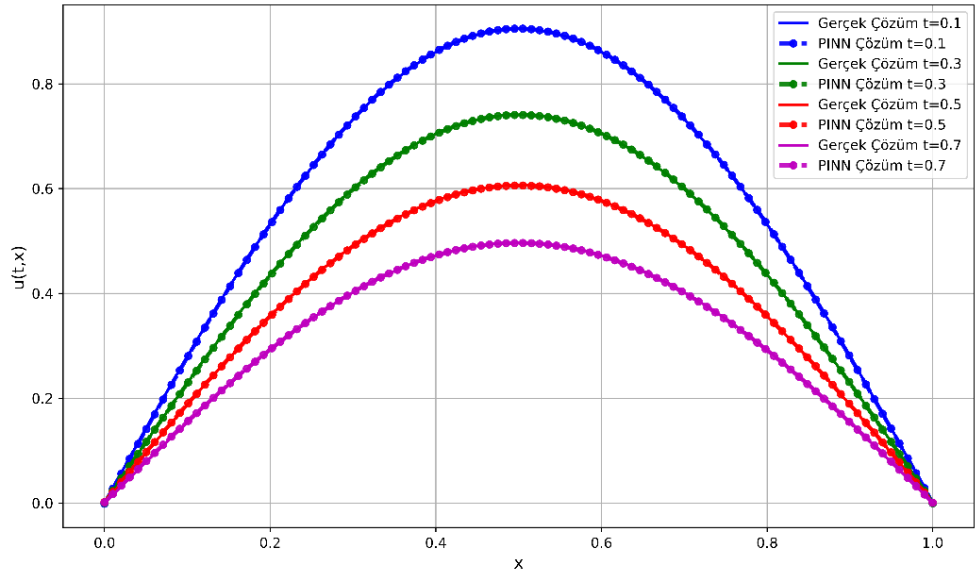
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Toplam eğitim süresi GPU üzerinde 73 saniye, CPU üzerinde ise 260 saniye olarak ölçülmüştür.

Tablo 4.1. Zaman adımlarında hata değerleri.

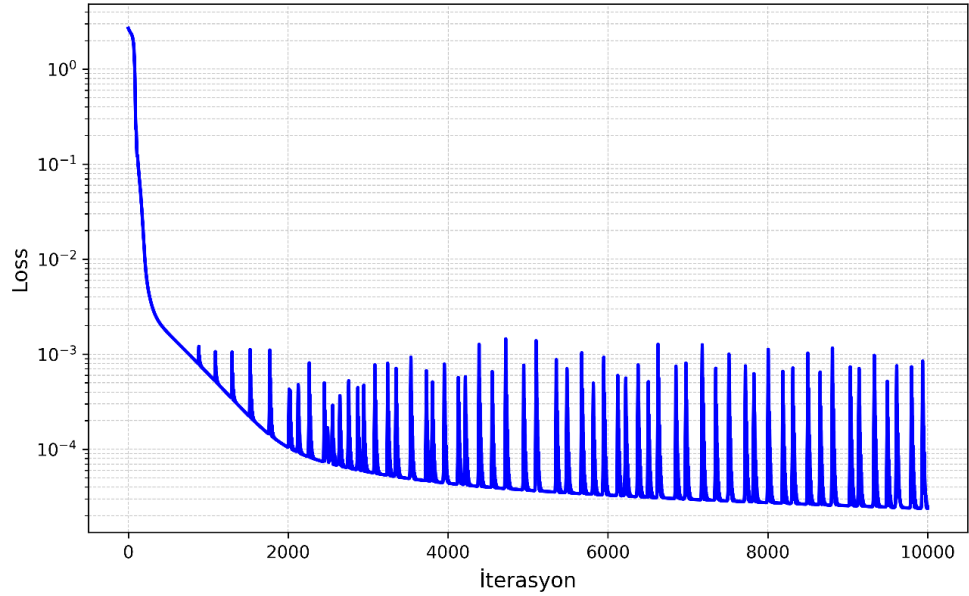
	MMH	KOKH	L2 Görelî Hata
t = 0,1	$1,5842 \times 10^{-3}$	$8,487 \times 10^{-4}$	$1,133 \times 10^{-3}$
t = 0,2	$1,453 \times 10^{-3}$	$7,937 \times 10^{-4}$	$1,3779 \times 10^{-3}$
t = 0,3	$1,528 \times 10^{-3}$	$7,496 \times 10^{-4}$	$1,438 \times 10^{-3}$
t = 0,4	$1,345 \times 10^{-3}$	$7,304 \times 10^{-4}$	$1,548 \times 10^{-3}$
t = 0,5	$1,239 \times 10^{-3}$	$7,244 \times 10^{-4}$	$1,697 \times 10^{-3}$
t = 0,6	$1,703 \times 10^{-3}$	$7,806 \times 10^{-4}$	$1,202 \times 10^{-3}$
t = 0,7	$1,848 \times 10^{-3}$	$8,702 \times 10^{-4}$	$2,490 \times 10^{-3}$
t = 0,8	$1,625 \times 10^{-3}$	$8,937 \times 10^{-4}$	$2,827 \times 10^{-3}$
t = 0,9	$1,244 \times 10^{-3}$	$8,189 \times 10^{-4}$	$2,862 \times 10^{-3}$
t = 1	$1,2497 \times 10^{-3}$	$8,552 \times 10^{-4}$	$3,304 \times 10^{-3}$

Şekil 4.16'da FBSA yöntemi ile elde edilen çözüm ve analitik çözümün $t = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ anlarındaki karşılaştırmalı grafiği sunulmaktadır. Grafikte görüldüğü üzere, FBSA modeli farklı zaman seviyelerinde analitik çözümle yüksek düzeyde uyum göstermektedir. Özellikle erken zamanlarda hata seviyesinin oldukça düşük olduğu ve modelin diferansiyel denklemin dinamik yapısını doğru bir şekilde öğrendiği gözlemlenmektedir.



Şekil 4.16. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ için FBSA çözümü ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması.

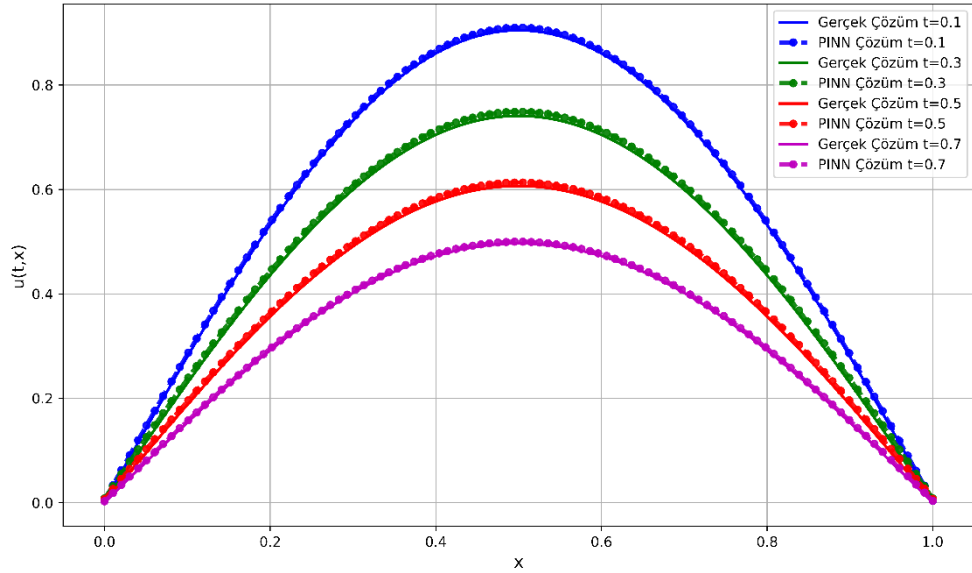
Şekil 4.17'de ise eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi sunulmaktadır. Bu öğrenme sürecinde de diğer örneklere benzer bir durum gözlemliyoruz. Adam algoritması, hızlı bir düşüşle kayıp fonksiyonunu 10^{-4} seviyelerine düşürmekte, ardından L-BFGS algoritması bu seviyede hassas düzeltmeler gerçekleştirmektedir.



Şekil 4.17. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ için FBSA modeli için eğitim sürecinde toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

$\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ parametreleri seçilerek test gerçekleştirilmiştir. Bu parametre kombinasyonu, küçük difüzyon katsayısı ve yüksek konveksiyon katsayısı nedeniyle Peclet sayısının yüksek olmasına ve çözümün oldukça keskin gradyanlara sahip olmasına yol açmaktadır. Bu durum, modelin eğitim süreci açısından daha zorlu bir senaryo oluşturmaktadır.



Şekil 4.18. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için FBSA çözümü ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması.

Tablo 4.2’de seçilen zaman anlarındaki MMH, KOKH ve L2 göreceli hata hesaplanmıştır. Bu parametre seti için elde edilen çözüm sonuçlarına ait çözüm alanı üzerinde hesaplanan hata değerleri olarak L2 hata $6,112 \times 10^{-2}$ ve KOKH $2,852 \times 10^{-2}$ olarak hesaplanmış olup, maksimum mutlak hata $7,284 \times 10^{-2}$ seviyesindedir. Toplam eğitim süresi GPU üzerinde 77 saniye, CPU üzerinde ise 260 saniye olarak ölçülmüştür.

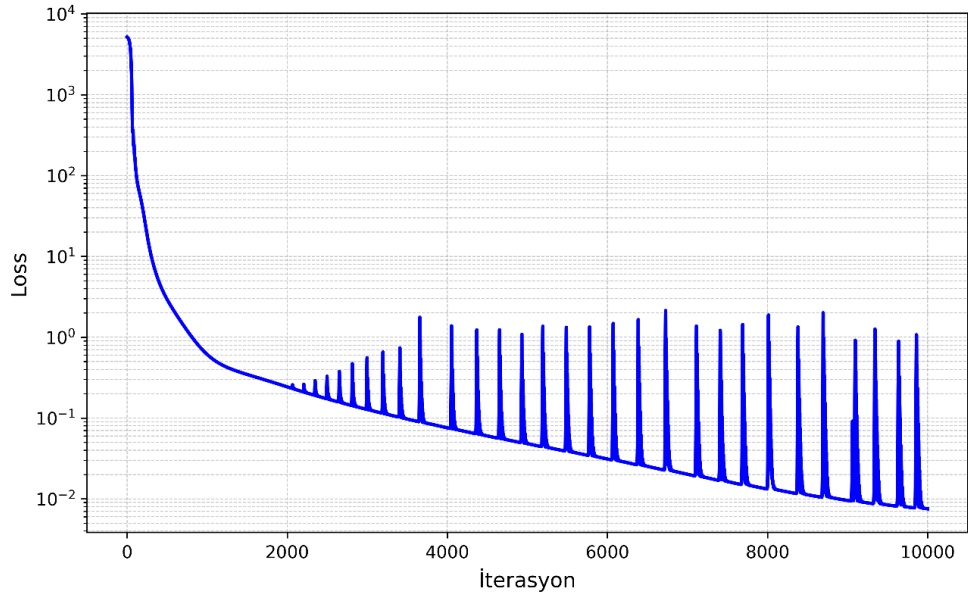
Tablo 4.2. Zaman adımlarında hata değerleri.

	MMH	KOKH	L2 Göreceli Hata
t = 0,1	$1,767 \times 10^{-2}$	$1,662 \times 10^{-2}$	$2,261 \times 10^{-2}$
t = 0,2	$2,580 \times 10^{-2}$	$2,445 \times 10^{-2}$	$4,262 \times 10^{-2}$
t = 0,3	$2,691 \times 10^{-2}$	$2,665 \times 10^{-2}$	$5,114 \times 10^{-2}$
t = 0,4	$2,439 \times 10^{-2}$	$2,361 \times 10^{-2}$	$5,006 \times 10^{-2}$
t = 0,5	$1,711 \times 10^{-2}$	$1,599 \times 10^{-2}$	$3,747 \times 10^{-2}$
t = 0,6	$5,729 \times 10^{-2}$	$4,430 \times 10^{-2}$	$1,147 \times 10^{-2}$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

	MMH	KOKH	L2 Görelî Hata
t = 0,7	$1,236 \times 10^{-2}$	$1,071 \times 10^{-2}$	$3,065 \times 10^{-2}$
t = 0,8	$3,048 \times 10^{-2}$	$2,855 \times 10^{-2}$	$9,031 \times 10^{-2}$
t = 0,9	$7,284 \times 10^{-2}$	$4,487 \times 10^{-2}$	$1,702 \times 10^{-2}$
t = 1	$7,849 \times 10^{-2}$	$7,063 \times 10^{-2}$	$2,730 \times 10^{-2}$

Şekil 4.18'de FBSA yöntemiyle elde edilen çözüm ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması gösterilmektedir. Grafikte $t = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ kümesine ait çözüm eğrileri yer almaktadır. Şekilden görüldüğü üzere, FBSA modeli farklı zaman anlarındaki çözümü yüksek doğrulukla öğrenmiştir ve analitik çözüm ile oldukça iyi bir uyum göstermektedir.



Şekil 4.19. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 50$ için FBSA modeli için eğitim sürecinde toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişim anlarındaki karşılaştırması.

Şekil 4.19'da ise eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi sunulmaktadır. Adam algoritması aşamasında hızlı bir şekilde kayıp fonksiyonunda azalma sağlanmış ve L-BFGS algoritması ile bu değer 10^{-2} seviyelerine düşmüştür. Ancak bu aşamada, yüksek Peclet sayısı nedeniyle yakınsama hızı azalmış ve kayıp fonksiyonunda tam stabilizasyon sağlanamamıştır.

Bu bölümde, bir boyutlu doğrusal ve doğrusal olmayan farklı konveksiyon-difüzyon ve konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri için FBSA yaklaşımının

başarısı detaylı bir şekilde değerlendirilmiştir. Dört farklı bir boyut problem üzerinde yapılan sayısal analizler ile yöntemin doğruluğu, genel hata değerleri ve eğitim süreçlerine ait bulgular sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar, FBSA tabanlı modellerin bir boyutlu problemler üzerinde yüksek doğruluk ve stabilite ile çalışabildiğini göstermektedir.

Sonraki bölümde, çözüm alanının iki boyuta genişletilmesiyle birlikte FBSA yönteminin daha karmaşık problemlerdeki performansı incelenecek ve elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak tartışılacaktır.

Örnek 4: Bir Boyutlu Zaman Bağımlı Doğrusal Olmayan Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Probleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu örnekte, zaman bağımlı ve doğrusal olmayan yapıda tanımlanmış bir boyutlu konveksiyon-difüzyon problemi FBSA yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Çözüm bölgesi $\Omega: (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$ olarak belirlenmiş ve problem aşağıdaki diferansiyel denklem ile tanımlanmıştır:

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 = f(x) & , (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ u(t, 0) = 0, u(t, 1) = 1 \\ u(0, x) = \sin(\pi x) \end{cases} \quad (4.18)$$

Bu denklemde ε difüzyon katsayısını, k ise konveksiyon katsayısını temsil etmektedir. Analitik çözüm olarak $u(t, x) = e^{-t} \sin(\pi x)$ fonksiyonu seçilmiş ve sağ taraf $f(x)$ fonksiyonu bu çözüme uygun olarak oluşturulmuştur.

Modelin eğitiminde kullanılan toplam kayıp fonksiyonu, (3.12) numaralı denklemde verilen yapı esas alınarak bu probleme özgü olarak aşağıdaki şekilde özelleştirilmiştir. Bu kayıp fonksiyonu, modelin çıktısı olan $\hat{u}(t, x)$ fonksiyonunun hem diferansiyel denklemi hem de sınır ve başlangıç koşullarını olabildiğince doğru şekilde sağlamasını amaçlamaktadır. Ayrıca, bu probleme özgü olarak L_{PDE} terimine u^3 doğrusal olmayan terimi eklenmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 20 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 10.000 iterasyon Adam kullanılırken 500 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon gerçekleştirilmiştir. Eğitim sırasında çözüm aralığında $\mathcal{N}_f = 1000$ adet iç nokta, $\mathcal{N}_{BC} = 200$ sınır koşulu noktası ve $\mathcal{N}_{IC} = 500$ başlangıç koşulu noktası kullanılmıştır.

