

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-BOYUTLU KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Nuri Murat YAĞMURLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Eylül 2011

İNÖNÜ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

NUMERICAL SOLUTIONS OF 2- DIMENSIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH B-SPLINE FINITE ELEMENT METHODS

Nuri Murat YAĞMURLU

Ph. D. Thesis
MATHEMATICS DEPARTMENT

MALATYA
September 2011

Tezin Başlığı : 2-Boyutlu Kısmi Diferansiyel Denklemlerin
B-Spline Sonlu Eleman Yöntemleri İle Nümerik Çözümleri
Tezi Hazırlayan : Nuri Murat YAĞMURLU

Sınav Tarihi : 21.10.2011

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değeriendirilerek Matematik Anabilim Dalı'nda
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri (İlk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Prof. Dr. İdris DAĞ

Doç.Dr. Alaattin ESEN

Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ

Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “2-Boyutlu Kısmi Diferansiyel Denklemlerin B-spline Sonlu Eleman Yöntemleri İle Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Nuri Murat YAĞMURLU

ÖZET

Doktora Tezi

2-BOYUTLU KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Nuri Murat YAĞMURLU

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

225+xvi sayfa

2011

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Bu doktora tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlar ve 2–boyutlu kısmi diferansiyel denklemler hakkında genel bilgiler verildikten sonra, sonlu fark, varyasyonel ve sonlu eleman yöntemleri ile birlikte spline ve B-Spline baz fonksiyonları hakkında temel kavramlar verildi.

İkinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler bu tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır. İkinci bölümde, bu tez boyunca 2–boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılacak olan 2–boyutlu kübik, kuintik ve septik B-spline baz fonksiyonları modifiye edildi.

Üçüncü bölümde, sınır şartları ile verilen zamana bağlı olmayan 2–boyutlu Poisson denkleminin farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

Dördüncü bölümde, başlangıç ve sınır şartları ile verilen 2–boyutlu difüzyon denklemi farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu

eleman yöntemiyle çözüldü. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

Beşinci bölümde, başlangıç ve sınır şartları ile verilen 2–boyutlu kararsız (*unsteady*) Burgers denklemi farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle çözüldü. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

ANAHTAR KELİMELELER: 2–Boyutlu Kararsız Burgers Denklemi, 2–Boyutlu Difüzyon Denklemi, 2–Boyutlu Poisson Denklemi, Sonlu Eleman Yöntemleri, B-Spline Baz Fonksiyonları, Modifiye Edilmiş B-spline Baz Fonksiyonları.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF 2–DIMENSIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH B-SPLINE FINITE ELEMENT METHODS

Nuri Murat YAĞMURLU

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

225+xvi pages

2011

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

This Ph.D. thesis consists of five chapters. In the first chapter, after giving some general information about the fundamental concepts and 2–dimensional partial differential equations used in the thesis, fundamental concepts about the finite difference, variational and finite element methods together with spline and B-spline functions are presented.

The second, third, fourth and fifth chapters of the thesis make up its original parts. In the second chapter, 2–dimensional cubic, quintic and septic B-spline bases functions which will be used in the solution of 2–dimensional partial differential equations are modified.

In the third chapter, numerical solutions of time-independent 2–dimensional Poisson equation given with boundary conditions are obtained with Galerkin finite element method by using various degrees of B-spline functions. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, and they are given with their error norms L_2 and L_∞ in the form of tables.

In the fourth chapter, 2-dimensional diffusion equation given with initial and boundary conditions is solved by using Galerkin finite element method with various degrees of B-spline functions. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, and they are given with their error norms L_2 and L_∞ in the form of tables.

In the fifth chapter, 2-dimensional unsteady Burgers equation given with initial and boundary conditions is solved by using Galerkin finite element method with various degrees of B-spline functions. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, and they are given with their error norms L_2 and L_∞ in the form of tables.

KEY WORDS: 2-Dimensional Unsteady Burgers Equation, 2-Dimensional Diffusion Equation, 2-Dimensional Diffusion Equation, Finite Elements Method, B-Spline Functions, Modified B-Spline Functions.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Prof .Dr. Selçuk KUTLUAY'a, ayrıca doktora süresince üzerimde büyük emekleri olduğunu düşündüğüm başta bölüm başkanımız, Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e ve diğer bölüm hocalarıma, çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve görüşlerinden yararlandığım değerli hocam Doç. Dr. Alaattin ESEN'e, değerli arkadaşlarım Öğr.Grv.Dr.Yusuf UÇAR, S. Battal Gazi KARAKOÇ ve Dr.Mustafa ÖZDURAN'a, sabırla çalışmalarına destek olan aileme ve bu çalışmaya 2009/07 nolu proje ile katkıda bulunan İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
1 TEMEL KAVRAMLAR	3
1.1 Sonlu Fark Yöntemleri	3
1.2 Varyasyonel Yöntemler	5
1.2.1 Rayleigh-Ritz Yöntemi	6
1.2.2 Ağırlıklı Kalan Yöntemleri	7
1.3 Spline Fonksiyonlar	11
1.4 B-spline Fonksiyonlar	13
1.4.1 Lineer B-spline Fonksiyonlar	15
1.4.2 Kuadratik B-spline Fonksiyonlar	17
1.4.3 Kübik B-spline Fonksiyonlar	19
1.4.4 Kuartik B-spline Fonksiyonlar	21
1.4.5 Kuintik B-spline Fonksiyonlar	23
1.4.6 Sektik B-spline Fonksiyonlar	25
1.4.7 Septik B-spline Fonksiyonlar	27
1.5 Sonlu Eleman Yöntemleri	29
2 2-BOYUTLU B-SPLINE FONKSİYONLARIN MODİFİYE EDİLMESİ	34
2.1 Giriş	34
2.2 2-Boyutlu Kübik B-Spline Fonksiyonların Modifiye Edilmesi	35
2.2.1 1-Boyutlu Kübik B-spline Baz Fonksiyonları	35

2.2.2	2-Boyutlu Kübik B-spline Baz Fonksiyonları	37
2.2.3	Modifiye Edilmiş 2-Boyutlu Kübik B-spline Baz Fonksiyonları	38
2.3	2-Boyutlu Kuintik B-Spline Fonksiyonların Modifiye Edilmesi	43
2.3.1	1-Boyutlu Kuintik B-spline Baz Fonksiyonları	44
2.3.2	2-Boyutlu Kuintik B-spline Baz Fonksiyonları	45
2.3.3	Modifiye Edilmiş 2-Boyutlu Kuintik B-spline Baz Fonksiyonları	47
2.4	2-Boyutlu Septik B-Spline Fonksiyonların Modifiye Edilmesi	52
2.4.1	1-Boyutlu Septik B-spline Baz Fonksiyonları	52
2.4.2	2-Boyutlu Septik B-spline Baz Fonksiyonları	55
2.4.3	Modifiye Edilmiş 2-Boyutlu Septik B-spline Baz Fonksiyonları	55
3	2-BOYUTLU POISSON DENKLEMİNİN MODİFİYE EDİLMİŞ B-SPLINE GALERKİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ	62
3.1	Giriş	62
3.2	Model Problem	62
3.3	Model Problemin Modifiye Edilmiş 2-Boyutlu Kübik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü	64
3.4	Model Problemin Modifiye Edilmiş 2-Boyutlu Kuintik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü	84
3.5	Model Problemin Modifiye Edilmiş 2-Boyutlu Septik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü	105
4	2-BOYUTLU DİFÜZYON DENKLEMİNİN MODİFİYE EDİLMİŞ B-SPLINE GALERKİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ	130
4.1	Giriş	130

4.2	Model Problem	131
4.3	Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kübik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü	133
4.4	Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kuintik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü	152
5	2-BOYUTLU KARARSIZ BURGERS DENKLEMİNİN MODİFİYE EDİLMİŞ B-SPLINE GALERKİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ	175
5.1	Giriş	175
5.2	Model Problem	176
5.3	Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kübik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü	178
5.4	Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kuintik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü	204
	KAYNAKLAR	221
	ÖZGEÇMİŞ	225

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1.1	$Q_m(x)$ ve $Q'_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.	17
Tablo 1.2	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.	19
Tablo 1.3	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri. .	21
Tablo 1.4	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi_m^{(v)}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri	23
Tablo 1.5	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi_m^{(v)}(x)$ ve $\phi_m^{(v)}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.	26
Tablo 1.6	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi_m^{(v)}(x)$, $\phi_m^{(v)}(x)$ ve $\phi_m^{(v)}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.	28
Tablo 3.1	4-eleman için eleman konum tablosu.	65
Tablo 3.2	Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.	70
Tablo 3.3	16-eleman için eleman konum tablosu.	72
Tablo 3.4	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.	80
Tablo 3.5	100-eleman için eleman konum tablosu.	82
Tablo 3.6	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.	84
Tablo 3.7	Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için nümerik ve tam çözümleri.	85
Tablo 3.8	Kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle $4 \times 4 = 16$ eleman için elde edilen eleman parametreleri.	97
Tablo 3.9	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.	101
Tablo 3.10	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.	105
Tablo 3.11	Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için nümerik ve tam çözümleri.	105
Tablo 3.12	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.	124

Tablo 3.13	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.	126
Tablo 3.14	Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için nümerik ve tam çözümleri.	128
Tablo 3.15	Model problemin farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları ve eleman sayısı için L_2 ve L_∞ hata normları.	129
Tablo 4.1	Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	139
Tablo 4.2	Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	142
Tablo 4.3	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	146
Tablo 4.4	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	150
Tablo 4.5	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	154
Tablo 4.6	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	154
Tablo 4.7	Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	156
Tablo 4.8	Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	157
Tablo 4.9	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	162
Tablo 4.10	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	166
Tablo 4.11	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	170
Tablo 4.12	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	170
Tablo 4.13	Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	172
Tablo 4.14	Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	173

Tablo 4.15	Model problemin farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları ve eleman sayısı için L_2 ve L_∞ hata normları.	174
Tablo 5.1	Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	184
Tablo 5.2	Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	187
Tablo 5.3	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	192
Tablo 5.4	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	196
Tablo 5.5	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	200
Tablo 5.6	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	200
Tablo 5.7	Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	202
Tablo 5.8	Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	203
Tablo 5.9	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	208
Tablo 5.10	Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	212
Tablo 5.11	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	216
Tablo 5.12	Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	216
Tablo 5.13	Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.	218
Tablo 5.14	Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.	219
Tablo 5.15	Model problemin farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları ve eleman sayısı için L_2 ve L_∞ hata normları.	220

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1	Lineer B-spline Şekil Fonksiyonları.	16
Şekil 1.2	Kuadratik B-spline Şekil Fonksiyonları.	18
Şekil 1.3	Kübik B-spline Şekil Fonksiyonları.	20
Şekil 1.4	Kuartik B-spline Şekil Fonksiyonları.	22
Şekil 1.5	Kuintik B-spline Şekil Fonksiyonları.	24
Şekil 1.6	Sektik B-spline Şekil Fonksiyonları.	27
Şekil 1.7	Septik B-spline Şekil Fonksiyonları.	29
Şekil 2.1	Kübik B-spline (a) $B_i(x)$, $x_{i-2} \leq x \leq x_{i+2}$ ve (b) $B_j(y)$, $y_{j-2} \leq y \leq y_{j+2}$ baz fonksiyonları.	36
Şekil 2.2	Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten kübik B-spline baz fonksiyonları.	37
Şekil 2.3	x ve y yönlerinde ardışık 4'er elemanı örten 2-boyutlu kübik $B_{ij}(x, y)$ B-spline baz fonksiyonları.	38
Şekil 2.4	D bölgesi ile $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3 \cup \partial D_4$ sınırı.	39
Şekil 2.5	Kuintik B-spline (a) $B_i(x)$, $x_{i-3} \leq x \leq x_{i+3}$ ve (b) $B_j(y)$, $y_{j-3} \leq y \leq y_{j+3}$ baz fonksiyonları.	44
Şekil 2.6	Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten kintik B-spline baz fonksiyonları.	45
Şekil 2.7	x ve y yönlerinde ardışık 6'şar elemanı örten 2-boyutlu kuintik $B_{ij}(x, y)$ B-spline baz fonksiyonları.	46
Şekil 2.8	Septik B-spline (a) $B_i(x)$, $x_{i-4} \leq x \leq x_{i+4}$ ve (b) $B_j(y)$, $y_{j-4} \leq y \leq y_{j+4}$ baz fonksiyonları.	53
Şekil 2.9	Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten septik B-spline baz fonksiyonları.	54
Şekil 3.1	Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_0(x)$ ve (b) $\tilde{B}_0(y)$ kübik B-spline fonksiyonlar.	65
Şekil 3.2	Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_1(x)$ ve (b) $\tilde{B}_1(y)$ kübik B-spline fonksiyonlar.	66
Şekil 3.3	Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_2(x)$ ve (b) $\tilde{B}_2(y)$ kübik B-spline fonksiyonlar.	66
Şekil 3.4	Çözüm bölgesine düşen modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}(x)$ ve (b) $\tilde{B}(y)$ kübik B-spline fonksiyonların tümü.	67
Şekil 3.5	Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için nümerik çözümleri.	70
Şekil 3.6	Model problemin $2 \times 2 = 4$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri. .	71

Şekil 3.7 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	78
Şekil 3.7 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	79
Şekil 3.8 Model problemin $4 \times 4 = 16$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	81
Şekil 3.9 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için nümerik çözümleri.	83
Şekil 3.10 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_{-1}(x)$ ve (b) $\tilde{B}_{-1}(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.	86
Şekil 3.11 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_0(x)$ ve (b) $\tilde{B}_0(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.	87
Şekil 3.12 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_1(x)$ ve (b) $\tilde{B}_1(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.	87
Şekil 3.13 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_2(x)$ ve (b) $\tilde{B}_2(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.	88
Şekil 3.14 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_3(x)$ ve (b) $\tilde{B}_3(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.	88
Şekil 3.15 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_4(x)$ ve (b) $\tilde{B}_4(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.	89
Şekil 3.16 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_5(x)$ ve (b) $\tilde{B}_5(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.	89
Şekil 3.17 Çözüm bölgesine düşen modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}(x)$ ve (b) $\tilde{B}(y)$ kuintik B-spline fonksiyonların tümü.	90
Şekil 3.18 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	99
Şekil 3.18 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	100
Şekil 3.19 Model problemin $4 \times 4 = 16$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	102
Şekil 3.20 Model problemin $10 \times 10 = 100$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	104
Şekil 3.21 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_{-2}(x)$ ve (b) $\tilde{B}_{-2}(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	106
Şekil 3.22 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_{-1}(x)$ ve (b) $\tilde{B}_{-1}(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	107
Şekil 3.23 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_0(x)$ ve (b) $\tilde{B}_0(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	107
Şekil 3.24 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_1(x)$ ve (b) $\tilde{B}_1(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	108
Şekil 3.25 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_2(x)$ ve (b) $\tilde{B}_2(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	108
Şekil 3.26 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_3(x)$ ve (b) $\tilde{B}_3(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	109
Şekil 3.27 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_4(x)$ ve (b) $\tilde{B}_4(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	109
Şekil 3.28 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_5(x)$ ve (b) $\tilde{B}_5(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	110
Şekil 3.29 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_6(x)$ ve (b) $\tilde{B}_6(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	110
Şekil 3.30 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_7(x)$ ve (b) $\tilde{B}_7(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	111
Şekil 3.31 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_8(x)$ ve (b) $\tilde{B}_8(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	111
Şekil 3.32 Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_9(x)$ ve (b) $\tilde{B}_9(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.	112
Şekil 3.33 Çözüm bölgesine düşen modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}(x)$ ve (b) $\tilde{B}(y)$ septik B-spline fonksiyonların tümü.	112

Şekil 3.34 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	122
Şekil 3.34 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	123
Şekil 3.35 Model problemin $4 \times 4 = 16$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	125
Şekil 3.36 Model problemin $4 \times 4 = 16$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	127
Şekil 4.1 Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri.	137
Şekil 4.2 Model problemin $2 \times 2 = 4$ için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	138
Şekil 4.3 Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri.	140
Şekil 4.4 Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	141
Şekil 4.5 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	144
Şekil 4.5 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	145
Şekil 4.6 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	147
Şekil 4.7 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	148
Şekil 4.7 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	149
Şekil 4.8 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	151
Şekil 4.9 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	153
Şekil 4.10 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	155
Şekil 4.11 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	160
Şekil 4.11 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	161
Şekil 4.12 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	163

Şekil 4.13 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	164
Şekil 4.13 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	165
Şekil 4.14 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	167
Şekil 4.15 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	169
Şekil 4.16 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	171
Şekil 5.1 Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri.	184
Şekil 5.2 Model problemin $2 \times 2 = 4$ için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	185
Şekil 5.3 Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik çözümleri.	187
Şekil 5.4 Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	188
Şekil 5.5 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	190
Şekil 5.5 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	191
Şekil 5.6 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	193
Şekil 5.7 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	194
Şekil 5.7 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	195
Şekil 5.8 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	197
Şekil 5.9 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	199
Şekil 5.10 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t =$ 0.05 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	201
Şekil 5.11 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	206

Şekil 5.11 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	207
Şekil 5.12 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	209
Şekil 5.13 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).	210
Şekil 5.13 (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).	211
Şekil 5.14 Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	213
Şekil 5.15 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	215
Şekil 5.16 Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.	217

GİRİŞ

Mühendislik ve fizikte karşılaşılan birçok fiziksel olay adi veya kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla modellenir ve bu denklemler çoğunlukla klasik analitik metotlarla çözülemeyecek kadar karmaşık bir yapıda karşımıza çıkar [1]. Fiziksel olayları modelleyen diferansiyel denklemlerin genellikle tam çözümleri ile ilgilenilir. Ancak fiziksel olayların içerdiği komplike geometrik yapılar ve malzeme özellikleri nedeniyle diferansiyel denklemlerin tam çözümlerine ulaşmak zordur veya çoğu zaman mümkün değildir [2, 3]. Bu nedenle yaklaşık çözümler için sonlu fark, varyasyonel ve sonlu eleman yöntemleri gibi sayısal yöntemlere başvurulur. Bu yöntemlerden sonlu eleman yönteminde verilen bir bölge sonlu elemanlar diye adlandırılan alt bölgelere ayrıldığı ve problemin yaklaşık çözümü bu elemanların her biri üzerinde geliştirildiği için karmaşık geometrilerin, farklı malzeme özelliklerinin ve yerel etkilerin tam olarak temsil edilmesi sağlandığından sonlu elemanlar yöntemi son zamanlarda daha fazla öne çıkmış ve günümüzde elektromanyetik, akışkanlar mekaniği ve termal analizi gibi diğer bilim dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır [4, 5].

2–boyutlu problemlerin sonlu eleman analizi bir boyutlu problemlerin analizinde kullanılan temel adımları içerir. Ancak 2–boyutlu problemler geometrik olarak komplike bölgeler üzerinde kısmi diferansiyel denklemler olarak tanımlandıklarından dolayı analizleri daha zordur. 2–boyutlu problemlerin bir D bölgesinin Γ sınırı genellikle bir eğridir. Bundan dolayı sonlu elemanlar, bölge üzerinde çözümün sağlanmasına ek olarak verilen 2–boyutlu bölgeye yaklaşımı sağlayan basit 2–boyutlu geometrik şekiller olarak seçilir. Yani 2–boyutlu problemlerde sadece bir bölge üzerinde verilen probleme yaklaşık çözüm aranmaz aynı zamanda bölgeye de uygun sonlu elemanlar ağı ile yaklaşım yapılır. Bundan dolayı 2–boyutlu problemlerin sonlu eleman analizinde çözüme yaklaşımdan kaynaklanan hataların yanında bölgeye yaklaşımdan da kaynaklanan hatalar ortaya çıkar. Sonlu elemanlar kümesi genellikle üçgen, kare, dikdörtgen veya dörtgen gibi basit 2–boyutlu elemanlardan oluşur. Bu elemanlar eleman sınırları boyunca düğüm noktalarında birbirlerine bağlanır. Bölgeleri bu şekilde, düzensiz geometrili sonlu elemanlar kümesi ile temsil edebilmek sonlu elemanlar yöntemini mühendisliğin farklı alanlarında ortaya çıkan sınır, başlangıç ve özdeğer problemlerinin çözümünde değerli ve pratik bir araç haline getirmiştir [6, 7, 8].

2–boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri farklı teknik ve yöntemlerle çeşitli araştırmacılar tarafından bulunmuştur. L.R.T. Gardner ve G.A.Gardner

[9] manyeto-hidro dinamik düzlem akışını 2-boyutlu kübik B-spline sonlu eleman metodunu kullanarak, B.S.Moon ve D.S.Yoo [10] difüzyon denklemini kübik spline fonksiyonlar kullanarak Galerkin yöntemiyle, Samir F.Radwan [11] 2-boyutlu Burger denklemini sonlu fark metodunu kullanarak, Jinming Wu ve Xiaolei Zhang [12] da 2-boyutlu model denklemleri kuartik B-spline baz fonksiyonları kullanarak çözmüşlerdir. Bu tezde,

2-Boyutlu Poisson:

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$u = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D$$

2-Boyutlu Difüzyon:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (x, y) \in D, \quad t > 0,$$

$$u = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D$$

2-Boyutlu Kararsız Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0,$$

$$u = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D$$

denklemlerinin modifiye edilmiş B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle yaklaşık çözümleri elde edilecektir.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Mühendis ve bilim adamlarının yaptığı en önemli şeylerden biri fiziksel olayları modellemektir. Uzaysal, biyolojik, kimyasal, jeolojik veya mekanik olan hemen hemen her olay fizik veya diğer bilim dallarının kuralları yardımı ile cebirsel, diferansiyel ve/veya integral denklemleri ile ifade edilirler. Bu olayların veya işlemlerin analitik tanımlamaları matematiksel model diye adlandırılır.

Doğadaki fiziksel olayların büyük bir kısmının matematiksel modelleri elde edildiğinde, bunlar çoğunlukla karşımıza lineer olmayan diferansiyel denklemler olarak çıkar. Diferansiyel denklemler genellikle sınır şartları ile birlikte verilir. Diferansiyel denklemle birlikte verilen sınır şartları özelliklerine göre doğal (*natural*) ve/veya temel (*essential*) olarak sınıflandırılır. Özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümünü bulmak bilim adamları için önemli bir problem olagelmıştır. Çünkü bu tip diferansiyel denklemlerin tam çözümünü bulmak bir çok durumda ya oldukça zordur ya da imkansızdır. Bundan dolayı, son yıllarda tam çözüm yerine geçebilecek yaklaşık çözümlerin bulunmasına imkân veren sayısal yöntemler mevcuttur. Son yıllarda sayısal yöntemlerden sonlu fark yöntemi, varyasyonel yöntemler ve özellikle de sonlu eleman yöntemi daha sıklıkla kullanılır hale gelmiştir [2, 3, 6].

1.1 Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu fark yöntemleri literatürde lineer ve lineer olmayan, farklı başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen bir çok diferansiyel denklemin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir sonlu fark yönteminin bir kısmi diferansiyel denkleme uygulanmasında sırasıyla aşağıdaki yol izlenir:

1. Problemin çözüm bölgesi geometrik şekiller içeren eşit veya farklı boyutta kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü herbir kafesin düğüm (*nodal*) noktaları üzerinden hesaplanır.

2. Diferansiyel denklemdeki türevler yerine Taylor serisi yardımı ile elde edilen ileri, geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece başlangıçta verilen

diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir.

3. Elde edilen fark denkleminde ortaya çıkabilecek çözüm bölgesi içine düşmeyen hayali düğüm noktaları üzerindeki hayali değerleri yok etmek için problemin verilen sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece bilinmeyen sayısı kadar cebirsel denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımı ile kolayca çözülür.

Verilen bir diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için çeşitli yöntemler kullanılır. Bunların başlıcaları klasik sonlu fark yaklaşımları olarak bilinen

- Açık (*Explicit*)
- Kapalı (*Implicit*)
- Crank-Nicolson

yöntemleridir. Bu yöntemler ağırlıklı ortalama yaklaşımı şeklinde ifade edilebilir.

Bunun için $0 \leq x \leq l$, $t > 0$, $\Delta x = h$, $\Delta t = k$ olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

parabolik denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin ağırlıklı averaj yaklaşımı, $\theta \in [0, 1]$ ve $r = k/h^2$ olmak üzere, yukarıdaki parabolik denklemde $\partial U/\partial t$ terimi yerine

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı ve $\partial^2 U/\partial x^2$ terimi yerine

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{1}{h^2} [\theta(U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) + (1 - \theta)(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n)]$$

yaklaşımı yazılırsa, $m = 1(1)N - 1$ ve $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$-\theta r U_{m-1}^{n+1} + (1 + 2\theta r) U_m^{n+1} - \theta r U_{m+1}^{n+1} = r(1 - \theta) U_{m-1}^n + (1 - 2r(1 - \theta)) U_m^n + r(1 - \theta) U_{m+1}^n$$

olur. Bu eşitlikte $\theta = 0$ ise yönteme açık (*explicit*), $\theta = 1/2$ ise Crank-Nicolson ve $\theta = 1$ ise kapalı (*implicit*) sonlu fark yöntemi denir.

Genel olarak sonlu fark yaklaşımındaki temel fikir, istenilen $U(x, t)$ değerleri düğüm noktaları üzerinde olacak şekilde problemin çözüm bölgesinin N tane alt aralığa bölünmesidir. Burada her bir $\Delta t \equiv k$ zaman adımına karşılık genellikle uzunlukları $\Delta x \equiv h = 1/N$ olacak şekilde eşit alınan mesafeler göz önüne alınır.

1.2 Varyasyonel Yöntemler

Varyasyonel yöntemlerde yaklaşık çözüm, diferansiyel denkleme karşılık gelen ağırlıklı integral ifadesinden veya zayıf formundan ya da diferansiyel denkleme karşılık gelen kuadratik fonksiyonelin minimum yapılmasından bulunur. Bu yöntemlerin başlıcaları Rayleigh-Ritz ve ağırlıklı-kalan yöntemleri (Galerkin, Petrov-Galerkin, En Küçük Kareler, kollokasyon ve subdomain yöntemleri) dir. Bu yöntemlerde bir problemin yaklaşık çözümü, ϕ_j uygun yaklaşım fonksiyonları ve c_j belirlenecek olan parametreler olmak üzere, genellikle $\sum c_j \phi_j + \phi_0$ formunda aranır. c_j belirsiz parametreleri diferansiyel denklemin ağırlıklı-integral formunu veya zayıf formunu sağlayacak şekilde ya da ele alınan denkleme karşılık gelen kuadratik fonksiyoneli minimum yapacak şekilde bulunur. $\sum c_j \phi_j + \phi_0$ yaklaşımının verilen diferansiyel denklemde doğrudan yerine yazılması her zaman c_j belirsiz parametrelerinin bulunması için gerekli ve yeterli sayıda lineer bağımsız denklem sistemi ile sonuçlanamayabilir. Bu nedenle ağırlıklı integral formuna gerek duyulur. Bir diferansiyel denklemin ağırlıklı integral formu, $\sum c_j \phi_j + \phi_0$ yaklaşımının diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla elde edilen kalanın Ψ ağırlık fonksiyonunu ile çarpımının bölge üzerinden integrali olarak ifade edilir.

Ağırlıklı integral formunda, u tam çözümüne karşılık gelen u_N yaklaşımındaki ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarının orijinal diferansiyel denklemin mertebesi kadar türevlenebilir olması ve verilen tüm sınır şartlarını sağlaması gerekir. Bu nedenle ağırlıklı integral formu verilen diferansiyel denklemin herhangi bir sınır şartını içermez. Ağırlıklı integral formunda Ψ ağırlık fonksiyonunun N tane farklı seçimiyle N bilinmeyenli N tane cebirsel denklemden oluşan bir denklem sistemi bulunur ve buradan c_j bilinmeyenleri kolayca tek türlü elde edilir.

Bir diferansiyel denklemin ağırlıklı integral formuna kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa denklemin zayıf formu elde edilir. Kısmi integrasyon alma işlemi esnasında diferansiyel denklemin mertebesi, u_N yaklaşımı ile Ψ ağırlık fonksiyonu üzerine dağılacığından bağımlı değişkenin daha zayıf (yani az) sürekliliği gerekir. Ayrıca, zayıf form verilen problemin doğal sınır şartlarını içerdiğinden u_N

yaklaşımının sadece temel sınır şartlarını sağlaması istenir. Varyasyonel yöntemler birbirinden Ψ ağırlık fonksiyonu ve ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarının seçimi bakımından ayrılırlar. Yaygın olarak kullanılan bazı varyasyonel yöntemler aşağıda kısaca açıklanmıştır [6].

1.2.1 Rayleigh-Ritz Yöntemi

$A(u) = f$ operatör denkleminin zayıf formu $B(\Psi, u) = l(\Psi)$ biçimde ifade edilebilir. Bu biçimde ifade edilen zayıf form iki tip ifade içerir: Hem bağımlı değişken u 'yu hem de ağırlık fonksiyonu Ψ 'yi içeren $B(\Psi, u)$ ifadesi ve sadece ağırlık fonksiyonu Ψ 'yi içeren $l(\Psi)$ ifadesi. $B(\cdot, \cdot)$ ifadesi u ve Ψ 'ye göre lineer ve simetrik ve l lineer ise $A(u) = f$ operatör denkleminin yaklaşık çözümünü bulma problemi $I(u) = \frac{1}{2}B(u, u) - l(u)$ kuadratik fonksiyonelinin minimumunu bulma problemine denk olur. Bu yöntemde, yaklaşımın c_j katsayıları verilen problemin zayıf formu kullanılarak belirlenir ve ağırlık fonksiyonları yaklaşım fonksiyonları ile eşit seçilir, yani $\Psi = \phi_j$ olarak alınır. Bu yöntemde u tam çözümüne bir yaklaşım

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$$

biçiminde sonlu bir seri şeklinde aranır. Burada c_j ler belirlenecek olan sabitler olup Ritz katsayıları olarak adlandırılır. Denklemin zayıf formunda ağırlık fonksiyonları yerine yaklaşım fonksiyonları yazılırsa $c_j, (j = 1(1)N)$ bilinmeyenli N -adet lineer bağımsız cebirsel denklem sistemi elde edilir. Zayıf form, problemin doğal sınır şartlarını içerdiğinden u_N yaklaşımının problemin temel sınır şartlarını sağlaması gerekir. Bu nedenle ϕ_0 ve ϕ_j yaklaşım fonksiyonları üzerine bir takım şartlar yüklenir. Bu şartlar; $i, j = 1(1)N$ olmak üzere,

1. (a) ϕ_j yaklaşım fonksiyonları $B(\phi_i, \phi_j)$ ifadesi tanımlı ve sıfır olmayacak şekilde seçilmelidir. Yani, ϕ_j 'ler $B(\phi_i, \phi_j)$ ifadelerinin hesaplanmasında gerektiği kadar yeterince türevlenebilir ve integrallenebilir olmalıdır.

(b) ϕ_j yaklaşım fonksiyonları verilen problemin temel sınır şartlarının homojen kısmını sağlamalıdır.

2. Herhangi bir N değeri için, $\{\phi_j\}$ kümesi lineer bağımsız olmalıdır.

3. $\{\phi_j\}$ kümesi tam olmalıdır. Şöyleki ϕ_j yaklaşım fonksiyonları cebirsel polinomlar ise tamlik $\{\phi_j\}$ kümesinin izin verilen en düşük dereceden istenilen en yüksek dereceye kadar tüm terimleri içermesini gerektirir.

4. ϕ_0 üzerindeki tek kısıtlama verilen temel sınır şartlarını sağlamasıdır. Eğer temel sınır şartlarının tümü homojen ise $\phi_0 = 0$ olur. Aynı zamanda tamlık, ϕ_0 'ın verilen temel sınır şartlarını sağlayan en düşük dereceden bir fonksiyon olarak belirlenmesini gerektirir [6].

1.2.2 Ağırlıklı Kalan Yöntemleri

Ağırlıklı kalan yöntemleri yaklaşık çözümü bulurken, verilen denkleme karşılık gelen ağırlıklı integral formunu kullanır. Her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabileceğinden bu yöntemler Rayleigh-Ritz yönteminden daha geniş uygulama alanlarına sahiptir. Ağırlıklı integral formu sadece verilen diferansiyel denkleme denk olup herhangi bir sınır şartını içermez.

Bu yöntemleri ifade etmek için D bölgesinde

$$A(u) = f \quad (1.2.2.1)$$

olarak verilen operatör denklemini gözönüne alalım. Burada A lineer veya lineer olmayan bir operatör, u bağımlı değişken ve f ise bağımsız değişkenin bir fonksiyonudur. (1.2.2.1)'in u çözümüne bir yaklaşım

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (1.2.2.2)$$

olsun. u_N yaklaşık çözümü (1.2.2.1) denkleminde yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon genellikle f 'ye eşit değildir. $A(u_N)$ ile f arasındaki

$$R \equiv A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (1.2.2.3)$$

farka yaklaşımın kalanı (*rezidüsü*) denir. Burada dikkat edilmelidir ki R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri

$$\int_D \Psi_i(\mathbf{x}) R(\mathbf{x}, c_j) d\mathbf{x} = 0 \quad (i = 1(1)N) \quad (1.2.2.4)$$

ağırlıklı integral formundaki R kalanını sıfır yapacak şekilde aranır. Burada D , n -boyutlu bir bölge ve Ψ_i 'ler ise ağırlık fonksiyonlarıdır. (1.2.2.4) integralinden elde edilecek denklem sisteminin bir tek çözümünün olması için Ψ_i ağırlık fonksiyonlarının kümesi lineer bağımsız olmalıdır [6]. Ağırlıklı kalan yöntemlerinin başlıcaları Galerkin, Petrov-Galerkin, Kollokasyon, En Küçük Kareler ve Subdomain yöntemleridir.

Galerkin Yöntemi

Galerkin yönteminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları, ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarıyla aynı seçilir. Yani $\Psi_i = \phi_j$ alınır. Böylece (1.2.2.4) yaklaşımı

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i$$

olarak elde edilir. Burada A_{ij} ve F_i

$$A_{ij} = \int_D \phi_i A(\phi_j) dx dy,$$

$$F_i = \int_D \phi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

olup c_j parametreleri

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i$$

cebirsel denklem sisteminden elde edilir [6].

Petrov-Galerkin Yöntemi

$\Psi_i \neq \phi_j$ olması durumunda ağırlıklı kalan yöntemi Petrov-Galerkin yöntemi olarak adlandırılır. Böylece (1.2.2.4) yaklaşımı, A lineer bir operatör olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_D \Psi_i A(\phi_j) dx dy \right] c_j = \int_D \Psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i$$

olarak elde edilir. Burada $[A_{ij}]$ simetrik olmayan bir matris, A_{ij} ve F_i

$$A_{ij} = \int_D \Psi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji},$$

$$F_i = \int_D \Psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

olup c_j parametreleri

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i$$

cebirsel denklem sisteminden elde edilir [6].

En Küçük Kareler Yöntemi

Bu yöntemde c_j parametreleri, kalanın karesinin integrali minimum olacak şekilde belirlenir. Yani,

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_D R^2(\mathbf{x}, c_j) d\mathbf{x} = 0$$

veya

$$\int_D \frac{\partial R}{\partial c_i} R(\mathbf{x}, c_j) d\mathbf{x} = 0 \quad (1.2.2.5)$$

olmalıdır. (1.2.2.5) denklemi ile $\int_D \Psi_i(\mathbf{x}) R(\mathbf{x}, c_j) d\mathbf{x} = 0$, ($i = 1(1)N$) denklemi karşılaştırıldığında $\Psi_i = \partial R / \partial c_i$ olarak göz önüne alınabilir. A bir lineer operatör ise $\Psi_i = A(\phi_i)$ olur ve bu durumda (1.2.2.5) denklemi

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_D A(\phi_i) A(\phi_j) dx dy \right] c_j = \int_D A(\phi_i) [F - A(\phi_0)] dx dy$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$A_{ij} = \int_D A(\phi_i) A(\phi_j) dx dy,$$

$$F_i = \int_D A(\phi_i) [F - A(\phi_0)] dx dy$$

dır.

Kollokasyon Yöntemi

$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$, ($i = 1(1)n$)'ler D bölgesinde seçilmiş n adet nokta olsun. Kollokasyon yönteminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ kronoker delta ile gösterilir ve

$$\int_D \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dx dy = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada $\mathbf{x}_i$ lere kollokasyon noktaları denir ve keyfi olarak seçilir. (1.2.2.4) denkleminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları yerine $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ yazılırsa

$$\int_D \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) R(\mathbf{x}, c_j) dx dy = 0$$

veya

$$R(\mathbf{x}_i, c_j) = 0 \quad (i = 1(1)N) \quad (1.2.2.6)$$

elde edilir. (1.2.2.6) denklemi n adet kollokasyon noktalarında hesaplanırsa n –bilinmeyenli n –tane denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. c_j katsayıları bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden kolayca bulunur. $\mathbf{x}_i$ noktalarının seçimi iyi şartlı denklem sisteminin ve sonuçta iyi bir yaklaşık çözümün elde edilmesinde önemlidir [4, 6].

Subdomain Yöntemi

Subdomain yönteminde belirli alt aralıklarda R kalanının integrali sıfır olacak şekilde bilinmeyen c_j parametreleri bulunur. c_j 'lerin bulunabilmesi için alt aralıkların sayısı, c_j parametrelerinin sayısına eşit olacak şekilde belirlenmelidir [2]. Bu yöntemde (1.2.2.4) denkleminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları, $i=-1(1)N-1$ olmak üzere,

$$\Psi_i = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak seçilir ve elde edilen denklem sistemi çözülürse bilinmeyen c_j parametreleri kolayca elde edilir.

Yukarıda verilen varyasyonel yöntemlerin her biri bir problemin yaklaşık çözümünün bulunmasında kullanılan oldukça kolay ve hızlı birer yöntemdir. Bu yöntemlerin en büyük dezavantajı, yaklaşım fonksiyonlarının belirlenmesinde karşılaşılan zorluktur. Şöyleki bu fonksiyonların sağlaması gereken bir takım şartlar vardır. Bundan başka bu fonksiyonların nasıl üretileceği hakkında özel bir prosedür mevcut değildir. Hatta çözüm bölgesi düzgün olmadığında ve/veya sınır şartları komplike olduğunda bu belirleme işlemi daha zorlaşır ve hatta bazen imkansız olur. Aslında hemen hemen bütün geometrik bölge üzerinde problemin sınır şartlarına değil sadece çözülecek diferansiyel denklemin kendisine bağlı olan yaklaşım fonksiyonlarını sistematik olarak üretebilecek bir yol bulanabilirse, varyasyonel yöntemler yaklaşık çözümleri bulmada daha etkili bir yöntem olurlar. Bu özellik aynı zamanda belirli bir sınıf problem için genel amaçlı bir bilgisayar programının geliştirilmesine de izin verir. Bütün bölgenin basit geometrik şekillerin toplamı olarak temsil edilmesi ve her bir basit geometrik şekil üzerinde yaklaşım fonksiyonlarının elde edilmesi yaklaşık çözümün bulunmasını kolaylaştıracaktır. İşte sonlu eleman yöntemi bu fikirler üzerine dayanmaktadır ve varyasyonel yöntemlerin

parçalı olarak uygulanmasıdır [6]. Probleme ve sınır şartlarına bağlı olmayan sistematik olarak üretilen fonksiyonlar ve ardından da bu fonksiyonları parçalı olarak uygulayan sonlu eleman yöntemi aşağıda verilecektir.

1.3 Spline Fonksiyonlar

Bu kısımda, daha sonraki kısımlarda kullanılacak spline fonksiyonlar hakkında bazı tanım ve kavramlar verilecektir.

Sayısal yöntemler fizik ve mühendislikte olduğu gibi matematiğin bir çok alanında da yaygın olarak kullanılan çözüm teknikleridir. İki tip yaklaşım problemi vardır: Bunlardan birisi verilen verilere bağlı olarak bilinmeyen fonksiyonları yaklaşık olarak bulmak için kullanılır. Bu problemler veri uydurma problemi olarak adlandırılır. Diğeri ise, bir operatör denklemleri ile temsil edilen çeşitli fiziksel problemlerin matematiksel modellerinden ortaya çıkar. Bu tür problemler adi ve kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerini, integro-diferansiyel denklemlerini, özdeğer-özvektör problemlerini ve benzerlerini içermektedir. Her iki durumda da, en iyi çözümü bulmak için uygun yaklaşım fonksiyonlarının ve etkin bir yöntemin belirlenmesi oldukça önemlidir.

Bir çok sayısal analizci yaklaşım fonksiyonları olarak polinomları kullanmıştır. Polinomları kullanarak problemlere iyi bir yaklaşım elde etmek için, çok sayıda nokta kullanmak gerekebilir. Fakat, yüksek dereceden polinomlar düzgün ve istenilen yaklaşımı temsil etmeyen yüksek salınımlı davranışa sahiptir. Bunun yanında veri (veya fonksiyon) sayısı fazla olduğunda, hesaplama problemleri de ortaya çıkabilir. Parçalı polinomlar kullanılarak bu güçlüklerin üstesinden gelinebilir. Parçalı polinom fonksiyonların bölge içindeki düğüm noktalarında süreksizlikleri hariç, yaklaşım fonksiyonları olarak kullanılmaları uygundur. Bölge içindeki sürekliliği sağlamak için, spline fonksiyonlar diye adlandırılan özel bir parçalı polinom sınıfı kullanılır.

Spline fonksiyonlar terminolojisi ilk defa Schoenberg tarafından ortaya atıldı [7]. Aslında, bundan önce de bu isim kullanılmadan spline fonksiyonlarla ilgili bir takım çalışmalar vardı. Spline fonksiyonlar teorisi 1960'lı yıllara kadar yavaş bir gelişim göstermiş, bu tarihten sonra onlara olan ilgi artmıştır. Dijital bilgisayarlardaki gelişmeler, depolanması, işlenmesi ve kullanması kolay olan spline fonksiyonların önemini bir kat daha arttırmıştır. Spline fonksiyonlar özellikle veri uydurma, fonksiyon yaklaşımı, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde yaygın olarak

kullanılmaktadır.

Schoenberg spline teminolojisini *spline* diye adlandırılan mekanik bir alete benzerliği yüzünden kullanmıştır. Bir *spline* belirlenen noktalardan geçmeye zorlanan, bazı ağırlıkların üzerine bağlandığı esnek malzemeden yapılan bir şerit veya ince çubuktur. Bu alet gerekli olan noktalarda ağırlıkları ayarlayarak düzgün bir eğri çizmek için teknik ressamlar tarafından kullanılır. *Splinenin* böyle bir eğrisi spline fonksiyonlar tarafından tanımlanan şekle benzerdir [13].

Bir spline fonksiyonu belirli düzgünlük şartları ile birbirine birleştirilen parçalı polinomlardan oluşan bir fonksiyondur. Bunun basit bir örneği, sürekliliği sağlamak için parçaları birbirine bağlanan poligonal fonksiyonlardır [14]. Spline fonksiyonlar şöyle tanımlanır: x_i ler $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$ şeklinde reel sayıların monoton artan bir dizisi olsun. x_i , ($i = 1(1)n$) düğüm noktaları ile birlikte m . dereceden bir $s(x)$ spline fonksiyonu reel doğru üzerinde tanımlı ve aşağıdaki iki özelliğe sahip bir fonksiyondur.

1. $x_0 = -\infty$ ve $x_{n+1} = \infty$ olmak üzere $s(x)$ her bir (x_i, x_{i+1}) , $i = 0(1)n$ aralığında m . veya daha az dereceden bir polinomdur.

2. $s(x)$ 'in kendisi ve $1., 2., \dots, (m-1)$. mertebeden türevleri her yerde süreklidir.

Böylece bazı süreklilik şartlarını yerine getiren parçalı polinomlar ve türevleri spline fonksiyonlar olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanıma göre $m = 0$ olduğunda ikinci şart geçerli değildir. Sıfırıncı dereceden spline fonksiyon bir adım fonksiyonudur. Birinci dereceden spline fonksiyon ise bir poligondur.

Genel olarak spline fonksiyonların önemli özellikleri kısaca aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

- Uygun bazlarla birlikte sonlu boyutu lineer uzay oluşturular,
- Düzgün fonksiyonlardır,
- Türevleri ve anti-türevleri yine spline fonksiyonlardır,
- Dijital bilgisayarlarda işleme, hesaplama, depolama açısından hesaplamalar için uygundur,
- Spline fonksiyonların kullanımı ile ortaya çıkan çeşitli matrisler uygun işaretleri ve determinant özellikleri bakımından kolayca hesaplanabilir formdadır,
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar kayda değer ölçüde esneklerdir, yani keskin salınımlar sergilemezler,

- Yaklaşım işlemi sonucunda elde edilen yapılar polinomların işaretleri ve katsayıları gibi yapıları ile de ilgilidir,
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında yakınsaklığın ve kararlılığın incelenmesi daha kolaydır,
- Kendileri ve türevleri aynı anda yaklaşık olarak hesaplanır.

$h = (b-a)/n$, $x_i = x_{i-1} + h$, $i = 1(1)n$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ olsun. Bu noktalarda bir fonksiyonun değerleri $f(x_0)$, $f(x_1), \dots, f(x_n)$ olsun ve m -defa türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi $C^m[a, b]$ ile gösterilsin. Böylece $s(x)$ fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa kuadratik spline fonksiyon diye adlandırılır.

1. $s(x) \in C^1[a, b]$,
2. $s(x_j) = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$,
3. Her $[x_j, x_{j+1}]$ için $s(x)$ parçalı kuadratik bir polinomdur.

Aşağıdaki özellikler ise $[a, b]$ üzerinde bir kübik spline fonksiyonu tanımlar.

1. $s(x) \in C^2[a, b]$,
2. $s(x_j) = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$,
3. Her $[x_j, x_{j+1}]$ için $s(x)$ parçalı kübik bir polinomdur.

1.4 B-spline Fonksiyonlar

$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty = -\lim_{i \rightarrow -\infty} x_{-i}$ olmak üzere B-spline fonksiyonları oluşturmak için kullanılan düğüm noktalarının bir kümesi

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 \dots$$

olsun. 0. dereceden bir B-spline fonksiyonu

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. B_i^0 'ın süreksiz olduğu açıktır. Fakat B_i^0 , sıçramanın olduğu tüm düğüm noktalarında sağdan süreklidir. Bütün i ve x_i değerleri için

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^+} B_i^0(x) &= 1 = B_i^0(x_i), \\ \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^+} B_i^0(x) &= 0 = B_i^0(x_{i+1}) \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki denklemden aşağıdaki iki özellik aşıkardır. Her x ve i için

$$B_i^0(x) \geq 0$$

ve

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$$

olup $B_i^0(x)$ spline fonksiyonu $[x_i, x_{i+1})$ yarı-açık aralığı üzerindedir. Daha yüksek dereceden spline fonksiyonlar tümevarım yöntemi ile $k = 1, 2, 3, \dots$; $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x)$$

formülü ile iteratif olarak hesaplanabilir. Burada B_i^0 spline fonksiyonu başlangıç fonksiyonudur. B_i^k ise k .dereceden B-spline baz fonksiyonudur. B_i^k fonksiyonu B_i^{k-1} ve B_{i+1}^{k-1} B-spline fonksiyonlarının bir kombinasyonu olarak yazıldığından spline fonksiyonların derecesi her bir adımda bir derece artar. B_i^k spline fonksiyonları aynı düğüm dizilerinde k .dereceden bütün spline fonksiyonlar için bir bazdır. B_i^1 spline fonksiyonu açık formda

$$B_i^1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} B_i^0(x) + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} B_{i+1}^0(x)$$

$$= \begin{cases} 0, & x \geq x_{i+2} \text{ veya } x \leq x_i \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, & x_i < x < x_{i+1} \\ \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. k . dereceden B-spline fonksiyonlar $(k - 1)$ defa sürekli türevlenebilirdir. Kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonlar uygulamalardaki işlem kolaylıkları bakımından yaygın bir kullanıma sahiptir.

$k = 2$ alındığında kuadratik B-spline fonksiyonu düğüm noktalarında

$$B_i^2(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+2} - x)^2 + 3(x_{i+1} - x)^2, & [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+2} - x)^2, & [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ (x_{i+3} - x)^2, & [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

dir. Açık olarak $x \geq x_{i+3}$ ve $x \leq x_i$ için kuadratik B-spline $B_i^2(x) = 0$ dır.

$k = 3$ alındığında kübik B-spline B_i^3 fonksiyonu düğüm noktalarında

$$B_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x_{i+4} - x)^3 - 4(x_{i+3} - x)^3 + 6(x_{i+2} - x)^3 - 4(x_{i+1} - x)^3, & [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+4} - x)^3 - 4(x_{i+3} - x)^3 + 6(x_{i+2} - x)^3, & [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ (x_{i+4} - x)^2 - 4(x_{i+3} - x)^2, & [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ (x_{i+4} - x)^2, & [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

dir. B_i^3 kübik B-spline fonksiyonu ve onun ikinci mertebeye kadar olan türevleri $[x_i, x_{i+4}]$ aralığı dışında sıfırdır.

Daha yüksek dereceli B-spline fonksiyonlar adım fonksiyonu olarak tanımlanan

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

şeklindeki 0. dereceden B-spline fonksiyonlar ile türetilir.

Şimdi yaklaşık çözümlerin bulunmasında hazır olarak kullanılacak olan yukarıda türetilen B-spline fonksiyonları bir takım özellikleri ile birlikte uygulamada sıklıkla karşılaşılan biçimde verelim.

1.4.1 Lineer B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $L_m(x)$ lineer B-spline baz fonksiyonları, $m = 0(1)N$ olmak üzere,

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16]. $\{L_m(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $L_m(x)$ lineer B-spline baz fonksiyonun kendisi ve türevlerinin tümü $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir $L_m(x)$ lineer B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında ardışık iki elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $L_m(x)$ ve $L_{m+1}(x)$ gibi iki tane lineer B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülmektedir (Bkz. Şekil 1.1). Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman aralığı

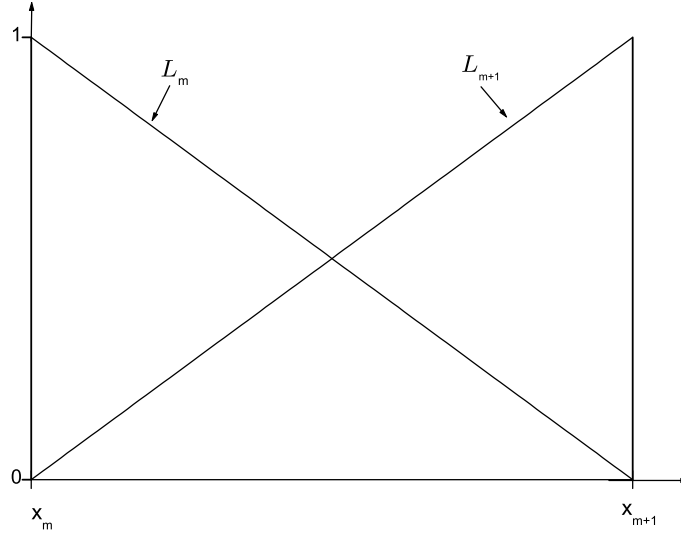
$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece lineer B-spline baz fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$L_m = 1 - \xi,$$

$$L_{m+1} = \xi$$

şeklinde tanımlanabilir.



Şekil 1.1: Lineer B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.2 Kuadratik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $Q_m(x)$ kuadratik B-spline baz fonksiyonları, $m = -1(1)N$ olmak üzere,

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16]. $\{Q_m(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $Q_m(x)$ kuadratik B-spline baz fonksiyonun kendisi ve türevlerinin tümü $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir $Q_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık üç elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $Q_{m-1}(x), Q_m(x)$ ve $Q_{m+1}(x)$ gibi üç tane kuadratik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülmektedir (Bkz. Şekil 1.2). $Q_m(x)$ ve onun birinci mertebeden $Q'_m(x)$ türevinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.1'de verildi.

Tablo 1.1: $Q_m(x)$ ve $Q'_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.

	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$Q_m(x)$	0	1	1	0
$hQ'_m(x)$	0	2	-2	0

U_m yaklaşık çözümünün kendisinin ve birinci mertebeden türevinin $x = x_m$ düğüm noktasındaki değerleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_N(x_m) &= U_m = \delta_{m-1} + \delta_m, \\ U'_N(x_m) &= U'_m = \frac{2}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_m) \end{aligned}$$

dir [15]. Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür.

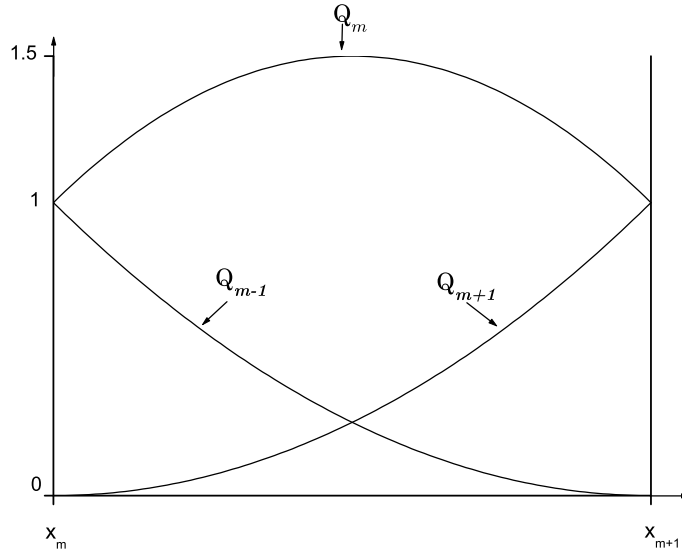
Böylece kuadratik B-spline baz fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$Q_{m-1} = (1 - \xi)^2,$$

$$Q_m = 1 + 2\xi - 2\xi^2,$$

$$Q_{m+1} = \xi^2$$

şeklinde tanımlanabilir.



Şekil 1.2: Kuadratik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.3 Kübik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonları, $m = -1(1)N + 1$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.2)$$

şeklinde tanımlanır [16]. $\{\phi_m(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $\phi_m(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonun kendisi ve türevlerinin tümü $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık dört elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ gibi dört tane kübik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülmektedir (Bkz. Şekil 1.3). $\phi_m(x)$ 'in kendisi ve ikinci mertebeye kadar olan $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.2'de verildi.

Tablo 1.2: $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.

	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	6	-12	6	0

U_m yaklaşık çözümünün kendisinin ve ikinci mertebeye kadar olan türevlerinin $x = x_m$ düğüm noktasındaki değerleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_N(x_m) &= U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_N(x_m) &= U'_m = \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_N(x_m) &= U''_m = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned}$$

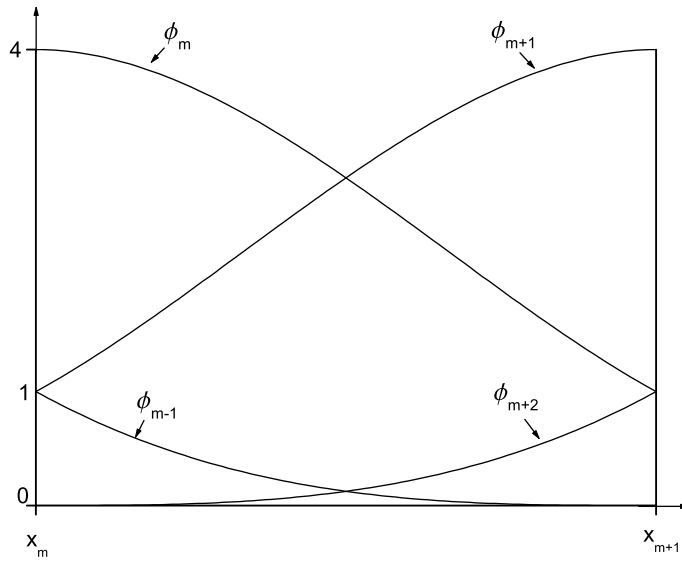
olarak yazılabilir. Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığını örten ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} ve ϕ_{m+2} kübik B-spline fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= (1 - \xi)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \\ \phi_{m+2} &= \xi^3\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.



Şekil 1.3: Kübik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.4 Kuartik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuartik baz B-spline fonksiyonları, $m = -2(1)N + 1$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16]. $\{\phi_m(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $\phi_m(x)$ kuartik B-spline baz fonksiyonun kendisi ve türevlerinin tümü $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık beş elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\phi_{m-2}(x)$, $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ gibi beş tane kuartik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülmektedir (Bkz. Şekil 1.4). $\phi_m(x)$ 'in kendisi ve üçüncü mertebeye kadar olan $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.3'de verildi.

Tablo 1.3: $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.

	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
$\phi_m(x)$	0	1	11	11	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	24	-72	72	-24	0

U_m yaklaşık çözümünün kendisinin ve üçüncü mertebeye kadar olan türevlerinin $x = x_m$ düğüm noktasındaki değerleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_N(x_m) &= U_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_N(x_m) &= U'_m = \frac{4}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}), \\ U''_N(x_m) &= U''_m = \frac{12}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}), \\ U'''_N(x_m) &= U'''_m = \frac{24}{h^3}(-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece kuartik B-spline baz fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\phi_{m-2} = 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4,$$

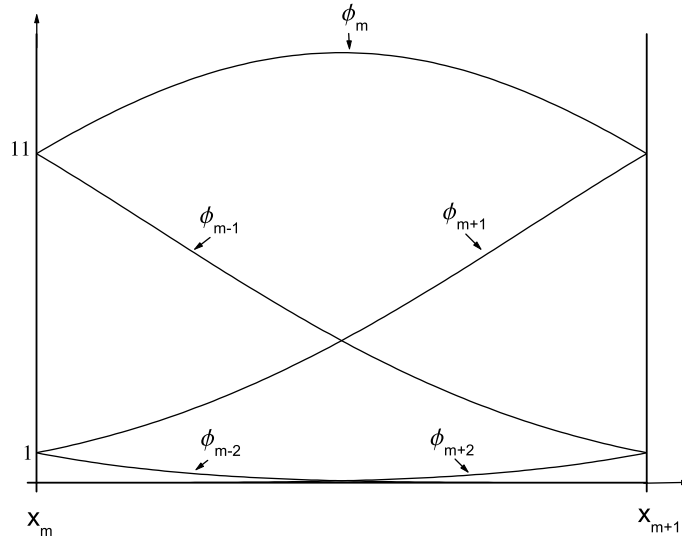
$$\phi_{m-1} = 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - \xi^4,$$

$$\phi_m = 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + \xi^4,$$

$$\phi_{m+1} = 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4,$$

$$\phi_{m+2} = \xi^4$$

olarak yazılabilir.



Şekil 1.4: Kuartik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.5 Kuintik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ quintik B-spline baz fonksiyonları, $m = -2(1)N + 2$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} q_0 = (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ q_1 = q_0 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ q_2 = q_1 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ q_3 = q_2 - 6(x - x_{m-2})^5 - 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ q_4 = q_3 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ q_5 = q_4 - 6(x - x_{m-2})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16]. $\{\phi_m(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $\phi_m(x)$ quintik B-spline baz fonksiyonunun kendisi ve türevlerinin tümü $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir $\phi_m(x)$ quintik B-spline baz fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık altı elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\phi_{m-2}(x)$, $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$ ve $\phi_{m+3}(x)$ gibi altı tane quintik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülmektedir (Bkz. Şekil 1.5). $\phi_m(x)$ 'in kendisinin ve dördüncü mertebeye kadar olan $\phi'_i(x)$, $\phi''_i(x)$, $\phi'''_i(x)$ ve $\phi^{iv}_i(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.4'de verildi.

Tablo 1.4: $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi^{(iv)}_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
$\phi_m(x)$	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\phi^{(iv)}_m(x)$	0	120	-480	720	-480	120	0

Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman aralığı

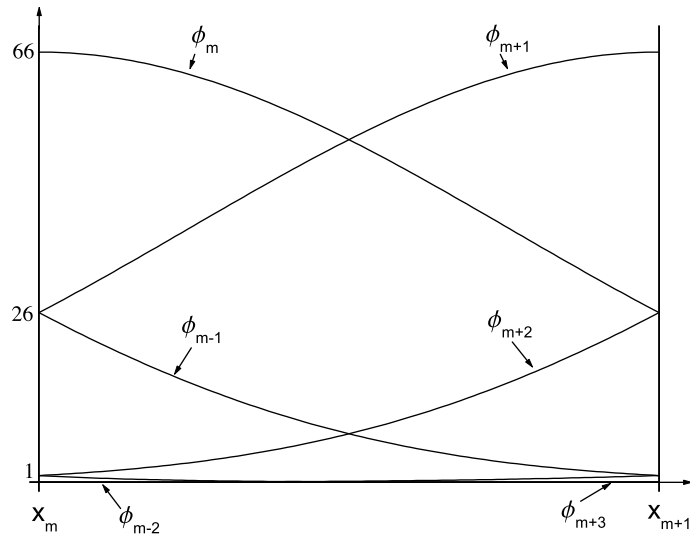
$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür.

Böylece kuartik B-spline baz fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\begin{aligned}\phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\ \phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, \\ \phi_m &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\ \phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, \\ \phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\ \phi_{m+3} &= \xi^5\end{aligned}$$

olarak tanımlanabilir.



Şekil 1.5: Kuintik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.6 Sektik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ sektik B-spline baz fonksiyonları, $m = -3(1)N + 2$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{m-3})^6, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 + 21(x - x_{m+2})^6, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16]. $\{\phi_m(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $\phi_m(x)$ sektik B-spline baz fonksiyonunun kendisi ve türevlerinin tümü $[x_{i-3}, x_{i+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir $\phi_m(x)$ sektik B-spline baz fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık yedi elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\phi_{m-3}(x)$, $\phi_{m-2}(x)$, $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$ ve $\phi_{m+3}(x)$ gibi yedi tane sektik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülmektedir (Bkz. Şekil 1.6). $\phi_m(x)$ 'in kendisinin ve beşinci mertebeye kadar olan $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi_m^{(iv)}(x)$ ve $\phi_m^{(v)}(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.5'de verildi.

Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

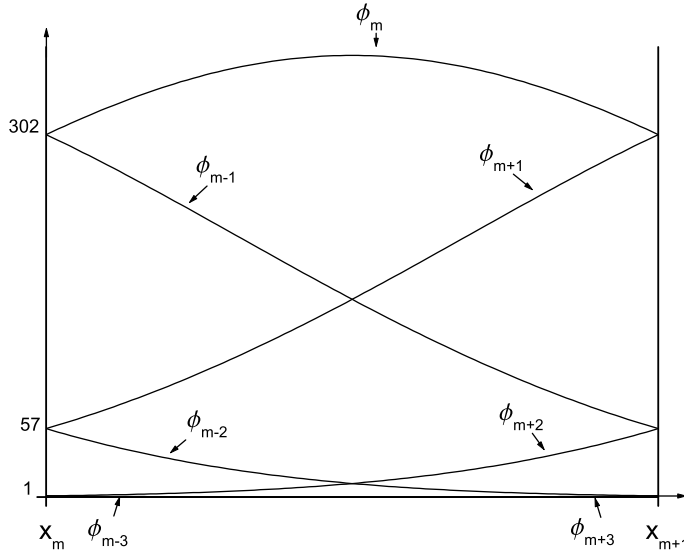
Tablo 1.5: $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi_m^{(iv)}(x)$ ve $\phi_m^{(v)}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.

	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
$\phi_m(x)$	0	1	57	302	302	57	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	6	150	240	-240	-150	-6	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	30	270	-300	-300	270	30	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	120	120	-960	960	-120	-120	0
$h^4\phi_m^{(iv)}(x)$	0	360	-1080	720	720	-1080	360	0
$h^5\phi_m^{(v)}(x)$	0	720	-3600	7200	7200	3600	-720	0

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece kuartik B-spline fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3} &= 1 - 6\xi + 15\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6, \\
\phi_{m-2} &= 57 - 150\xi + 135\xi^2 - 20\xi^3 - 45\xi^4 + 30\xi^5 - 6\xi^6, \\
\phi_{m-1} &= 302 - 240\xi - 150\xi^2 + 160\xi^3 + 30\xi^4 - 60\xi^5 + 15\xi^6, \\
\phi_m &= 302 + 240\xi - 150\xi^2 - 160\xi^3 + 30\xi^4 + 60\xi^5 - 20\xi^6, \\
\phi_{m+1} &= 57 + 150\xi + 135\xi^2 + 20\xi^3 - 45\xi^4 - 30\xi^5 + 15\xi^6, \\
\phi_{m+2} &= 1 + 6\xi + 15\xi^2 + 20\xi^3 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 6\xi^6, \\
\phi_{m+3} &= \xi^6
\end{aligned}$$

olarak tanımlanabilir.



Şekil 1.6: Sektik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.7 Septik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ septik B-spline baz fonksiyonları, $m = -3(1)N + 3$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16]. $\{\phi_m(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $\phi_m(x)$ septik B-spline baz fonksiyonunun kendisi ve

türevlerinin tümü $[x_{i-4}, x_{i+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonu $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık sekiz elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\phi_{m-3}(x)$, $\phi_{m-2}(x)$, $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$, $\phi_{m+3}(x)$ ve $\phi_{m+4}(x)$ gibi sekiz spetik B-spline baz fonksiyonu tane spline tarafından örtülmektedir (Bkz. Şekil 1.7). $\phi_m(x)$ 'in kendisi ve altıncı mertebeye kadar olan $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi_m^{(iv)}(x)$, $\phi_m^{(v)}(x)$ ve $\phi_m^{(vi)}(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.6'da verildi.

