

T.C.

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**2-NORMLU YAPILAR VE FONKSİYONEL ANALİZDEKİ
YANSIMALARI**

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞE KARAGENÇ

TEMMUZ 2017

TEMMUZ 2017

YÜKSEK LİSANS - MATEMATİK BÖLÜMÜ

AYŞE KARAGENÇ

2-Normlu Yapılar Ve Fonksiyonel Analizdeki Yansımaları

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Ayşe KARAGENÇ

Temmuz 2017



© 2017 [Ayşe KARAGENÇ]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: 2-Normlu Yapılar ve Fonksiyonel Analizdeki Yansımaları

Öğrencinin, Adı Soyadı: Ayşe Karagöç

Tez Savunma Tarihi: 03.07.2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI

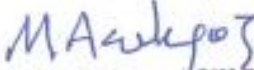
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Ayhan ESI

Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Yrd. Doç. Dr. Mine MENEKŞE YILMAZ

İmzası




İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Ayşe KARAGENÇ

ÖZET

2-NORMLU YAPILAR VE FONKSİYONEL ANALİZDEKİ YANSIMALARI

KARAGENÇ, Ayşe

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Temmuz 2017

55 sayfa

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, 2-normlu uzayların tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerine temel oluşturacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, 2-norm ve onların bazı uzayları tanımlanmış, özel olarak 2-Banach uzaylardan bahsedilmiş ve bu uzayların temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, 2-normlu küme üzerinde sınırlı 2-lineer operatörlerden bahsedilmiştir. Beşinci bölümde, 2-normlu D -modül üzerinde D -değerli lineer 2-fonksiyonelden bahsedilmiştir. Altıncı bölümde, 2-normlu uzaylarda yaklaşım konusu göz önüne alınmıştır. Yedinci bölümde ise genelleştirilmiş 2-normlu uzayların 2-proximal altuzayı incelenmiş ilgili tanımlara ve örneklere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: 2-normlu uzaylar, yaklaşım teorisi, 2-Banach uzayları, sınırlı 2-lineer operatörler, 2-normlu D -modül

ABSTRACT
2-NORMED STRUCTURES AND THEIR REFLECTIONS IN FUNCTIONAL
ANALYSIS

KARAGENÇ, Ayşe

M. Sc. Thesis, Department of Mathematics

Adviser: Associate Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

July 2017

55 page

This thesis consist of seven chapters. In the first chapter, the history of 2-normed spaces is mentioned. In the second chapter, the definitions and theorems that will form the basis of the other parts of the thesis are given. In the third chapter, 2-norm and some spaces of them are defined, especially 2-Banach spaces are mentioned and basic features are given. In the fourth chapter, bounded 2-linear operators are mentioned on 2-normed set. In the fifth chapter, D -valued linear 2-functions on 2-normed D -modul are mentioned. In the sixth chapter, the approximation is taken into account in 2-normed spaces. In the seventh chapter, 2-proximity subspaces of generalized 2-normed spaces are examined and related definitions and examples are given.

Key Words: 2-normed spaces, approximation theory, 2-Banach spaces, bounded 2-linear operators, 2-normed D -modul



Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ' e ve bu tezin oluşumunda ve yazılımında bana yardımcı olan bilgilerini benimle paylaşan, benden desteğini esirgemeyen ve kendisinden çok şey öğrendiğim Araş. Gör. Erkan AĞYÜZ'e ve çok kıymetli arkadaşım Ayşegül BECİT'e, kardeşim Zeynep POLAT'a ve bugünlere gelmemde en büyük destekçim olan maddi manevi her konuda arkamda olan ve beni destekleyen anneme, babama, kardeşlerime, arkadaşlarıma sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ	x
1. BÖLÜM	1
1.1. Giriş	1
2. BÖLÜM	3
Temel Tanım Ve Teoremler	3
2.1. Vektör Uzaylar	3
2.2. Normlu Uzaylar	7
3. BÖLÜM	15
3.1. 2-Normlu Uzaylar	15
4. BÖLÜM	27
4.1. 2-Normlu Küme Üzerinde Sınırlı 2-Lineer Operatörler	27
5. BÖLÜM	33
5.1. Hiperbolik Sayılar	33
5.2. 2-Normlu D -Modül	35
5.3. 2-Normlu D -Modül Üzerinde D -Lineer 2-Fonksiyonel	39
6. BÖLÜM	44
6.1. 2-Normlu Uzaylarda Yaklaşım	44
7. BÖLÜM	49
7.1. Genelleştirilmiş 2-Normlu Uzayların 2-Proximinal Altuzayı	49
KAYNAKLAR	54

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\bar{z}$	z karmaşık sayısının eşleniği
d	Metrik
$\ \cdot\ $	Norm
$\ S\ $	S nin operatör normu
S^{-1}	S fonksiyonun tersi
$(\cdot, \cdot)$	İç çarpım
$(X, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$\ \cdot, \cdot\ $	2-norm
$(X, \ \cdot, \cdot\)$	2-normlu uzay
$\ \cdot, \cdot\ _D$	2-normlu D -modül
$(X, \ \cdot, \cdot\ _D)$	2-normlu D -modül uzayı

1. BÖLÜM

1.1. GİRİŞ

1963 yılında S. Gähler 2-metrik olarak tanımladığı uzaylarla ilgili “2-Metrik Uzay ve Onların Topolojik Yapıları” başlıklı birkaç makalenin birincisini yayınladı. S. Gähler “2-Normlu Uzaylar” başlıklı doğrusal olan ve onlara 2-norm tanımını veren 2-metrik uzayın özel sınıfını inceleyen bir çalışma olan ikinci makaleyi birkaç yıl içinde yayınladı. 1963 yılından bu yana E. Z. Andalafte, Y.J. Cho, C. R. Diminnie R.E. Ehret, R. W. Freese, S. Gähler, K. Iseki, C. S. Lin, G. Murphy, M. Newton, A. White ve diğerleri 2-metrik uzayların geometrik yapısını ve 2-normlu lineer uzayları yoğun bir şekilde çalışıp geliştirdiler. Bu çalışmalar temel alınarak birçok matematikçi tarafından farklı çalışmalar yapıldı. Örneğin, 1999-2003 yılları arasında Lewandowska 2-normlu uzayları genelleştirdi. A. White, $X \rightarrow X$ üzerinde sınırlı lineer 2-fonksiyonel kavramını tanımladı ve geliştirdi. Buradaki X i 2-normlu gerçel lineer uzay olarak tanımladı. Ayrıca A. White 2-normlu gerçel lineer uzaylarda lineer 2-fonksiyonel için bir Hahn-Banach tipi teoremi kanıtladı. S. Elumalai ve R. Ravi 2-normlu lineer uzaylarda sınırlı lineer 2-fonksiyonellerin en iyi yaklaşım elemanlarının bazı karakterizasyonları hakkında çalıştılar. Zofia Lewandowska, Mohammad Sal Moslehian, Assieh Saadatpour Moghaddam 2-normlu uzayların Hahn-Banach teoreminin bir genişlemesi olduğunu kanıtladılar.

2-normlu uzaylar kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 1.1.1: X, K üzerinde lineer uzay olsun. Burada K gerçel ya da karmaşık sayılar cismidir. Kabul edelim ki, $\|.,.\|$, $X \times X$ üzerinde negatif olmayan gerçel değerli fonksiyon olsun. Her $a, b, c \in X$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere;

$$[2N1] \quad \|a, b\| \geq 0 \text{ ve } \|a, b\| = 0 \text{ ise } a \text{ ile } b \text{ lineer bağımlı,}$$

$$[2N2] \quad \|a, b\| = \|b, a\|,$$

$$[2N3] \quad \|\alpha a, b\| = |\alpha| \|a, b\|,$$

$$[2N4] \quad \|a, b+c\| \leq \|a, b\| + \|a, c\|,$$

şartlarını sağlayan $\|.,.\|$ fonksiyonuna **2-norm**, $(X, \|.,.\|)$ ikilisine **2-normlu lineer uzay** denir.

Bu tezde 2-normlu yapılar ve bu yapıların fonksiyonel analizdeki yansımaları çalışılmıştır.



2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde bahsi geçen temel tanım, teoremler ve örneklerle yer verilmiştir. Bu bölüm için genel tanım ve teoremler [1],[2] ve [3] numaralı referanslardan yararlanılarak verilmiştir.

2.1. VEKTÖR UZAYLAR

Tanım 2.1.1: X herhangi bir küme ve K bir cisim olsun. Eğer $X \times X$ den X e $(a,b) \rightarrow a+b$ toplama ve $(\alpha a, \alpha b) \rightarrow \alpha(a+b)$ skalerle çarpma fonksiyonları aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, X kümesi K cismi üzerinde bir **vektör uzayı** veya **lineer uzay** olarak adlandırılır.

Her $a,b,c \in X$ ve $s,t \in K$ için:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$,
2. $a+b = b+a$,
3. $\forall a \in X, a+0 = 0+a = a, 0 \in X$,
4. $\forall s \in K, \forall a \in X$ ve $a \neq 0, a+(-a) = (-a)+a, (-a) \in X$,
- a) $s(a+b) = sa+sb$,
- b) $(s+t)a = sa+ta$,
- c) $s(ta) = (st)a$,
- d) $1a = a1$

Herhangi bir vektör uzay $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı ise bu vektör uzayına bir **reel vektör uzayı** ve $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı ise bu vektör uzayına bir **karmaşık (kompleks) vektör uzayı** adı verilir.

Tanım 2.1.2: X, K cismi üzerinde herhangi bir vektör uzayı ve M, X uzayının bir alt kümesi olsun. Her $s \in K$ ve her $a,b \in M$ için,

$$a+b \in M \text{ ve } sa \in M$$

şartları sağlanıyorsa M kümesine X lineer uzayının alt uzayı denir ve bu iki şart $sa+tb \in M$ şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 2.1.3: $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n = 0$ olacak şekilde hepsi sıfır olmayan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sabitleri varsa X vektör uzayında bulunan $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörleri aralarında **lineer bağımlı** olarak adlandırılır. Aksi durumda $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörleri aralarında **lineer bağımsızdır** denir. Yani $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörleri aralarında lineer bağımsız ise

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n = 0$$

eşitliğinin doğruluğu

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$$

olması ile mümkündür. Şimdi $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ kümesi alınsın. $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörleri lineer bağımlı ise S **kümesine lineer bağımlı**, bu vektörler lineer bağımsız ise S **kümesine lineer bağımsız** denir.

Örnek 2.1.4: $\mathbb{R}$, gerçel sayı cismini gösterebilir ve

$$\mathbb{R}^n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) : 1 \leq i \leq n, s_i \in \mathbb{R}\}$$

dır. $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$(s_1, s_2, \dots, s_n) + (t_1, t_2, \dots, t_n) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots, s_n + t_n)$$

eşitliğiyle tanımlansın. Skalerle çarpma işlemi

$$\alpha(s_1, s_2, \dots, s_n) = (\alpha s_1, \alpha s_2, \dots, \alpha s_n)$$

kümesiyle tanımlansın. Böylece $\mathbb{R}^n$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Çözüm: Vektör uzayı tanımındaki önermelerin doğruluğu gösterilmelidir.

$s, t \in \mathbb{R}^n$ olsun. $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ve $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ biçimindedir. $\mathbb{R}^n$ kümesindeki toplama işlemine göre $s + t = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots, s_n + t_n)$ dir. $\mathbb{R}^n$ kümesi toplama işlemine göre kapalı olduğundan $s_i + t_i \in \mathbb{R}$ olacaktır. Buna göre $s + t \in \mathbb{R}^n$ olur. Dolayısıyla her $s, t \in \mathbb{R}^n$ için $s + t$ tanımlıdır ve bu eleman $\mathbb{R}^n$ kümesinin elemanıdır. Bu durum $\mathbb{R}^n$ kümesinin toplama işlemine göre kapalı olduğunu gösterir.

$s, t, v \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} (s + t) + v &= [(s_1, s_2, \dots, s_n) + (t_1, t_2, \dots, t_n)] + (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots, s_n + t_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= ((s_1 + t_1) + v_1, (s_2 + t_2) + v_2, \dots, (s_n + t_n) + v_n) \\ &= (s_1 + (t_1 + v_1), s_2 + (t_2 + v_2), \dots, s_n + (t_n + v_n)) \end{aligned}$$

olduğundan toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

$(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ deki her s elemanı için $s + (0, 0, \dots, 0) = s$ ve $(0, 0, \dots, 0) + s = s$ olduğundan $(0, 0, \dots, 0)$ elemanı toplama işlemine göre birim elemandır. Bu eleman 0 ile gösterilir.