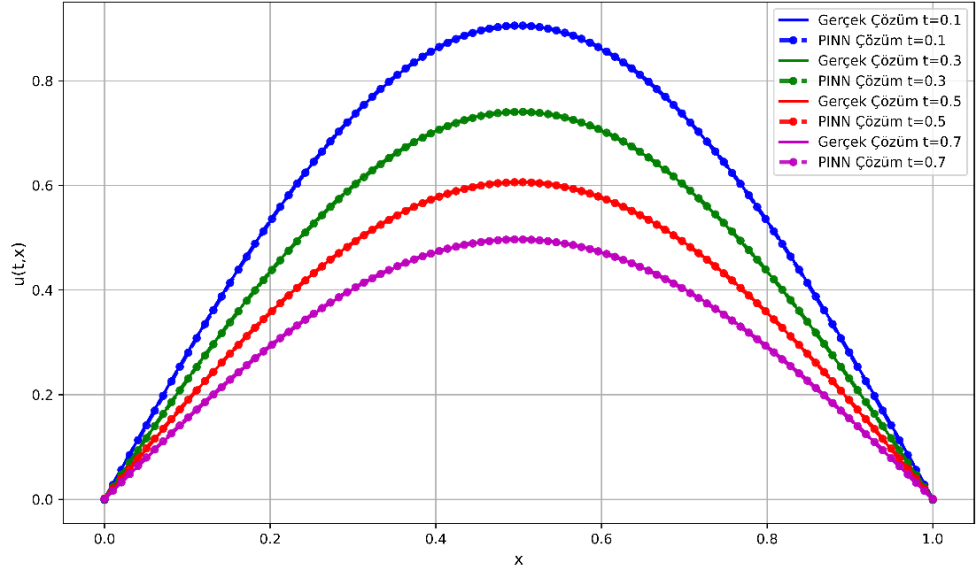
Bu kısımda, $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ parametreleri için elde edilen sonuçlar sunulmaktadır. Eğitim sürecinin tamamlanmasının ardından elde edilen sonuçlar hem FBSA çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması hem de hata analizleri açısından değerlendirilmiştir. Bu kapsamda, eğitim sürecindeki toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi, FBSA çözümü ile analitik çözüm karşılaştırması ve mutlak hata dağılımı aşağıda sunulmaktadır.

Bu parametre seti için elde edilen çözüm sonuçlarına ait çözüm alanı üzerinde hesaplanan hata değerleri olarak L2 göreceli hata $4,700 \times 10^{-3}$ ve KOKH $2,178 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanmış olup, maksimum mutlak hata $8,979 \times 10^{-3}$ seviyesindedir. Ayrıca, Tablo 4.3'te seçilen zaman anlarındaki MMH, KOKH ve L2 göreceli hata hesaplanmıştır. Toplam eğitim süresi GPU üzerinde 82 saniye, CPU üzerinde ise 260 saniye olarak ölçülmüştür.

Tablo 4.3. Zaman adımlarında hata değerleri.

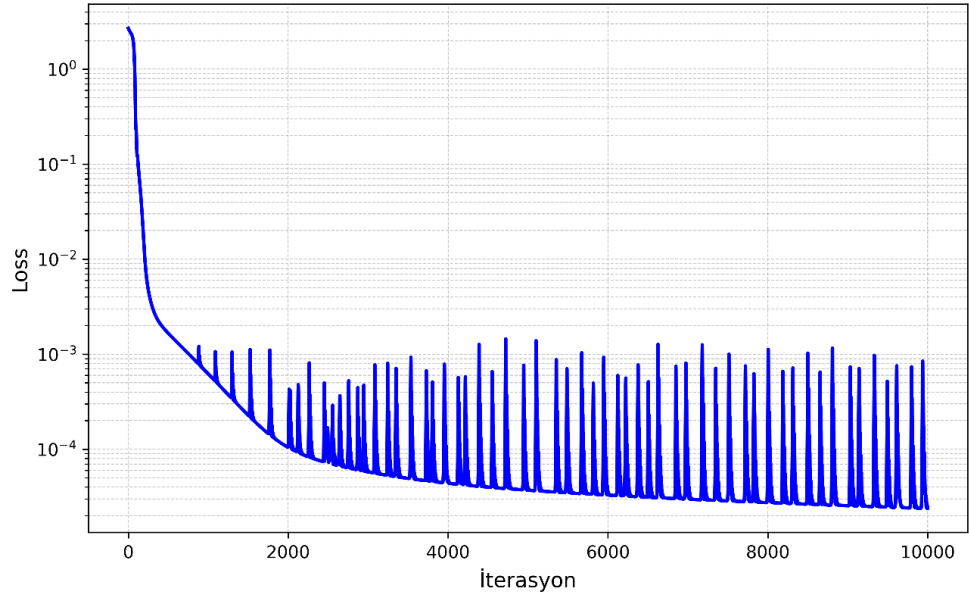
	MMH	KOKH	L2 Göreceli Hata
t = 0,1	$3,539 \times 10^{-3}$	$2,232 \times 10^{-3}$	$3,492 \times 10^{-3}$
t = 0,2	$3,291 \times 10^{-4}$	$2,074 \times 10^{-3}$	$3,602 \times 10^{-3}$
t = 0,3	$2,947 \times 10^{-4}$	$1,748 \times 10^{-3}$	$3,353 \times 10^{-3}$
t = 0,4	$2,958 \times 10^{-3}$	$1,621 \times 10^{-3}$	$3,438 \times 10^{-3}$
t = 0,5	$3,956 \times 10^{-3}$	$1,754 \times 10^{-3}$	$4,111 \times 10^{-3}$
t = 0,6	$4,653 \times 10^{-3}$	$2,035 \times 10^{-3}$	$5,270 \times 10^{-3}$
t = 0,7	$4,607 \times 10^{-3}$	$2,349 \times 10^{-3}$	$6,723 \times 10^{-3}$
t = 0,8	$4,490 \times 10^{-3}$	$2,523 \times 10^{-3}$	$7,980 \times 10^{-3}$
t = 0,9	$4,500 \times 10^{-2}$	$2,499 \times 10^{-3}$	$8,738 \times 10^{-3}$
t = 1	$8,979 \times 10^{-2}$	$2,939 \times 10^{-3}$	$1,135 \times 10^{-2}$

Şekil 4.20'de FBSA yöntemi ile elde edilen çözüm ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırmalı grafiği sunulmaktadır. Grafikte görüldüğü üzere, FBSA modeli farklı zaman seviyelerinde analitik çözümle kabul edilebilir düzeyde uyum göstermektedir.



Şekil 4.20. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ için FBSA çözümü ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması.

Şekil 4.21'de ise eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi sunulmaktadır. Adam algoritması aşamasında hızlı bir şekilde azalma eğilimi sağlanmış, ardından L-BFGS algoritması sayesinde kayıp değerleri daha düşük seviyelere indirgenmiştir.

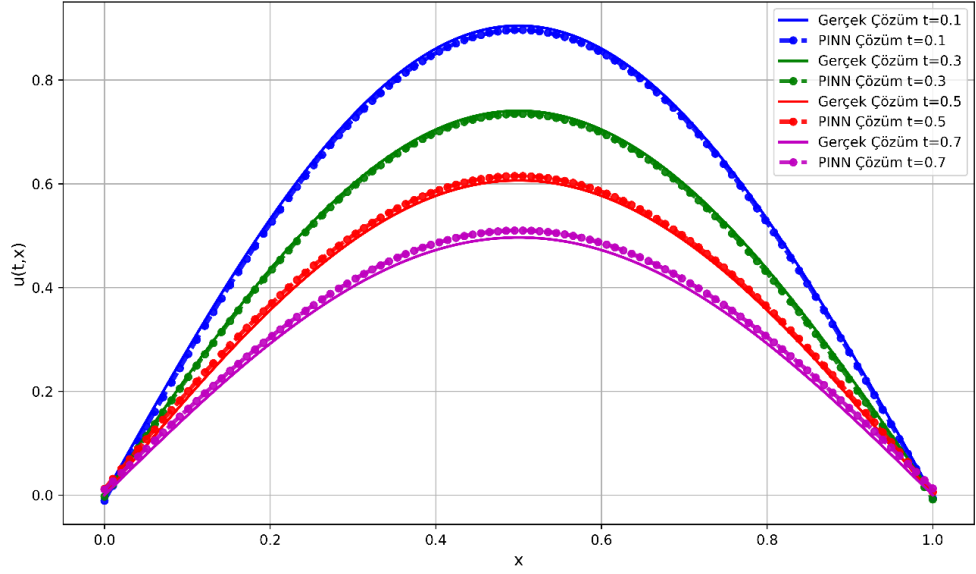


Şekil 4.21. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 1$ için FBSA modeli için eğitim sürecinde toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi.

$\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 10$ parametreleri ile gerçekleştirilen test sonucunda, L2 göreceli hata $1,321 \times 10^{-2}$ ve KOKH $6,123 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanmış olup, maksimum mutlak hata $2,071 \times 10^{-2}$ seviyesindedir. Ayrıca, Tablo 4.4'te seçilen zaman anlarındaki MMH, KOKH ve L2 göreceli hata hesaplanmıştır. Toplam eğitim süresi GPU üzerinde 80 saniye, CPU üzerinde ise 260 saniye olarak ölçülmüştür.

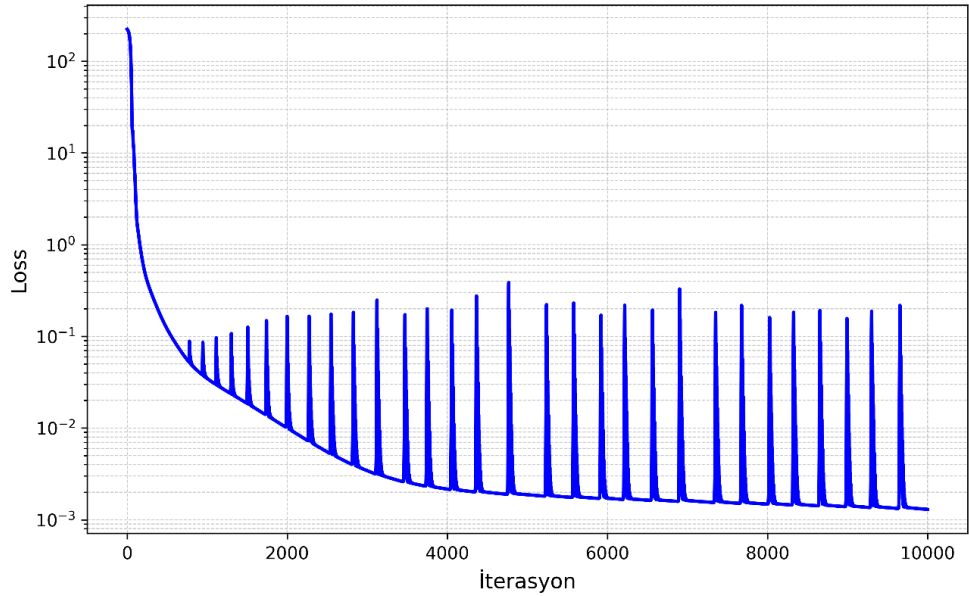
Tablo 4.4. Zaman adımlarında hata değerleri.

	MMH	KOKH	L2 Göreceli Hata
t = 0,1	$7,261 \times 10^{-3}$	$5,659 \times 10^{-3}$	$8,890 \times 10^{-3}$
t = 0,2	$8,318 \times 10^{-3}$	$7,783 \times 10^{-3}$	$1,351 \times 10^{-2}$
t = 0,3	$7,910 \times 10^{-3}$	$7,478 \times 10^{-3}$	$1,434 \times 10^{-2}$
t = 0,4	$6,827 \times 10^{-3}$	$5,710 \times 10^{-3}$	$1,210 \times 10^{-2}$
t = 0,5	$4,509 \times 10^{-3}$	$3,138 \times 10^{-3}$	$7,355 \times 10^{-3}$
t = 0,6	$1,632 \times 10^{-3}$	$8,813 \times 10^{-4}$	$2,282 \times 10^{-3}$
t = 0,7	$5,349 \times 10^{-3}$	$3,448 \times 10^{-3}$	$9,869 \times 10^{-3}$
t = 0,8	$8,759 \times 10^{-3}$	$6,616 \times 10^{-3}$	$2,092 \times 10^{-2}$
t = 0,9	$1,181 \times 10^{-2}$	$9,566 \times 10^{-2}$	$3,344 \times 10^{-2}$
t = 1	$1,267 \times 10^{-2}$	$1,207 \times 10^{-2}$	$4,664 \times 10^{-2}$



Şekil 4.22. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 10$ için FBSA çözümü ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması.

Şekil 4.22'de FBSA yöntemiyle elde edilen çözüm ve analitik çözümün farklı zaman anlarındaki karşılaştırması gösterilmektedir. Grafikte $t = 0,1, t = 0,3, t = 0,5, t = 0,7$ anlarına ait çözüm eğrileri yer almaktadır. Konveksiyon katsayısının yükselmesi ve denklemin doğrusal olmamasının ortaya çıkardığı zorluklar, eğriler üzerinde açıkça görülmektedir.



Şekil 4.23. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $k = 10$ için FBSA modeli için eğitim sürecinde toplam kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişim anlarındaki karşılaştırması.

Şekil 4.23’te toplam kayıp fonksiyonunun eğitim süreci boyunca iterasyonlara göre değişimi sunulmaktadır. FBSA yöntemi ile gerçekleştirilen eğitimde, özellikle KDD kalıntı teriminin etkisiyle karakteristik periyodik dalgalanmalar gözlemlenmiştir. Ancak genel eğilim olarak kayıp fonksiyonu düzenli şekilde azalarak eğitim sonunda 10^{-3} değerlerine gerilemiştir.

4.2 İki Boyutlu Problemlerin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu bölümde, iki boyutlu doğrusal ve doğrusal olmayan, zaman bağımlı ve zaman bağımsız dört farklı problem üzerinde FBSA yönteminin performansı incelenecektir. Her örnek için çözüm sonuçları, hata analizleri ve hesaplama süreleri sunulacak; elde edilen bulgular kontur ve hata grafikleri üzerinden değerlendirilecektir.

Örnek 1: İki Boyutlu Zaman Bağımsız Doğrusal Konveksiyon-Difüzyon Probleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu örnekte, doğrusal yapıda tanımlanmış iki boyutlu ve zaman bağımsız bir değişken katsayılı konveksiyon-difüzyon problemi FBSA yöntemiyle çözülmüştür. Çözüm bölgesi $\Omega : (x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ olarak belirlenmiştir. Problemin matematiksel ifadesi aşağıda verilmiştir:

$$-(x + y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + w_x \frac{\partial u}{\partial x} + w_y \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 8x \quad (4.19)$$

Burada, konvektif akış hızları $w_x = -2$ ve $w_y = 3$ olarak alınmıştır. Bu denklemde konveksiyon terimleri sabit katsayılı, difüzyon terimi ise çözüm alanında değişken katsayı ile ifade edilmiştir. Sağ tarafındaki $2y - 8x$ terimi, dışsal bir kaynak fonksiyonu olarak modelin sağ tarafına dahil edilmiştir. Denklem, sınır koşullarıyla birlikte analitik çözümü bilinen bir yapıya sahiptir. Analitik çözüm $u(x, y) = x^2 + y^2$ şeklindedir.

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 50 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 10.000 iterasyon Adam kullanılırken 500 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon gerçekleştirilmiştir. Eğitim sırasında çözüm aralığında $\mathcal{N}_f = 10.000$ adet iç nokta kullanılmış olup, sınır koşulları için kullanılan nokta sayısı $\mathcal{N}_{BC} = 320$ adettir. Modelin toplam kayıp fonksiyonu, önceki bölümlerde tanımlanmış olan Denklem (3.4) üzerinden hesaplanmıştır.

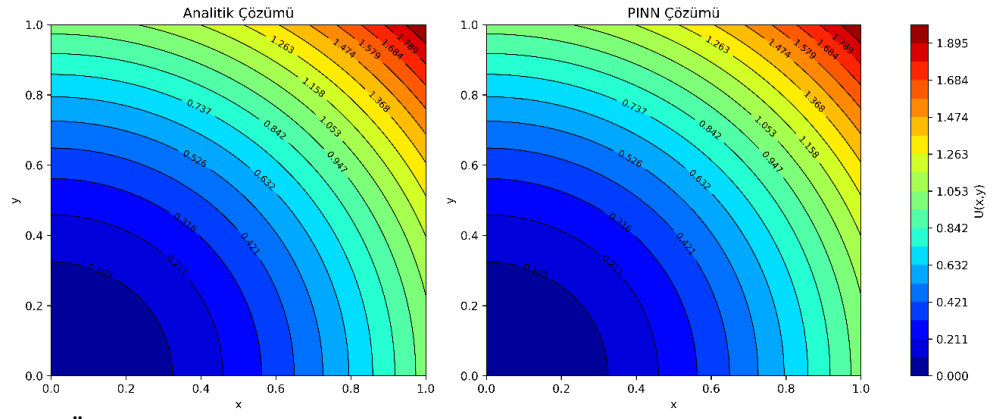
Modelin başarımını değerlendirmek amacıyla üç temel görselleştirme kullanılmıştır. İlk olarak, Şekil 4.24’de analitik çözüm ile FBSA tahminleri kontur grafik biçiminde karşılaştırılmıştır. Görselde, her iki çözümün alan boyunca oldukça yakınsadığı ve genel eğilimlerin uyumlu olduğu gözlemlenmektedir.