Tablo 1.6: $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi_m^{(iv)}(x)$, $\phi_m^{(v)}(x)$ ve $\phi_m^{(vi)}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri.

	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
$\phi_m(x)$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi_m^{(iv)}(x)$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi_m^{(v)}(x)$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\phi_m^{(vi)}(x)$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

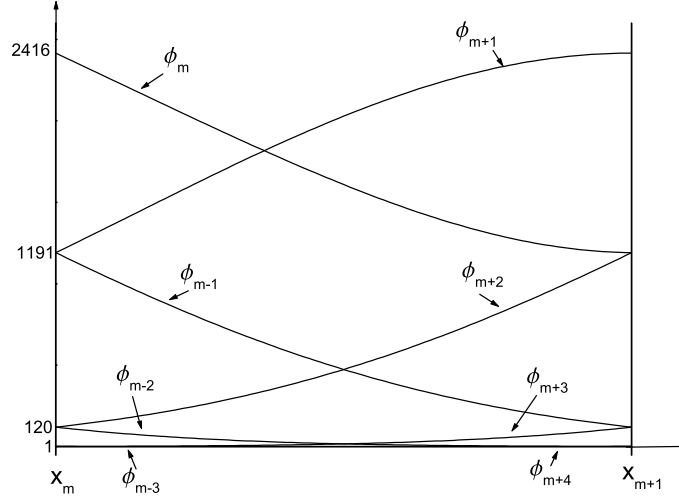
Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece kuartik B-spline fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3} &= 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
\phi_{m-2} &= 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, \\
\phi_{m-1} &= 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, \\
\phi_m &= 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, \\
\phi_{m+1} &= 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, \\
\phi_{m+2} &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\
\phi_{m+3} &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - 7\xi^7, \\
\phi_{m+4} &= \xi^7
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir.



Şekil 1.7: Septik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.5 Sonlu Eleman Yöntemleri

Doğada karşılaşılan olayları ve problemleri kolayca kavrayıp çözmek çoğunlukla zordur. Bundan dolayı, bu tür olaylar ve problemler bilinen veya anlaşılması daha kolay olan alt problemlere ayrılır ve daha kolay çözülebilir hale getirilebilir. Alt problemlerin çözülmesi ve sonra birleştirilmesi esas probleme yakın bir çözümün elde edilmesini sağlar. İşte sonlu elemanlar yöntemi komplike olan problemlerin daha basit alt bölgelere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesi ve sonra birleştirilmesiyle yaklaşık çözümlerin bulunduğu bir yöntemdir.

Sonlu Eleman Yöntemi (SEY) ile yaklaşık çözümü aranan problemler genellikle kısmi diferansiyel denklemler olarak ifade edilen problemlerdir. Örneğin elastik cisim mekanikinde aranan sonuç, cisimde meydana gelen yerdeğiştirmedir. Bu da gerilme ve yer değiştirme arasında kurulan ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü ile elde edilir. Bu tür denklemler basit geometri ve yükleme durumları için kesin çözümler elde edilebilecek şekilde çözülebilse de komplike problemlerde yaklaşık çözümlerin elde edilmesi kaçınılmazdır. Mühendislik uygulamalarında problemlerin bu karmaşıklığı sebebiyle genellikle problemin tam çözümü yerine, kabul edilebilir bir seviyedeki yaklaşık bir çözümü tercih edilir.

SEY ilk olarak gerilme analizi problemlerine uygulanmıştır. Bu alandaki ilk çalışmalar 1941 yılında Hrennikoff ve 1960 yılında Mc Henry tarafından geliştirilen yarı analitik analiz yöntemleridir. 1960 yılında Arygis ve Kelsey virtüel iş prensibini kullanarak bir direkt yaklaşım yöntemi geliştirmişlerdir. 1956 yılında Turner vd. bir

üçgen eleman için rijitlik matrisini oluşturdular. “Sonlu eleman” terimi ilk defa 1960 yılında Clough tarafından telafuz edilmiştir. 1960’lı yılların başlarında mühendisler sonlu elemanlar yöntemini gerilme analizi, sıvı akışı, ısı transferi gibi alanlarda kullanmışlardır. Sonlu elemanlar yöntemi üzerine ilk kitap 1967 yılında Zienkiewicz ve Chung tarafından yayımlanmıştır. Statik problemlerin yanısıra dinamik problemlerde sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmeye başlanmıştır. Yapı alanı dışındaki problemlerin SEY ile çözümü 1960’lı yıllarda başlamıştır. Şöyleki 1965 yılında Zienkiewicz and Chung, SEY ile Poisson denklemini çözmüşler, 1970 yılında Doctors ise bu yöntemi potansiyel akışa uygulamıştır. Zaman içerisinde SEY geliştirilerek manyetik alan, yer altı sularının akışı, genetik ve diğer bir çok alana uygulanmıştır. Bilgisayarların gelişimi SEY’in yaygın kullanımını daha da arttırmıştır. Genel amaçlı sonlu eleman paket programları 1970’li yıllardan itibaren ortaya çıkmaya başlamıştır. 1980’li yılların sonlarına doğru ise artık paket programlar mikro bilgisayarlarda kullanılmaya başlanmıştır. SEY’in kullanılması ve bilgisayarların kapasite ve hızlarının artmasıyla birlikte, bugüne kadar ancak pahalı deneysel yöntemlerle incelenebilen bir çok elemanın (blok, piston vb.) kolayca incelenmesi hatta toplu üretime geçmeden gerekli analizlerin yapılarak optimum tasarımın gerçekleştirilebilmesi mümkün olmuştur [17, 18, 19, 20].

Tarihsel gelişimi yukarıda kısaca anlatılan SEY’in tercih edilme nedenlerinden bazıları [2]:

1. Düzgün olmayan şekilli yapıları oldukça kolay bir şekilde modelleyebilmesi,
 2. Eleman denklemleri ayrı ayrı değerlendirildiğinden farklı bir takım malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi,
 3. Çok çeşitli sınır şartlarını birlikte kullanabilmesi,
 4. Gerektiğinde elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi,
 5. Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman kolayca değiştirilebilmesi,
 6. Bilgisayar programlama mantığına uygun olması
- olarak sıralanabilir.

Sonlu eleman yöntemleri sadece geleneksel varyasyonel yöntemlerin eksikliklerinin üstesinden gelmekle kalmaz, aynı zamanda oldukça etkin bir hesaplama tekniğidir. Bir problemin sonlu eleman analizinde izlenilen temel adımlar şunlardır [21]:

1. Verilen bölge önceden belirlenmiş sonlu elemanlar koleksiyonuna ayrıştırılır (*diskritizasyon*). Bunun için
 - a. Önceden belirlenen elemanların sonlu eleman kümesi oluşturulur.
 - b. Elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılır.

c. Problem için gerekli olan geometrik özellikler (örneğin koordinatlar ve kesit alanları vb.) belirlenir.

2. Elde edilen sonlu eleman kümesi içindeki tüm tipik elemanlar için eleman denklemleri türetilir. Bunun için

a. Tipik elemanlar üzerinde verilen diferansiyel denklemin varyasyonel formu oluşturulur.

b. Tipik bir “ u ” bağımlı değişkeninin

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

formunda olduğu varsayılır ve bu yaklaşım Adım 2a da yerine yazılarak

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\}$$

formunda eleman denklemleri elde edilir.

c. Ψ_i eleman interpolasyon fonksiyonları literatürde mevcut ise seçilir değilse türetilir ve sonra eleman matrisleri hesaplanır.

3. Problemin verilen çözüm bölgesi üzerindeki denklemini elde etmek için eleman denklemleri birleştirilir. Bunun için

a. Eleman düğümleri global düğümlerle eşleştirilerek birincil değişkenler arasında elemanlar arası süreklilik şartları (yerel serbestlik dereceleri ile global serbestlik dereceleri arasında ilişki yani elemanların birleştirilebilirliği) tanımlanır.

b. İkincil değişkenler arasında “denge” şartları (yani yerel kaynak veya kuvvet bileşenleri ile global tanımlı kaynak bileşenleri arasında ilişki) sağlanır.

c. Adım 3a ve 3b kullanılarak eleman denklemleri birleştirilir.

4. Birleştirilmiş eleman denklemlerine problemin sınır şartları uygulanır. Bunun için

a. Problemde verilen birincil değişkenler uygulanır.

b. Problemde verilen ikincil değişkenler uygulanır (Adım 3b’de yapılmadı ise).

5. Birleştirilmiş denklemler çözülür.

6. Hesaplama sonrasında elde edilen sonuçlar değerlendirilir. Bunun için genellikle

a. Adım 5’de elde edilen birincil değişkenlerden hareketle çözümlerin değişimi incelenir.

b. Sonuçlar grafikler/tablolara şeklinde sunulur.

Yukarıda belirtilen adımlar sonlu eleman yöntemlerinde kullanılan temel adımlardır. Fakat bazı problemlerin çözümlerinde yukarıda açıklanmayan veya belirgin olmayan aşağıdaki bazı özel durumlarla karşılaşılabilir.

1. Problemin çözüm bölgesi, şekline bağlı olarak birden daha fazla elemandan oluşan alt elemanlara ayrıştırılabilir. Örneğin düzgün olmayan şekilli bir bölge için dikdörtgen ve üçgenler birlikte kullanılabilir. Fakat böyle durumlarda elemanların arayüzeyleri çözümün sürekliliğini sağlayacak şekilde uyumlu olmalıdır.

2. Problemin çözüm bölgesi ayrıklaştırıldığında birden fazla tipik eleman kullanılmışsa her bir tipik eleman için düğüm değerlerinin ve yaklaşım fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak bir yaklaşım denklemi türetilmelidir.

3. Göz önüne alınan denklemler genellikle diferansiyel denklemler olduğundan bu denklemler çoğu zaman bir eleman üzerinde çözülemez. Bunun iki sebebi vardır. Birincisi, bir eleman üzerinde yapılan yaklaşımlar tam çözüme izin vermezler. Burada varyasyonel yöntemler devreye girer. İkincisi, sonlu eleman yöntemleriyle elde edilen eleman denklemleri diğer elemanlardan bağımsız olarak varyasyonel yöntemler kullanılarak çözülemez. Çünkü elemanların birleştirilmesi belirli süreklilik, başlangıç ve/veya sınır şartlarına bağlıdır.

4. Klasik varyasyonel yöntemlerle (yani bütün bölgeye uygulanan varyasyonel yöntemlerle) ve sonlu eleman yöntemleri ile elde edilen yaklaşık çözümlerin yapısında iki temel farklılık vardır. Birincisi, varyasyonel yöntemlerde u çözümünü keyfi c_j parametrelerinin ($u_N = \sum_j c_j \phi_j$) lineer kombinasyonu olarak temsil edilmekte iken, sonlu eleman yöntemlerinde u çözümü genellikle u 'nun düğüm noktalarındaki u_j değerlerinin ($u_N = \sum_j u_j \Psi_j$) lineer kombinasyonu olarak temsil edilmektedir. İkincisi sonlu eleman yöntemlerinde yaklaşım fonksiyonları genellikle interpolasyon teorisinden türetilen polinomlardır. Ancak sonlu elemanlar yöntemleri u_j düğüm değerlerinin ve cebirsel polinomlar olan Ψ_j interpolasyon fonksiyonlarının lineer kombinasyonlarını yaklaşım fonksiyonları olarak kullanmakla sınırlı değildir. Şöyleki düğüm değerlerine ek olarak bir fonksiyonun yaklaşımını temsil etmek için Rayleigh-Ritz yöntemin de olduğu gibi düğüm olmayan noktalardaki değerleri de kullanılabilir.

5. Bir elemandaki düğüm noktalarının yeri ve sayısı, elemanın geometrisine, polinom yaklaşımının derecesine ve denklemlerin integral formuna bağlıdır. Birleştirilmiş denklemlerin çözülmesiyle elde edilen u_j 'ler aynı zamanda u_N yaklaşık çözümünün düğüm noktalarındaki değerleridir.

6. Elemanların birleştirilmesi, çözümün (ve daha yüksek mertebeden denklemler

için muhtemelen onun türevlerinin) elemanlar arasındaki sınırlarda sürekli olduğu fikrine dayanır.

7. Sonlu elemanların birleştirilmesi başlangıç ve/veya sınır şartlarına bağlıdır. Sonlu elemanlar için elde edilen eleman denklemleri sadece başlangıç ve/veya sınır şartları uygulandıktan sonra çözülür.

8. Sonlu eleman çözümünde, bölgenin ayrıklaştırılmasından, çözüme yaklaşımdan ve sayısal hesaplardan kaynaklanan hatalar vardır. Genelde bu hataların tahmini basit bir konu değildir. Fakat, belirli şartlar altında, bu hatalar verilen bir eleman ve/veya problem için tahmin edilebilir.

9. Sonlu eleman yöntemlerinde çözümünün doğruluğu ve yakınsaklığı diferansiyel denkleme, onun integral formuna ve kullanılan elemanlara bağlıdır. Doğruluk (*accuracy*) tam çözümle sonlu eleman çözümü arasındaki farka karşılık gelirken yakınsaklık eleman sayısı arttırıldıkça oluşan iyileşmeye karşılık gelir.

10. Zamana bağlı problemler için, genellikle iki aşamalı bir formülasyon takip edilir. Birinci aşamada, zamana bağlı bir adi diferansiyel denklem sistemi elde etmek için diferansiyel denklemlere sonlu eleman yöntemi ile yaklaşılr. İkinci aşamada, zamana bağlı diferansiyel denklemler tam olarak çözülür veya cebirsel denklemler elde etmek için ya varyasyonel ya da sonlu fark yöntemleri ile yaklaşık olarak çözülür [6].

Sonlu eleman yöntemlerinin yukarıda anlatılan avantajlarının yanında en büyük dezavantajı özellikle komplike bölgelerin alt bölgelere ayrılması işlemidir. Bu işlem iki boyutlu bölgelerin alt bölgelere ayrılmasında daha da zahmetli bir işlem olup belirli bir alt yapıyı gerektirir. Ayrıklaştırma işleminin uygun yapılmaması durumunda işlem hacminin artmasının yanında iyi sonuçların elde edilmesi de oldukça zordur.

BÖLÜM 2

2–BOYUTLU B-SPLINE FONKSİYONLARIN MODİFİYE EDİLMESİ

2.1 Giriş

Bu bölümde önce 2–boyutlu kübik, kuintik ve septik B-spline baz fonksiyonları verilecek ve sonra modifiye edilecektir. B-spline baz fonksiyonlarını modifiye etmenin temel amacı tüm B-spline baz fonksiyonlarını problemin çözüm bölgesinin sınırı üzerinde verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde sıfır yapmaktır. 1–boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin sınırları iki noktadan ibaret iken 2–boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin sınırları eğrilerden ve dolayısıyla sonsuz sayıda noktalardan oluşmaktadır. Bundan dolayı 2–boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan problemlerde sınır şartlarının sağlanması büyük önem arz etmektedir. Böylece sonlu eleman yöntemleri ile yaklaşık çözümün bulunmasında tüm sınır şartları bazların modifiye edilmesi esnasında sağlatılmış olur. Önce Bölüm 1’de verilen 1–boyutlu kübik, kuintik ve septik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak 2–boyutlu kübik, kuintik ve septik B-spline baz fonksiyonları verilecektir. Elde edilen 2–boyutlu B-spline baz fonksiyonları verilen problemin sınırları üzerinde sıfır değilse, modifiye edilerek sınır üzerinde sıfır olmaları sağlanır. Modifiye edilen B-spline fonksiyonlar sınır üzerinde özdeş olarak sıfır olacaklarından, homojen olmayan sınır şartlarını sağlayacak bir $\omega(x, y, t)$ terimi yaklaşık çözümün içerisine katılacaktır. Verilen problemin tam çözümü yerine kullanılacak olan yaklaşık çözüm tüm sınır şartlarını başlangıçta sağladığı için yaklaşık çözümün bulunmasındaki son adımlarda sınır şartlarının tekrar kullanılmasına gerek kalmayacaktır. Ayrıca, elde edilen modifiye edilmiş 2–boyutlu B-spline baz fonksiyonları verilen problemde ve sınır şartlarından bağımsız olarak elde edildiği için değişik başlangıç ve sınır şartları ile verilen bir probleme de kolayca uygulanabilir.

$B_i(x)$ ve $B_j(y)$ ’ler sırası ile x ve y yönlerindeki B-spline baz fonksiyonlarını, $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_j(y)$ ’ler ise sırası ile bunlara karşılık gelen modifiye edilmiş B-spline baz fonksiyonlarını gösterebilir. Yukarıdaki açıklamalardan sonra bir düzlem üzerinde

2–boyutlu herhangi bir kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü, $B_i(x)$ ve $B_j(y)$ alışımlı B-spline baz fonksiyonları cinsinden $\sum_i^n \sum_j^m \alpha_{ij}(t) B_i(x) B_j(y)$ formunda aranırken $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_j(y)$ 1–boyutlu modifiye edilmiş B-spline baz fonksiyonları cinsinden ise $\omega(x, y, t) + \sum_i^n \sum_j^m \alpha_{ij}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y)$ formunda aranır.

2.2 2–Boyutlu Kübik B-Spline Fonksiyonların Modifiye Edilmesi

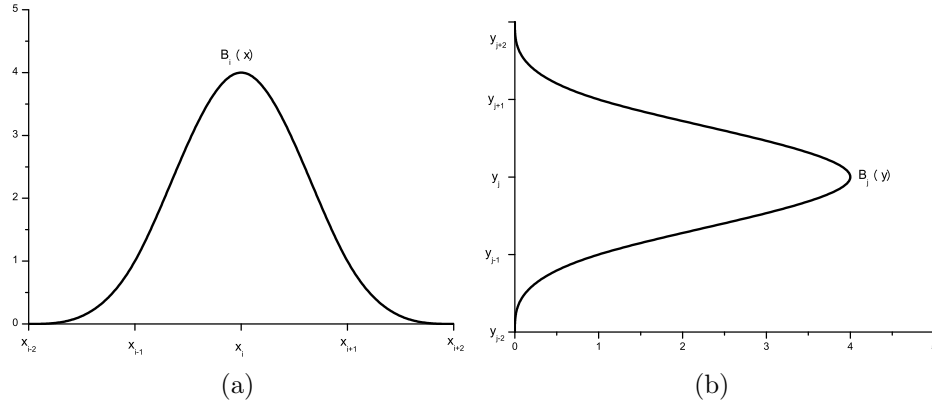
Bu kısımda modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonların elde edilmesi detaylı bir şekilde verildikten sonra Galerkin yaklaşımı ile birlikte bu tezde göz önüne alınacak olan model problemlerin çözümünde kullanılacaktır. Bu çalışmada ele alınacak her bir model problemin denklemi 2–boyutlu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} + d(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + e(x, y, t) u + f(x, y, t)$$

denkleminin özel bir durumudur. Her bir model problemin yaklaşık çözümleri 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları cinsinden $\sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{ij}(t) B_i(x) B_j(y)$ biçiminde aranır. Model problemlere Galerkin yöntemi ile bu formda bir yaklaşık çözüm bulabilmek için her şeyden önce 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonlarının modifiye edilmesi gerekir. $B_{-1}(x), B_0(x), B_1(x), B_{n-1}(x), B_n(x)$ ve $B_{n+1}(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonları x yönünde ve $B_{-1}(y), B_0(y), B_1(y), B_{m-1}(y), B_m(y)$ ve $B_{m+1}(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonları ise y yönünde model problemin sınırlarında sıfır olmadıkları için sınırda sıfır olacak şekilde modifiye edilmeleri gerekir. Bu modifikasyon işleminden sonra, model problemlerin yaklaşık çözümleri modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları cinsinden $\omega(x, y, t) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y)$ formunda aranır. Burada $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_j(y)$ sırası ile x ve y yönlerindeki modifiye edilmiş kübik B-spline baz fonksiyonlarıdır. Modifiye edilmiş kübik B-spline baz fonksiyonlarının tümü model problemlerin sınırları üzerinde özdeş olarak sıfır olacaklarından yaklaşık çözümdeki $\omega(x, y, t)$ terimi problemin homojen olmayan sınır şartlarını sağlar.

2.2.1 1-Boyutlu Kübik B-spline Baz Fonksiyonları

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ olsun. $B_i(x)$, $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, düğüm noktaları x_i noktalarında olan kübik B-spline baz fonksiyonu olsun.



Şekil 2.1: Kübik B-spline (a) $B_i(x)$, $x_{i-2} \leq x \leq x_{i+2}$ ve (b) $B_j(y)$, $y_{j-2} \leq y \leq y_{j+2}$ baz fonksiyonları.

$[a, b]$ aralığına giren ilk kübik B-spline baz fonksiyonu $B_{-1}(x)$ ve $[a, b]$ aralığından çıkan son kübik B-spline baz fonksiyonu $B_{n+1}(x)$ olduğundan aralık üzerinde herhangi bir $u(x)$ tam çözümüne global değişkenler cinsinden yaklaşık çözüm

$$u_n(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i B_i(x) \quad (2.2.1.1)$$

biçiminde aranır. Burada α_i 'ler başlangıç ve sınır şartlarının kullanılmasıyla daha sonra belirlenecek olan katsayılardır.

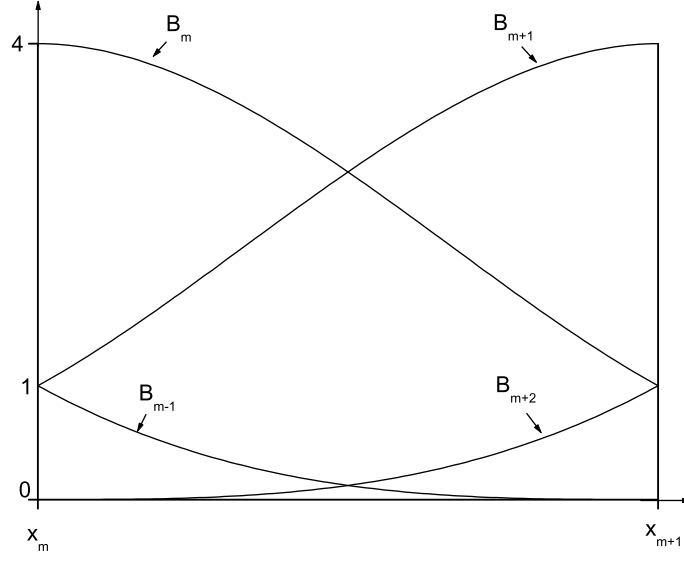
Şekil 2.1'den görüleceği üzere her bir kübik B-spline baz fonksiyonu 4 adet ardışık eleman üzerinde sıfırdan farklıdır.

$h\xi = x - x_i$ lokal koordinat dönüşümü yardımıyla Bölüm 1'de (1.4.2) denklemi ile verilen kübik B-spline baz fonksiyonları $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ aralığında ξ lokal değişkeni cinsinden

$$B_i(\xi) = \begin{cases} \xi^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 4 - 6\xi^2 + 3\xi^3, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

Şekil 2.2'den görüldüğü üzere $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $B_{m-1}(x)$, $B_m(x)$, $B_{m+1}(x)$, $B_{m+2}(x)$ gibi 4 tane kübik B-spline baz fonksiyonları tarafından örtülür.



Şekil 2.2: Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten kübik B-spline baz fonksiyonları.

2.2.2 2-Boyutlu Kübik B-spline Baz Fonksiyonları

$D = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgensel bölgesi $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ve $c = y_0 < y_1 \dots < y_{m-1} < y_m = d$ olmak üzere (x_i, y_j) , $(i = 0(1)n; j = 0(1)m)$ noktaları tarafından x yönünde h_x ve y yönünde h_y uzunluğuna sahip dikdörtgensel sonlu elemanlara bölünmüş olsun. D bölgesine x yönünde ilk giren kübik B-spline baz fonksiyonu $B_{-1}(x)$ ve bölgeden son çıkan kübik B-spline baz fonksiyonu $B_{n+1}(x)$ iken bölgeye y yönünde ilk giren kübik B-spline baz fonksiyonu $B_{-1}(y)$ ve bölgeden son çıkan kübik B-spline baz fonksiyonu $B_{m+1}(y)$ olduğundan D bölgesi üzerinde bir $u(x, y, t)$ tam çözümüne global değişkenler cinsinden $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{ij}(t) B_{ij}(x, y) \quad (2.2.2.1)$$

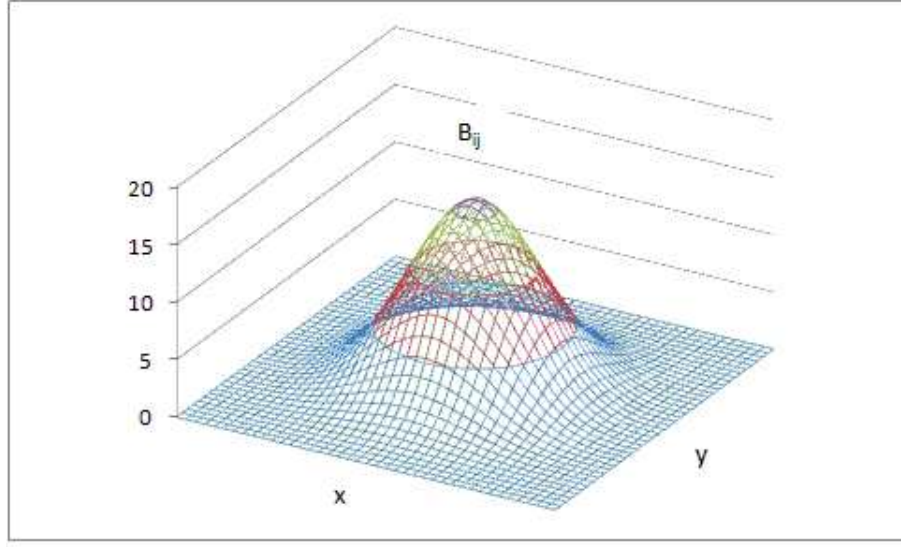
biçiminde aranır. Burada $\alpha_{i,j}$ 'ler 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonlarının genliği olup

$$B_{ij}(x, y) = B_i(x) B_j(y) \quad (2.2.2.2)$$

dir. (2.2.2.2)'deki $B_i(x)$ ve $B_j(y)$ 'ler sırasıyla Şekil 2.1'de verilen kübik B-spline baz fonksiyonlarıdır [22].

1-boyutlu $B_i(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonlarının her biri x yönünde 4 ardışık elemanı örttüğünden ve ardışık elemanlar üzerinde sıfırdan farklı olduğundan 2-boyutlu $B_{ij}(x, y)$ kübik B-spline baz fonksiyonlarının her biri de x ve y yönlerinde

toplam $4 \times 4 = 16$ elemanı örter ve bu elemanlar üzerinde sıfırdan farklıdır (Bkz. Şekil 2.3).



Şekil 2.3: x ve y yönlerinde ardışık 4'er elemanı örten 2-boyutlu kübik $B_{ij}(x, y)$ B-spline baz fonksiyonları.

2.2.3 Modifiye Edilmiş 2-Boyutlu Kübik B-spline Baz Fonksiyonları

2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonlarının nasıl modifiye edildiğini göstermek için zamana bağlı 2-boyutlu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} + d(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + e(x, y, t)u + f(x, y, t) \quad (2.2.3.1)$$

$$a = x_0 < x < x_n = b, \quad c = y_0 < y < y_m = d, \quad t > 0$$

lineer kısmi diferansiyel denklemini

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (2.2.3.2)$$

başlangıç ve

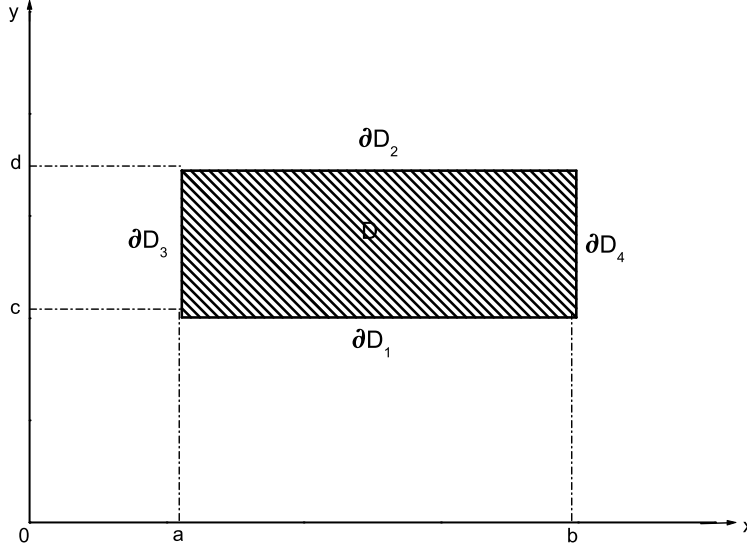
$$u(x, y_0, t) = g_1(x, t), \quad (x, y) \in \partial D_1 \quad (2.2.3.3)$$

$$u(x, y_m, t) = g_2(x, t), \quad (x, y) \in \partial D_2 \quad (2.2.3.4)$$

$$u(x_0, y, t) = h_1(y, t), \quad (x, y) \in \partial D_3 \quad (2.2.3.5)$$

$$u(x_n, y, t) = h_2(y, t), \quad (x, y) \in \partial D_4 \quad (2.2.3.6)$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alalım. Burada $D = [a, b] \times [c, d]$, sınırı ∂D olan Şekil 2.4’de gösterilen dikdörtgensel bir bölgedir.



Şekil 2.4: D bölgesi ile $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3 \cup \partial D_4$ sınırı.

Şimdi D bölgesini $D = [0, 1] \times [0, 1]$ olarak alalım ve bölgeyi x yönünde $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ olacak şekilde n -adet ve y yönünde $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = 1$ olacak şekilde m -adet alt aralıklara bölelim.

2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonlarını modifye ederken, x yönünde bölgeye ilk giren $B_{-1}(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonunun D bölgesi dışında kalan düğüm noktaları x_{-3} , x_{-2} ve x_{-1} iken bölgeden son çıkan $B_{n+1}(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonunun D bölgesi dışında kalan düğüm noktaları x_{n+1} , x_{n+2} ve x_{n+3} olmak üzere 6 adet ve benzer şekilde y yönünde bölgeye ilk giren $B_{-1}(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonunun bölgenin dışında kalan düğüm noktaları y_{-3} , y_{-2} ve y_{-1} iken bölgeden son çıkan $B_{m+1}(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonunun bölge dışında kalan düğüm noktaları y_{m+1} , y_{m+2} ve y_{m+3} gibi 6 adet olmak üzere

$$h_x = x_{n+1} - x_n, \quad n = -3(1)0$$

$$h_y = y_{m+1} - y_m, \quad m = -3(1)0$$

olacak şekilde x ve y yönlerinde toplam 12 tane düğüm noktasının göz önünde bulundurulması gerekir.

(2.2.3.1)-(2.2.3.6) denklemleri ile verilen probleme (2.2.2.1) formunda bir yaklaşık çözüm bulunabilmesi için x ve y yönlerindeki $B_i(x)$ ve $B_j(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonlarının problemde verilen sınır şartlarını sağlamak şartıyla D bölgesinin sınırı üzerinde sıfır olacak şekilde yeni bir baz fonksiyonlarının kümesine dönüştürülmesi gerekir. 2-boyutlu $B_{ij}(x, y) = B_i(x)B_j(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonlarından D bölgesinin x yönündeki sınırından geçen $B_{-1}(x)$, $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_{n-1}(x)$, $B_n(x)$ ve $B_{n+1}(x)$ ile y yönündeki sınırından geçen $B_{-1}(y)$, $B_0(y)$, $B_1(y)$, $B_{m-1}(y)$, $B_m(y)$ ve $B_{m+1}(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonları problemin sınırı üzerinde sıfır olmadıklarından bu 12 tane kübik B-spline baz fonksiyonlarının ∂D sınırı üzerinde problemin verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak ve ∂D sınırı üzerinde sıfır olacak şekilde aşağıdaki adımlar takip edilerek yeni fonksiyonlar kümesine dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu şekilde elde edilen 2-boyutlu $B_{ij}(x, y)$ kübik B-spline baz fonksiyonlarına modifiye edilmiş baz fonksiyonları denir ve $\tilde{B}_{ij}(x, y)$ ile gösterilir. Bu tezde $\tilde{B}$ -spline baz fonksiyonu ile modifiye edilmiş B-spline baz fonksiyonları kastedilecektir.

1. Adım: $u = u(x, y, t)$ tam çözümüne karşılık gelen (2.2.2.1) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \gamma_i(y, t) B_i(x) \quad (2.2.3.7)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\gamma_i(y, t) = \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{ij}(t) B_j(y) \quad (2.2.3.8)$$

dır. (2.2.3.7) yaklaşık çözümünün (2.2.3.5) ve (2.2.3.6) sınır şartlarını sağlaması gerekir. (2.2.3.7) yaklaşık çözümünde sırası ile $x = x_0$ ve $x = x_n$ alınırsa

$$u_{nm}(x_0, y, t) = h_1(y, t) = \gamma_{-1}(y, t) B_{-1}(x_0) + \sum_{i=0}^n \gamma_i(y, t) B_i(x_0) + \gamma_{n+1}(y, t) B_{n+1}(x_0) \quad (2.2.3.9)$$

$$u_{nm}(x_n, y, t) = h_2(y, t) = \gamma_{-1}(y, t) B_{-1}(x_n) + \sum_{i=0}^n \gamma_i(y, t) B_i(x_n) + \gamma_{n+1}(y, t) B_{n+1}(x_n) \quad (2.2.3.10)$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.2.3.9) ve (2.2.3.10)'dan sırası ile $\gamma_{-1}(y, t)$ ve $\gamma_{n+1}(y, t)$ yok edilirse (2.2.3.7) yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \frac{B_{-1}(x)}{B_{-1}(x_0)} h_1(y, t) + \sum_{i=0}^n \gamma_i(y, t) \tilde{B}_i(x) + \frac{B_{n+1}(x)}{B_{n+1}(x_n)} h_2(y, t) \quad (2.2.3.11)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0(x) &= B_0(x) - \frac{B_0(x_0)}{B_{-1}(x_0)} B_{-1}(x), \\ \tilde{B}_1(x) &= B_1(x) - \frac{B_1(x_0)}{B_{-1}(x_0)} B_{-1}(x), \\ \tilde{B}_i(x) &= B_i(x), \quad i = 2(1)n - 2 \\ \tilde{B}_{n-1}(x) &= B_{n-1}(x) - \frac{B_{n-1}(x_n)}{B_{n+1}(x_n)} B_{n+1}(x), \\ \tilde{B}_n(x) &= B_n(x) - \frac{B_n(x_n)}{B_{n+1}(x_n)} B_{n+1}(x), \end{aligned}$$

dır.

2. Adım: Bu adımda (2.2.3.8) ile verilen $\gamma_i(y, t)$ ifadesinde sırası ile $y = y_0$ ve $y = y_m$ alınırsa

$$\gamma_i(y_0, t) = \alpha_{i,-1}(t) B_j(y_0) + \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}(t) B_j(y_0) + \alpha_{i,m+1}(t) B_j(y_0) \quad (2.2.3.12)$$

$$\gamma_i(y_m, t) = \alpha_{i,-1}(t) B_j(y_m) + \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}(t) B_j(y_m) + \alpha_{i,m+1}(t) B_j(y_m) \quad (2.2.3.13)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.2.3.12) ve (2.2.3.13) eşitliklerinden sırasıyla $\alpha_{i,-1}(t)$ ve $\alpha_{i,m+1}(t)$ yok edilirse (2.2.3.8) eşitliği

$$\gamma_i(y, t) = \frac{B_{-1}(y)}{B_{-1}(y_0)} \gamma_i(y_0, t) + \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}(t) \tilde{B}_j(y) + \frac{B_{m+1}(y)}{B_{m+1}(y_m)} \gamma_i(y_m, t) \quad (2.2.3.14)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0(y) &= B_0(y) - \frac{B_0(y_0)}{B_{-1}(y_0)} B_{-1}(y), \\ \tilde{B}_1(y) &= B_1(y) - \frac{B_1(y_0)}{B_{-1}(y_0)} B_{-1}(y), \\ \tilde{B}_j(y) &= B_j(y), \quad j = 2(1)m - 2 \\ \tilde{B}_{m-1}(y) &= B_{m-1}(y) - \frac{B_{m-1}(y_m)}{B_{m+1}(y_m)} B_{m+1}(y), \\ \tilde{B}_m(y) &= B_m(y) - \frac{B_m(y_m)}{B_{m+1}(y_m)} B_{m+1}(y) \end{aligned}$$

dır.

3. Adım: $\gamma_i(y, t)$ 'nin (2.2.3.14) de verilen eşitliği (2.2.3.11) de yerine yazıldıktan sonra (2.2.3.3) ve (2.2.3.4) ile verilen sınır şartları kullanılırsa yaklaşık çözüm

$$u_{nm}(x, y, t) = \omega_1(x, y, t) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \quad (2.2.3.16)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y, t) = & \frac{B_{-1}(x)}{B_{-1}(x_0)} h_1(y, t) + \frac{B_{n+1}(x)}{B_{n+1}(x_n)} h_2(y, t) + \frac{B_{-1}(y)}{B_{-1}(y_0)} g_1(x, t) + \frac{B_{m+1}(y)}{B_{m+1}(y_m)} g_2(x, t) \\ & - \frac{B_{-1}(y)}{B_{-1}(y_0)} \left[\frac{B_{-1}(x)}{B_{-1}(x_0)} h_1(y_0, t) + \frac{B_{n+1}(x)}{B_{n+1}(x_n)} h_2(y_0, t) \right] \\ & - \frac{B_{m+1}(y)}{B_{m+1}(y_m)} \left[\frac{B_{-1}(x)}{B_{-1}(x_0)} h_1(y_m, t) + \frac{B_{n+1}(x)}{B_{n+1}(x_n)} h_2(y_m, t) \right] \end{aligned} \quad (2.2.3.17)$$

dır.

$u(x, y, t)$ tam çözümüne karşılık gelen (2.2.2.1) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü (2.2.3.7)'e benzer şekilde

$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{j=-1}^{m+1} \delta_j(x, t) B_j(y) \quad (2.2.3.18)$$

olarak da yazılabilir. Burada

$$\delta_j(x, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_{ij}(t) B_i(x) \quad (2.2.3.19)$$

dır.

(2.2.3.18) yaklaşık çözümü için yukarıdaki 3 adım uygulanırsa

$$u_{nm}(x, y, t) = \omega_2(x, y, t) + \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \quad (2.2.3.20)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \omega_2(x, y, t) = & \frac{B_{-1}(x)}{B_{-1}(x_0)} h_1(y, t) + \frac{B_{n+1}(x)}{B_{n+1}(x_n)} h_2(y, t) + \frac{B_{-1}(y)}{B_{-1}(y_0)} g_1(x, t) + \frac{B_{m+1}(y)}{B_{m+1}(y_m)} g_2(x, t) \\ & - \frac{B_{-1}(y)}{B_{-1}(y_0)} \left[\frac{B_{-1}(x)}{B_{-1}(x_0)} g_1(x_0, t) + \frac{B_{n+1}(x)}{B_{n+1}(x_n)} g_1(x_n, t) \right] \\ & - \frac{B_{m+1}(y)}{B_{m+1}(y_m)} \left[\frac{B_{-1}(x)}{B_{-1}(x_0)} g_2(x_0, t) + \frac{B_{n+1}(x)}{B_{n+1}(x_n)} g_2(x_n, t) \right] \end{aligned} \quad (2.2.3.21)$$

dır.

(2.2.3.16) yaklaşımı D bölgesinin sadece x yönündeki sınırları üzerinde sıfır iken (2.2.3.20) yaklaşımı D bölgesinin sadece y yönündeki sınırları üzerinde sıfırdır. $u(x, y, t)$ tam çözümüne karşılık gelen bir $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü problemin D bölgesinin ∂D sınırının tümü üzerinde sıfır olacak şekilde aranacağından bu şartları sağlayacak $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü (2.2.3.16) ve (2.2.3.20) denklemlerinin ortalamalarıdır. Yani,

$$\begin{aligned} u_{nm}(x, y, t) &= \frac{\omega_1(x, y, t) + \omega_2(x, y, t)}{2} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \quad (2.2.3.22) \\ &= \omega(x, y, t) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \end{aligned}$$

dir. Burada baz fonksiyonlarının yeni kümesi, $i = 0(1)n$ ve $j = 0(1)m$ olmak üzere, $\tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y)$ olup verilen problemin tüm sınırı üzerinde sıfırdır. Dolayısıyla (2.2.3.3)-(2.2.3.6) sınır şartları (2.2.3.22)'deki $\omega(x, y, t)$ fonksiyonuna dahil edilir [23].

2.3 2–Boyutlu Kuintik B-Spline Fonksiyonların Modifiye Edilmesi

Bu kısımda modifiye edilmiş 2–boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonlarının elde edilmesi detaylı bir şekilde verildikten sonra Galerkin yaklaşımı ile birlikte bu tezde göz önüne alınacak olan model problemlerin çözümünde kullanılacaktır. Bu çalışmada ele alınacak her bir model problemin denklemi 2–boyutlu

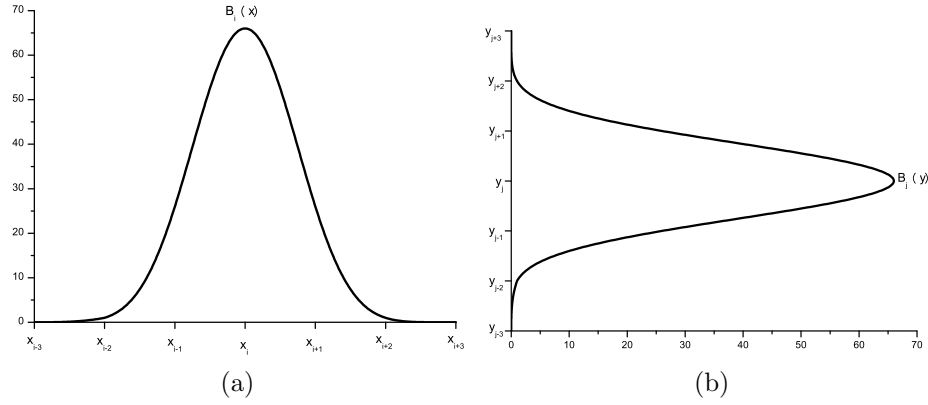
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} + d(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + e(x, y, t)u + f(x, y, t)$$

denkleminin bir özel durumu olacaktır. Her bir model problemin yaklaşık çözümleri 2–boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları cinsinden $\sum_{i=-2}^{n+2} \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{ij}(t) B_i(x) B_j(y)$ biçiminde aranır. Bu model problemlere Galerkin yöntemi ile bu formda bir yaklaşık çözüm bulabilmek için, her şeyden önce, B-spline baz fonksiyonlarının modifiye edilmiş 2–boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları denilen yeni bir fonksiyonlar kümesine dönüştürülmesi gerekir. $B_{-2}(x), B_{-1}(x), B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_{n-2}(x), B_{n-1}(x), B_n(x), B_{n+1}(x), B_{n+2}(x)$ kuintik B-spline baz fonksiyonları x yönünde ve $B_{-2}(y), B_{-1}(y), B_0(y), B_1(y), B_2(y), B_{m-2}(y), B_{m-1}(y), B_m(y), B_{m+1}(y), B_{m+2}(y)$ kuintik B-spline baz fonksiyonları y yönünde model problemin sınırlarında sıfır olmadıkları için bu modifiye işleminin yapılması bir gerekliliktir. Bu dönüştürme işleminden sonra, bu model problemlerin yaklaşık çözümleri modifiye edilmiş

2-boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları cinsinden $\omega(x, y, t) + \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{ij}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y)$ biçiminde aranır. Burada $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_j(y)$ sırası ile x ve y yönlerindeki modifiye edilmiş kuintik B-spline baz fonksiyonlarıdır. Modifiye edilmiş kuintik B-spline baz fonksiyonların tümü model problemlerin sınırları üzerinde özdeş olarak sıfır olacaklarından yaklaşık çözümdeki $\omega(x, y, t)$ terimi problemin homojen olmayan sınır şartlarını sağlar.

2.3.1 1-Boyutlu Kuintik B-spline Baz Fonksiyonları

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ olsun. $B_i(x)$, $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, düğüm noktaları x_i noktalarında olan kübik B-spline baz fonksiyonu olsun. $[a, b]$ aralığına giren ilk kuintik B-spline baz



Şekil 2.5: Kuintik B-spline (a) $B_i(x)$, $x_{i-3} \leq x \leq x_{i+3}$ ve (b) $B_j(y)$, $y_{j-3} \leq y \leq y_{j+3}$ baz fonksiyonları.

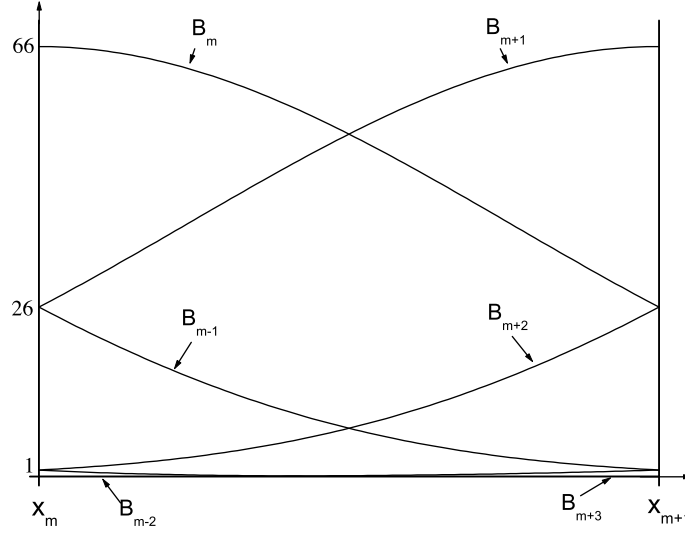
fonksiyonu $B_{-2}(x)$ ve $[a, b]$ aralığından çıkan son kuintik B-spline baz fonksiyonu $B_{n+2}(x)$ olduğundan aralık üzerinde herhangi bir $u(x)$ tam çözümüne global değişkenler cinsinden yaklaşık çözüm

$$u_n(x) = \sum_{i=-2}^{n+2} \alpha_i B_i(x) \quad (2.3.1.1)$$

biçiminde aranır. Burada α_i ler daha sonra başlangıç ve sınır şartlarının da yardımıyla belirlenecek olan katsayılardır.

Şekil 2.5 ve 2.6'dan da görüleceği üzere her bir kuintik B-spline baz fonksiyonu 6 adet ardışık eleman üzerinde sıfırdan farklıdır.

$h\xi = x - x_i$ dönüşümü ile ξ lokal değişkeni cinsinden kuintik B-spline baz fonksiyonları elde edilebilir. Böylece ξ lokal değişkeni cinsinden kuintik B-spline baz fonksiyonları $[x_{i-3}, x_{i+3}]$ aralığında değişim ifadeleri (2.3.1.2) eşitliğinde görülmektedir.



Şekil 2.6: Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten kuintik B-spline baz fonksiyonları.

$$B_i(\xi) = \begin{cases} \xi^5, & x \in [x_{i-3}, x_{i-2}] \\ 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.3.1.2)$$

Şekil 2.6'dan görüldüğü üzere $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $B_{m-2}(x)$, $B_{m-1}(x)$, $B_m(x)$, $B_{m+1}(x)$, $B_{m+2}(x)$ ve $B_{m+3}(x)$ kuintik B-spline baz fonksiyonları tarafından örtülür.

2.3.2 2-Boyutlu Kuintik B-spline Baz Fonksiyonları

$D = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgensel bölgesi $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ve $c = y_0 < y_1 \dots < y_{m-1} < y_m = d$ olmak üzere (x_i, y_j) , $(i = 0(1)n; j = 0(1)m)$ noktaları

tarafından x yönünde h_x ve y yönünde h_y uzunluğuna sahip dikdörtgensel sonlu elemanlara bölünmüş olsun. D bölgesine x yönünde giren ilk kuintik B-spline baz fonksiyonu $B_{-2}(x)$ ve bölgeden son çıkan kuintik B-spline baz fonksiyonu $B_{n+2}(x)$ iken bölgeye y yönünde ilk giren kuintik B-spline baz fonksiyonu $B_{-2}(y)$ ve bölgeden son çıkan kuintik B-spline baz fonksiyonu $B_{m+2}(y)$ olduğundan D bölgesi üzerinde bir $u(x, y, t)$ tam çözümüne global değişkenler cinsinden $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü

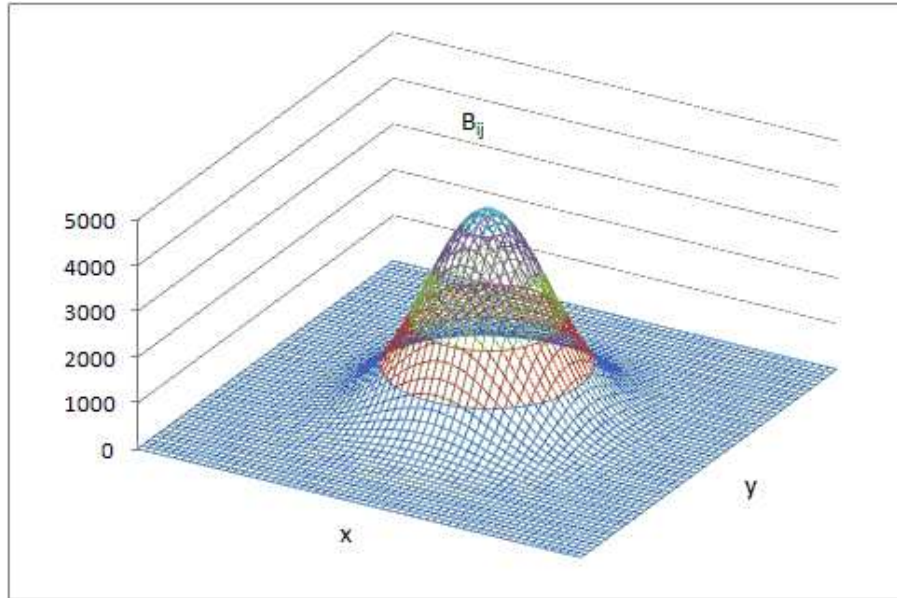
$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{i=-2}^{n+2} \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{ij} B_{ij}(x, y) \quad (2.3.2.1)$$

biçiminde aranır. Burada $\alpha_{i,j}$ 'ler 2-boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonlarının genliği olup

$$B_{ij}(x, y) = B_i(x)B_j(y) \quad (2.3.2.2)$$

dir. (2.3.2.2)'deki $B_i(x)$ ve $B_j(y)$ 'ler sırasıyla Şekil 2.5'de verilen kuintik B-spline baz fonksiyonlarıdır [22].

1-boyutlu $B_i(x)$ kuintik B-spline baz fonksiyonu x yönünde 6 ardışık elemanı örttüğünden ve ardışık elemanlar üzerinde sıfırdan farklı olduğundan 2-boyutlu $B_{ij}(x, y)$ kuintik B-spline baz fonksiyonu da x ve y yönlerinde toplam $6 \times 6 = 36$ elemanı örter ve bu elemanlar üzerinde sıfırdan farklıdır (Bkz. Şekil 2.7).



Şekil 2.7: x ve y yönlerinde ardışık 6'şar elemanı örten 2-boyutlu kuintik $B_{ij}(x, y)$ B-spline baz fonksiyonları.

2.3.3 Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kuintik B-spline Baz Fonksiyonları

2–boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonlarının nasıl modifiye edildiğini göstermek için zamana bağlı 2–boyutlu (2.2.3.1) lineer kısmi diferansiyel denklemini (2.2.3.2) başlangıç ve (2.2.3.3)-(2.2.3.6) sınır şartları ile birlikte göz önüne alalım.

Şimdi D bölgesini $D = [0, 1] \times [0, 1]$ olarak alalım ve bölgeyi x yönünde $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ olacak şekilde n –adet ve y yönünde $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = 1$ olacak şekilde m –adet alt aralıklara bölelim.

2–boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonunu modifiye ederken, x yönünde bölgeye ilk giren $B_{-2}(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonunun D bölgesi dışında kalan düğüm noktaları $x_{-5}, x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}$ ve x_{-1} iken bölgeden son çıkan $B_{n+2}(x)$ kuintik B-spline baz fonksiyonunun D bölgesi dışında kalan düğüm noktaları $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}$ ve x_{n+5} olmak üzere 10 adet ve benzer şekilde y yönünde bölgeye ilk giren $B_{-2}(y)$ kuintik B-spline baz fonksiyonunun bölge dışında kalan düğüm noktaları $y_{-5}, y_{-4}, y_{-3}, y_{-2}$ ve y_{-1} iken bölgeden son çıkan $B_{m+2}(y)$ kuintik B-spline baz fonksiyonunun bölge dışında kalan düğüm noktaları $y_{m+1}, y_{m+2}, y_{m+3}, y_{m+4}$ ve y_{m+5} gibi 10 adet olmak üzere

$$h_x = x_{n+1} - x_n, \quad n = -5(1)0$$

$$h_y = y_{m+1} - y_m, \quad m = -5(1)0$$

olacak şekilde x ve y yönlerinde toplam 20 tane düğüm noktasının göz önünde bulundurulması gerekir.

(2.2.3.1)-(2.2.3.6) denklemleri ile verilen probleme (2.2.2.1) formunda bir yaklaşık çözüm bulunabilmesi için, x ve y yönlerindeki $B_i(x)$ ve $B_j(y)$ kuintik B-spline baz fonksiyonlarının problemde verilen sınır şartlarını sağlamak şartıyla D bölgesinin sınırı üzerinde sıfır olacak şekilde yeni bir baz fonksiyonlarının kümesine dönüştürülmesi gerekir. 2–boyutlu $B_{ij}(x, y) = B_i(x)B_j(y)$ kuintik B-spline baz fonksiyonlarından D bölgesinin x yönündeki sınırından geçen $B_{-2}(x), B_{-1}(x), B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_{n-2}(x), B_{n-1}(x)$ ve $B_n(x), B_{n+1}(x)$ ve $B_{n+2}(x)$ ile y yönündeki sınırından geçen $B_{-2}(y), B_{-1}(y), B_0(y), B_1(y), B_2(y), B_{m-2}(y), B_{m-1}(y), B_m(y), B_{m+1}(y)$ ve $B_{m+2}(y)$ kuintik B-spline baz fonksiyonları problemin ∂D sınırı üzerinde sıfır değildir. Bu 20 tane kuintik B-spline baz fonksiyonlar ∂D sınırı üzerinde problemin verilen tüm sınır şartlarını sağlamak şartıyla sınırı üzerinde sıfır olacak

şekilde aşağıdaki adımlar takip edilerek yeni fonksiyonlar kümesine dönüştürülebilir. Bu şekilde elde edilen 2- boyutlu $B_{ij}(x, y)$ kuintik B-spline baz fonksiyonlarına modifiye edilmiş baz fonksiyonları denir ve $\tilde{B}_{ij}(x, y)$ ile gösterilir.

1. Adım: $u = u(x, y, t)$ tam çözümüne karşılık gelen (2.2.2.1) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{i=-2}^{n+2} \gamma_i(y, t) B_i(x) \quad (2.3.3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\gamma_i(y, t) = \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{ij}(t) B_j(y) \quad (2.3.3.2)$$

dır.

(2.3.3.1) yaklaşık çözümünün (2.2.3.5) ve (2.2.3.6) sınır şartlarını sağlaması gerekir. (2.3.3.1) yaklaşık çözümünde sırası ile $x = x_0$ ve $x = x_n$ alınırsa

$$u_{nm}(x_0, y, t) = h_1(y, t) = \gamma_{-2}(y, t) B_{-2}(x_0) + \sum_{i=-1}^{n+1} \gamma_i(y, t) B_i(x_0) + \gamma_{n+2}(y, t) B_{n+2}(x_0) \quad (2.3.3.3)$$

$$u_{nm}(x_n, y, t) = h_2(y, t) = \gamma_{-2}(y, t) B_{-2}(x_n) + \sum_{i=-1}^{n+1} \gamma_i(y, t) B_i(x_n) + \gamma_{n+2}(y, t) B_{n+2}(x_n) \quad (2.3.3.4)$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.3.3.3) ve (2.3.3.4)'den sırası ile $\gamma_{-2}(y, t)$ ve $\gamma_{n+2}(y, t)$ yok edilirse (2.3.3.1) yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \frac{B_{-2}(x)}{B_{-2}(x_0)} h_1(y, t) + \sum_{i=-1}^{n+1} \gamma_i(y, t) \tilde{B}_i(x) + \frac{B_{n+2}(x)}{B_{n+2}(x_n)} h_2(y, t) \quad (2.3.3.5)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{-1}(x) &= B_{-1}(x) - \frac{B_{-1}(x_0)}{B_{-2}(x_0)} B_{-2}(x), \\
\tilde{B}_0(x) &= B_0(x) - \frac{B_0(x_0)}{B_{-2}(x_0)} B_{-2}(x), \\
\tilde{B}_1(x) &= B_1(x) - \frac{B_1(x_0)}{B_{-2}(x_0)} B_{-2}(x), \\
\tilde{B}_2(x) &= B_2(x) - \frac{B_2(x_0)}{B_{-2}(x_0)} B_{-2}(x), \\
\tilde{B}_i(x) &= B_i(x), \quad i = 3(1)n - 3 \\
\tilde{B}_{n-2}(x) &= B_{n-2}(x) - \frac{B_{n-2}(x_n)}{B_{n+2}(x_n)} B_{n+2}(x), \\
\tilde{B}_{n-1}(x) &= B_{n-1}(x) - \frac{B_{n-1}(x_n)}{B_{n+2}(x_n)} B_{n+2}(x), \\
\tilde{B}_n(x) &= B_n(x) - \frac{B_n(x_n)}{B_{n+2}(x_n)} B_{n+2}(x), \\
\tilde{B}_{n+1}(x) &= B_{n+1}(x) - \frac{B_{n+1}(x_n)}{B_{n+2}(x_n)} B_{n+2}(x)
\end{aligned}$$

dır.

2. Adım: Bu adımda (2.2.3.8) ile verilen $\gamma_i(y, t)$ ifadesinde sırası ile $y = y_0$ ve $y = y_m$ alınır

$$\gamma_i(y_0, t) = \alpha_{i,-2}(t) B_j(y_0) + \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{ij}(t) B_j(y_0) + \alpha_{i,m+2}(t) B_j(y_0) \quad (2.3.3.6)$$

$$\gamma_i(y_m, t) = \alpha_{i,-2}(t) B_j(y_m) + \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{ij}(t) B_j(y_m) + \alpha_{i,m+2}(t) B_j(y_m) \quad (2.3.3.7)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.3.3.6) ve (2.3.3.7) eşitliklerinden sırasıyla $\alpha_{i,-1}(t)$ ve $\alpha_{i,m+1}(t)$ yok edilirse (2.2.3.8) eşitliği

$$\gamma_i(y, t) = \frac{B_{-2}(y)}{B_{-2}(y_0)} \gamma_i(y_0, t) + \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{ij}(t) \tilde{B}_j(y) + \frac{B_{m+2}(y)}{B_{m+2}(y_m)} \gamma_i(y_m, t) \quad (2.3.3.8)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{-1}(y) &= B_{-1}(y) - \frac{B_{-1}(y_0)}{B_{-2}(y_0)} B_{-2}(y), \\
\tilde{B}_0(y) &= B_0(y) - \frac{B_0(y_0)}{B_{-2}(y_0)} B_{-2}(y), \\
\tilde{B}_1(y) &= B_1(y) - \frac{B_1(y_0)}{B_{-2}(y_0)} B_{-2}(y), \\
\tilde{B}_2(y) &= B_2(y) - \frac{B_2(y_0)}{B_{-2}(y_0)} B_{-2}(y), \\
\tilde{B}_j(y) &= B_j(y), \quad j = 3(1)m - 3 \\
\tilde{B}_{m-2}(y) &= B_{m-2}(y) - \frac{B_{m-2}(y_m)}{B_{m+2}(y_m)} B_{m+2}(y), \\
\tilde{B}_{m-1}(y) &= B_{m-1}(y) - \frac{B_{m-1}(y_m)}{B_{m+2}(y_m)} B_{m+2}(y), \\
\tilde{B}_m(y) &= B_m(y) - \frac{B_m(y_m)}{B_{m+2}(y_m)} B_{m+2}(y), \\
\tilde{B}_{m+1}(y) &= B_{m+1}(y) - \frac{B_{m+1}(y_m)}{B_{m+2}(y_m)} B_{m+2}(y)
\end{aligned}$$

dır.

3. Adım: (2.3.3.8) ile $\gamma_i(y, t)$ için verilen ifadenin (2.3.3.5) da yerine yazılması ve elde edilen sonuç denklemin (2.2.3.3) ile (2.2.3.4) verilen sınır şartlarını sağlaması ile

$$u_{nm}(x, y, t) = \omega_1(x, y, t) + \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \quad (2.3.3.9)$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}
\omega_1(x, y, t) &= \frac{B_{-2}(x)}{B_{-2}(x_0)} h_1(y, t) + \frac{B_{n+2}(x)}{B_{n+2}(x_n)} h_2(y, t) + \frac{B_{-2}(y)}{B_{-2}(y_0)} g_1(x, t) + \frac{B_{m+2}(y)}{B_{m+2}(y_m)} g_2(x, t) \\
&\quad - \frac{B_{-2}(y)}{B_{-2}(y_0)} \left[\frac{B_{-2}(x)}{B_{-2}(x_0)} h_1(y_0, t) + \frac{B_{n+2}(x)}{B_{n+2}(x_n)} h_2(y_0, t) \right] \\
&\quad - \frac{B_{m+2}(y)}{B_{m+2}(y_m)} \left[\frac{B_{-2}(x)}{B_{-2}(x_0)} h_1(y_m, t) + \frac{B_{n+2}(x)}{B_{n+2}(x_n)} h_2(y_m, t) \right]
\end{aligned} \quad (2.3.3.10)$$

dır. Şimdi yukarıdaki adımları yaklaşık çözüme bir kere daha fakat bu defa yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{j=-2}^{m+2} \delta_j(x, t) B_j(y) \quad (2.3.3.11)$$

biçiminde alarak bir daha uygulayalım. Burada

$$\delta_j(x, t) = \sum_{i=-2}^{n+2} \alpha_{ij}(t) B_i(x) \quad (2.3.3.12)$$

dır.

(2.3.3.11) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yi (2.2.3.1)-(2.2.3.6) denklem sistemi için yaklaşık çözüm olarak kabul eder ve yukarıdaki adımları uygularsak

$$u_{nm}(x, y, t) = \omega_2(x, y, t) + \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \quad (2.3.3.13)$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} \omega_2(x, y, t) = & \frac{B_{-2}(x)}{B_{-2}(x_0)} h_1(y, t) + \frac{B_{n+2}(x)}{B_{n+2}(x_n)} h_2(y, t) + \frac{B_{-2}(y)}{B_{-2}(y_0)} g_1(x, t) + \frac{B_{m+2}(y)}{B_{m+2}(y_m)} g_2(x, t) \\ & - \frac{B_{-2}(y)}{B_{-2}(y_0)} \left[\frac{B_{-2}(x)}{B_{-2}(x_0)} g_1(x_0, t) + \frac{B_{n+2}(x)}{B_{n+2}(x_n)} g_1(x_n, t) \right] \\ & - \frac{B_{m+2}(y)}{B_{m+2}(y_m)} \left[\frac{B_{-2}(x)}{B_{-2}(x_0)} g_2(x_0, t) + \frac{B_{n+2}(x)}{B_{n+2}(x_n)} g_2(x_n, t) \right] \end{aligned} \quad (2.3.3.14)$$

dır.

(2.3.3.10) yaklaşımı D bölgesinin sadece x yönündeki sınırları üzerinde sıfır iken (2.3.3.14) yaklaşımı D bölgesinin sadece y yönündeki sınırları üzerinde sıfırdır. $u(x, y, t)$ tam çözümüne karşılık gelen bir $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü problemin D bölgesinin ∂D sınırının tümü üzerinde sıfır olacak şekilde aranacağından bu şartları sağlayacak $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü (2.3.3.10) ve (2.3.3.14) denklemlerinin ortalamalarıdır. Yani,

$$\begin{aligned} u_{nm}(x, y, t) &= \frac{\omega_1(x, y, t) + \omega_2(x, y, t)}{2} + \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \quad (2.3.3.15) \\ &= \omega(x, y, t) + \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{m+1} \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \end{aligned}$$

dır. Burada baz fonksiyonlarının yeni kümesi, $i = -1, 0, \dots, n+1$, $j = -1, 0, \dots, m+1$ olmak üzere, $\tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y)$ olup tüm bu baz fonksiyonları verilen problemin tüm sınırında sıfırdır. Dolayısıyla (2.2.3.3)-(2.2.3.6) sınır şartları (2.3.3.15)'deki $\omega(x, y, t)$ fonksiyonuna dahil edilir [23].