$s \in \mathbb{R}^n$ ve $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ olsun. $(-s_1, -s_2, \dots, -s_n)$ elemanı da $\mathbb{R}^n$ uzayının bir elemanıdır ve bu eleman $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ elemanının toplama işlemine göre tersidir. s elemanının toplamaya göre tersi $-s$ ile gösterilir.

Her $s, t \in \mathbb{R}^n$ için,

$$s + t = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots, s_n + t_n) = (t_1 + s_1, t_2 + s_2, \dots, t_n + s_n) = t + s$$

olduğundan toplama işleminin değişme özelliği olduğu görülür. Bu nedenle $(\mathbb{R}^n, +)$ çifti değişmeli gruptur.

Şimdi, skalerle çarpma işleminin vektör uzay tanımındaki önermeleri gerçeklediği göz önüne alınacaktır.

$a \in \mathbb{R}$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ olsun. $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ biçimindedir. $as = (as_1, as_2, \dots, as_n)$ olacaktır. $\mathbb{R}$ kümesi toplama işlemine göre kapalı olduğundan $as_i \in \mathbb{R}$ olur. Böylece $as \in \mathbb{R}^n$ olur. Dolayısıyla her $a \in \mathbb{R}$ ve her $s \in \mathbb{R}^n$ için as çarpma tanımlıdır ve bu eleman $\mathbb{R}^n$ kümesinin elemanıdır. Bu durum skalerle çarpma işleminin, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ şeklinde bir işlem olduğunu gösterir. Bu durum “ $\mathbb{R}^n$ kümesi skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır” şeklinde de anlatılır.

1. Her $a \in \mathbb{R}$ ve $s, t \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} a(s+t) &= a(s_1+t_1, s_2+t_2, \dots, s_n+t_n) \\ &= (a(s_1+t_1), a(s_2+t_2), \dots, a(s_n+t_n)) \\ &= (as_1+at_1, as_2+at_2, \dots, as_n+at_n) \\ &= (as_1, as_2, \dots, as_n) + (at_1, at_2, \dots, at_n) \\ &= as + at \end{aligned}$$

olur.

2. Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u, v \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} (a+b)s &= ((a+b)s_1, (a+b)s_2, \dots, (a+b)s_n) \\ &= (as_1+bs_1, as_2+bs_2, \dots, as_n+bs_n) \\ &= (as_1, as_2, \dots, as_n) + (bs_1, bs_2, \dots, bs_n) \\ &= as + bs \end{aligned}$$

dir.

3. Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} (ab)s &= ((ab)s_1, (ab)s_2, \dots, (ab)s_n) \\ &= (a(bs_1), a(bs_2), \dots, a(bs_n)) \\ &= a(bs_1, bs_2, \dots, bs_n) \\ &= a(b(s_1, s_2, \dots, s_n)) = a(bs) \end{aligned}$$

olur.

4. $s \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} 1s &= 1(s_1, s_2, \dots, s_n) \\ &= (1s_1, 1s_2, \dots, 1s_n) = s \quad [1]. \end{aligned}$$

2.2. NORMLU UZAYLAR

Tanım 2.2.1: K gerçel veya karmaşık sayılar cismi ve X kümesi K cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$p: X \rightarrow \mathbb{R}$$

olarak tanımlanan aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyona, X vektör uzayı üzerinde bir *yarı-norm* adı verilir:

Her $a, b \in X$ ve her $\alpha \in K$ için,

- $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$ (alt-toplamsallık)
- $p(\alpha a) = |\alpha| p(a)$ (pozitif-homojenlik)

olup bu iki özelliğe ilave olarak,

- $a \neq 0 \Rightarrow p(a) \neq 0$

koşulu sağlanırsa, p fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir norm denir.

Önerme 2.2.2: Eğer p fonksiyonu X lineer uzayı üzerinde bir yarı-norm ise aşağıda verilen özellikler sağlanır:

- a. $|p(a) - p(b)| \leq p(a - b)$,
- b. $p(a) \geq 0$,
- c. $\{x = p(a) = 0\}$ kümesi X uzayının bir alt vektör uzayıdır.
- d. $B = \{a : p(a) < 1\}$ kümesi dış bükeydir.

İspat:

- a. $[N2]$ de $a = 0$ alınırsa istenilen eşitsizlik sağlanır.
- b. $[N1]$ de $p(a) = p(a - b + b) \leq p(a - b) + p(b)$ yazılır. Buradan,

$$p(a) - p(b) \leq p(a - b)$$

eşitsizliği elde edilir. a ile b yer değiştirirse,

$$p(b) - p(a) \leq p(b-a)$$

$[N2]$ koşulundan $p(a-b) = p(b-a)$ olur. O halde

$$|p(a) - p(b)| \leq p(a-b)$$

elde edilir.

c. $b=0$ alındığında (b) özelliğinden istenilen sonuç elde edilir.

d. $p(a) = p(b) = 0$ ve $\alpha, \beta \in K$ ise (c) özelliğinden

$$0 \leq p(\alpha a + \beta b) \leq |\alpha| p(a) + |\beta| p(b) = 0$$

bulunur. Buradan $\{a : p(a) = 0\}$ kümesinin bir altvektör uzayı olduğu gösterilmiş olur.

e. $\{a, b \in B\}$ ve $0 < \alpha < 1$ ise

$$p(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \alpha p(a) + (1-\alpha)p(b) < 1$$

olur.

Böylece, B kümesinin dış bükey olduğu gösterilir.

Tanım 2.2.3: Üzerinde norm fonksiyonu tanımlanan herhangi bir vektör uzayına *normlanmış bir uzay* denir. Bir vektör uzayının üzerindeki norm $\|\cdot\|$ simgesiyle gösterilir. Buna göre norm fonksiyonu

$$x \rightarrow \|x\|$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile normlanmış bir X vektör uzayı $(X, \|\cdot\|)$ çifti ile gösterilir.

Tanım 2.2.4: X , K cismi üzerinde lineer uzay olsun, burada bahsi geçen K gerçel ya da karmaşık sayılar cismidir. Kabul edelim ki, $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Her $a, b, c \in X$ ve $s \in K$ için,

$$[2N1] \quad \|a\| \geq 0 \text{ ve } \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$$

$$[2N2] \quad \|sa\| = |s|\|a\|$$

$$[2N3] \quad \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

şartlarını sağlayan $(X, \|\cdot\|)$ çiftine **normlu uzay** denir.

Tanım 2.2.5: $M(S)$ ve $N(S)$ vektör uzayları aynı cisim üzerinde olmak üzere

$$S: M(S) \rightarrow N(S)$$

şeklinde olan bu dönüşüme **operatör** denir. Bu operatör için her $x, y \in M(S)$ ve α skaler olmak üzere,

$$S(x+y) = S(x) + S(y)$$

$$S(\alpha x) = |\alpha|S(x)$$

koşullarını sağlıyorsa S ye **lineer operatör** denir. Değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar veya $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar olan operatörlere ise **fonksiyonel** denir [3].

Tanım 2.2.6: X ve Y iki normlu uzay ve $M(S) \subset X$ olmak üzere $S: M(S) \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in M(S)$ için

$$\|Sx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ reel sayısı varsa S operatörüne **sınırlı lineer operatör** denir. (Soldaki norm Y uzayındaki, sağdaki norm ise X uzayındaki normdur.) Bu eşitsizliği sağlayan c sayılarının en büyük alt sınırına S nin normu denir. Bu norm

$$\|S\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(S) \\ x \neq 0}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|}$$

eşitliği ile de gösterilir. X den X e olan bütün sınırlı lineer dönüşümlerin uzayı $B(X, X)$ veya $B(X)$ ile gösterilir. Bu durumda $B(X)$, $\|S\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|}$ ile normlu uzay olur [3].

Tanım 2.2.7: $S: M(S) \rightarrow Y$ lineer dönüşümü verilsin. Eğer tanım kümesindeki farklı noktaların S altındaki görüntüleri farklı yani $x_1, x_2 \in M(S)$, $x_1 \neq x_2$ ise $Sx_1 \neq Sx_2$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa S ye *injektif* veya **1-1** adı verilir. Bu durumda $Sx_0 = y_0$ eşitliği için her $y_0 \in N(S)$ elemanını $x_0 \in M(S)$ elemanına dönüştüren $S^{-1}: N(S) \rightarrow M(S)$ dönüşümü mevcuttur ve bu operatöre S nin *tersi* denir [3].

Tanım 2.2.8: $X \times Y: \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$ kümesi,

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y)\end{aligned}$$

işlemlerine göre bir vektör uzay ve $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ ile normlu uzaydır. $S: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer S operatörünün $G(S) = \{(x, y): x \in X, y \in S(x)\}$ grafiği, $X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise S ye *kapalı operatör* denir [3].

Tanım 2.2.9: X bir normlu uzay olsun. Bu durumda,

$$\|S\| = \sup_{\substack{x \in \varphi(S) \\ x \neq 0}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} |f(x)|$$

normu ile normlanan X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin teşkil ettiği normlu uzaya X uzayının *dual uzayı* denir ve X' ile gösterilir [3].

Lemma 2.2.10: $(X, \|\cdot\|)$, $\mathbb{C}$ üzerinde normlu bir uzay olsun. $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ise, her $a, b \in X$ için,

$$\begin{aligned}f(a+b) &= f(a) + f(b) \\ f(\alpha a) &= \alpha f(a)\end{aligned}$$

şartlarını sağlayan fonksiyonel olsun. Bu takdirde f nin lineer olması için gerek ve yeter şart her $a \in X$ için,

$$f(ia) = if(a)$$

dir.

İspat: f fonksiyonu lineer ise her $a \in X$ için $f(ia) = if(a)$ dir. Şimdi tersine, her $a \in X$ için $f(ia) = if(a)$ olsun. Her $a \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ keyfi sayısı verilsin. O halde $s, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda = s + it$ için,

$$\begin{aligned} f(\lambda a) &= f((s + it)a) = f(sa + t(ia)) = f(sa) + f(t(ia)) = sf(a) + tf(ia) \\ &= sf(a) + itf(a) = (s + it)f(a) = \lambda f(a) \end{aligned}$$

dir. Böylece, f fonksiyonu lineerdir.

Tanım 2.2.11: X herhangi bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu seçilsin. d fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa d ye X üzerinde bir **metrik** denir.

- i. Her $a, b \in X$ için $d(a, b) \geq 0$,
- ii. Her $a, b \in X$ için $d(a, b) = d(b, a)$,
- iii. $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,
- iv. Her $a, b, c \in X$ için $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$

koşullarını sağlayan ve üzerinde bir d metriği tanımlanmış olan X kümesi **metrik uzay** olarak adlandırılır ve (X, d) şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.12: d gerçel değerli bir fonksiyon ve X boştan farklı bir küme olsun. Eğer,

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

ise d fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir metriktir ve bu metrik **ayrık metrik** olarak adlandırılır.

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzayı ise,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

olacak şekilde bir metrik tanımlar. O halde bir normlu vektör uzayı tanımlı d metriği üzerinde her zaman bir metrik uzay olur.

Tanım 2.2.13: (X, d) metrik uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi seçilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n \geq N$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olmak üzere $N = N(\varepsilon)$ olacak şekilde N tam sayısı bulunuyorsa $\{x_n\}$ dizisi, x **noktasına yakınsıyor** denir.

Tanım 2.2.14: (X, d) metrik uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall m, n \in N$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ tam sayısı bulunuyorsa o halde bu $\{x_n\}$ dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Teorem 2.2.15: Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.2.16: X uzayında bulunan her Cauchy dizisi bir noktaya yakınsıyorsa (X, d) metrik uzayı **tam** olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.17: $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir vektör uzay olsun. Bu uzay tam ise bir **Banach uzayı** olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.18: X bir vektör uzay ve $X \times X$ den K ya tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan, skaler değerli, $(a, b) \rightarrow (a|b)$ fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir **iç çarpım** denir.