Ardından, Şekil 4.25’de yer alan mutlak hata kontur grafiği, çözüm alanındaki maksimum sapmaları göstermektedir. Bu hata dağılımına göre, özellikle köşe bölgelerde bir miktar artış gözlenirse de genel doğruluk seviyesi yüksektir.

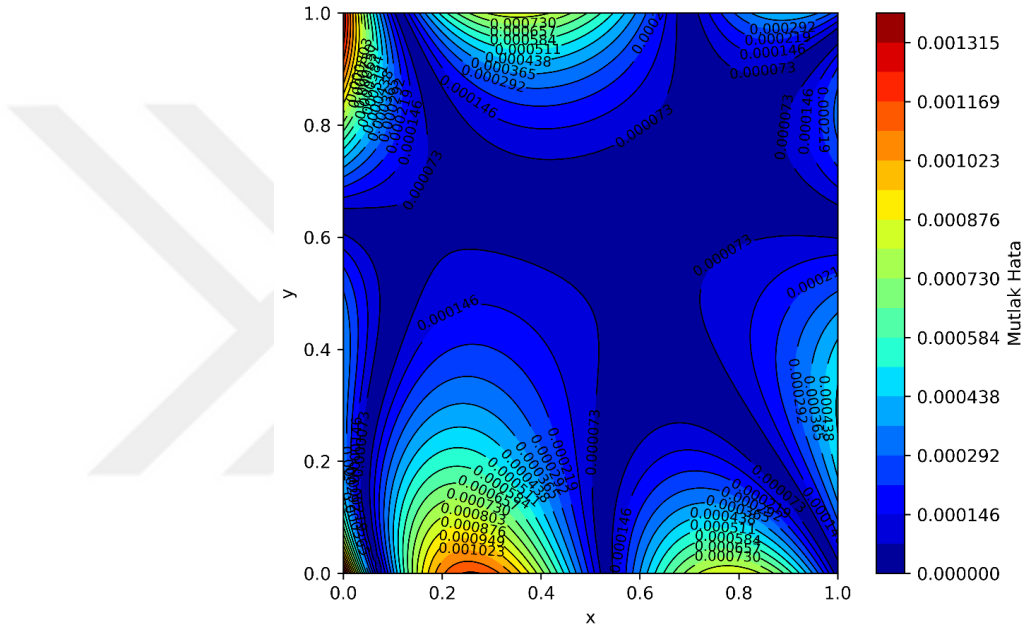
Elde edilen maksimum mutlak hata değeri $1,387 \times 10^{-3}$ olup, çözüm alanında hesaplanan L2 görelî hata $3,87 \times 10^{-3}$ ve KOKH $3,088 \times 10^{-4}$ seviyesindedir. Bu değerler, modelin çözüm fonksiyonunu başarılı bir şekilde öğrenebildiğini göstermektedir.

Şekil 4.26’da modelin eğitim süresince kayıp fonksiyonunun değişimi gösterilmiştir. Adam ve L-BFGS algoritmalarının birlikte kullanılması, kayıp değerinin hızlı ve kararlı biçimde azalmasını sağlamıştır. Son olarak, GPU süresi 97 saniye ve CPU süresi 713 saniye olarak hesaplanmıştır. GPU’da %86 verim alınmıştır.

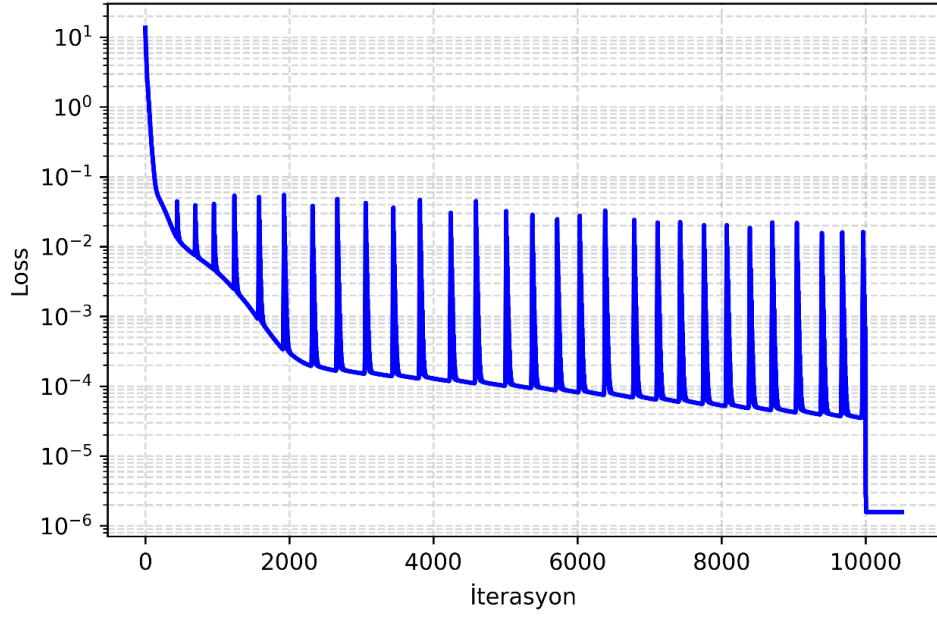
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA



Şekil 4.24. Örnek 1 için FBSA ve analitik çözümün karşılaştırmalı kontur grafikleri.



Şekil 4.25. Örnek 1 için mutlak hata grafiği.



Şekil 4.26. Örnek 1 için iterasyona göre kayıp fonksiyonu değişimi.

Örnek 2: İki Boyutlu Zaman Bağımsız Doğrusal Olmayan Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denkleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu örnekte, iki boyutlu zaman bağımsız ve doğrusal olmayan bir konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin çözümünde FBSA yöntemi kullanılmıştır. Problemin çözüm alanı $\Omega: (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ olarak belirlenmiş olup matematiksel ifadesi aşağıdaki gibi sunulmaktadır.

$$-\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + w_x \frac{\partial u}{\partial x} + w_y \frac{\partial u}{\partial y} + u^3 = g(x, y) \quad (4.20)$$

Burada $\varepsilon = 10^{-4}$, $w_x = 1$ ve $w_y = 1$ olarak alınmıştır. Sağ taraf fonksiyonu $g(x, y)$, analitik çözüm olarak kabul edilen $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ ifadesi kullanılarak elde edilmiştir. Bu tanım, çözümün sınır koşullarıyla uyumlu olmasını sağlamak ve eğitim sürecinde doğruluk kontrolü açısından avantaj sunmaktadır.

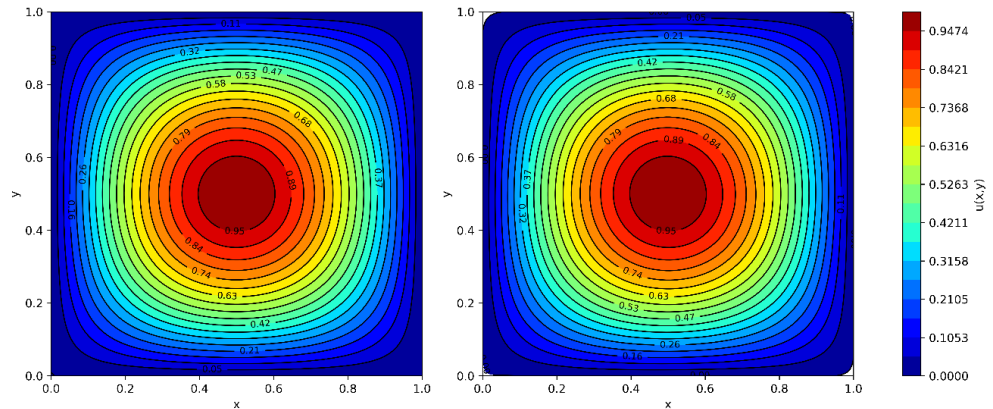
Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 20 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 10.000 iterasyon Adam kullanılırken 500 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon

gerçekleştirilmiştir. Eğitim sırasında çözüm aralığında $\mathcal{N}_f = 10.000$ adet iç nokta kullanılmış olup, sınır koşulları için kullanılan nokta sayısı $\mathcal{N}_{BC} = 320$ adettir. Modelin toplam kayıp fonksiyonu, önceki bölümlerde tanımlanmış olan Denklem (3.4) üzerinden hesaplanmıştır.

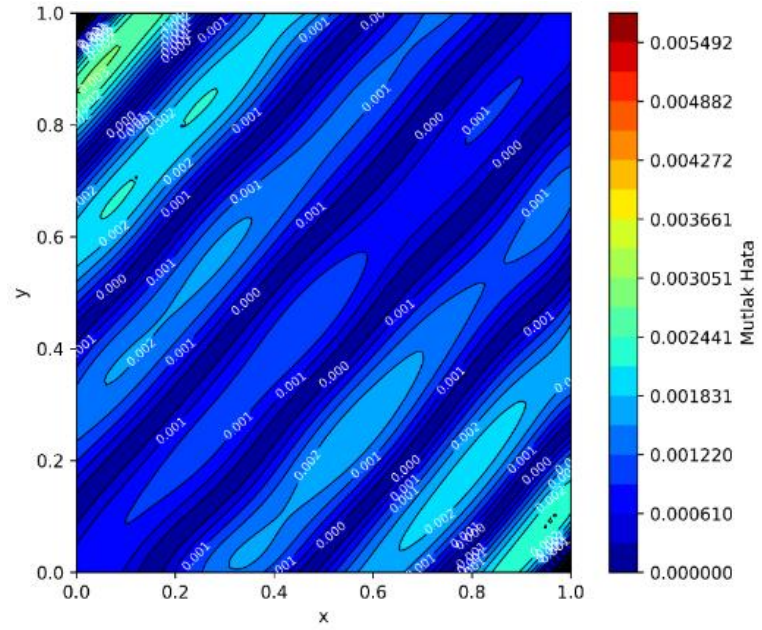
Model performansını değerlendirmek amacıyla Şekil 4.27’de analitik çözüm ile FBSA çözümüne ait sonuçların karşılaştırmalı grafikleri oluşturulmuştur. Bu grafiklerde görüldüğü üzere, FBSA yöntemiyle elde edilen sayısal çözüm analitik çözüme oldukça yakın bir dağılım sergilemektedir.

Şekil 4.28’de FBSA yöntemine ait mutlak hata dağılımı sunulmaktadır. Maksimum hata yaklaşık $5,797 \times 10^{-3}$, L2 hata normu ise $2,317 \times 10^{-3}$ ve KOKH $1,147 \times 10^{-3}$ değerlerindedir. Bu hata dağılımı, çözüm alanında homojen ve düşük seviyelerde olduğunu göstermektedir.

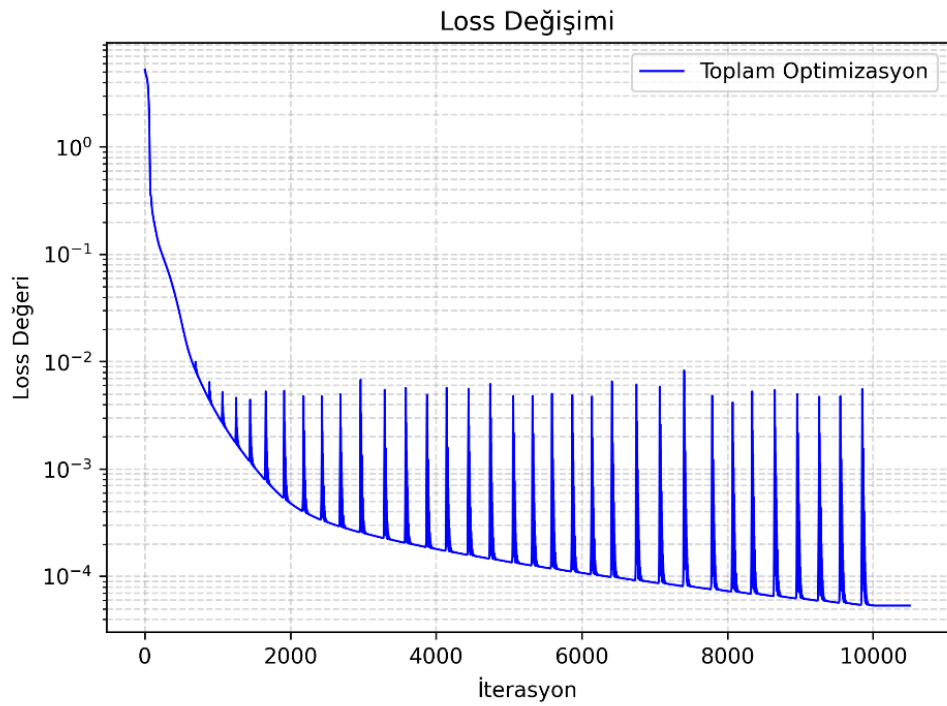
Son olarak, eğitim sürecinde kayıp fonksiyonunun değişimi Şekil 4.29’da verilmiştir. Adam ve L-BFGS optimizasyon algoritmalarının birlikte kullanılması eğitim sürecinde etkin ve kararlı bir yakınsama sağlamış, kayıp fonksiyonunun istikrarlı şekilde azaltılmasına olanak tanımıştır.



Şekil 4.27. Örnek 2 için FBSA ve analitik çözümün karşılaştırmalı kontur grafikleri.



Şekil 4.28. Örnek 2 için mutlak hata grafiği.



Şekil 4.29. Örnek 2 için iterasyona göre kayıp fonksiyonu değişimi.

FBSA modelinin eğitim süresinin GPU’da 92 saniye sürerken CPU da belirgin şekilde artarak 339 saniye olmuştur. GPU ortamında yaklaşık %72 oranında verim elde edilmiştir.

Sonuç olarak elde edilen bulgular, FBSA yönteminin iki boyutlu doğrusal olmayan karmaşık konveksiyon-difüzyon problemlerini çözmede etkili ve güvenilir bir alternatif olduğunu ortaya koymaktadır

Örnek 3: İki Boyutlu Zaman Bağımlı Doğrusal Konveksiyon-Difüzyon Probleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu çalışmada, zaman bağımlı iki boyutlu doğrusal konveksiyon-difüzyon problemi, sağ tarafı analitik olarak türetilmiş bir kaynak terimi $f(t, x, y)$ içerecek şekilde ele alınmış ve FBSA yöntemi ile çözülmüştür. Kullanılan diferansiyel denklem aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial u}{\partial y} = f(t, x, y) \quad (4.21)$$

Bu denklemde ε difüzyon katsayısını k_x ve k_y ise x ve y yönündeki konveksiyon katsayılarını temsil etmektedir. Çalışmada bu parametrelerin farklı değerleri için FBSA modelinin performansı detaylı şekilde incelenmiştir. Zaman ve uzay sınırları sırasıyla $t \in [0,1]$ ve $(x, y) \in [0,2] \times [0,2]$ aralıklarında belirlenmiştir.

Problemin sağ tarafındaki kaynak terimi, aşağıda verilen analitik çözümden türev işlemleri ile hesaplanmıştır:

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4t + 1} e^{\left(-\frac{(x-k_x t-0.5)^2}{\varepsilon(4t+1)} - \frac{(y-k_y t-0.5)^2}{\varepsilon(4t+1)} \right)} \quad (4.22)$$

Çözüm fonksiyonu zaman bağımlı olarak uzayda belirli bir hızla taşınan ve aynı zamanda difüzyon etkisiyle yayılan bir Gauss profili şeklindedir.

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 20 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 10.000 iterasyon Adam kullanılırken 500 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

gerçekleştirilmiştir. Eğitim sırasında çözüm aralığında $\mathcal{N}_f = 40.000$ adet iç nokta, $\mathcal{N}_{BC} = 2000$ sınır koşulu noktası ve $\mathcal{N}_{IC} = 2000$ başlangıç koşulu noktası kullanılmıştır. Modelin toplam kayıp fonksiyonu, önceki bölümlerde tanımlanmış olan Denklem (3.12) üzerinden hesaplanmıştır. Bu yapı ve parametrelerle, modelin farklı ε , k_x ve k_y değerleri için çözüm başarımı sistematik olarak analiz edilmiştir.

Bu bölümde, $\varepsilon = 0,1$ ve $k_x = k_y = 1$ parametre değerleri için elde edilen sonuçlar sunulmaktadır. Şekil 4.30'da FBSA modelinin toplam kayıp değerinin iterasyonlara göre değişimi görülmektedir. Adam ve L-BFGS aşamaları sonrasında modelin toplam kayıp değeri yaklaşık 10^{-5} seviyesine kadar düşerek eğitim süreci başarıyla tamamlanmıştır.