2.4 2–Boyutlu Septik B-Spline Fonksiyonların Modifiye Edilmesi

Bu kısımda modifiye edilmiş 2–boyutlu septik B-spline baz fonksiyonlarının elde edilmesi detaylı bir şekilde verildikten sonra Galerkin yaklaşımı ile birlikte bu tezde göz önüne alınacak olan model problemlerin çözümünde kullanılacaktır. Bu çalışmada ele alınacak her bir model problemin denklemi 2–boyutlu

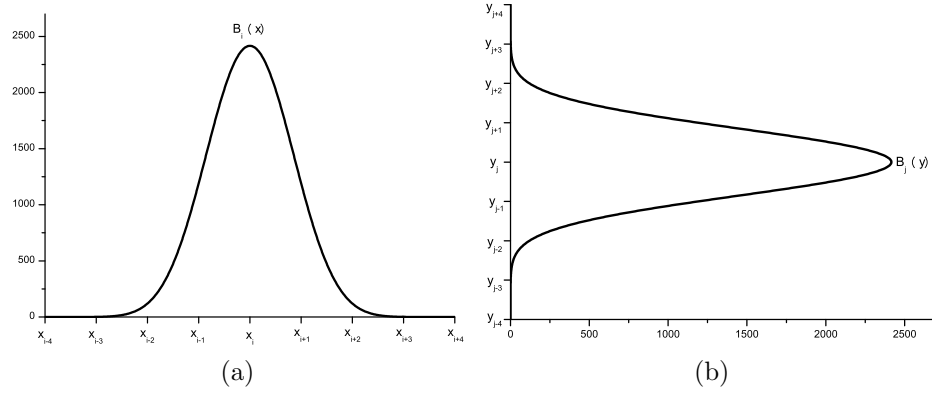
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} + d(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + e(x, y, t)u + f(x, y, t)$$

denkleminin bir özel durumu olacaktır. Her bir model problemin yaklaşık çözümleri 2–boyutlu septik B-spline baz fonksiyonları cinsinden $\sum_{i=-3}^{n+3} \sum_{j=-3}^{m+3} \alpha_{ij}(t) B_i(x) B_j(y)$ biçiminde aranır. Bu model problemlere Galerkin yöntemi ile bu formda bir yaklaşık çözüm bulabilmek için, her şeyden önce, B-spline baz fonksiyonlarının modifiye edilmiş 2–boyutlu septik B-spline baz fonksiyonları denilen yeni bir fonksiyonlar kümesine dönüştürülmesi gerekir. $B_{-3}(x), B_{-2}(x), B_{-1}(x), B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_{n-2}(x), B_{n-1}(x), B_n(x), B_{n+1}(x), B_{n+2}(x)$ ve $B_{n+3}(x)$ septik B-spline baz fonksiyonları x yönünde ve $B_{-3}(y), B_{-2}(y), B_{-1}(y), B_0(y), B_1(y), B_2(y), B_{m-2}(y), B_{m-1}(y), B_m(y), B_{m+1}(y), B_{m+2}(y)$ ve $B_{m+3}(y)$ septik B-spline baz fonksiyonları y yönünde model problemin sınırlarında sıfır olmadıkları için bu modifiye işleminin yapılması bir gerekliliktir. Bu dönüştürme işleminden sonra, bu model problemlerin yaklaşık çözümleri modifiye edilmiş 2–boyutlu septik B-spline baz fonksiyonları cinsinden $\omega(x, y, t) + \sum_{i=-2}^{n+2} \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{ij}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y)$ biçiminde aranır. Burada $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_j(y)$ sırası ile x ve y yönlerindeki modifiye edilmiş septik B-spline baz fonksiyonlarıdır. Modifiye edilmiş septik B-spline baz fonksiyonların tümü model problemlerin sınırları üzerinde özdeş olarak sıfır olacaklarından yaklaşık çözümdeki $\omega(x, y, t)$ terimi problemin homojen olmayan sınır şartlarını sağlar.

2.4.1 1-Boyutlu Septik B-spline Baz Fonksiyonları

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ olsun. $B_i(x)$, $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, düğüm noktaları x_i noktalarında olan kübik B-spline baz fonksiyonu olsun.

$[a, b]$ aralığına giren ilk septik B-spline baz fonksiyonu $B_{-3}(x)$ ve $[a, b]$ aralığından çıkan son septik B-spline baz fonksiyonu $B_{n+3}(x)$ olduğundan aralık üzerinde herhangi bir $u(x)$ tam çözümüne global değişkenler cinsinden yaklaşık çözüm



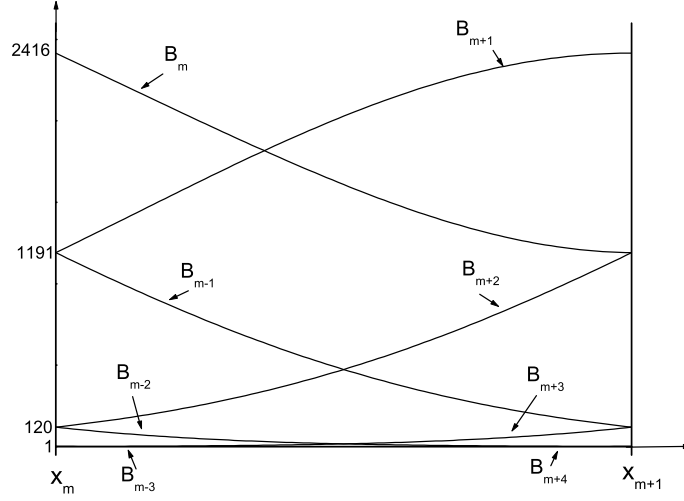
Şekil 2.8: Septik B-spline (a) $B_i(x)$, $x_{i-4} \leq x \leq x_{i+4}$ ve (b) $B_j(y)$, $y_{j-4} \leq y \leq y_{j+4}$ baz fonksiyonları.

$$u_n(x) = \sum_{i=-3}^{n+3} \alpha_i B_i(x) \quad (2.4.1.1)$$

biçiminde aranır. Burada α_i ler daha sonra başlangıç ve sınır şartlarının da yardımıyla belirlenecek olan katsayılardır.

Şekil 2.8'den de görüleceği üzere her bir septik B-spline baz fonksiyonu 8 adet ardışık eleman üzerinde sıfırdan farklıdır.

$h\xi = x - x_i$ dönüşümü ile ξ lokal değişkeni cinsinden septik B-spline baz fonksiyonları elde edilebilir. Burada $0 \leq \xi \leq 1$ olduğu açıktır. Septik B-spline baz fonksiyonunun $[x_{i-3}, x_{i+3}]$ aralığındaki değişim ifadeleri (2.4.1.2) eşitliğinde görülmektedir.



Şekil 2.9: Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten septik B-spline baz fonksiyonları.

$$B_i(\xi) = \begin{cases} \xi^7, & x \in [x_{i-4}, x_{i-3}] \\ 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - 7\xi^7, & x \in [x_{i-3}, x_{i-2}] \\ 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, & x \in [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, & x \in [x_{i+4}, x_{i+5}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.1.2)$$

Şekil 3.25'den görüldüğü üzere $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $B_{m-3}(x)$, $B_{m-2}(x)$, $B_{m-1}(x)$, $B_m(x)$, $B_{m+1}(x)$, $B_{m+2}(x)$, $B_{m+3}(x)$, $B_{m+4}(x)$ septik B-spline baz fonksiyonları

tarafından örtülür.

2.4.2 2-Boyutlu Septik B-spline Baz Fonksiyonları

$D = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgensel bölgesi $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ve $c = y_0 < y_1 \dots < y_{m-1} < y_m = d$ olmak üzere (x_i, y_j) , $(i = 0(1)n; j = 0(1)m)$ noktaları tarafından x yönünde h_x ve y yönünde h_y uzunluğuna sahip dikdörtgensel sonlu elemanlara bölünmüş olsun. D bölgesine x yönünde ilk giren septik B-spline baz fonksiyonu $B_{-3}(x)$ ve bölgeden son çıkan septik B-spline baz fonksiyonu $B_{n+3}(x)$ iken bölgeye y yönünde ilk giren septik B-spline baz fonksiyonu $B_{-3}(y)$ ve bölgeden son çıkan septik B-spline baz fonksiyonu $B_{m+3}(y)$ olduğundan D bölgesi üzerinde bir $u(x, y, t)$ tam çözümüne global değişkenler cinsinden $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{i=-3}^{n+3} \sum_{j=-3}^{m+3} \alpha_{ij} B_{ij}(x, y) \quad (2.4.21)$$

biçiminde aranır. Burada $\alpha_{i,j}$ 'ler 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonlarının genliği olup

$$B_{ij}(x, y) = B_i(x)B_j(y) \quad (2.4.22)$$

dir. (2.4.22)'deki $B_i(x)$ ve $B_j(y)$ 'ler sırasıyla Şekil 2.8'de verilen septik B-spline baz fonksiyonlarıdır [22].

2.4.3 Modifiye Edilmiş 2-Boyutlu Septik B-spline Baz Fonksiyonları

2-boyutlu septik B-spline baz fonksiyonlarının nasıl modifiye edildiğini göstermek için zamana bağlı 2-boyutlu (2.2.3.1) lineer kısmi diferansiyel denklemini (2.2.3.2) başlangıç ve (2.2.3.3)-(2.2.3.6) sınır şartları ile birlikte göz önüne alalım.

Şimdi D bölgesini $D = [0, 1] \times [0, 1]$ olarak alalım ve bölgeyi x yönünde $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ olacak şekilde n -adet ve y yönünde $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = 1$ olacak şekilde m -adet alt aralıklara bölelim.

2-boyutlu septik B-spline baz fonksiyonunu modifiye ederken, x yönünde bölgeye ilk giren $B_{-3}(x)$ septik B-spline baz fonksiyonunun D bölgesi dışında kalan düğüm noktaları $x_{-7}, x_{-6}, x_{-5}, x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}$ ve x_{-1} iken bölgeden son çıkan $B_{n+3}(x)$ septik B-spline baz fonksiyonunun D bölgesi dışında kalan düğüm noktaları $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+5}, x_{n+6}$ ve x_{n+7} olmak üzere 14 adet ve benzer şekilde y yönünde

bölgeye ilk giren $B_{-3}(y)$ septik B-spline baz fonksiyonunun bölge dışında kalan düğüm noktaları $y_{-7}, y_{-6}, y_{-5}, y_{-4}, y_{-3}, y_{-2}$ ve y_{-1} iken bölgeden son çıkan $B_{m+3}(y)$ septik B-spline baz fonksiyonunun bölge dışında kalan düğüm noktaları $y_{m+1}, y_{m+2}, y_{m+3}, y_{m+4}, y_{m+5}$ ve y_{m+6} ve y_{m+7} gibi 14 adet olmak üzere

$$h_x = x_{n+1} - x_n, \quad n = -7(1)0$$

$$h_y = y_{m+1} - y_m, \quad m = -7(1)0$$

olacak şekilde x ve y yönlerinde toplam 28 tane düğüm noktasının göz önünde bulundurulması gerekir.

(2.2.3.1)-(2.2.3.6) denklemleri ile verilen probleme (2.2.2.1) formunda bir yaklaşık çözüm bulunabilmesi için, x ve y yönündeki $B_i(x)$ ve $B_j(y)$ septik B-spline baz fonksiyonlarının problemde verilen sınır şartlarını sağlamak şartıyla D bölgesinin sınırı üzerinde sıfır olacak şekilde yeni bir baz fonksiyonlarının kümesine dönüştürülmesi gerekir. 2-boyutlu $B_{ij}(x, y) = B_i(x)B_j(y)$ septik B-spline baz fonksiyonlarından D bölgesinin x yönündeki sınırından geçen $B_{-3}(x), B_{-2}(x), B_{-1}(x), B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_{n-2}(x), B_{n-1}(x), B_n(x), B_{n+1}(x), B_{n+2}(x)$ ve $B_{n+3}(x)$ ile y yönündeki sınırından geçen $B_{-3}(y), B_{-2}(y), B_{-1}(y), B_0(y), B_1(y), B_2(y), B_{m-2}(y), B_{m-1}(y), B_m(y), B_{m+1}(y), B_{m+2}(y)$ ve $B_{m+3}(y)$ septik B-spline baz fonksiyonları problemin ∂D sınırı üzerinde sıfır değildir. Bu 24 tane septik B-spline baz fonksiyonlar ∂D sınırı üzerinde problemin verilen tüm sınır şartlarını sağlamak şartıyla sınırı üzerinde sıfır olacak şekilde aşağıdaki adımlar takip edilerek yeni fonksiyonlar kümesine dönüştürülebilir. Bu şekilde elde edilen 2-boyutlu $B_{ij}(x, y)$ septik B-spline baz fonksiyonlarına modifiye edilmiş baz fonksiyonları denir ve $\tilde{B}_{ij}(x, y)$ ile gösterilir.

1. Adım: $u = u(x, y, t)$ tam çözümüne karşılık gelen (2.2.2.1) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{i=-3}^{n+3} \gamma_i(y, t) B_i(x) \quad (2.4.3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\gamma_i(y, t) = \sum_{j=-3}^{m+3} \alpha_{ij}(t) B_j(y) \quad (2.4.3.2)$$

dır. (2.4.3.1) yaklaşık çözümünün (2.2.3.5) ve (2.2.3.6) sınır şartlarını sağlaması

gerekir. (2.4.3.1) yaklaşık çözümünde sırası ile $x = x_0$ ve $x = x_n$ alınırsa

$$u_{nm}(x_0, y, t) = h_1(y, t) = \gamma_{-3}(y, t)B_{-3}(x_0) + \sum_{i=-2}^{n+2} \gamma_i(y, t)B_i(x_0) + \gamma_{n+3}(y, t)B_{n+3}(x_0) \quad (2.4.3.3)$$

$$u_{nm}(x_n, y, t) = h_2(y, t) = \gamma_{-3}(y, t)B_{-3}(x_n) + \sum_{i=-2}^{n+2} \gamma_i(y, t)B_i(x_n) + \gamma_{n+3}(y, t)B_{n+3}(x_n) \quad (2.4.3.4)$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.4.3.3) ve (2.4.3.4)'den sırası ile $\gamma_{-2}(y, t)$ ve $\gamma_{n+2}(y, t)$ yok edilirse (2.4.3.1) yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \frac{B_{-3}(x)}{B_{-3}(x_0)} h_1(y, t) + \sum_{i=-2}^{n+2} \gamma_i(y, t) \tilde{B}_i(x) + \frac{B_{n+3}(x)}{B_{n+3}(x_n)} h_2(y, t) \quad (2.4.3.5)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{-2}(x) &= B_{-2}(x) - \frac{B_{-2}(x_0)}{B_{-3}(x_0)} B_{-3}(x), \\
\tilde{B}_{-1}(x) &= B_{-1}(x) - \frac{B_{-1}(x_0)}{B_{-3}(x_0)} B_{-3}(x), \\
\tilde{B}_0(x) &= B_0(x) - \frac{B_0(x_0)}{B_{-3}(x_0)} B_{-3}(x), \\
\tilde{B}_1(x) &= B_1(x) - \frac{B_1(x_0)}{B_{-3}(x_0)} B_{-3}(x), \\
\tilde{B}_2(x) &= B_2(x) - \frac{B_2(x_0)}{B_{-3}(x_0)} B_{-3}(x), \\
\tilde{B}_3(x) &= B_2(x) - \frac{B_2(x_0)}{B_{-3}(x_0)} B_{-3}(x), \\
\tilde{B}_i(x) &= B_i(x), \quad i = 4(1)n - 4 \\
\tilde{B}_{n-3}(x) &= B_{n-3}(x) - \frac{B_{n-3}(x_n)}{B_{n+3}(x_n)} B_{n+3}(x), \\
\tilde{B}_{n-2}(x) &= B_{n-2}(x) - \frac{B_{n-2}(x_n)}{B_{n+3}(x_n)} B_{n+3}(x), \\
\tilde{B}_{n-1}(x) &= B_{n-1}(x) - \frac{B_{n-1}(x_n)}{B_{n+3}(x_n)} B_{n+3}(x), \\
\tilde{B}_n(x) &= B_n(x) - \frac{B_n(x_n)}{B_{n+3}(x_n)} B_{n+3}(x), \\
\tilde{B}_{n+1}(x) &= B_{n+1}(x) - \frac{B_{n+1}(x_n)}{B_{n+3}(x_n)} B_{n+3}(x), \\
\tilde{B}_{n+2}(x) &= B_{n+2}(x) - \frac{B_{n+2}(x_n)}{B_{n+3}(x_n)} B_{n+3}(x).
\end{aligned}$$

dır.

2. Adım: Bu adımda (2.2.3.8) ile verilen $\gamma_i(y, t)$ ifadesinde sırası ile $y = y_0$ ve $y = y_m$ alınırsa

$$\gamma_i(y_0, t) = \alpha_{i,-3}(t) B_j(y_0) + \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{ij}(t) B_j(y_0) + \alpha_{i,m+3}(t) B_j(y_0) \quad (2.4.3.6)$$

$$\gamma_i(y_m, t) = \alpha_{i,-3}(t) B_j(y_m) + \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{ij}(t) B_j(y_m) + \alpha_{i,m+3}(t) B_j(y_m) \quad (2.4.3.7)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.4.3.6) ve (2.4.3.7) eşitliklerinden sırasıyla $\alpha_{i,-1}(t)$ ve $\alpha_{i,m+1}(t)$ yok edilirse (2.2.3.8) eşitliği

$$\gamma_i(y, t) = \frac{B_{-3}(y)}{B_{-3}(y_0)} \gamma_i(y_0, t) + \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{ij}(t) \tilde{B}_j(y) + \frac{B_{m+3}(y)}{B_{m+3}(y_m)} \gamma_i(y_m, t) \quad (2.4.3.8)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{-2}(y) &= B_{-2}(y) - \frac{B_{-2}(y_0)}{B_{-3}(y_0)} B_{-3}(y), \\
\tilde{B}_{-1}(y) &= B_{-1}(y) - \frac{B_{-1}(y_0)}{B_{-3}(y_0)} B_{-3}(y), \\
\tilde{B}_0(y) &= B_0(y) - \frac{B_0(y_0)}{B_{-3}(y_0)} B_{-3}(y), \\
\tilde{B}_1(y) &= B_1(y) - \frac{B_1(y_0)}{B_{-3}(y_0)} B_{-3}(y), \\
\tilde{B}_2(y) &= B_2(y) - \frac{B_2(y_0)}{B_{-3}(y_0)} B_{-3}(y), \\
\tilde{B}_3(y) &= B_3(y) - \frac{B_3(y_0)}{B_{-3}(y_0)} B_{-3}(y), \\
\tilde{B}_j(y) &= B_j(y), \quad j = 4(1)m - 4 \\
\tilde{B}_{m-3}(y) &= B_{m-3}(y) - \frac{B_{m-3}(y_m)}{B_{m+3}(y_m)} B_{m+3}(y), \\
\tilde{B}_{m-2}(y) &= B_{m-2}(y) - \frac{B_{m-2}(y_m)}{B_{m+3}(y_m)} B_{m+3}(y), \\
\tilde{B}_{m-1}(y) &= B_{m-1}(y) - \frac{B_{m-1}(y_m)}{B_{m+3}(y_m)} B_{m+3}(y), \\
\tilde{B}_m(y) &= B_m(y) - \frac{B_m(y_m)}{B_{m+3}(y_m)} B_{m+3}(y), \\
\tilde{B}_{m+1}(y) &= B_{m+1}(y) - \frac{B_{m+1}(y_m)}{B_{m+3}(y_m)} B_{m+3}(y), \\
\tilde{B}_{m+2}(y) &= B_{m+2}(y) - \frac{B_{m+2}(y_m)}{B_{m+3}(y_m)} B_{m+3}(y)
\end{aligned}$$

dır.

3. Adım: (2.4.3.8) ile $\gamma_i(y, t)$ için verilen ifadenin (2.4.3.5) da yerine yazılması ve elde edilen sonuç denklemin (2.2.3.3) ile (2.2.3.4) verilen sınır şartlarını sağlaması ile

$$u_{nm}(x, y, t) = \omega_1(x, y, t) + \sum_{i=-2}^{n+2} \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \quad (2.4.3.9)$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}
\omega_1(x, y, t) = & \frac{B_{-3}(x)}{B_{-3}(x_0)} h_1(y, t) + \frac{B_{n+3}(x)}{B_{n+3}(x_n)} h_2(y, t) + \frac{B_{-3}(y)}{B_{-3}(y_0)} g_1(x, t) + \frac{B_{m+3}(y)}{B_{m+3}(y_m)} g_2(x, t) \\
& - \frac{B_{-3}(y)}{B_{-3}(y_0)} \left[\frac{B_{-3}(x)}{B_{-3}(x_0)} h_1(y_0, t) + \frac{B_{n+3}(x)}{B_{n+3}(x_n)} h_2(y_0, t) \right] \\
& - \frac{B_{m+3}(y)}{B_{m+3}(y_m)} \left[\frac{B_{-3}(x)}{B_{-3}(x_0)} h_1(y_m, t) + \frac{B_{n+3}(x)}{B_{n+3}(x_n)} h_2(y_m, t) \right]
\end{aligned} \tag{2.4.3.10}$$

dır. Şimdi yukarıdaki adımları yaklaşık çözüme bir kere daha fakat bu defa yaklaşık çözümü

$$u_{nm}(x, y, t) = \sum_{j=-3}^{m+3} \delta_j(x, t) B_j(y) \tag{2.4.3.11}$$

biçiminde alarak bir daha uygulayalım. Burada

$$\delta_j(x, t) = \sum_{i=-3}^{n+3} \alpha_{ij}(t) B_i(x) \tag{2.4.3.12}$$

dır.

(2.4.3.11) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yi (2.2.3.1)-(2.2.3.6) denklem sistemi için yaklaşık çözüm olarak kabul eder ve yukarıdaki adımları uygularsak

$$u_{nm}(x, y, t) = \omega_2(x, y, t) + \sum_{i=-2}^{n+2} \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{ij}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \tag{2.4.3.13}$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}
\omega_2(x, y, t) = & \frac{B_{-3}(x)}{B_{-3}(x_0)} h_1(y, t) + \frac{B_{n+3}(x)}{B_{n+3}(x_n)} h_2(y, t) + \frac{B_{-3}(y)}{B_{-3}(y_0)} g_1(x, t) + \frac{B_{m+3}(y)}{B_{m+3}(y_m)} g_2(x, t) \\
& - \frac{B_{-3}(y)}{B_{-3}(y_0)} \left[\frac{B_{-3}(x)}{B_{-3}(x_0)} g_1(x_0, t) + \frac{B_{n+3}(x)}{B_{n+3}(x_n)} g_1(x_n, t) \right] \\
& - \frac{B_{m+3}(y)}{B_{m+3}(y_m)} \left[\frac{B_{-3}(x)}{B_{-3}(x_0)} g_2(x_0, t) + \frac{B_{n+3}(x)}{B_{n+3}(x_n)} g_2(x_n, t) \right]
\end{aligned} \tag{2.4.3.14}$$

dır.

(2.4.3.9) yaklaşımı D bölgesinin sadece x yönündeki sınırları üzerinde sıfır iken (2.4.3.13) yaklaşımı D bölgesinin sadece y yönündeki sınırları üzerinde sıfırdır. $u(x, y, t)$ tam çözümüne karşılık gelen bir $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü problemin D bölgesinin ∂D sınırının tümü üzerinde sıfır olacak şekilde aranacağından bu

şartları sağlayacak $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü (2.4.3.9) ve (2.4.3.13) denklemlerinin ortalamalarıdır. Yani,

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(x, y, t) &= \frac{\omega_1(x, y, t) + \omega_2(x, y, t)}{2} + \sum_{i=-2}^{n+2} \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y) \quad (2.4.3.15) \\
 &= \omega(x, y, t) + \sum_{i=-2}^{n+2} \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_{i,j}(t) \tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y)
 \end{aligned}$$

formunda aranır. Burada baz fonksiyonlarının yeni kümesi, $i = -2, -1, \dots, n + 2$, $j = -2, -1, \dots, m + 2$ olmak üzere, $\tilde{B}_i(x) \tilde{B}_j(y)$ olup tüm bu baz fonksiyonları verilen problemin tüm sınırında sıfırdır. Dolayısıyla (2.2.3.3)-(2.2.3.6) sınır şartları (2.4.3.15)'deki $\omega(x, y, t)$ fonksiyonuna dahil edilir [23].

BÖLÜM 3

2–BOYUTLU POISSON DENKLEMİNİN MODİFİYE EDİLMİŞ B-SPLINE GALERKİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

3.1 Giriş

2–boyutlu Poisson denkleminin nümerik çözümü üzerine literatürde bir takım çalışmalar vardır. Wu ve Zhang [12], Galerkin kuartik B-spline sonlu eleman yöntemini kullanarak 2–boyutlu Poisson denklemi için Dirichlet probleminin yaklaşık çözümünü elde etmişlerdir. Schaerer vd. [24], 2–boyutlu sıkıştırılmaz akış simülasyonlarında ortaya çıkan ve Dirichlet sınır şartlarıyla verilen Poisson denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için beş nokta sonlu fark molekülünü kullanarak çok seviyeli Schwarz atış yöntemini sunmuşlardır. Ahmed ve Monaque [25], 9-nokta altıncı mertebeden tam kompakt sonlu fark yöntemiyle 2–boyutlu Poisson denklemi için çoklu kafes yöntemini geliştirip ve nümerik sonuçlarla yöntemlerinin etkinliğini göstermişlerdir.

Bu bölümde modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik, kuintik ve septik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle aşağıda verilen model problem olarak göz önüne alınan 2–boyutlu Poisson denklemi için Dirichlet probleminin yaklaşık çözümleri elde edildi. Elde edilen nümerik çözümler problemin literatürdeki mevcut çözümleriyle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde sunuldu.

3.2 Model Problem

Bu bölümde, $D = [0, 1] \times [0, 1]$ olmak üzere,

$$-\Delta u = f(x, y) = -\{5(x-1)[2\cos(5y) - 5(y-1)\sin(5y)]\}, \quad (x, y) \in D \quad (3.2.1)$$

denklemini ve

$$u(x, y_0) = g_1(x) = 0, \quad (x, y) \in \partial D_1 \quad (3.2.2)$$

$$u(x, y_m) = g_2(x) = 0, \quad (x, y) \in \partial D_2 \quad (3.2.3)$$

$$u(x_0, y) = h_1(y) = (1 - y)(\sin(5y)), \quad (x, y) \in \partial D_3 \quad (3.2.4)$$

$$u(x_n, y) = h_2(y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D_4 \quad (3.2.5)$$

sınır şartları ile verilen 2-boyutlu sınır değer problemi göz önüne alındı. Burada $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ olup problemin tam çözümü $u(x, y) = (1 - x)(1 - y) \sin(5y)$ dir [12]. Wu ve Zhang [12], kuartik B-spline baz fonksiyonlarını kullanarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile bu model problemin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir.

Model Problemin Zayıf Formu

Bu bölümde yukarıda verilen model problemin $u(x, y)$ tam çözümüne karşılık gelen $u_{nm}(x, y)$ yaklaşık çözümü modifiye edilmiş kübik, kuintik ve septik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edileceğinden problemin zayıf form denkleminin bulunması gerekir. Bunun için önce (3.2.1) denklemindeki tüm ifadeler eşitliğin sol tarafında toplanır ve sonra $\Psi(x, y)$ ağırlık fonksiyonu ile çarpımının bölge üzerinden integrali alınır

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Psi dx dy = 0 \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Burada, $k = 0(1)n$ ve $l = 0(1)m$ olmak üzere, $\Psi = \tilde{B}_k(x)\tilde{B}_l(y)$ dir. u bağımlı değişkeninin mertebesini, kendisi ve Ψ ağırlık fonksiyonu arasında paylaşmak için Green teoremi kullanılır. Şöyleki, D Lipschitz sınırlı bir bölge, $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ ve $g(x) = g(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonları $\partial f/\partial x_i$ ve $\partial g/\partial x_i$ türevleri ile birlikte $\bar{D} = D + \partial D$ de sürekli fonksiyonlar ise Green teoreminden

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx dy + \iint_D \frac{\partial g}{\partial x_i} f dx dy = \oint_{\partial D} f g v_i ds \quad (3.2.7)$$

dir. Burada, i sayısı 1 ile N arasında herhangi bir sayı olup v_i dış normalin birim vektörünün i . koordinatıdır. (3.2.7) eşitliği

$$f = \frac{\partial u}{\partial x}, g = \Psi, i = 1 \text{ için } \iint_D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Psi dx dy + \iint_D \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x} \Psi v_1 ds \quad (3.2.8)$$

ve

$$f = \frac{\partial u}{\partial y}, g = \Psi, i = 2 \text{ için } \iint_D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Psi dx dy + \iint_D \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial y} \Psi v_2 ds \quad (3.2.9)$$

olur. Tüm $\tilde{B}_k(x)$ ve $\tilde{B}_l(y)$ 'ler ∂D sınırı üzerinde sıfır olduğundan açıkça Ψ 'de ∂D sınırı üzerinde sıfırdır. Böylece (3.2.8) ve (3.2.9) denklemlerinin sağ tarafları otomatik olarak sıfır olup bunlar (3.2.6)'da kullanılırsa (3.2.1)-(3.2.5) denklemleri ile verilen model problemin global koordinat sisteminde zayıf formu

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \Psi dx dy \quad (3.2.10)$$

olarak elde edilir. Global koordinat sisteminden lokal koordinat sistemine geçmek için $h_x \xi = x - x_n$ ve $h_y \eta = y - y_m$ lokal koordinat dönüşümleri kullanılır. Böylece, global koordinat sistemindeki (3.2.10) zayıf form denklemi lokal koordinat sisteminde

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = h^2 \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) \Psi d\xi d\eta \quad (3.2.11)$$

olur.

3.3 Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kübik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda model problemin nümerik çözümleri modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. Nümerik hesaplamalar problemin $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi sırası ile 4 ($h_x = h_y = 1/2$), 16 ($h_x = h_y = 1/4$) ve 100 ($h_x = h_y = 1/10$) elemana ayrılarak yapıldı. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

Bölgenin $2 \times 2 = 4$ Elemana Ayrılması

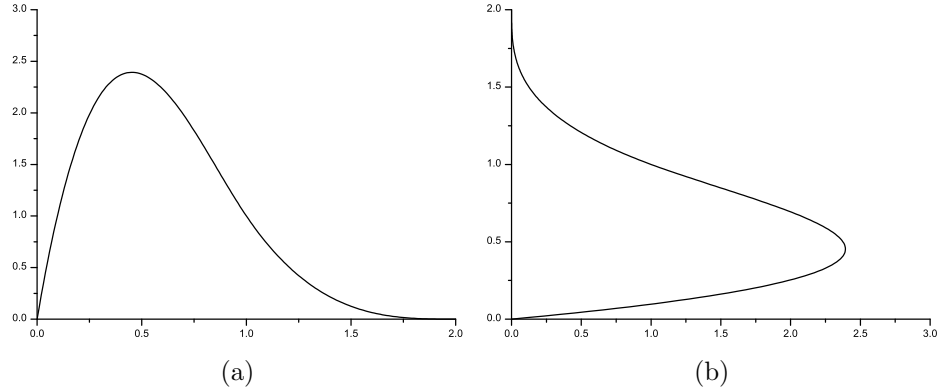
Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $2 \times 2 = 4$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/2$ olan 4 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (3.2.11) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve

$\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y)$ yerine Bölüm 2’de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y)$ yaklaşımı (2.2.3.17) ve (2.2.3.21) denklemleri ile birlikte yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için eleman konum tablosu olarak bilinen bir tablodan yararlanılır. Örneğin böyle bir tablo 4 eleman için Tablo 3.1’deki gibi

Tablo 3.1: 4-eleman için eleman konum tablosu.

3	4
1	2

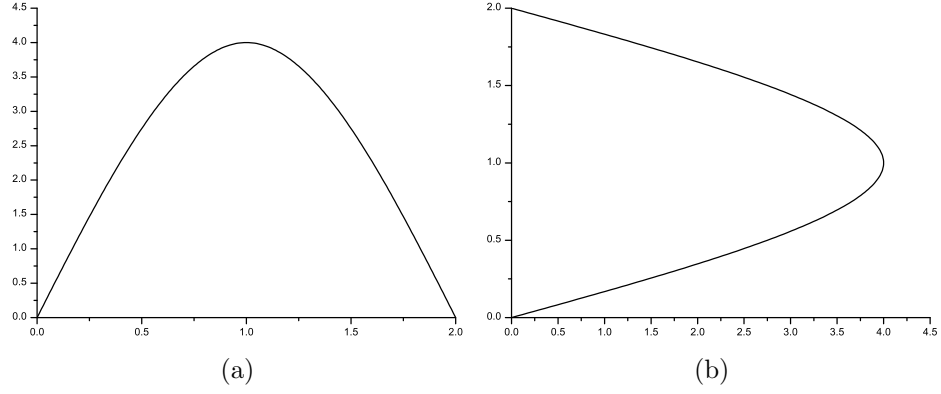
numaralandırılır. Bu tablo eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte tüm elemanların birleştirilmesinde de kullanılır. Şekil (3.1)-(3.3), $i = 0(1)2$ olmak üzere, sırası ile x ve y yönlerindeki $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_i(y)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının grafiklerini göstermektedir. Problemin çözüm bölgesine düşen sırası ile x ve y yönlerinde modifiye edilmiş $\tilde{B}(x)$



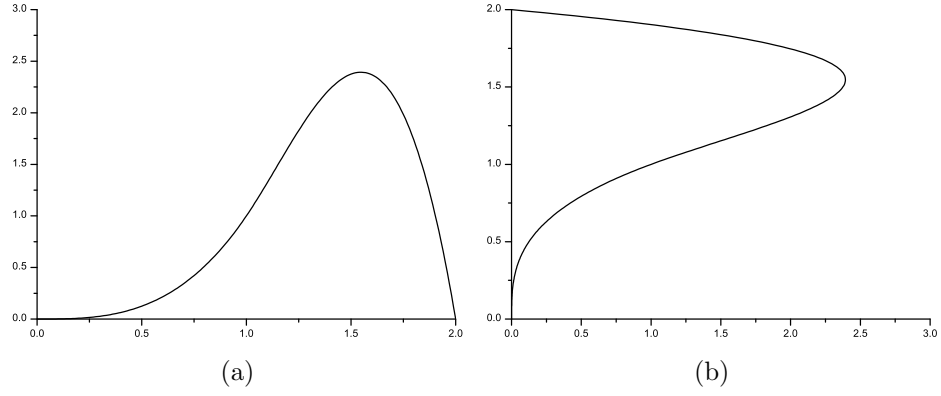
Şekil 3.1: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_0(x)$ ve (b) $\tilde{B}_0(y)$ kübik B-spline fonksiyonlar.

ve $\tilde{B}(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonlarının tümü Şekil 3.4’de gösterilmiştir.

Her bir kübik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$ ve $\tilde{B}_2(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla α_0, α_1 ve α_2 gibi reel katsayılar ile $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$ ve $\tilde{B}_2(\eta)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları da sırasıyla β_0, β_1 ve β_2 gibi reel katsayılar ile çarpılır. (2.2.3.22)



Şekil 3.2: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_1(x)$ ve (b) $\tilde{B}_1(y)$ kübik B-spline fonksiyonlar.

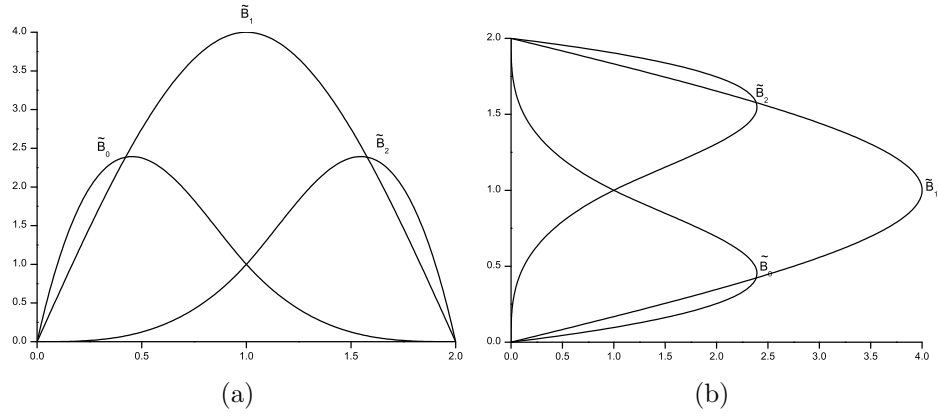


Şekil 3.3: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_2(x)$ ve (b) $\tilde{B}_2(y)$ kübik B-spline fonksiyonlar.

yaklaşımı (3.2.11) zayıf formunda, ξ ve η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü aşağıdaki eleman denklemleri ile ifade edilir.

1. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{5\eta}{2}\right) \\
 & + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_0 Q_1 \\
 & + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_1 Q_2 \\
 & + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_2 Q_3,
 \end{aligned}$$



Şekil 3.4: Çözüm bölgesine düşen modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}(x)$ ve (b) $\tilde{B}(y)$ kübik B-spline fonksiyonların tümü.

2. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) &= [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6] \beta_0 Q_1 \\
 &+ [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6] \beta_1 Q_2 \\
 &+ [\alpha_0 F_4 + \alpha_5 F_5 + \alpha_2 F_6] \beta_2 Q_3,
 \end{aligned}$$

3. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) &= (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) \left(1 - \frac{\eta + 1}{2} \right) \sin \left(\frac{5(\eta + 1)}{2} \right) \\
 &+ [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_0 Q_4 \\
 &+ [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_1 Q_5 \\
 &+ [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_2 Q_6,
 \end{aligned}$$

4. eleman için

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) &= [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6] \beta_0 Q_4 \\
 &+ [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6] \beta_1 Q_5 \\
 &+ [\alpha_0 F_4 + \alpha_5 F_5 + \alpha_2 F_6] \beta_2 Q_6
 \end{aligned}$$

dir. Burada

$$F_1 = 12\xi - 18\xi^2 + 7\xi^3,$$

$$Q_1 = 12\eta - 18\eta^2 + 7\eta^3,$$

$$F_2 = 6\xi - 2\xi^3,$$

$$Q_2 = 6\eta - 2\eta^3,$$

$$F_3 = \xi^3,$$

$$Q_3 = \eta^3,$$

$$F_4 = 1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3,$$

$$Q_4 = 1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3,$$

$$F_5 = 4 - 6\xi^2 + 2\xi^3,$$

$$Q_5 = 4 - 6\eta^2 + 2\eta^3,$$

$$F_6 = 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 7\xi^3,$$

$$Q_6 = 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 7\eta^3$$

dir.

Yukarıda ifade edilen her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde α_i ve β_i , ($i = 0(1)2$) lokal eleman parametrelerine bağlı

$$A_1 = \alpha_0\beta_0, \quad A_2 = \alpha_1\beta_0, \quad A_3 = \alpha_2\beta_0,$$

$$A_4 = \alpha_0\beta_1, \quad A_5 = \alpha_1\beta_1, \quad A_6 = \alpha_2\beta_1,$$

$$A_7 = \alpha_0\beta_2, \quad A_8 = \alpha_1\beta_2, \quad A_9 = \alpha_2\beta_2$$

şeklinde toplam $3 \times 3 = 9$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü bulmak için A_i , ($i = 1(1)9$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü (3.2.11) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilirse global koordinatlarda

$$PA + f = 0 \tag{3.3.1}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada, $i, j, k, l = 0(1)n$ için $i_l = j(n+1) + i$ ve $j_l = l(n+1) + k$ olmak üzere,

$$P = [p_{i_l j_l}],$$

$$P = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \tilde{B}_i(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_j(\eta) \frac{\partial \tilde{B}_k(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}_i(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_j(\eta)}{\partial \eta} \tilde{B}_k(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta d\xi$$

$$A = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6 \ A_7 \ A_8 \ A_9]^t$$

$$f = [f_{i_l}], \quad f_{i_l} = h^2 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \tilde{B}_k(\xi) \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi +$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \omega(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{B}_i(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_j(\eta) d\eta d\xi + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \omega(\xi, \eta)}{\partial \eta} \tilde{B}_i(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_j(\eta)}{\partial \eta} d\eta d\xi$$

dir.

(3.3.1) cebirsel denklem sistemi çözülürse $A_i, (i = 1(1)9)$ global eleman parametreleri

$$A_1 = 0.041198, \quad A_2 = 0.020054, \quad A_3 = 0.000099,$$

$$A_4 = 0.006746, \quad A_5 = 0.003381, \quad A_6 = 0.000009,$$

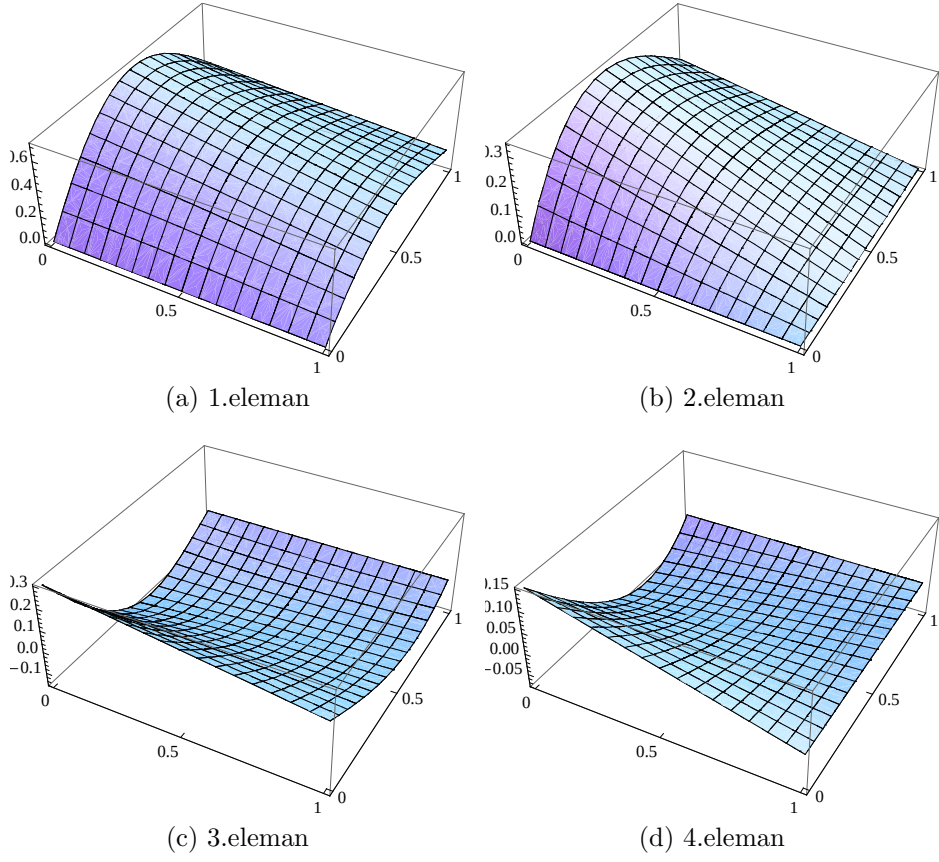
$$A_7 = -0.018324, \quad A_8 = -0.008639, \quad A_9 = -0.000131,$$

olarak elde edilir.

Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 3.2’de model problemin modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam ve yaklaşık çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin referans [12]’de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 3.5, her bir elemanın çözüm grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 4 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 3.6’da verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.

Bölgenin $4 \times 4 = 16$ Elemana Ayrılması

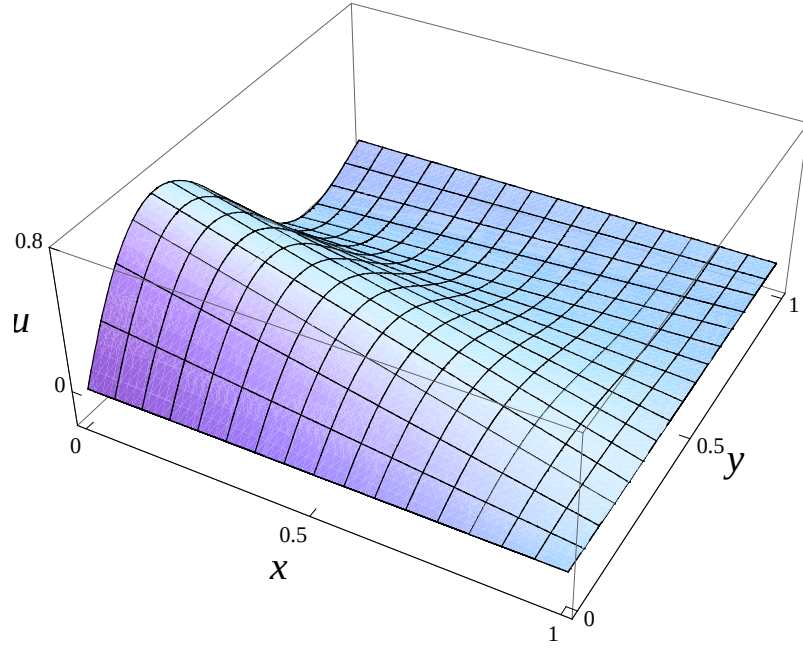
Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $4 \times 4 = 16$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/4$ olan 16 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (3.2.11) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve



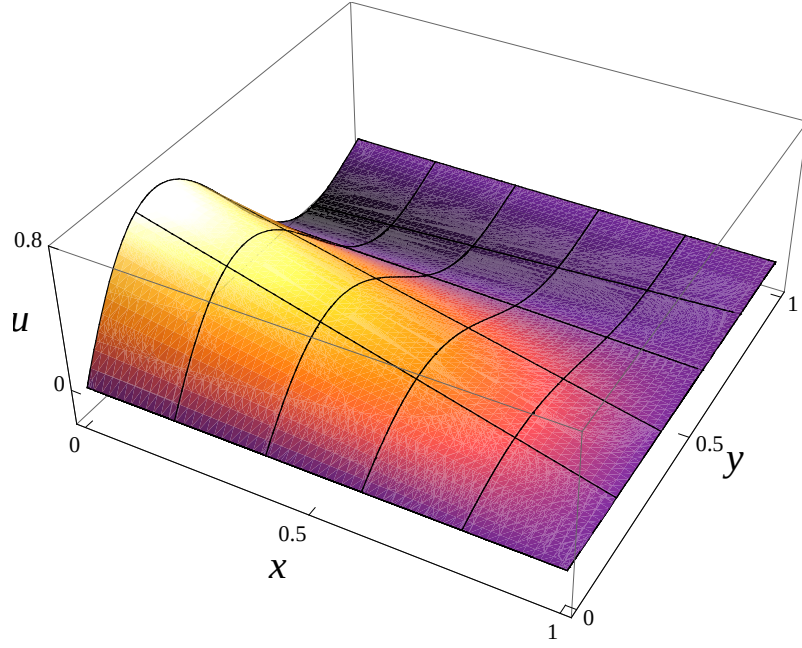
Şekil 3.5: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için nümerik çözümleri.

Tablo 3.2: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	2×2	[12]	
(0.25,0.25)	0.513575	0.523514	0.533804
(0.25,0.50)	0.224400	0.229845	0.224427
(0.25,0.75)	-0.088922	-0.0987043	-0.107168
(0.50,0.25)	0.337737	0.345257	0.355869
(0.50,0.50)	0.149620	0.152811	0.149618
(0.50,0.75)	-0.054942	-0.0646793	-0.0714452
(0.75,0.25)	0.168427	0.173169	0.177935
(0.75,0.50)	0.074831	0.0766886	0.0748090
(0.75,0.75)	-0.027085	-0.0326491	-0.0357226



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 3.6: Model problemin $2 \times 2 = 4$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

$\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y)$ yerine Bölüm 2’de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için bir eleman konum tablosundan yararlanılır. Örneğin böyle bir tablo 16 eleman için Tablo 3.3’deki gibi

Tablo 3.3: 16-eleman için eleman konum tablosu.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

numaralandırılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır.

Her bir kübik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(x)$ ve $\tilde{B}_4(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla α_0 , α_1 , α_2 , α_3 ve α_4 gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$ ve $\tilde{B}_4(\eta)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla β_0 , β_1 , β_2 , β_3 ve β_4 gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.2.3.22) yaklaşımı (3.2.11) zayıf formunda, ξ ve η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü aşağıdaki eleman denklemleri ile ifade edilir.

1. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) \sin\left(\frac{5\eta}{4}\right) \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_0 Q_1 \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_1 Q_2 \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_2 Q_3
\end{aligned}$$

2. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_0 Q_4 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_1 Q_5 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_2 Q_6 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_3 Q_3
\end{aligned}$$

3. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_1 Q_4 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_2 Q_5 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_3 Q_6 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_4 Q_3
\end{aligned}$$

4. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_0 Q_4 \\
& + [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_1 Q_7 \\
& + [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_2 Q_8
\end{aligned}$$

5. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) \left(1 - \frac{\eta + 1}{4} \right) \sin \left(\frac{5(\eta + 1)}{4} \right) \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_0 Q_4 \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_1 Q_5 \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_2 Q_6 \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_3 Q_3
\end{aligned}$$

6. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_0 Q_4 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_1 Q_5 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_2 Q_6 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_3 Q_3
\end{aligned}$$

7. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_0 Q_4 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_1 Q_5 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_2 Q_6 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_3 Q_3
\end{aligned}$$

8. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_0 Q_4 \\
& + [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_1 Q_5 \\
& + [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_2 Q_6 \\
& + [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_3 Q_3
\end{aligned}$$

9. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) \left(1 - \frac{\eta + 2}{4}\right) \sin\left(\frac{5(\eta + 2)}{4}\right) \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_1 Q_4 \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_2 Q_5 \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_3 Q_6 \\
& + [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_4 Q_3
\end{aligned}$$

10. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_1 Q_4 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_2 Q_5 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_3 Q_6 \\
& + [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_4 Q_3
\end{aligned}$$

11. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_1 Q_4 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_2 Q_5 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_3 Q_6 \\
& + [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_4 Q_3
\end{aligned}$$

12. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) &= [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_1 Q_4 \\
&+ [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_2 Q_5 \\
&+ [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_3 Q_6 \\
&+ [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_4 Q_3
\end{aligned}$$

13. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) &= (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) \left(1 - \frac{\eta + 3}{4}\right) \sin\left(\frac{5(\eta + 3)}{4}\right) \\
&+ [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_2 Q_4 \\
&+ [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_3 Q_7 \\
&+ [\alpha_0 F_1 + \alpha_1 F_2 + \alpha_2 F_3] \beta_4 Q_8
\end{aligned}$$

14. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) &= [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_2 Q_4 \\
&+ [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_3 Q_7 \\
&+ [\alpha_0 F_4 + \alpha_1 F_5 + \alpha_2 F_6 + \alpha_3 F_3] \beta_4 Q_8
\end{aligned}$$

15. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) &= [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_2 Q_4 \\
&+ [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_3 Q_7 \\
&+ [\alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_3] \beta_4 Q_8
\end{aligned}$$

16. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) &= [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_2 Q_4 \\
&+ [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_3 Q_7 \\
&+ [\alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_7 + \alpha_4 F_8] \beta_4 Q_8
\end{aligned}$$

dir.

Burada

$$F_1 = 12\xi - 18\xi^2 + 7\xi^3,$$

$$Q_1 = 12\eta - 18\eta^2 + 7\eta^3,$$

$$F_2 = 6\xi - 2\xi^3,$$

$$Q_2 = 6\eta - 2\eta^3,$$

$$F_3 = \xi^3,$$

$$Q_3 = \eta^3,$$

$$F_4 = 1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3,$$

$$Q_4 = 1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3,$$

$$F_5 = 4 - 6\xi^2 + 3\xi^3,$$

$$Q_5 = 4 - 6\eta^2 + 3\eta^3$$

$$F_6 = 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3,$$

$$Q_6 = 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3,$$

$$F_7 = 4 - 6\xi^2 + 2\xi^3,$$

$$Q_7 = 4 - 6\eta^2 + 2\eta^3,$$

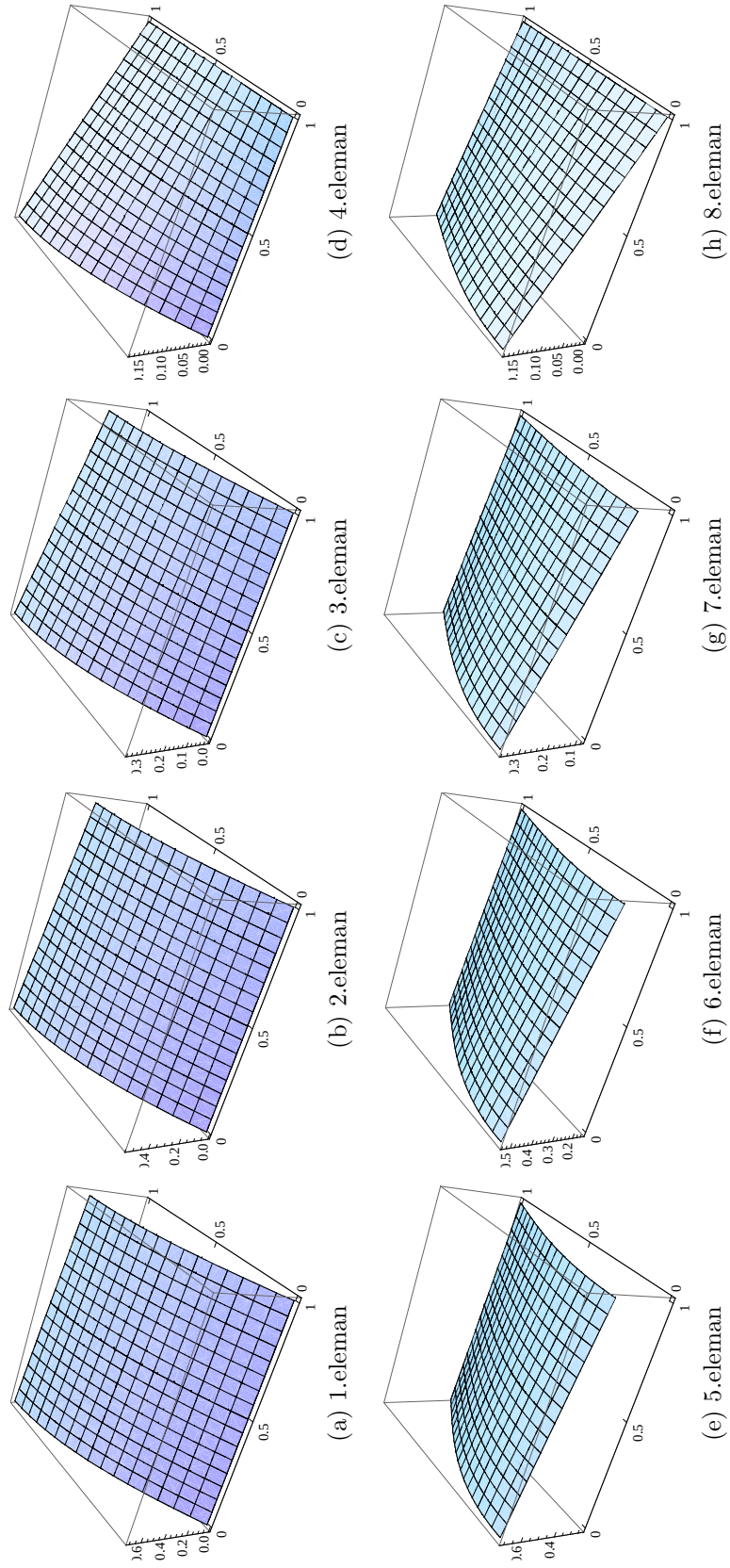
$$F_8 = 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 7\xi^3,$$

$$Q_8 = 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 7\eta^3$$

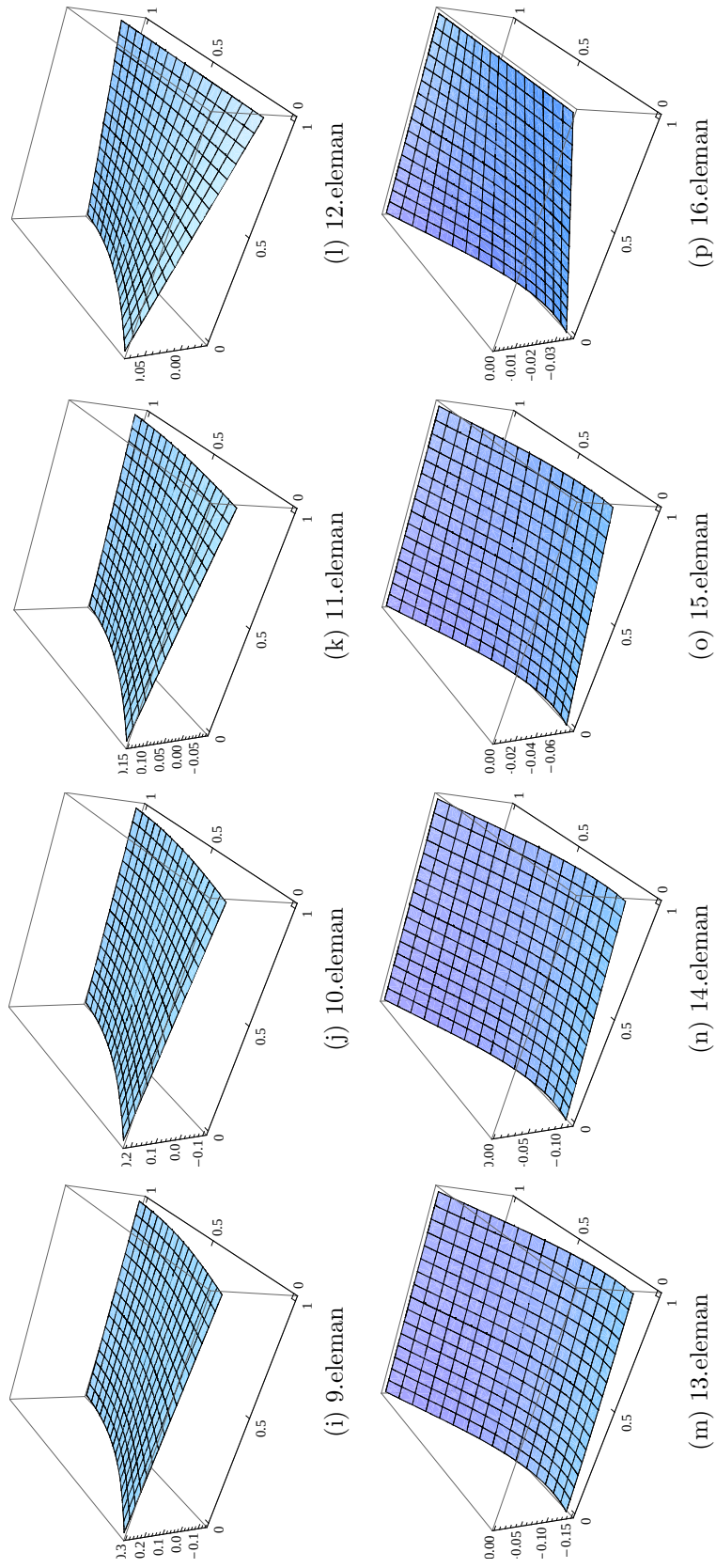
dır.

Yukarıda ifade edilen her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde α_i ve β_i , ($i = 0(1)2$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $5 \times 5 = 25$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü bulmak için A_i , ($i = 1(1)25$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü (3.2.11) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda (3.3.1) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülürse A_i , ($i = 1(1)25$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde

edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 3.4’de model problemin modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam ve yaklaşık çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin referans [12]’de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 3.7, her bir elemanın çözüm grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 16 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 3.8’de verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.



Şekil 3.7: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



Şekil 3.7: (Devam) Model problemin $4 \times 4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

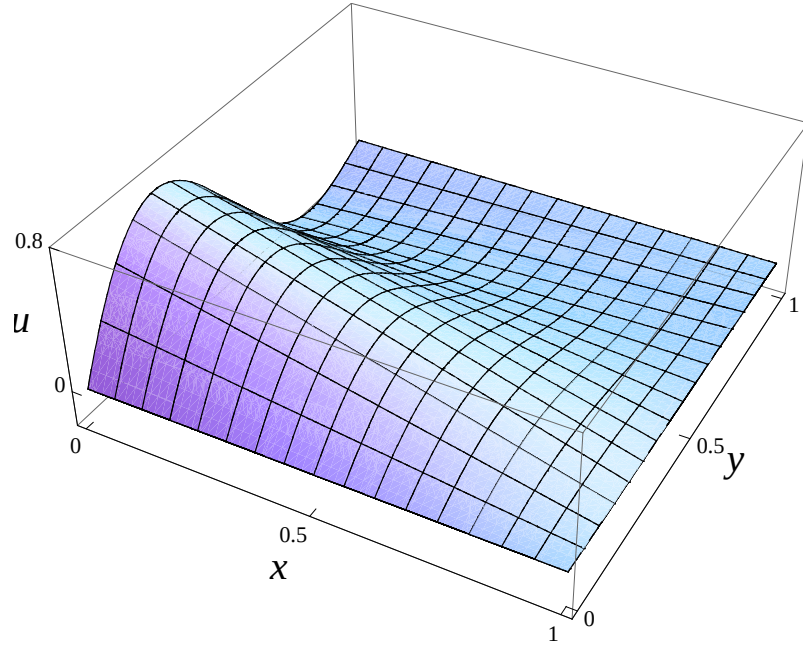
Tablo 3.4: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	[12]	
(0.25,0.25)	0.536520	0.523514	0.533804
(0.25,0.50)	0.223197	0.229845	0.224427
(0.25,0.75)	-0.110009	-0.0987043	-0.107168
(0.50,0.25)	0.357648	0.345257	0.355869
(0.50,0.50)	0.148805	0.152811	0.149618
(0.50,0.75)	-0.073303	-0.0646793	-0.0714452
(0.75,0.25)	0.178814	0.173169	0.177935
(0.75,0.50)	0.074400	0.0766886	0.0748090
(0.75,0.75)	-0.036637	-0.0326491	-0.0357226

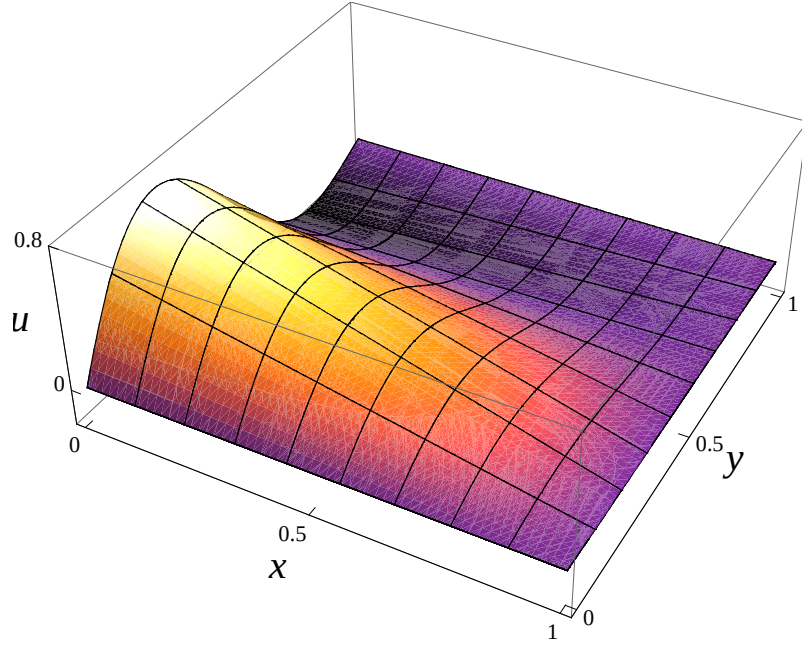
Bölgenin $10 \times 10 = 100$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $10 \times 10 = 100$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/10$ olan 100 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (3.2.11) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y)$ yerine Bölüm 2'de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için bir eleman konum tablosundan yararlanılır. Örneğin böyle bir tablo 100 eleman için Tablo 3.5'de verildiği gibi numaralandırılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır.

Her bir kübik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$, $\tilde{B}_5(\xi)$, $\tilde{B}_6(\xi)$, $\tilde{B}_7(\xi)$, $\tilde{B}_8(\xi)$, $\tilde{B}_9(\xi)$ ve $\tilde{B}_{10}(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$ ve α_{10} gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$, $\tilde{B}_5(\eta)$, $\tilde{B}_6(\eta)$, $\tilde{B}_7(\eta)$, $\tilde{B}_8(\eta)$, $\tilde{B}_9(\eta)$ ve $\tilde{B}_{10}(\eta)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9$ ve β_{10} gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.2.3.22) yaklaşımı (3.2.11) zayıf formunda, ξ ve η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(x, y)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemini



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 3.8: Model problemin $4 \times 4 = 16$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

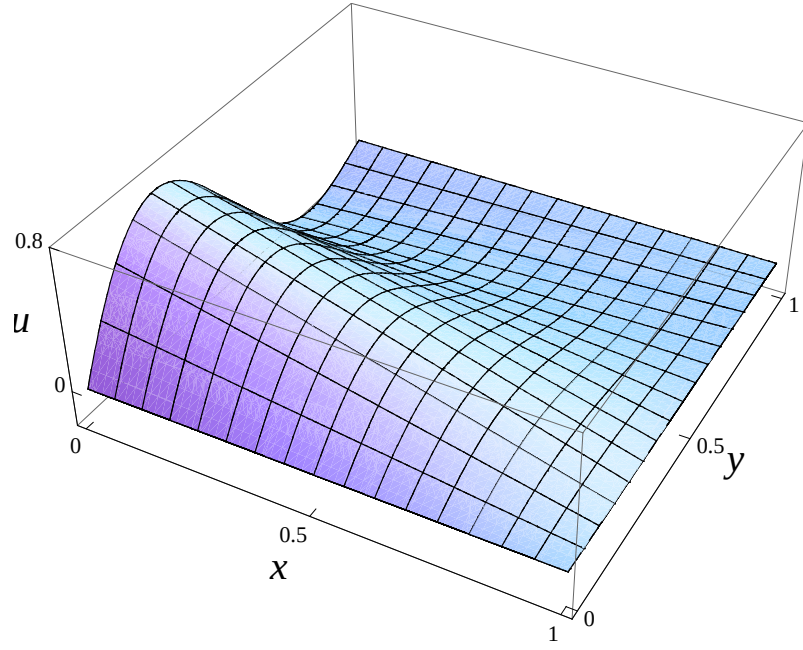
Tablo 3.5: 100-eleman için eleman konum tablosu.