Her $a, b, c \in X$ ve $t \in K$ için, karmaşık eşlenik $\overline{(a|b)}$ şeklinde gösterilir:

- I. $(a|b) \geq 0$ ve $(a|b) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- II. $(a|b) = \overline{(b|a)}$
- III. $(a + b|c) = (a|c) + (b|c)$
- IV. $(ta|b) = t(a|b)$

üzerinde $(\cdot|\cdot)$ iç çarpımı ile tanımlanan X vektör uzayına bir **iç çarpım uzayı** adı verilir ve $(X, (\cdot|\cdot))$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.19: $(X, (\cdot|\cdot))$ bir iç çarpım uzayı olsun ve her $a, b \in X$ için,

$$|(a|b)| \leq \|a\| \|b\|$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart a ve b nin lineer bağımsız olmasıdır. Bu eşitsizlik **Cauchy-Schwartz eşitsizliği** olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.20: İç çarpımdan elde edilen norma göre bir iç çarpım uzayı tam oluyor ise bu uzay bir **Hilbert uzayı** olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.21: Eğer $(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayı ve bu vektör uzay bir iç çarpım uzayı ise bu norm Paralelkenar kuralını gerektirir ve X den seçtiğimiz her a, b için,

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

olur. Hatta Paralelkenar kuralı bir normlu vektör uzayda sağlanıyorsa bu uzaya **iç çarpım uzayı** denir.

Tanım 2.2.22: Herhangi bir X vektör uzayında C , bir alt küme ise $x, y \in C$, $t \in [0, 1]$ için $tx + (1-t)y \in C$ durumu sağlanıyor ise C **konveks** olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.23: X boştan farklı bir küme olsun. X in alt kümeler topluluğu τ ile gösterilsin. τ aşağıda verilen koşulları sağlıyor ise, τ , X kümesi üzerinde bir **topoloji** adını alır.

- $X, \emptyset \in \tau$,
- τ da herhangi bir ailenin birleşimi yine τ da bulunur,
- $O_1, O_2, \dots, O_m \in \tau$, $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_m \in \tau$.

Böylece (X, τ) çifti bir **topolojik uzay** olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.24: Herhangi bir $a \in X$ için, $a \in O$ olacak şekilde $O \in \tau$ kümesini ihtiva eden X in herhangi bir alt kümesine **a nın komşuluğu** adı verilir. Burada bulunan O , açık kümeyi göstermektedir.

Tanım 2.2.25: K cismi üzerinde bir X lineer uzayı olsun. X de bir τ topolojisine göre

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ ve } \bullet : O \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları sürekli ise bu X uzayı **lineer topolojik uzayı** veya **topolojik vektör uzayı** olarak adlandırılır. Böylece τ , X de bir **lineer topoloji** olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.26: X lineer topolojik uzayı üzerinde bir lineer topoloji varsa ve 0 (sıfır) ın her komşuluğu 0 ın bir konveks komşuluğunu ihtiva ediyorsa bu lineer topoloji *yerel konveks topoloji* olarak adlandırılır.



3. BÖLÜM

Bu bölümde, 2-norm ve onların bazı uzayları tanımlanmış, özel olarak 2-Banach uzaylarından bahsedilmiş ve bu uzayların temel özellikleri verilmiştir.

3.1. 2-NORMLU UZAYLAR

Tanım 3.1.1: X, K üzerinde lineer uzay olsun. Burada K gerçel ya da karmaşık sayılar cismidir. Kabul edelim ki, $\|.,.\|$, $X \times X$ üzerinde negatif olmayan gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Her $a, b, c \in X$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere;

$$[2N1] \quad \|a, b\| \geq 0 \text{ ve } \|a, b\| = 0 \text{ ise } a \text{ ile } b \text{ lineer bağımlı,}$$

$$[2N2] \quad \|a, b\| = \|b, a\|,$$

$$[2N3] \quad \|\alpha a, b\| = |\alpha| \|a, b\|,$$

$$[2N4] \quad \|a, b + c\| \leq \|a, b\| + \|a, c\|,$$

şartlarını sağlayan $\|.,.\|$ fonksiyonuna **2-norm**, $(X, \|.,.\|)$ ikilisine **2-normlu lineer uzay** denir [4].

Örnek 3.1.2: Derecesi n den küçük ve eşit olan $[0,1]$ aralığı üzerinde gerçel polinomlar kümesi P_n ile gösterilsin. P_n bilinen skalerle çarpma ve toplama işlemlerine göre gerçel sayılar kümesinde bir lineer vektör uzaydır. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $[0,1]$ de ayrık, sabitlenmiş noktalar olsun ve P_n kümesi üzerinde 2-norm,

$$\|f, h\| = \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Böylece $(P_n, \|.,.\|)$ çifti bir 2-normlu uzaydır.

Çözüm: [2N1] $f, h \in P_n$ olsun. Eğer f ve h lineer bağımlı ise $h = kf$ olur. Bu durumda $h' = kf'$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\|f, h\| &= \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k)| \\ &= \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)kf'(a_k) - f'(a_k)kf(a_k)| = 0\end{aligned}$$

olacaktır. Şimdi $\|f, h\| = 0$ ve $h \neq 0$ olsun.

$$\|f, h\| = \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k)| = 0$$

olur. Her $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$ için,

$$f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k) = 0$$

elde edilir. Sol taraf

$$P(a) = f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k)$$

olacak şekilde gösterilirse $P(a)$ polinomunun $2n$ tane sıfırı (kökü) vardır. Oysa ki bu problem $2n-1$ inci dereceden olarak alınmıştı. Bu durumda $P(a) = 0$ olur. O halde $fh' - f'h = 0$ dır. Diğer yandan

$$\left(\frac{f}{h}\right)' = \frac{fh' - f'h}{h^2} = 0$$

olduğundan $\frac{f}{h} = k$ (sabit) olur. Buradan $f = kh$ sonucu çıkar ve bu durumda f ve h lineer bağımlıdır.

[2N2] $f, h \in P_n$ olsun.

$$\begin{aligned}
\|f, h\| &= \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{2n} |-(f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k))| \\
&= \sum_{k=1}^{2n} |f'(a_k)h(a_k) - f(a_k)h'(a_k)| \\
&= \|h, f\|
\end{aligned}$$

dır.

[2N3] $f, h \in P_n$ ve $\alpha \in K$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
\|\alpha f, h\| &= \sum_{k=1}^{2n} |\alpha f(a_k)h'(a_k) - \alpha f'(a_k)h(a_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{2n} |\alpha (f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k))| \\
&= |\alpha| \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k)| \\
&= |\alpha| \|f, h\|
\end{aligned}$$

olur.

[2N4] $f, h, t \in P_n$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|f, h+t\| &= \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)(h(a_k)+t(a_k))' - f'(a_k)(h(a_k)+t(a_k))| \\
&= \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)h'(a_k) + f(a_k)t'(a_k) - f'(a_k)h(a_k) - f'(a_k)t(a_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{2n} |(f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k)) + (f(a_k)t'(a_k) - f'(a_k)t(a_k))| \\
&\leq \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)h'(a_k) - f'(a_k)h(a_k)| + \sum_{k=1}^{2n} |f(a_k)t'(a_k) - f'(a_k)t(a_k)| \\
&\leq \|f, h\| + \|f, t\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $(P_n, \|\cdot, \cdot\|)$ çifti 2-normlu uzaydır [4].

Örnek 3.1.3: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ çifti 2-normlu uzay olsun. $k, l, m \in X$ için,

$$\|k+m, l+m\| \leq \|k, l\| + \|l, m\| + \|m, k\|$$

olur.

Çözüm: Bunu göstermek için sadece [2N4] şartını kullanmak yeterlidir.

$$\begin{aligned} \|k+m, l+m\| &\leq \|k, l+m\| + \|m, l+m\| \\ &\leq \|k, l\| + \|k, m\| + \|m, l\| + \|m, m\| \\ &= \|k, l\| + \|l, m\| + \|m, k\| \end{aligned}$$

olduğundan istenilen sonuç gösterilmiş olur.

Tanım 3.1.4: 2-normlu X uzayında bir $\{a_n\}$ dizisi alınsın. $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|a_n - a_m, b\| = 0$, $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|a_n - a_m, c\| = 0$ olacak şekilde X de lineer bağımsız iki tane b ve c vektörleri bulunuyorsa $\{a_n\}$ dizisi b ve c ye göre bir **Cauchy dizisi** olarak adlandırılır [5].

Teorem 3.1.5: X , 2-normlu bir vektör uzayı olsun.

1. Eğer $\{a_n\}$ dizisi X 2-normlu uzayında s ve t ye göre bir Cauchy dizisi ise

$$\{\|a_n, s\|\} \text{ ve } \{\|a_n, t\|\}$$

gerçek Cauchy dizileridir.

2. Eğer 2-normlu X uzayında $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri s ve t ye göre Cauchy dizileri ve $\{\alpha_n\}$ bir gerçek Cauchy dizisi ise $\{a_n + b_n\}$ ve $\{\alpha_n a_n\}$ dizileri 2-normlu X uzayında Cauchy dizileridir.

İspat: [2N4] koşulundan,

$$\begin{aligned} \|a_n, s\| &= \|a_n + a_m - a_m, s\| \\ &\leq \|a_n - a_m, s\| + \|a_m, s\| \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\|a_n, s\| - \|a_m, s\| \leq \|a_n - a_m, s\|$$

olacaktır ve benzer olarak,

$$\|a_m, s\| - \|a_n, s\| \leq \|a_n - a_m, s\|$$

ya da

$$-\|a_n - a_m, s\| \leq \|a_n, s\| - \|a_m, s\|$$

elde edilir. Buradan,

$$\|a_n, s\| - \|a_m, s\| \leq \|a_n - a_m, s\|$$

eşitsizliğine ulaşılır. Varsayım gereği, $\{a_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|a_n, s\| - \|a_m, s\| \leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|a_n - a_m, s\| = 0$$

olur. Böylece $\{\|a_n, s\|\}$ bir gerçel Cauchy dizisidir. Benzer şekilde $\{\|a_n, t\|\}$ de bir gerçel Cauchy dizisidir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \|(a_n + b_n) - (a_m + b_m), s\| &= \|(a_n - a_m) - (b_n + b_m), s\| \\ &\leq \|(a_n - a_m), s\| + \|(b_n + b_m), s\| \end{aligned}$$

bulunur. Burada limite geçildiği zaman hipotezden dolayı sağ tarafın limiti 0 dır. Bundan dolayı eşitliğin sol tarafın limiti de 0 olacaktır. Benzer işlemler yapılarak

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|(a_n + b_n) - (a_m + b_m), t\|$$

sonucu elde edilir. Tanımdan X de $\{a_n + b_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Şimdi $\{\alpha_n a_n\}$ dizisi göz önüne alınacak olursa,

$$\begin{aligned} \|\alpha_n a_n - \alpha_m a_m, s\| &= \|(\alpha_n a_n - \alpha_n a_m) + (\alpha_n a_m - \alpha_m a_m), s\| \\ &\leq \|\alpha_n a_n - \alpha_n a_m, s\| + \|\alpha_n a_m - \alpha_m a_m, s\| \\ &= |\alpha_n| \|a_n - a_m, s\| + |\alpha_n - \alpha_m| \|a_m, s\| \\ &\leq k_1 \|a_n - a_m, s\| + k_2 |\alpha_n - \alpha_m| \end{aligned}$$

olur. Burada $\{\|a_n, s\|\}$ ve $\{\alpha_n a_n\}$ gerçel Cauchy dizisi olduklarından sınırlıdır. Bu sebepten dolayı ilk olarak $|\alpha_n| \leq k_1$ ve $\|a_m, s\| \leq k_2$ yazılır. Cauchy dizisi özelliğinden $\|a_n - a_m, s\| \rightarrow 0$ ve $|\alpha_n - \alpha_m| \rightarrow 0$ olur. Böylece sağ tarafın limiti 0 a gider. Buradan,

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\alpha_n a_n - \alpha_m a_m, s\| = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\alpha_n a_n - \alpha_m a_m, t\| = 0$$

olur. Böylece, $\{\alpha_n a_n\}$ dizisi 2-normlu X uzayında bir Cauchy dizisidir [5].

Tanım 3.1.6: 2-normlu X uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi olsun ve her $y \in X$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı bulunuyorsa, $\{x_n\}$ dizisine *yakınsak dizi* denir.

$\{x_n\}$ dizisi x e yakınsıyorsa $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir ve $\{x_n\}$ *dizisinin limiti x dir* denir.

Tanım 3.1.7: 2-normlu bir vektör uzayında her Cauchy dizisi yakınsak dizi ise bu uzay *2-Banach uzayı* olarak adlandırılır [5].

Teorem 3.1.8: X , 2-normlu uzay olsun.

- i. $a_n \rightarrow a$ ve $b_n \rightarrow b$ ise $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- ii. $a_n \rightarrow a$ ve $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ise $\alpha_n a_n \rightarrow \alpha a$
- iii. $\dim X \geq 2$, $a_n \rightarrow a$ ve $a_n \rightarrow b$ ise $a = b$

koşulları gerçekleşir.