Zamanın farklı adımlarında Tablo 4.5'te hata analizleri yapılmış, devamında ise özel olarak $t = 0$, $t = 0,3$, $t = 0,5$, $t = 0,7$ anlarında FBSA ile analitik çözümler karşılaştırmalı olarak Şekil (4.31-4.34)'de sunulmuştur. Zaman ilerledikçe FBSA yöntemi çözümü doğru şekilde tahmin etmeye devam etmiştir.

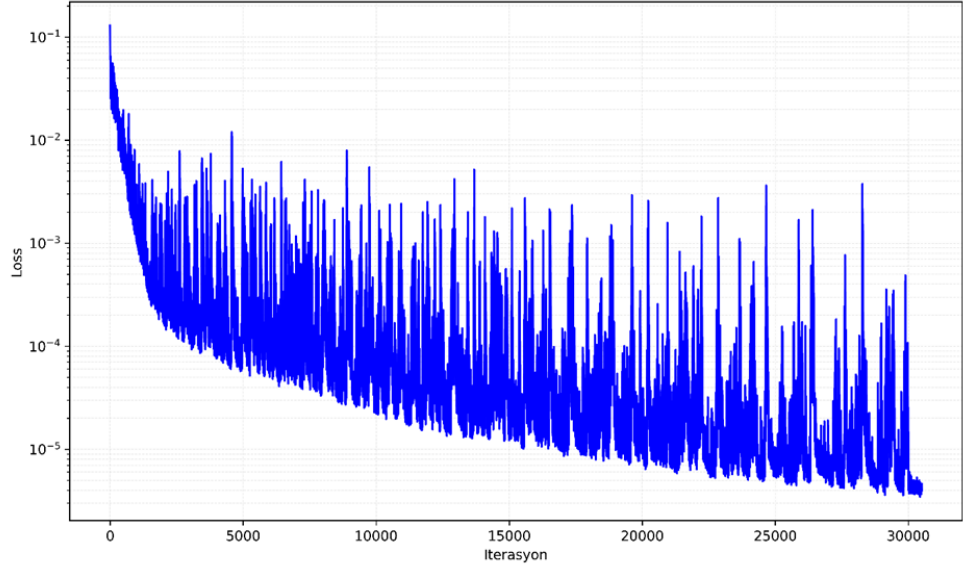
Şekil 4.35'te ise aynı zaman adımlarında FBSA ve analitik çözümler arasındaki mutlak hata dağılımları gösterilmektedir. Erken zaman adımlarında hata seviyesinin nispeten daha yüksek olduğu, zaman ilerledikçe ise hatanın azaldığı gözlemlenmektedir.

Tablo 4.5. Zaman adımlarına göre hata değerleri.

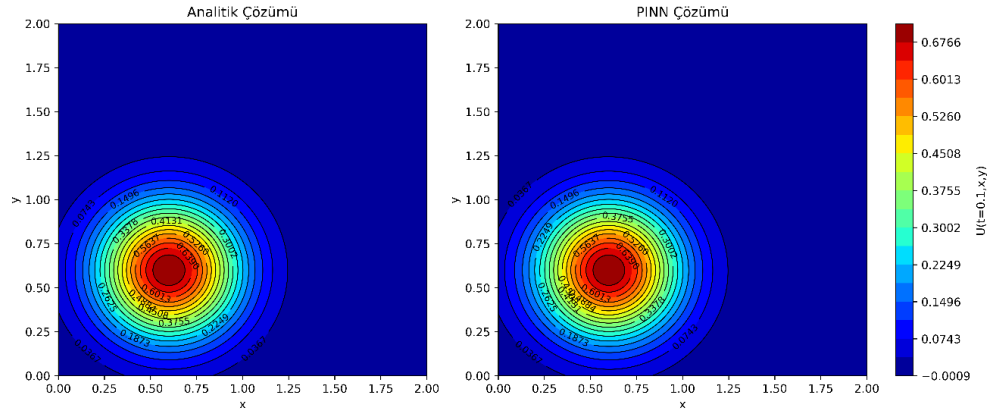
	MMH	KOKH	L2 Görelî Hata
t = 0,7	$3,205 \times 10^{-3}$	$3,227 \times 10^{-4}$	$3,993 \times 10^{-3}$
t = 0,8	$3,386 \times 10^{-3}$	$3,209 \times 10^{-4}$	$4,632 \times 10^{-3}$
t = 0,9	$3,548 \times 10^{-3}$	$3,140 \times 10^{-4}$	$5,122 \times 10^{-3}$
t = 1	$3,760 \times 10^{-3}$	$3,061 \times 10^{-4}$	$6,122 \times 10^{-3}$
t = 0,1	$2,483 \times 10^{-3}$	$4,134 \times 10^{-4}$	$2,044 \times 10^{-3}$
t = 0,2	$2,451 \times 10^{-3}$	$3,601 \times 10^{-4}$	$2,302 \times 10^{-3}$
t = 0,3	$3,237 \times 10^{-3}$	$4,302 \times 10^{-4}$	$2,448 \times 10^{-3}$
t = 0,4	$3,753 \times 10^{-3}$	$4,589 \times 10^{-4}$	$2,690 \times 10^{-3}$
t = 0,5	$3,631 \times 10^{-3}$	$4,132 \times 10^{-4}$	$3,034 \times 10^{-3}$
t = 0,6	$3,273 \times 10^{-3}$	$3,496 \times 10^{-4}$	$3,452 \times 10^{-3}$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

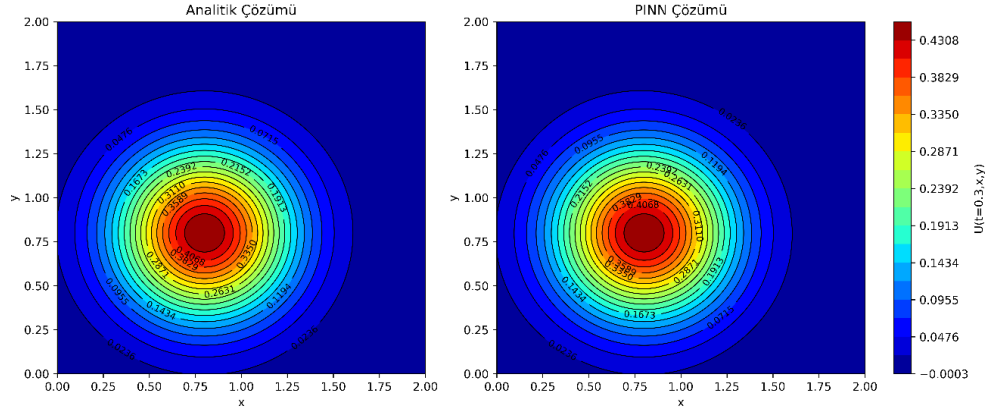
Bu problem için Maksimum hata $9,986 \times 10^{-3}$, L2 hata normu ise $3,309 \times 10^{-3}$ ve KOKH $4,117 \times 10^{-4}$ değerlerindedir. Modelin GPU üzerinde hesaplama süresi 909 saniye, CPU üzerinde ise 3207 saniye olmuştur. Elde edilen sonuçlar denklemin FBSA yönteminin ilgili parametreler için başarılı bir çözüm sunduğunu göstermektedir.



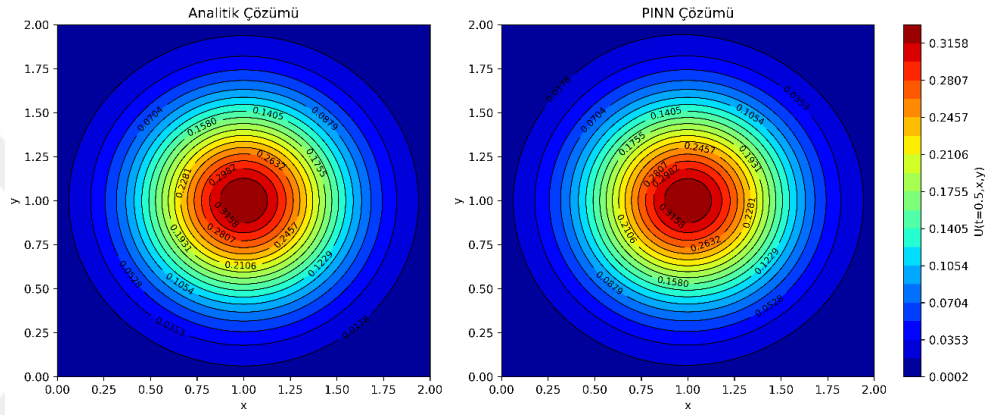
Şekil 4.30. $\varepsilon = 0,1$ ve $k_x = k_y = 1$ için FBSA modelinin toplam kayıp değerinin iterasyonlara göre değişimi.



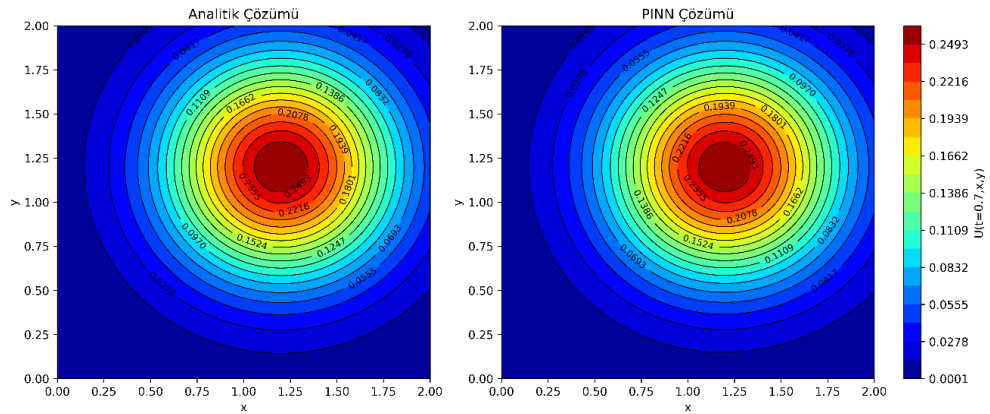
Şekil 4.31. $\varepsilon = 0,1$ ve $k_x = k_y = 1$ için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,1$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.



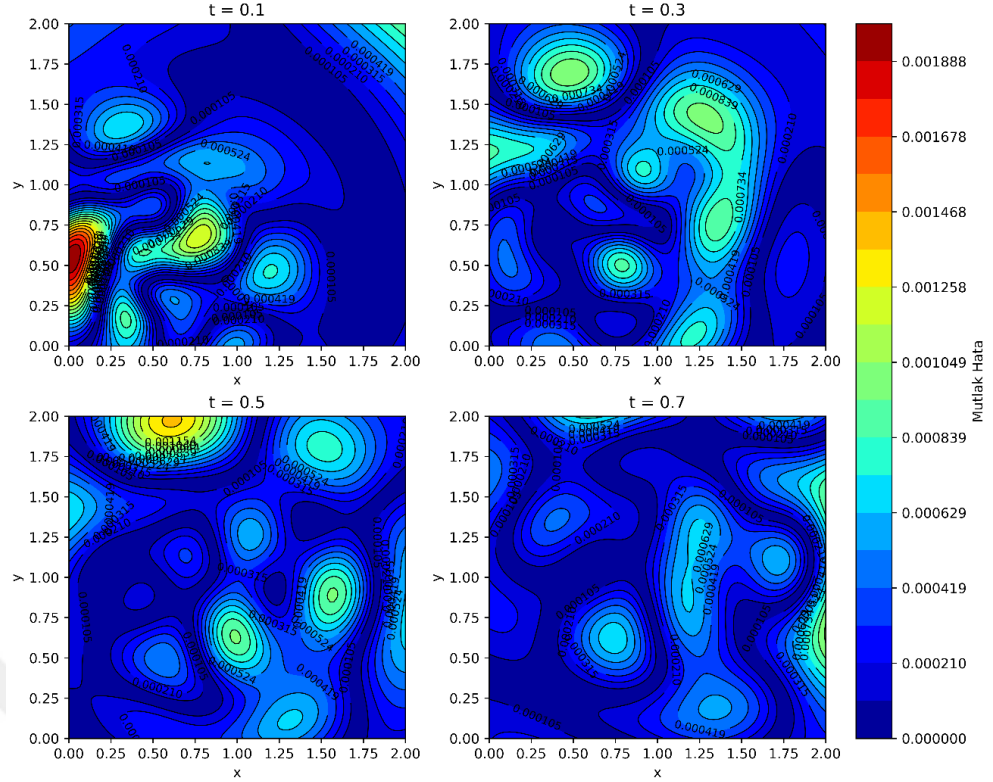
Şekil 4.32. $\varepsilon = 0,1$ ve $k_x = k_y = 1$ için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,3$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.



Şekil 4.33. $\varepsilon = 0,1$ ve $k_x = k_y = 1$ için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,5$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.



Şekil 4.34. $\varepsilon = 0,1$ ve $k_x = k_y = 1$ için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,7$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.



Şekil 4.35. $\varepsilon = 0,1$ ve $k_x = k_y = 1$ için $t = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ zaman adımlarında FBSA ve analitik çözümler arasındaki mutlak hata dağılımı.

$\varepsilon = 0,1$ için elde edilen hata değerleri ve grafikler genel olarak incelendiğinde, zaman adımlarında güzel bir çözümleme elde edildiği görülmektedir. FBSA yöntemi bu problem için uygun sonuçlar üretmiştir. Ayrıca, şekil grafiklerinden de gözlemleneceği üzere, çözüm bölgesinin büyük kısmında hatalar oldukça küçük bir seviyededir.

Örnek 4: İki Boyutlu Zaman Bağımlı Doğrusal Olmayan Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Probleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu çalışmada, zaman bağımlı iki boyutlu doğrusal olmayan konveksiyon difüzyon denklemi, FBSA yöntemi kullanılarak ele alınmıştır. Uzamsal çözüm alanı $t \in [0,1]$ ve $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ olarak tanımlanmıştır. Model aşağıdaki denklemle ifade edilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 0,5 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u^2(1 - u) = 0 \quad (4.23)$$

Çözümün başlangıç ve sınır koşulları $p=\sqrt{1/2}$ iken aşağıdaki analitik çözümden elde edilmiştir:

$$u(t, x, y) = \frac{1}{1 + e^{(p(x+y-pt))}} \quad (4.24)$$

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 20 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 10.000 iterasyon Adam kullanılırken 500 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon gerçekleştirilmiştir. Eğitim sırasında çözüm aralığında $\mathcal{N}_f = 10.000$ adet iç nokta, $\mathcal{N}_{BC} = 1000$ sınır koşulu noktası ve $\mathcal{N}_{IC} = 1000$ başlangıç koşulu noktası kullanılmıştır. Modelin toplam kayıp fonksiyonu, önceki bölümlerde tanımlanmış olan Denklem (3.12) üzerinden hesaplanmıştır.

Çözümün zamana göre değişimini ve FBSA yöntemi ile analitik çözümün uyumunu daha ayrıntılı şekilde incelemek amacıyla, farklı zaman adımlarında $t = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ anlarında elde edilen karşılaştırmalı kontur grafikleri Şekil (4.36-4.39)'da sunulmuştur. Bunun yanı sıra Tablo 4.6'da zaman adımlarına göre maksimum mutlak hata, L2 görelî hata ve KOKH karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Grafiklerden görüldüğü üzere, FBSA çözümü ile analitik çözüm genel olarak tüm zaman adımlarında oldukça yüksek bir uyum sergilemektedir.

Tablo 4.6. Zaman adımlarına göre hata analizleri.