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

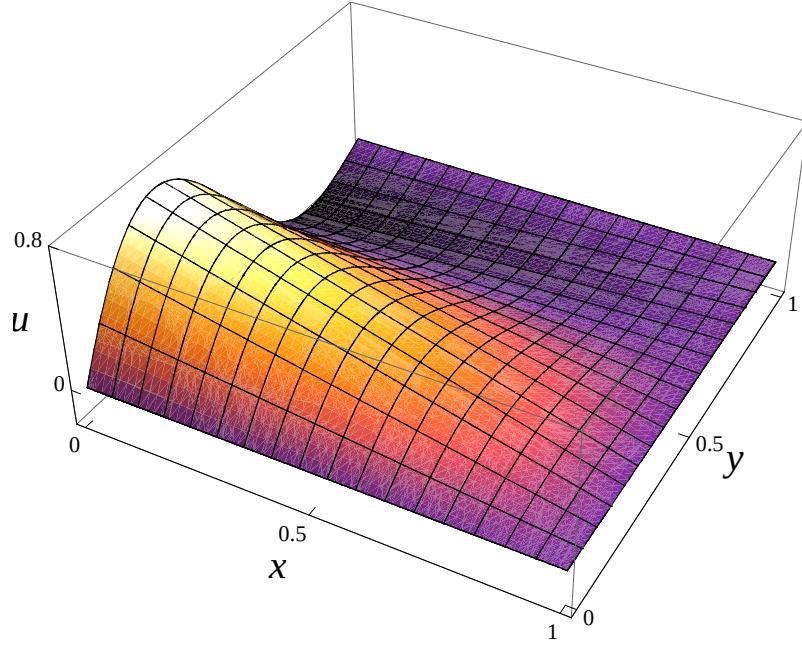
elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde α_i ve β_i , ($i = 0(1)10$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $11 \times 11 = 121$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü bulmak için A_i , ($i = 1(1)121$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü (3.2.11) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda (3.3.1) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülürse A_i , ($i = 1(1)121$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 3.6'da model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam ve yaklaşık çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin referans [12]'de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 100 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 3.9'da verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin referans [12]'de verilenlere göre tam çözümle daha iyi uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 3.7'de kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı.



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 3.9: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için nümerik çözümleri.

Tablo 3.6: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	10×10	[12]	
(0.25,0.25)	0.533739	0.523514	0.533804
(0.25,0.50)	0.224389	0.229845	0.224427
(0.25,0.75)	-0.107114	-0.0987043	-0.107168
(0.50,0.25)	0.355838	0.345257	0.355869
(0.50,0.50)	0.149640	0.152811	0.149618
(0.50,0.75)	-0.071374	-0.0646793	-0.0714452
(0.75,0.25)	0.177934	0.173169	0.177935
(0.75,0.50)	0.074885	0.0766886	0.0748090
(0.75,0.75)	-0.035651	-0.0326491	-0.0357226

Tablodan nümerik çözümle tam çözümün oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Bu kısımda farklı sayıda eleman kullanılarak modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline sonlu eleman yöntemiyle model problemin nümerik çözümleri elde edildi. Problemin çözüm bölgesinin az sayıda elemana ayrıldığı durumlarda da elde edilen nümerik çözümlerin problemin tam çözümü ile uyum içerisinde olduğu ve hatta eleman sayısının arttırılmasıyla birlikte elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme daha da iyi yaklaştığı görüldü. Bundan dolayı elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümün grafikleri birbirinden ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.

3.4 Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kuintik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

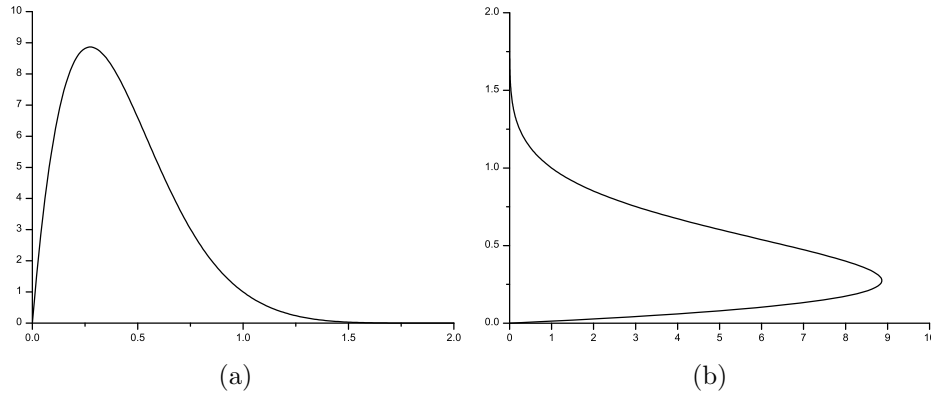
Bu kısımda model problemin yaklaşık çözümleri modifiye edilmiş 2–boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi sırası ile 16 ($h_x = h_y = 1/4$) ve 100 ($h_x = h_y = 1/10$) elemana ayrılarak nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen çözümler literatürdeki mevcut çözümlerle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

Tablo 3.7: Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})			Tam Çözüm (u)
	2×2	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.046831	0.043009	0.043170	0.043148
(0.8,0.2)	0.131830	0.134798	0.134688	0.134635
(0.7,0.3)	0.193947	0.209947	0.209531	0.209474
(0.6,0.4)	0.201072	0.216528	0.218285	0.218231
(0.5,0.5)	0.149620	0.148805	0.149640	0.149618
(0.4,0.6)	0.059830	0.037402	0.033851	0.033869
(0.3,0.7)	-0.043940	-0.073330	-0.073714	-0.073664
(0.2,0.8)	-0.119032	-0.123752	-0.121140	-0.121088
(0.1,0.9)	-0.103662	-0.087299	-0.087997	-0.087978
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.1,0.1)	0.404567	0.387366	0.388441	0.388335
(0.2,0.2)	0.534041	0.539280	0.538618	0.538541
(0.3,0.3)	0.458664	0.489911	0.488809	0.488773
(0.4,0.4)	0.302790	0.324790	0.327363	0.327347
(0.5,0.5)	0.149620	0.148805	0.149640	0.149618
(0.6,0.6)	0.040709	0.024927	0.022664	0.022579
(0.7,0.7)	-0.016264	-0.031402	-0.031459	-0.031570
(0.8,0.8)	-0.028405	-0.030937	-0.030183	-0.030272
(0.9,0.9)	-0.013389	-0.009712	-0.009751	-0.009775
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Bölgenin $4 \times 4 = 16$ Elemana Ayrılması

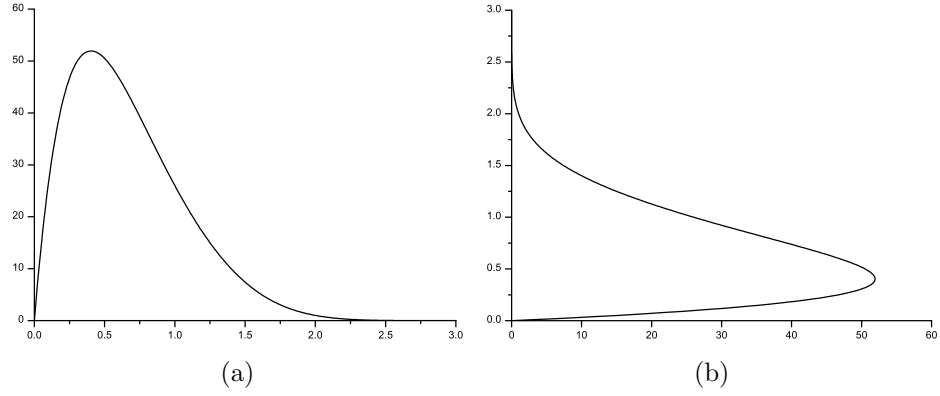
Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $4 \times 4 = 16$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/4$ olan 16 eleman elde edilir. Modifiye edilmiş kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemi ile model problemin yaklaşık çözümü elde edileceğinden model probleme karşılık gelen (3.2.11) zayıf form denklemi kullanılır. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için (3.2.11) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y)$ yerine Bölüm 2’de (2.3.3.15) ile verilen $u_{nm}(x, y)$ yaklaşımı (2.3.3.10) ve (2.3.3.14) denklemleri ile birlikte yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.3’de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır. Şekil (3.10)-(3.16), $i = -1(1)5$ olmak üzere, sırası ile x ve y yönlerindeki modifiye edilmiş $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_i(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlarının grafiklerini göstermektedir. Problemin çözüm bölgesine düşen sırası ile x ve y yönlerinde



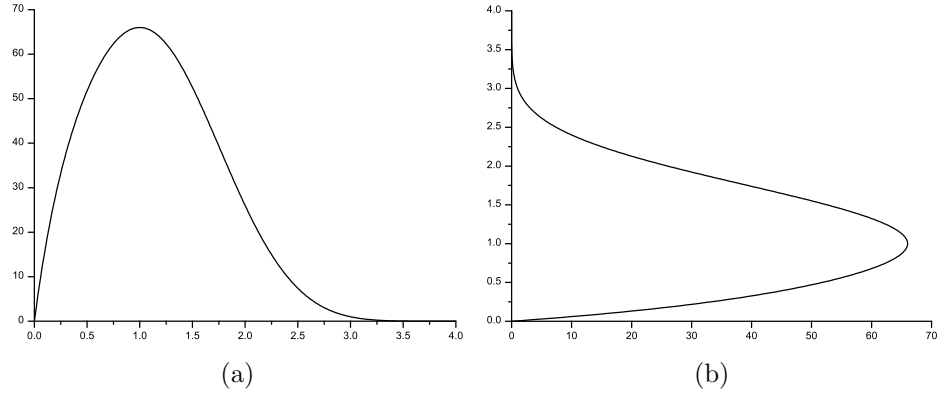
Şekil 3.10: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_{-1}(x)$ ve (b) $\tilde{B}_{-1}(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.

modifiye edilmiş kuintik B-spline baz fonksiyonların tümü bir arada Şekil 3.17’de gösterilmiştir.

Her bir kuintik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_{-1}(\xi)$, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$ ve $\tilde{B}_5(\xi)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları sırasıyla α_{-1} , α_0 , α_1 , α_2 , α_3 , α_4 ve α_5 gibi reel katsayılar ile

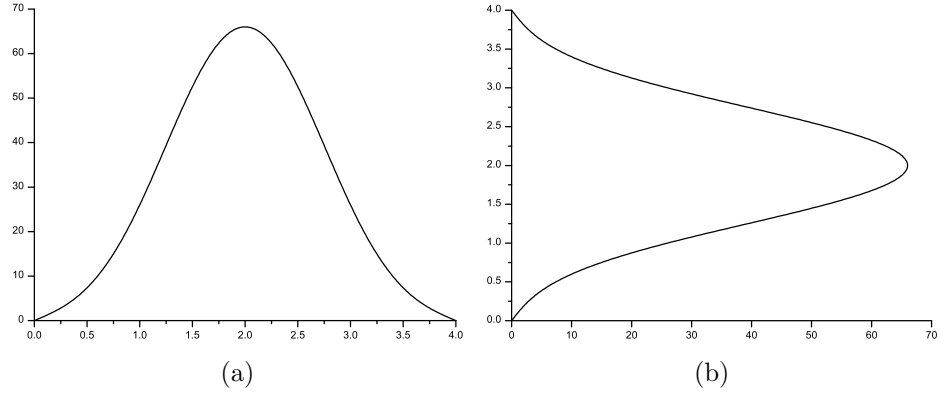


Şekil 3.11: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_0(x)$ ve (b) $\tilde{B}_0(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.

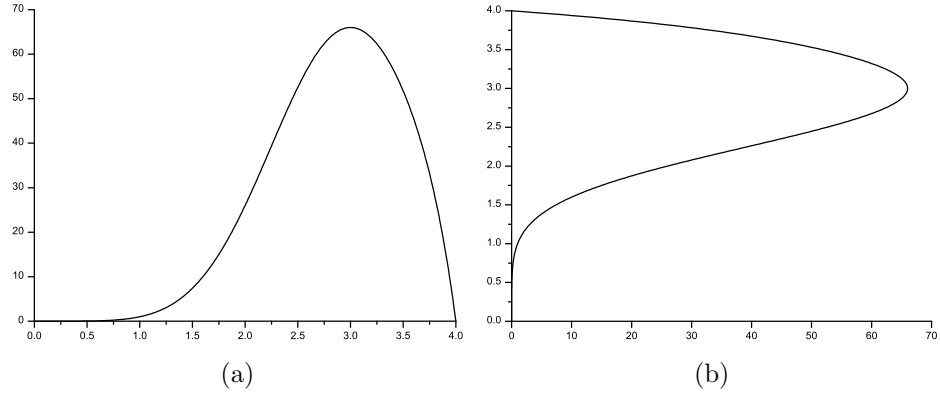


Şekil 3.12: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_1(x)$ ve (b) $\tilde{B}_1(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.

$\tilde{B}_{-1}(\eta)$, $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$ ve $\tilde{B}_5(\eta)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları da sırasıyla β_{-1} , β_0 , β_1 , β_2 , β_3 , β_4 ve β_5 gibi reel katsayılar ile çarpılır. (2.3.3.15) yaklaşımı (3.2.11) zayıf formunda, ξ ve η yönlerinde modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü aşağıdaki eleman denklemleri ile ifade edilir.



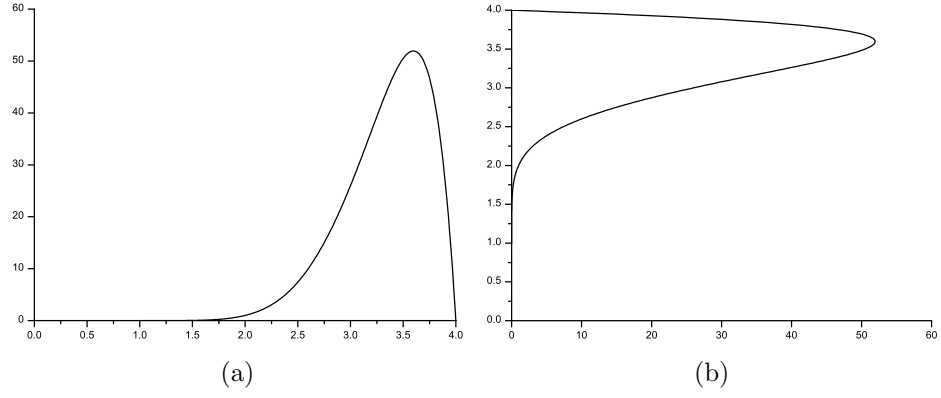
Şekil 3.13: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_2(x)$ ve (b) $\tilde{B}_2(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.



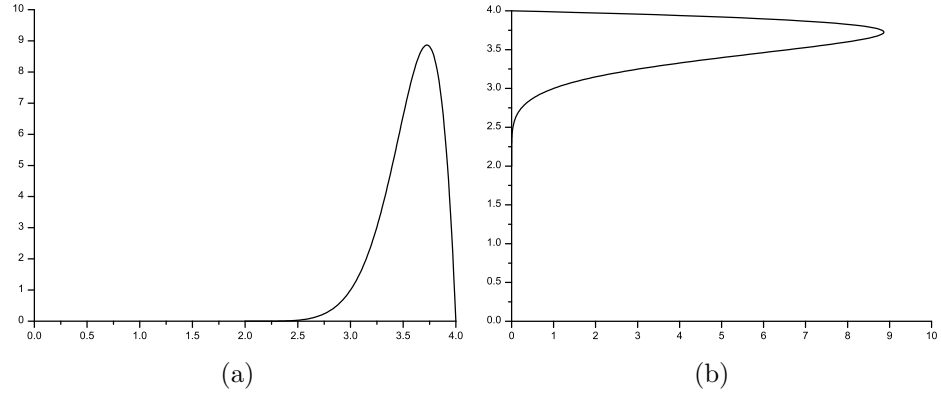
Şekil 3.14: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_3(x)$ ve (b) $\tilde{B}_3(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.

1. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5) \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) \sin\left(\frac{5\eta}{4}\right) \\
 & + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_{-1}Q_1 \\
 & + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_0Q_2 \\
 & + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_1Q_3 \\
 & + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_2Q_4 \\
 & + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_3Q_5,
 \end{aligned}$$



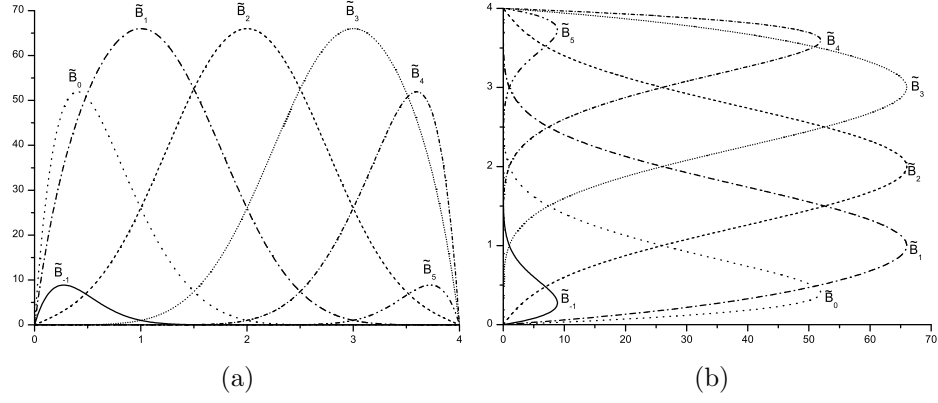
Şekil 3.15: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_4(x)$ ve (b) $\tilde{B}_4(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.



Şekil 3.16: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_5(x)$ ve (b) $\tilde{B}_5(y)$ kuintik B-spline fonksiyonlar.

2. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_{-1}Q_1 \\
 & + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_0Q_2 \\
 & + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_1Q_3 \\
 & + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_2Q_4 \\
 & + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_3Q_5,
 \end{aligned}$$



Şekil 3.17: Çözüm bölgesine düşen modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}(x)$ ve (b) $\tilde{B}(y)$ kuintik B-spline fonksiyonların tümü.

3. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_{-1} Q_1 \\
 & + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_0 Q_2 \\
 & + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_1 Q_3 \\
 & + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_2 Q_4 \\
 & + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_3 Q_5,
 \end{aligned}$$

4. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_{-1} Q_1 \\
 & + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_0 Q_2 \\
 & + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_1 Q_3 \\
 & + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_2 Q_4 \\
 & + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_3 Q_5,
 \end{aligned}$$

5. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5) \left(1 - \frac{\eta + 1}{4}\right) \sin\left(\frac{5(\eta + 1)}{4}\right) \\
& + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_{-1}Q_6 \\
& + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_0Q_7 \\
& + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_1Q_8 \\
& + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_2Q_9 \\
& + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_3Q_{10} \\
& + [\alpha_{-1}F_1 + \alpha_0F_2 + \alpha_1F_3 + \alpha_2F_4 + \alpha_3F_5]\beta_4Q_5,
\end{aligned}$$

6. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_{-1}Q_6 \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_0Q_7 \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_1Q_8 \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_2Q_9 \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_3Q_{10} \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_4Q_5,
\end{aligned}$$

7. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_{-1}Q_6 \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_0Q_7 \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_1Q_8 \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_2Q_9 \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_3Q_{10} \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_4Q_5,
\end{aligned}$$

8. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_{-1} Q_6 \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_0 Q_7 \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_1 Q_8 \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_2 Q_9 \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_3 Q_{10} \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_4 Q_5,
\end{aligned}$$

9. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5) \left(1 - \frac{\eta + 2}{4}\right) \sin\left(\frac{5(\eta + 2)}{4}\right) \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_0 Q_6 \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_1 Q_7 \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_2 Q_8 \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_3 Q_9 \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_4 Q_{10} \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_5 Q_5,
\end{aligned}$$

10. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-1} F_6 + \alpha_0 F_7 + \alpha_1 F_8 + \alpha_2 F_9 + \alpha_3 F_{10} + \alpha_4 F_5] \beta_0 Q_6 \\
& + [\alpha_{-1} F_6 + \alpha_0 F_7 + \alpha_1 F_8 + \alpha_2 F_9 + \alpha_3 F_{10} + \alpha_4 F_5] \beta_1 Q_7 \\
& + [\alpha_{-1} F_6 + \alpha_0 F_7 + \alpha_1 F_8 + \alpha_2 F_9 + \alpha_3 F_{10} + \alpha_4 F_5] \beta_2 Q_8 \\
& + [\alpha_{-1} F_6 + \alpha_0 F_7 + \alpha_1 F_8 + \alpha_2 F_9 + \alpha_3 F_{10} + \alpha_4 F_5] \beta_3 Q_9 \\
& + [\alpha_{-1} F_6 + \alpha_0 F_7 + \alpha_1 F_8 + \alpha_2 F_9 + \alpha_3 F_{10} + \alpha_4 F_5] \beta_4 Q_{10} \\
& + [\alpha_{-1} F_6 + \alpha_0 F_7 + \alpha_1 F_8 + \alpha_2 F_9 + \alpha_3 F_{10} + \alpha_4 F_5] \beta_5 Q_5,
\end{aligned}$$

11. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_0 Q_6 \\
& + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_1 Q_7 \\
& + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_2 Q_8 \\
& + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_3 Q_9 \\
& + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_4 Q_{10} \\
& + [\alpha_0 F_6 + \alpha_1 F_7 + \alpha_2 F_8 + \alpha_3 F_9 + \alpha_4 F_{10} + \alpha_5 F_5] \beta_5 Q_5,
\end{aligned}$$

12. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_0 Q_6 \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_1 Q_7 \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_2 Q_8 \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_3 Q_9 \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_4 Q_{10} \\
& + [\alpha_1 F_6 + \alpha_2 F_{11} + \alpha_3 F_{12} + \alpha_4 F_{13} + \alpha_5 F_{14}] \beta_5 Q_5,
\end{aligned}$$

13. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5) \left(1 - \frac{\eta + 3}{4}\right) \sin\left(\frac{5(\eta + 3)}{4}\right) \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_1 Q_6 \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_2 Q_{11} \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_3 Q_{12} \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_4 Q_{13} \\
& + [\alpha_{-1} F_1 + \alpha_0 F_2 + \alpha_1 F_3 + \alpha_2 F_4 + \alpha_3 F_5] \beta_5 Q_{14},
\end{aligned}$$

14. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_1Q_6 \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_2Q_{11} \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_3Q_{12} \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_4Q_{13} \\
& + [\alpha_{-1}F_6 + \alpha_0F_7 + \alpha_1F_8 + \alpha_2F_9 + \alpha_3F_{10} + \alpha_4F_5]\beta_5Q_{14},
\end{aligned}$$

15. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(x, y) = & [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_1Q_6 \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_2Q_{11} \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_3Q_{12} \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_4Q_{13} \\
& + [\alpha_0F_6 + \alpha_1F_7 + \alpha_2F_8 + \alpha_3F_9 + \alpha_4F_{10} + \alpha_5F_5]\beta_5Q_{14},
\end{aligned}$$

16. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_1F_6 + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14}]\beta_1Q_6 \\
& + [\alpha_1F_6 + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14}]\beta_2Q_{11} \\
& + [\alpha_1F_6 + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14}]\beta_3Q_{12} \\
& + [\alpha_1F_6 + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14}]\beta_4Q_{13} \\
& + [\alpha_1F_6 + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14}]\beta_5Q_{14}
\end{aligned}$$

dir.

Burada

$$F_1 = 80\xi - 240\xi^2 + 280\xi^3 - 150\xi^4 + 31\xi^5,$$

$$Q_1 = 80\eta - 240\eta^2 + 280\eta^3 - 150\eta^4 + 31\eta^5,$$

$$F_2 = 330\xi - 720\xi^2 + 660\xi^3 - 300\xi^4 + 56\xi^5,$$

$$Q_2 = 330\eta - 720\eta^2 + 660\eta^3 - 300\eta^4 + 56\eta^5,$$

$$F_3 = 180\xi - 240\xi^2 + 240\xi^3 - 150\xi^4 + 36\xi^5,$$

$$Q_3 = 180\eta - 240\eta^2 + 240\eta^3 - 150\eta^4 + 36\eta^5,$$

$$F_4 = 10\xi + 20\xi^3 - 4\xi^5,$$

$$Q_4 = 10\eta + 20\eta^3 - 4\eta^5,$$

$$F_5 = \xi^5,$$

$$Q_5 = \eta^5,$$

$$F_6 = 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5,$$

$$Q_6 = 1 - 5\eta + 10\eta^2 - 10\eta^3 + 5\eta^4 - \eta^5,$$

$$F_7 = 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5,$$

$$Q_7 = 26 - 50\eta + 20\eta^2 + 20\eta^3 - 20\eta^4 + 5\eta^5,$$

$$F_8 = 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5,$$

$$Q_8 = 66 - 60\eta^2 + 30\eta^4 - 10\eta^5,$$

$$F_9 = 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5,$$

$$Q_9 = 26 + 50\eta + 20\eta^2 - 20\eta^3 - 20\eta^4 + 10\eta^5,$$

$$F_{10} = 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5,$$

$$Q_{10} = 1 + 5\eta + 10\eta^2 + 10\eta^3 + 5\eta^4 - 5\eta^5,$$

$$F_{11} = 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 4\xi^5,$$

$$Q_{11} = 26 - 50\eta + 20\eta^2 + 20\eta^3 - 20\eta^4 + 4\eta^5,$$

$$F_{12} = 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 36\xi^5,$$

$$Q_{12} = 66 - 60\eta^2 + 30\eta^4 - 36\eta^5,$$

$$F_{13} = 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 - 56\xi^5,$$

$$Q_{13} = 26 + 50\eta + 20\eta^2 - 20\eta^3 - 20\eta^4 - 56\eta^5,$$

$$F_{14} = 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 31\xi^5,$$

$$Q_{14} = 1 + 5\eta + 10\eta^2 + 10\eta^3 + 5\eta^4 - 31\eta^5$$

dır.

Yukarıda ifade edilen her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde α_i ve β_i , ($i = -1(1)5$) lokal eleman parametrelerine bağlı

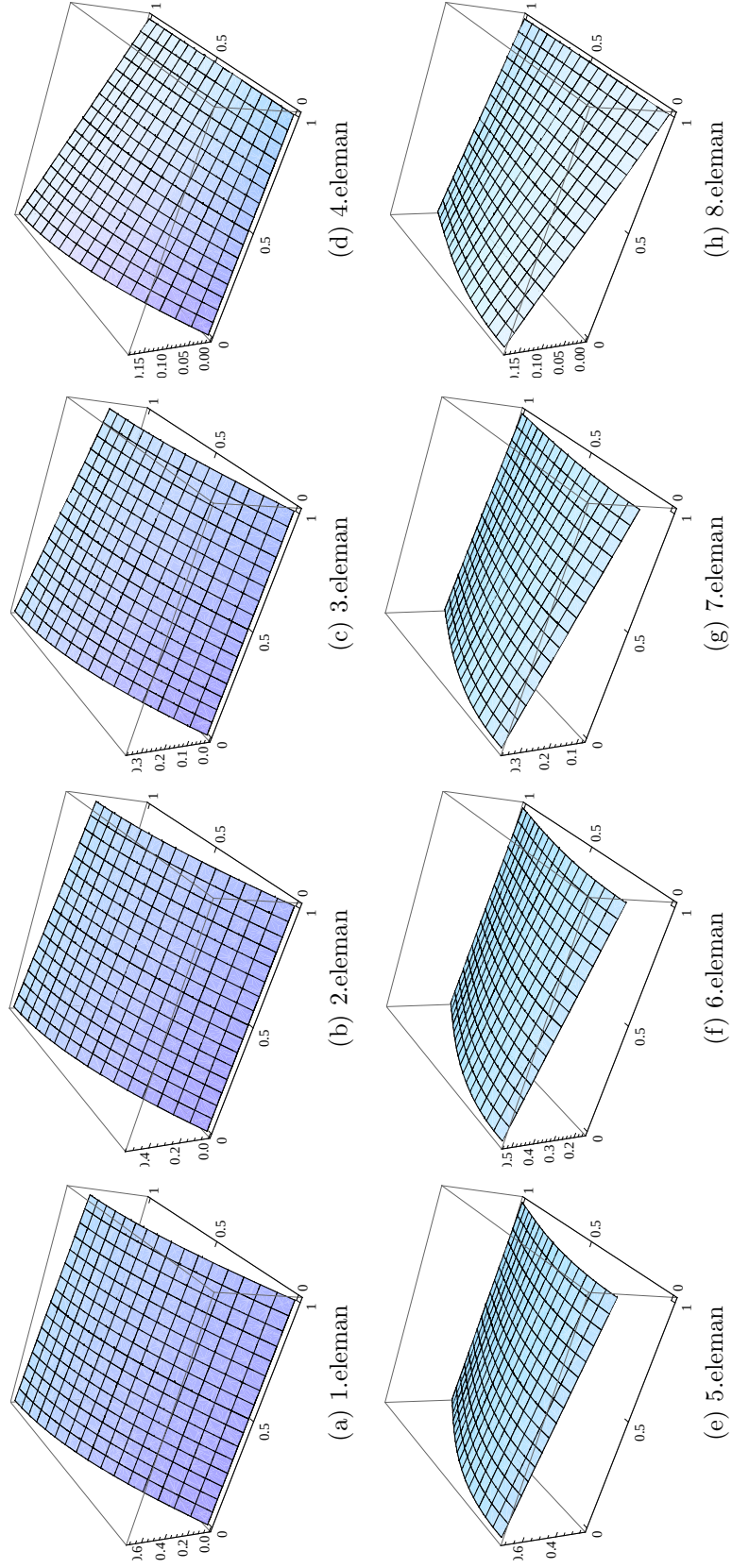
$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_{-1}\beta_{-1}, & A_2 &= \alpha_0\beta_{-1}, & A_3 &= \alpha_1\beta_{-1}, & A_4 &= \alpha_2\beta_{-1}, & A_5 &= \alpha_3\beta_{-1}, \\ A_6 &= \alpha_4\beta_{-1}, & A_7 &= \alpha_5\beta_{-1}, & A_8 &= \alpha_{-1}\beta_0, & A_9 &= \alpha_0\beta_0, & A_{10} &= \alpha_1\beta_0, \\ A_{11} &= \alpha_2\beta_0, & A_{12} &= \alpha_3\beta_0, & A_{13} &= \alpha_4\beta_0, & A_{14} &= \alpha_5\beta_0, & A_{15} &= \alpha_{-1}\beta_1, \\ A_{16} &= \alpha_0\beta_1, & A_{17} &= \alpha_1\beta_1, & A_{18} &= \alpha_2\beta_1, & A_{19} &= \alpha_3\beta_1, & A_{20} &= \alpha_4\beta_1, \\ A_{21} &= \alpha_5\beta_1, & A_{22} &= \alpha_{-1}\beta_2, & A_{23} &= \alpha_0\beta_2, & A_{24} &= \alpha_1\beta_2, & A_{25} &= \alpha_2\beta_2, \\ A_{26} &= \alpha_3\beta_2, & A_{27} &= \alpha_4\beta_2, & A_{28} &= \alpha_{-1}\beta_3, & A_{29} &= \alpha_0\beta_3, & A_{30} &= \alpha_1\beta_3, \\ A_{31} &= \alpha_2\beta_3, & A_{32} &= \alpha_3\beta_3, & A_{33} &= \alpha_4\beta_3, & A_{34} &= \alpha_5\beta_3, & A_{35} &= \alpha_{-1}\beta_4, \\ A_{36} &= \alpha_0\beta_4, & A_{37} &= \alpha_1\beta_4, & A_{38} &= \alpha_2\beta_4, & A_{39} &= \alpha_3\beta_4, & A_{40} &= \alpha_4\beta_4, \\ A_{41} &= \alpha_5\beta_4, & A_{42} &= \alpha_{-1}\beta_5, & A_{43} &= \alpha_0\beta_5, & A_{44} &= \alpha_1\beta_5, & A_{45} &= \alpha_2\beta_5, \\ A_{46} &= \alpha_3\beta_5, & A_{47} &= \alpha_4\beta_5, & A_{48} &= \alpha_5\beta_5, & A_{49} &= \alpha_{-1}\beta_6, & A_{50} &= \alpha_0\beta_6, \end{aligned}$$

şeklinde toplam $7 \times 7 = 49$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü bulmak için A_i , ($i = 1(1)49$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü (3.2.11) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda (3.3.1) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülürse A_i , ($i = 1(1)49$) global eleman parametreleri olarak elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 3.9'da model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları

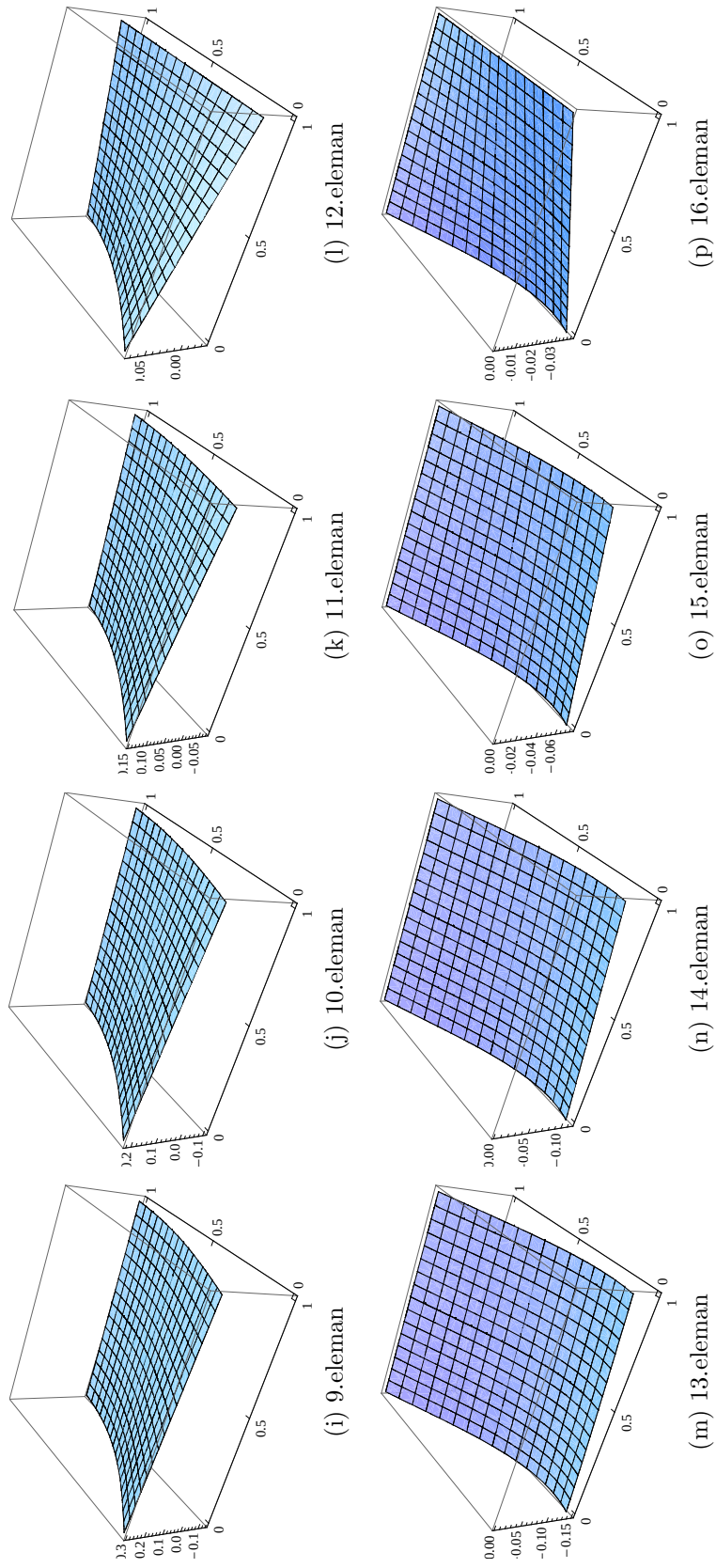
Tablo 3.8: Kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle $4 \times 4 = 16$ eleman için elde edilen eleman parametreleri.

$A_1=-0.00014624108490997$	$A_{26}=0.00000444683807930$
$A_2=-0.00011864006682830$	$A_{27}=-0.00000000469512169$
$A_3=-0.00008878239116473$	$A_{28}=-0.00000442889802300$
$A_4=-0.00005926932044400$	$A_{29}=-0.00003599558668221$
$A_5=-0.00002958034431757$	$A_{30}=-0.00002848866296422$
$A_6=-0.00000005612638476$	$A_{31}=-0.00002140552800521$
$A_7=0.00002979290560299$	$A_{32}=-0.00001425432080623$
$A_8=0.00002092934304511$	$A_{33}=-0.00000713797013613$
$A_9=0.00001700418574495$	$A_{34}=0.00000001127962061$
$A_{10}=0.00001272779601189$	$A_{35}=0.00000709500842386$
$A_{11}=0.00000849636051239$	$A_{36}=0.00000734979333185$
$A_{12}=0.00000424079493265$	$A_{37}=0.00000500415700305$
$A_{13}=0.00000000754305205$	$A_{38}=0.00000386638488192$
$A_{14}=-0.00000426915710551$	$A_{39}=0.00000253144696909$
$A_{15}=0.00009805351202334$	$A_{40}=0.00000129688295873$
$A_{16}=0.00007843161103326$	$A_{41}=-0.00000003251800716$
$A_{17}=0.00005882085455903$	$A_{42}=-0.00000117300449735$
$A_{18}=0.00003921452326716$	$A_{43}=0.00001508771131529$
$A_{19}=0.00001960675667268$	$A_{44}=0.00001617450541632$
$A_{20}=0.00000000059199988$	$A_{45}=0.00001157366244187$
$A_{21}=-0.00001960916687568$	$A_{46}=0.00000793944587795$
$A_{22}=0.00002234781101136$	$A_{47}=0.00000381837939269$
$A_{23}=0.00001776048656784$	$A_{48}=0.00000015821733472$
$A_{24}=0.00001333696342762$	$A_{49}=-0.00000442174443876$
$A_{25}=0.00000888472229980$	

kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam ve yaklaşık çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin referans [12]'de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 3.18, her bir elemanın çözüm grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 16 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 3.19'da verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.



Şekil 3.18: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



Şekil 3.18: (Devam) Model problemin $4 \times 4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

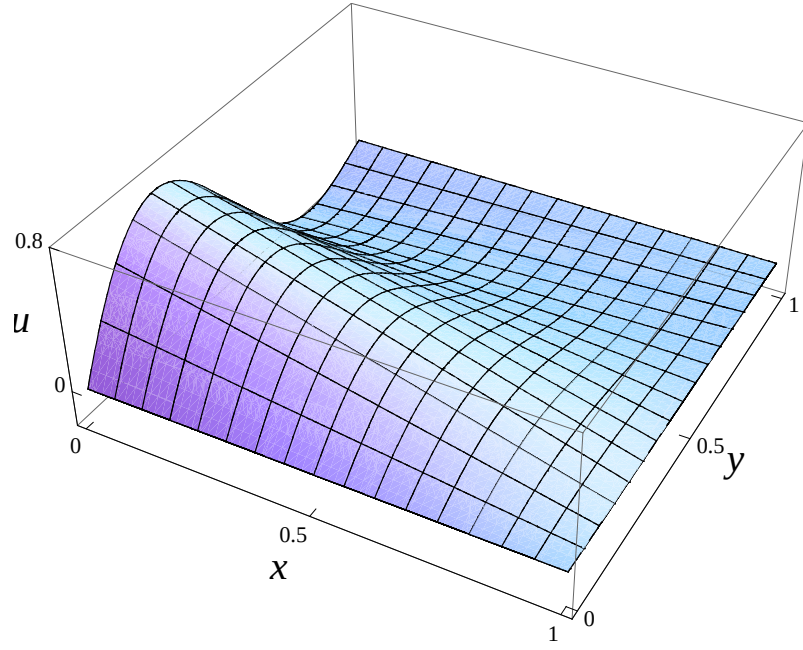
Tablo 3.9: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	[12]	
(0.25,0.25)	0.533970	0.523514	0.533804
(0.25,0.50)	0.224352	0.229845	0.224427
(0.25,0.75)	-0.107419	-0.0987043	-0.107168
(0.50,0.25)	0.355980	0.345257	0.355869
(0.50,0.50)	0.149568	0.152811	0.149618
(0.50,0.75)	-0.0716125	-0.0646793	-0.0714452
(0.75,0.25)	0.177990	0.173169	0.177935
(0.75,0.50)	0.0747842	0.0766886	0.0748090
(0.75,0.75)	-0.0358060	-0.0326491	-0.0357226

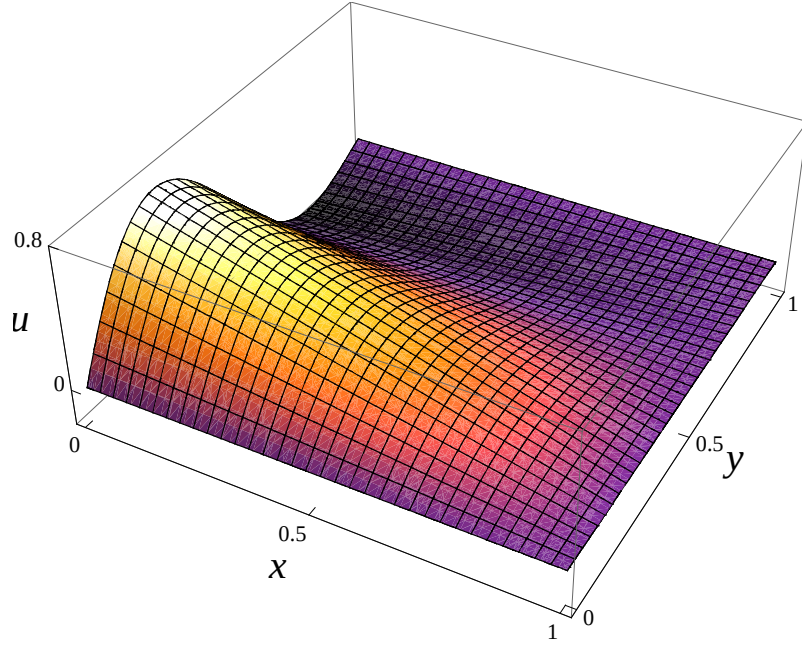
Bölgenin $10 \times 10 = 100$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $10 \times 10 = 100$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/10$ olan 100 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (3.2.11) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y)$ yerine Bölüm 2'de (2.3.3.15) ile verilen $u_{nm}(x, y)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için $2 \times 2 = 4$ ve $4 \times 4 = 16$ elemanda olduğu gibi eleman konum tablosundan yararlanılır. Örneğin böyle bir tablo 100 eleman için Tablo 3.5'deki gibi numaralandırılır. Eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır.

Her bir kuintik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_{-1}(\xi)$, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$, $\tilde{B}_5(\xi)$, $\tilde{B}_6(\xi)$, $\tilde{B}_7(\xi)$, $\tilde{B}_8(\xi)$, $\tilde{B}_9(\xi)$, $\tilde{B}_{10}(\xi)$ ve $\tilde{B}_{11}(\xi)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları sırasıyla α_{-1} , α_0 , α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 , α_6 , α_7 , α_8 , α_9 , α_{10} ve α_{11} gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_{-1}(\eta)$, $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$, $\tilde{B}_5(\eta)$, $\tilde{B}_6(\eta)$, $\tilde{B}_7(\eta)$, $\tilde{B}_8(\eta)$, $\tilde{B}_9(\eta)$, $\tilde{B}_{10}(\eta)$ ve $\tilde{B}_{11}(\eta)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla β_{-1} , β_0 , β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , β_5 , β_6 , β_7 , β_8 , β_9 , β_{10} ve β_{11} gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.3.3.15) yaklaşımı (3.2.11) zayıf formunda ve ξ , η yönlerinde modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 3.19: Model problemin $4 \times 4 = 16$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

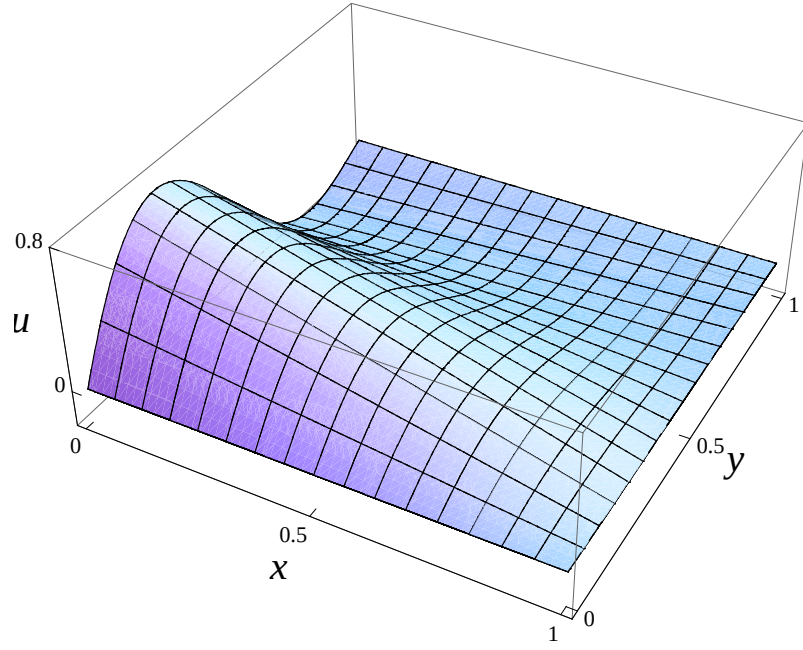
Tablo 3.10: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	10×10	[12]	
(0.25,0.25)	0.533803	0.523514	0.533804
(0.25,0.50)	0.224427	0.229845	0.224427
(0.25,0.75)	-0.107167	-0.0987043	-0.107168
(0.50,0.25)	0.355869	0.345257	0.355869
(0.50,0.50)	0.149618	0.152811	0.149618
(0.50,0.75)	-0.0714448	-0.0646793	-0.0714452
(0.75,0.25)	0.177934	0.173169	0.177935
(0.75,0.50)	0.074809	0.0766886	0.0748090
(0.75,0.75)	-0.0357224	-0.0326491	-0.0357226

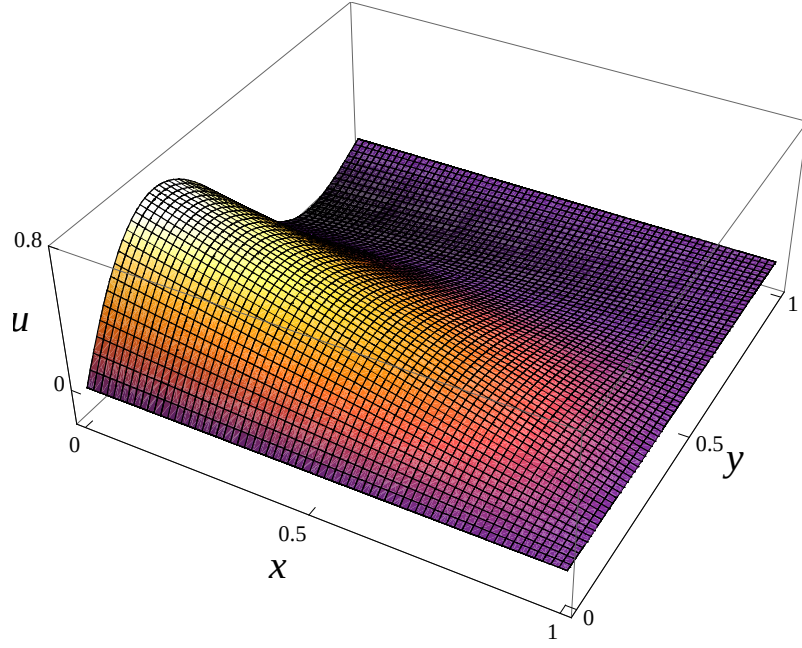
düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde α_i ve β_i , ($i = -1(1)11$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $13 \times 13 = 169$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü bulmak için A_i , ($i = 1(1)169$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü (3.2.11) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda (3.3.1) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülürse A_i , ($i = 1(1)169$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 3.10'da model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam ve yaklaşık çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin referans [12]'de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 100 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 3.20'de verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.

Tablo 3.11'de kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 3.20: Model problemin $10 \times 10 = 100$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 3.11: Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.043140	0.043148	0.043148
(0.8,0.2)	0.134648	0.134636	0.134635
(0.7,0.3)	0.209524	0.209474	0.209474
(0.6,0.4)	0.218123	0.218231	0.218231
(0.5,0.5)	0.149568	0.149618	0.149618
(0.4,0.6)	0.034100	0.033868	0.033869
(0.3,0.7)	-0.073754	-0.073665	-0.073664
(0.2,0.8)	-0.121231	-0.121089	-0.121088
(0.1,0.9)	-0.087821	-0.087978	-0.087978
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.1,0.1)	0.388262	0.388335	0.388335
(0.2,0.2)	0.538588	0.538542	0.538541
(0.3,0.3)	0.488891	0.488773	0.488773
(0.4,0.4)	0.327186	0.327347	0.327347
(0.5,0.5)	0.149568	0.149618	0.149618
(0.6,0.6)	0.022734	0.022579	0.022579
(0.7,0.7)	-0.031608	-0.031571	-0.031570
(0.8,0.8)	-0.030308	-0.030272	-0.030272
(0.9,0.9)	-0.009757	-0.009775	-0.009775
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablodan eleman sayısı arttıkça yaklaşık çözümün tam çözüme daha iyi yaklaştığı açıkça görülmektedir.

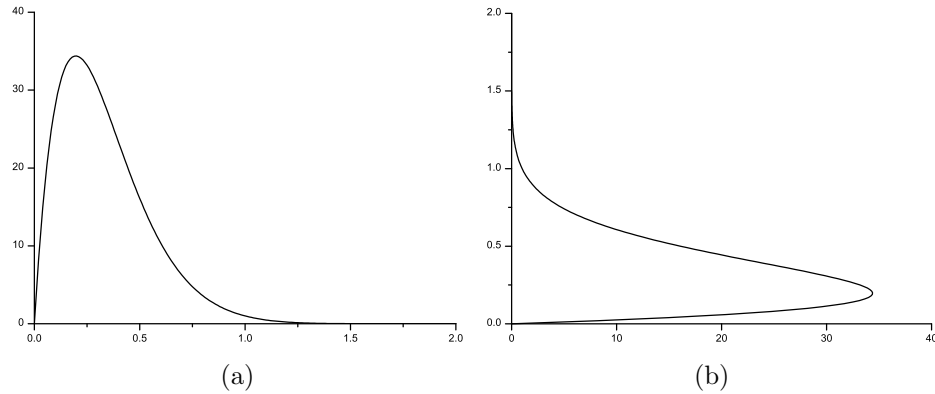
3.5 Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Septik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda model problemin yaklaşık çözümleri modifiye edilmiş 2–boyutlu septik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi sırası ile 16 ($h_x = h_y = 1/4$) ve 100 ($h_x = h_y = 1/10$) elemana ayrılarak nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen

çözümler literatürdeki mevcut çözümlerle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

Bölgenin $4 \times 4 = 16$ Elemana Ayrılması

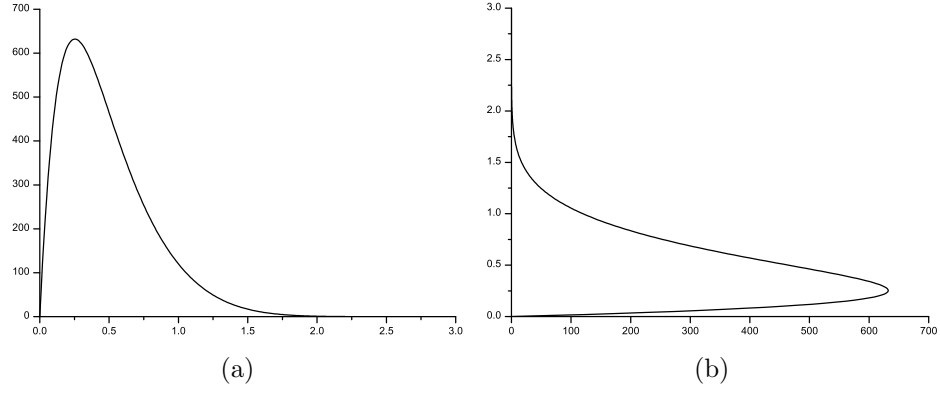
Problemın D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $4 \times 4 = 16$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/4$ olan 16 eleman elde edilir. Modifiye edilmiş septik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemi ile model problemin yaklaşık çözümü elde edileceğinden model probleme karşılık gelen (3.2.11) zayıf form denklemi kullanılır. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için (3.2.11) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y)$ yerine Bölüm 2’de (2.4.3.15) ile verilen $u_{nm}(x, y)$ yaklaşımı (2.4.3.10) ve (2.4.3.14) denklemleri ile birlikte yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.3’de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır. Şekil (3.21)-(3.32), $i = -2(1)9$ olmak üzere, sırası ile $\tilde{B}_i(x)$, $\tilde{B}_i(y)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonlarının grafiklerini göstermektedir.



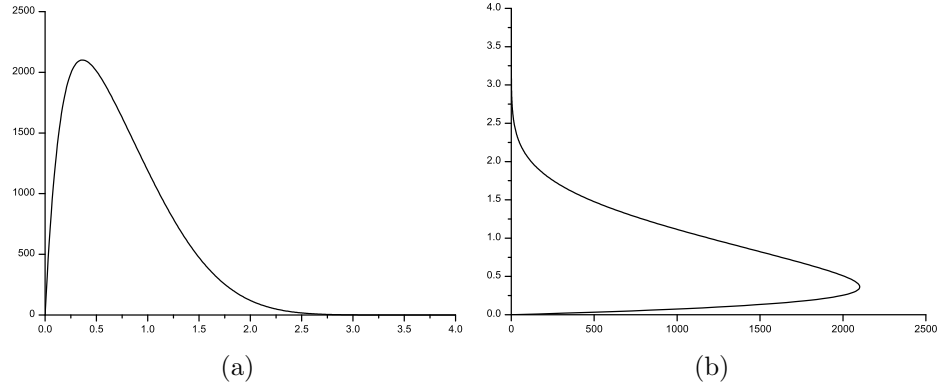
Şekil 3.21: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_{-2}(x)$ ve (b) $\tilde{B}_{-2}(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.

Problemın çözüm bölgesine düşen sırası ile x ve y yönlerinde modifiye edilmiş septik B-spline baz fonksiyonların tümü bir arada Şekil 3.33’de gösterilmiştir.

Her bir septik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir.

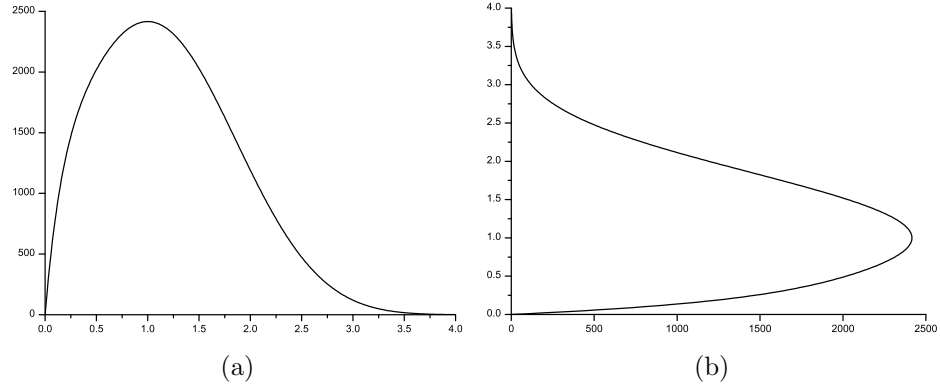


Şekil 3.22: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_{-1}(x)$ ve (b) $\tilde{B}_{-1}(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.

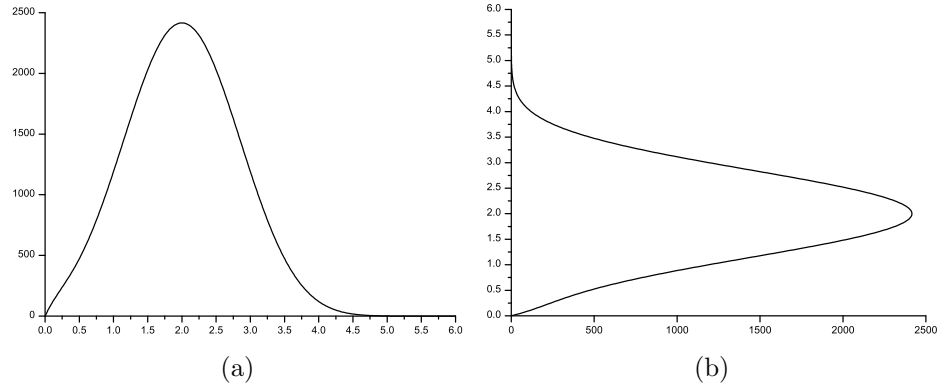


Şekil 3.23: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_0(x)$ ve (b) $\tilde{B}_0(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.

O halde, $\tilde{B}_{-2}(\xi)$, $\tilde{B}_{-1}(\xi)$, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$, $\tilde{B}_5(\xi)$ ve $\tilde{B}_6(\xi)$ modifiye edilmiş septik B-spline fonksiyonları sırasıyla α_{-2} , α_{-1} , α_0 , α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 ve α_6 gibi reel katsayılar ile $\tilde{B}_{-2}(\eta)$, $\tilde{B}_{-1}(\eta)$, $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$, $\tilde{B}_5(\eta)$ ve $\tilde{B}_6(\eta)$ modifiye edilmiş septik B-spline fonksiyonları da sırasıyla β_{-2} , β_{-1} , β_0 , β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , β_5 ve β_6 gibi reel katsayılar ile çarpılır. (2.4.3.15) yaklaşımı (3.2.11) zayıf formunda, ξ ve η yönlerinde modifiye edilmiş septik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü aşağıdaki eleman denklemleri ile ifade edilir.



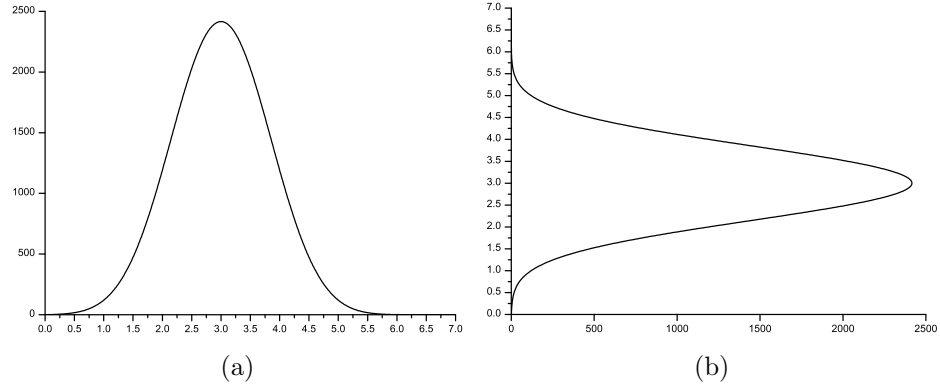
Şekil 3.24: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_1(x)$ ve (b) $\tilde{B}_1(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.



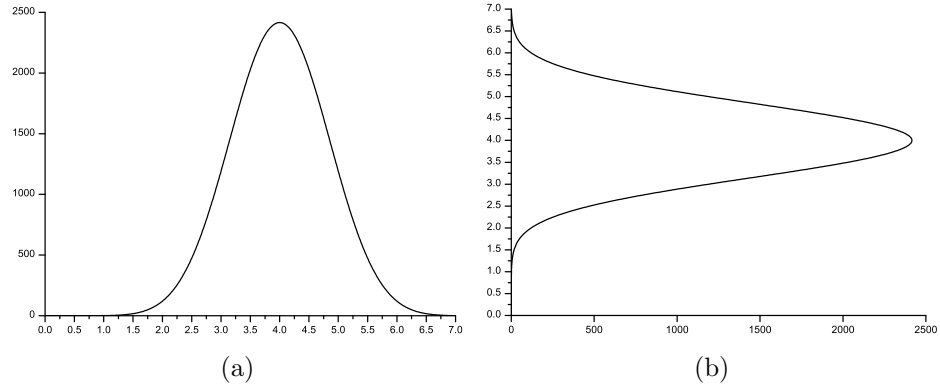
Şekil 3.25: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_2(x)$ ve (b) $\tilde{B}_2(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.

1. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7) \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) \sin\left(\frac{5\eta}{4}\right) \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_{-2}Q_1 \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_{-1}Q_2 \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_0Q_3 \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_1Q_4 \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_2Q_5 \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_3Q_6 \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_4Q_7,
 \end{aligned}$$



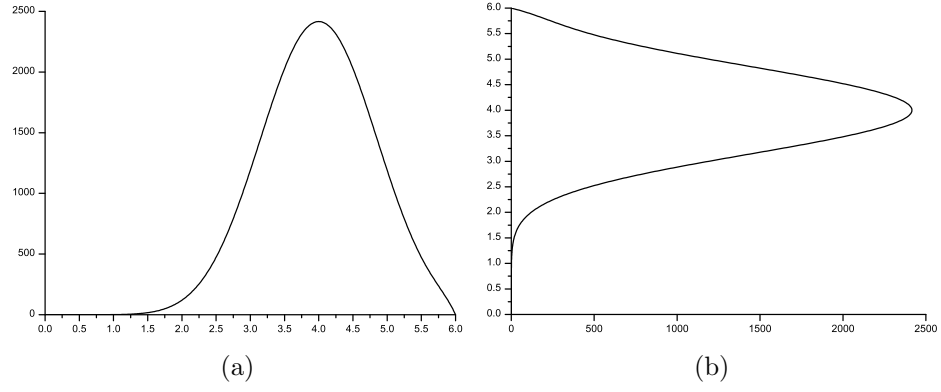
Şekil 3.26: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_3(x)$ ve (b) $\tilde{B}_3(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.



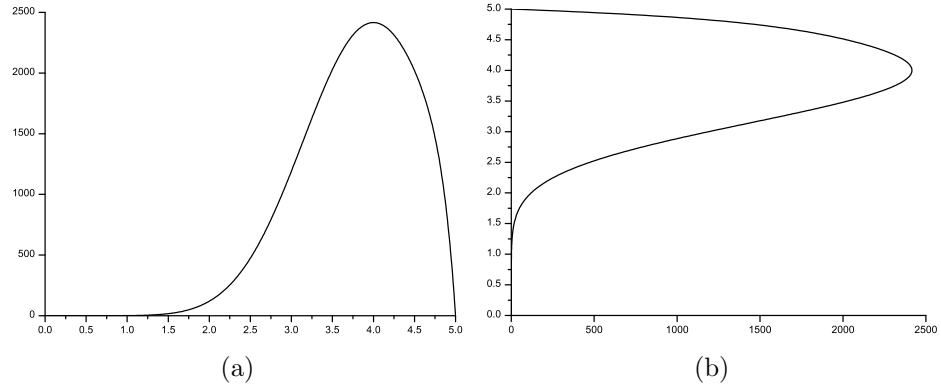
Şekil 3.27: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_4(x)$ ve (b) $\tilde{B}_4(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.

2. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_{-2}Q_1 \\
 & + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_{-1}Q_2 \\
 & + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_0Q_3 \\
 & + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_1Q_4 \\
 & + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_2Q_5 \\
 & + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_3Q_6 \\
 & + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_4Q_7,
 \end{aligned}$$



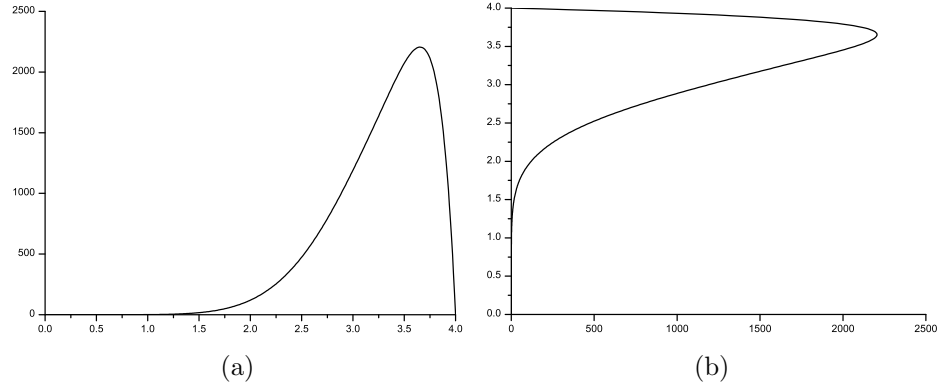
Şekil 3.28: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_5(x)$ ve (b) $\tilde{B}_5(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.



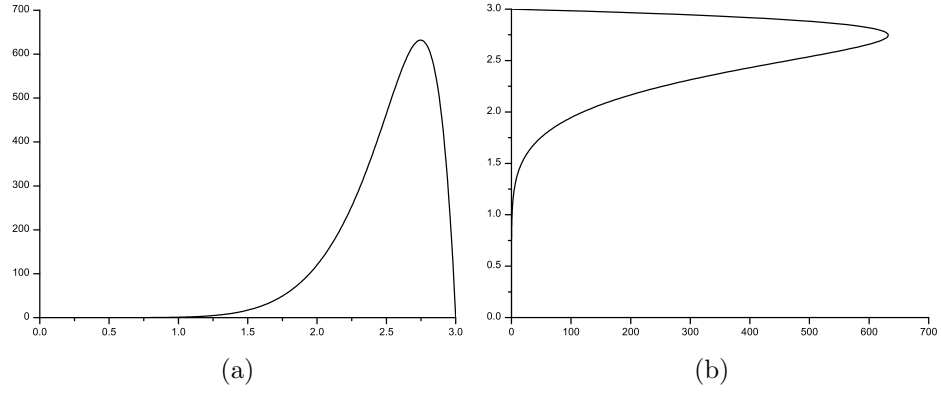
Şekil 3.29: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_6(x)$ ve (b) $\tilde{B}_6(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.

3. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_{-2}Q_1 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_{-1}Q_2 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_0Q_3 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_1Q_4 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_2Q_5 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_3Q_6 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_4Q_7,
\end{aligned}$$



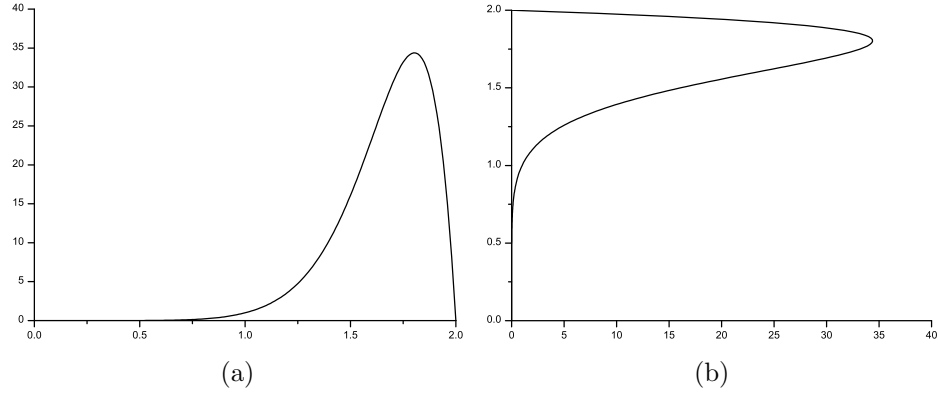
Şekil 3.30: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_7(x)$ ve (b) $\tilde{B}_7(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.



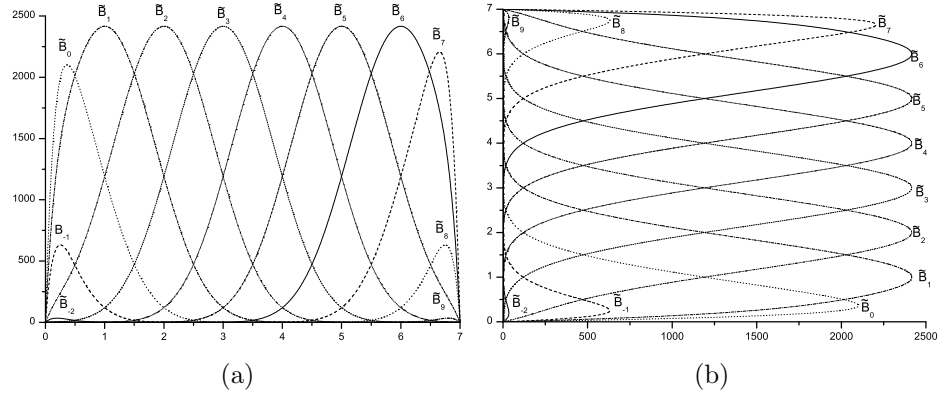
Şekil 3.31: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_8(x)$ ve (b) $\tilde{B}_8(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.

4. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_{-2} Q_1 \\
 & + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_{-1} Q_2 \\
 & + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_0 Q_3 \\
 & + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_1 Q_4 \\
 & + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_2 Q_5 \\
 & + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_3 Q_6 \\
 & + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_4 Q_7,
 \end{aligned}$$



Şekil 3.32: Modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}_9(x)$ ve (b) $\tilde{B}_9(y)$ septik B-spline fonksiyonlar.



Şekil 3.33: Çözüm bölgesine düşen modifiye edilmiş (a) $\tilde{B}(x)$ ve (b) $\tilde{B}(y)$ septik B-spline fonksiyonların tümü.

5. eleman için:

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7) \left(1 - \frac{\eta + 1}{4}\right) \sin\left(\frac{5(\eta + 1)}{4}\right) \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_{-2}Q_8 \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_{-1}Q_9 \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_0Q_{10} \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_1Q_{11} \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_2Q_{12} \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_3Q_{13} \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_4Q_{14} \\
 & + [\alpha_{-2}F_1 + \alpha_{-1}F_2 + \alpha_0F_3 + \alpha_1F_4 + \alpha_2F_5 + \alpha_3F_6 + \alpha_4F_7]\beta_5Q_{15},
 \end{aligned}$$

6. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_{-2}Q_8 \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_{-1}Q_9 \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_0Q_{10} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_1Q_{11} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_2Q_{12} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_3Q_{13} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_4Q_{14} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_5Q_{15},
\end{aligned}$$

7. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_{-2}Q_8 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_{-1}Q_9 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_0Q_{10} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_1Q_{11} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_2Q_{12} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_3Q_{13} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_4Q_{14} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_5Q_{15},
\end{aligned}$$

8. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_{-2} Q_8 \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_{-1} Q_9 \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_0 Q_{10} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_1 Q_{11} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_2 Q_{12} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_3 Q_{13} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_4 Q_{14} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_5 Q_{15},
\end{aligned}$$

9. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7) \left(1 - \frac{\eta+2}{4}\right) \sin\left(\frac{5(\eta+2)}{4}\right) \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_{-1} Q_8 \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_0 Q_9 \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_1 Q_{10} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_2 Q_{11} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_3 Q_{12} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_4 Q_{13} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_5 Q_{14} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_6 Q_{15},
\end{aligned}$$

10. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_{-1}Q_8 \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_0Q_9 \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_1Q_{10} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_2Q_{11} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_3Q_{12} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_4Q_{13} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_5Q_{14} \\
& + [\alpha_{-2}F_8 + \alpha_{-1}F_9 + \alpha_0F_{10} + \alpha_1F_{11} + \alpha_2F_{12} + \alpha_3F_{13} + \alpha_4F_{14} + \alpha_5F_{15}]\beta_6Q_{15},
\end{aligned}$$

11. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_{-1}Q_8 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_0Q_9 \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_1Q_{10} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_2Q_{11} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_3Q_{12} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_4Q_{13} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_5Q_{14} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_6Q_{15},
\end{aligned}$$

12. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_{-1} Q_8 \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_0 Q_9 \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_1 Q_{10} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_2 Q_{11} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_3 Q_{12} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_4 Q_{13} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_5 Q_{14} \\
& + [\alpha_0 F_{16} + \alpha_1 F_{17} + \alpha_2 F_{18} + \alpha_3 F_{19} + \alpha_4 F_{20} + \alpha_5 F_{21} + \alpha_6 F_{22}] \beta_6 Q_{15},
\end{aligned}$$

13. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & (1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7) \left(1 - \frac{\eta+3}{4}\right) \sin\left(\frac{5(\eta+3)}{4}\right) \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_0 Q_{16} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_1 Q_{17} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_2 Q_{18} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_3 Q_{19} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_4 Q_{20} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_5 Q_{21} \\
& + [\alpha_{-2} F_1 + \alpha_{-1} F_2 + \alpha_0 F_3 + \alpha_1 F_4 + \alpha_2 F_5 + \alpha_3 F_6 + \alpha_4 F_7] \beta_6 Q_{22},
\end{aligned}$$

14. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-2} F_8 + \alpha_{-1} F_9 + \alpha_0 F_{10} + \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13} + \alpha_4 F_{14} + \alpha_5 F_{15}] \beta_0 Q_{16} \\
& + [\alpha_{-2} F_8 + \alpha_{-1} F_9 + \alpha_0 F_{10} + \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13} + \alpha_4 F_{14} + \alpha_5 F_{15}] \beta_1 Q_{17} \\
& + [\alpha_{-2} F_8 + \alpha_{-1} F_9 + \alpha_0 F_{10} + \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13} + \alpha_4 F_{14} + \alpha_5 F_{15}] \beta_2 Q_{18} \\
& + [\alpha_{-2} F_8 + \alpha_{-1} F_9 + \alpha_0 F_{10} + \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13} + \alpha_4 F_{14} + \alpha_5 F_{15}] \beta_3 Q_{19} \\
& + [\alpha_{-2} F_8 + \alpha_{-1} F_9 + \alpha_0 F_{10} + \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13} + \alpha_4 F_{14} + \alpha_5 F_{15}] \beta_4 Q_{20} \\
& + [\alpha_{-2} F_8 + \alpha_{-1} F_9 + \alpha_0 F_{10} + \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13} + \alpha_4 F_{14} + \alpha_5 F_{15}] \beta_5 Q_{21} \\
& + [\alpha_{-2} F_8 + \alpha_{-1} F_9 + \alpha_0 F_{10} + \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13} + \alpha_4 F_{14} + \alpha_5 F_{15}] \beta_6 Q_{22},
\end{aligned}$$

15. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_0Q_{16} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_1Q_{17} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_2Q_{18} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_3Q_{19} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_4Q_{20} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_5Q_{21} \\
& + [\alpha_{-1}F_8 + \alpha_0F_9 + \alpha_1F_{10} + \alpha_2F_{11} + \alpha_3F_{12} + \alpha_4F_{13} + \alpha_5F_{14} + \alpha_6F_{15}]\beta_6Q_{22},
\end{aligned}$$

16. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta) = & [\alpha_0F_{16} + \alpha_1F_{17} + \alpha_2F_{18} + \alpha_3F_{19} + \alpha_4F_{20} + \alpha_5F_{21} + \alpha_6F_{22}]\beta_0Q_{16} \\
& + [\alpha_0F_{16} + \alpha_1F_{17} + \alpha_2F_{18} + \alpha_3F_{19} + \alpha_4F_{20} + \alpha_5F_{21} + \alpha_6F_{22}]\beta_1Q_{17} \\
& + [\alpha_0F_{16} + \alpha_1F_{17} + \alpha_2F_{18} + \alpha_3F_{19} + \alpha_4F_{20} + \alpha_5F_{21} + \alpha_6F_{22}]\beta_2Q_{18} \\
& + [\alpha_0F_{16} + \alpha_1F_{17} + \alpha_2F_{18} + \alpha_3F_{19} + \alpha_4F_{20} + \alpha_5F_{21} + \alpha_6F_{22}]\beta_3Q_{19} \\
& + [\alpha_0F_{16} + \alpha_1F_{17} + \alpha_2F_{18} + \alpha_3F_{19} + \alpha_4F_{20} + \alpha_5F_{21} + \alpha_6F_{22}]\beta_4Q_{20} \\
& + [\alpha_0F_{16} + \alpha_1F_{17} + \alpha_2F_{18} + \alpha_3F_{19} + \alpha_4F_{20} + \alpha_5F_{21} + \alpha_6F_{22}]\beta_5Q_{21} \\
& + [\alpha_0F_{16} + \alpha_1F_{17} + \alpha_2F_{18} + \alpha_3F_{19} + \alpha_4F_{20} + \alpha_5F_{21} + \alpha_6F_{22}]\beta_6Q_{22}
\end{aligned}$$

dir.

Burada

$$F_1 = 448\xi - 2016\xi^2 + 3920\xi^3 + 2604\xi^5 - 882\xi^6 + 127\xi^7 - 4200\xi^4,$$

$$Q_1 = 448\eta - 2016\eta^2 + 3920\eta^3 + 2604\eta^5 - 882\eta^6 + 127\eta^7 - 4200\eta^4,$$

$$F_2 = 6622\xi - 24696\xi^2 + 42350\xi^3 - 42000\xi^4 + 24906\xi^5 - 8232\xi^6 + 1170\xi^7,$$

$$Q_2 = 6622\eta - 24696\eta^2 + 42350\eta^3 - 42000\eta^4 + 24906\eta^5 - 8232\eta^6 + 1170\eta^7,$$

$$F_3 = -52416\xi^2 - 8400\xi^4 - 17052\xi^6 + 2451\xi^7 + 16912\xi + 84560\xi^3 + 50736\xi^5,$$

$$Q_3 = -52416\eta^2 - 8400\eta^4 - 17052\eta^6 + 2451\eta^7 + 16912\eta + 84560\eta^3 + 50736\eta^5,$$

$$F_4 = 10052\xi - 24696\xi^2 + 41020\xi^3 - 42000\xi^4 + 25116\xi^5 - 8232\xi^6 + 1156\xi^7,$$

$$Q_4 = 10052\eta - 24696\eta^2 + 41020\eta^3 - 42000\eta^4 + 25116\eta^5 - 8232\eta^6 + 1156\eta^7,$$

$$F_5 = 1232\xi - 2016\xi^2 + 4480\xi^3 + 2436\xi^5 - 882\xi^6 + 141\xi^7 - 4200\xi^4,$$

$$Q_5 = 1232\eta - 2016\eta^2 + 4480\eta^3 + 2436\eta^5 - 882\eta^6 + 141\eta^7 - 4200\eta^4,$$

$$F_6 = 14\xi + 70\xi^3 + 42\xi^4 - 6\xi^7,$$

$$Q_6 = 14\eta + 70\eta^3 + 42\eta^4 - 6\eta^7,$$

$$F_7 = \xi^7,$$

$$Q_7 = \eta^7,$$

$$F_8 = 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7,$$

$$Q_8 = 1 - 7\eta + 21\eta^2 - 35\eta^3 + 35\eta^4 - 21\eta^5 + 7\eta^6 - \eta^7,$$

$$F_9 = 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7,$$

$$Q_9 = 120 - 392\eta + 504\eta^2 - 280\eta^3 + 84\eta^5 - 42\eta^6 + 7\eta^7,$$

$$F_{10} = 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7,$$

$$Q_{10} = 1191 - 1715\eta + 315\eta^2 + 665\eta^3 - 315\eta^4 - 105\eta^5 + 105\eta^6 - 21\eta^7,$$

$$F_{11} = 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^5,$$

$$Q_{11} = 2416 - 1680\eta^2 + 560\eta^4 - 140\eta^6 + 35\eta^5,$$

$$F_{12} = 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7,$$

$$Q_{12} = 1191 + 1715\eta + 315\eta^2 - 665\eta^3 - 315\eta^4 + 105\eta^5 + 105\eta^6 - 35\eta^7,$$

$$F_{13} = 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7,$$

$$Q_{13} = 120 + 392\eta + 504\eta^2 + 280\eta^3 - 84\eta^5 - 42\eta^6 + 21\eta^7,$$

$$F_{14} = 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - 7\xi^7,$$

$$Q_{14} = 1 + 7\eta + 21\eta^2 + 35\eta^3 + 35\eta^4 + 21\eta^5 + 7\eta^6 - 7\eta^7,$$

$$F_{15} = 7\xi^7,$$

$$Q_{15} = 7\eta^7,$$

$$F_{16} = 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7,$$

$$Q_{16} = 1 - 7\eta + 21\eta^2 - 35\eta^3 + 35\eta^4 - 21\eta^5 + 7\eta^6 - \eta^7,$$

$$F_{17} = 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 6\xi^7,$$

$$Q_{17} = 120 - 392\eta + 504\eta^2 - 280\eta^3 + 84\eta^5 - 42\eta^6 + 6\eta^7,$$

$$F_{18} = 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 141\xi^7,$$

$$Q_{18} = 1191 - 1715\eta + 315\eta^2 + 665\eta^3 - 315\eta^4 - 105\eta^5 + 105\eta^6 - 141\eta^7,$$

$$F_{19} = 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 - 1156\xi^5,$$

$$Q_{19} = 2416 - 1680\eta^2 + 560\eta^4 - 140\eta^6 - 1156\eta^5,$$

$$F_{20} = 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 2451\xi^7,$$

$$Q_{20} = 1191 + 1715\eta + 315\eta^2 - 665\eta^3 - 315\eta^4 + 105\eta^5 + 105\eta^6 - 2451\eta^7,$$

$$F_{21} = 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 - 1170\xi^7,$$

$$Q_{21} = 120 + 392\eta + 504\eta^2 + 280\eta^3 - 84\eta^5 - 42\eta^6 - 1170\eta^7,$$

$$F_{22} = 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - 127\xi^7,$$

$$Q_{22} = 1 + 7\eta + 21\eta^2 + 35\eta^3 + 35\eta^4 + 21\eta^5 + 7\eta^6 - 127\eta^7$$

dir.

Yukarıda ifade edilen her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde α_i ve β_i , ($i = -2(1)6$) lokal eleman parametrelerine bağlı

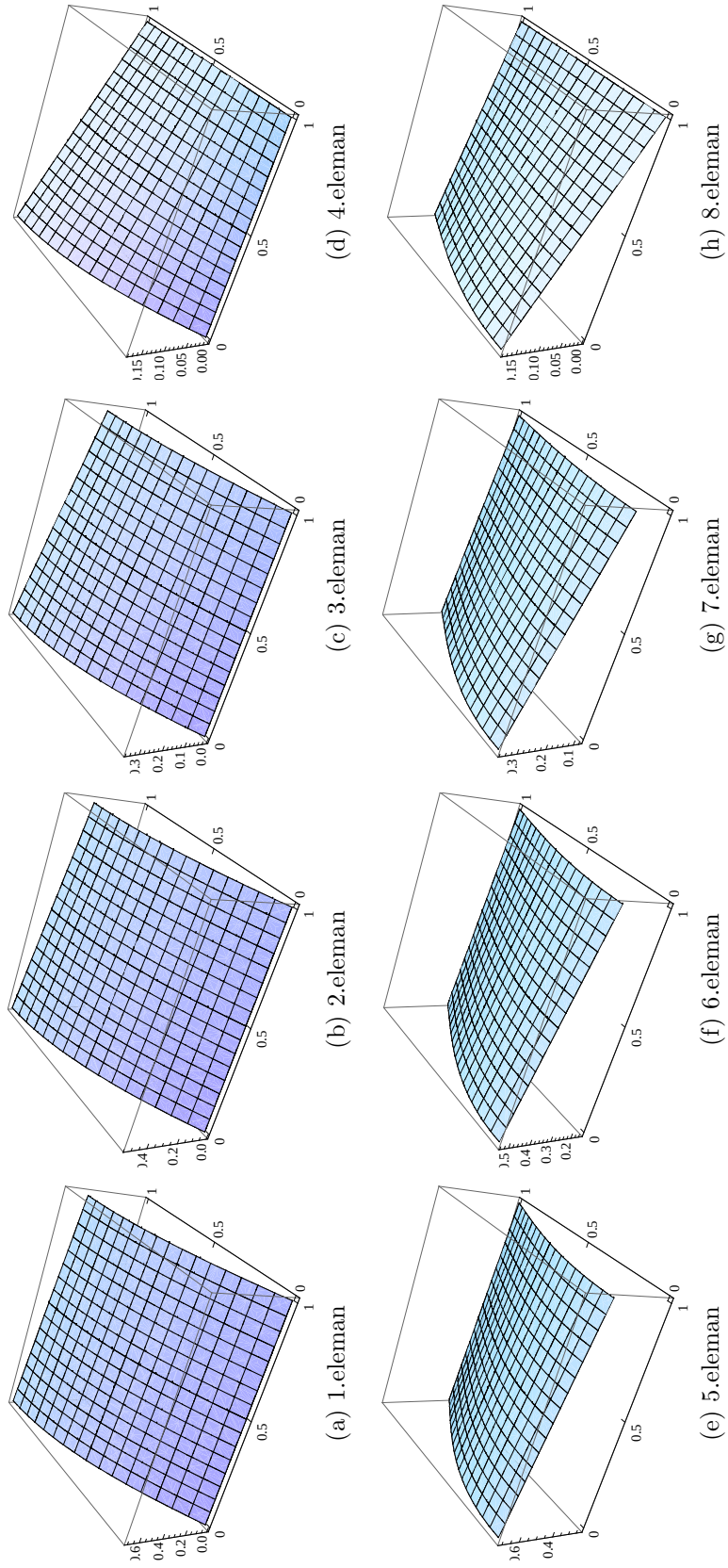
$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_{-2}\beta_{-2}, & A_2 &= \alpha_{-1}\beta_{-2}, & A_3 &= \alpha_0\beta_{-2}, & A_4 &= \alpha_1\beta_{-2}, & A_5 &= \alpha_2\beta_{-2}, \\
A_6 &= \alpha_3\beta_{-2}, & A_7 &= \alpha_4\beta_{-2}, & A_8 &= \alpha_5\beta_{-2}, & A_9 &= \alpha_6\beta_{-2}, & A_{10} &= \alpha_{-2}\beta_{-1}, \\
A_{11} &= \alpha_{-1}\beta_{-1}, & A_{12} &= \alpha_0\beta_{-1}, & A_{13} &= \alpha_1\beta_{-1}, & A_{14} &= \alpha_2\beta_{-1}, & A_{15} &= \alpha_3\beta_{-1}, \\
A_{16} &= \alpha_4\beta_{-1}, & A_{17} &= \alpha_5\beta_{-1}, & A_{18} &= \alpha_6\beta_{-1}, & A_{19} &= \alpha_{-2}\beta_0, & A_{20} &= \alpha_{-1}\beta_0, \\
A_{21} &= \alpha_0\beta_0, & A_{22} &= \alpha_1\beta_0, & A_{23} &= \alpha_2\beta_0, & A_{24} &= \alpha_3\beta_0, & A_{25} &= \alpha_4\beta_0, \\
A_{26} &= \alpha_5\beta_0, & A_{27} &= \alpha_6\beta_0, & A_{28} &= \alpha_{-2}\beta_1, & A_{29} &= \alpha_{-1}\beta_1, & A_{30} &= \alpha_0\beta_1, \\
A_{31} &= \alpha_1\beta_1, & A_{32} &= \alpha_2\beta_1, & A_{33} &= \alpha_3\beta_1, & A_{34} &= \alpha_4\beta_1, & A_{35} &= \alpha_5\beta_1, \\
A_{36} &= \alpha_6\beta_1, & A_{37} &= \alpha_{-2}\beta_2, & A_{38} &= \alpha_{-1}\beta_2, & A_{39} &= \alpha_0\beta_2, & A_{40} &= \alpha_1\beta_2, \\
A_{41} &= \alpha_2\beta_2, & A_{42} &= \alpha_3\beta_2, & A_{43} &= \alpha_4\beta_2, & A_{44} &= \alpha_5\beta_2, & A_{45} &= \alpha_6\beta_2, \\
A_{46} &= \alpha_{-2}\beta_3, & A_{47} &= \alpha_{-1}\beta_3, & A_{48} &= \alpha_0\beta_3, & A_{49} &= \alpha_1\beta_3, & A_{50} &= \alpha_2\beta_3, \\
A_{51} &= \alpha_3\beta_3, & A_{52} &= \alpha_4\beta_3, & A_{53} &= \alpha_5\beta_3, & A_{54} &= \alpha_6\beta_3, & A_{55} &= \alpha_{-2}\beta_4, \\
A_{56} &= \alpha_{-1}\beta_4, & A_{57} &= \alpha_0\beta_4, & A_{58} &= \alpha_1\beta_4, & A_{59} &= \alpha_2\beta_4, & A_{60} &= \alpha_3\beta_4, \\
A_{61} &= \alpha_4\beta_4, & A_{62} &= \alpha_5\beta_4, & A_{63} &= \alpha_6\beta_4, & A_{64} &= \alpha_{-2}\beta_5, & A_{65} &= \alpha_{-1}\beta_5, \\
A_{66} &= \alpha_0\beta_5, & A_{67} &= \alpha_1\beta_5, & A_{68} &= \alpha_2\beta_5, & A_{69} &= \alpha_3\beta_5, & A_{70} &= \alpha_4\beta_5, \\
A_{71} &= \alpha_5\beta_5, & A_{72} &= \alpha_6\beta_5, & A_{73} &= \alpha_{-2}\beta_6, & A_{74} &= \alpha_{-1}\beta_6, & A_{75} &= \alpha_0\beta_6, \\
A_{76} &= \alpha_1\beta_6, & A_{77} &= \alpha_2\beta_6, & A_{78} &= \alpha_3\beta_6, & A_{79} &= \alpha_4\beta_6, & A_{80} &= \alpha_5\beta_6, \\
A_{81} &= \alpha_6\beta_6
\end{aligned}$$

şeklinde toplam $9 \times 9 = 81$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü bulmak için A_i , ($i = 1(1)25$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü (3.2.11) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda (3.3.1) formunda elde edilen cebirsel denklem

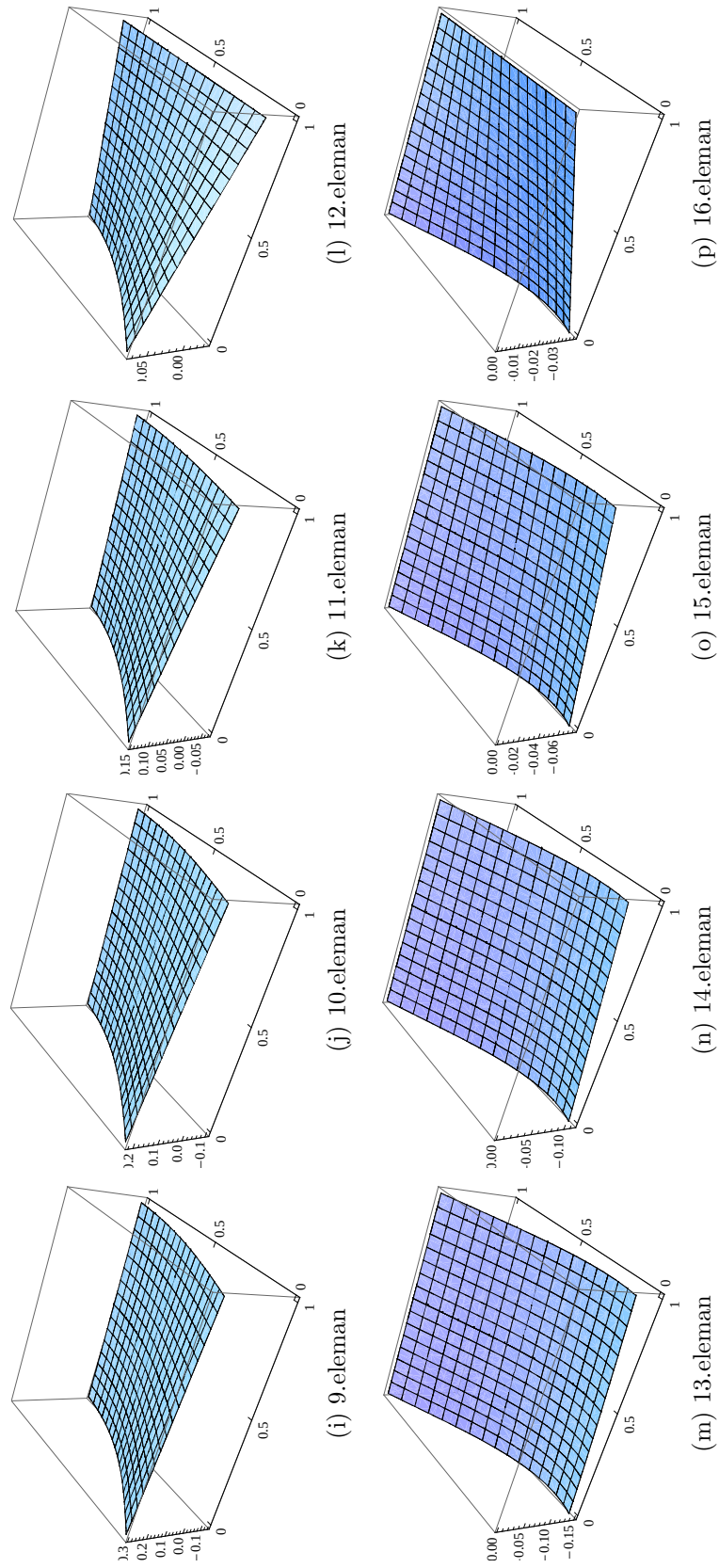
sistemi çözülürse $A_i, (i = 1(1)81)$ global eleman parametreleri

$$\begin{aligned}
A_1 &= -0.00000863648801943 \\
A_2 &= 0.00000000003108665 \\
A_3 &= -0.00000073135518101 \\
A_4 &= -0.00000023064911066 \\
A_5 &= -0.00000030506625989 \\
A_6 &= -0.00000007266164370 \\
A_7 &= -0.00000002485414431 \\
A_8 &= 0.00000004396615208 \\
&\vdots \\
A_{78} &= -0.00000001793079926 \\
A_{79} &= 0.00000010870656424 \\
A_{80} &= -0.00000039609847072 \\
A_{81} &= 0.00000233261218194
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Şekil 3.34 her bir elemanın çözüm grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 16 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 3.35’de verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir. Tablo 3.12’de model problemin modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam ve yaklaşık çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin referans [12]’de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 3.34: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



Şekil 3.34: (Devam) Model problemin $4 \times 4 \times 4 = 16$ eleman için nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

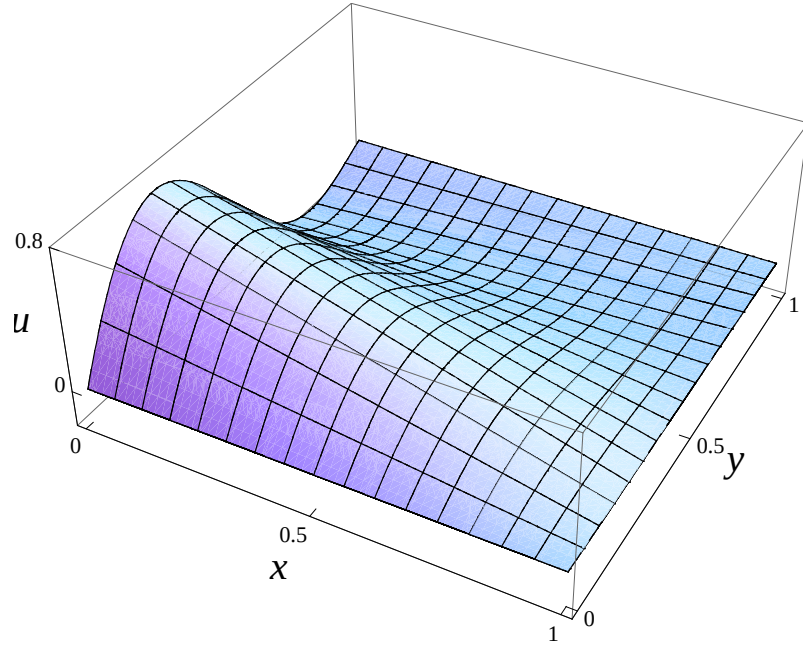
Tablo 3.12: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	[12]	
(0.25,0.25)	0.532292	0.523514	0.533804
(0.25,0.50)	0.225866	0.229845	0.224427
(0.25,0.75)	-0.104486	-0.0987043	-0.107168
(0.50,0.25)	0.353191	0.345257	0.355869
(0.50,0.50)	0.149883	0.152811	0.149618
(0.50,0.75)	-0.069583	-0.0646793	-0.0714452
(0.75,0.25)	0.176183	0.173169	0.177935
(0.75,0.50)	0.075103	0.0766886	0.0748090
(0.75,0.75)	-0.034399	-0.0326491	-0.0357226

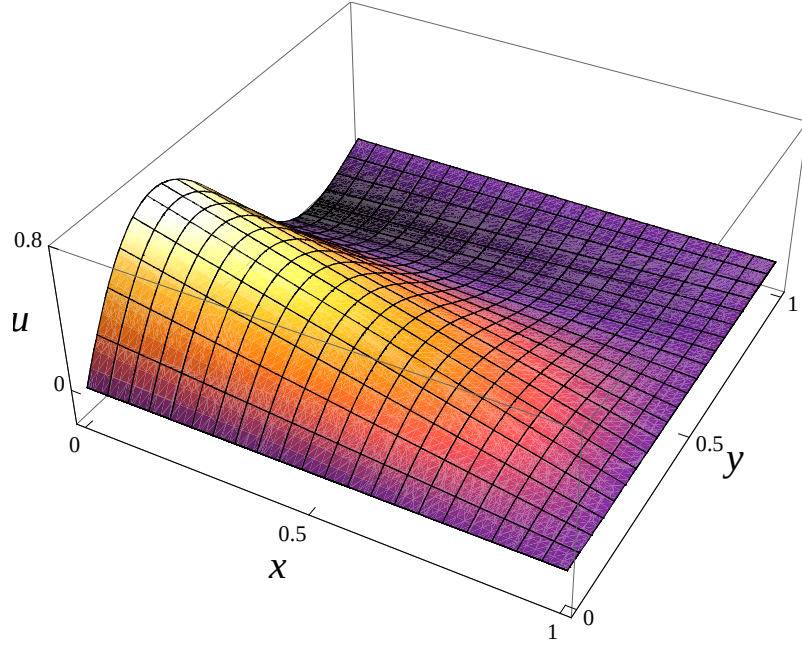
Bölgenin $10 \times 10 = 100$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $10 \times 10 = 100$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/10$ olan 100 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (3.2.11) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y)$ yerine Bölüm 2'de (2.4.3.15) ile verilen $u_{nm}(x, y)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için bir eleman konum tablosundan yararlanılır. Örneğin böyle bir tablo 100 eleman için Tablo 3.5'deki gibi numaralandırılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır.

Her bir septik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_{-2}(\xi), \tilde{B}_{-1}(\xi), \tilde{B}_0(\xi), \tilde{B}_1(\xi), \tilde{B}_2(\xi), \tilde{B}_3(\xi), \tilde{B}_4(\xi), \tilde{B}_5(\xi), \tilde{B}_6(\xi), \tilde{B}_7(\xi), \tilde{B}_8(\xi), \tilde{B}_9(\xi), \tilde{B}_{10}(\xi), \tilde{B}_{11}(\xi)$ ve $\tilde{B}_{12}(\xi)$ modifiye edilmiş septik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ ve α_{12} gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_{-2}(\eta), \tilde{B}_{-1}(\eta), \tilde{B}_0(\eta), \tilde{B}_1(\eta), \tilde{B}_2(\eta), \tilde{B}_3(\eta), \tilde{B}_4(\eta), \tilde{B}_5(\eta), \tilde{B}_6(\eta), \tilde{B}_7(\eta), \tilde{B}_8(\eta), \tilde{B}_9(\eta), \tilde{B}_{10}(\eta), \tilde{B}_{11}(\eta)$ ve $\tilde{B}_{12}(\eta)$ modifiye edilmiş septik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_{-2}, \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}, \beta_{11}$ ve β_{12} gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.4.3.15) yaklaşımı (3.2.11) zayıf formunda ve ξ, η yönlerinde modifiye edilmiş septik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

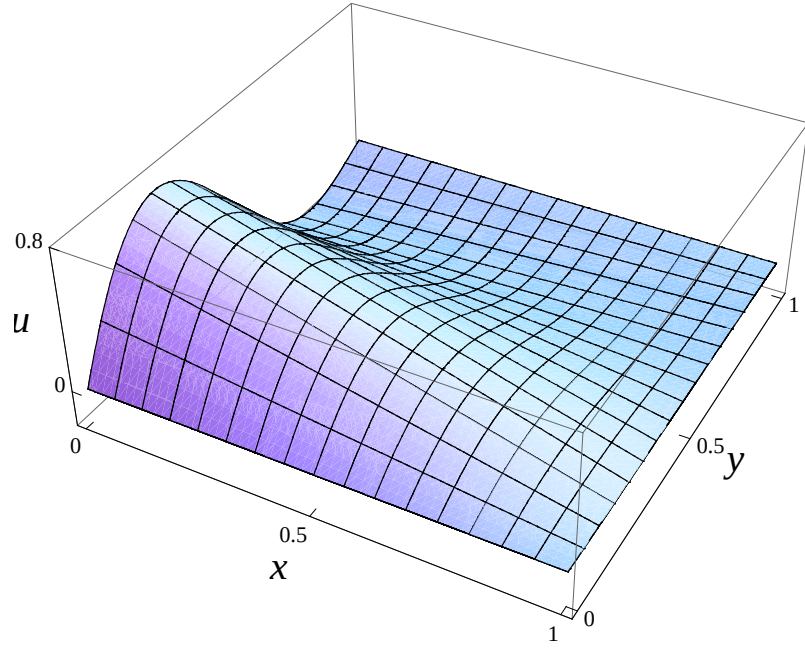
Şekil 3.35: Model problemin $4 \times 4 = 16$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 3.13: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için elde edilen nümerik çözümlerinin referans [12]'deki sonuçlarla karşılaştırması.

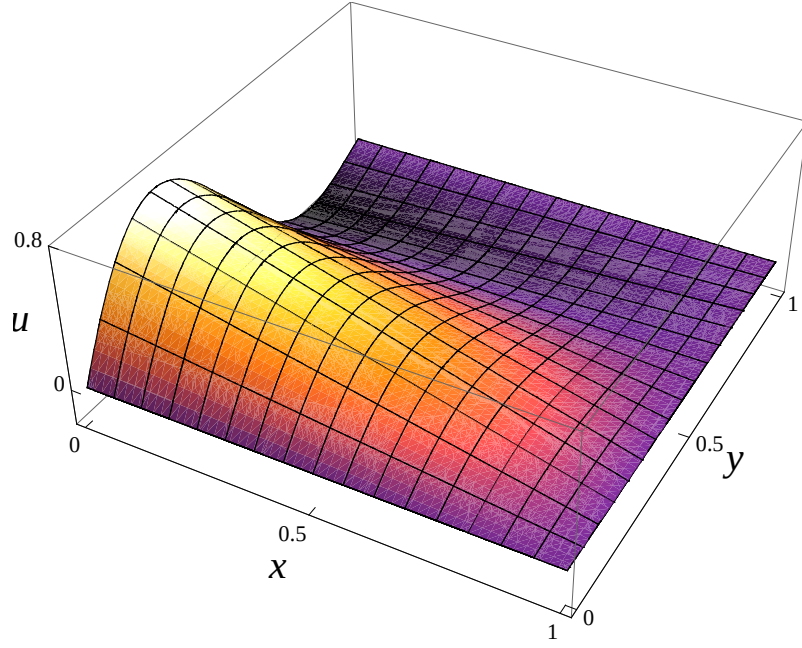
(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	10×10	[12]	
(0.25,0.25)	0.550617	0.523514	0.533804
(0.25,0.50)	0.227443	0.229845	0.224427
(0.25,0.75)	-0.104704	-0.0987043	-0.107168
(0.50,0.25)	0.372439	0.345257	0.355869
(0.50,0.50)	0.155580	0.152811	0.149618
(0.50,0.75)	-0.068150	-0.0646793	-0.0714452
(0.75,0.25)	0.187419	0.173169	0.177935
(0.75,0.50)	0.078948	0.0766886	0.0748090
(0.75,0.75)	-0.0335297	-0.0326491	-0.0357226

da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde α_i ve β_i , ($i = -2(1)12$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $15 \times 15 = 225$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümünü bulmak için A_i , ($i = 1(1)225$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü (3.2.11) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda (3.3.1) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülürse A_i , ($i = 1(1)225$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 3.13'de model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu septik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam ve yaklaşık çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin referans [12]'de verilenler kadar iyi olduğu açıkça görülmektedir. Her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 100 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 3.36'da verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir. Tablo 3.14'de septik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü ile



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 3.36: Model problemin $4 \times 4 = 16$ için (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 3.14: Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.042993	0.046229	0.043148
(0.8,0.2)	0.131727	0.146520	0.134635
(0.7,0.3)	0.211168	0.220538	0.209474
(0.6,0.4)	0.224278	0.227138	0.218231
(0.5,0.5)	0.149883	0.155580	0.149618
(0.4,0.6)	0.031240	0.038575	0.033869
(0.3,0.7)	-0.071991	-0.069688	-0.073664
(0.2,0.8)	-0.119623	-0.119334	-0.121088
(0.1,0.9)	-0.091004	-0.087141	-0.087978
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.1,0.1)	0.388960	0.400124	0.388335
(0.2,0.2)	0.537415	0.566298	0.538541
(0.3,0.3)	0.487144	0.504167	0.488773
(0.4,0.4)	0.327241	0.336726	0.327347
(0.5,0.5)	0.149883	0.155580	0.149618
(0.6,0.6)	0.021828	0.027555	0.022579
(0.7,0.7)	-0.030836	-0.028305	-0.031570
(0.8,0.8)	-0.029284	-0.029139	-0.030272
(0.9,0.9)	-0.010124	-0.007080	-0.009775
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablo 3.15'den kuintik B-spline fonksiyonlar yerine septik B-spline fonksiyonlar kullanılmasının, septik B-spline fonksiyonlar kullanıldığında eleman sayısının 16'dan 100'e çıkarılmasının sonuçları iyileştirmediği görülmektedir. Kübik ve kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen $u_{nm}(x, y)$ nümerik çözümünün $u(x, y)$ tam çözümüne ne kadar yaklaştığını ölçmek için

$$L_2 = \|u - u_{nm}\|_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{ip}} |u_i - (u_{nm})_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{ip}} |u_i|^2}},$$

$$L_\infty = \|u - u_{nm}\|_\infty = \max_{0 < i < n_{ip}} |u_i - (u_{nm})_i|$$

ile tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Tablo 3.15'de verildi. Burada

Tablo 3.15: Model problemin farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları ve eleman sayısı için L_2 ve L_∞ hata normları.

	Eleman Sayısı	L_2	L_∞
Kübik	2×2	6.25550×10^{-2}	3.26868×10^{-2}
	4×4	6.05939×10^{-3}	4.56680×10^{-3}
	10×10	2.79940×10^{-4}	5.50414×10^{-4}
Kuintik	4×4	4.29559×10^{-4}	3.14455×10^{-4}
	10×10	1.04642×10^{-6}	9.40069×10^{-7}
Septik	4×4	1.66223×10^{-2}	1.69892×10^{-2}
	10×10	1.00567×10^{-2}	1.14432×10^{-2}

n_{i_p} iç noktaların sayısı olup u_i ve $(u_{nm})_i$ sırası ile i . noktadaki u 'nun tam ve yaklaşık çözümleridir. L_2 ve L_∞ hata normları $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi x ve y yönlerinde 40 eşit parçaya bölünerek toplam $41 \times 41 = 1681 (= n_{i_p})$ düğüm noktasındaki u_i ve $(u_{nm})_i$ değerleri göz önünde bulundurularak hesaplandı. Tablodan da görüldüğü gibi, kübik B-spline baz fonksiyonları kullanıldığında eleman sayısının artmasıyla hata normları gittikçe azalmıştır. Kübik B-spline baz fonksiyonları yerine kuintik B-spline baz fonksiyonlarının kullanımı nümerik çözümü iyileştirmiş ve eleman sayısının artmasıyla birlikte hata normları kübik B-spline baz fonksiyonlarına göre daha da küçülmüştür. Fakat septik B-spline baz fonksiyonları kullanıldığında hata normlarında beklenen düşüş görülmemiştir.

BÖLÜM 4

2-BOYUTLU DİFÜZYON DENKLEMİNİN MODİFİYE EDİLMİŞ B-SPLINE GALERKİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

4.1 Giriş

Zamana bağlı 2-boyutlu difüzyon denkleminin nümerik çözümü üzerine son yıllarda yapılan bazı çalışmalar vardır. Tavakoli ve Davami [26], 1-boyutlu difüzyon denkleminin çözümü için önerilen değişen grup açık veya değişen grup açık-kapalı yöntemlerinden yeni grup açık yöntemini operator parçalama yöntemiyle birlikte 2-boyutlu difüzyon denkleminin çözümü için geliştirmişler ve uygulamışlardır. Ang [27], yerel olmayan şarta bağlı 2-boyutlu difüzyon denkleminin nümerik çözümü için sınır integral denklem yöntemini sunmuş ve özel bir test problemini bu yöntemle çözmüştür. Velivelli ve Bryden [28], 2-boyutlu difüzyon denkleminin çözümü için kafes Boltzmann yönteminin ön-etkin (*cache-efficient*) uygulamasını sunmuşlardır. Moon vd. [10], 2-boyutlu zamana bağlı difüzyon denklemini 2-boyutlu kübik spline baz fonksiyonları kullanarak Galerkin yöntemiyle çözmüşlerdir. Aboanber ve Hamada [29], değişken zaman adımlı iki ve üç boyutlu konum-zaman difüzyon denklemlerini genelleştirilmiş Runge-Kutta yöntemiyle çözmüşlerdir. Bhaskar vd. [30], sınırsız bölgeler üzerinde difüzyon denkleminin homojen ve homojen olmayan başlangıç değer problemlerinin nümerik olarak çözümünü bulmak için ısı denkleminin temel çözümlerini oluşturan wavelet'leri kullanarak Heatlet'leri geliştirmişlerdir. Sterk ve Trobec [31], parametre optimizasyonu ve hata analizi ile birlikte 2-boyutlu zamana bağlı difüzyon denkleminin düğümsüz (*meshless*) yerel Petrov-Galerkin yöntemi üzerine temellenmiş çözümünü elde etmişlerdir.

Bu bölümde modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik ve kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle 2-boyutlu Difüzyon denklemi için başlangıç ve sınır şartları ile verilen model problemin yaklaşık

çözümleri elde edildi. Elde edilen nümerik çözümler problemin literatürdeki mevcut çözümleriyle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde sunuldu.

4.2 Model Problem

Bu bölümde model problem olarak $D = [0, 1] \times [0, 1]$ bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (x, y) \in D, \quad t > 0 \quad (4.2.1)$$

olarak verilen 2-boyutlu difüzyon denklemi

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (4.2.2)$$

başlangıç şartı ve

$$u(x, y_0, t) = g_1(x, t) = 0, \quad x_0 = 0 \leq x \leq x_n = 1, \quad t > 0 \quad (4.2.3)$$

$$u(x, y_m, t) = g_2(x, t) = 0, \quad x_0 = 0 \leq x \leq x_n = 1, \quad t > 0 \quad (4.2.4)$$

$$u(x_0, y, t) = h_1(y, t) = 0, \quad y_0 = 0 \leq y \leq y_m = 1, \quad t > 0 \quad (4.2.5)$$

$$u(x_n, y, t) = h_2(y, t) = 0, \quad y_0 = 0 \leq y \leq y_m = 1, \quad t > 0 \quad (4.2.6)$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$u(x, y, t) = e^{-2\pi^2 K t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (4.2.7)$$

dir [10]. Burada K difüzyon katsayısı olup model problemin nümerik hesaplamalarında $K = 10^{-6}$ olarak alınacaktır. Moon vd. [10], bu model problemin ayrışmaz (non-separable) çözümünü klasik kübik B-spline baz fonksiyonları kullanarak Galerkin yöntemiyle elde etmişlerdir.

Model Problemin Zayıf Formu

Bu bölümde yukarıda verilen model problemin modifiye edilmiş kübik ve kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edileceğinden problemin zayıf form denkleminin bulunması gerekir. Bunun için önce (4.2.1) denklemindeki tüm ifadeler eşitliğin sol tarafında toplanır ve sonra $\Psi(x, y)$ ağırlık fonksiyonu ile çarpımının bölge üzerinden integrali alınırsa

$$\iint_D \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{K} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \Psi dx dy = 0 \quad (4.2.8)$$

elde edilir. Burada, $k = 0(1)n$ ve $l = 0(1)m$ olmak üzere, $\Psi = \tilde{B}_k(x)\tilde{B}_l(y)$ dir.

u bağımlı değişkeninin mertebesini kendisi ve Ψ ağırlık fonksiyonu arasında paylaşmak için Green teoremi kullanılır. Şöyleki, D Lipschitz sınırlı bir bölge, $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ ve $g(x) = g(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonları $\partial f/\partial x_i$ ve $\partial g/\partial x_i$ türevleri ile birlikte $\bar{D} = D + \partial D$ de sürekli fonksiyonlar ise Green teoreminden

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx dy + \iint_D \frac{\partial g}{\partial x_i} f dx dy = \oint_{\partial D} f g v_i ds \quad (4.2.9)$$

dir. Burada, i sayısı 1 ile N arasında herhangi bir sayı olup v_i dış normalin birim vektörünün i . koordinatıdır. (4.2.9) eşitliği

$$f = \frac{\partial u}{\partial x}, g = \Psi, i = 1 \text{ için} \quad \iint_D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Psi dx dy + \iint_D \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x} \Psi v_1 ds \quad (4.2.10)$$

ve

$$f = \frac{\partial u}{\partial y}, g = \Psi, i = 2 \text{ için} \quad \iint_D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Psi dx dy + \iint_D \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial y} \Psi v_2 ds \quad (4.2.11)$$

olur. Tüm $\tilde{B}_k(x)$ ve $\tilde{B}_l(y)$ 'ler ∂D sınırı üzerinde sıfır olduğundan açıkça Ψ 'de ∂D sınırı üzerinde sıfırdır. Böylece (4.2.10) ve (4.2.11) denklemlerinin sağ tarafları otomatik olarak sıfır olup bunlar (4.2.8)'de kullanılırsa (4.2.1)-(4.2.6) denklemleri ile verilen model problemin global koordinat sisteminde zayıf formu

$$\iint_D \left\{ \frac{1}{K} \frac{\partial u}{\partial t} \Psi + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\} dx dy = 0 \quad (4.2.12)$$

olarak elde edilir. Global koordinat sisteminden lokal koordinat sistemine geçmek için $h_x \xi = x - x_m$ ve $h_y \eta = y - x_m$ lokal koordinat dönüşümleri kullanılır. Böylece, global koordinat sistemindeki (4.2.12) zayıf form denklemi lokal koordinat sisteminde

$$\frac{h^2}{K} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \Psi d\xi d\eta + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = 0 \quad (4.2.13)$$

olur.

4.3 Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kübik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda model problemin nümerik çözümleri modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. Nümerik hesaplamalar problemin $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi sırası ile 4 ($h_x = h_y = 1/2$), 16 ($h_x = h_y = 1/4$) ve 100 ($h_x = h_y = 1/10$) elemana ayrılarak yapıldı. Elde edilen nümerik çözümler literatürdeki mevcut çözümlerle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

Bölgenin $2 \times 2 = 4$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $2 \times 2 = 4$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/2$ olan 4 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (4.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2’de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı (2.2.3.17) ve (2.2.3.21) denklemleri ile birlikte yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.1’de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır.

Çözüm bölgesine düşen sırası ile x ve y yönlerinde modifiye edilmiş $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_i(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonlarının grafikleri Bölüm 3’de Şekil 3.4’deki gibidir.

Her bir kübik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$ ve $\tilde{B}_2(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ ve $\alpha_2(t)$ gibi reel katsayılar ile $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$ ve $\tilde{B}_2(\eta)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları da sırasıyla $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$ ve $\beta_2(t)$ gibi reel katsayılar ile çarpılır. (2.2.3.22) yaklaşımı (4.2.13) zayıf formunda, ξ ve η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü aşağıdaki eleman denklemleri ile ifade edilir.

1. eleman için:

$$\begin{aligned} u_{nm}(\xi, \eta, t) &= [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_0(t)Q_1 \\ &+ [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_1(t)Q_2 \\ &+ [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_2(t)Q_3, \end{aligned}$$

2. eleman için:

$$\begin{aligned} u_{nm}(\xi, \eta, t) &= [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_1(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_0(t)Q_1 \\ &+ [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_1(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_1(t)Q_2 \\ &+ [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_5(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_2(t)Q_3, \end{aligned}$$

3. eleman için:

$$\begin{aligned} u_{nm}(\xi, \eta, t) &= [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_0(t)Q_4 \\ &+ [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_1(t)Q_5 \\ &+ [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_2(t)Q_6, \end{aligned}$$

4. eleman için:

$$\begin{aligned} u_{nm}(\xi, \eta, t) &= [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_1(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_0(t)Q_4 \\ &+ [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_1(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_1(t)Q_5 \\ &+ [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_5(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_2(t)Q_6 \end{aligned}$$

dir.

Burada

$$F_1 = 12\xi - 18\xi^2 + 7\xi^3,$$

$$Q_1 = 12\eta - 18\eta^2 + 7\eta^3,$$

$$F_2 = 6\xi - 2\xi^3,$$

$$Q_2 = 6\eta - 2\eta^3$$

$$F_3 = \xi^3,$$

$$Q_3 = \eta^3,$$

$$F_4 = 1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3,$$

$$Q_4 = 1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3,$$

$$F_5 = 4 - 6\xi^2 + 2\xi^3,$$

$$Q_5 = 4 - 6\eta^2 + 2\eta^3,$$

$$F_6 = 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 7\xi^3,$$

$$Q_6 = 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 7\eta^3$$

dır.

Yukarıda ifade edilen her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = 0(1)2$) lokal eleman parametrelerine bağlı

$$A_1(t) = \alpha_0(t)\beta_0(t), \quad A_4(t) = \alpha_0(t)\beta_1(t), \quad A_7(t) = \alpha_0(t)\beta_2(t),$$

$$A_2(t) = \alpha_1(t)\beta_0(t), \quad A_5(t) = \alpha_1(t)\beta_1(t), \quad A_8(t) = \alpha_1(t)\beta_2(t),$$

$$A_3(t) = \alpha_2(t)\beta_0(t), \quad A_6(t) = \alpha_2(t)\beta_1(t), \quad A_9(t) = \alpha_2(t)\beta_2(t)$$

şeklinde toplam $3 \times 3 = 9$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)9$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (4.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilirse global koordinatlarda

$$G \frac{dA(t)}{dt} = PA(t) \tag{4.3.1}$$

$$ZA(0) = g \tag{4.3.2}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Burada, $i, j, k, l = 0(1)n$ için $i_l = j(n+1) + i$ ve $j_l = l(n+1) + k$ olmak üzere,

$$G = [g_{i_l j_l}], \quad g_{i_k j_l} = h^2 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) \tilde{B}_k(\xi) \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi \quad (4.3.3)$$

$$P = [p_{i_l j_l}], \quad p_{i_l j_l} = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \tilde{B}_i(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_j(\eta) \frac{\partial \tilde{B}_k(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}_i(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_j(\eta)}{\partial \eta} \tilde{B}_k(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta d\xi \quad (4.3.4a)$$

$$A(t) = [A_1(t) \ A_2(t) \ A_3(t) \ A_4(t) \ A_5(t) \ A_6(t) \ A_7(t) \ A_8(t) \ A_9(t)]^t; \quad (4.3.5)$$

$i, j, k, l = 0(1)n$ için $i_l = j(n+1) + 1$ ve $j_l = l(n+1) + k$ olmak üzere

$$Z = [z_{i_l j_l}], \quad z_{i_l j_l} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) \tilde{B}_k(\xi) \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi \quad (4.3.6)$$

ve son olarak $i, j = 0(1)1$ için $i_l = j(n+1) + 1$ olmak üzere,

$$g = [g_{i_l}], \quad g_{i_l} = \int_0^1 \int_0^1 u_0(\xi, \eta) \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) d\eta d\xi \quad (4.3.7)$$

dir.

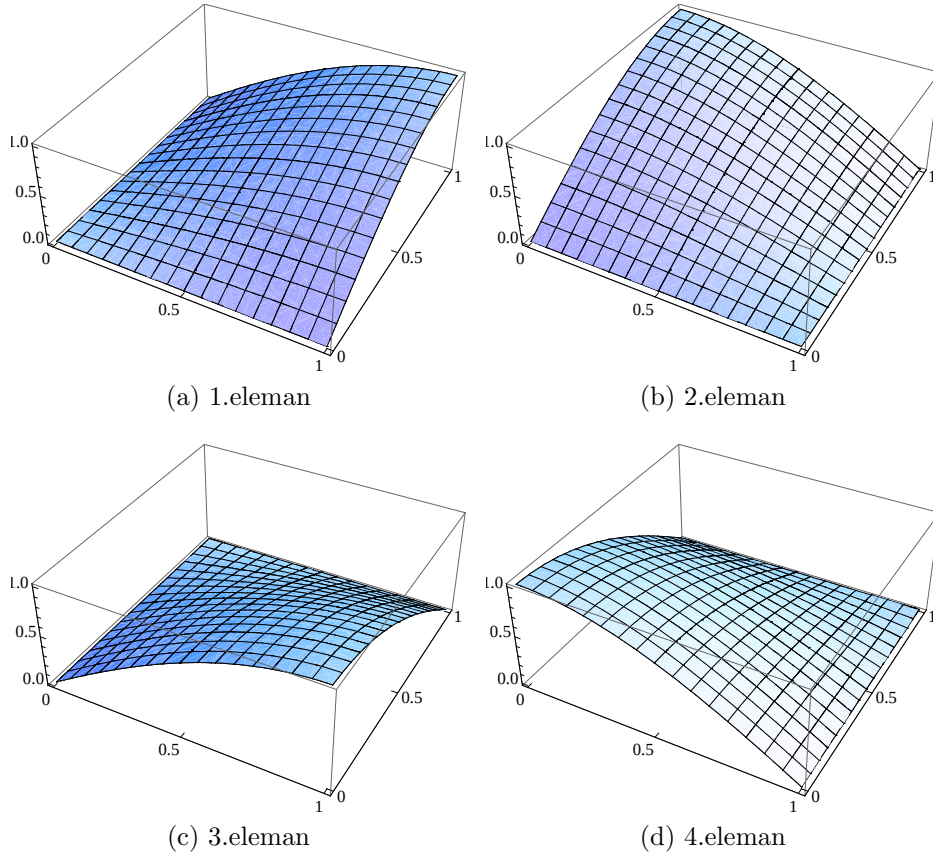
(4.3.2) eşitliği (4.3.1) iterasyonunu başlatmada kullanılacak olan eleman parametrelerinin bulunmasını sağlayacak denklemdir. İlk önce

$$u_{nm}(x, y, 0) \cong u_0(x, y) \quad (4.3.8)$$

denklemine Galerkin sonlu eleman yönteminin uygulanmasıyla elde edilen (4.3.2) cebirsel denklem sistemi çözülrse $t = 0.0$ zamanındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)9$) global eleman parametreleri

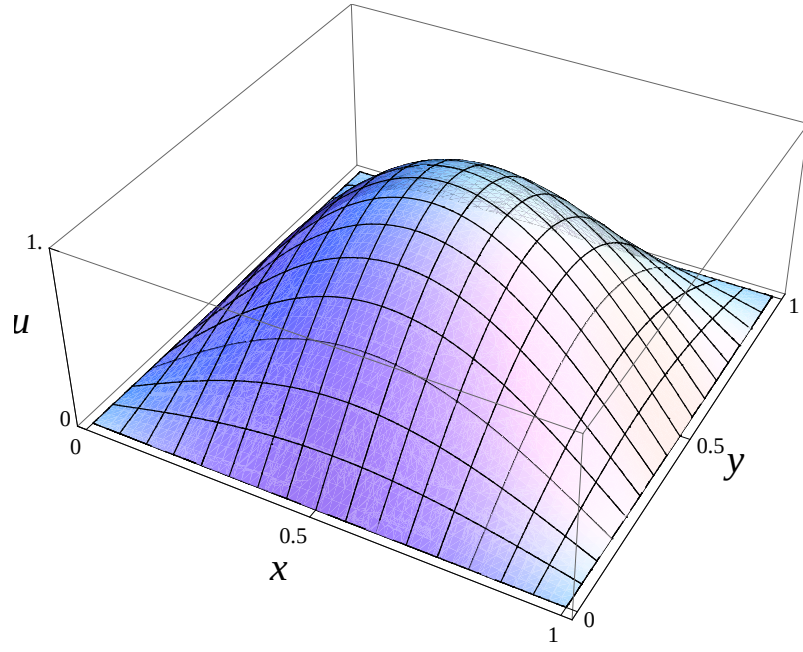
$$\begin{aligned} A_1(0) &= 0.000020532217339442, & A_2(0) &= 0.00326994497719513, \\ A_3(0) &= 0.00002053221736409, & A_4(0) &= 0.00326994497719468, \\ A_5(0) &= 0.05967756619163220, & A_6(0) &= 0.00326994497719513, \\ A_7(0) &= 0.00002053221736498, & A_8(0) &= 0.00326994497719157, \\ A_9(0) &= 0.00002053221736142 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa $t = 0.0$ zamanında her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 4.1’de model problemin modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 4.1, her bir elemanın $t = 0.0$ zamanında elde edilen yaklaşık çözümünün grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ zamanında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 4 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 4.2’de ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir. $t = 0.0$ zamanı için elde edilen

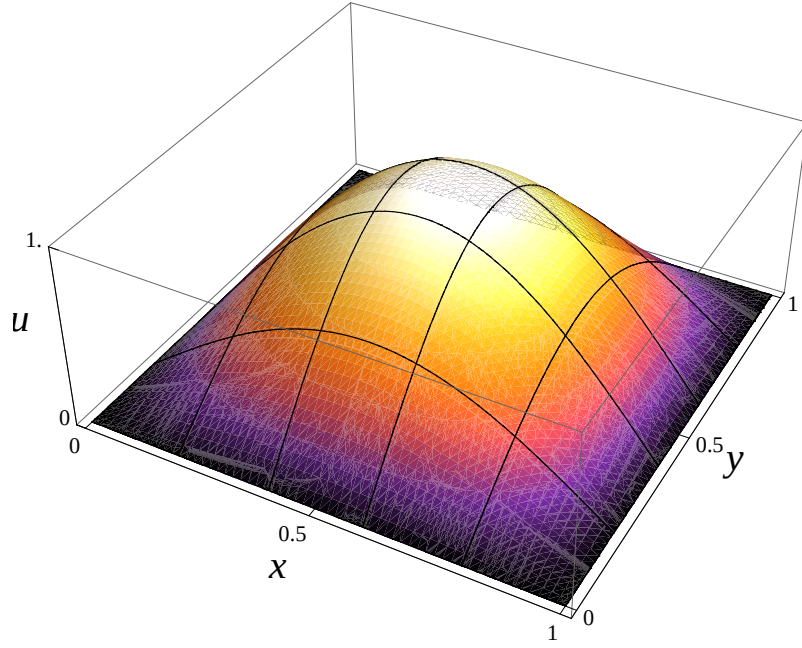


Şekil 4.1: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için $t = 0.0$ ’daki nümerik çözümleri.

$A_i(t), (i = 1(1)9)$ eleman parametreleri bulunduktan sonra istenilen zaman adımı için iterasyona başlanır. (4.3.1) sistemine ileri fark ve Crank-Nicolson sonlu fark



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 4.2: Model problemin $2 \times 2 = 4$ için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 4.1: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	2×2	
(0.25,0.25)	0.496407	0.500000
(0.25,0.50)	0.707240	0.707107
(0.25,0.75)	0.496402	0.500000
(0.50,0.25)	0.707240	0.707107
(0.50,0.50)	1.007242	1.000000
(0.50,0.75)	0.707240	0.707107
(0.75,0.25)	0.496402	0.500000
(0.75,0.50)	0.707240	0.707107
(0.75,0.75)	0.496402	0.500000

yaklaşımları uygulanır ve sonra (4.3.8) başlangıç şartlarından elde edilen $A(0)$ değerleri kullanılırsa

$$\left[G - \frac{1}{2} \Delta t P \right] A(t_{r+1}) = \left[G + \frac{1}{2} \Delta t P \right] A(t_r) \quad (4.3.9)$$

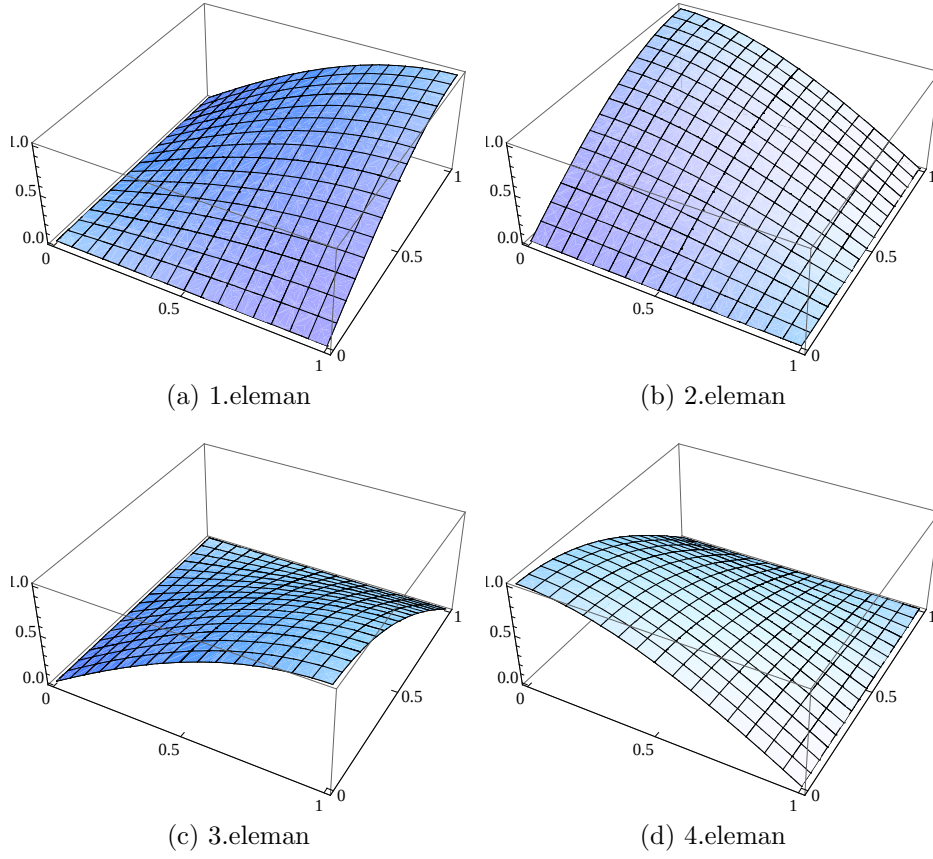
iterasyon formülü elde edilir. Burada $t_0 = 0$, $t_{r+1} = t_r + \Delta t$ olup Δt zaman adım artışıdır.