İspat:

- i. $a_n \rightarrow a$ ve $b_n \rightarrow b$ ise,

$$\begin{aligned} \|(a_n + b_n) - (a + b), s\| &= \|(a_n - a) + (b_n - b), s\| \\ &\leq \|(a_n - a), s\| + \|(b_n - b), s\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Buradan $a_n + b_n \rightarrow a + b$ dir.

- ii. $a_n \rightarrow a$ ve $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ise,

$$\begin{aligned} \|\alpha_n a_n - \alpha a, s\| &= \|\alpha_n a_n - \alpha_n a + \alpha_n a - \alpha a, s\| \\ &\leq \|\alpha_n a_n - \alpha_n a, s\| + \|\alpha_n a - \alpha a, s\| \\ &= |\alpha_n| \|a_n - a, s\| + |\alpha_n - \alpha| \|a, s\| \\ &\leq k \|a_n - a, s\| + |\alpha_n - \alpha| \|a, s\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a, s\| = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n - \alpha\| = 0$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafının limiti 0 a gider. Böylece $\alpha_n a_n \rightarrow \alpha a$ olur.

iii. $\dim X \geq 2$, $a_n \rightarrow a$ ve $a_n \rightarrow b$ ise,

$$\begin{aligned} \|a - b, s\| &= \|(a_n - b) - (a_n - a), s\| \\ &\leq \|(a_n - b), s\| + \|(a_n - a), s\| \end{aligned}$$

olur. $a_n \rightarrow a$ ve $a_n \rightarrow b$ olduğundan her $s \in X$ için $\|a - b, s\| = 0$ dır. Her $s \in X$ için $a - b$ ve s lineer bağımlıdır. $\dim X \geq 2$ olduğundan $a - b$ nin tüm $s \in X$ vektörleriyle lineer bağımsız olabilmesi için tek şart $a - b = 0$ olmalıdır. Böylece $a = b$ elde edilir.

Örnek 3.1.9: $X = E^3$, üç boyutlu Öklid uzayı olsun. $a, b \in E^3$ olacak şekilde $a = xi + yj + zk$ ve $b = ui + vj + wk$ olsun. E^3 de 2-norm

$$\begin{aligned} \|a, b\| &= |a \times b| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \right| \\ &= |(yw - zv)i + (zu - xw)j + (xv - uy)k| \\ &= \left[(yw - zv)^2 + (zu - xw)^2 + (xv - uy)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $(E^3, \|\cdot, \cdot\|)$ çifti bir 2-Banach uzaydır.

Çözüm: $\|a, b\|$ fonksiyonunun 2-norm ve $(E^3, \|\cdot, \cdot\|)$ çiftinin 2-normlu uzay olduğu gösterilir. Şimdi $X = E^3$ ve $a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3)$ alındığında X uzayı üzerinde 2-norm,

$$\|a, b\| = |a \times b| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right|$$

olacak şekilde tanımlanır.

$[2N1]$ koşulundan $a, b \in X$, a, b lineer bağımlı olsun. Böylece bir $k \in K$ için $b = ka$ olur. Buradan,

$$b = (b_1, b_2, b_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda,

$$\|a, b\| = |a \times b| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \end{pmatrix} \right| = 0$$

olur.

Şimdi $\|a, b\| = 0$ olsun.

$$\|a, b\| = |a \times b| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right| = 0$$

olduğundan ve $k \in K$ için $b = ka$ olur. Böylece a ile b lineer bağımlıdır.

[2N2] koşulundan, $a, b \in X$ olsun,

$$\begin{aligned} \|a, b\| &= |a \times b| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| -\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \right| \\ &= |b \times a| = \|b, a\| \end{aligned}$$

olur.

[2N3] koşulundan $a, b \in X$ ve $\alpha \in K$ olsun.

$$\begin{aligned} \|\alpha a, b\| &= |\alpha a \times b| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \alpha \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\alpha| \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right| \\
&= |\alpha| \|a, b\|
\end{aligned}$$

bulunur.

[2N4] koşulunda, her $a, b, c \in X$ olsun,

$$\begin{aligned}
\|a, b+c\| &= |a \times (b+c)| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right| \\
&\leq \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right| + \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right| \\
&\leq \|a, b\| + \|a, c\|
\end{aligned}$$

elde edilir. 2-norm şartları sağlandığından $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ çifti 2-normlu uzaydır.

Şimdi, her Cauchy dizisinin 2-normlu lineer uzayda yakınsak dizi olduğu gösterilsin. Bunun için ilk olarak $a_n = x_n i + y_n j + z_n k$, E^3 de bir Cauchy dizisi alınsın. Böylece E^3 de $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |(a_n - a_m) \times b| = 0$ ve $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |(a_n - a_m) \times c| = 0$ olacak şekilde lineer bağımsız olan $b = ui + vj + wk$ ve $c = pi + rj + sk$ vektörleri elde edilir. Daha sonra $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ dizilerinin birer Cauchy dizisi oldukları aşağıdaki gibi gösterilir.

$$|(a_n - a_m) \times b| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_n - x_m & y_n - y_m & z_n - z_m \\ u & v & w \end{pmatrix} \right|$$

$$\left[[w(y_n - y_m) - v(z_n - z_m)]^2 + [u(z_n - z_m) - w(x_n - x_m)]^2 + [v(x_n - x_m) - u(y_n - y_m)]^2 \right]^{1/2}$$

Böylece her iki tarafın $n, m \rightarrow \infty$ için limitleri alındığında,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} |(a_n - a_m) \times b| = 0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha: \lim_{n,m \rightarrow \infty} [w(y_n - y_m) - v(z_n - z_m)] = 0$$

$$\beta: \lim_{n,m \rightarrow \infty} [u(z_n - z_m) - w(x_n - x_m)] = 0$$

$$\gamma: \lim_{n,m \rightarrow \infty} [v(x_n - x_m) - u(y_n - y_m)] = 0$$

olmasıdır. Benzer şekilde c vektörü için de benzer işlemler yapılırsa

$$|(a_n - a_m) \times c| = \left[\begin{aligned} &[s(y_n - y_m) - r(z_n - z_m)]^2 + [p(z_n - z_m) - s(x_n - x_m)]^2 \\ &+ [r(x_n - x_m) - p(y_n - y_m)]^2 \end{aligned} \right]^{1/2}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} |(a_n - a_m) \times c| = 0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\delta: \lim_{n,m \rightarrow \infty} [s(y_n - y_m) - r(z_n - z_m)] = 0$$

$$\varepsilon: \lim_{n,m \rightarrow \infty} [p(z_n - z_m) - s(x_n - x_m)] = 0$$

$$\varsigma: \lim_{n,m \rightarrow \infty} [r(x_n - x_m) - p(y_n - y_m)] = 0$$

olmasıdır. δ da her iki taraf $-w$ ile çarpılırsa

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} (-sw(y_n - y_m) + rw(z_n - z_m)) = 0$$

olur ve α da her iki taraf s ile çarpılırsa,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} (sw(y_n - y_m) - sv(z_n - z_m)) = 0$$

elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} ((rw - sv)(z_n - z_m)) = 0$$

sonucu bulunur. β da her iki taraf s ile çarpılırsa,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} (su(z_n - z_m) - sw(x_n - x_m)) = 0$$

olur ve ε da her iki taraf $-w$ ile çarpılırsa,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} (-pw(z_n - z_m) + sw(x_n - x_m)) = 0$$

elde edilir. Bu son iki eşitliğin taraf tarafa toplanması ile

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} ((su - pw)(z_n - z_m)) = 0$$

sonucu bulunur.

Şimdi $\{z_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığı kabul edilsin. Bu durumda $rw = sv$ ve $su = pw$ olur. Buradan $\frac{s}{w} = \frac{r}{v} = \frac{p}{u}$ eşitliği yazılır. Bu durum a ile b nin lineer bağımsız olmasından dolayı imkânsız olur. Sonuç olarak $\{z_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Benzer işlemlerle $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dizileri de birer Cauchy dizileridir. Gerçek sayıların tam olmasından dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ olacak şekilde x, y, z gerçel sayıları bulunur.

Kabul edelim ki, $a = xi + yj + zk$, $a_n \rightarrow a$ olsun. E^3 de bir eleman $m = di + ej + fk$ olarak seçilsin. O halde,

$$|(a_n - a) \times m| = \lim \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_n - x & y_n - y & z_n - z \\ d & e & f \end{pmatrix} \right|$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left[[f(y_n - y) - e(z_n - z)]^2 + [d(z_n - z) - f(x_n - x)]^2 + [e(x_n - x) - d(y_n - y)]^2 \right]^{1/2} = 0$$

olur. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ dir. Böylece $(E^3, \|\cdot, \cdot\|)$ bir 2-Banach uzayıdır [5].

Tanım 3.1.10: X ve Y birer lineer uzay ve $\emptyset \neq D \subset X \times Y$ olsun. $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için $D_x = \{y \in Y : (x, y) \in D\}$ ve $D^y = \{x \in X : (x, y) \in D\}$ kümeleri sırasıyla Y ve X in birer lineer altuzayı olsun.

$$\text{a) } \forall (x, y) \in D, \|x, \alpha y\| = \|\alpha x, y\|$$

$$\text{b) } \forall (x, y), (x, z) \in D, \|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$$

$$\text{c) } \forall (x, y), (y, z) \in D, \|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$$

şartlarını sağlayan $\|\cdot, \cdot\|: D \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna D üzerinde **genelleştirilmiş 2-normlu uzay** denir. Ayrıca, özel olarak $X = Y$ alınırsa $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ şeklinde gösterilen genelleştirilmiş 2-normlu uzay $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ olarak gösterilir. Genelleştirilmiş 2-normlu uzaylar sınıfı, bilinen normlu uzaylar sınıfından daha geniştir. Yani her normlu uzaydan genelleştirilmiş 2-normlu bir uzay oluşturulabilir.

Örneğin, $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(X, \|\cdot\|_2)$ birer normlu vektör uzay olsun. Böylece $\|x, y\| = \|x\|_1 \|y\|_2$ olacak şekilde $X \times Y$ üzerinde bir genelleştirilmiş 2-norm vardır ve ayrıca B bir Banach cebiri ve her $a, b \in B$ için $\|a, b\| = |ab|$ olmak üzere $(B, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş bir 2-normlu uzaydır.

Ayrıca, $X = X \times X$ ise $\|\cdot, \cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna X üzerinde **genelleştirilmiş simetrik 2-norm** denir. Genelleştirilmiş simetrik 2-norm aşağıda verilen özellikleri sağlar,

$(x, y), (x, z) \in X$ ve $\alpha \in K$ için,

- i. $\|x, y\| = \|y, x\|$
- ii. $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\| = \|\alpha x, y\|$
- iii. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

dir. Böylece $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ çifti genelleştirilmiş simetrik 2-normlu uzay olarak adlandırılır [6].

4. BÖLÜM

Bu bölümde 2-normlu bir kümeden, bir normlu uzayda sınırlı 2-lineer operatörlerin bazı özellikleri göz önüne alınmıştır. Bu bölüm için genel tanım ve teoremler [7] ve [8] numaralı referanslardan yararlanılarak verilmiştir.

4.1. 2-NORMLU KÜME ÜZERİNDE SINIRLI 2-LİNEER OPERATÖRLER

Bu bölümde X gerçel lineer uzay, $D \subseteq X \times X$, 2-normlu bir küme ve Y normlu bir uzay olsun.

Tanım 4.1.1: $F : D \rightarrow Y$ operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa 2- *lineer* olarak adlandırılır.

$$(1) \quad F(a+c, b+d) = F(a, b) + F(a, d) + F(c, b) + F(c, d) \quad a, c \in D^b \cap D^d \quad \text{ve} \\ a, b, c, d \in X$$

$$(2) \quad F(\alpha a, \beta b) = \alpha \beta F(a, b), \quad \alpha, \beta \in R, (a, b) \in D$$

Tanım 4.1.2: Eğer her $(a, b) \in D$ için $\|F(a, b)\| \leq K \|a, b\|$ olacak şekilde bu eşitsizliği sağlayacak bir K pozitif sayısı varsa 2- normlu F operatörüne *sınırlıdır* denir.