	MMH	KOKH	L2 Görelî Hata
t = 0,1	$1,075 \times 10^{-2}$	$3,925 \times 10^{-3}$	$1,120 \times 10^{-2}$
t = 0,2	$9,611 \times 10^{-2}$	$3,840 \times 10^{-3}$	$1,062 \times 10^{-2}$
t = 0,3	$8,568 \times 10^{-3}$	$3,751 \times 10^{-3}$	$1,006 \times 10^{-2}$
t = 0,4	$7,616 \times 10^3$	$3,685 \times 10^{-3}$	$9,523 \times 10^{-3}$
t = 0,5	$6,986 \times 10^{-3}$	$3,567 \times 10^{-3}$	$9,013 \times 10^{-3}$
t = 0,6	$6,802 \times 10^{-3}$	$3,484 \times 10^{-3}$	$8,551 \times 10^{-3}$
t = 0,7	$6,612 \times 10^{-3}$	$3,422 \times 10^{-3}$	$8,163 \times 10^{-3}$
t = 0,8	$6,418 \times 10^{-3}$	$3,397 \times 10^{-3}$	$7,882 \times 10^{-3}$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

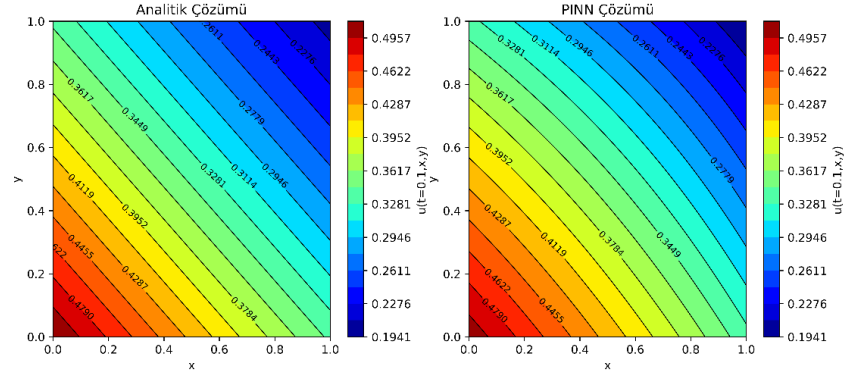
	MMH	KOKH	L2 Görelî Hata
t = 0,9	$6,224 \times 10^{-3}$	$3,430 \times 10^{-3}$	$7,742 \times 10^{-3}$
t = 1	$6,034 \times 10^{-3}$	$3,535 \times 10^{-3}$	$7,771 \times 10^{-3}$

Modelin doğruluk performansını daha nicel bir şekilde değerlendirmek amacıyla zaman adımlarına göre mutlak hata dağılımları da Şekil 4.40'da kontur grafikleri şeklinde verilmiştir. Bu görseller, her bir zaman adımı için çözüm alanındaki mutlak hatanın oldukça düşük seviyelerde kaldığını ve zaman ilerledikçe çözüm doğruluğunun korunduğunu göstermektedir. Ayrıca hata dağılımlarında belirgin sistematik sapmalar veya yüksek hata bölgeleri gözlemlenmemiştir; bu da FBSA yönteminin zaman bağımlı karmaşık dinamikleri başarılı bir şekilde öğrenebildiğini göstermektedir.

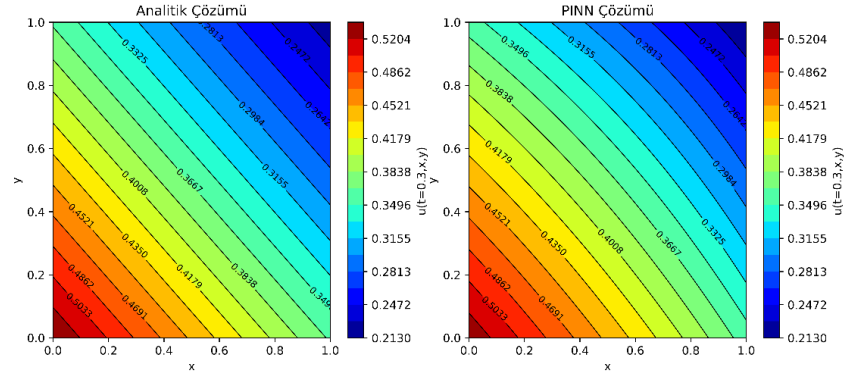
Nicel değerlendirmeyi desteklemek amacıyla hesaplanan L2 görelî hata $9,113 \times 10^{-3}$, KOKH $3,625 \times 10^{-3}$ ve MMH $1,138 \times 10^{-2}$ olarak bulunmuştur. Bu düşük hata değerleri, modelin kabul edilebilir doğrulukta sonuçlar üretebildiğini açıkça ortaya koymaktadır.

Eğitim sürecinin başarımı ve optimizasyonun ilerleyişi ise Şekil 4.41'de sunulan toplam kayıp fonksiyonunun değişim grafiği üzerinden takip edilebilmektedir. Görüldüğü üzere, eğitim süreci boyunca kayıp fonksiyonu kararlı bir biçimde azalmış ve eğitim sonunda 10^{-4} seviyelerine ulaşmıştır. Bu durum, modelin hem diferansiyel denklem koşullarını hem de sınır ve başlangıç koşullarını tatmin edecek şekilde başarılı bir şekilde optimize edildiğini göstermektedir.

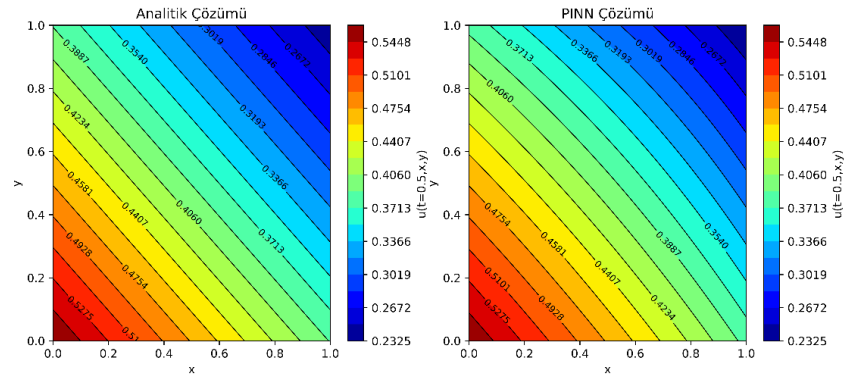
Son olarak, CPU ve GPU süresi 104 saniye olarak hesaplanmıştır. GPU ortamında sağlanan önemli hız kazanımı, özellikle daha karmaşık ve yüksek boyutlu problemlerde yöntemin uygulanabilirliğini ve hesaplama verimliliğini belirgin ölçüde artırmaktadır.



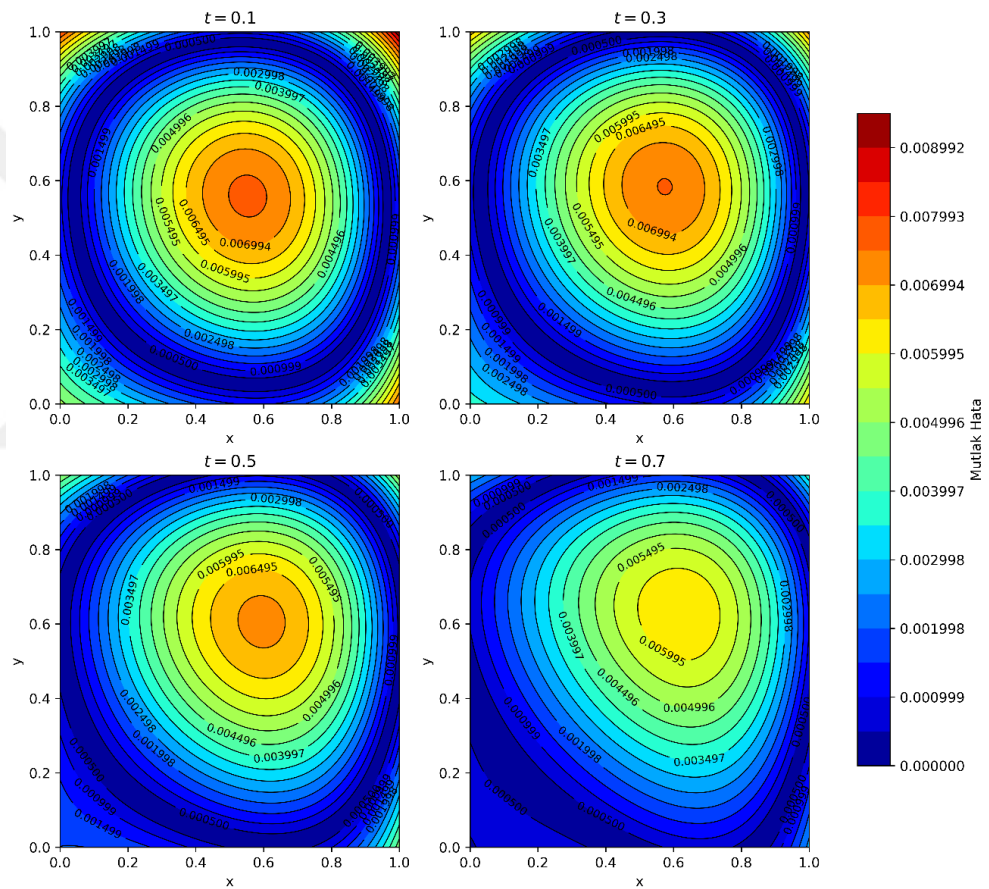
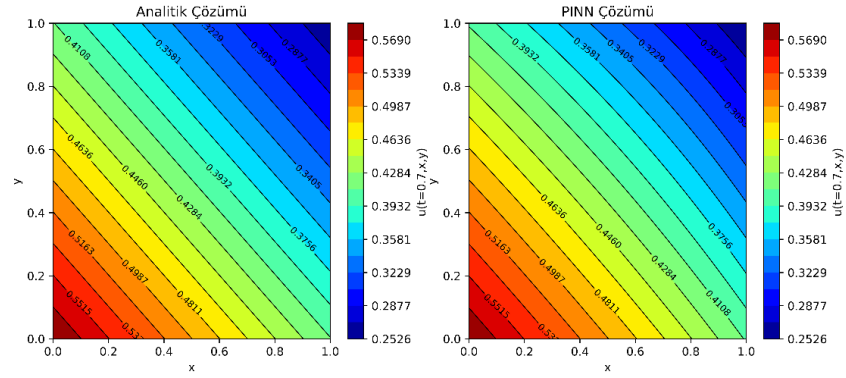
Şekil 4.36. Örnek 4 için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,1$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.

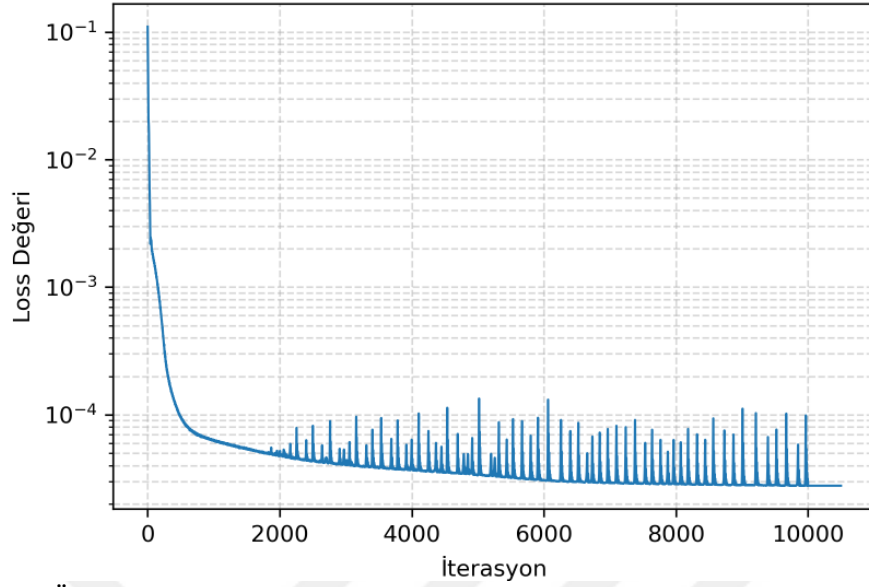


Şekil 4.37. Örnek 4 için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,3$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.



Şekil 4.38. Örnek 4 için FBSA ve analitik çözümün $t = 0,5$ anındaki karşılaştırmalı kontur grafikleri.





Şekil 4.41. Örnek 4 için mutlak hata grafiği.

Sonuç olarak, FBSA yöntemi, zaman bağımlı iki boyutlu doğrusal olmayan konveksiyon-difüzyon denklemlerinin çözümünde hem sayısal doğruluk hem de hesaplama verimliliği açısından güçlü bir alternatif sunmaktadır. Bu metodolojinin ileri çalışmalarla daha karmaşık dinamik sistemlere uygulanabilirliği, gelecekteki araştırmalar için umut verici bir yönelim oluşturmaktadır.

4.3 Üç Boyutlu Problemlerin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu bölümde, konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerine bir boyut daha ekleyerek uzayımızı üç boyuta çıkarıyoruz. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon denklemlerinin ve 3B denklemlerin zorluklarını analiz etmek adına, zaman bağımlı ve bağımsız çözüm bölgelerinde doğrusal ve doğrusal olmayan denklemler incelenmiştir.

Örnek 1: Üç Boyutlu Zamandan Bağımsız Doğrusal Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denkleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu örnekte, üç boyutlu ve zamandan bağımsız doğrusal bir konveksiyon-difüzyon denklemi, FBSA yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çalışmanın amacı, değişken katsayılı

bu tür bir denklemin çözümünde FBSA yaklaşımının doğruluk ve verimlilik performansını değerlendirmektir.

İncelenen denklem, literatürde test problemi olarak yaygın biçimde kullanılan, değişken katsayılarla sahip şu formdadır:

$$e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{2z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + e^{(x+y+z)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f(x, y, z) \quad (4.25)$$

Bu denklem, çözüm bölgesi olarak $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ küpü üzerinde tanımlanmıştır ve tüm kenarlarda Dirichlet sınır koşulları ile çözülmüştür. Sınır koşulları ve kaynak terimi, aşağıda verilen analitik çözüme göre türetilmiştir:

$$u(x, y, z) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(z) \quad (4.26)$$

Bu seçim, çözümün doğruluğunun doğrudan analitik çözümle karşılaştırılmasını mümkün kılmaktadır. Kaynak terimi $f(x, y, z)$ bu tam çözüm üzerinden otomatik türevleme yöntemi ile hesaplanmıştır.

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 50 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 20.000 iterasyon boyunca Adam, 500 iterasyon boyunca L-BFGS kullanılmıştır. Eğitim için iç bölgede 50.000 rastgele örnek nokta, her sınır yüzeyi başına ise $50 \times 50 = 2500$ nokta kullanılarak toplam 15.000 sınır noktası oluşturulmuştur. Modelin toplam kayıp fonksiyonu, önceki bölümlerde tanımlanmış olan Denklem (3.4) üzerinden hesaplanmıştır.

Modelin başarımını değerlendirmek amacıyla, analitik çözüm ile FBSA tarafından üretilen çözümün karşılaştırılması farklı görselleştirmelerle sunulmuştur. Öncelikle, çözümün belirli düzlemler üzerinde kesitleri alınarak karşılaştırmalı kontur grafikleri hazırlanmıştır. Şekil 4.42 ve Şekil 4.44’de sırasıyla $z = 0,2$ ve $y = 0,2$ düzlemleri için analitik ve FBSA çözümü yan yana görselleştirilmiştir. Her iki kesitte de yüzeylerin genel

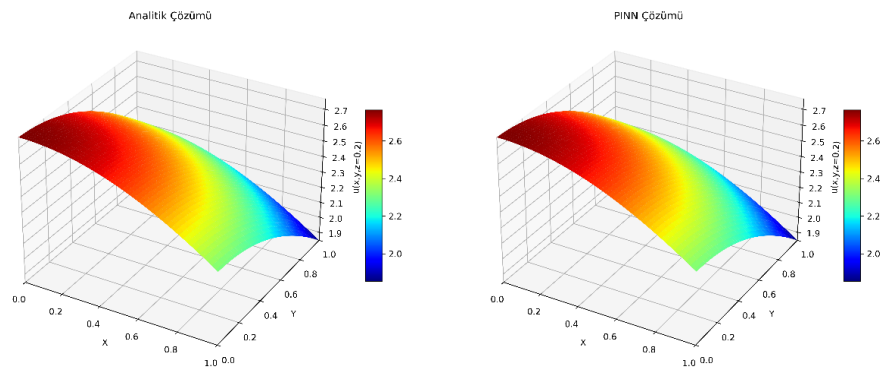
yapısının birbiriyle yüksek düzeyde örtüştüğü ve FBSA çözümünün analitik çözüme oldukça yakın sonuçlar üretebildiği görülmektedir.

Buna ek olarak, çözümün üç boyutlu genel davranışı Şekil 4.46’de analitik çözüm ve FBSA çözümünün üç boyutlu yüzey grafikleri ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun değişimi ise Şekil 4.47’de verilmiştir.