Problemin çözüm bölgesi $2 \times 2 = 4$ tane eşit elemana ayrıldığı için $h_x = h_y = h = 1/2$ dir. Nümerik hesaplamalar için $\Delta t = 0.05$ olarak alınır ve (4.3.9) sistemi için Excel VBA (**V**isual **B**asic for **A**pplications)'da yazılan program çalıştırılırsa $t = 1.0$ bitiş zamanındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)9$) global eleman parametreleri

$$\begin{aligned} A_1(1.0) &= 0.000020557174780, & A_2(1.0) &= 0.003269838752490, \\ A_3(1.0) &= 0.000020557170904, & A_4(1.0) &= 0.003269838749975, \\ A_5(1.0) &= 0.059676434384596, & A_6(1.0) &= 0.003269838752948, \\ A_7(1.0) &= 0.000020557174816, & A_8(1.0) &= 0.003269838752338, \\ A_9(1.0) &= 0.000020557170840 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. t 'nin artan zamanlardaki değerleri için benzer hesaplamalarla $A_i(t)$ global eleman parametreleri bulunabilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa $t = 1.0$ zamanında her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 4.2'de model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak

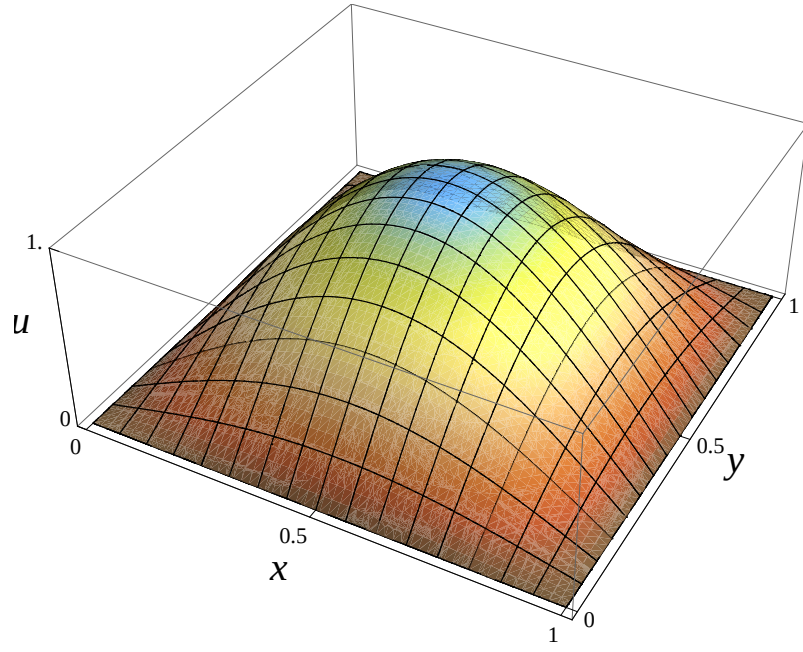
Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 4.3, her bir elemanın $t = 1.0$ zamanında elde edilen yaklaşık çözümünün grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $t = 1.0$ zamanında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 4 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri Şekil 4.4'de ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.



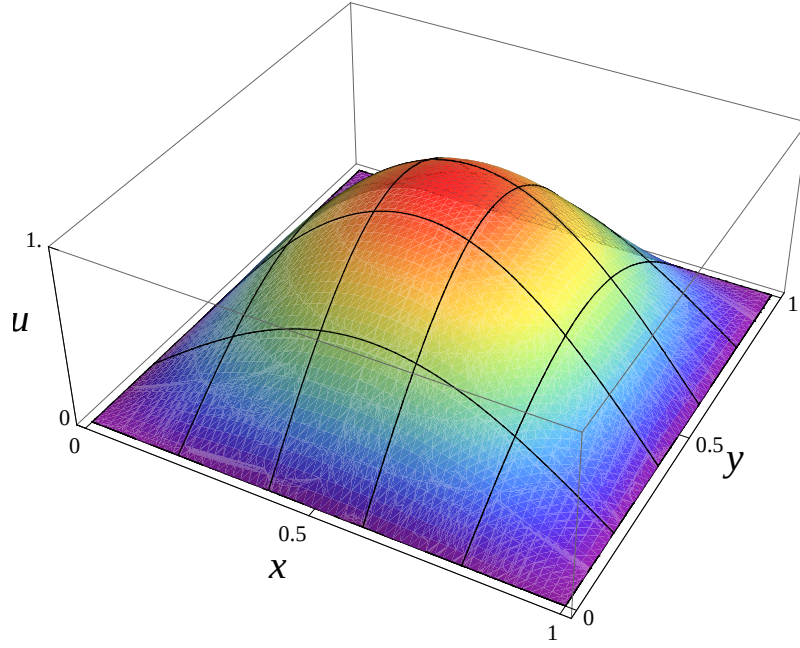
Şekil 4.3: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri.

Bölgenin $4 \times 4 = 16$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $4 \times 4 = 16$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/4$ olan 16 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (4.2.13)



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 4.4: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 4.2: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

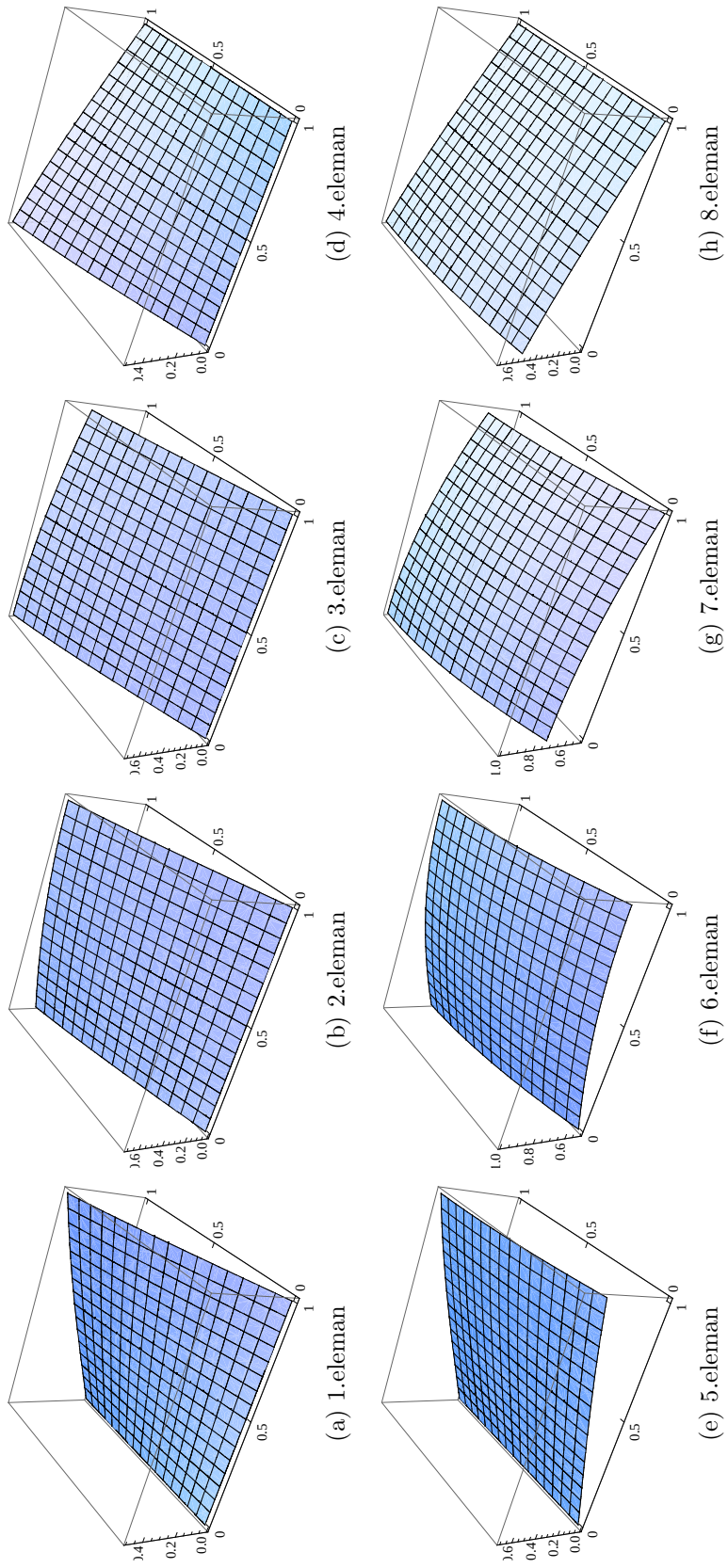
(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	2×2	
(0.25,0.25)	0.496392	0.499990
(0.25,0.50)	0.707226	0.707093
(0.25,0.75)	0.496392	0.499990
(0.50,0.25)	0.707226	0.707093
(0.50,0.50)	1.007223	0.9999803
(0.50,0.75)	0.707226	0.707093
(0.75,0.25)	0.496392	0.499990
(0.75,0.50)	0.707226	0.707093
(0.75,0.75)	0.496392	0.499990

zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2'de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.3'de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır.

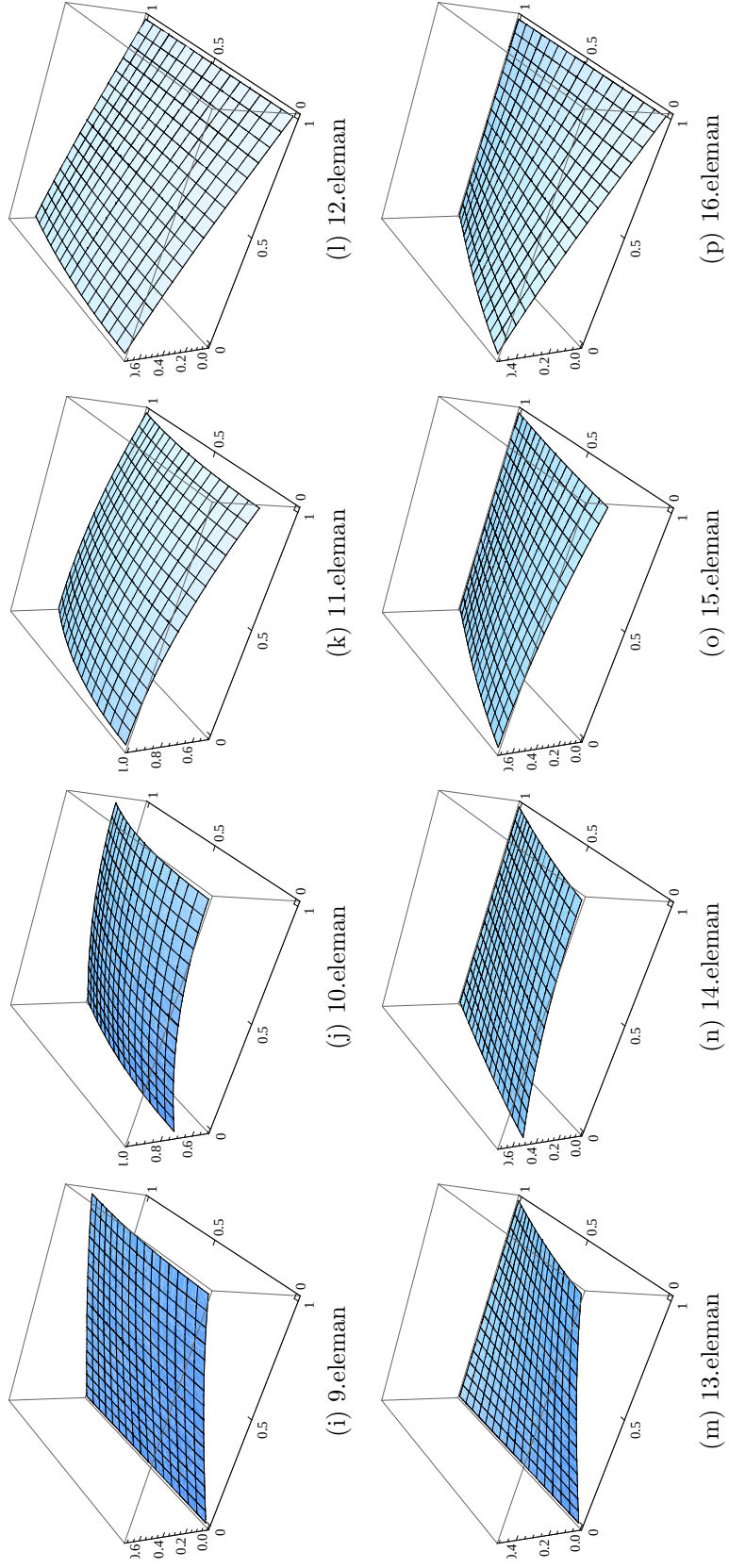
Her bir modifiye edilmiş kübik $\tilde{B}$ -spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(x)$ ve $\tilde{B}_4(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$ ve $\alpha_4(t)$ gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$ ve $\tilde{B}_4(\eta)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$ ve $\beta_4(t)$ gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.2.3.22) yaklaşımı (4.2.13) zayıf formunda ve ξ, η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = 0(1)4$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $5 \times 5 = 25$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)25$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (4.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için

katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda önce (4.3.2) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi sonra (4.3.1) formunda elde edilen iteratif cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)25$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 4.3 ve 4.4’de model problemin modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablolardan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Şekiller 4.5 ve 4.7, her bir elemanın sırasıyla $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarında elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarındaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünün noktasal değerleri kullanılarak model problemin 16 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri sırası ile Şekil 4.6 ve 4.8’de ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.



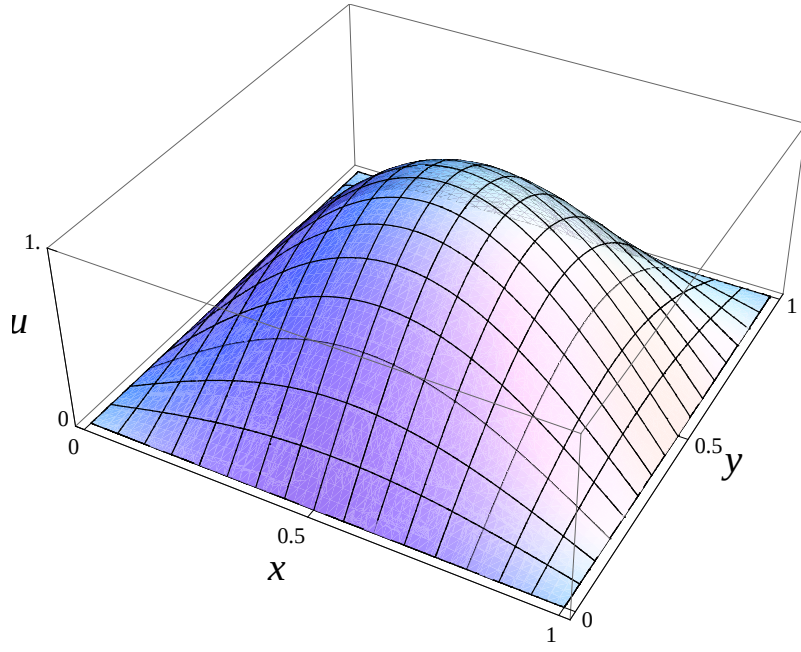
Şekil 4.5: Model problemin $4 \times 4 \times 4 = 64$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



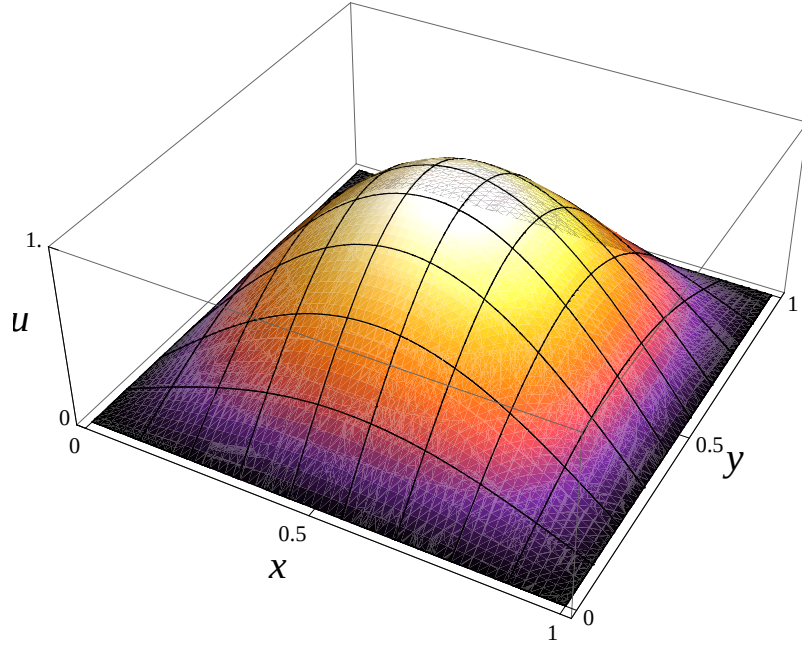
Şekil 4.5: (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

Tablo 4.3: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	4×4	
(0.25,0.25)	0.500504	0.500000
(0.25,0.50)	0.707980	0.707107
(0.25,0.75)	0.500504	0.500000
(0.50,0.25)	0.707980	0.707107
(0.50,0.50)	1.001304	1.000000
(0.50,0.75)	0.707980	0.707107
(0.75,0.25)	0.500504	0.500000
(0.75,0.50)	0.707980	0.707107
(0.75,0.75)	0.500504	0.500000

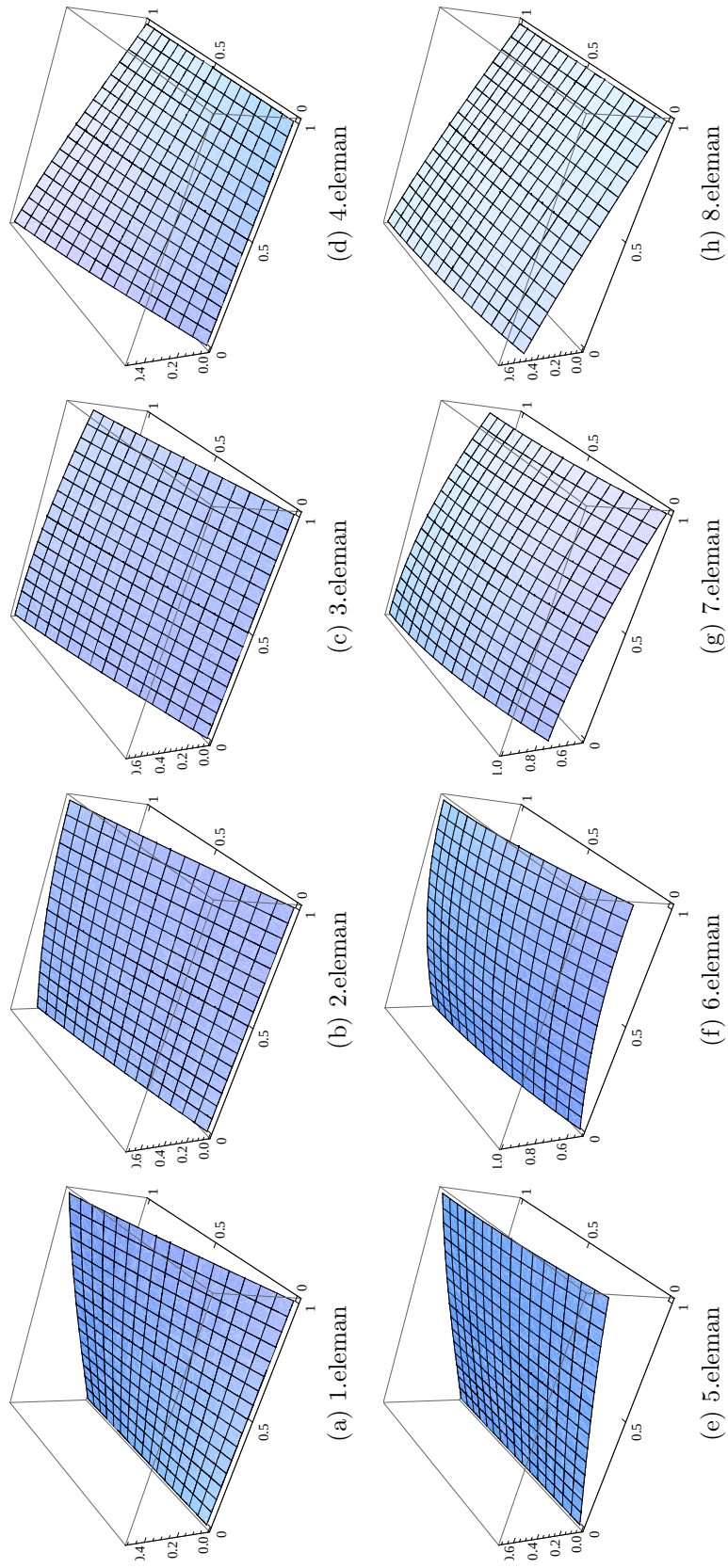


(a) Tam çözüm

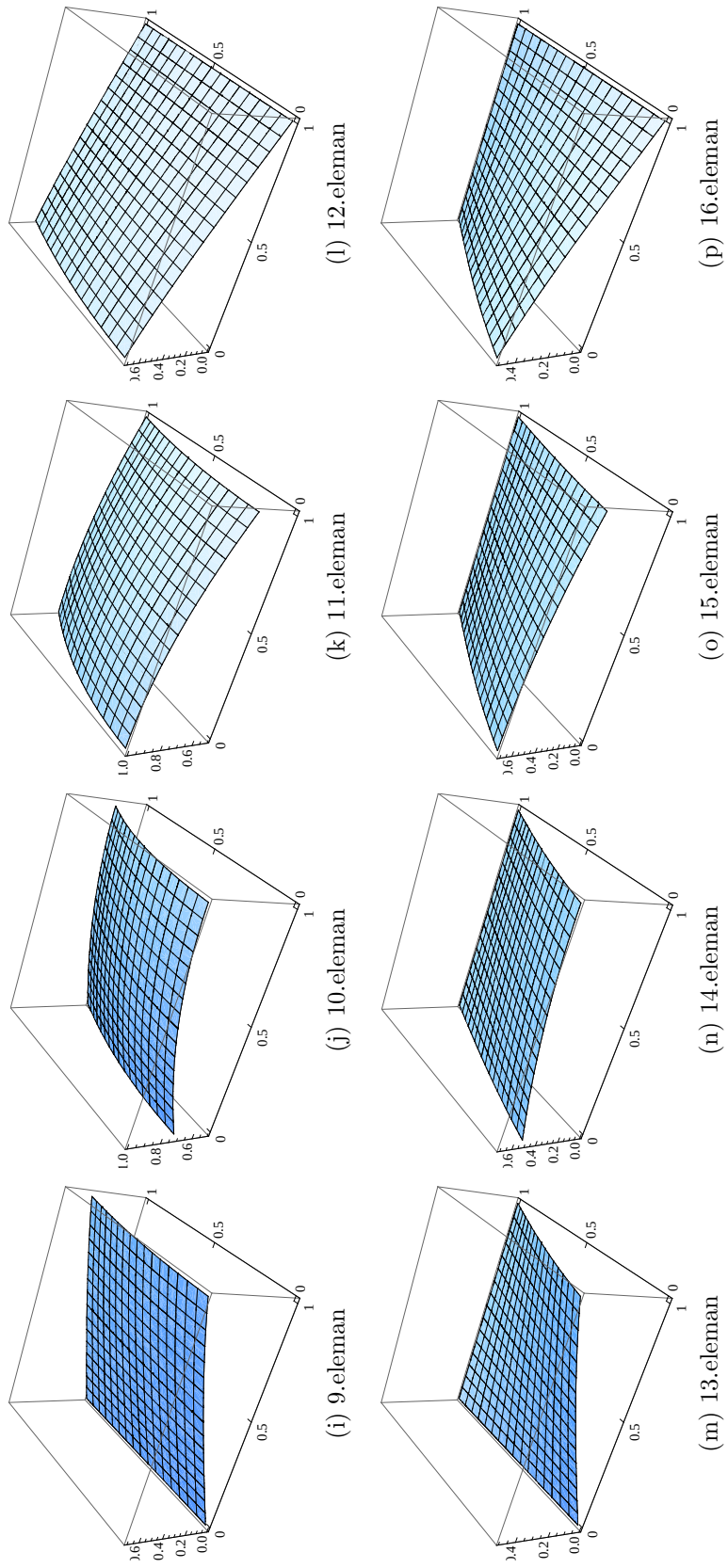


(b) Nümerik çözüm

Şekil 4.6: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.



Şekil 4.7: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



Şekil 4.7: (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

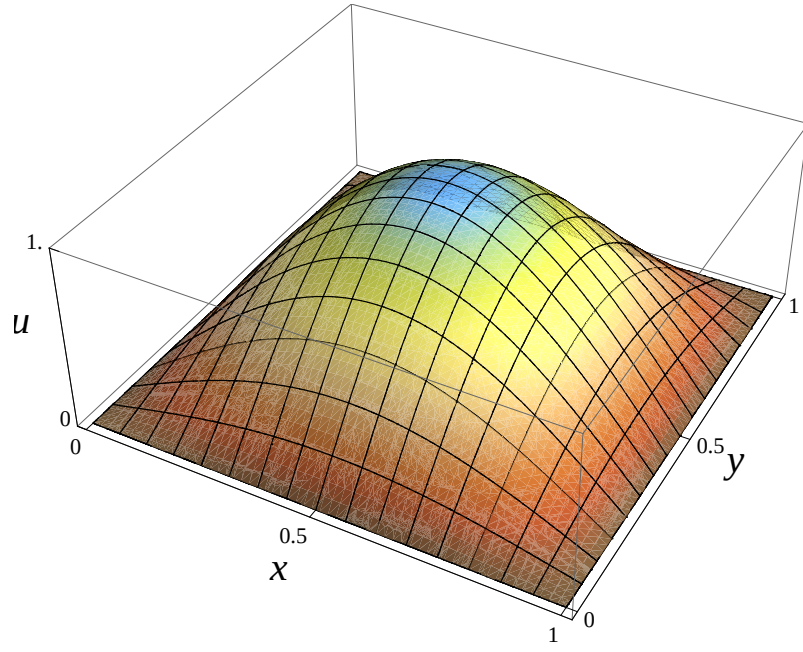
Tablo 4.4: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	4×4	
(0.25,0.25)	0.500494	0.499990
(0.25,0.50)	0.707966	0.707093
(0.25,0.75)	0.500494	0.499990
(0.50,0.25)	0.707966	0.707093
(0.50,0.50)	1.001285	0.999980
(0.50,0.75)	0.707966	0.707093
(0.75,0.25)	0.500494	0.499990
(0.75,0.50)	0.707966	0.707093
(0.75,0.75)	0.500494	0.499990

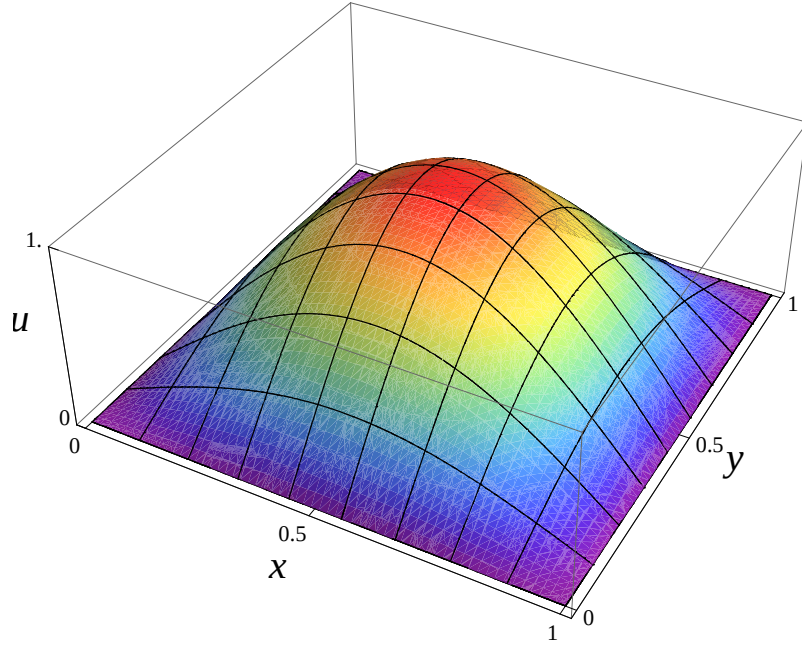
Bölgenin $10 \times 10 = 100$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $10 \times 10 = 100$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/10$ olan 100 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (4.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2'de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için bir eleman konum tablosundan yararlanılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.5'de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır.

Her bir modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$, $\tilde{B}_5(\xi)$, $\tilde{B}_6(\xi)$, $\tilde{B}_7(\xi)$, $\tilde{B}_8(\xi)$, $\tilde{B}_9(\xi)$ ve $\tilde{B}_{10}(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\alpha_4(t)$, $\alpha_5(t)$, $\alpha_6(t)$, $\alpha_7(t)$, $\alpha_8(t)$, $\alpha_9(t)$ ve $\alpha_{10}(t)$ gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$, $\tilde{B}_5(\eta)$, $\tilde{B}_6(\eta)$, $\tilde{B}_7(\eta)$, $\tilde{B}_8(\eta)$, $\tilde{B}_9(\eta)$ ve $\tilde{B}_{10}(\eta)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$, $\beta_4(t)$, $\beta_5(t)$, $\beta_6(t)$, $\beta_7(t)$, $\beta_8(t)$, $\beta_9(t)$ ve $\beta_{10}(t)$ gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.2.3.22) yaklaşımı (4.2.13)



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 4.8: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

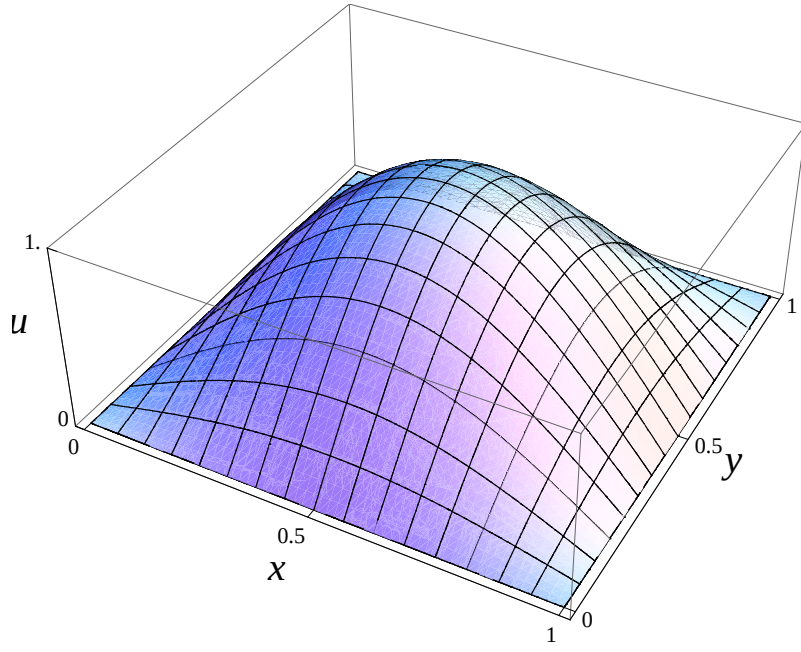
zayıf formunda ve ξ , η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = 0(1)10$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $11 \times 11 = 121$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)121$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (4.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda önce (4.3.2) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi sonra (4.3.1) formunda elde edilen iteratif cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)121$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 4.5 ve 4.6'da model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablolardan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarındaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümününün noktasal değerleri kullanılarak model problemin 100 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri sırası ile Şekil 4.9 ve 4.10'da ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.

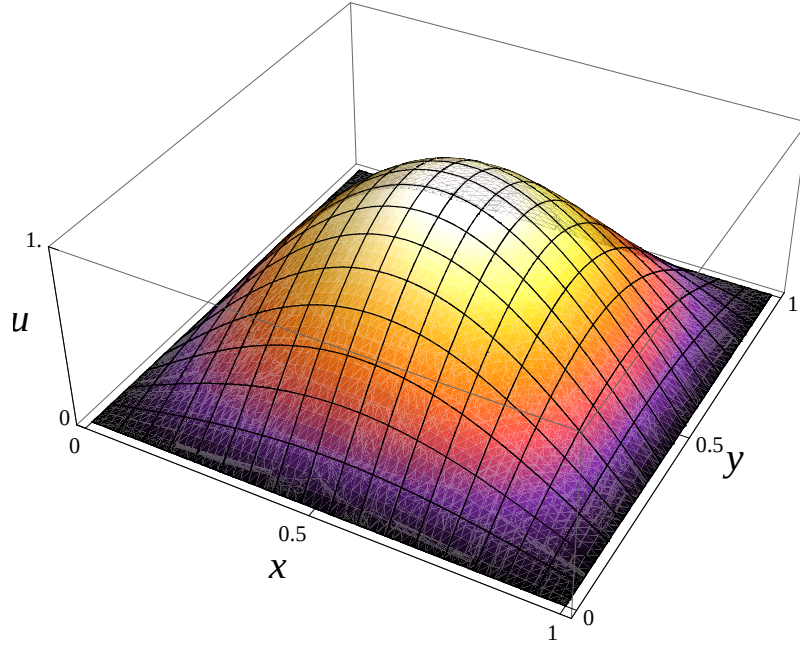
Tablo 4.7 ve 4.8'de sırası ile $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarında kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı.

4.4 Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kuintik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda model problemin yaklaşık çözümleri modifiye edilmiş 2-boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi 16 ($h_x = h_y = 1/4$) ve 100 ($h_x = h_y = 1/10$) elemana ayrılarak nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen çözümler



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

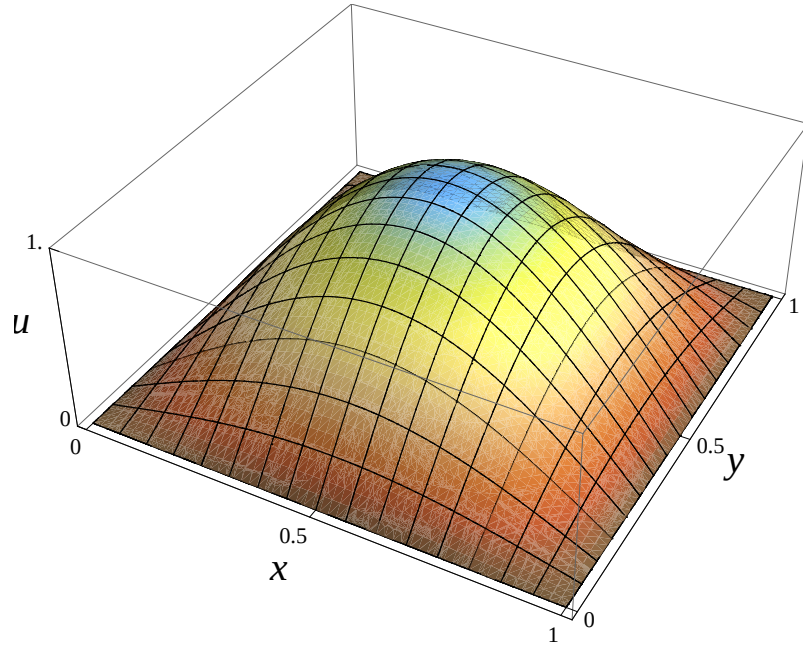
Şekil 4.9: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 4.5: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

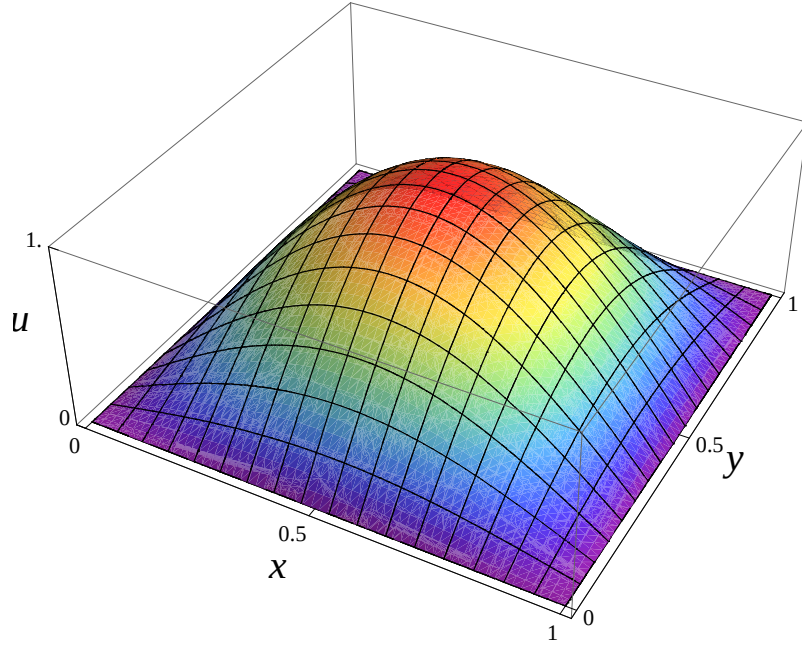
(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	10×10	
(0.25,0.25)	0.499973	0.500000
(0.25,0.50)	0.707095	0.707107
(0.25,0.75)	0.499973	0.500000
(0.50,0.25)	0.707095	0.707107
(0.50,0.50)	1.000014	1.000000
(0.50,0.75)	0.707095	0.707107
(0.75,0.25)	0.499973	0.500000
(0.75,0.50)	0.707095	0.707107
(0.75,0.75)	0.499973	0.500000

Tablo 4.6: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	10×10	
(0.25,0.25)	0.499973	0.499990
(0.25,0.50)	0.707082	0.707093
(0.25,0.75)	0.499963	0.499990
(0.50,0.25)	0.707080	0.707093
(0.50,0.50)	0.999994	0.999980
(0.50,0.75)	0.707081	0.707093
(0.75,0.25)	0.499973	0.499990
(0.75,0.50)	0.707081	0.707093
(0.75,0.75)	0.499973	0.499990



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 4.10: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 4.7: Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})			Tam Çözüm (u)
	(2×2)	(4×4)	(10×10)	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.097226	0.095295	0.095493	0.095492
(0.8,0.2)	0.344312	0.345817	0.345483	0.345492
(0.7,0.3)	0.649779	0.654327	0.654520	0.654508
(0.6,0.4)	0.904726	0.903789	0.904514	0.904508
(0.5,0.5)	1.007242	1.001304	1.000014	1.000000
(0.4,0.6)	0.904726	0.903789	0.904514	0.904508
(0.3,0.7)	0.649779	0.654327	0.654520	0.654508
(0.2,0.8)	0.344312	0.345817	0.345483	0.345492
(0.1,0.9)	0.097226	0.095295	0.095493	0.095492
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.1,0.1)	0.097226	0.095295	0.095493	0.095492
(0.2,0.2)	0.344312	0.345817	0.345483	0.345492
(0.3,0.3)	0.649779	0.654327	0.654520	0.654508
(0.4,0.4)	0.904726	0.903789	0.904514	0.904508
(0.5,0.5)	1.007242	1.001304	1.000014	1.000000
(0.6,0.6)	0.904726	0.903789	0.904514	0.904508
(0.7,0.7)	0.649779	0.654327	0.654520	0.654508
(0.8,0.8)	0.344312	0.345817	0.345483	0.345492
(0.9,0.9)	0.097226	0.095295	0.095493	0.095492
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 4.8: Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})			Tam Çözüm (u)
	2×2	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.097224	0.095294	0.095491	0.095490
(0.8,0.2)	0.344305	0.345810	0.345477	0.345485
(0.7,0.3)	0.649766	0.654314	0.654507	0.654496
(0.6,0.4)	0.904708	0.903771	0.904496	0.904491
(0.5,0.5)	1.007223	1.001285	0.999994	0.999980
(0.4,0.6)	0.904708	0.903771	0.904496	0.904491
(0.3,0.7)	0.649766	0.654314	0.654507	0.654496
(0.2,0.8)	0.344305	0.345810	0.345476	0.345485
(0.1,0.9)	0.097224	0.095294	0.095490	0.095490
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.1,0.1)	0.097224	0.095294	0.095502	0.095490
(0.2,0.2)	0.344305	0.345810	0.345474	0.345485
(0.3,0.3)	0.649766	0.654314	0.654503	0.654496
(0.4,0.4)	0.904708	0.903771	0.904496	0.904491
(0.5,0.5)	1.007223	1.001285	0.999994	0.999980
(0.6,0.6)	0.904708	0.903771	0.904496	0.904491
(0.7,0.7)	0.649766	0.654314	0.654507	0.654496
(0.8,0.8)	0.344305	0.345810	0.345477	0.345485
(0.9,0.9)	0.097224	0.095294	0.095491	0.095490
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

literatürdeki mevcut çözümlerle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

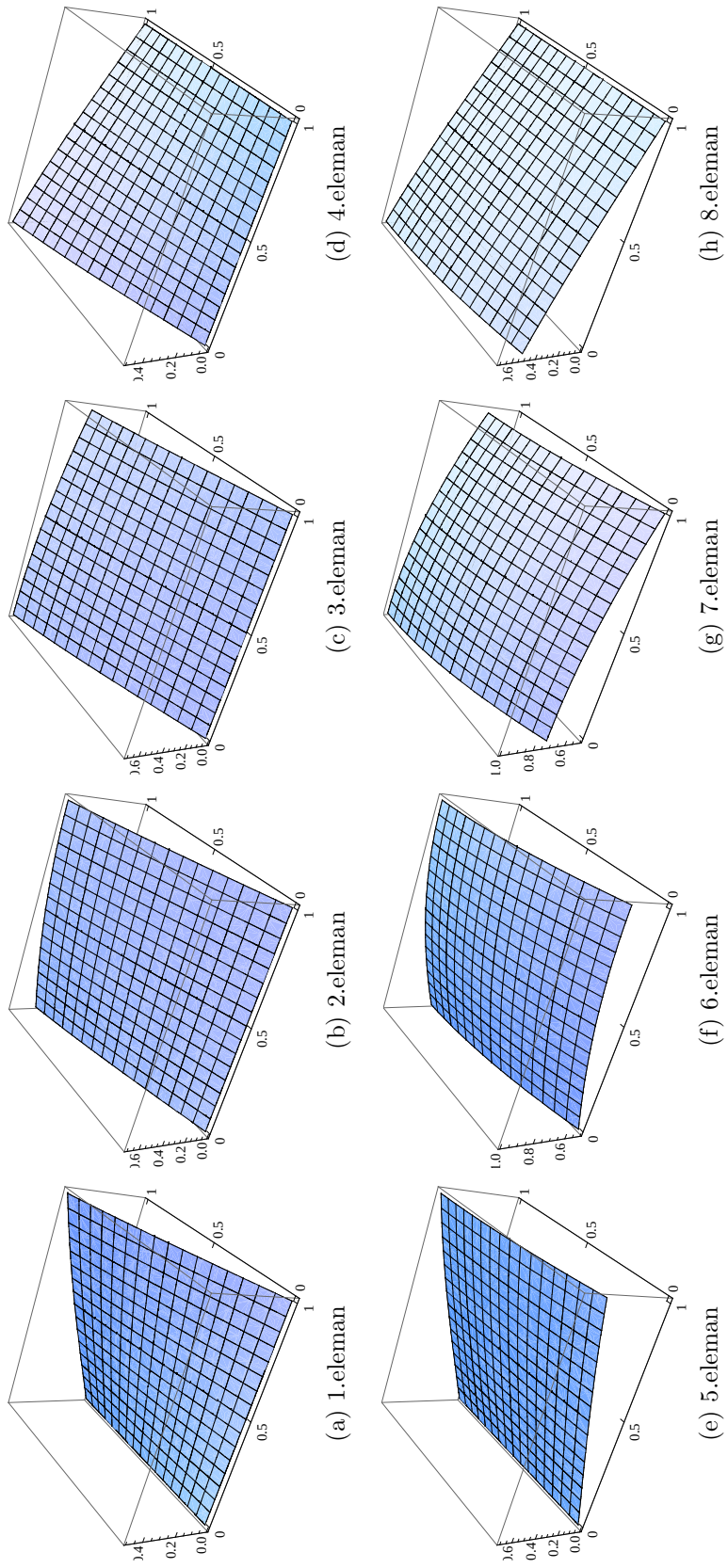
Bölgenin $4 \times 4 = 16$ Elemana Ayrılması

Problem D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $4 \times 4 = 16$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/4$ olan 16 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (4.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2’de (2.3.3.15) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.3’de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır.

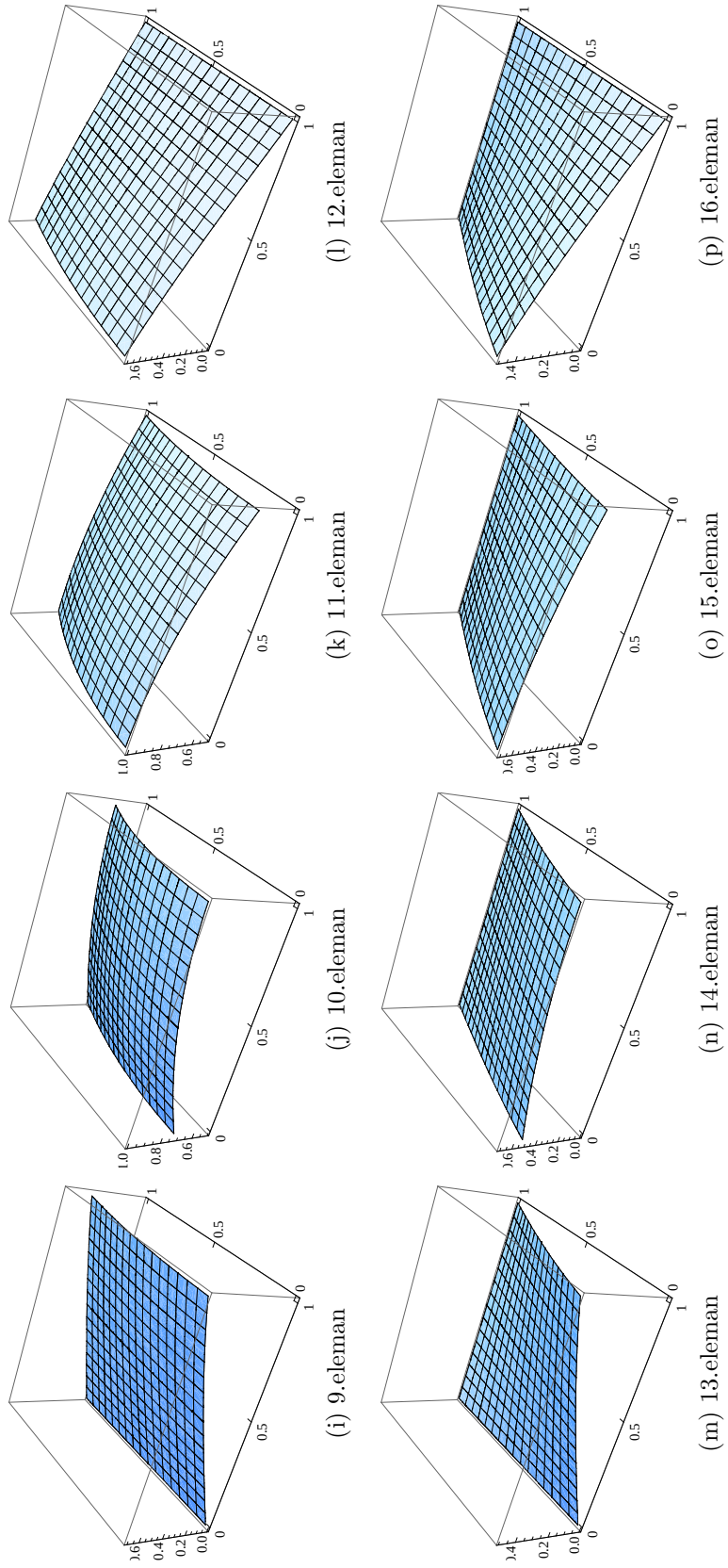
Her bir modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_{-1}(\xi)$, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$ ve $\tilde{B}_5(\xi)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_{-1}(t)$, $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\alpha_4(t)$ ve $\alpha_5(t)$ gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_{-1}(\eta)$, $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$ ve $\tilde{B}_5(\eta)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_{-1}(t)$, $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$, $\beta_4(t)$ ve $\beta_5(t)$ gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.3.3.15) yaklaşımı (4.2.13) zayıf formunda ve ξ , η yönlerinde modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = -1(1)5$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $7 \times 7 = 49$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)49$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (4.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda önce (4.3.2) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi sonra (4.3.1) formunda elde edilen iteratif cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)49$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$

yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 4.9 ve 4.10’da model problemin modifiye edilmiş 2–boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablolardan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Şekiller 4.11 ve 4.13, her bir elemanın sırasıyla $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarında elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarındaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünün noktasal değerleri kullanılarak model problemin 16 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri sırası ile Şekil 4.12 ve 4.14’de ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.



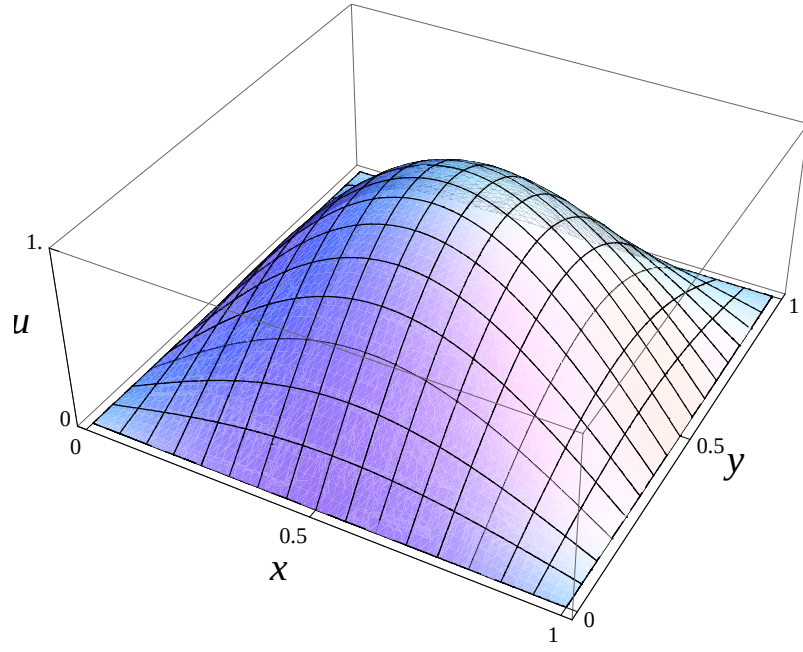
Şekil 4.11: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



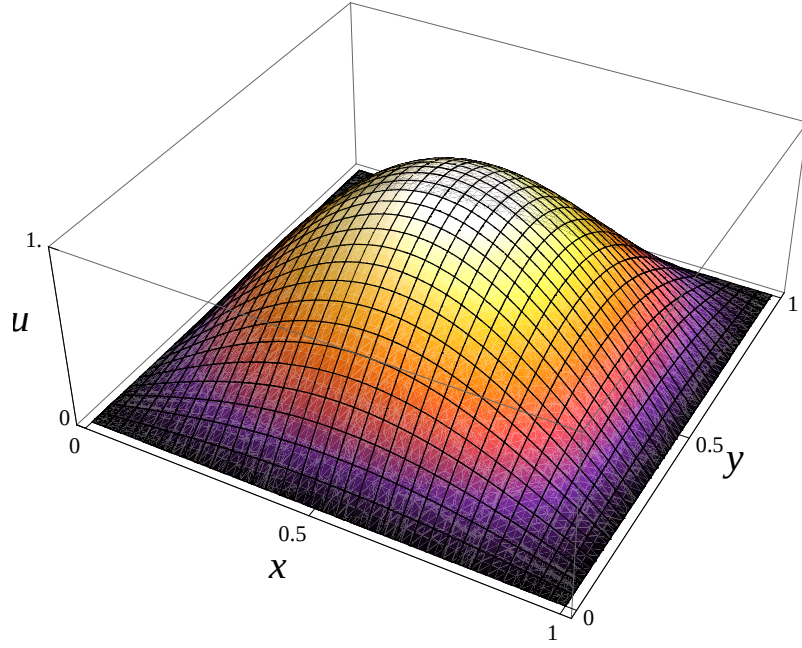
Şekil 4.11: (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

Tablo 4.9: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	4×4	
(0.25,0.25)	0.500009	0.500000
(0.25,0.50)	0.707119	0.707107
(0.25,0.75)	0.500009	0.500000
(0.50,0.25)	0.707119	0.707107
(0.50,0.50)	1.000017	1.000000
(0.50,0.75)	0.707119	0.707107
(0.75,0.25)	0.500009	0.500000
(0.75,0.50)	0.707119	0.707107
(0.75,0.75)	0.500009	0.500000

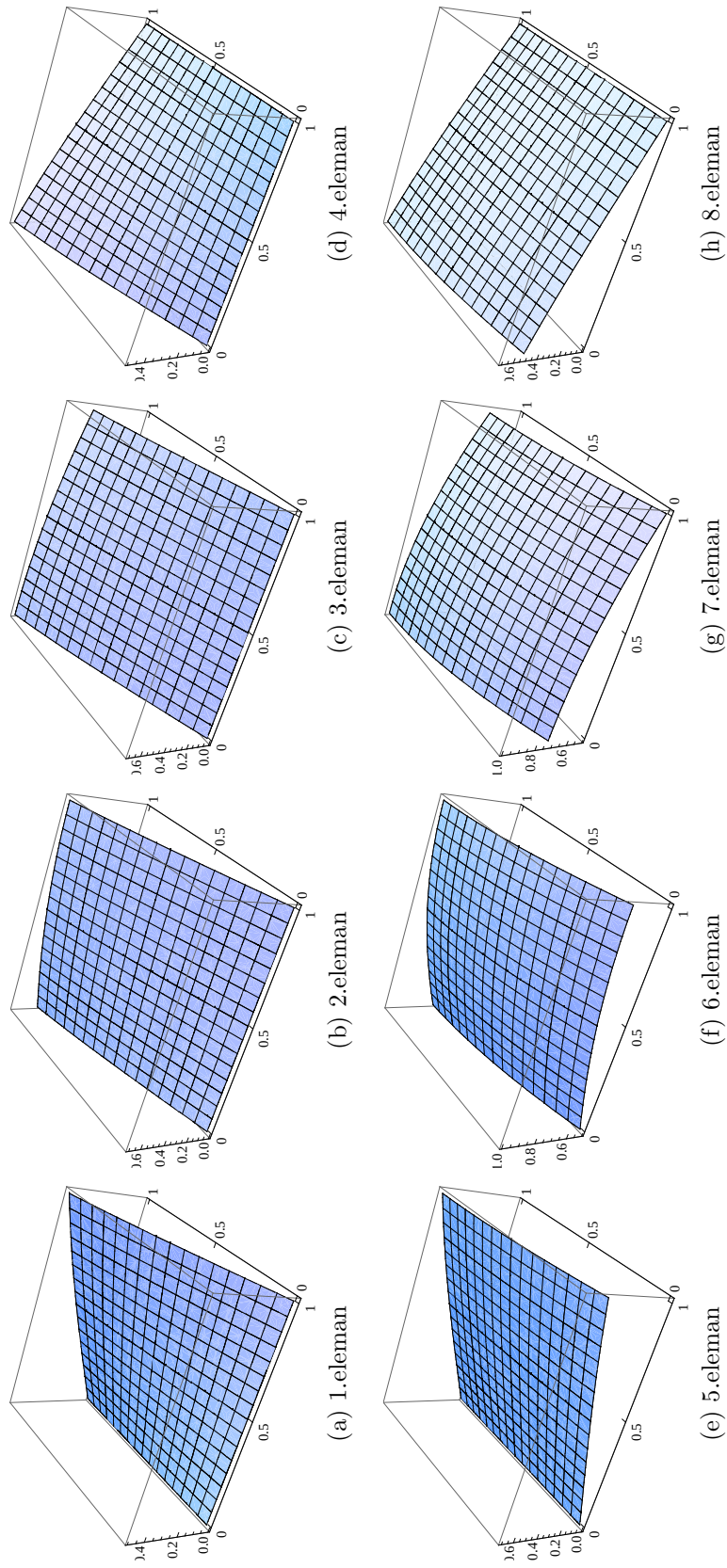


(a) Tam çözüm

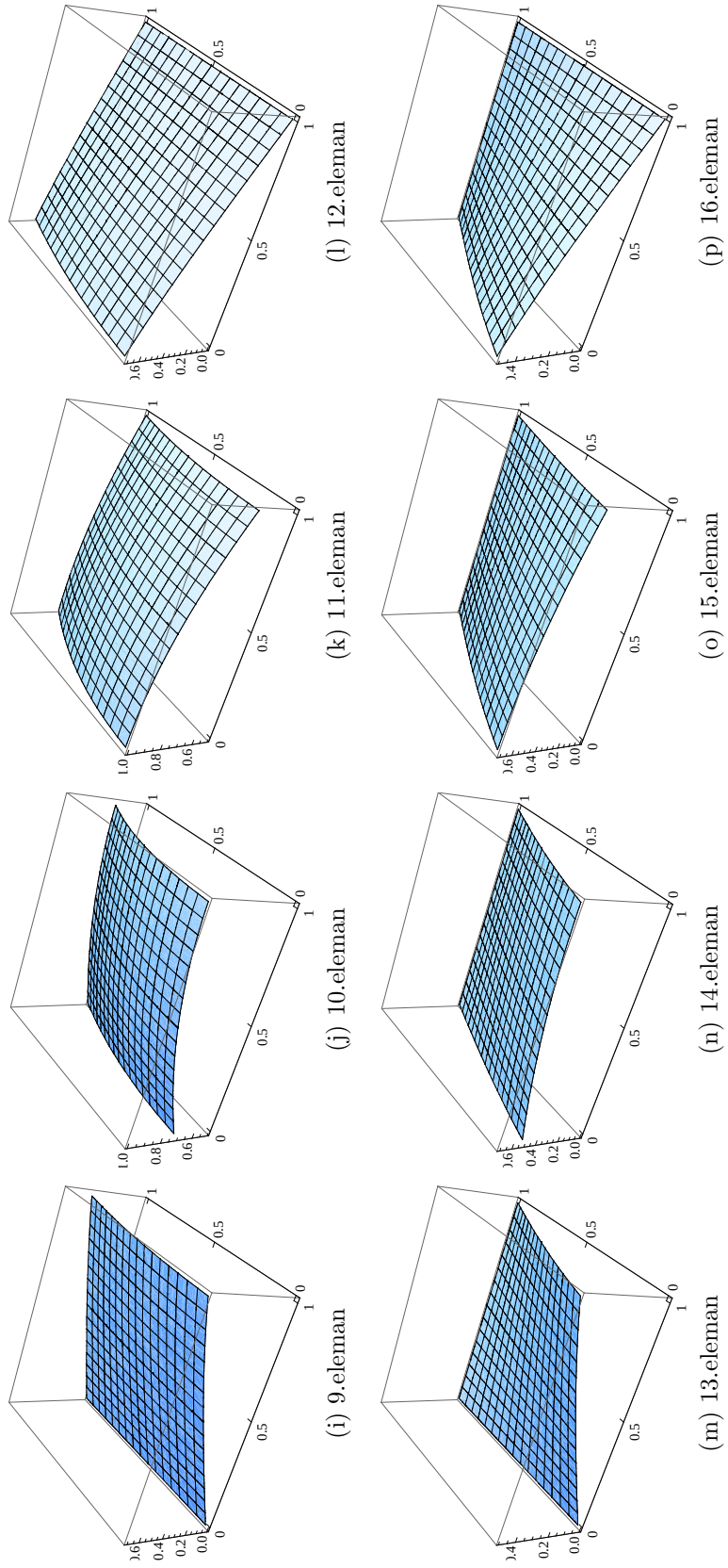


(b) Nümerik çözüm

Şekil 4.12: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.



Şekil 4.13: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



Şekil 4.13: (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

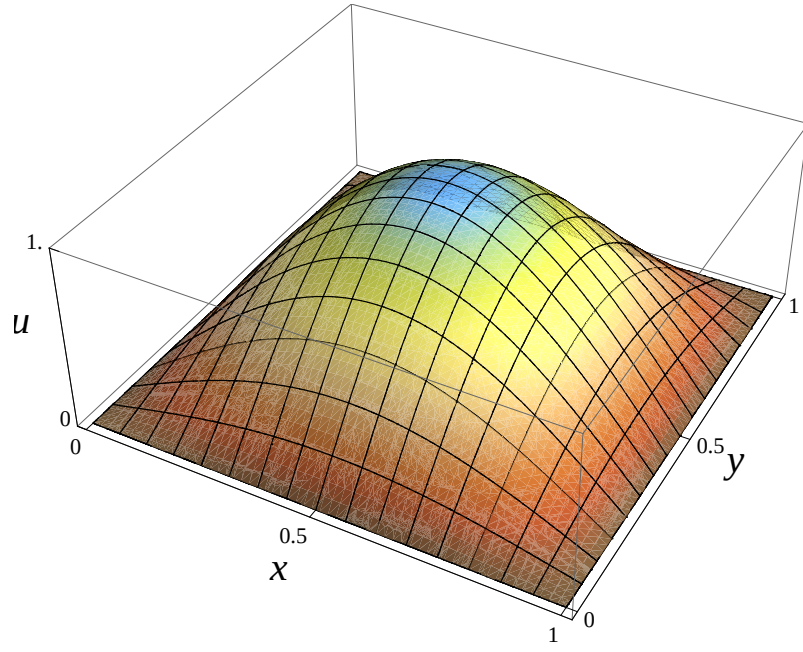
Tablo 4.10: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	4×4	
(0.25,0.25)	0.499999	0.499990
(0.25,0.50)	0.707105	0.707093
(0.25,0.75)	0.499999	0.499990
(0.50,0.25)	0.707105	0.707093
(0.50,0.50)	0.999997	0.999980
(0.50,0.75)	0.707105	0.707093
(0.75,0.25)	0.499999	0.499990
(0.75,0.50)	0.707105	0.707093
(0.75,0.75)	0.499999	0.499990

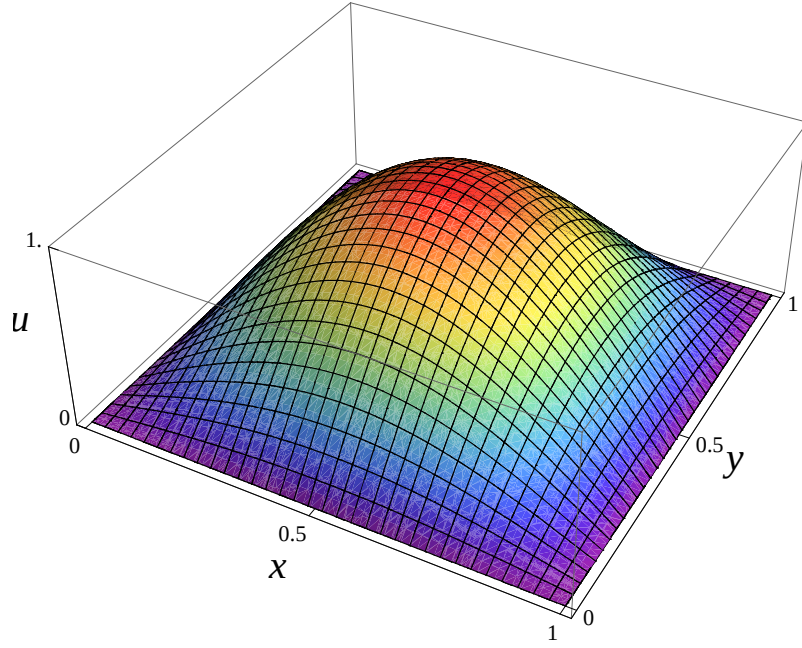
Bölgenin $10 \times 10 = 100$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $10 \times 10 = 100$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/10$ olan 100 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (4.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2'de (2.3.3.15) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin (4.2.13) zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için $4 \times 4 = 16$ 'dakine benzer şekilde eleman konum tablosundan yararlanılır. Örneğin böyle bir tablo 100 eleman için Tablo 3.5'deki gibi numaralandırılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır.