Tanım 4.1.3: F sınırlı bir operatör olsun. Eğer

$$\|F\| = \inf \{ K > 0 : \|F(a, b)\| \leq K \|a, b\|, (a, b) \in D \}$$

sayısı varsa bu sayı 2- *lineer F operatörünün bir normu* olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.4: $(X, \langle .. \rangle)$ gerçel iç çarpım uzayı olarak alınsın ve $\|x, y\| = |\langle x, y \rangle|$, her $x, y \in X$ ile tanımlanan 2- norm ile X uzayı genelleştirilmiş 2- normlu uzaydır.

Bir $F : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ operatörü her $x, y \in X$ için $F(a, b) = \langle a, b \rangle$ şeklinde tanımlanırsa F operatörü 2- lineer ve sınırlıdır. Hatta burada, $\|F\|=1$ dir.

Teorem 4.1.5: Eğer F , sınırlı 2- lineer operatör ise bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $\|F\| \leq K; K \in P^{(F)} = \{K' > 0 \mid \|F(a, b)\| \leq K' \|a, b\|, (a, b) \in D\}$
- b) $\|F(a, b)\| \leq \|F\| \|a, b\|, \forall (a, b) \in D$
- c) $\|F\| = \sup \{\|F(a, b)\| : (a, b) \in D, \|a, b\| = 1\}$

$$= \sup \{\|F(a, b)\| : (a, b) \in D, \|a, b\| \leq 1\}$$

$$= \sup \left\{ \frac{\|F(a, b)\|}{\|a, b\|} : (a, b) \in D, \|a, b\| \neq 0 \right\}$$

İspat:

- a) Teorem 4.1.5 in (a) koşulu Tanım 4.1.2 den görülür.
- b) F - sınırlı olduğundan dolayı, $K > 0$ olacaktır. O halde,

$$\|F(a, b)\| \leq K \|a, b\|, (a, b) \in D$$

olur. Bu durumda, $\|F(a, b)\| \leq \inf_{K' \in P^{(F)}} K' \|a, b\|$ olup

$$\|F(a, b)\| \leq \|F\| \|a, b\|$$

eşitsizliği elde edilir.

- b) şartından dolayı (c) koşulu,

$$\sup \left\{ \frac{\|F(a, b)\|}{\|a, b\|} : (a, b) \in D, \|a, b\| \neq 0 \right\} \leq \|F\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $A = \sup \{\|F(a, b)\| : (a, b) \in D, \|a, b\| = 1\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
A &= \sup \left\{ \frac{\|F(a,b)\|}{\|a,b\|} : (a,b) \in D, \|a,b\| = 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \frac{\|F(a,b)\|}{\|a,b\|} : (a,b) \in D, \|a,b\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \frac{\|F(a,b)\|}{\|a,b\|} : (a,b) \in D, \|a,b\| \neq 0 \right\} \\
&\leq \|F\|
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$A \leq \sup \{ \|F(a,b)\| : (a,b) \in D, \|a,b\| \leq 1 \}$$

olduğu görülür.

Şimdi $(a,b) \in D$ olsun. Öyle ki, $\|a,b\| \neq 0$ olacaktır. Çünkü $\left\| \frac{a}{\|a,b\|}, b \right\| = 1$ dir.

Böylece $\left\| F \left(\frac{a}{\|a,b\|}, b \right) \right\| \leq A$ sonucuna ulaşılır. Bu eşitliklerden dolayı,

$$\left\| F \left(\frac{a}{\|a,b\|}, b \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|a,b\|} \cdot F(a,b) \right\| = \frac{1}{\|a,b\|} \|F(a,b)\|$$

tanımlanır ki bu da $\|F(a,b)\| \leq A\|a,b\|$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan $(a,b) \in D$ ve $\|a,b\| = 0$ oluyorsa $0 \leq \|F(a,b)\| \leq \|F\|\|a,b\| = 0$ eşitsizliği ve $\|F(a,b)\| = 0 = A\|a,b\|$ eşitliği elde edilir.

Sonuç olarak, her $(a,b) \in D$ için $\|F(a,b)\| \leq A\|a,b\|$ dir ki bunun anlamı $A \in P^{(F)}$ olmasıdır. (a) koşulu gereği

$$\|F\| \leq A$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\|F\| &= \sup\{\|F(a,b)\| : (a,b) \in D, \|a,b\|=1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|a,b\|} : (a,b) \in D, \|a,b\| \neq 0\right\}\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\|F\| = \sup\{\|F(a,b)\| : (a,b) \in D, \|a,b\| \leq 1\}$ ve (b) koşulundan

$$\sup\{\|F(a,b)\| : (a,b) \in D, \|a,b\| \leq 1\} \leq \|F\|$$

yazılır.

Tanım 4.1.6: Y bir normlu uzay ve $D \subset X \times X$, 2- normlu küme olsun. $L_2(D, Y)$ ile D den Y içine olan tüm sınırlı 2- lineer operatörlerden oluşan küme göz önüne alınsın. Özel olarak X genelleştirilmiş 2- normlu uzay olursa $L_2(X, Y)$ ile gösterilir. Şimdi $F, G \in L_2(D, Y)$ olsun. $L_2(D, Y)$ üzerinde,

- $(F + G)(a, b) = F(a, b) + G(a, b), \forall (a, b) \in D$
- $(\alpha F)(a, b) = \alpha F(a, b), \forall \alpha \in \mathbb{R}, (a, b) \in D$

işlemleriyle $L_2(D, Y)$ bir vektör uzayıdır.

Teorem 4.1.7: 2- normlu bir D kümesinden bir Y normlu uzayı içine olan tüm sınırlı 2- lineer operatörlerden meydana gelen $L_2(D, Y)$ kümesi vektör uzayının kendisi de $\|F\| = \inf\{K > 0 : \|F(a,b)\| \leq K\|a,b\|, (a,b) \in D\}$ ile tanımlanan norma göre bir normlu uzayıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Tanım 4.1.3 den açıktır.

Teorem 4.1.8: D , 2- normlu bir küme ve Y bir Banach uzayı ise $L_2(D, Y)$ bir Banach uzayıdır.

İspat: Teorem 4.1.7 den $L_2(D, Y)$ bir normlu uzayıdır. Eğer $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, $L_2(D, Y)$ içindeki bir Cauchy dizisi ise $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|F_n - F_m\| = 0$ ve her $(a,b) \in D$ için

$$\|F_n(a,b) - F_m(a,b)\| = \|(F_n - F_m)(a,b)\| \leq \|F_n - F_m\| \|a,b\|$$

eşitsizliği doğru olacaktır. Böylece her $(a,b) \in D$ için $\{F_n(a,b): n \in \mathbb{N}\}$, Y içinde bir Cauchy dizisi olur. Y tam olduğundan her $(a,b) \in D$ için $\{F_n(a,b): n \in \mathbb{N}\}$ dizisi yakınsak olacaktır.

$$F(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a,b)$$

olsun. Şimdi $F \in L_2(D,Y)$ olduğu gösterilsin. $a,c \in D^b \cap D^d$ olmak üzere $a,b,c,d \in X$ için,

$$\begin{aligned} F(a+c,b+d) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a+c,b+d) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a,b) + \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a,d) + \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(c,b) + \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(c,d) \\ &= F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d). \end{aligned}$$

Ayrıca $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $(a,b) \in D$ için aşağıda verilen eşitlikler doğrulanır.

$$F_n(\alpha a, \beta b) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha a, \beta b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \beta F_n(a,b) = \alpha \beta \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a,b) = \alpha \beta F(a,b)$$

Böylece F , bir 2-lineer operatördür. $\|F_n\| - \|F_m\| \leq \|F_n - F_m\|$ eşitsizliği ile $\{\|F_n\|: n \in \mathbb{N}\}, \mathbb{R}$ içine bir Cauchy dizisidir. Sonuç olarak, $\{\|F_n\|: n \in \mathbb{N}\}$ dizisi sınırlıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|F_n\| \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ pozitif sayısı vardır. $\{\|F_n\|: n \in \mathbb{N}\}$ dizisinin sınırlılığını kullanarak,

$$\begin{aligned} \|F(a,b)\| &\leq \|F_n(a,b)\| + \|F(a,b) - F_n(a,b)\| \leq \|F_n\| \|a,b\| + \|F(a,b) - F_n(a,b)\| \\ &\leq K \|a,b\| + \|F_n(a,b) - F(a,b)\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken her $(a,b) \in D$ için $\|F(a,b)\| \leq K \|a,b\|$ olacaktır, bu da F nin sınırlı olduğunu gösterir. Yani, $F \in L_2(D,Y)$ olur.

Şimdi kabul edelim ki, $(a,b) \in D$ ve $\|a,b\| \neq 0$, $\varepsilon > 0$ olsun. $\{\|F_n\|: n \in \mathbb{N}\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n, m \geq n_0$ için $\|F_n - F_m\| < \frac{\varepsilon}{4}$ olur. Burada her $n, m \geq n_0$ için,

$$\|F_n(a,b) - F_m(a,b)\| \leq \|F_n - F_m\| \|a,b\| < \frac{\varepsilon}{4} \|a,b\|$$

elde edilir. O halde

$$F(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a,b)$$

eşitliği için, $\|F_{n_1}(a,b) - F(a,b)\| < \frac{\varepsilon}{4} \|a,b\|$ olacak şekilde $n_1 = n_1(a,b) \geq n_0$ vardır.

$n \geq n_0$, $(a,b) \in D$ ve $\|a,b\| \neq 0$ için,

$$\begin{aligned} \|F_n(a,b) - F(a,b)\| &\leq \|F_n(a,b) - F_{n_1}(a,b)\| + \|F_{n_1}(a,b) - F(a,b)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} \|a,b\| + \frac{\varepsilon}{4} \|a,b\| = \frac{\varepsilon}{2} \|a,b\| \end{aligned}$$

olacaktır. Eğer $\|a,b\| = 0$ ise $F_n(a,b) = 0 = F(a,b)$ olur. Bu durumda,

$$\|F_n(a,b) - F(a,b)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|a,b\|$$

dir. Buradan her $n \geq n_0$, $(a,b) \in D$ için,

$$\|F_n(a,b) - F(a,b)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|a,b\|$$

dir. Yani $n \geq n_0$ için $\frac{\varepsilon}{2} \in P^{(F_n - F)}$ olacaktır. Sonuç olarak $n \geq n_0$ için $\|F_n - F\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

olur ki bu da $L_2(D, M)$ içinde $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi F ye yakınsak demektir. Böylece

$L_2(D, Y)$ bir Banach uzayıdır.

5.BÖLÜM

Bu bölümde D -değerli modüller üzerinde D -değerli 2-normdan bahsedilecektir. Tezin bu bölümü için temel tanım ve teoremler [9] numaralı referanstan yararlanılarak ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir

5.1. HİPERBOLİK SAYILAR

Hiperbolik sayılar halkası olarak D halkası,

$$D = \{a + kb \mid a, b \in \mathbb{R}, k^2 = 1, k \notin \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir. Şimdi $z = a + kb$ olsun. z üzerinde $\dagger$ -ters

$$z^\dagger = a - kb$$

olarak tanımlanır. D üzerinde $\dagger$ -ters te bilinen toplama ve çarpma işlemleri tanımlıdır. Eğer $zz^\dagger = a^2 - b^2 \neq 0$ ise $z = a + kb$ hiperbolik sayısı terslenebilir. $z \in D$ nin tersi

$$z^{-1} = \frac{z^\dagger}{zz^\dagger}$$

olarak elde edilir. a ve b nin her ikisi de sıfırdan farklı fakat $a^2 - b^2 = 0$ ise z , D de bir sıfır bölendir. NC_D olarak tanımlanan D nin bütün sıfır bölenlerinin kümesi,

$$NC_D = \{z = a + kb \mid z \neq 0, zz^\dagger = a^2 - b^2 = 0\}$$

şeklinde ifade edilir.

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + k)$$

ve onun $\dagger$ -tersi

$$e_1^\dagger = e_2 = \frac{1}{2}(1 - k)$$

olarak alındığında hiperbolik sayıların D halkası bir bölme halkası değildir. Burada $e_1 e_2 = 0$ olduğundan e_1 ve e_2 , D de birer sıfır bölendir. e_1 ve e_2 birbirini

tamamlayan denkgüçlü bileşenlerdir. Aynı zamanda onlar hiperbolik sayıların denkgüçlü bazını oluştururlar. Böylece her $z = a + kb$ hiperbolik sayısı D de

$$z = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 \quad (5.1)$$

olarak yazılır. Burada $\alpha_1 = a + b$ ve $\alpha_2 = a - b$ birer gerçel sayıdır. (5.1) eşitliği hiperbolik sayıların denkgüçlü gösterimidir. Ayrıca e_1D ve e_2D kümeleri D halkasının idealidir. Öyle ki $e_1D \cap e_2D = \{0\}$ ve $e_1D + e_2D = D$ dir. Böylece,

$$D = e_1D + e_2D \quad (5.2)$$

şeklinde ifade edilir. (5.2) eşitliği D nin denkgüçlü ayrışmasıdır. Burada toplama, çarpma, terslenebilir gibi cebirsel işlemler yapılabilir.