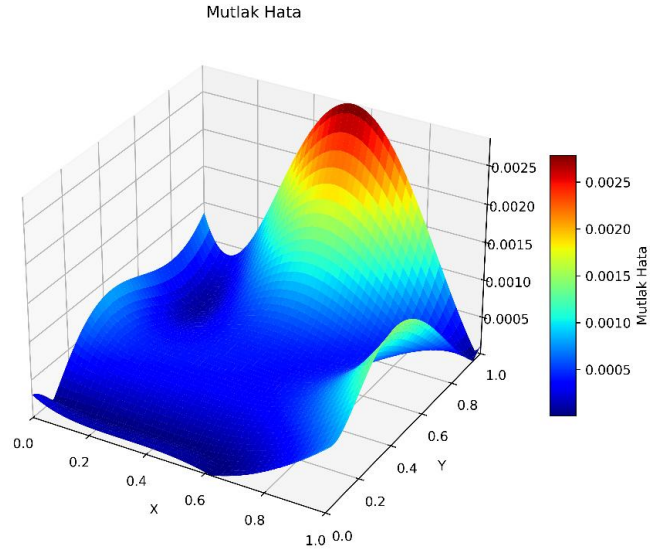
Çözümün mutlak hata dağılımı ise Şekil 4.48’te üç boyutlu olarak görselleştirilmiştir. Şekil incelendiğinde, çözüm alanının genelinde hata seviyelerinin oldukça düşük düzeyde olduğu ve bazı kısımlarda kümeleşmiş hata bölgeleri bulunuyor.

Modelin L2 hata normu $3,057 \times 10^{-4}$, maksimum mutlak hata $3,927 \times 10^{-3}$ ve KOKH $7,746 \times 10^{-4}$, olarak hesaplanmıştır. Bu değerler, FBSA modelinin üç boyutlu doğrusal konveksiyon-difüzyon denklemlerinde yüksek doğrulukla sonuç üretebildiğini göstermektedir.

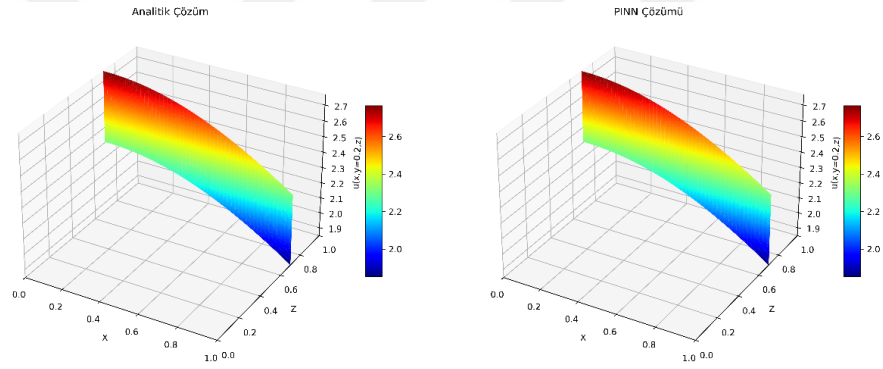
Çözüm süresi açısından değerlendirildiğinde, GPU ortamında yaklaşık 1258 saniyede eğitim tamamlanmıştır. CPU ortamında ise bu süre yaklaşık 5400 saniye olmuştur. Bu sonuçlar, üç boyutlu problemlerde GPU kullanımının hesaplama süresi açısından önemli bir avantaj sağladığını açıkça ortaya koymaktadır.



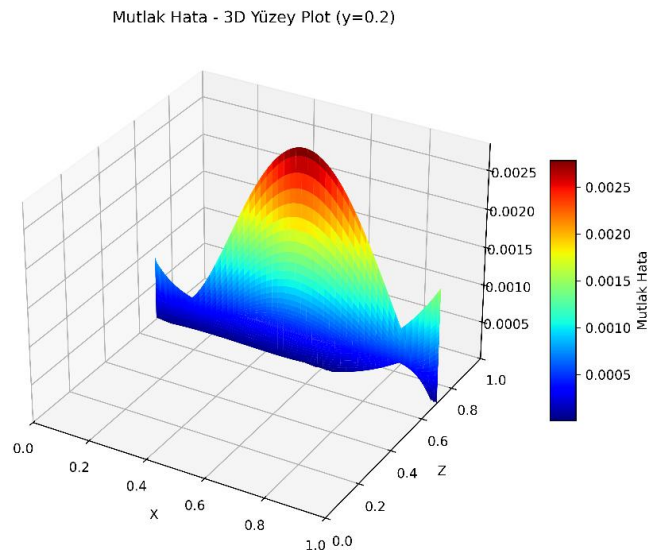
Şekil 4.42. Örnek 1 için $z=0,2$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



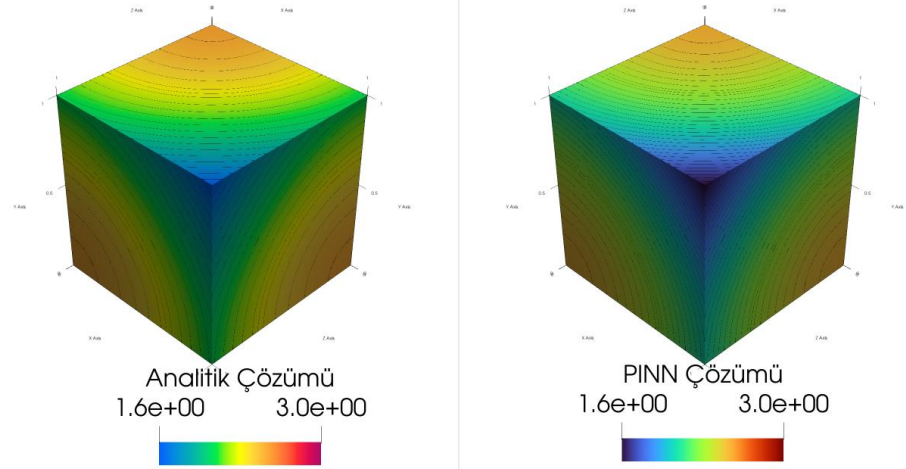
Şekil 4.43. Örnek 1 için $z = 0,2$ kesitinde mutlak hata.



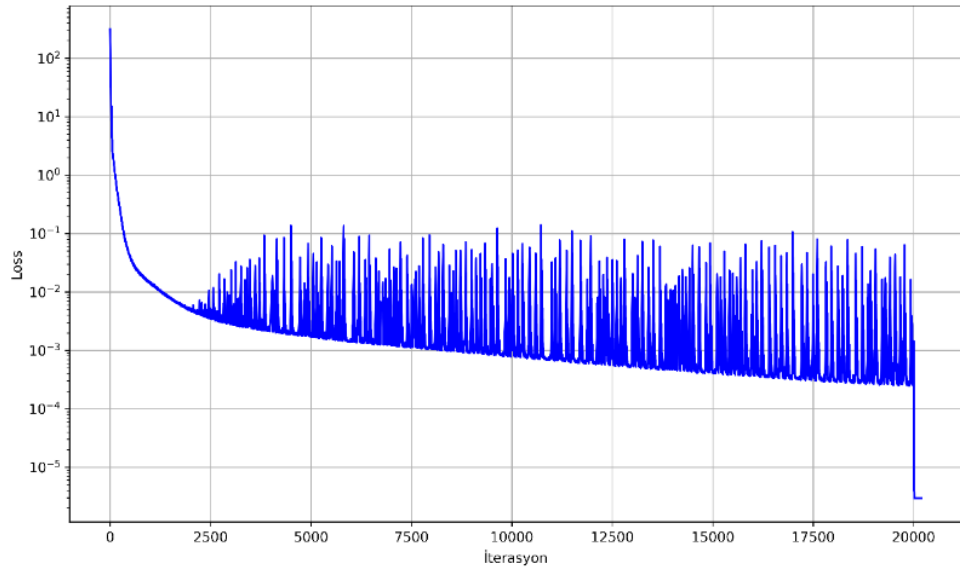
Şekil 4.44. Örnek 1 için $y = 0,2$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



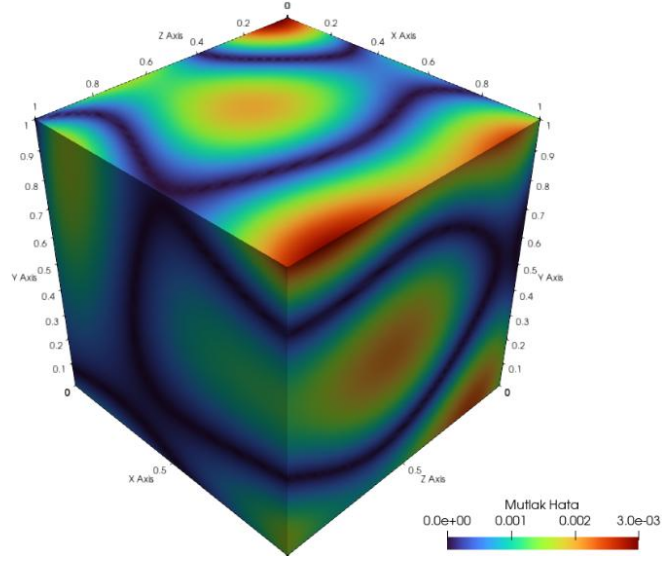
Şekil 4.45. Örnek 1 için $y = 0.2$ kesitinde mutlak hata.



Şekil 4.46. Örnek 1 için analitik çözüm ve FBSA çözümünün üç boyutlu karşılaştırması.



Şekil 4.47. Örnek 1 için eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun değişimi.



Şekil 4.48. Örnek 1 için çözümün üç boyutlu mutlak hata dağılımı.

Örnek 2: Üç Boyutlu Zamandan Bağımsız Doğrusal Olmayan Konveksiyon-Difüzyon-Türdeş Türevli Denkleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu bölümde, üç boyutlu ve zamandan bağımsız doğrusal olmayan bir konveksiyon-difüzyon denklemi, FBSA yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çalışmanın amacı, karmaşık katsayılar ve türdeş türev terimlerine sahip bu tür bir denklemin çözümünde FBSA yaklaşımının doğruluk ve verimlilik performansını değerlendirmektir.

Çalışmada ele alınan diferansiyel denklem şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
 & (1 + e^{(x+y+z)}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\
 & (1 + \cos z \sin y \cos z) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) + \\
 & (1 + \cos x \cos y \sin z) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) - \\
 & \alpha u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Çözüm bölgesi olarak $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ küpü üzerinde tanımlanmıştır ve tüm kenarlarda Dirichlet sınır koşulları uygulanmıştır. Sınır koşulları ve kaynak terimi, aşağıda verilen analitik çözüme göre türetilmiştir:

$$u(x, y, z) = e^x \cos(y) \sin(z) \quad (4.28)$$

Bu seçim, çözümün doğruluğunun doğrudan analitik çözümle karşılaştırılmasını mümkün kılmaktadır. Kaynak terimi $f(x, y, z)$, analitik çözüm üzerinden otomatik türevleme yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır.

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 50 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 20.000 iterasyon Adam kullanılırken 1000 iterasyon L-BFGS kullanılarak daha hassas bir optimizasyon gerçekleştirilmiştir. Eğitim için iç bölgede 50.000 rastgele örnek nokta, her sınır yüzeyi başına ise $50 \times 50 = 2500$ nokta kullanılarak toplam 15.000 sınır noktası oluşturulmuştur. Modelin toplam kayıp fonksiyonu, önceki bölümlerde tanımlanmış olan Denklem (3.4) üzerinden hesaplanmıştır.

Çözüm alanındaki analitik ve FBSA çözümlerinin üç boyutlu karşılaştırmalı dağılımları Şekil 4.49'da sunulmuştur. Görüldüğü üzere, FBSA çözümü analitik çözüm ile oldukça yüksek uyum sergilemiştir.

Çözümün doğruluk değerlendirmesi için L2 görelî hata yaklaşık $1,578 \times 10^{-2}$, maksimum mutlak hata $6,911 \times 10^{-3}$ ve KOKH $1,159 \times 10^{-3}$ hata olarak hesaplanmıştır. Bu hata değerleri, FBSA yönteminin karmaşık katsayılı ve doğrusal olmayan konveksiyon-difüzyon denklemlerin çözümünde başarılı olduğunu göstermektedir.

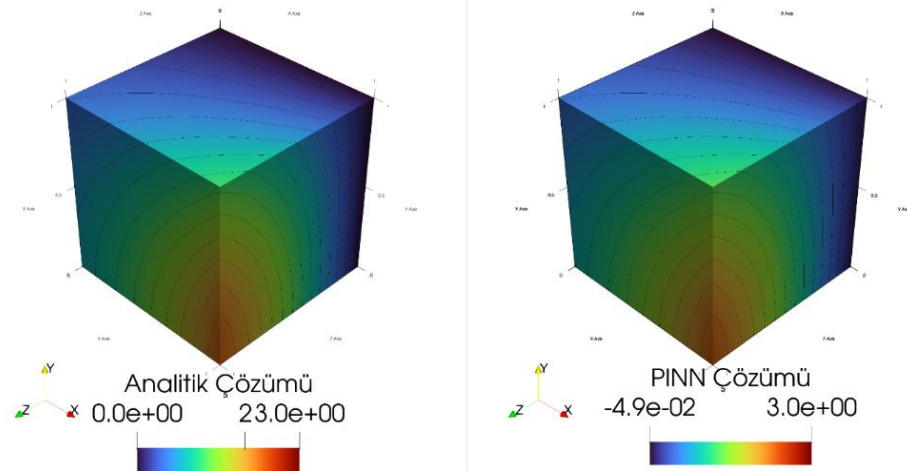
Ayrıca çözümün zorlanacağı öngörülen $z = 0,5$ kesitinde, FBSA ve analitik çözümün karşılaştırması Şekil 4.50'de mutlak hata grafiği Şekil 4.51'de verilmiştir. $x, 1$ 'e yaklaştığında lineer olmayan terimler büyüyerek denklemi zorlaştırmaktadır. Bu nedenle, ilgili kesitteki mutlak hata ve karşılaştırma grafikleri Şekil 4.52 ve Şekil 4.53'te ve $y =$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

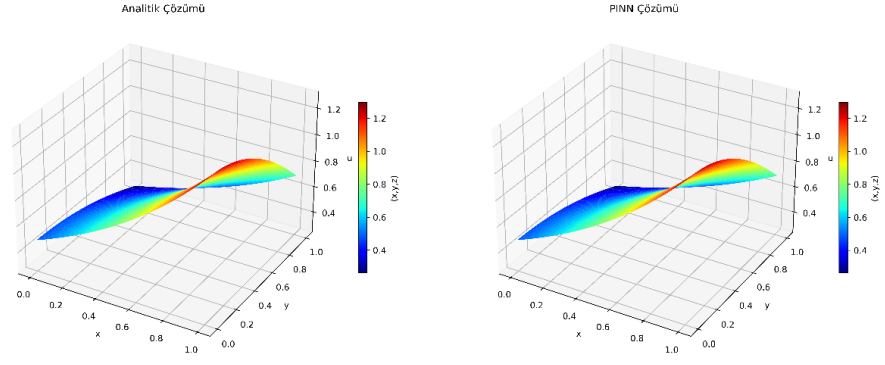
1 için ise karşılaştırmalı ve mutlak hata grafikleri sırasıyla Şekil 4.54 ve Şekil 4.55'te gösterilmiştir. Görüldüğü üzere model, bu alanlarda bozulmalar olmadan öğrenmesini 10^{-3} hata seviyelerinde tutmayı başarmıştır.

Eğitim süresince kayıp fonksiyonunun iterasyonlara göre değişimi ise Şekil 4.56'da gösterilmiştir. Grafik incelendiğinde, FBSA yönteminin iki aşamalı eğitim stratejisi kullanılarak hızlı ve kararlı bir şekilde yakınsadığı gözlemlenmektedir.

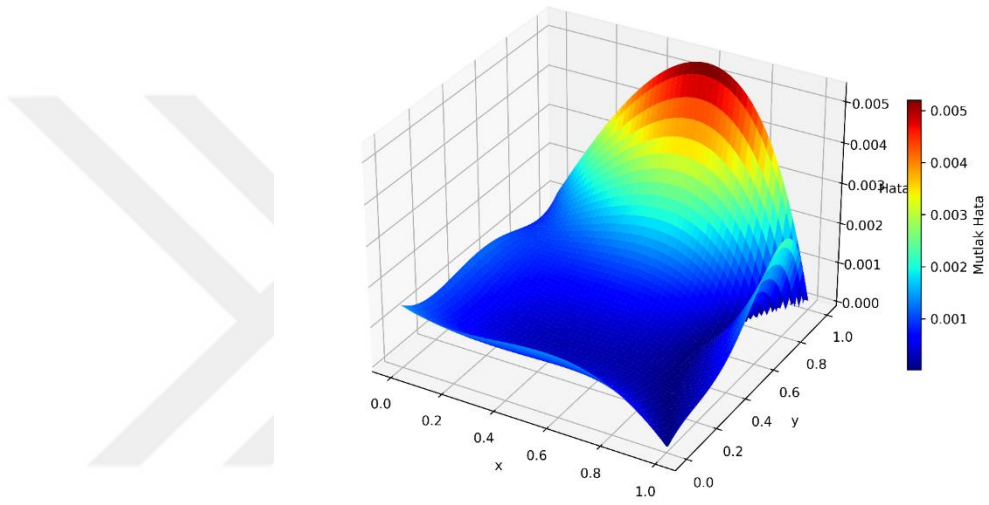
Çözüm süresi açısından değerlendirildiğinde, eğitim süreci GPU ortamında yaklaşık 1517 saniyede, CPU ortamında ise 12240 saniyede tamamlanmıştır. Elde edilen bu sonuçlar, özellikle yüksek boyutlu ve doğrusal olmayan problemlerde GPU hızlandırmasının eğitim süresini önemli ölçüde kısalttığını ve hesaplama verimliliğini artırdığını göstermektedir.