Her bir kuintik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. Böylece, $\tilde{B}_{-1}(\xi)$, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$, $\tilde{B}_5(\xi)$, $\tilde{B}_6(\xi)$, $\tilde{B}_7(\xi)$, $\tilde{B}_8(\xi)$, $\tilde{B}_9(\xi)$, $\tilde{B}_{10}(\xi)$ ve $\tilde{B}_{11}(\xi)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_{-1}(t)$, $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\alpha_4(t)$, $\alpha_5(t)$, $\alpha_6(t)$, $\alpha_7(t)$, $\alpha_8(t)$, $\alpha_9(t)$, $\alpha_{10}(t)$ ve $\alpha_{11}(t)$ gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_{-1}(\eta)$, $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$, $\tilde{B}_5(\eta)$, $\tilde{B}_6(\eta)$, $\tilde{B}_7(\eta)$, $\tilde{B}_8(\eta)$, $\tilde{B}_9(\eta)$, $\tilde{B}_{10}(\eta)$ ve $\tilde{B}_{11}(\eta)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_{-1}(t)$, $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$, $\beta_4(t)$, $\beta_5(t)$, $\beta_6(t)$, $\beta_7(t)$, $\beta_8(t)$, $\beta_9(t)$, $\beta_{10}(t)$ ve $\beta_{11}(t)$ gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.3.3.15) yaklaşımı (4.2.13) zayıf



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 4.14: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

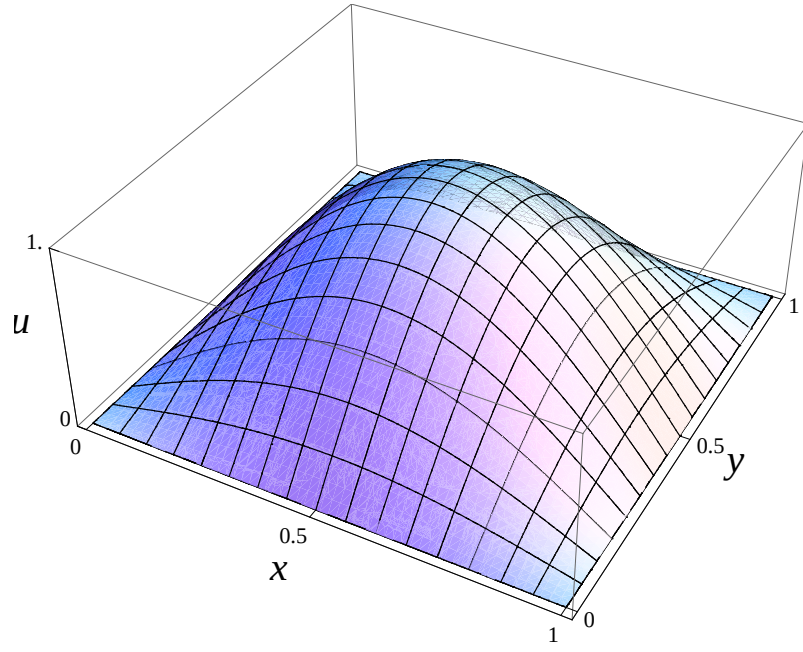
formunda ve ξ, η yönlerinde modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = -1(1)11$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $13 \times 13 = 169$ tane $A_i(t)$ global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)169$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (4.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda önce (4.3.2) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi sonra (4.3.1) formunda elde edilen iteratif cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)169$) global eleman parametreleri elde edilir. Bu eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 4.11 ve 4.12’de model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablolardan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarındaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümününün noktasal değerleri kullanılarak model problemin 100 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri sırası ile Şekil 4.15 ve 4.16’da ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir. Tablo 4.13 ve 4.14’de sırası ile $t = 0.0$ ve $t = 1.0$ zamanlarında kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümü ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Kübik ve kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen $u_{nm}(x, y, t)$ nümerik çözümünün $u(x, y, t)$ tam çözümüne ne kadar yaklaştığını ölçmek için

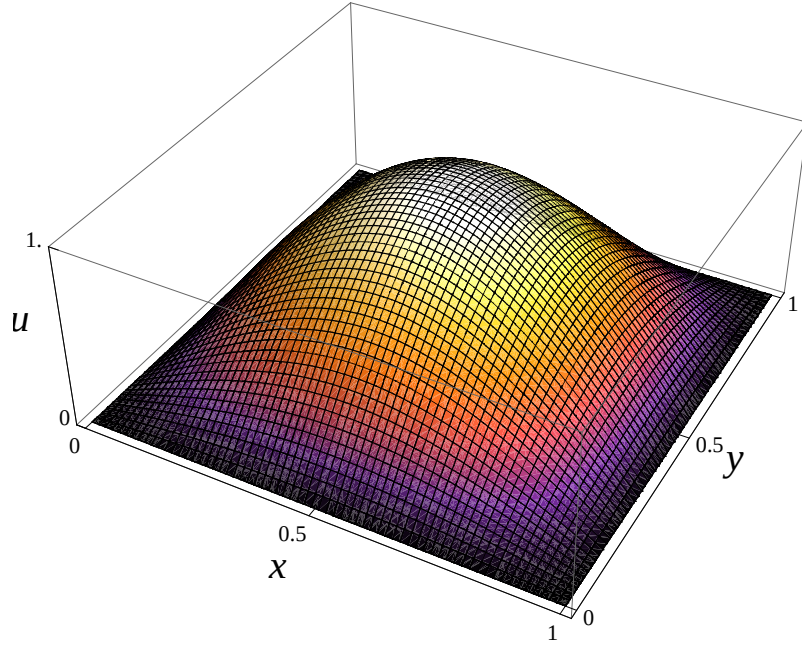
$$L_2 = \|u - u_{nm}\|_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{ip}} |u_i - (u_{nm})_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{ip}} |u_i|^2}},$$

$$L_\infty = \|u - u_{nm}\|_\infty = \max_{0 < i < n_{ip}} |u_i - (u_{nm})_i|$$

ile tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Tablo 5.15’de verildi. Burada



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

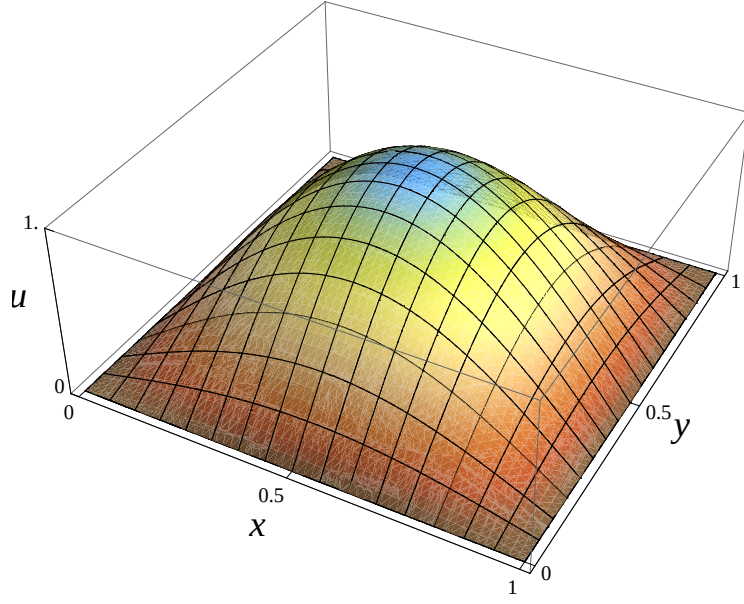
Şekil 4.15: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 4.11: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

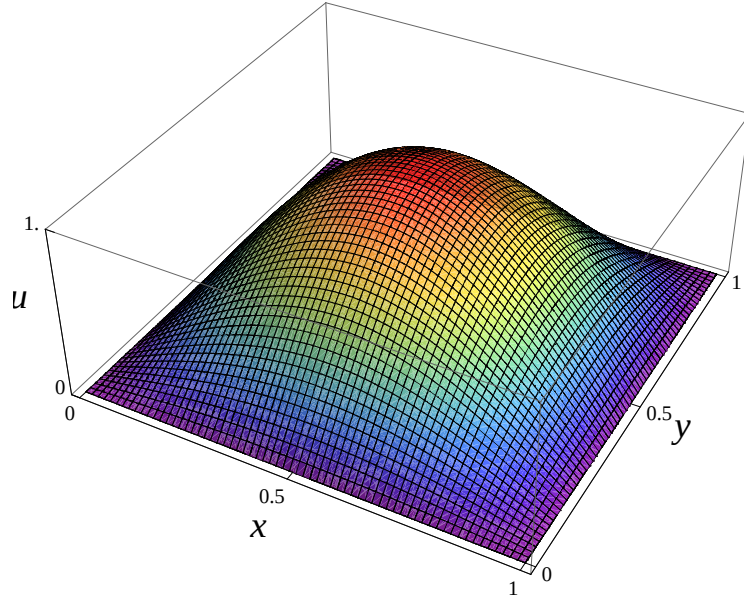
(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	10×10	
(0.25,0.25)	0.500000	0.500000
(0.25,0.50)	0.707107	0.707107
(0.25,0.75)	0.500000	0.500000
(0.50,0.25)	0.707107	0.707107
(0.50,0.50)	1.000000	1.000000
(0.50,0.75)	0.707107	0.707107
(0.75,0.25)	0.500000	0.500000
(0.75,0.50)	0.707107	0.707107
(0.75,0.75)	0.500000	0.500000

Tablo 4.12: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	10×10	
(0.25,0.25)	0.499990	0.499990
(0.25,0.50)	0.707093	0.707093
(0.25,0.75)	0.499990	0.499990
(0.50,0.25)	0.707093	0.707093
(0.50,0.50)	0.999980	0.999980
(0.50,0.75)	0.707093	0.707093
(0.75,0.25)	0.499990	0.499990
(0.75,0.50)	0.707093	0.707093
(0.75,0.75)	0.499990	0.499990



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 4.16: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 4.13: Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.095489	0.095492	0.095492
(0.8,0.2)	0.345495	0.345492	0.345492
(0.7,0.3)	0.654510	0.654509	0.654508
(0.6,0.4)	0.904497	0.904508	0.904508
(0.5,0.5)	1.000017	1.000000	1.000000
(0.4,0.6)	0.904497	0.904508	0.904508
(0.3,0.7)	0.654510	0.654509	0.654508
(0.2,0.8)	0.345495	0.345492	0.345492
(0.1,0.9)	0.095489	0.095492	0.095492
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.1,0.1)	0.095489	0.095492	0.095492
(0.2,0.2)	0.345495	0.345492	0.345492
(0.3,0.3)	0.654510	0.654509	0.654508
(0.4,0.4)	0.904497	0.904508	0.904508
(0.5,0.5)	1.000017	1.000000	1.000000
(0.6,0.6)	0.904497	0.904508	0.904508
(0.7,0.7)	0.654510	0.654509	0.654508
(0.8,0.8)	0.345495	0.345492	0.345492
(0.9,0.9)	0.095489	0.095492	0.095492
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 4.14: Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 1.0$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.095487	0.095490	0.095490
(0.8,0.2)	0.345488	0.345485	0.345485
(0.7,0.3)	0.654497	0.654496	0.654496
(0.6,0.4)	0.904480	0.904491	0.904491
(0.5,0.5)	0.999997	0.999980	0.999980
(0.4,0.6)	0.904480	0.904491	0.904491
(0.3,0.7)	0.654497	0.654496	0.654496
(0.2,0.8)	0.345488	0.345485	0.345485
(0.1,0.9)	0.095487	0.095490	0.095490
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.1,0.1)	0.095487	0.095490	0.095490
(0.2,0.2)	0.345488	0.345485	0.345485
(0.3,0.3)	0.654497	0.654496	0.654496
(0.4,0.4)	0.904480	0.904491	0.904491
(0.5,0.5)	0.999997	0.999980	0.999980
(0.6,0.6)	0.904480	0.904491	0.904491
(0.7,0.7)	0.654497	0.654496	0.654496
(0.8,0.8)	0.345488	0.345485	0.345485
(0.9,0.9)	0.095487	0.095490	0.095490
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 4.15: Model problemin farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları ve eleman sayısı için L_2 ve L_∞ hata normları.

	Eleman Sayısı	t=0.0		t=1.0	
		L_2	L_∞	L_2	L_∞
Kübik	2×2	4.57634×10^{-3}	7.24231×10^{-3}	4.57634×10^{-3}	7.24234×10^{-3}
	4×4	6.17439×10^{-4}	1.30443×10^{-3}	6.17436×10^{-4}	1.30444×10^{-3}
	10×10	3.20014×10^{-5}	5.42266×10^{-5}	3.28112×10^{-5}	5.41446×10^{-5}
Kuintik	4×4	9.47159×10^{-6}	1.68070×10^{-5}	9.47156×10^{-6}	1.68088×10^{-5}
	10×10	3.07748×10^{-7}	3.51590×10^{-7}	3.37081×10^{-8}	6.86755×10^{-8}

n_{i_p} iç noktaların sayısı olup u_i ve $(u_{nm})_i$ sırası ile i . noktadaki u 'nun tam ve yaklaşık çözümleridir. L_2 ve L_∞ hata normları $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesinin x ve y yönlerinde 40 eşit parçaya bölünmesiyle ortaya çıkan toplam $41 \times 41 = 1681 (= n_{i_p})$ düğüm noktasındaki u_i ve $(u_{nm})_i$ değerleri göz önünde bulundurularak hesaplandı. Tablodan da görüldüğü gibi kübik B-spline baz fonksiyonları kullanıldığında eleman sayısının artması durumunda hata normları gittikçe azalmaktadır. Kübik B-spline baz fonksiyonları yerine kuintik B-spline baz fonksiyonlarının kullanımı nümerik çözümü daha da iyileştirmiş ve eleman sayısının artması durumunda hata normları kübik B-spline baz fonksiyonlarına göre daha da küçülmüştür.

BÖLÜM 5

2-BOYUTLU KARARSIZ BURGERS

DENKLEMİNİN MODİFİYE EDİLMİŞ

B-SPLINE GALERKİN SONLU ELEMAN

YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

5.1 Giriş

Zamana bağlı 2-boyutlu kararsız Burgers denkleminin nümerik çözümü üzerine yapılan bir takım çalışmalar vardır. Literatürde sıkça karşılaşılan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden Burgers denkleminin türbülansın matematiksel modeli ve viskoz bir sıvı içinde hareket eden şok dalga boyunca akışın yaklaşık teorisi gibi birtakım olayları tanımladığı ortaya çıkmıştır [32]. Bazı araştırmacılar özellikle 2-boyutlu Burgers denklem sistemi için bir takım nümerik ve tam çözümler sunmuşlardır. El-Sayed ve Kaya [33], başlangıç şartları ile verilen 2-boyutlu Burgers denklem sisteminin nümerik ve analitik çözümlerine yaklaşmak için Adomian ayrışım yöntemini sunmuşlardır. Zhu vd. [34], 2-boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümlerini bulmak için ayrık Adomian ayrışım yöntemini sunmuşlardır. Fletcher [35], 2-boyutlu Burgers denkleminin Cole-Hopf dönüşümünü kullanarak tam ve nümerik çözümlerini elde etmiştir. Khater vd. [32], Burgers tipi denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için Chebyshev spektral kollokasyon yöntemini ayrıntılı olarak sunmuşlardır. Wu ve Zhang [36], 2-boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümünü bir yapay sınır yöntemi ile elde etmişlerdir. Radwan [11], 2-boyutlu kararsız Burgers denkleminin çözümü için yüksek mertebeden tam yöntemlerin karşılaştırmasını yapmış, dördüncü mertebeden tam iki nokta kompakt yöntemini ve dördüncü mertebeden tam Du Fort Frankel yöntemini türetmiştir. Gurefe ve Mısırlı [37], (G'/G) -açılım yöntemi yardımıyla Riccati denkleminin bazı tam çözümlerini elde ettikten sonra Riccati denkleminin kendisi ve tam çözümlerini kullanarak 2-boyutlu Burgers denklem sisteminin iki keyfi fonksiyonlu değişkenlerine ayrılabilir çözümlerini buldular. Riccati denkleminin kendisini ve

tam çözümlerini kullanarak Velivelli ve Bryden [38], kararsız 2-boyutlu Burgers denkleminin çözümü için lattice Boltzman ve klasik sonlu fark yöntemlerinin paralel performans ve tamlığını karşılaştırdılar. Mittal ve Jiwari [39], uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen lineer olmayan 2-boyutlu Burgers denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek için hızlı yakınsayan diferansiyel kuadratur yöntemini önermişlerdir. Srivastava vd. [40], 2-boyutlu coupled Burgers denklemlerinin nümerik çözümlerini Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile elde etmişlerdir. Boules ve Eick [41], katsayıları zamana bağlı olan kesilmiş Fourier serisiyle tam çözümün yaklaşık bileşenlerinden oluşan teknikle 2-boyutlu Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmişlerdir. Inan vd. [42], dokuzuncu mertebe Korteweg-de Vries denklemi ve 2-boyutlu Burgers denklemlerinin kompleks çözümleri için direkt bir cebirsel yöntem uygulamış ve bu denklemlerin bir takım kompleks çözümlerini bulmuşlardır. Allery vd. [43], 2-boyutlu Burgers denklemlerini her bir iterasyonda bazın daha da iyileştirildiği bir baza dayalı iteratif prosedür olan önceden indirgeme (*Priori Reduction*) yöntemini kullanarak çözmüşlerdir.

Bu bölümde modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik ve kuintik B-spline baz fonksiyonlar kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle 2-boyutlu kararsız Burgers denklemi için başlangıç ve sınır şartları ile verilen model problemin yaklaşık çözümleri elde edildi. Elde edilen nümerik çözümler problemin literatürdeki mevcut çözümleriyle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde sunuldu.

5.2 Model Problem

Bu bölümde model problem olarak $D = [0, 1] \times [0, 1]$ bölgesi üzerinde

$$u_t + uu_x + uu_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0 \quad (5.2.1)$$

şeklinde verilen 2-boyutlu kararsız Burgers denklemi

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \frac{1}{1 + e^{(x+y)/2v}} \quad (5.2.2)$$

başlangıç şartı ve

$$u(x, y_0, t) = g_1(x, t) = \frac{1}{1 + e^{(x-t)/2v}}, \quad x_0 = 0 \leq x \leq x_n = 1, \quad t > 0 \quad (5.2.3)$$

$$u(x, y_m, t) = g_2(x, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+1-t)/2v}}, \quad x_0 = 0 \leq x \leq x_n = 1, \quad t > 0 \quad (5.2.4)$$

$$u(x_0, y, t) = h_1(y, t) = \frac{1}{1 + e^{(y-t)/2\nu}}, \quad y_0 = 0 \leq y \leq y_m = 1, \quad t > 0 \quad (5.2.5)$$

$$u(x_n, y, t) = h_2(y, t) = \frac{1}{1 + e^{(y+1-t)/2\nu}}, \quad y_0 = 0 \leq y \leq y_m = 1, \quad t > 0 \quad (5.2.6)$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı. Problemin tam çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+y-t)/2\nu}} \quad (5.2.7)$$

dir [32]. Burada $\nu = 1/R$ olup keyfi bir sabit ve R Reynolds sayısı olup model problemin çözümünde $R = 100$ olarak alındı. İndislerdeki x , y ve t sırası ile x, y konumlarına ve t zamanına göre türevi göstermektedir.

Model Problemin Zayıf Formu

Bu bölümde yukarıda verilen model problemin modifiye edilmiş kübik ve kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edileceğinden problemin zayıf form denkleminin bulunması gerekir. Bunun için önce (5.2.1) denklemindeki tüm ifadeler eşitliğin sol tarafında toplanır ve sonra $\Psi(x, y)$ ağırlık fonksiyonu ile çarpımının bölge üzerinden integrali alınır

$$\iint_D [u_t + uu_x + uu_y - \nu(u_{xx} + u_{yy})] \Psi dx dy = 0 \quad (5.2.8)$$

elde edilir. Burada, $k = 0(1)n$ ve $l = 0(1)m$ olmak üzere, $\Psi = \tilde{B}_k(x)\tilde{B}_l(y)$ dir.

u bağımlı değişkeninin mertebesini kendisi ve Ψ ağırlık fonksiyonu arasında paylaşmak için Green teoremi kullanılır. Şöyleki, D Lipschitz sınırlı bir bölge, $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ ve $g(x) = g(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonları $\partial f/\partial x_i$ ve $\partial g/\partial x_i$ türevleri ile birlikte $\overline{D} = D + \partial D$ de sürekli fonksiyonlar ise Green teoreminden

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx dy + \iint_D \frac{\partial g}{\partial x_i} f dx dy = \oint_{\partial D} f g v_i ds \quad (5.2.9)$$

dir. Burada, i sayısı 1 ile N arasında herhangi bir sayı olup v_i dış normalin birim vektörünün i . koordinatıdır. (5.2.9) eşitliği

$$f = \frac{\partial u}{\partial x}, g = \Psi, i = 1 \text{ için} \quad \iint_D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Psi dx dy + \iint_D \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x} \Psi v_1 ds \quad (5.2.10)$$

ve

$$f = \frac{\partial u}{\partial y}, g = \Psi, i = 2 \text{ için } \iint_D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Psi dx dy + \iint_D \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial y} \Psi v_2 ds \quad (5.2.11)$$

olur. Tüm $\tilde{B}_k(x)$ ve $\tilde{B}_l(y)$ 'ler ∂D sınırı üzerinde sıfır olduğundan açıkça Ψ 'de ∂D sınırı üzerinde sıfırdır. Böylece (5.2.10) ve (5.2.11) denklemlerinin sağ tarafları otomatik olarak sıfır olup bunlar (5.2.9)'da kullanılırsa (5.2.1)-(5.2.6) denklemleri ile verilen model problemin global koordinat sisteminde zayıf formu

$$\iint_D [u_t \Psi + uu_x \Psi + uu_y \Psi + \nu u_x \Psi_x + \nu u_y \Psi_y] dx dy = 0 \quad (5.2.12)$$

olarak elde edilir. Global koordinat sisteminden lokal koordinat sistemine geçmek için $h_x \xi = x - x_m$ ve $h_y \eta = y - x_m$ lokal koordinat dönüşümleri kullanılır. Böylece, global koordinat sistemindeki (5.2.12) zayıf form denklemi lokal koordinat sisteminde

$$\iint_D [h^2 u_t \Psi + h u_{\xi} \Psi + h u_{\eta} \Psi + \nu u_{\xi} \Psi_{\xi} + \nu u_{\eta} \Psi_{\eta}] d\xi d\eta = 0 \quad (5.2.13)$$

olur.

5.3 Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kübik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda model problemin nümerik çözümleri modifiye edilmiş 2–boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. Nümerik hesaplamalar problemin $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi sırası ile 4 ($h_x = h_y = 1/2$), 16 ($h_x = h_y = 1/4$) ve 100 ($h_x = h_y = 1/10$) elemana ayrılarak yapıldı. Elde edilen nümerik çözümler literatürdeki mevcut çözümlerle karşılaştırılarak L_2 ve L_{∞} hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

Bölgenin $2 \times 2 = 4$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $2 \times 2 = 4$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/2$ olan 4 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (5.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının

parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2’de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı (2.2.3.17) ve (2.2.3.21) denklemleri ile birlikte yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.1’de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır.

Çözüm bölgesine düşen sırası ile x ve y yönlerindeki modifiye edilmiş $\tilde{B}_i(x)$ ve $\tilde{B}_i(y)$ kübik B-spline baz fonksiyonların tümü bir arada Bölüm 3’de Şekil 3.4’de gösterildiği şekilde ele alınmıştır. (5.2.13) ile verilen denklem tipik bir "e" elemanı için eleman denklemleri olarak adlandırılır. Tipik bir eleman denkleminde $\iint u u_\xi \Psi d\xi d\eta$ ve $\iint u u_\eta \Psi d\xi d\eta$ terimleri lineerliği bozan terimlerdir. 2-boyutlu kararsız Burgers denkleminin lineer olmayan $u u_\xi$ ve $u u_\eta$ terimlerini lineerleştirmek için u^e yerine

$$u^e = \lambda^e \quad (5.3.1)$$

gibi reel bir sabit alınır.

Her bir kübik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$ ve $\tilde{B}_2(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ ve $\alpha_2(t)$ gibi reel katsayılar ile $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$ ve $\tilde{B}_2(\eta)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları da sırasıyla $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$ ve $\beta_2(t)$ gibi reel katsayılar ile çarpılır. (2.2.3.22) yaklaşımı (5.2.13) zayıf formunda, ξ ve η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü aşağıdaki eleman denklemleri ile ifade edilir.

1. eleman için:

$$\begin{aligned} u_{nm}(\xi, \eta, t) = & \frac{(1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3)}{1 + e^{(\eta/2-t)/2v}} + \frac{(1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3)}{1 + e^{(\xi/2-t)/2v}} \\ & - \frac{(1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3)(1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3)}{1 + e^{(-t)/2v}} \\ & + [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_0(t)Q_1 \\ & + [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_1(t)Q_2 \\ & + [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_2(t)Q_3, \end{aligned}$$

2. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta, t) = & \frac{(\xi^3)}{1 + e^{(\eta/2-t+1)/2v}} + \frac{(1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3)}{1 + e^{((\xi+1)/2-t)/2v}} - \frac{(\xi^3)(1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3)}{1 + e^{(1-t)/2v}} \\
& + [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_1(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_0(t)Q_1 \\
& + [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_1(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_1(t)Q_2 \\
& + [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_5(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_2(t)Q_3,
\end{aligned}$$

3. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta, t) = & \frac{(1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3)}{1 + e^{((\eta+1)/2-t)/2v}} + \frac{(\eta^3)}{1 + e^{(\xi/2-t)/2v}} - \frac{(1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3)(\eta^3)}{1 + e^{(1-t)/2v}} \\
& + [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_0(t)Q_4 \\
& + [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_1(t)Q_5 \\
& + [\alpha_0(t)F_1 + \alpha_1(t)F_2 + \alpha_2(t)F_3]\beta_2(t)Q_6,
\end{aligned}$$

4. eleman için:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(\xi, \eta, t) = & \frac{(\xi^3)}{1 + e^{((\eta+1)/2-t+1)/2v}} + \frac{(\eta^3)}{1 + e^{((\xi+1)/2-t+1)/2v}} - \frac{(\xi^3)(\eta^3)}{1 + e^{(2-t)/2v}} \\
& + [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_1(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_0(t)Q_4 \\
& + [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_1(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_1(t)Q_5 \\
& + [\alpha_0(t)F_4 + \alpha_5(t)F_5 + \alpha_2(t)F_6]\beta_2(t)Q_6
\end{aligned}$$

dir.

Burada

$$F_1 = 12\xi - 18\xi^2 + 7\xi^3,$$

$$Q_1 = 12\eta - 18\eta^2 + 7\eta^3,$$

$$F_2 = 6\xi - 2\xi^3,$$

$$Q_2 = 6\eta - 2\eta^3,$$

$$F_3 = \xi^3,$$

$$Q_3 = \eta^3,$$

$$F_4 = 1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3,$$

$$Q_4 = 1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3,$$

$$F_5 = 4 - 6\xi^2 + 2\xi^3,$$

$$Q_5 = 4 - 6\eta^2 + 2\eta^3,$$

$$F_6 = 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 7\xi^3,$$

$$Q_6 = 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 7\eta^3$$

dır.

Yukarıda ifade edilen her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = 0(1)2$) lokal eleman parametrelerine bağlı

$$A_1(t) = \alpha_0(t)\beta_0(t), \quad A_2(t) = \alpha_1(t)\beta_0(t), \quad A_3(t) = \alpha_2(t)\beta_0(t),$$

$$A_4(t) = \alpha_0(t)\beta_1(t), \quad A_5(t) = \alpha_1(t)\beta_1(t), \quad A_6(t) = \alpha_2(t)\beta_1(t),$$

$$A_7(t) = \alpha_0(t)\beta_2(t), \quad A_8(t) = \alpha_1(t)\beta_2(t), \quad A_9(t) = \alpha_2(t)\beta_2(t),$$

şeklinde toplam $3 \times 3 = 9$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)9$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (5.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilirse global koordinatlarda

$$G \frac{dA(t)}{dt} = PA(t) + f \quad (5.3.2)$$

$$ZA(0) = g \quad (5.3.3)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Burada, $i, j, k, l = 0(1)n$ için $i_l = j(n+1) + i$ ve $j_l = l(n+1) + k$ olmak üzere,

$$G = [g_{i_l j_l}], \quad g_{i_l j_l} = h^2 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) \tilde{B}_k(\xi) \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi \quad (5.3.4)$$

$$P = [p_{i_l j_l}], \quad p_{i_l j_l} = -h\lambda^e \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \tilde{B}_i(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_j(\eta) \tilde{B}_k(\xi) \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi - \quad (5.3.5a)$$

$$\begin{aligned} & h\lambda^e \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}_i(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_j(\eta)}{\partial \eta} \tilde{B}_k(\xi) \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi - \\ & v \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \tilde{B}_i(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_j(\eta) \frac{\partial \tilde{B}_k(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi - \\ & v \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}_i(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_j(\eta)}{\partial \eta} \tilde{B}_k(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta d\xi \end{aligned}$$

$$A(t) = [A_1(t) \ A_2(t) \ A_3(t) \ A_4(t) \ A_5(t) \ A_6(t) \ A_7(t) \ A_8(t) \ A_9(t)]^t \quad (5.3.6)$$

dir.

$i, j = 0(1)n$ için $i_l = j(n+1) + 1$ olmak üzere

$$f = [f_{i_l}], \quad f_{i_k} = -h^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \omega(\xi, \eta, t)}{\partial t} \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) d\eta d\xi - \quad (5.3.7)$$

$$\begin{aligned} & h\lambda^e \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \omega(\xi, \eta, t)}{\partial \xi} \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) d\eta d\xi - \\ & h\lambda^e \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \omega(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) d\eta d\xi - \\ & v \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \omega(\xi, \eta, t)}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{B}_i(\xi)}{\partial \xi} \tilde{B}_j(\eta) d\eta d\xi - \\ & v \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \omega(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \tilde{B}_i(\xi) \frac{\partial \tilde{B}_j(\eta)}{\partial \eta} d\eta d\xi \end{aligned}$$

dir. Yine benzer şekilde, $i = 0, 1, 2, j = 0, 1, 2, k = 0, 1, 2, l = 0, 1, 2$ için $i_l = j(n+1) + 1$ ve $j_l = l(n+1) + k$ olmak üzere,

$$Z = [z_{i_k j_l}] \quad z_{i_k j_l} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) \tilde{B}_k(\xi) \tilde{B}_l(\eta) d\eta d\xi \quad (5.3.8)$$

dır. Son olarak, $i, j, k, l = 0(1)n$ için $i_l = j(n+1) + 1$ olmak üzere,

$$g = [g_{i_l}], \quad g_{i_l} = \int_0^1 \int_0^1 \{u_0(\xi, \eta) - \omega(\xi, \eta, 0)\} \tilde{B}_i(\xi) \tilde{B}_j(\eta) d\eta d\xi \quad (5.3.9)$$

dir.

(5.3.3) cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ zamanındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)9$) global eleman parametreleri

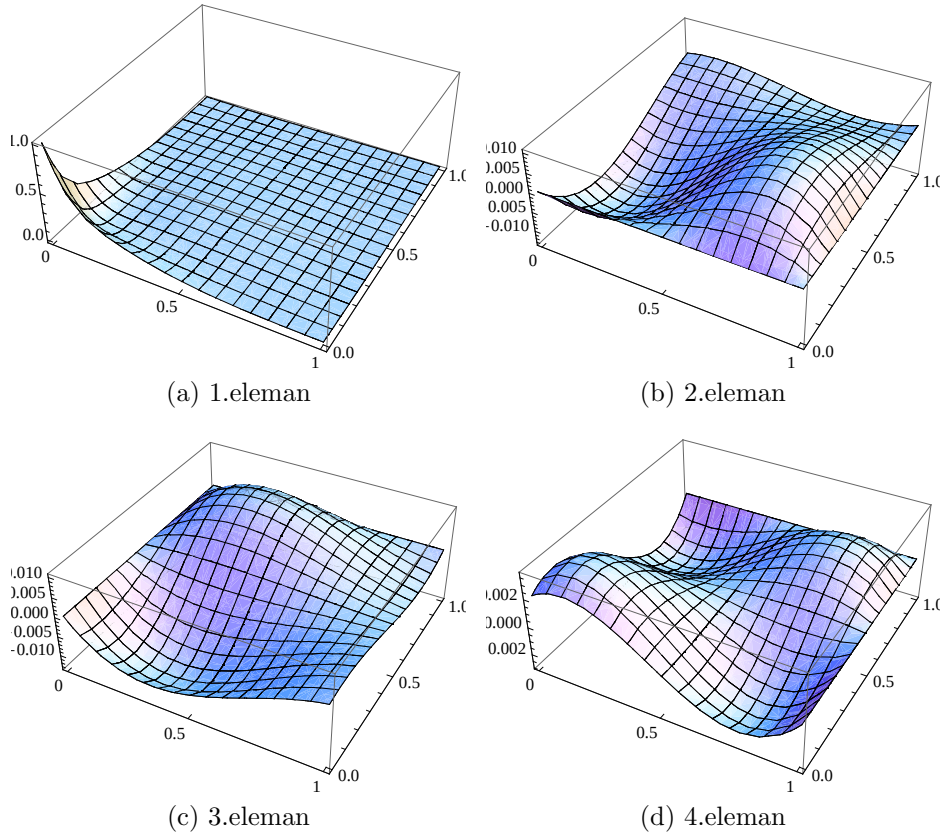
$$\begin{aligned} A_1(0) &= 0.0237767828458175, & A_2(0) &= -0.0105545034755452, \\ A_3(0) &= 0.0112928806571936, & A_4(0) &= -0.0105549339183476, \\ A_5(0) &= 0.00469448285608588, & A_6(0) &= -0.0050312493596313, \\ A_7(0) &= 0.0112935507393304, & A_8(0) &= -0.0050313466535836, \\ A_9(0) &= 0.00539963007338434, \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa $t = 0.0$ zamanında her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 5.1'de model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 5.1, her bir elemanın $t = 0.0$ zamanındaki çözüm grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ zamanında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 4 eleman için elde edilen nümerik çözümünün grafiği tam çözümünün grafiği ile birlikte Şekil 5.2'de verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir. $t = 0.0$ zamanı için eleman parametreleri elde edildikten sonra şimdi istenilen zaman adımı için iterasyona başlanabilir. (5.3.2) denkleminde ileri fark ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı uygulanır ve (5.3.3) başlangıç şartlarından elde edilen $A_i(0)$, ($i = 0(1)9$) değerleri kullanılırsa

$$\left[G - \frac{1}{2} \Delta t P \right] A(t_{r+1}) = \left[G + \frac{1}{2} \Delta t P \right] A(t_r) + \frac{1}{2} \Delta t (f_{r+1} + f_r) \quad (5.3.10)$$

iterasyon formülü elde edilir. Burada $t_0 = 0$, $t_{r+1} = t_r + \Delta t$ ve $f_r = f(t_r)$ dir.

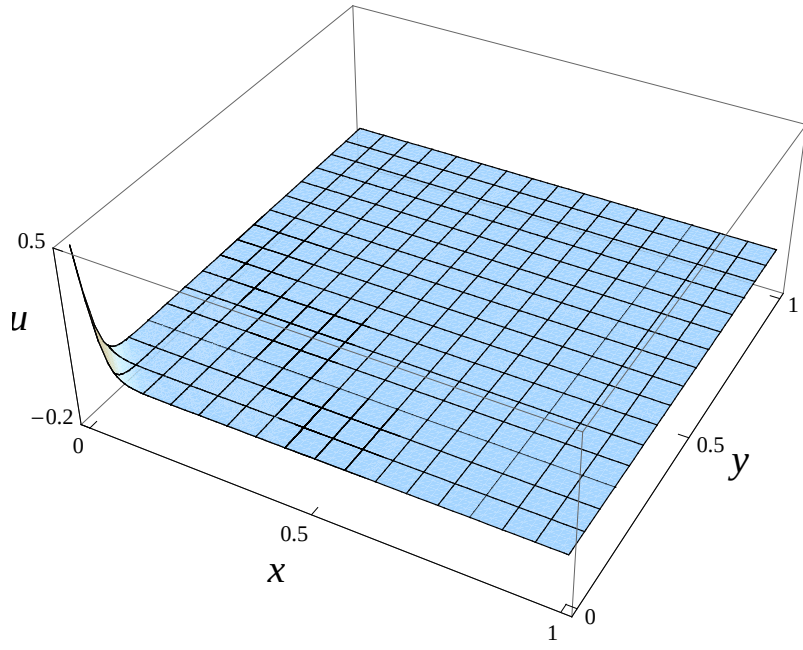
Problemin çözüm bölgesi $2 \times 2 = 4$ tane eşit elemana ayrıldığı için $h_x = h_y = h = \frac{1}{2}$ dir. Nümerik hesaplamalar için $\Delta t = 0.005$, $v = 0.01$ alınır ve (5.3.10) sistemi



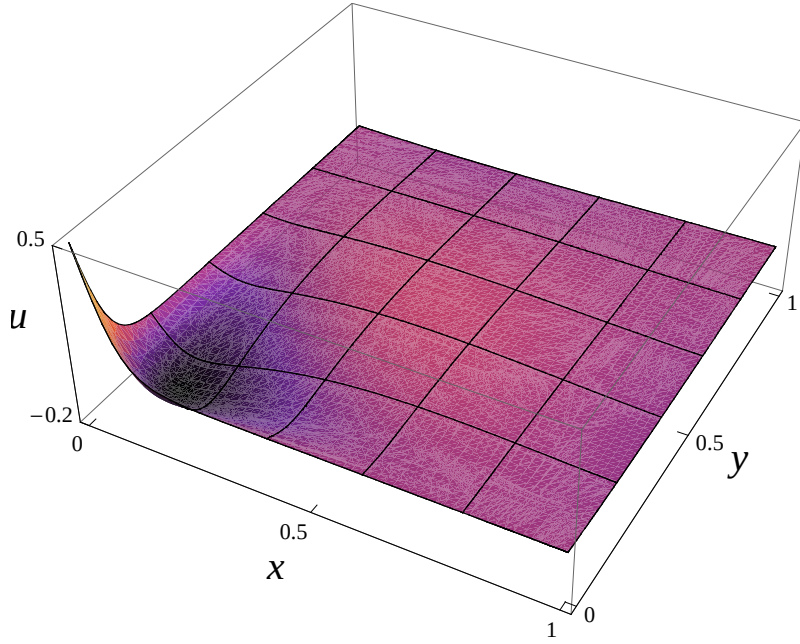
Şekil 5.1: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri.

Tablo 5.1: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	2×2	
(0.00,0.00)	0.500000	0.500000
(0.25,0.25)	0.027266	0.000000
(0.25,0.50)	-0.008631	0.000000
(0.25,0.75)	0.000887	0.000000
(0.50,0.25)	-0.008629	0.000000
(0.50,0.50)	0.002186	0.000000
(0.50,0.75)	-0.000268	0.000000
(0.75,0.25)	-0.000887	0.000000
(0.75,0.50)	-0.000268	0.000000
(0.75,0.75)	0.000058	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 5.2: Model problemin $2 \times 2 = 4$ için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

için Excel VBA'da yazılan program çalıştırılırsa $t = 0.05$ bitiş zamanındaki $A_i(t)$ global eleman parametreleri

$$A_1(0.05) = 0.0254878006362702,$$

$$A_2(0.05) = -0.0108558513065884,$$

$$A_3(0.05) = 0.0116058006650584,$$

$$A_4(0.05) = -0.0108545354216312,$$

$$A_5(0.05) = 0.0046940579182349,$$

$$A_6(0.05) = -0.0051215236179150,$$

$$A_7(0.05) = 0.0115945759708456,$$

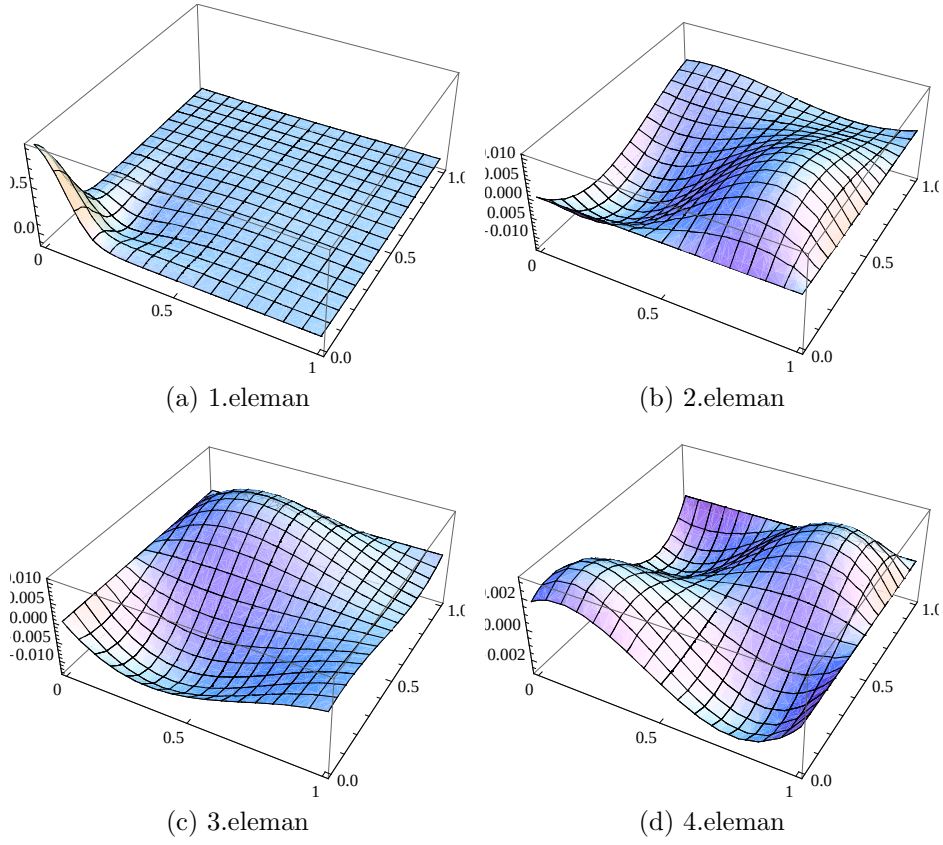
$$A_8(0.05) = -0.0051140018361045,$$

$$A_9(0.05) = 0.0057005399235933$$

olarak elde edilir. t 'nin artan zamanlardaki değerleri için benzer hesaplamalarla $A_i(t)$ global eleman parametreleri kolayca bulunabilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa $t = 0.05$ zamanında her bir eleman için $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 5.2'de model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 5.3, her bir elemanın $t = 0.05$ zamanındaki çözüm grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $t = 0.05$ zamanında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümündeki noktasal değerleri kullanılarak model problemin 4 eleman için elde edilen nümerik çözümünün grafiği tam çözümünün grafiği ile birlikte Şekil 5.4'de verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.

Bölgenin $4 \times 4 = 16$ Elemana Ayrılması

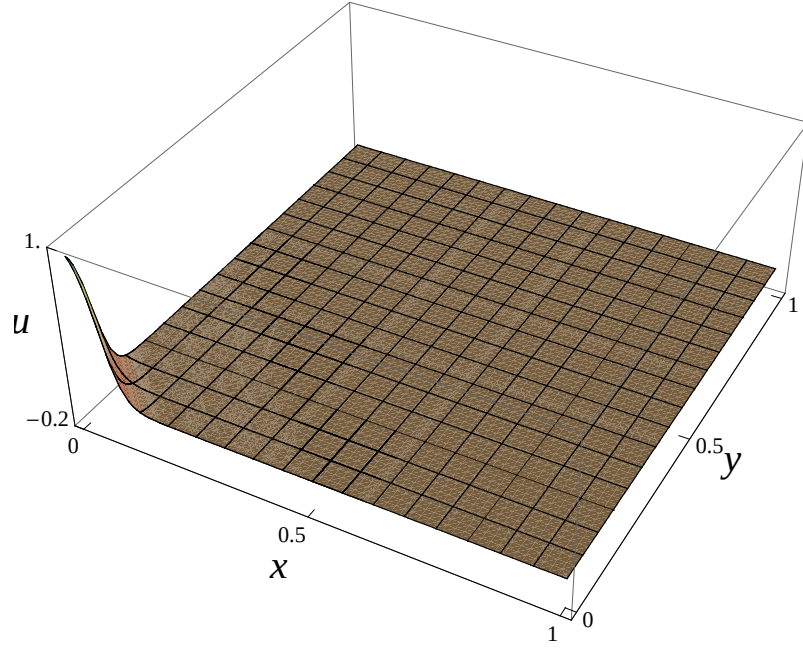
Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $4 \times 4 = 16$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/4$ olan 16 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (5.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2'de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin



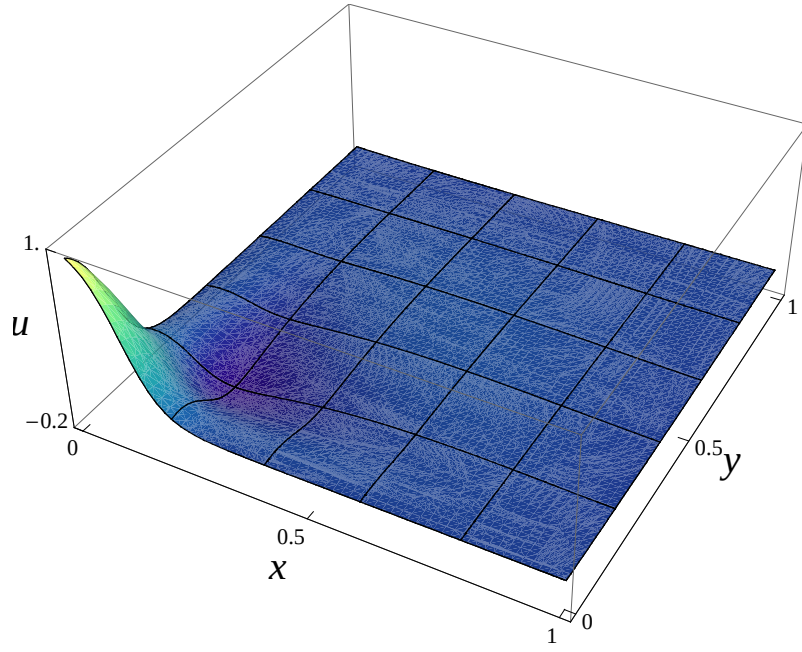
Şekil 5.3: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'teki nümerik çözümleri.

Tablo 5.2: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'teki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	2×2	
(0.00,0.00)	0.924142	0.924142
(0.25,0.25)	0.026500	0.000000
(0.25,0.50)	-0.007727	0.000000
(0.25,0.75)	0.000553	0.000000
(0.50,0.25)	-0.007728	0.000000
(0.50,0.50)	0.001710	0.000000
(0.50,0.75)	-0.000598	0.000000
(0.75,0.25)	0.000562	0.000000
(0.75,0.50)	-0.000626	0.000000
(0.75,0.75)	0.000626	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000



(a) Tam çözüm



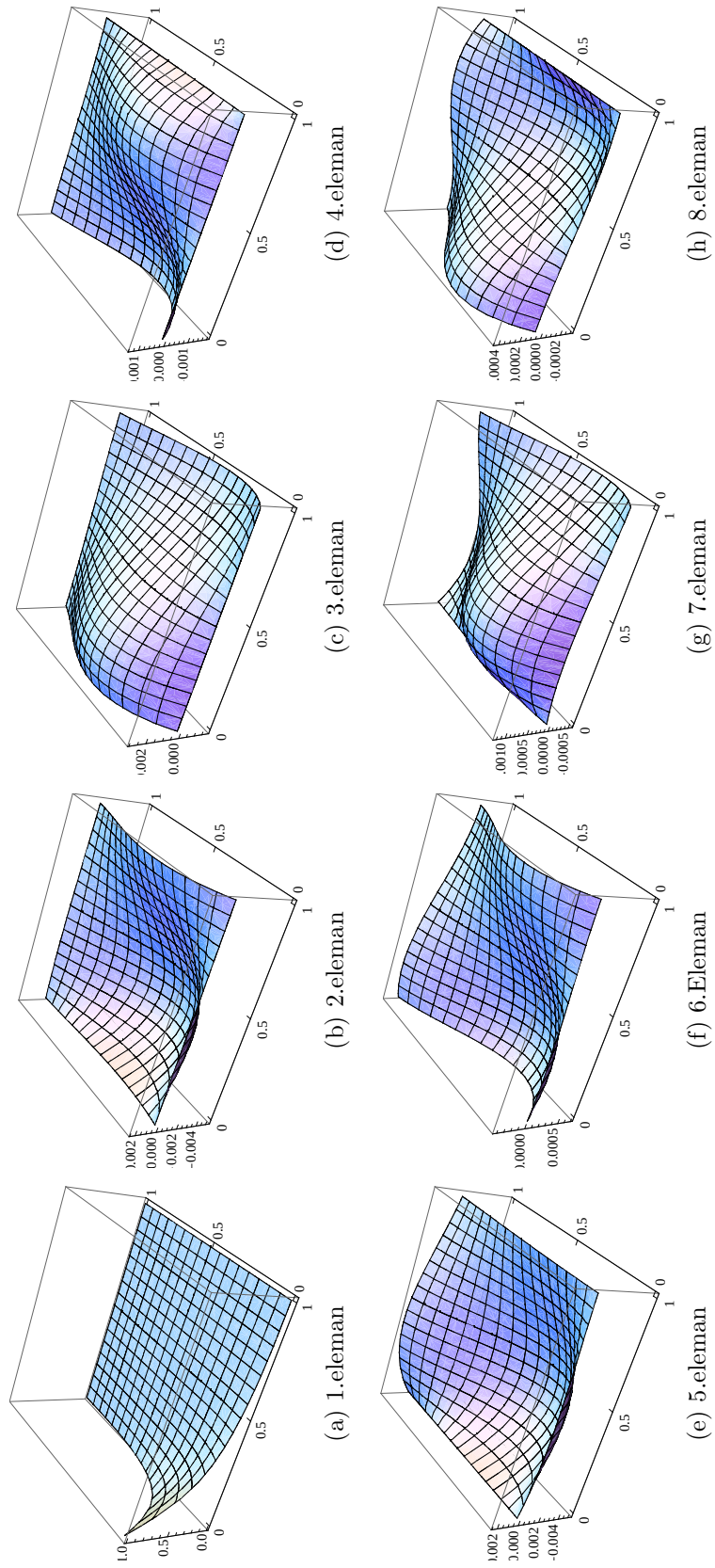
(b) Nümerik çözüm

Şekil 5.4: Model problemin $2 \times 2 = 4$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

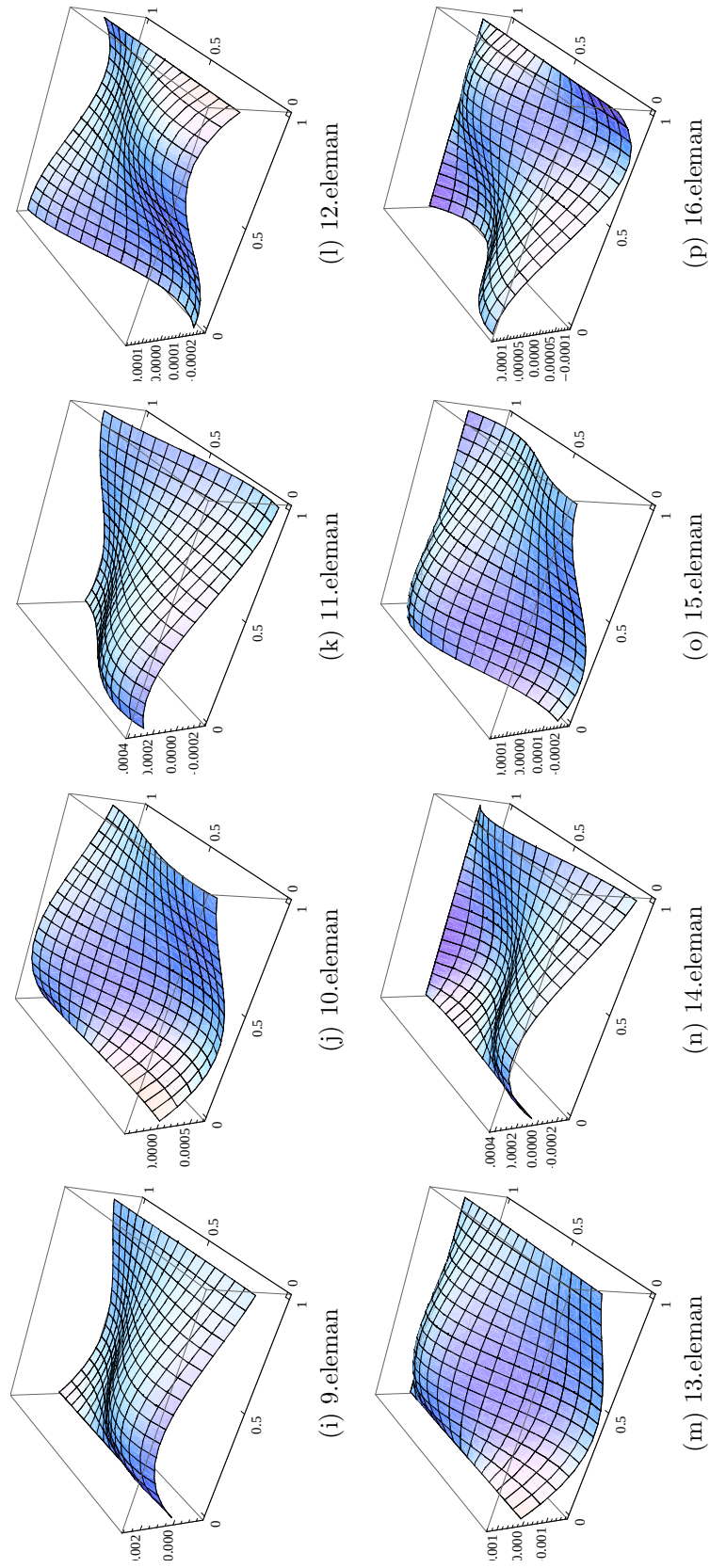
zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.3’de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır.

Her bir modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(x)$ ve $\tilde{B}_4(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$ ve $\alpha_4(t)$ gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$ ve $\tilde{B}_4(\eta)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$ ve $\beta_4(t)$ gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.2.3.22) yaklaşımı (5.2.13) zayıf formunda ve ξ , η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = 0(1)4$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $5 \times 5 = 25$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)25$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (5.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda önce (5.3.3) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi sonra (5.3.2) formunda elde edilen iteratif cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)25$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 5.3 ve 5.4’de model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablolardan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Şekiller 5.5 ve 5.7, her bir elemanın sırasıyla $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarında elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarındaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümününün noktasal değerleri kullanılarak model problemin 16 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri sırası ile Şekil 5.6 ve 5.8’de ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.



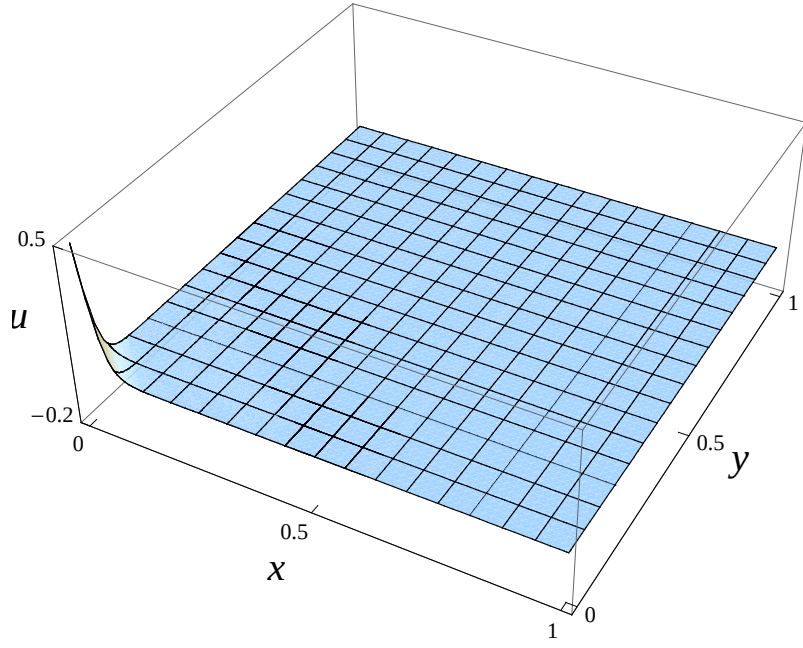
Şekil 5.5: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



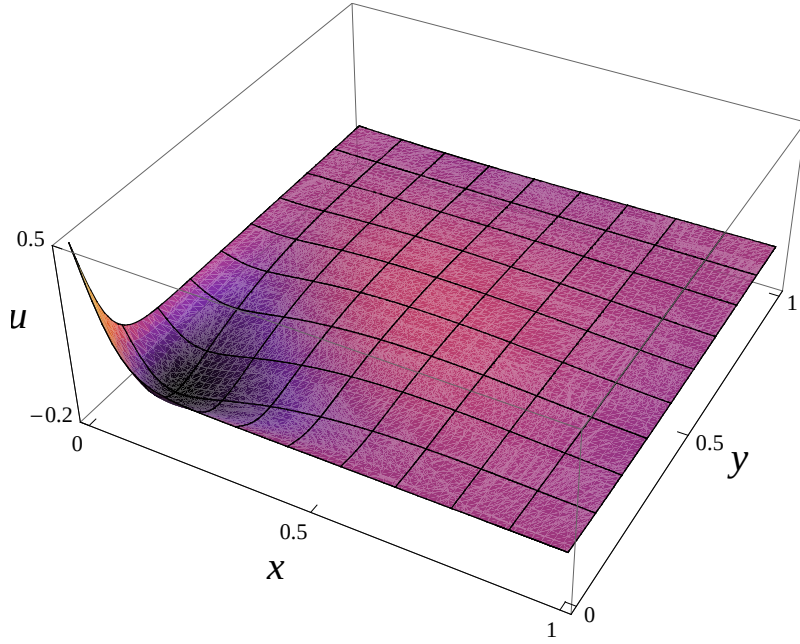
Şekil 5.5: (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

Tablo 5.3: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	4×4	
(0.00,0.00)	0.500000	0.500000
(0.25,0.25)	-0.000001	0.000000
(0.25,0.50)	-0.000059	0.000000
(0.25,0.75)	0.000039	0.000000
(0.50,0.25)	-0.000059	0.000000
(0.50,0.50)	0.000264	0.000000
(0.50,0.75)	-0.000194	0.000000
(0.75,0.25)	0.000039	0.000000
(0.75,0.50)	-0.000194	0.000000
(0.75,0.75)	0.000136	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000

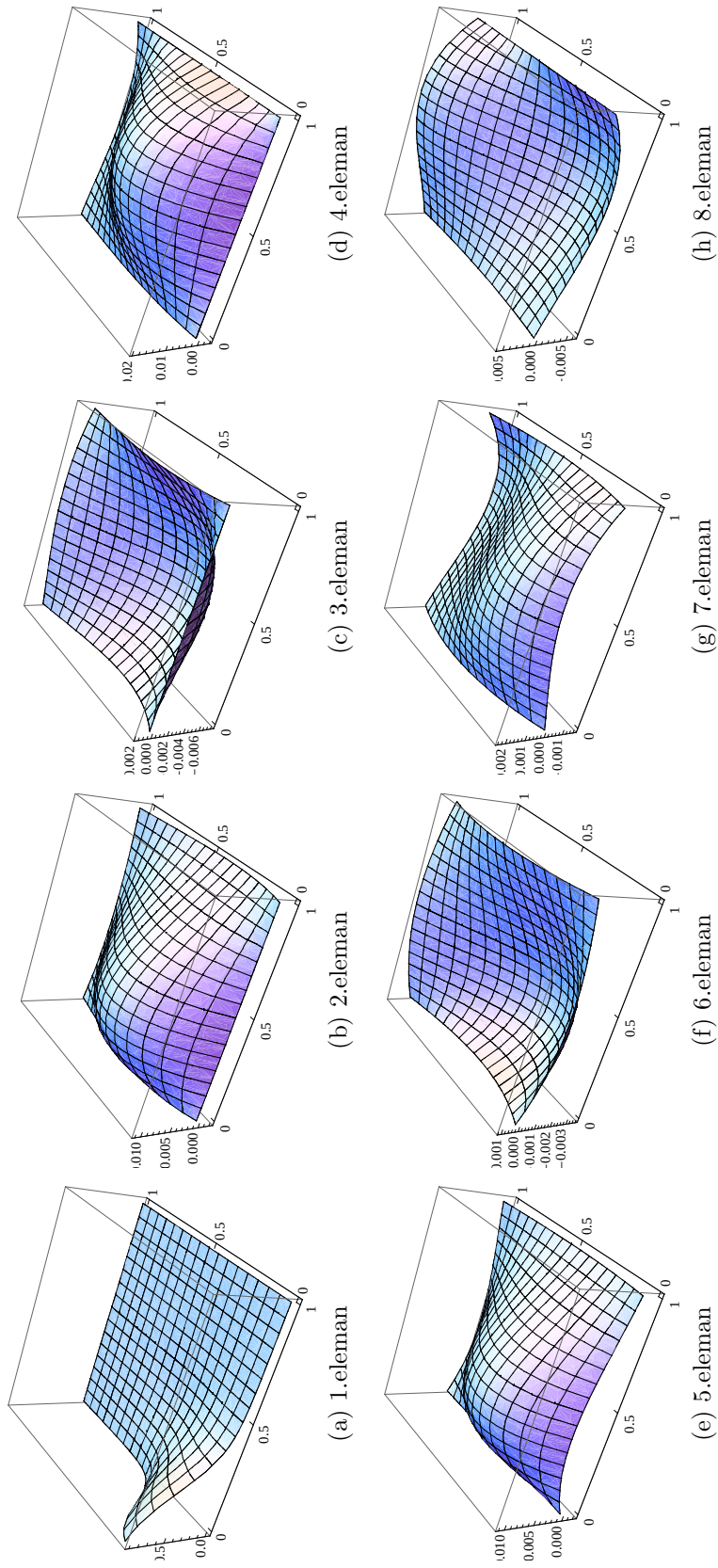


(a) Tam çözüm

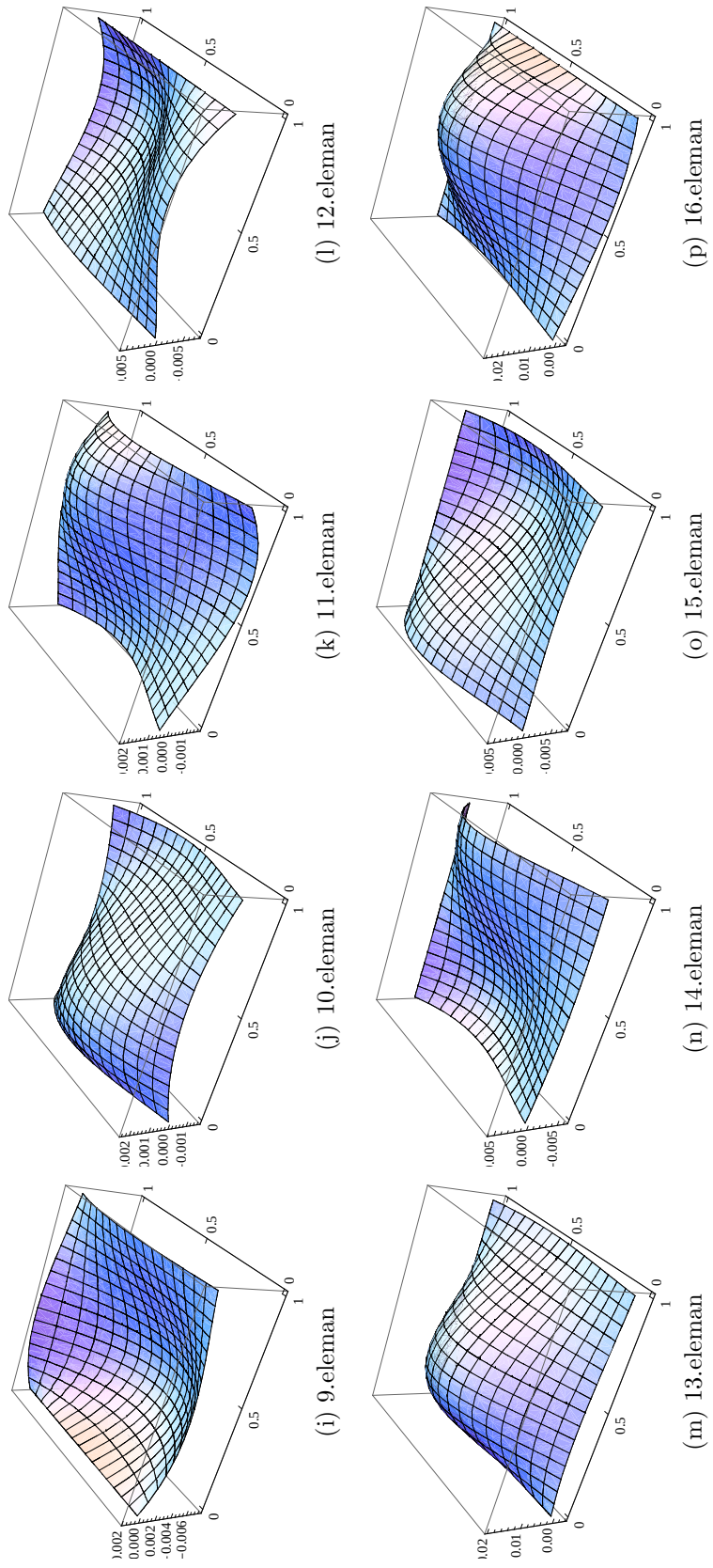


(b) Nümerik çözüm

Şekil 5.6: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.