Negatif olmayan hiperbolik sayıların kümesi

$$D^+ = \{e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca her $z, u \in D$ için $u - z \in D^+$ olduğunda $z \leq' u$ yazılır ve bu tanım D üzerinde kısmi mertebe tanımlar. Böylece, $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq'$, $\leq$ in kısıtlanışıdır. Eğer, $A \subset D$ ise yukarıda bahsedilenlerden dolayı D -sınırlıdır. A nın D -supremumu $A_1 = \{a_1 : e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 \in A\}$ ve $A_2 = \{a_2 : e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 \in A\}$ olduğundan,

$$\sup_D A = e_1 \sup A_1 + e_2 \sup A_2$$

şeklinde yazılır. D -infumum tanımı da benzer şekilde yapılır.

Her $z = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 \in D$ için D üzerinde hiperbolik değerli modül

$$|z|_k = |e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2|_k = e_1|\alpha_1| + e_2|\alpha_2| \in D^+$$

şeklindedir. $|\alpha_1|$ ve $|\alpha_2|$ sırasıyla α_1 ve α_2 gerçel sayılarının modülüdür.

X , D -modül olsun.

$$X_1 = e_1X \text{ ve } X_2 = e_2X \quad (5.3)$$

kümeleri alınsın. O zaman

$$X_1 \cap X_2 = \{0\}$$

$$X = e_1X + e_2X$$

X_1 ve X_2 gerçel lineer uzaydır hem de D -modülüdür. (5.3) eşitliği X in denkgüçlü ayrışmasıdır. Böylece her $x \in X$ için $x_1 \in X_1$ ve $x_2 \in X_2$ olmak üzere

$$x = e_1x_1 + e_2x_2$$

şeklinde yazılır.

Ayrıca U ve W herhangi iki gerçel uzaysa $X = e_1U + e_2W$ D -modüldür.

NC_X tarafından tanımlanan X de sıfır bölenlerin kümesi,

$$NC_X = \{0 \neq z \in X : z \in e_1X_1 \cup e_2X_2\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.1.1: X bir D -modül ve $\|\cdot\|_D : X \rightarrow D^+$ olsun, $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in D$ için,

- i. $\|x\|_D = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii. $\|\alpha x\|_D = |\alpha|_k \|x\|_D$,
- iii. $\|x + y\|_D \leq \|x\|_D + \|y\|_D$

$\|\cdot\|_D$, hiperboliktir ya da X üzerinde ***D-değerli normdur*** denir.

5.2. 2-NORMLU D-MODÜL

Bu bölümde hiperbolik ya da bir başka deyişle D -değerli modüller üzerinde D -değerli 2-normdan bahsedilecektir.

Tanım 5.2.1: X , D -modül olsun.

$$\|\cdot, \cdot\|_D : X \times X \rightarrow D$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in D$ için $\|x, y\|_D = 0 \Leftrightarrow x, y$, lineer bağımlı,

- i. $\|x, y\|_D = \|y, x\|_D$
- ii. $\|\alpha x, y\|_D = |\alpha|_k \|x, y\|_D$
- iii. $\|x + y, z\|_D \leq \|x, z\|_D + \|y, z\|_D$

şartları sağlıyorsa $\|\cdot, \cdot\|_D$ ye X üzerinde ***D-değerli 2-norm*** denir. $(X, \|\cdot, \cdot\|_D)$ çiftine de ***2-normlu D-modül*** denir.

Ayrıca her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in D$ için $\|x, y\|_D \in D^+$ ve $\|x, y + \alpha x\|_D = \|x, y\|_D$ olur.

Uyarı 5.2.2: X_1 ve X_2 keyfi iki lineer gerçel uzay olsun. 2 normları $\|.,.\|_1$ ve $\|.,.\|_2$ olarak alınsın ve sırasıyla $\dim(X_1) > 1$ ve $\dim(X_2) > 1$, $X = e_1 X_1 + e_2 X_2$ olsun. X , D -modül olduğundan $\dim(X) > 1$ olur.

$x = e_1 x_1 + e_2 x_2 \in X$ ve $y = e_1 y_1 + e_2 y_2 \in X$ için,

$$\|x, y\|_D = \|e_1 x_1 + e_2 x_2, e_1 y_1 + e_2 y_2\|_D = e_1 \|x_1, y_1\|_1 + e_2 \|x_2, y_2\|_2$$

olarak tanımlanır. Bu eşitlik X üzerinde D -değerli 2-normlu olup aşağıdaki eşitlikleri sağladığı gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \|x, y\|_D = 0 &\Leftrightarrow e_1 \|x_1, y_1\|_1 + e_2 \|x_2, y_2\|_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x_1, y_1\|_1 = 0 \text{ ve } \|x_2, y_2\|_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1, y_1 \text{ lineer bağımlı ve } x_2, y_2 \text{ lineer bağımlı,} \\ &\Leftrightarrow x, y \text{ lineer bağımlı} \end{aligned}$$

ve değişme özelliğinden,

$$\|x, y\|_D = \|y, x\|_D$$

dir. Ayrıca, her $\alpha \in D$ için,

$$\begin{aligned} \|\alpha x, y\|_D &= \|(e_1 \alpha_1 + e_2 \alpha_2)(e_1 x_1 + e_2 x_2), e_1 y_1 + e_2 y_2\|_D \\ &= \|e_1 (\alpha_1 x_1) + e_2 (\alpha_2 x_2), e_1 y_1 + e_2 y_2\|_D \\ &= e_1 |\alpha_1| \|x_1, y_1\|_1 + e_2 |\alpha_2| \|x_2, y_2\|_2 \\ &= (e_1 |\alpha_1| + e_2 |\alpha_2|) (e_1 \|x_1, y_1\|_1 + e_2 \|x_2, y_2\|_2) \\ &= |\alpha|_k \|x, y\|_D \end{aligned}$$

olur. Her $x, y, z \in X$ olsun. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \|x + y, z\|_D &= \|(e_1 x_1 + e_2 x_2) + (e_1 y_1 + e_2 y_2), e_1 z_1 + e_2 z_2\|_D \\ &= \|e_1 \|x_1, y_1\|_1 + e_2 \|x_2, y_2\|_2, e_1 z_1 + e_2 z_2\|_D \\ &= e_1 \|x_1 + y_1, z_1\|_1 + e_2 \|x_2 + y_2, z_2\|_2 \\ &\leq e_1 (\|x_1, z_1\|_1 + \|y_1, z_1\|_1) + e_2 (\|x_2, z_2\|_2 + \|y_2, z_2\|_2) \\ &= (e_1 \|x_1, z_1\|_1 + e_2 \|x_2, z_2\|_2) + (e_1 \|y_1, z_1\|_1 + e_2 \|y_2, z_2\|_2) \\ &= \|x, z\|_D + \|y, z\|_D \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.2.3: X , 2 normlu D -modül olsun. $e_1 X$ ve $e_2 X$ 2-normlu gerçel uzaylardır. O halde bu normlar X üzerinde D -değerli 2-normdur.

İspat: $\|\cdot, \cdot\|_D : X \times X \rightarrow D$, X üzerinde D -değerli 2-norm olsun.

$$\|x, y\|_D = e_1\phi(x, y) + e_2\varphi(x, y), \forall (x, y) \in X \times X$$

$\phi, \varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ gerçel değerli fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} e_1\phi(e_1x, e_1y) + e_2\varphi(e_1x, e_1y) &= \|e_1x, e_1y\|_D = e_1\|e_1x, e_1y\|_D \\ &= e_1(e_1\phi(e_1x, e_1y)) + e_2\varphi(e_1x, e_1y) \\ &= e_1\phi(e_1x, e_1y) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $\varphi(e_1x, e_1y) = 0$ ve $\|e_1x, e_1y\|_D = e_1\phi(e_1x, e_1y)$ dir. Benzer şekilde

$\varphi(e_1x, e_1y) = 0$ ve $\|e_2x, e_2y\|_D = e_2\varphi(e_1x, e_1y)$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \|x, y\|_D &= e_1\|x, y\|_D + e_2\|x, y\|_D = e_1\|e_1x, y\|_D + e_2\|e_2x, y\|_D \\ &= e_1\|y, e_1x\|_D + e_2\|y, e_2x\|_D = \|e_1y, e_1x\|_D + \|e_2y, e_2x\|_D \\ &= \|e_1x, e_1y\|_D + \|e_2x, e_2y\|_D \\ &= e_1\phi(e_1x, e_1y) + e_2\varphi(e_2x, e_2y) \end{aligned} \tag{5.4}$$

olur. Her $x, y \in X$ için,

$$e_1\phi(e_1x, e_1y) = \|e_1x, e_1y\|_D = \|e_1y, e_1x\|_D = e_1\phi(e_1y, e_1x)$$

ifadesine ulaşılır. O halde

$$\phi(e_1x, e_1y) = \phi(e_1y, e_1x)$$

dir. Benzer işlemler yapıldığında

$$\varphi(e_2x, e_2y) = \varphi(e_2y, e_2x)$$

olacağı açıktır.

Şimdi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $x, y \in X$ için,

$$\|\lambda x, y\|_D = |\lambda|_k \|x, y\|_D$$

dir. Buradan,

$$e_1\phi(\lambda e_1x, e_1y) + e_2\varphi(\lambda e_2x, e_2y) = |\lambda| e_1\phi(e_1x, e_1y) + |\lambda| e_2\varphi(e_2x, e_2y)$$

elde edilir. Böylece,

$$\phi(\lambda e_1x, e_1y) = |\lambda| \phi(e_1x, e_1y) \text{ ve } \varphi(\lambda e_2x, e_2y) = |\lambda| \varphi(e_2x, e_2y)$$

olur.

Üçgen eşitsizliğini göstermek için, her $x, y, z \in X$ olsun. Öyle ki,

$$\|x + y, z\|_D \leq \|x, z\|_D + \|y, z\|_D$$

olmalıdır. (5.4) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & e_1\phi(e_1x+e_1y, e_1z) + e_2\varphi(e_2x+e_2y, e_2z) \\ & \leq e_1\phi(e_1x, e_1z) + e_1\phi(e_1y, e_1z) + e_2\varphi(e_2x, e_2z) + e_2\varphi(e_2y, e_2z) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \phi(e_1x+e_1y, e_1z) & \leq \phi(e_1x, e_1z) + \phi(e_1y, e_1z) \\ \varphi(e_2x+e_2y, e_2z) & \leq \varphi(e_2x, e_2z) + \varphi(e_2y, e_2z) \end{aligned}$$

olup üçgen eşitsizliği gösterilmiş olur.

Sonuç olarak, $\phi(e_1x, e_1z) = 0$ olması için gerek ve yeter şart e_1x ve e_1y nin lineer bağımlı olmasıdır. Benzer şekilde φ içinde aynı işlemler yapılabilir. $\phi(e_1x, e_1y) = 0$ varsayımı ile $e_1\phi(e_1x, e_1z) = 0$ olur. Böylece $\|e_1x, e_1y\|_D = 0$ dır. $\|.,.\|_D$ X üzerinde 2-normdur ve e_1x ve e_1y lineer bağımlıdır.

Tersine, kabul edelim ki $x, y \in X$, e_1x ve e_1y lineer bağımlı olsun.

$$\begin{aligned} \|x, y\|_D & = e_1\|x, y\|_D + e_2\|x, y\|_D = \|e_1x, e_1y\|_D + \|e_2x, e_2y\|_D \\ & = \|e_2x, e_2y\|_D = e_2\varphi(e_2x, e_2y) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada, (5.4) denklemi kullanılarak $\phi(e_1x, e_1y) = 0$ sonucuna varılır. Benzer şekilde φ için benzer işlemler yapılabilir. Böylece ϕ , e_1X gerçel lineer uzayı üzerinde ve φ , e_2X gerçel lineer uzayı üzerinde 2-normdur.

Tanım 5.2.4: Eğer $x_0 \in A$ ise ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0, y\|_D = 0, \forall y \in X \text{ için,}$$

limiti varsa $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine bir X 2-normlu D -modülünde D -değerli 2-norma bağlı $\|.,.\|_D$ bir yakınsak dizi denir.