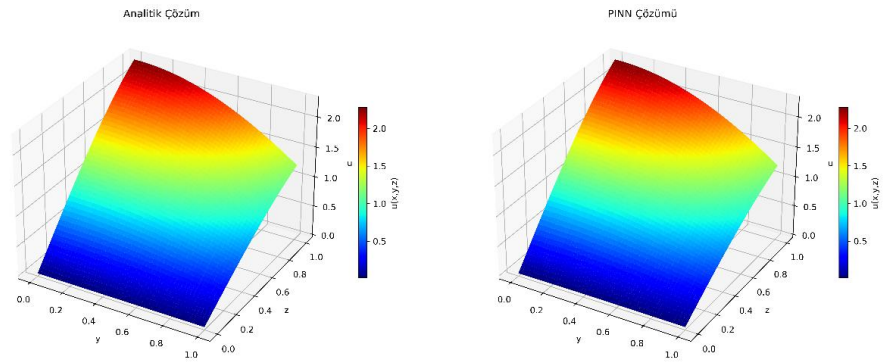
Şekil 4.49. Örnek 2 için $z = 0,2$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



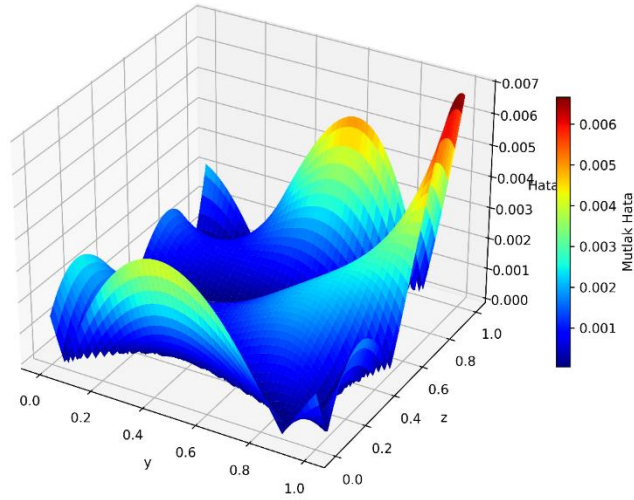
Şekil 4.50. Örnek 2 için $z = 0,5$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



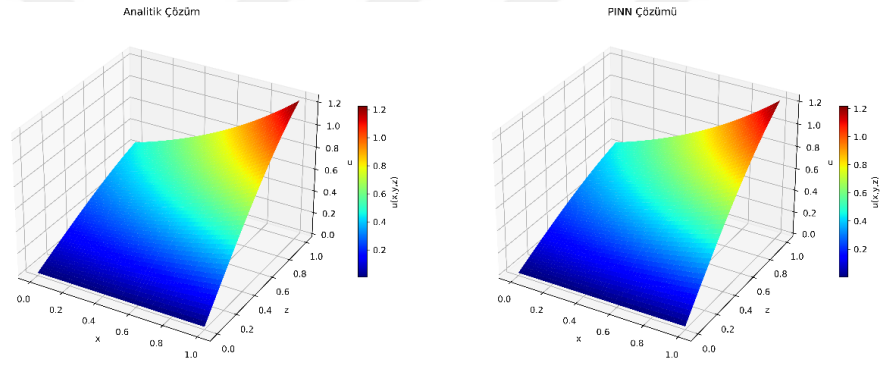
Şekil 4.51. Örnek 2 için $z = 0,5$ kesitinde elde edilen mutlak hata.



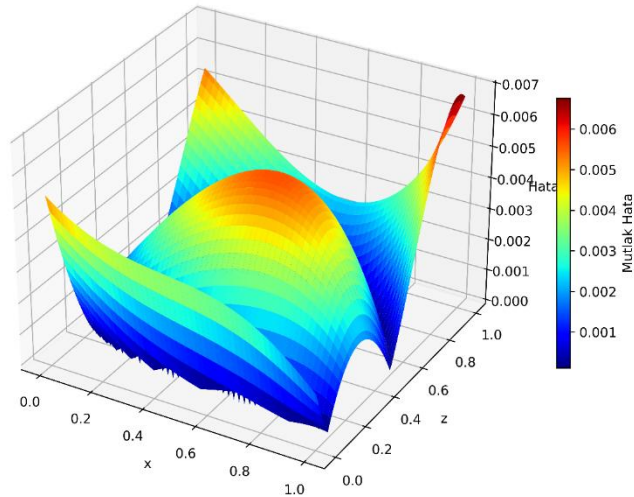
Şekil 4.52. Örnek 2 için $x = 1$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



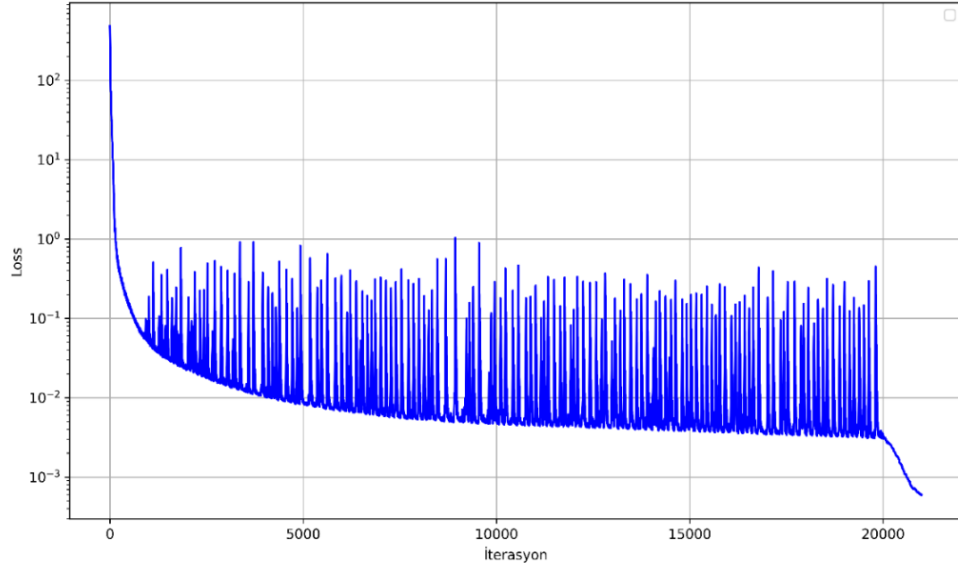
Şekil 4.53. Örnek 2 için $x = 1$ kesitinde elde edilen mutlak hata.



Şekil 4.54. Örnek 2 için $y = 1$ için FBSA ve analitik çözüm karşılaştırması.



Şekil 4.55. Örnek 2 için $y = 1$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



Şekil 4.56. Örnek 2 için eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun değişimi.

Örnek 3: Üç Boyutlu Zaman Bağımlı Doğrusal Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Fizik Bilgili Sinir Ağı ile Çözümü

Bu bölümde, üç boyutlu ve zamandan bağımlı doğrusal bir konveksiyon-difüzyon denklemi, FBSA yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çalışmanın amacı, değişken katsayılı bu tür bir denklemin çözümünde FBSA yaklaşımının doğruluk ve verimlilik performansını değerlendirmektir.

İncelenen denklem, literatürde test problemi olarak yaygın biçimde kullanılan, değişken katsayılarla sahip şu formdadır:

$$\begin{aligned}
 &u_t + t(x + y + z)u_x + t^2xyz u_y + \\
 &\sin(\pi(x + y + z + t))u_z + \\
 &txyu - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(t, x, y, z)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Bu denklem, çözüm bölgesi olarak $t \in [0, 1]$ ve $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ küpü üzerinde tanımlanmıştır ve tüm kenarlarda Dirichlet sınır koşulları ile çözülmüştür. Sınır koşulları ve kaynak terimi, aşağıda verilen analitik çözüme göre türetilmiştir:

$$u(x, y, z) = e^t \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z \quad (4.30)$$

Bu seçim, çözümün doğruluğunun doğrudan analitik çözümle karşılaştırılmasını mümkün kılmaktadır. Kaynak terimi $f(x, y, z)$ bu tam çözüm üzerinden otomatik türevleme yöntemi ile hesaplanmıştır.

Bu problem için kullanılan FBSA modeli dört adet gizli katmandan oluşmakta olup her katmanda 50 nöron bulunmaktadır. Modelin eğitiminde 30.000 iterasyon Adam kullanılırken 1.000 iterasyon L-BFGS kullanılmıştır. Eğitim için iç bölgede 100.000 nokta, her sınır yüzeyi başına ise $100 \times 100 = 2.500$ nokta kullanılarak toplam 60.000 sınır noktası ve başlangıç koşulu noktası olarak ise 15.000 noktadan oluşturulmuştur. Modelin toplam kayıp fonksiyonu, önceki bölümlerde tanımlanmış olan Denklem (3.12) üzerinden hesaplanmıştır.

Modelin başarımını değerlendirmek amacıyla, analitik çözüm ile FBSA tarafından üretilen çözümün karşılaştırılması farklı görselleştirmelerle sunulmuştur. Öncelikle, çözümün belirli düzlemler üzerinde kesitleri alınarak karşılaştırmalı kontur grafikleri hazırlanmıştır. Bu amaçla, $t = 0,2$ ve $t = 1,0$ anları için $y = 0,526$ düzleminde kesitler alınmış ve analitik çözüm ile FBSA çözümü yan yana görselleştirilmiştir. Şekil 4.57 ve 4.59'da bu kesitlere ait karşılaştırmalı grafikler sunulmaktadır. Sonuçlar da özellikle $t = 1$ anında bozulmalar grafikte gözlemlenebilir hale gelmiştir. Şekil 4.58 ve Şekil 4.60'da ise bu anlardaki mutlak hata karşılaştırması verilmiştir.

Buna ek olarak, çözümün zaman gelişimine bağlı olarak hata dağılımı da incelenmiştir. Bu kapsamda $t = 0,1, 0,3, 0,5$ ve $t = 1,0$ anlarındaki 3B mutlak hata dağılımları, Şekil 4.61'te görselleştirilmiştir. Şekil incelendiğinde, zamanın ilerlemesine bağlı olarak sınırlarda belirli bölgelerde hatanın arttığı gözlemlenmektedir. Özellikle $t = 1,0$ anında, $x = 0, y = z = 0,526$ noktasında hata maksimum seviyeye ulaşmıştır. Bu durum, çözüm alanının bu bölgelerinde kaynak terimin etkisiyle yüksek gradyanların oluşmasından kaynaklanmaktadır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

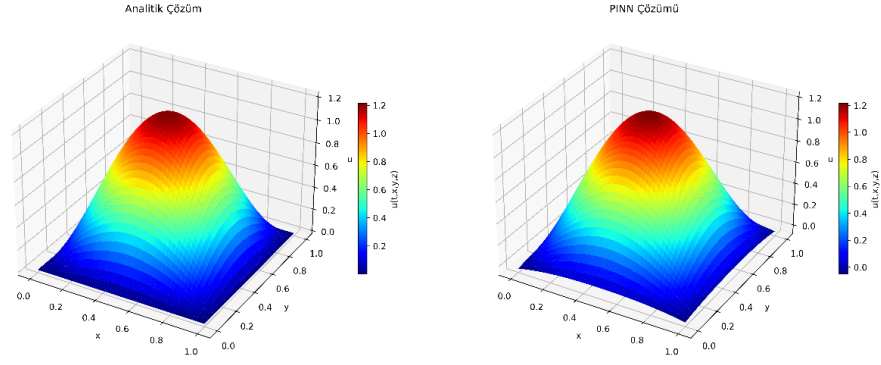
Eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun değişimi ise Şekil 4.62’te verilmiştir. Grafik, iki aşamalı eğitim stratejisinin etkili biçimde uygulandığını ve eğitim süreci sonunda kaybın belirgin şekilde azaldığını göstermektedir.

Modelin L2 hata normu yaklaşık olarak $4,212 \times 10^{-2}$, maksimum mutlak hata $1,86 \times 10^{-1}$ ve KOKH ise $2,483 \times 10^{-2}$ olarak hesaplanmıştır. Mutlak hatanın yüksek çıktığı $(t, x, y, z) = (1.000, 0.000, 0.526, 0.526)$ noktası referans alınarak diğer hata ve yüzey grafikleri çizdirilmiştir, Buna ek olarak Tablo 4.7’de zaman adımlarına göre hata değerleri gösterilmiştir.

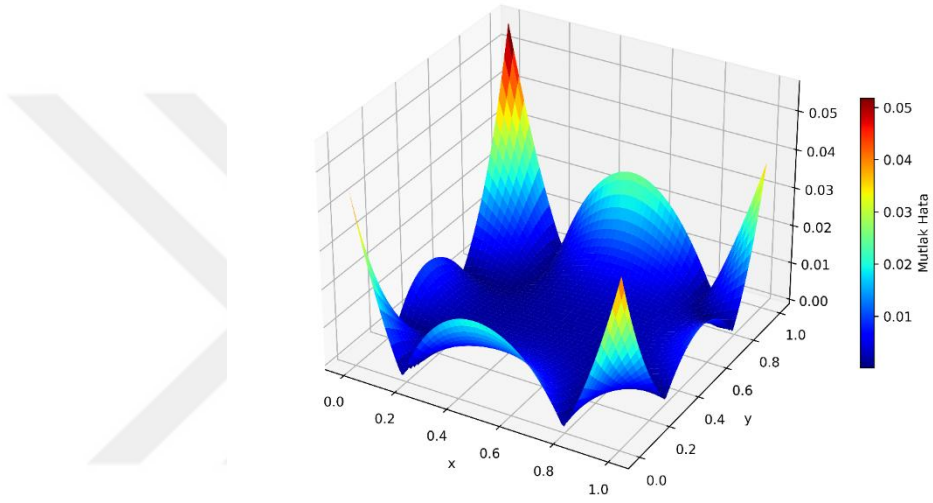
Tablo 4.7. Örnek 3 için zaman adımlarına göre hata değerleri.

	MMH	KOKH	L2 Görelî Hata
t = 0,1	$1,195 \times 10^{-1}$	$1,252 \times 10^{-2}$	$3,460 \times 10^{-1}$
t = 0,2	$1,211 \times 10^{-1}$	$1,307 \times 10^{-2}$	$3,269 \times 10^{-1}$
t = 0,3	$1,264 \times 10^{-1}$	$1,397 \times 10^{-2}$	$3,161 \times 10^{-1}$
t = 0,4	$1,285 \times 10^{-1}$	$1,512 \times 10^{-2}$	$3,096 \times 10^{-2}$
t = 0,5	$1,266 \times 10^{-1}$	$1,659 \times 10^{-2}$	$3,074 \times 10^{-2}$
t = 0,6	$1,202 \times 10^{-1}$	$1,875 \times 10^{-2}$	$3,143 \times 10^{-2}$
t = 0,7	$1,211 \times 10^{-1}$	$2,221 \times 10^{-2}$	$3,369 \times 10^{-2}$
t = 0,8	$1,348 \times 10^{-1}$	$2,781 \times 10^{-2}$	$3,818 \times 10^{-2}$
t = 0,9	$1,440 \times 10^{-1}$	$3,770 \times 10^{-2}$	$4,682 \times 10^{-2}$
t = 1	$1,866 \times 10^{-1}$	$5,708 \times 10^{-2}$	$6,614 \times 10^{-2}$

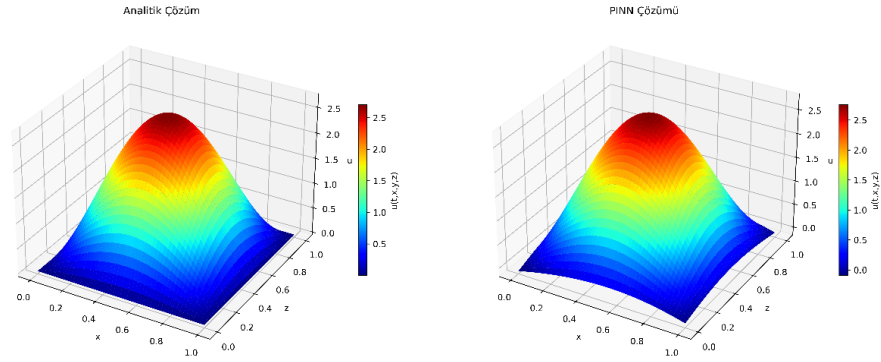
Çözüm süresi açısından değerlendirildiğinde, GPU ortamında yaklaşık 1 saat 49 dakika’da eğitimi tamamlanmıştır. CPU ortamında ise bu süre yaklaşık 26 saat sürmüştür. Bu sonuçlar, üç boyutlu problemlerde GPU kullanımının hesaplama süresi açısından önemli bir avantaj sağladığını açıkça ortaya koymaktadır.