Şekil 5.7: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'teki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



Şekil 5.7: (Devam) Model problemın $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

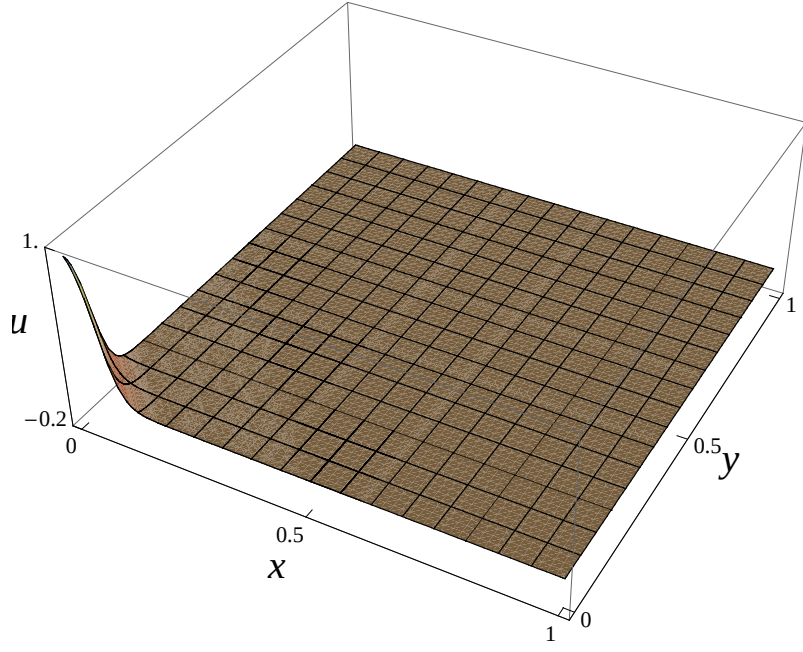
Tablo 5.4: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	4×4	
(0.00,0.00)	0.924142	0.924142
(0.25,0.25)	0.000081	0.000000
(0.25,0.50)	-0.000099	0.000000
(0.25,0.75)	0.000017	0.000000
(0.50,0.25)	-0.000099	0.000000
(0.50,0.50)	0.000322	0.000000
(0.50,0.75)	-0.000189	0.000000
(0.75,0.25)	0.000017	0.000000
(0.75,0.50)	-0.000189	0.000000
(0.75,0.75)	0.000088	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000

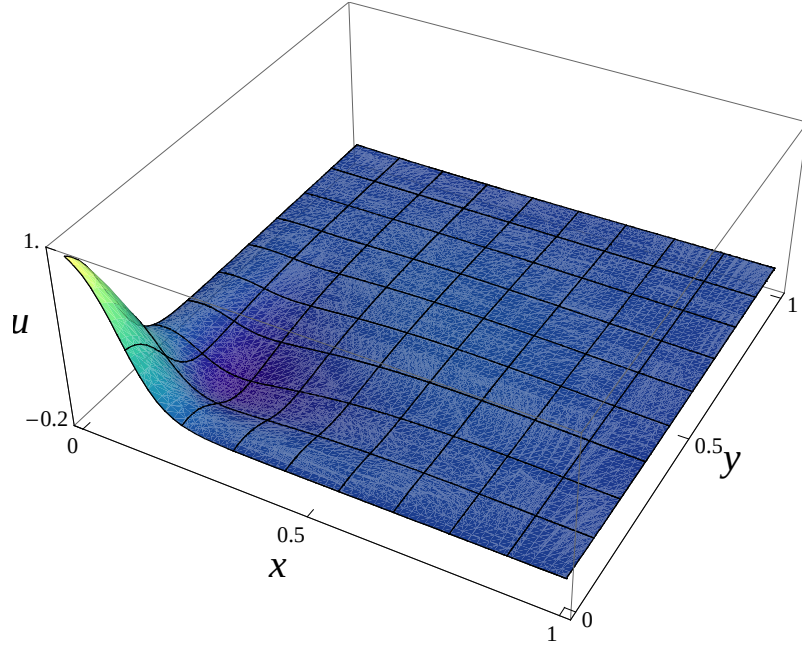
Bölgenin $10 \times 10 = 100$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $10 \times 10 = 100$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/10$ olan 100 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (5.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2'de (2.2.3.22) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için bir eleman konum tablosundan yararlanılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.5'de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır.

Her bir modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$, $\tilde{B}_5(\xi)$, $\tilde{B}_6(\xi)$, $\tilde{B}_7(\xi)$, $\tilde{B}_8(\xi)$, $\tilde{B}_9(\xi)$ ve $\tilde{B}_{10}(\xi)$ modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\alpha_4(t)$, $\alpha_5(t)$, $\alpha_6(t)$, $\alpha_7(t)$, $\alpha_8(t)$, $\alpha_9(t)$ ve $\alpha_{10}(t)$ gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$, $\tilde{B}_5(\eta)$, $\tilde{B}_6(\eta)$, $\tilde{B}_7(\eta)$, $\tilde{B}_8(\eta)$, $\tilde{B}_9(\eta)$ ve $\tilde{B}_{10}(\eta)$ modifiye edilmiş



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

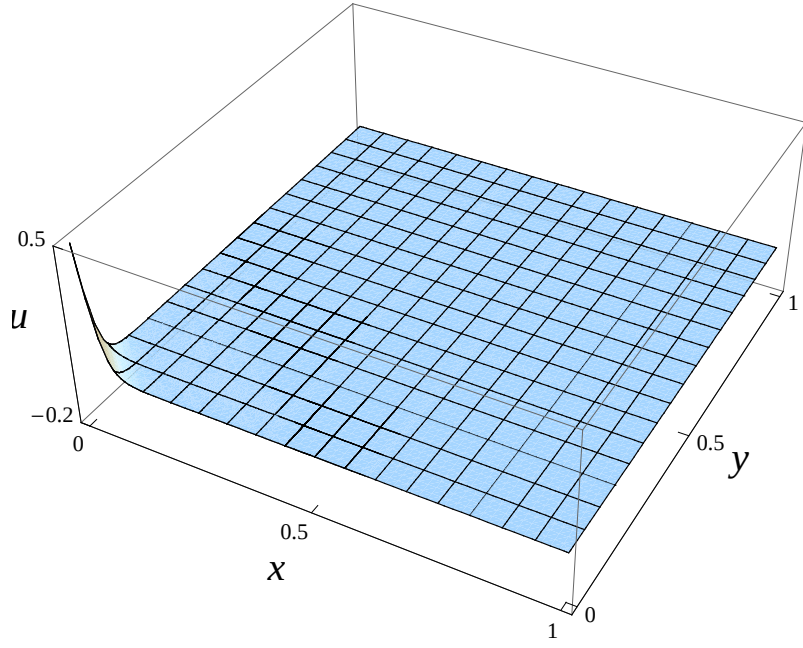
Şekil 5.8: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

kübik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$, $\beta_4(t)$, $\beta_5(t)$, $\beta_6(t)$, $\beta_7(t)$, $\beta_8(t)$, $\beta_9(t)$ ve $\beta_{10}(t)$ gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.2.3.22) yaklaşımı (5.2.13) zayıf formunda ve ξ , η yönlerinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

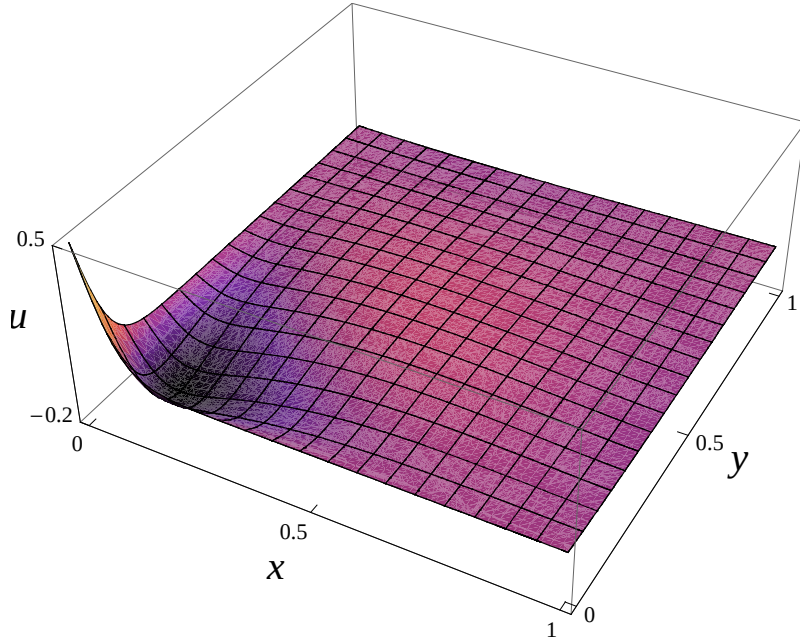
Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = 0(1)10$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $11 \times 11 = 121$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)121$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (5.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda önce (5.3.3) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi sonra (5.3.2) formunda elde edilen iteratif cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)121$) global eleman parametreleri elde edilir.

Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 5.5 ve 5.6'da model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablolardan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarındaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümününün noktasal değerleri kullanılarak model problemin 100 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri sırası ile Şekil 5.9 ve 5.10'da ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir. Modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik baz fonksiyonlarının sonlu eleman yöntemiyle birlikte kullanıldığında bölüntü sayısının 16'dan 100'e çıkarılmasının sonucumuzu daha da iyileştirdiği görüldü.

Tablo 5.7 ve 5.8'de sırası ile $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarında kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı.



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

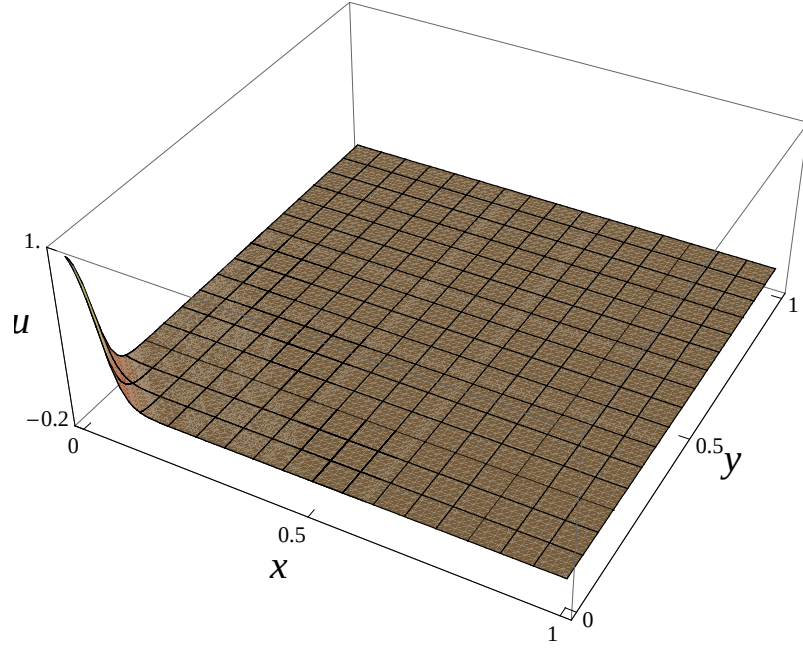
Şekil 5.9: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 5.5: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

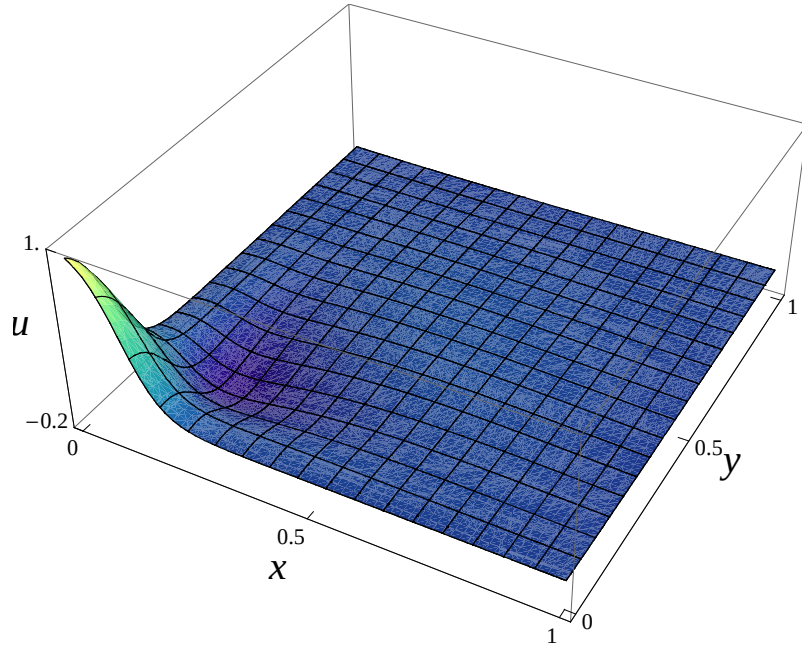
(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	10×10	
(0.00,0.00)	0.500000	0.500000
(0.25,0.25)	-0.000060	0.000000
(0.25,0.50)	0.000012	0.000000
(0.25,0.75)	0.000002	0.000000
(0.50,0.25)	0.000012	0.000000
(0.50,0.50)	-0.000002	0.000000
(0.50,0.75)	0.000000	0.000000
(0.75,0.25)	0.000002	0.000000
(0.75,0.50)	0.000000	0.000000
(0.75,0.75)	0.000000	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000

Tablo 5.6: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	10×10	
(0.00,0.00)	0.924142	0.924142
(0.25,0.25)	-0.000456	0.000000
(0.25,0.50)	0.000103	0.000000
(0.25,0.75)	-0.000087	0.000000
(0.50,0.25)	0.000103	0.000000
(0.50,0.50)	-0.000021	0.000000
(0.50,0.75)	0.000051	0.000000
(0.75,0.25)	-0.000087	0.000000
(0.75,0.50)	0.000051	0.000000
(0.75,0.75)	0.000072	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 5.10: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 5.7: Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})			Tam Çözüm (u)
	2×2	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.008837	0.001003	0.000001	0.000000
(0.8,0.2)	0.005906	-0.000493	-0.000002	0.000000
(0.7,0.3)	-0.002905	0.000223	-0.000002	0.000000
(0.6,0.4)	-0.002041	-0.000268	-0.000002	0.000000
(0.5,0.5)	0.002186	0.000264	-0.000002	0.000000
(0.4,0.6)	-0.002042	-0.000268	-0.000002	0.000000
(0.3,0.7)	-0.002905	0.000223	-0.000002	0.000000
(0.2,0.8)	0.005907	-0.000493	-0.000002	0.000000
(0.1,0.9)	0.008838	0.001003	0.000001	0.000000
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000
(0.1,0.1)	-0.089152	0.001496	0.000067	0.000045
(0.2,0.2)	0.022662	0.002816	-0.000066	0.000000
(0.3,0.3)	0.018510	0.001011	-0.000022	0.000000
(0.4,0.4)	0.001306	0.000377	-0.000006	0.000000
(0.5,0.5)	0.002186	0.000264	-0.000002	0.000000
(0.6,0.6)	0.003325	0.000193	0.000000	0.000000
(0.7,0.7)	0.000416	0.000031	0.000000	0.000000
(0.8,0.8)	0.000824	0.000080	0.000000	0.000000
(0.9,0.9)	0.002286	0.000031	0.000000	0.000000
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.8: Model problemin $2 \times 2 = 4$, $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})			Tam Çözüm (u)
	2×2	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.008999	0.019934	-0.000213	0.000000
(0.8,0.2)	0.005802	0.002346	-0.000109	0.000000
(0.7,0.3)	-0.003397	0.001289	-0.000049	0.000000
(0.6,0.4)	-0.002587	0.001040	-0.000026	0.000000
(0.5,0.5)	0.001710	0.000322	-0.000021	0.000000
(0.4,0.6)	-0.002577	0.001040	-0.000026	0.000000
(0.3,0.7)	-0.003396	0.001289	-0.000049	0.000000
(0.2,0.8)	0.005785	0.002346	-0.000109	0.000000
(0.1,0.9)	0.008983	0.019934	-0.000213	0.000000
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.924142	0.924142	0.924142	0.924142
(0.1,0.1)	-0.125585	-0.042435	0.001687	0.000553
(0.2,0.2)	0.009521	-0.003004	-0.000459	0.000000
(0.3,0.3)	0.021235	-0.002890	-0.000156	0.000000
(0.4,0.4)	0.002502	-0.001281	-0.000049	0.000000
(0.5,0.5)	0.001710	0.000322	-0.000021	0.000000
(0.6,0.6)	0.002875	-0.000743	-0.000024	0.000000
(0.7,0.7)	0.000653	0.002265	-0.000060	0.000000
(0.8,0.8)	0.001591	0.001070	-0.000156	0.000000
(0.9,0.9)	0.002840	0.025639	-0.000222	0.000000
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

5.4 Model Problemin Modifiye Edilmiş 2–Boyutlu Kuintik B-spline Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda model problemin yaklaşık çözümleri modifiye edilmiş 2–boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi 16 ($h_x = h_y = 1/4$) ve 100 ($h_x = h_y = 1/10$) elemana ayrılarak nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen çözümler literatürdeki mevcut çözümlerle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde sunuldu.

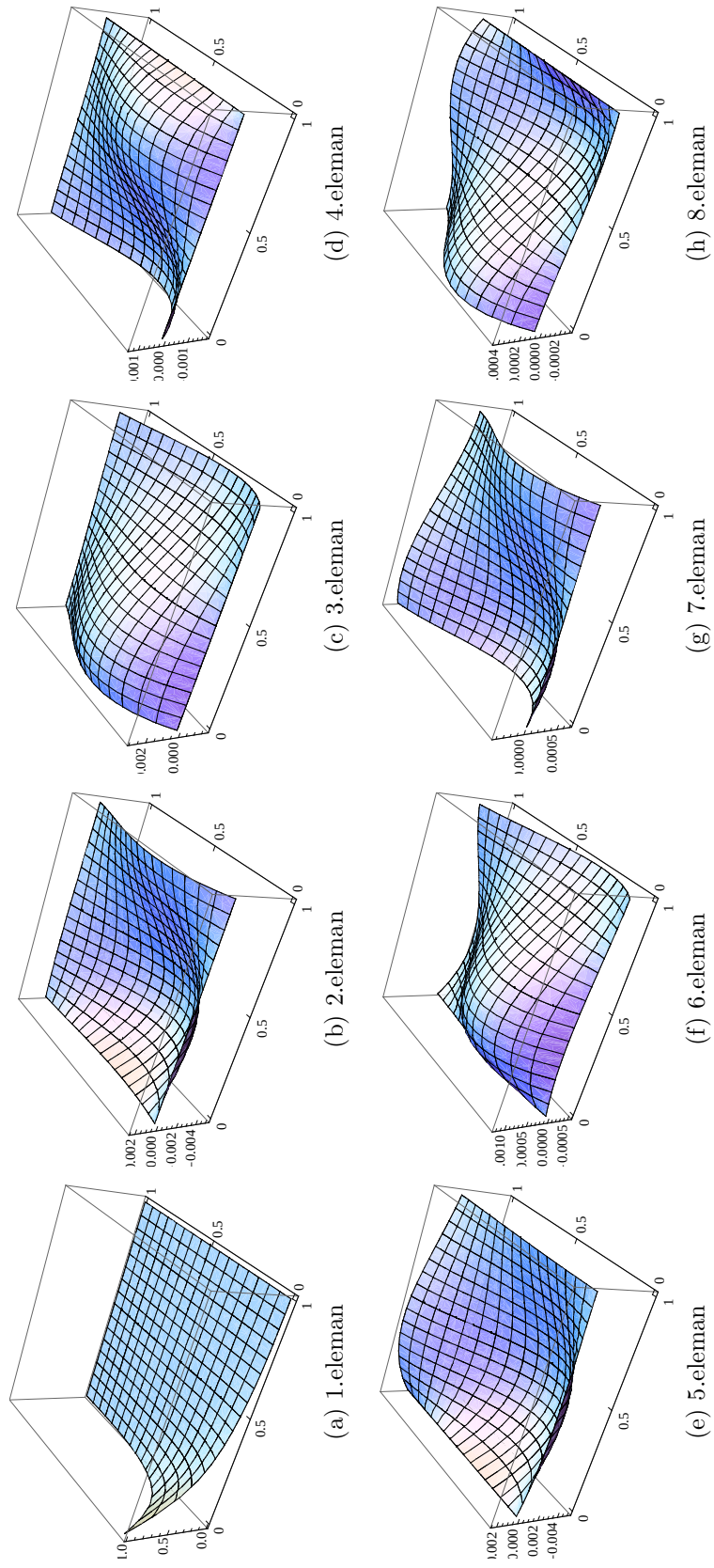
Bölgenin $4 \times 4 = 16$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $4 \times 4 = 16$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/4$ olan 16 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (5.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2’de (2.3.3.15) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için Tablo 3.3’de verilen eleman konum tablosundan yararlanılır.

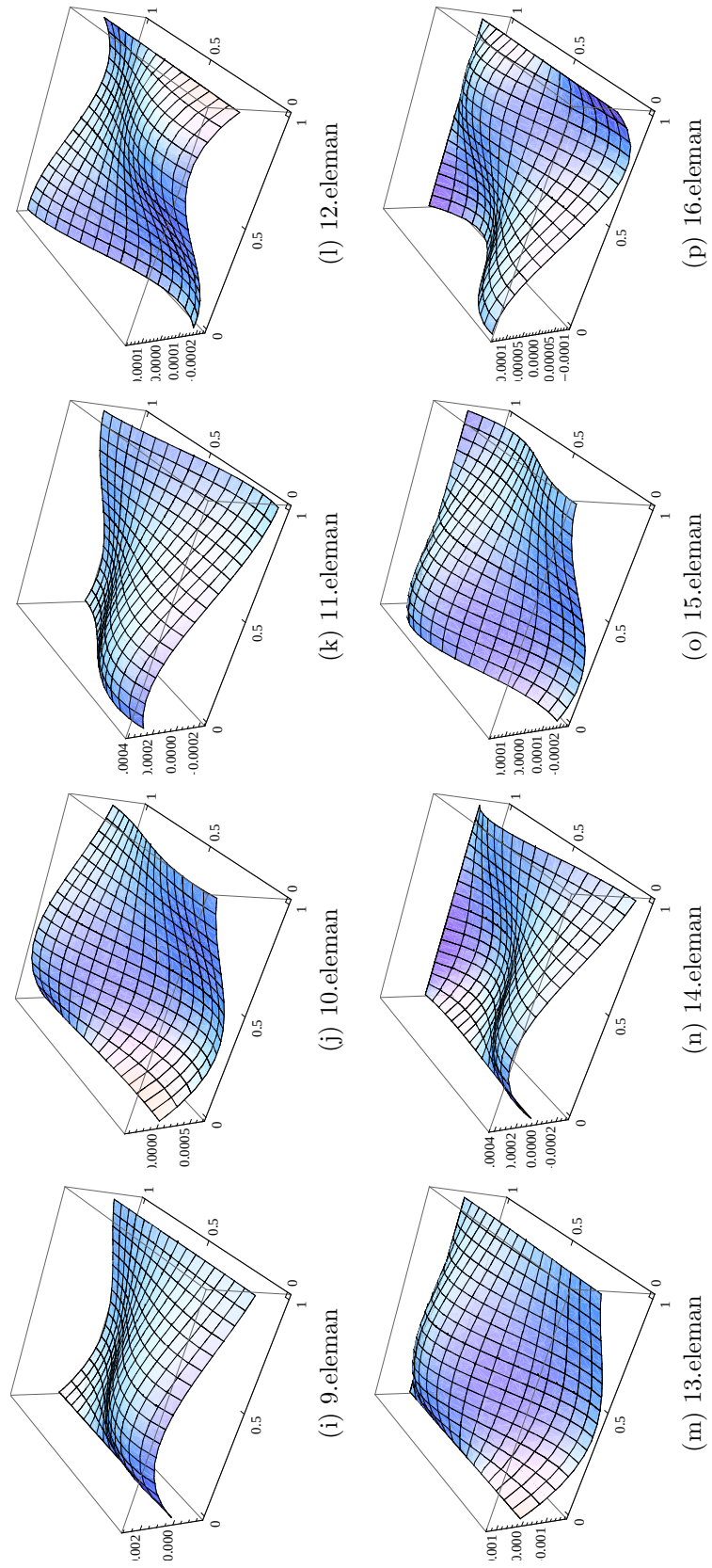
Her bir modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_{-1}(\xi)$, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$ ve $\tilde{B}_5(\xi)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_{-1}(t)$, $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\alpha_4(t)$ ve $\alpha_5(t)$ gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_{-1}(\eta)$, $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$ ve $\tilde{B}_5(\eta)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_{-1}(t)$, $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$, $\beta_4(t)$ ve $\beta_5(t)$ gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.3.3.15) yaklaşımı (5.2.13) zayıf formunda ve ξ , η yönlerinde modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = -1(1)5$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $7 \times 7 = 49$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)49$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$

yaklaşık çözümü (5.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda önce (5.3.3) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi sonra (5.3.2) formunda elde edilen iteratif cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)49$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 5.9 ve 5.10'da model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablolardan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Şekiller 5.11 ve 5.13, her bir elemanın sırasıyla $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarında elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafiğini göstermektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarındaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümününün noktasal değerleri kullanılarak model problemin 16 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri sırası ile Şekil 5.12 ve 5.14'de ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.



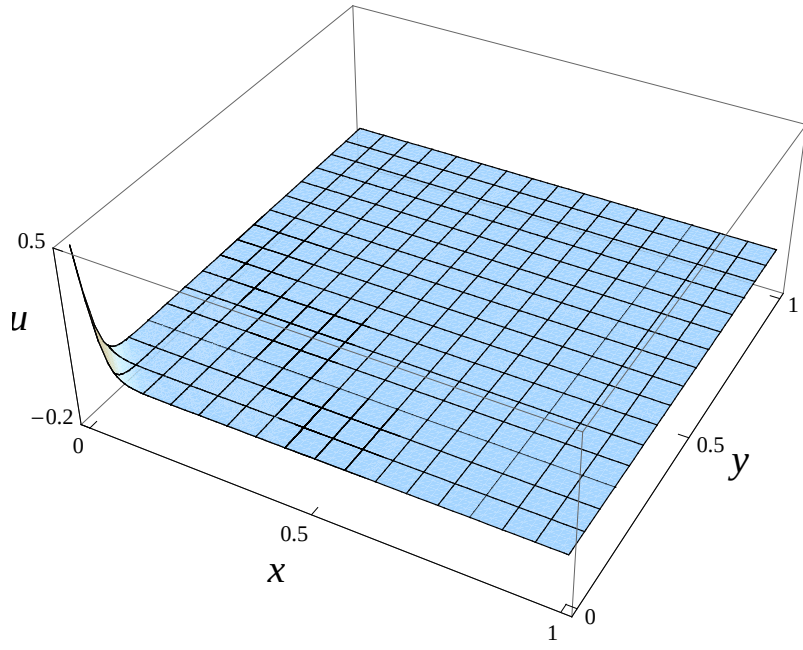
Şekil 5.11: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



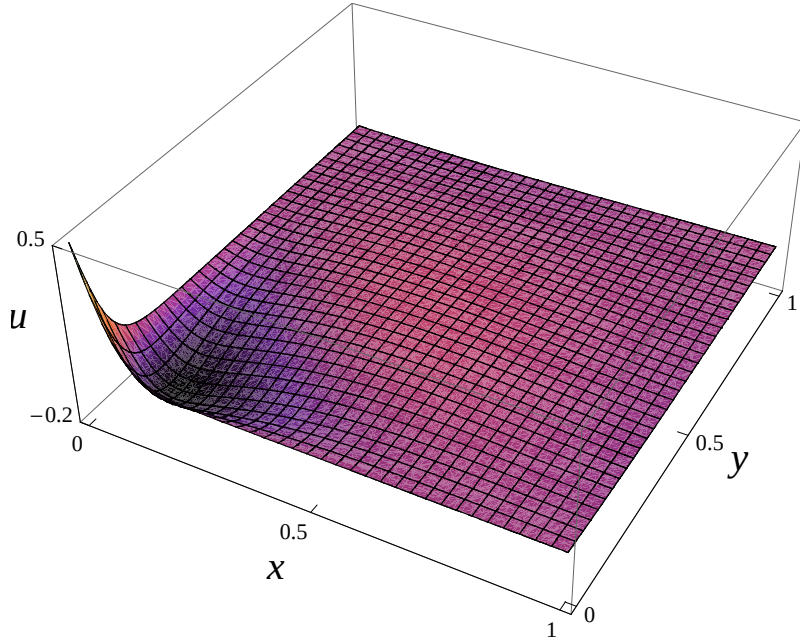
Şekil 5.11: (Devam) Model problemin $4 \times 4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

Tablo 5.9: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	4×4	
(0.00,0.00)	0.500000	0.500000
(0.25,0.25)	0.000009	0.000000
(0.25,0.50)	-0.000015	0.000000
(0.25,0.75)	0.000007	0.000000
(0.50,0.25)	-0.000015	0.000000
(0.50,0.50)	-0.000017	0.000000
(0.50,0.75)	0.000011	0.000000
(0.75,0.25)	0.000007	0.000000
(0.75,0.50)	0.000011	0.000000
(0.75,0.75)	-0.000007	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000

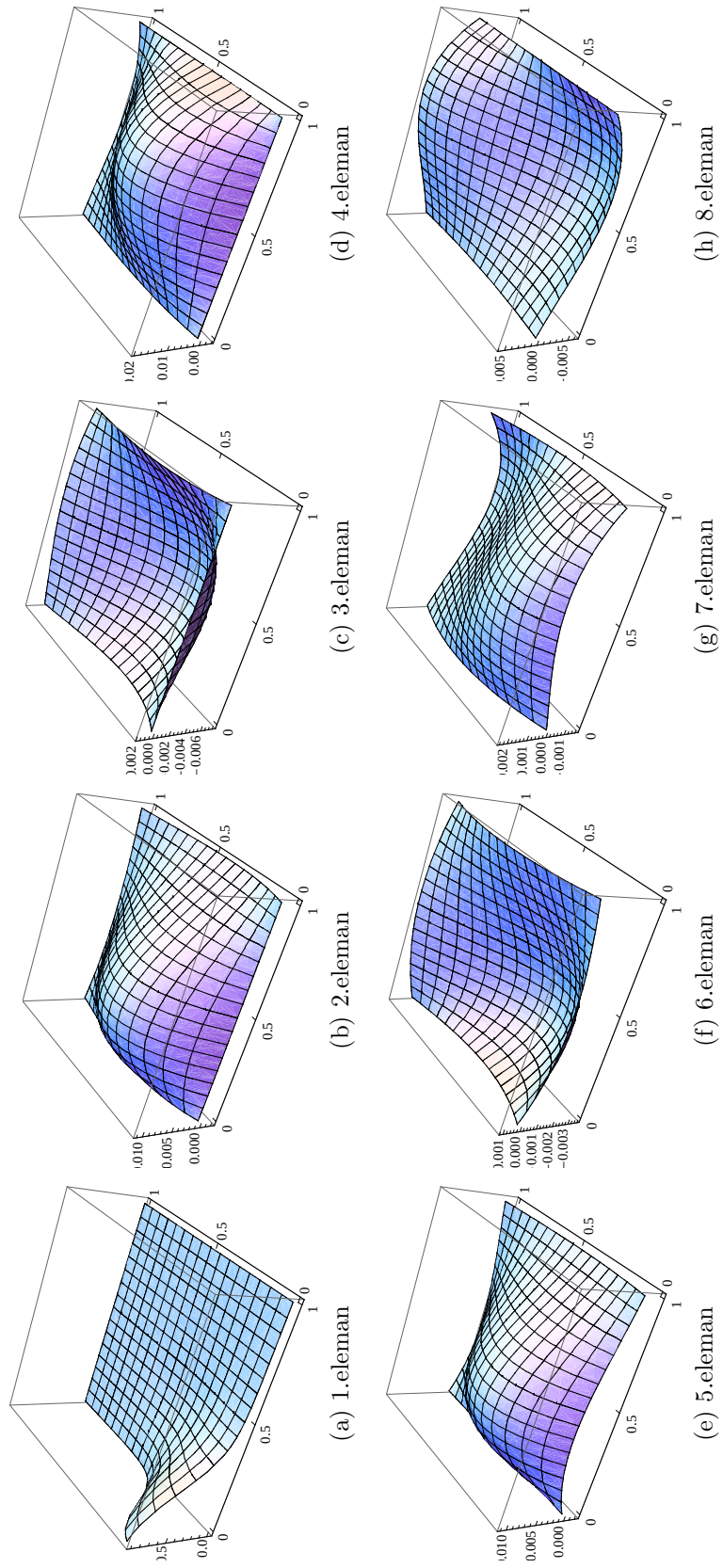


(a) Tam çözüm

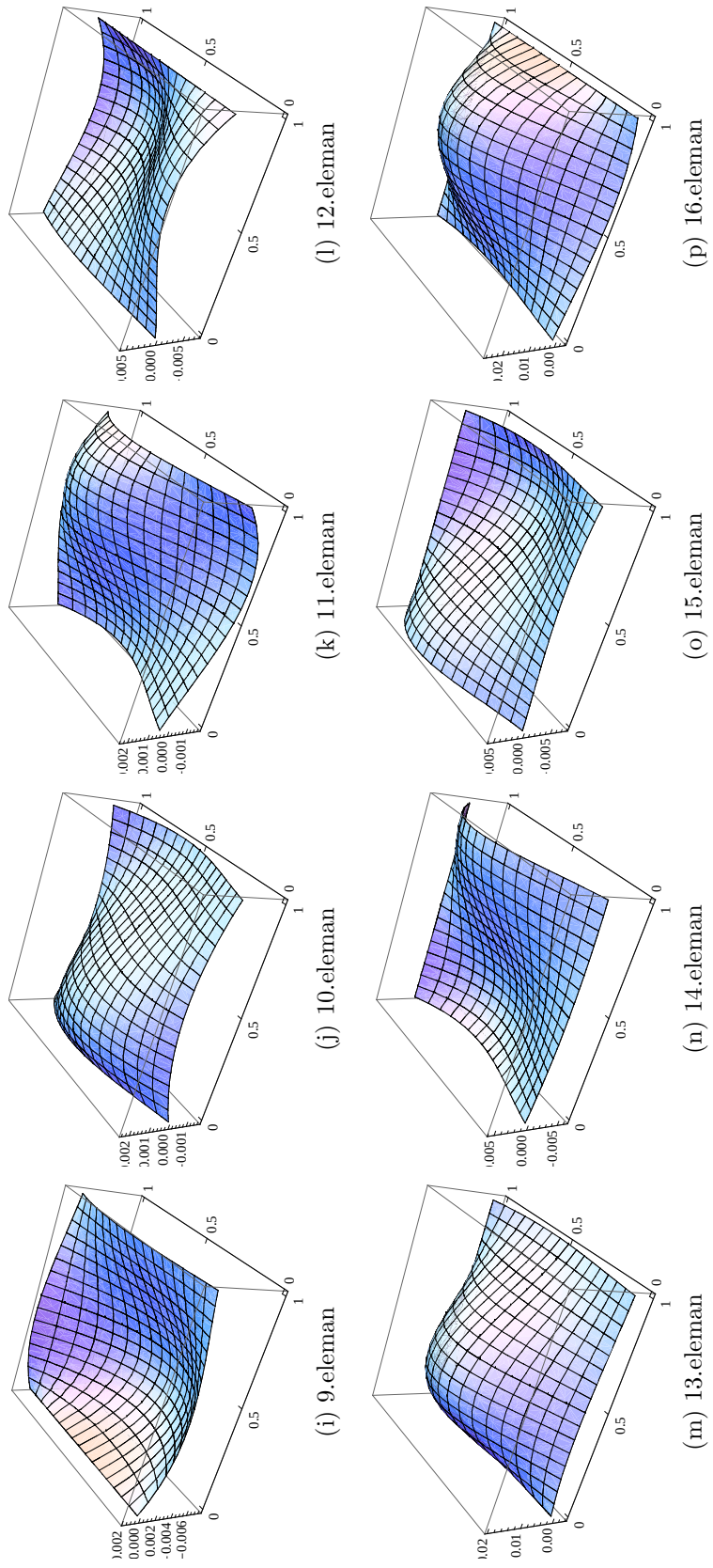


(b) Nümerik çözüm

Şekil 5.12: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.



Şekil 5.13: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik çözümleri (1-8. elemanlar).



Şekil 5.13: (Devam) Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik çözümleri (9-16. elemanlar).

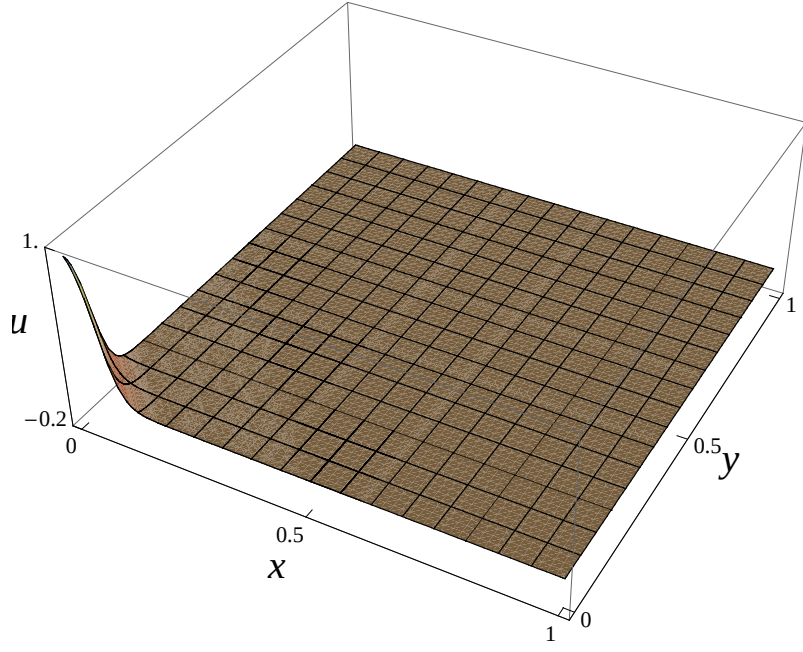
Tablo 5.10: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	4×4	
(0.00,0.00)	0.924142	0.924142
(0.25,0.25)	-0.002140	0.000000
(0.25,0.50)	-0.001109	0.000000
(0.25,0.75)	0.001000	0.000000
(0.50,0.25)	-0.001109	0.000000
(0.50,0.50)	-0.000507	0.000000
(0.50,0.75)	0.000579	0.000000
(0.75,0.25)	0.001000	0.000000
(0.75,0.50)	0.000580	0.000000
(0.75,0.75)	-0.000406	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000

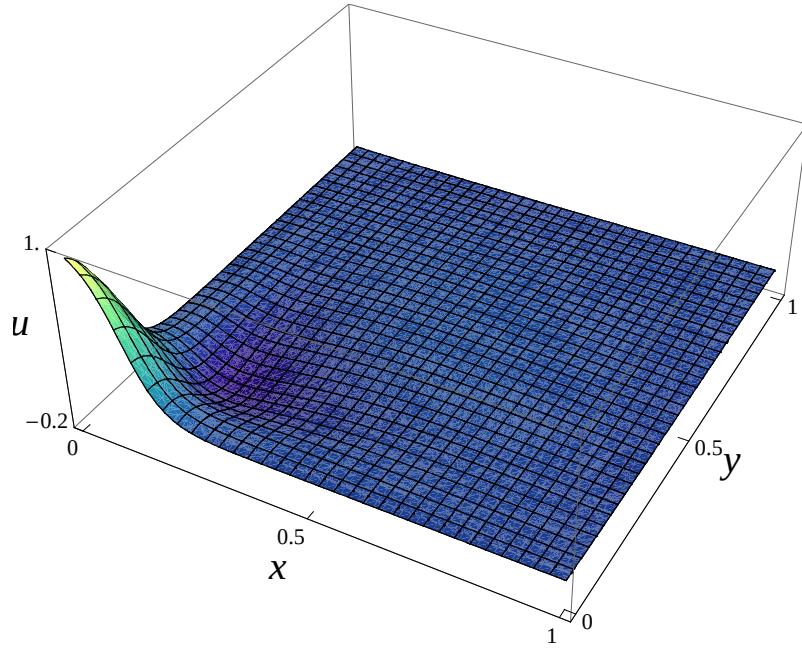
Bölgenin $10 \times 10 = 100$ Elemana Ayrılması

Problemin D çözüm bölgesi her biri özdeş kareler olan $10 \times 10 = 100$ elemana bölünürse kenar uzunluğu $h_x = h_y = h = 1/10$ olan 100 eleman elde edilir. Her bir elemana ait eleman denklemini elde etmek için model probleme karşılık gelen (5.2.13) zayıf form denkleminde her bir tipik elemanın konum bölgesine düşen $\tilde{B}_i(\xi)$ ve $\tilde{B}_j(\eta)$ yaklaşım fonksiyonlarının parçaları ile $\tilde{B}_k(\xi)$ ve $\tilde{B}_l(\eta)$ ağırlık fonksiyonlarının parçaları göz önünde bulundurularak $u(x, y, t)$ yerine Bölüm 2'de (2.3.3.15) ile verilen $u_{nm}(x, y, t)$ yaklaşımı yazılır. Ağırlık ve yaklaşım fonksiyonlarının hangi parçalarının problemin zayıf form denkleminde kullanılacağını belirlemek için bir eleman konum tablosundan yararlanılır. Örneğin böyle bir tablo 100 eleman için Tablo 3.5'deki gibi numaralandırılır. Bu eleman konum tablosu eleman denklemlerinin ve parametrelerinin belirlenmesiyle birlikte elemanların birleştirilmesinde de kullanılır.

Her bir kuintik B-spline fonksiyonunun sürekliliğinin sağlanması için elemanlardan geçen her bir parçasının aynı reel parametre ile çarpılması gerekir. O halde, $\tilde{B}_{-1}(\xi)$, $\tilde{B}_0(\xi)$, $\tilde{B}_1(\xi)$, $\tilde{B}_2(\xi)$, $\tilde{B}_3(\xi)$, $\tilde{B}_4(\xi)$, $\tilde{B}_5(\xi)$, $\tilde{B}_6(\xi)$, $\tilde{B}_7(\xi)$, $\tilde{B}_8(\xi)$, $\tilde{B}_9(\xi)$, $\tilde{B}_{10}(\xi)$ ve $\tilde{B}_{11}(\xi)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları sırasıyla $\alpha_{-1}(t)$, $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\alpha_4(t)$, $\alpha_5(t)$, $\alpha_6(t)$, $\alpha_7(t)$, $\alpha_8(t)$, $\alpha_9(t)$, $\alpha_{10}(t)$ ve $\alpha_{11}(t)$ gibi reel sayılar ve $\tilde{B}_{-1}(\eta)$, $\tilde{B}_0(\eta)$, $\tilde{B}_1(\eta)$, $\tilde{B}_2(\eta)$, $\tilde{B}_3(\eta)$, $\tilde{B}_4(\eta)$, $\tilde{B}_5(\eta)$, $\tilde{B}_6(\eta)$, $\tilde{B}_7(\eta)$, $\tilde{B}_8(\eta)$, $\tilde{B}_9(\eta)$, $\tilde{B}_{10}(\eta)$ ve $\tilde{B}_{11}(\eta)$ modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonları ise sırasıyla $\beta_{-1}(t)$, $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$, $\beta_4(t)$, $\beta_5(t)$, $\beta_6(t)$, $\beta_7(t)$, $\beta_8(t)$, $\beta_9(t)$, $\beta_{10}(t)$



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 5.14: Model problemin $4 \times 4 = 16$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

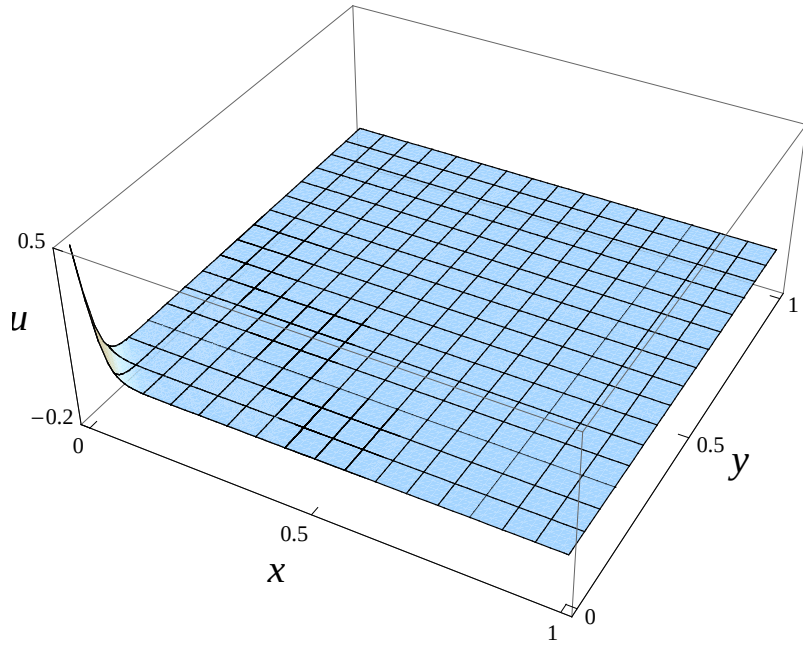
ve $\beta_{11}(t)$ gibi reel sayılar ile çarpılır. (2.3.3.15) yaklaşımı (5.2.13) zayıf formunda ve ξ, η yönlerinde modifiye edilmiş kuintik B-spline fonksiyonlarının konum bölgesine düşen parçaları da eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü için her bir elemanın eleman denklemi elde edilir.

Her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü düzenlenirse problemin D çözüm bölgesinde $\alpha_i(t)$ ve $\beta_i(t)$, ($i = -1(1)11$) lokal eleman parametrelerine bağlı toplam $13 \times 13 = 169$ tane global eleman parametresi ortaya çıkar. Açıkça her bir elemanın $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için $A_i(t)$, ($i = 1(1)169$) global eleman parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için her bir elemandaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü (5.2.13) zayıf form denkleminde yerine yazılırsa her bir eleman için katsayılar matrisi elde edilir. Her bir eleman için elde edilen katsayılar matrisleri birleştirilerek global koordinatlarda önce (5.3.3) formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi sonra (5.3.2) formunda elde edilen iteratif cebirsel denklem sistemi çözülürse $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarındaki $A_i(t)$, ($i = 1(1)169$) global eleman parametreleri elde edilir. Elde edilen eleman parametreleri her bir elemanın eleman denkleminde yerlerine yazılırsa her bir eleman için $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarında $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Tablo 5.11 ve 5.12’de model problemin modifiye edilmiş 2-boyutlu kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri literatürdeki tam çözümleri ile karşılaştırıldı. Tablolardan, elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Her bir elemanın $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarındaki $u_{nm}(\xi, \eta, t)$ yaklaşık çözümününün noktasal değerleri kullanılarak model problemin 100 eleman için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri sırası ile Şekil 5.15 ve 5.16’da ayrı ayrı verildi. Nümerik çözüm tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir. Tablo 5.13 ve 5.14’de sırası ile $t = 0.0$ ve $t = 0.05$ zamanlarında kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı.

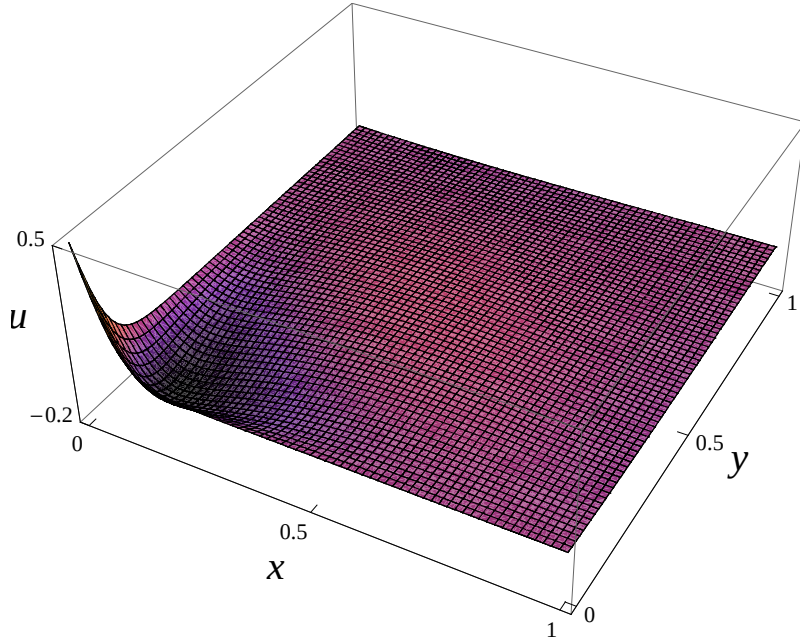
Kübik ve kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen $u_{nm}(x, y, t)$ nümerik çözümünün $u(x, y, t)$ tam çözümüne ne kadar yaklaştığını ölçmek için

$$L_2 = \|u - u_{nm}\|_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{ip}} |u_i - (u_{nm})_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{ip}} |u_i|^2}},$$

$$L_\infty = \|u - u_{nm}\|_\infty = \max_{0 < i < n_{ip}} |u_i - (u_{nm})_i|$$



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

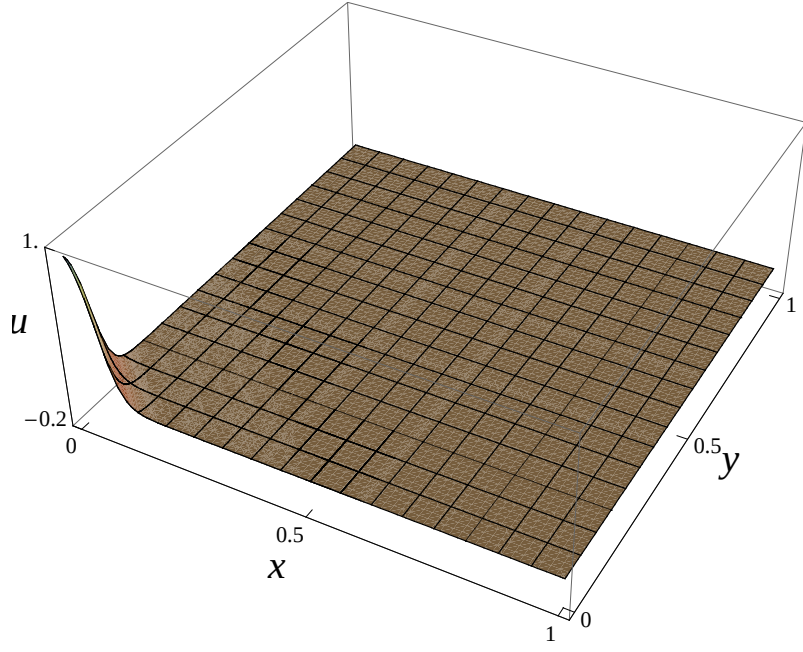
Şekil 5.15: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 5.11: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

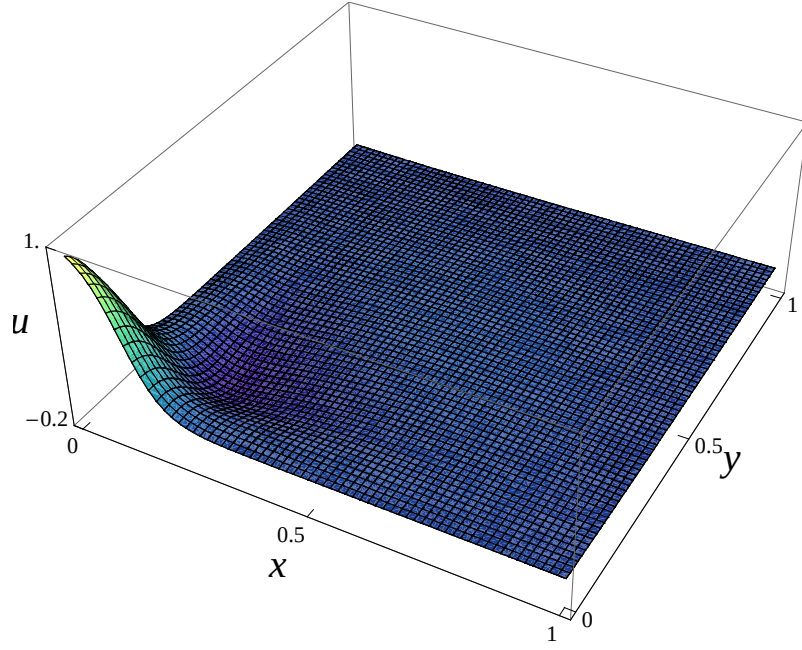
(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	10×10	
(0.00,0.00)	0.500000	0.500000
(0.25,0.25)	-0.000006	0.000000
(0.25,0.50)	0.000001	0.000000
(0.25,0.75)	-0.000001	0.000000
(0.50,0.25)	0.000001	0.000000
(0.50,0.50)	0.000000	0.000000
(0.50,0.75)	0.000000	0.000000
(0.75,0.25)	0.000000	0.000000
(0.75,0.50)	0.000000	0.000000
(0.75,0.75)	0.000000	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000

Tablo 5.12: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})	Tam Çözüm (u)
	10×10	
(0.00,0.00)	0.924142	0.924142
(0.25,0.25)	0.000712	0.000000
(0.25,0.50)	0.000018	0.000000
(0.25,0.75)	-0.000172	0.000000
(0.50,0.25)	0.000018	0.000000
(0.50,0.50)	-0.000031	0.000000
(0.50,0.75)	0.000099	0.000000
(0.75,0.25)	-0.000172	0.000000
(0.75,0.50)	0.000018	0.000000
(0.75,0.75)	-0.000199	0.000000
(1.00,1.00)	0.000000	0.000000



(a) Tam çözüm



(b) Nümerik çözüm

Şekil 5.16: Model problemin $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki (a) tam ve (b) nümerik çözümleri.

Tablo 5.13: Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman için $t = 0.0$ 'daki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	-0.000034	0.000000	0.000000
(0.8,0.2)	-0.000008	0.000000	0.000000
(0.7,0.3)	-0.000018	0.000000	0.000000
(0.6,0.4)	0.000008	0.000000	0.000000
(0.5,0.5)	-0.000017	0.000000	0.000000
(0.4,0.6)	0.000008	0.000000	0.000000
(0.3,0.7)	-0.000018	0.000000	0.000000
(0.2,0.8)	-0.000008	0.000000	0.000000
(0.1,0.9)	-0.000034	0.000000	0.000000
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.500000	0.500000	0.500000
(0.1,0.1)	0.000934	0.000056	0.000045
(0.2,0.2)	-0.000190	0.000000	0.000000
(0.3,0.3)	-0.000015	-0.000001	0.000000
(0.4,0.4)	-0.000019	0.000000	0.000000
(0.5,0.5)	-0.000017	0.000000	0.000000
(0.6,0.6)	-0.000004	0.000000	0.000000
(0.7,0.7)	-0.000012	0.000000	0.000000
(0.8,0.8)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.9)	-0.000002	0.000000	0.000000
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.14: Model problemin $4 \times 4 = 16$ ve $10 \times 10 = 100$ eleman ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0.05$ 'deki nümerik ve tam çözümleri.

(x, y)	Nümerik Çözüm (u_{nm})		Tam Çözüm (u)
	4×4	10×10	
(1.0,0.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.9,0.1)	0.001960	-0.000786	0.000000
(0.8,0.2)	0.000411	-0.000004	0.000000
(0.7,0.3)	-0.000279	-0.000039	0.000000
(0.6,0.4)	0.000739	-0.000035	0.000000
(0.5,0.5)	-0.000507	-0.000031	0.000000
(0.4,0.6)	0.000739	-0.000035	0.000000
(0.3,0.7)	-0.000280	-0.000039	0.000000
(0.2,0.8)	0.000411	-0.000004	0.000000
(0.1,0.9)	0.001960	-0.000786	0.000000
(0.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
(0.0,0.0)	0.924142	0.924142	0.924142
(0.1,0.1)	-0.038751	0.000565	0.000553
(0.2,0.2)	-0.006043	-0.000003	0.000000
(0.3,0.3)	-0.000141	-0.000009	0.000000
(0.4,0.4)	-0.001501	-0.000019	0.000000
(0.5,0.5)	-0.000507	-0.000031	0.000000
(0.6,0.6)	-0.000326	-0.000046	0.000000
(0.7,0.7)	-0.000497	-0.000053	0.000000
(0.8,0.8)	0.000430	-0.000004	0.000000
(0.9,0.9)	-0.001214	-0.000900	0.000000
(1.0,1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.15: Model problemin farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları ve eleman sayısı için L_2 ve L_∞ hata normları.

	Eleman Sayısı	t=0.0		t=0.05	
		L_2	L_∞	L_2	L_∞
Kübik	2×2	1.01977×10^{-1}	1.48002×10^{-1}	3.68073×10^{-1}	2.03474×10^{-1}
	4×4	1.96711×10^{-1}	4.55462×10^{-2}	2.67691×10^{-1}	1.81547×10^{-1}
	10×10	3.01109×10^{-2}	1.39849×10^{-2}	1.30481×10^{-1}	9.67842×10^{-2}
Kuintik	4×4	3.07822×10^{-2}	1.56223×10^{-2}	1.31446×10^{-1}	6.20789×10^{-2}
	10×10	3.95743×10^{-3}	1.01559×10^{-3}	1.89465×10^{-2}	7.19604×10^{-3}

ile tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Tablo 5.15’de verildi. Burada n_{i_p} iç noktaların sayısı olup u_i ve $(u_{nm})_i$ sırası ile i . noktadaki u ’nun tam ve yaklaşık çözümleridir. L_2 ve L_∞ hata normları $D = [0, 1] \times [0, 1]$ çözüm bölgesi x ve y yönlerinde 40 eşit parçaya bölünerek toplam $41 \times 41 = 1681 (= n_{i_p})$ düğüm noktasındaki u_i ve $(u_{nm})_i$ değerleri göz önünde bulundurularak hesaplandı. Tablodan da görüldüğü gibi, kübik B-spline baz fonksiyonları kullanıldığında eleman sayısının artmasıyla hata normları gittikçe azalmıştır. Kübik B-spline baz fonksiyonları yerine kuintik B-spline baz fonksiyonlarının kullanımı nümerik çözümü iyileştirmiş ve eleman sayısının artmasıyla birlikte hata normları kübik B-spline baz fonksiyonlarına göre daha da küçülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] N. Otteson and H. Pettorson, *Introduction to The Finite Element Method*, Prentice Hall International (UK) Ltd., 1992.
- [2] D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition)*, Thomson, 2007.
- [3] E. G. Thompson, *Introduction to the finite element method, Theory, Programming, and Applications*, John Wiley Sons Inc., 2005.
- [4] F. L. Stasa, *Applied Finite Element Analysis for Engineers*, CBS College Publishing, New York, 1985.
- [5] M. A. Bhatti, *Fundamental Finite Element Analysis and Applications with Mathematica and Matlab Computations*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
- [6] J. N. Reddy, *An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 2006.
- [7] M. A. Walkley, *A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-water Wave Equations*, The University of Leeds School of Computer Studies, 1999.
- [8] O.C. Zienkiewicz, *The finite element method*, McGraw-Hill, London, 1977.
- [9] L.R.T. Gardner and G.A. Gardner, *A two dimensional bi-cubic B-spline finite element: used in a study of MHD-duct flow*, **Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 124 (1995) 365-375.
- [10] B. S. Moon, D. S. Yoo, Y.H. Lee, I.S. Oh, J.W. Lee, D.Y. Lee and K.C. Kwon, *A non-separable solution of the diffusion equation based on the Galerkin's method using cubic splines*, **Appl. Math. and Comput.**, 217 (2010) 1831-1837.
- [11] S. F. Radwan, *Comparison of The Higher-Order Accurate Schemes For Solving Two-Dimensional Unsteady Burgers' Equation*, **J. Comput. Appl. Math.**, 174(2005) 383-397.
- [12] Jinming Wu and Xiaolei Zhang, *Finite Element Method by Using Quartic B-Splines*, **Numeri. Meth. Part. Diff. Equ.**, 27 (2011) 818-828
10.1002/num.20555.
- [13] İ. Dağ, “*Studies of B-spline Finite Elements*”, Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (UK), 1994.

- [14] W. Cheney and D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*(Sixth Edition), Thomson, 2008.
- [15] A. Esen, “*Termistör probleminin B-spline sonlu eleman yöntemleri ile çözümleri*”, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2003.
- [16] L.R.T. Gardner and G.A. Gardner, *B-Spline Finite Elements*, School of Mathematics, University of Wales, February 1991.
- [17] M. Topçu, S. Taşgetiren, *Mühendisler İçin Sonlu Elemanlar Metodu*, Sakarya Üniversitesi Yayınları, Sayı 3, Adapazarı, 1993.
- [18] A. Ergin, E. Bayraktarkatal ve Y. Ünsan, *Sonlu Elemanlar Metodu ve Gemi İnşaatı Sektöründeki Uygulamaları*, İstanbul, Mayıs 2000.
- [19] S. Arıkan, *Sonlu Elemanlar Metodunun Mühendislikte Uygulamaları*, Seminer Notları, ODTU, Ankara, 2000.
- [20] A.J.Davies, *The Finite Element Method, A First Approach*, Oxford University Press, New York, 1986.
- [21] J. N. Reddy, *An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 2004.
- [22] P. M. Prenter, *Splines and variational methods*, Wiles, New York, 1975.
- [23] K.N.S. Kasi Viswanadham, S.R. Koneru, *Finite element method for one-dimensional and two-dimensional time dependent problems with B-splines*, **Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 108(1993) 201-222.
- [24] C.E.Schaerer, E. Kaszkurewicz and N. Mangiavacchi, *A multilevel Schwarz shooting method for the solution of the Poisson equation in two dimensional incompressible flow simulations*, **Appl. Math. and Comput.**, 153 (2004) 803–831.
- [25] B.S.Ahmed, and S. J. Monaque, Multigrid Method for Solving 2D-Poisson Equation with Sixth Order Finite Difference Method, **International Mathematical Forum**, Vol.6, 2011,no.55,2729-2736.
- [26] R.Tavakoli and P. Davami, *2D parallel and stable group explicit finite difference method for solution of diffusion equation*, **Appl. Math. and Comput.**,188 (2007) 1184–1192
- [27] W.T. Ang, *A boundary integral equation method for the two-dimensional diffusion equation subject to a non-local condition*, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 25 (2001) 1-6.
- [28] A. C. Velivelli and K. M. Bryden, *A cache-efficient implementation of the lattice Boltzmann method for the two-dimensional diffusion equation*, **Concurrency Computat. Pract. Exper.**, 16 (2004) 1415-1432.

- [29] A.E. Aboanber and Y.M. Hamada, *Generalized Runge–Kutta method for two- and three-dimensional space–time diffusion equations with a variable time step*, **Annals of Nuclear Energy**, 35 (2008) 1024–1040.
- [30] T. Gnana Bhaskar, S. Hariharan and Neela Nataraj, *Heatlet approach to diffusion equation on unbounded domains*, **Appl. Math. and Comput.**, 197 (2008) 891–903.
- [31] M. Sterk and R. Trobec, *Meshless solution of a diffusion equation with parameter optimization and error analysis*, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 32 (2008) 567–577.
- [32] A. H. Khater, R. S. Temsah and M. M. Hassan, *A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers’-type equations*, **J. Comput. Appl. Math.**, 222:2(2008) 333–350.
- [33] S. M. El-Sayed and Dogan Kaya, *On the numerical solution of the system of two-dimensional Burgers equations by the decomposition method*, **Appl. Math. and Comput.**, 158 (2004) 101–109.
- [34] H. Zhu, H. Shu and M. Ding, *Numerical solutions of two-dimensional Burgers’ equations by discrete Adomian decomposition method*, **Comput. and Math. Appl.**, 60 (2010) 840–848.
- [35] C. A. J. Fletcher, *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*, Springer Series in Computational Physics, Verlag Berlin, 1991.
- [36] Xiaonan Wu and Jiwei Zhang, *Artificial boundary method for two-dimensional Burgers’ equation*, **Computers and Mathematics with Applications**, 56 (2008) 242–256.
- [37] Y. Gurefe and E. Misirli, *New variable separation solutions of two-dimensional Burgers system*, **Appl. Math. and Comput.**, 217 (2011) 9189–9197.
- [38] A.C. Velivelli and K.M. Bryden, *Parallel performance and accuracy of lattice Boltzmann and traditional finite difference methods for solving the unsteady two-dimensional Burger’s equation*, **Physica A.**, 362 (2006) 139–145.
- [39] R.C. Mittal and R. Jiwari, *Differential Quadrature Method for Two-Dimensional Burgers’ Equations*, **Int. J. of Comput. Methods in Engrg. Sci. and Mech.**, 10 (2009) 450–459.
- [40] V.K. Srivastava, M. Tamsir, U. Bhardwaj and Y. Sanyasiraju, *Crank-Nicolson Scheme for Numerical Solutions of Two-dimensional Coupled Burgers’ Equations*, **Int. J. of Comput. Methods in Engrg. Sci. and Mech.**, 5 (2011) 1–7.
- [41] A.N. Boules, and I.J. Eick, *A Spectral Approximation of the Two Dimensional Burgers’ Equation*, **Indian J. Pure Appl. Math.**, 34 (2003) 299–309.

- [42] I.E. Inan, Y. Ugurlu and S. Duran, Complex Solutions for Ninth-Order Korteweg-de Vries (nKdv) Equation and 2-dimensional Burgers equation, **Turkish Journal of Science and Technology**, 5 (2010) 37-42.
- [43] C. Allery, A. Hamdouini, D. Ryckelynck and N. Verdon, *A priori reduction method for solving the two-dimensional Burgers' equations*, **Appl. Math. and Comput.**, 217 (2011) 6671–6679.

ÖZGEÇMİŞ

14.07.1970 tarihinde Malatya’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya’da tamamladı. 1989 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Yabancı Diller Yüksekokulundan, 1993 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. 1994 yılında İnönü Üniversitesi Malatya Meslek Yüksekokulu Bilgisayar Teknolojileri Bölümüne Öğretim Görevlisi olarak atandı. 1997 yılında İnönü Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalında Yüksek Lisansını tamamladı. Halen İnönü Üniversitesi Malatya Meslek Yüksekokulu Bilgisayar Teknolojileri Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak görev yapan N.Murat YAĞMURLU evli ve iki çocuk babası olup iyi seviyede İngilizce bilmektedir.