Uyarı 5.2.5: Önerme 5.2.3 kullanılarak, $\|.,.\|_\ell$, $e_\ell X$ gerçel lineer uzayı üzerinde 2-normdur ($\ell = 1, 2$). Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0, y\|_D = 0, \forall y \in X \text{ için,}$$

$\|.,.\|_D = e_1\|.,.\|_1 + e_2\|.,.\|_2$ yazılır. Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_\ell x_n - e_\ell x_0, e_\ell y\|_D = 0, \forall e_\ell y \in e_\ell X, \ell = 1, 2 \text{ için}$$

olduğu görülür.

$\{e_1 x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $e_1 X$ de $e_1 x_0$ a yakınsak dizi ve $\{e_2 x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $e_2 X$ de $e_2 x_0$ a yakınsak dizidir.

5.3. 2-NORMLU D -MODÜL ÜZERİNDE D -LİNEER 2-FONKSİYONEL

Bu bölümde 2-normlu D -modül üzerinde D -değerli lineer 2-fonksiyonelden bahsedilecektir.

X , D -modül ve M ve N , X in iki alt modülü olsun. $f : M \times N \rightarrow D$ fonksiyonu $M \times N$ üzerinde D -değerli lineer 2-fonksiyonel denir.

Tanım 5.3.1: f , $M \times N$ üzerinde D -değerli lineer 2-fonksiyonel olsun. Her $\alpha, \beta \in D$, her $x, y \in M$ ve her $z, w \in N$ için,

- i. $f(x + y, z + w) = f(x, z) + f(y, z) + f(x, w) + f(y, w)$
- ii. $f(\alpha x, \beta z) = \alpha \beta f(x, z)$

koşulları sağlanıyorsa f , $M \times N$ üzerinde D -lineer 2-fonksiyonel olarak adlandırılır. Ayrıca, burada X üzerinde x ve y nin lineer bağımlı olduğu görülür. $(x, y) \in M \times N$ için $f(x, y) = 0$, $f : M \times N \rightarrow D$, D -lineer 2-fonksiyonel olsun. $\forall x, z \in M \times N$, $\phi(x, z) \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, z) \in \mathbb{R}$, $f_1(x, z) \in \mathbb{R}$ ve $f_2(x, z) \in \mathbb{R}$ ile $f_1 = \phi + \varphi$ ve $f_2 = \phi - \varphi$ için,

$$f(x, z) = \phi(x, z) + k\varphi(x, z) = e_1 f_1(x, z) + e_2 f_2(x, z) \quad (5.5)$$

olarak yazılır. $M_{\mathbb{R}}$ ve $N_{\mathbb{R}}$ X in gerçel lineer altuzayı olduğunda $f_1, f_2 : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ gerçel lineer 2-fonksiyonel olduğu gösterilir.

$\alpha = \alpha_1 + k\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + k\beta_2 \in D$ ile $x, y \in M$ ve $z, w \in N$ alınır,

$$f(x + y, z + w) = e_1 f_1(x + y, z + w) + e_2 f_2(x + y, z + w)$$

olur. Bu eşitlikten,

$$f(x, z) + f(y, z) + f(x, w) + f(y, w) = e_1 f_1(x + y, z + w) + e_2 f_2(x + y, z + w)$$

elde edilir. O halde gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} e_1 (f_1(x, z) + f_1(y, z) + f_1(x, w) + f_1(y, w)) + e_2 (f_2(x, z) + f_2(y, z) + f_2(x, w) + f_2(y, w)) \\ = e_1 f_1(x + y, z + w) + e_2 f_2(x + y, z + w) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$f_1(x, z) + f_1(y, z) + f_1(x, w) + f_1(y, w) = f_1(x + y, z + w)$$

$$f_2(x, z) + f_2(y, z) + f_2(x, w) + f_2(y, w) = f_2(x + y, z + w)$$

eşitlikleri bulunur. Ayrıca, skalerle çarpma işlemi,

$$f(\alpha x, \beta z) = e_1 f_1(\alpha x, \beta z) + e_2 f_2(\alpha x, \beta z)$$

$$\alpha \beta f(x, z) = e_1 f_1(\alpha x, \beta z) + e_2 f_2(\alpha x, \beta z)$$

olacaktır. Yani,

$$\begin{aligned} & e_1((\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) f_1(x, z)) + e_2((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) f_2(x, z)) \\ &= e_1 f_1((\alpha_1 + k\alpha_2)x, (\beta_1 + k\beta_2)z) + e_2 f_2(((\alpha_1 + k\alpha_2)x), (\beta_1 + k\beta_2)z) \end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) f_1(x, z) = f_1((\alpha_1 + k\alpha_2)x, (\beta_1 + k\beta_2)z)$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) f_2(x, z) = f_2(((\alpha_1 + k\alpha_2)x), (\beta_1 + k\beta_2)z)$$

olur. Özellikle $\alpha_2 = 0$ ve $\beta_2 = 0$ alındığında,

$$\alpha_1 \beta_1 f_1(x, z) = f_1(\alpha_1 x, \beta_1 z)$$

$$\alpha_1 \beta_1 f_2(x, z) = f_2(\alpha_1 x, \beta_1 z)$$

olur.

Böylece f_1 ve f_2 , $M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ üzerinde gerçel lineer 2-fonksiyoneldir. Benzer şekilde ϕ ve φ , $M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ üzerinde gerçel lineer 2-fonksiyoneldir.

Uyarı 5.3.2: X bir D -modül ve M ve N X in herhangi iki alt modülü olsun.

$M_{\ell} = e_{\ell} M_{\ell}$ ve $N_{\ell} = e_{\ell} N_{\ell}$, $\ell = 1, 2$ olduğundan $M = e_1 M_1 + e_2 M_2$ ve $N = e_1 N_1 + e_2 N_2$ yazılır. Burada M ve N nin gerçel lineer altuzay olduğu görülür.

f , $M \times N$ üzerinde D -lineer 2-fonksiyonel olsun. Her $x = e_1 x_1 + e_2 x_2 \in M$ ve her $y = e_1 y_1 + e_2 y_2 \in N$ için,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(e_1 x_1 + e_2 x_2, e_1 y_1 + e_2 y_2) \\ &= f(e_1 x_1, e_1 y_1) + f(e_1 x_1, e_2 y_2) + f(e_2 x_2, e_1 y_1) + f(e_2 x_2, e_2 y_2) \quad (5.6) \\ &= e_1 f(e_1 x_1, e_1 y_1) + e_2 f(e_2 x_2, e_2 y_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (5.5) ve (5.6) denklemleri kullanılarak

$$f(e_1 x_1, e_1 y_1) = e_1 f(e_1 x_1, e_1 y_1) + e_2 f(e_2 x_2, e_2 y_2)$$

$$e_1 f(e_1 x_1, e_1 y_1) = e_1 f_1(e_1 x_1, e_1 y_1) \text{ ve } f_2(e_2 x_1, e_2 y_1) = 0$$

sonucuna varılır. Bu eşitliklerden, $f(e_1 x_1, e_1 y_1) = f_1(e_1 x_1, e_1 y_1)$ eşitliği bulunur.

Benzer şekilde $f(e_2 x_2, e_2 y_2) = f_2(e_2 x_2, e_2 y_2)$ olacaktır. Sonuç olarak,

$$f(x, y) = e_1 f_1(e_1 x_1, e_1 y_1) + e_2 f_2(e_2 x_2, e_2 y_2)$$

eşitliği elde edilir. Burada $f_1 : M_1 \times N_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f_2 : M_2 \times N_2 \rightarrow \mathbb{R}$ gerçel lineer 2-fonksiyoneldir.

Uyarı 5.3.4: f , $M \times N$ üzerinde D -lineer 2-fonksiyonel olsun. Her $(x, y) \in M \times N$ için,

$$f(x, y) = \phi(x, y) + k\phi(x, y)$$

olur. $\phi, \varphi : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. ϕ, φ gerçel lineer 2-fonksiyoneldirler. $x \rightarrow kx$ yazılırsa,

$$\phi(kx, y) + k\phi(kx, y) = f(kx, y) = kf(x, y) = k(\phi(x, y) + k\phi(x, y)) = \phi(x, y) + k\phi(x, y)$$

$$\phi(kx, y) = \phi(x, y) \text{ ve } \varphi(kx, y) = \varphi(x, y)$$

elde edilir. Buradan,

$$f(x, y) = \phi(x, y) + k\phi(kx, y) \quad (5.7)$$

yazılır. Benzer şekilde,

$$f(x, y) = \phi(x, y) + k\phi(x, ky) \quad (5.8)$$

elde edilir.

Böylece D -lineer 2-fonksiyonel f için, (5.7) ve (5.8) denklemlerinden f ile ilişkili gerçel lineer 2-fonksiyonel ϕ vardır. Ancak, ϕ herhangi bir gerçel lineer 2-fonksiyonel ise ve f (5.7) ya da (5.8) denklemlerinde olduğu gibi tanımlanırsa, f nin bir D -lineer 2-fonksiyonel olmasına gerek olmadığı görülür.

Tanım 5.3.5: X , 2-normlu D -modül ve M ve N , X in iki alt modülü olsun.

$f : M \times N \rightarrow D$ lineer 2-fonksiyoneli $\Delta \in D^+$ varsa ve $\forall (x, y) \in M \times N$ için,

$$\|f(x, y)\|_k \leq \Delta \|(x, y)\|_D$$

eşitsizliği sağlanıyorsa D -sınırlı olarak adlandırılır.

f , D -sınırlı ise f nin hiperbolik normu, her $(x, y) \in M \times N$ için

$$\|f\|_D = \inf_D \left\{ \Delta : |f(x, y)|_k \leq \Delta \|(x, y)\|_D \right\}$$

olarak alınır. $\Delta_1, \Delta_2 \in R^+$, $f = e_1 f_1 + e_2 f_2$ ve $\Delta = e_1 \Delta_1 + e_2 \Delta_2$ eşitlikleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|f\|_D &= \|e_1 f_1 + e_2 f_2\|_D \\ &= \inf_D \left\{ \Delta : |f(x, y)|_k \leq \Delta \|(x, y)\|_D \right\} \\ &= \inf_D \left\{ e_1 \Delta_1 + e_2 \Delta_2 \right\} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$|e_1 f_1(e_1 x_1, e_1 y_1) + e_2 f_2(e_2 x_2, e_2 y_2)| \leq (e_1 \Delta_1 + e_2 \Delta_2) (e_1 \|x_1, y_1\|_1 + e_2 \|x_2, y_2\|_2)$$

elde edilir. Buradan,

$$\|f\|_D = e_1 \inf \{ \Delta_1 \} + e_2 \inf \{ \Delta_2 \}$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$|e_1 f_1(e_1 x_1, e_1 y_1)| \leq \Delta_1 \|e_1 x_1, e_1 y_1\|_1 \text{ ve } |e_2 f_2(e_2 x_2, e_2 y_2)| \leq \Delta_2 \|e_2 x_2, e_2 y_2\|_2$$

olduğu görülür. Böylece f nin hiperbolik normu

$$\|f_\ell\|_1 = \inf \left(\Delta_\ell : |f_\ell(e_\ell x_\ell, e_\ell y_\ell)| \leq \Delta_\ell \|e_\ell x_\ell, e_\ell y_\ell\|_\ell \right) \quad (\ell = 1, 2) \text{ olduğunda}$$

$$\|f\|_D = e_1 \|f_1\|_1 + e_2 \|f_2\|_2$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 5.3.6: f_1 , $M_1 \times N_1$ üzerinde sınırlı gerçel lineer 2-fonksiyonelinin normu

$$\begin{aligned} \|f_1\|_1 &= \sup \left\{ \frac{f_1(x_1, y_1)}{\|x_1, y_1\|_1} : \|x_1, y_1\|_1 \neq 0, (x_1, y_1) \in M_1 \times N_1 \right\} \\ &= \sup \left\{ f_1(x_1, y_1) : \|x_1, y_1\|_1 = 1, (x_1, y_1) \in M_1 \times N_1 \right\} \end{aligned}$$

olur ve f_2 için de benzer şekilde yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} \|f\|_D &= e_1 \sup \left\{ \frac{f_1(x_1, y_1)}{\|x_1, y_1\|_1} : \|x_1, y_1\|_1 \neq 0, (x_1, y_1) \in M_1 \times N_1 \right\} \\ &\quad + e_2 \sup \left\{ \frac{f_2(x_2, y_2)}{\|x_2, y_2\|_2} : \|x_2, y_2\|_2 \neq 0, (x_2, y_2) \in M_2 \times N_2 \right\} \\ &= \sup_D \left\{ \frac{e_1 |f_1(x_1, y_1)| + e_2 |f_2(x_2, y_2)|}{e_1 \|x_1, y_1\|_1 + e_2 \|x_2, y_2\|_2} \right\} \text{ öyle ki} \\ &\quad (e_1 \|x_1, y_1\|_1 + e_2 \|x_2, y_2\|_2 \notin NC_D \cup \{0\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_D \left\{ \frac{\|e_1 f_1(x_1, y_1) + e_2 f_2(x_2, y_2)\|_k}{\|e_1(x_1, y_1) + e_2(x_2, y_2)\|_D} \right\} \text{ öyle ki} \\
&\quad (\|e_1(x_1, y_1) + e_2(x_2, y_2)\|_D \notin NC_D \cup \{0\}) \\
&= \sup_D \left\{ \frac{\|f(x, y)\|_k}{\|x, y\|_D} : \|x, y\|_D \notin NC_D \cup \{0\}, (x, y) \in M \times N \right\}
\end{aligned}$$

olacaktır. Benzer şekilde $\|f\|_D = \sup_D \{\|f(x, y)\|_k; \|x, y\|_D = 1, (x, y) \in M \times N\}$ normu içinde ispat yapılır.