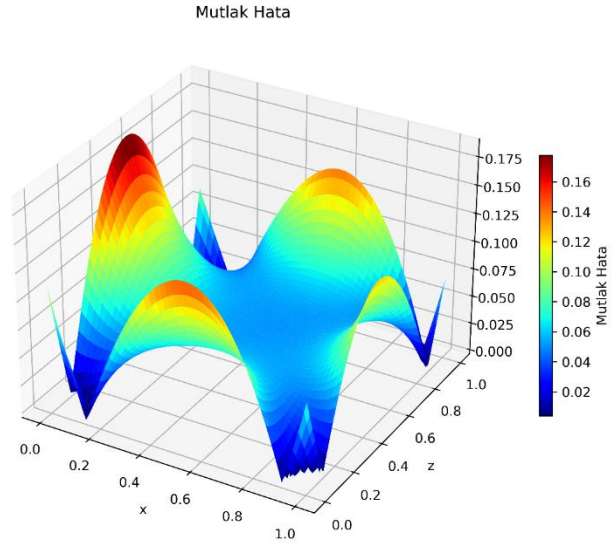
Şekil 4.57. Örnek 3 için $t = 0,2$ ve $y = 0,526$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



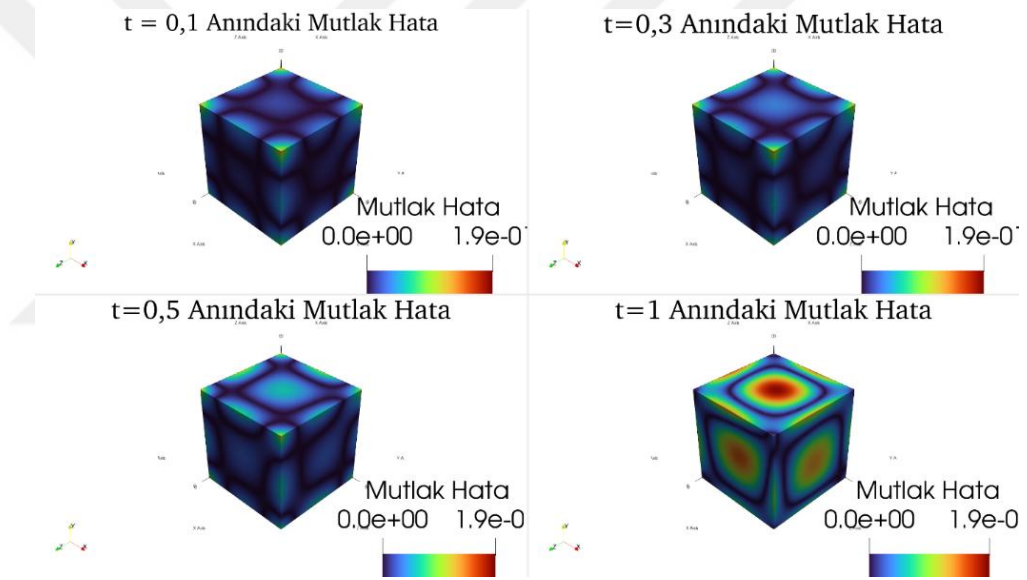
Şekil 4.58. Örnek 3 için $t = 0,2$ ve $y = 0,526$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



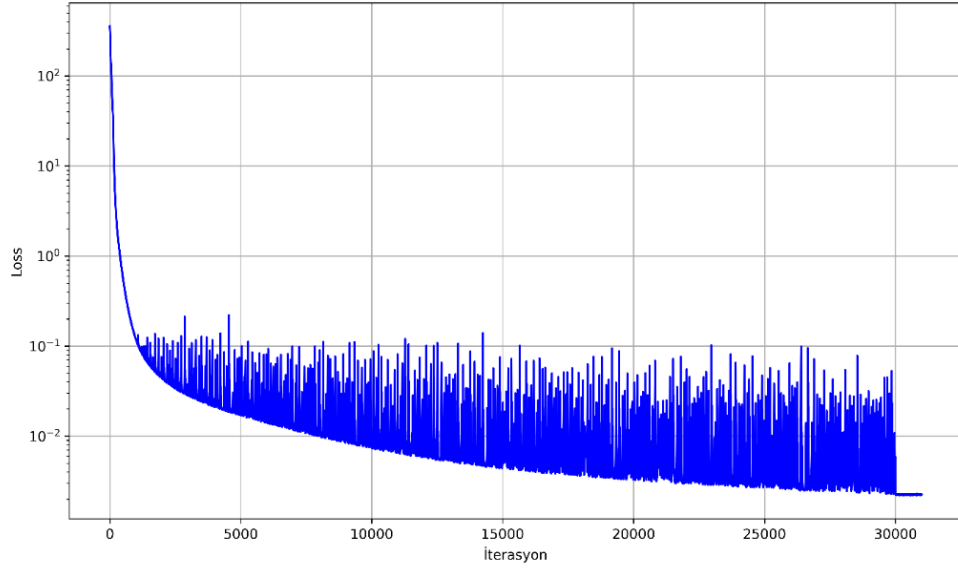
Şekil 4.59. Örnek 1 için $t = 1$ ve $y = 0,526$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



Şekil 4.60. Örnek 3 için $t = 1$ ve $y = 0,526$ kesitinde analitik çözüm ile FBSA karşılaştırması.



Şekil 4.61. Örnek 3 için çözümün $t = 0,1$ $0,3$ $0,5$ $1,0$ anlarında üç boyutlu mutlak hata dağılımlarının karşılaştırılması.



Şekil 4.62. Örnek 3 için eğitim süresince toplam kayıp fonksiyonunun değişimi.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Fizik Bilgili Sinir Ağı (FBSA) yöntemi kullanılarak doğrusal ve doğrusal olmayan Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon (KDR) denklemlerinin bir, iki ve üç boyutlu yapıdaki çözümleri başarıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın temel amacı, FBSA yaklaşımının farklı boyut ve karakterdeki fiziksel sistemlerde sağladığı çözüm doğruluğunu ve etkinliğini analiz etmektir.

Gerçekleştirilen sayısal deneyler ve analitik çözümlerle yapılan karşılaştırmalı hata analizleri sonucunda aşağıdaki temel bulgular elde edilmiştir:

- Bir boyutlu problemler: FBSA yöntemi yüksek doğrulukta ve kararlı çözümler üretmiştir. Elde edilen hata değerleri, literatürde kabul edilen seviyelerin altına düşmüş ve yöntem, bir boyutlu KDR denklemleri için güvenilir bir çözüm aracı olarak değerlendirilmiştir.
- İki boyutlu konveksiyon-baskın ve zaman bağımlı problemler: FBSA yöntemi, nümerik salınım içermeyen ve fiziksel olarak tutarlı çözümler sunmuştur. Konveksiyon baskın etkilerin hâkim olduğu rejimlerde de çözüm istikrarını korumuştur.
- Üç boyutlu problemler: Yöntem, yüksek boyutlu PINN uygulamaları arasında dikkat çekici bir başarı sergilemiştir. GPU tabanlı hızlandırma sayesinde çözüm süreleri önemli ölçüde azaltılmış ve yöntemin pratik uygulanabilirliği artırılmıştır.

Bu sonuçlar göstermektedir ki:

- FBSA yöntemi, klasik nümerik yöntemlere göre ağsız (mesh-free) ve yüksek boyutlu problemlere uygulanabilir bir alternatif olarak öne çıkmaktadır.
- Konveksiyon baskın ve zorlayıcı rejimlerde, FBSA yöntemi kararlı ve doğru çözümler sunmaktadır.

- GPU destekli optimizasyon stratejileri kullanılarak FBSA yönteminin pratik kullanım alanı genişletilebilmektedir.

Öneriler ve Gelecek Çalışma Konuları:

- FBSA yönteminin performansı, ileri optimizasyon algoritmaları (örneğin curriculum learning, adaptive optimizers) kullanılarak daha da geliştirilebilir.
- XPINN ve cPINN gibi alan bölmeli PINN mimarileri kullanılarak daha büyük ve karmaşık çözüm alanları etkin biçimde ele alınabilir.
- Konveksiyon-baskın ve yüksek Peclet sayılı problemlerde, stabilizasyon mekanizmalarının entegrasyonu ile FBSA performansı daha da artırılabilir.
- FBSA yöntemi, gerçek dünya mühendislik problemlerine (ör. akışkanlar mekaniği, biyomedikal sistemler, çevresel modelleme) uygulanarak pratik katkılar sağlayabilir.
- Özellikle zaman-bağımlı üç boyutlu problemlerde performans iyileştirme ve eğitim süresi optimizasyonuna yönelik çalışmaların yapılması önerilmektedir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması kapsamında FBSA yönteminin doğrusal ve doğrusal olmayan KDR denklemlerinin çözümünde etkili, esnek ve güçlü bir alternatif sunduğu gösterilmiştir. Çalışma, özellikle üç boyutlu KDR problemleri için PINN tabanlı çözüm sunması bakımından literatüre özgün bir katkı sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

Adıgüzel, Z. 2024. (1+2) boyutlu zamana bağlı konvektif katsayılı sönümlemeli dalga tür konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin sonlu farklar/sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Erzurum Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, 65 s

ALANBAY, Özlem. (2004). Kısmi difransiyel denklemlerin interpolasyon ve ekstrapolasyon yöntemi ile ayrıklaştırılması / Discretization of partial differential equations by interpolation and extrapolation. Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Türkiye, 71 s.

Asinari, P., Chiavazzo, E. ve Salomov, U. 2013. Modeling of gas diffusion and flow through catalyst layers for high temperature proton exchange membrane (HT-PEM) fuel cells at the pore scale. Computers & Mathematics with Applications, 67.

Baysal, O. 2012. Stabilized finite element methods for time dependent convection-diffusion equations (Zamana bağlı konveksiyon difüzyon denklemleri için kararlı sonlu elemanlar yöntemleri). İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü. ProQuest Dissertations & Theses, 28476466.

Brunton, S. L., Noack, B. R. ve Koumoutsakos, P. 2020. Machine learning for fluid mechanics. Annual Review of Fluid Mechanics, 52, 477-508.

Burgers, J. M. 1948. A mathematical model illustrating turbulence theory. In: Von Mises, R. ve Von Kármán, T. (eds), Advances in Applied Mechanics, 1, 171-199. Elsevier.

Cole, J. D. 1951. A quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quarterly of Applied Mathematics, 9(3), 225-236.

Crank, J. ve Nicolson, P. 1947. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 43(1), 50-67.

Çiftçi, Canan.2012. Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Türkiye.

Einstein, A. 1905. On the motion of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. Annalen der Physik, 17, 549-560.

Fick, A. 1855. Über Diffusion. Annalen der Physik und Chemie, 170, 59-86.

Fokker, A. D. 1914. On the average energy of molecules in a gas. Annalen der Physik, 43, 810-820.

Fourier, J. B. J. 1822. Théorie analytique de la chaleur. Cambridge University Press.

Frerichs-Mihov, D., Henning, L. ve John, V. 2024. On loss functionals for physics-informed neural networks for steady-state convection-dominated convection-diffusion problems. *Communications in Applied Mathematics and Computation*.

Godunov, S. K. 1959. A difference scheme for the numerical solution of hydrodynamic equations with discontinuities. *Mathematical Sbornik*, 47(89), 271–306.

Goodfellow, I., Bengio, Y. ve Courville, A. 2016. *Deep Learning*. MIT Press.

Gör, İ. 2020. Diferansiyel denklemlerin yapay sinir ağları ile nümerik çözümleri. Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı, Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Korhan Günel, 91 sayfa.

Guan, J. ve Elman, H. 2024. Transformed physics-informed neural networks for the convection-diffusion equation. *arXiv*.

Harten, A. 1983. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49(3), 357–393.

Hopf, E. 1950. The partial differential equation $u_t + u u_x = \mu x x$. *Comm. Pure Appl. Math.*, 3, 201-230.

Ioffe, S. ve Szegedy, C. 2015. Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift. *arXiv preprint arXiv:1502.03167*.

İnce, E. 2001. İkili sıvı sistemlerinin difüzyon katsayılarının tayini. *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 7(3), 409-413.

Jagtap, A. D., Kawaguchi, K. ve Karniadakis, G. E. 2020. Adaptive activation functions accelerate convergence in deep and physics-informed neural networks. *Journal of Computational Physics*, 404, 109136.

Karniadakis, G.E., Kevrekidis, I.G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S., Yang, L. 2021. Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics*, 3, 422–440.

Kingma, D. P. ve Ba, J. 2017. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv*.

Krishnapriyan, A. S., Gholami, A., Zhe, S., Kirby, R. M. ve Mahoney, M. W. 2021. Characterizing possible failure modes in physics-informed neural networks. *arXiv*.

Krizhevsky, A., Sutskever, I. ve Hinton, G. E. 2012. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. In: Pereira, F., Burges, C. J., Bottou, L. ve Weinberger, K. Q. (eds), *Advances in Neural Information Processing Systems*, 25. Curran Associates, Inc.

Kurt, A., Cenesiz, Y. ve Taşbozan, O. 2016. Exact solution for the conformable Burgers' equation by the Hopf-Cole transform. *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 13(2).

Lagaris, I. E., Likas, A. ve Fotiadis, D. I. 1998. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(5), 987-1000.

Liu, D. C. ve Nocedal, J. 1989. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical Programming*, 45(3), 503–528.

Moseley, B., Markham, A. ve Nissen-Meyer, T. 2023. Finite basis physics-informed neural networks (FBPINNs): A scalable domain decomposition approach for solving differential equations. *Advances in Computational Mathematics*, 49(4).

Navier, C.-L. 1823. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 6, 389–440.

Phan-Thien, N. ve Dissanayake, M. W. M. G. 1994. Neural-network-based approximations for solving partial differential equations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10, 195-201.

Planck, M. 1917. On the theory of heat radiation. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 324–341.

Raissi, M., Perdikaris, P. ve Karniadakis, G.E. 2019. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686-707.

Russell, S. J. ve Norvig, P. 2010. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. 3. baskı. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, ABD. 1152 s. ISBN: 978-0136042594.

Sakai, K. ve Kimura, I. 2005. A numerical scheme based on a solution of nonlinear advection–diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 173(1), 39-55.

Samuel, A. L. 1959. Some studies in machine learning using the game of checkers. *IBM Journal of Research and Development*, 3(3), 210-229.

Sanver, M. 1983. Yerkürenin ısı evrimi ve günümüzde yerinin sıcaklığı. *İstanbul Teknik Üniversitesi, Maden Fakültesi*, 798 s.

Schoder, S. ve Kraxberger, F. 2024. Feasibility study on solving the Helmholtz equation in 3D with PINNs. *arXiv*, 2403.06623.

Schoder, S. ve Kraxberger, F. 2024. Feasibility study on solving the Helmholtz equation in 3D with PINNs. *arXiv*.

Stokes, G. G. 1845. On the theories of the internal friction of fluids in motion. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, 287–305.

Şendur, A. 2012. Enriched finite elements method for convection-diffusion-reaction problems (Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Problemleri için

Zenginleştirilmiş Sonlu Elemanlar Yöntemi). İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü. ProQuest Dissertations & Theses, 29079059.

Topcu, E. ve Irk, D. 2018. A sectorial B-spline Galerkin method for the advection-diffusion equation. Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20(3), 105-116.

Tsega, E. G. 2024. İki boyutlu doğrusal olmayan zamana bağlı adveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerinin değişken katsayılarla sayısal çözümü. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 5541066, 12 sayfa.

Ünal, O. ve Akkaş, N. 2022. An Innovative Approach for Numerical Solution of the Unsteady Convection-Dominated Flow Problems. Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 12(2), 1069-1080.

Yılmaz, K. C. 2016. Finite element based stabilized methods for time dependent convection-diffusion equation and their analysis (Zamana bağlı konveksiyon-difüzyon denklemleri için sonlu elemanlar tabanlı karalı yöntemler ve bunların analizi). İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü. ProQuest Dissertations & Theses, 28478543.