6. BÖLÜM

Bu bölümde 2-normlu uzaylarda yaklaşım kavramlarından bahsedilecektir. Bunun için temel tanım ve teoremler verilmiş olup [10],[11] ve [12] numaralı referanslar incelenebilir.

6.1. 2-NORMLU UZAYLARDA YAKLAŞIM

Tanım 6.1.1: G gerçel 2-normlu X uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Eğer,

$$\|x - g_0, z\| = \inf_{g \in G} \|x - g, z\|, \quad z \in X/V(x, G)$$

$g_0 \in G$ oluyorsa G nin elemanlarından x e bir en iyi yaklaşım vardır denir. Burada $V(x, G)$, x ve G tarafından üretilen altuzaydır. En iyi yaklaşımlarının tüm elemanlarının kümesi $P_{G,z}(x)$ ile gösterilir [10].

Tanım 6.1.2: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ lineer 2-normlu uzayının kesin konveks olması için gerek ve yeter şart

$$\|a + b, c\| = \|a, c\| + \|b, c\|$$

$$\|a, c\| = \|b, c\| = 1$$

özelliklerinin sağlanması ve $c \in X/V(a, b)$ olmasıdır. Burada $V(a, b)$, X in a ve b tarafından üretilen altuzayıdır ($a = b$) [11].

Teorem 6.1.3: Gerçel lineer 2-normlu X uzayının sonlu boyutlu altuzayı, G olsun. Her $x \in X$ için G ye en iyi yaklaşım vardır.

İspat: Her $x \in X$ ve $\{g_n\} \in G$ dizisi olsun. Öyle ki,

$$\|x - g_n, z\| \rightarrow \inf_{g \in G} \|x - g, z\|$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $k > 0$ sabiti vardır ki,

$$\begin{aligned} \|g_n, z\| - \|x - g_n, z\| &\leq \inf_{g \in G} \|x - g, z\| + k \\ &\leq \|x, z\| + k \end{aligned}$$

olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için, $\|g_n, z\| \leq 2\|x, z\| + k$ dır.

$\Rightarrow \{g_n\}$ sınırlı dizidir. $g_0 \in G$ ye yakınsayan $\{g_n\}$ dizisinin $\{g_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

O halde

$$\|x - g_0, z\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - g_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - g, z\|, z \in X/V(x, G)$$

elde edilir.

$\Rightarrow g_0 \in P_{G,Z}(x)$ olup ispat tamamlanır [10].

Teorem 6.1.4: Kesin konveks lineer 2-normlu X uzayının sonlu boyutlu altuzayı, G olsun. Her $x \in X$ için G ye bir tek en iyi yaklaşım vardır.

İspat: Her $x \in X$ olsun. Teorem 6.1.4 gereği $g_0 \in G$ elemanı vardır. Öyle ki $g_0 \in P_{G,Z}(x)$, $z \in X/V(x, G)$ dir.

Şimdi, $P_{G,Z}(x) = \{g_0\}$ olduğu gösterilsin. İlk olarak $P_{G,Z}(x)$ in konveks olduğu gösterilir. $g_1, g_2 \in P_{G,Z}(x)$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \|x - (\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2), z\| &= \|\alpha(x - g_1) + (1-\alpha)(x - g_2), z\| \\ &\leq \alpha\|(x - g_1), z\| + (1-\alpha)\|(x - g_2), z\| \\ &= \alpha \inf_{g \in G} \|x - g, z\| \\ &\leq \|x - g, z\|, \forall g \in G \end{aligned}$$

olur. Konvekslik tanımı gereği $\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2 \in G$, $\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2 \in P_{G,Z}(x)$ dir.

Kabul edelim ki, $g^* \in P_{G,Z}(x)$ olsun. O halde $\frac{1}{2}(g_0 + g^*) \in P_{G,Z}(x)$ olur, buna göre

bu eleman konvekslik denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2} \{ (x - g_0) + (x - g^*) \}, z \right\| &= \left\| x - \frac{1}{2}(g_0 - g^*), z \right\| \\ &= \inf_{g \in G} \|x - g, z\| \end{aligned}$$

O halde $\|x - g_0, z\| = \|x - g^*, z\| = \inf_{g \in G} \|x - g, z\|$ olduğundan X kesin konvektir.

Böylece

$$x - g_0 = x - g^* \Rightarrow g_0 = g^*$$

elde edilir. Bu da $P_{G,Z}(x) = \{g_0\}$ olduğunu kanıtlar [10].

Tanım 6.1.5: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. F , X in herhangi bir sınırlı alt kümesi ve K , X in bir alt kümesi olsun. Eğer,

$$d(F, K)_z = \sup_{f \in F} \|f - k^*\|, z \in X/V(f, k^*)$$

eşitlikleri tanımlanırsa $k^* \in K$ elemanına F kümesine *en iyi aynı anda yaklaşımıdır* denir. Burada

$$d(F, K)_z = \inf_{k \in K} \sup_{f \in F} \|f - k\|, z \in X/V(f, k)$$

dır [11].

Tanım 6.1.6: Her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $\|x - z, y\| < \delta$ ve $\|z, y - s\| < \delta$ ya da $\|x - z, s\| < \delta$ ve $\|x, y - s\| < \delta$ olduğunda $|f(x, y) - f(z, s)| < \varepsilon$ oluyorsa 2-fonksiyonel f ye (x, y) de *süreklidir* denir [11].

Lemma 6.1.7: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay $K \subset X$ ve F , X in sınırlı bir alt kümesi olsun. O halde

$$\Phi(k, z) = \sup_{f \in F} \|f - k, z\|, z \in X/V(f, k)$$

X üzerinde sürekli fonksiyoneldir.

İspat: Her $f \in F$ ve $k, k' \in X$ için,

$$\|f - k, z\| \leq \|f - k', z\| + \|k - k', z\|, z \in X/V(f, k, k')$$

dir. Böylece,

$$\sup_{f \in F} \|f - k, z\| \leq \sup_{f \in F} (\|f - k', z\| + \|k - k', z\|)$$

elde edilir. Eğer $\|k - k', z\| < \varepsilon$ iken $\Phi(k, z) \leq \Phi(k', z) + \varepsilon$ ise k' ve k nın yer değiştirmesiyle

$$\Phi(k', z) \leq \Phi(k, z) + \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$|\Phi(k', z) - \Phi(k, z)| < \varepsilon$$

olup ispat tamamlanır [11].

Lemma 6.1.8: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. K , X in sonlu boyutlu altuzayı olsun. $F \subset X$ kompakt alt kümesine, en iyi aynı anda $k^* \in K$ yaklaşımı vardır.

İspat: F kompakt olduğundan, her $f \in F$ ve $b \in X$ için $\|f, b\| \leq M$ olacak şekilde sonlu M sabiti vardır.

Şimdi K nın S alt kümesi $S \equiv S(0, 2M)$ şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$\inf_{k \in S} \sup_{f \in F} \|f - k, b\| = \inf_{k \in K} \sup_{f \in F} \|f - k, b\|, b \in X / V(f, k) \leq M$$

elde edilir. S kompakt olduğundan, $\Phi(k, b)$ sürekli fonksiyoneli bazı $k^* \in K$ için S üzerinde minimum değerini alır [10].

Lemma 6.1.9: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. K, X in konveks alt kümesi, $F \subset X$ olsun. Eğer $k_1, k_2 \in K$ olmak üzere K nın elemanlarıyla F ye iki en iyi aynı anda yaklaşım varsa o zaman

$$\bar{k} = \lambda k_1 + (1 - \lambda k_2), (0 \leq \lambda \leq 1)$$

olmak üzere, $\bar{k}$ de F ye en iyi aynı anda yaklaşımıdır.

İspat: $z \in X / V(f, \bar{k})$ için,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in F} \|f - \bar{k}, z\| &= \sup_{f \in F} \|f - (\lambda k_1 + (1 - \lambda k_2)), z\| \\ &\leq \lambda \sup_{f \in F} \|f - k_1, z\| + (1 - \lambda) \sup_{f \in F} \|f - k_2, z\| \\ &= \lambda d(F, K)_z + (1 - \lambda) d(F, K)_z \\ &= d(F, K)_z \end{aligned}$$

Tanım 6.1.5 den,

$$\begin{aligned} d(F, K)_z &= \inf_{k \in K} \sup_{f \in F} \|f - k, z\| \\ &\leq \sup_{f \in F} \|f - \bar{k}, z\| \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$d(F, K)_z = \sup_{f \in F} \|f - \bar{k}, z\|$$

olup ispat tamamlanır [11].

Tanım 6.1.10: X normlu bir uzay ve W, X in boş olmayan bir alt kümesi, $x \in X$ olsun. O halde yaklaşım problemi $d(x, W) = \inf_{w \in W} \|x - w\|$ ile gösterilir. Eğer $x \in X$

için $\|x - w_0\| = d(x, W)$ olacak şekilde bir $w_0 \in W$ bulunuyorsa, w_0 elemanına bir **en iyi yaklaşık elemanı** denir.

Her $x \in X$ için, $P_w(x) = \{w_0 \in W : \|x - w_0\| = d(x, W)\}$ kümesi **en iyi yaklaşıklar kümesi** olarak adlandırılır. Böylece aşağıdaki tanımlar verilir:

- I. Eğer her $x \in X$ için **en az bir tane** $w_0 \in W$ en iyi yaklaşımı varsa W kümesine X in bir **proximal alt kümesi** denir.
- II. Eğer her $x \in X$ için **sadece bir tane** $w_0 \in W$ en iyi yaklaşımı varsa W kümesine X in bir **Chebyshev alt uzayı** adı verilir.
- III. Eğer her $x \in X$ için **en çok bir tane** $w_0 \in W$ en iyi yaklaşımı varsa $w_0 \in W$ kümesine X in bir **yarı-Chebyshev alt uzayı** denir.
- IV. Eğer $P_w(x) = \{w_0 \in W : \|x - w_0\| = d(x, W)\} \neq \emptyset$ kümesi her $x \in X$ için X de kompakt ise W kümesine X in bir **kvazi-Chebyshev altuzayı** denir.
- V. Eğer $P_w(x) \neq \emptyset$ kümesi her $x \in X$ için X de sonlu boyutlu ise W kümesine X in bir **pseudo-Chebyshev altuzayı** denir. Burada her sonlu boyutlu alt uzay pseudo-Chebyshev altuzayı ve her pseudo-Chebyshev altuzayı aynı zamanda kvazi-Chebyshev altuzayıdır. Fakat tersi doğru değildir. Ayrıca, eğer W, X de proximal ise W, X de kapalıdır.
- VI. Eğer $\|x - w_0\| \leq d(x, W) + \varepsilon$ ise $w_0 \in W$ elemanına $x \in X$ için bir ε - **yaklaşım** denir.

$x \in X$ için $P_{w,\varepsilon}(x) = \{w_0 \in W : \|x - w_0\| \leq d(x, W) + \varepsilon\}$ olarak tanımlanır. Burada $P_{w,\varepsilon}(x)$ kümesi X in boş olmayan, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir. Ayrıca her $x \in X$ için W kapalı ise bu küme kapalıdır [12].

7. BÖLÜM

Bu bölümde genelleştirilmiş 2-normlu uzayların 2-proximal altuzayından bahsedilecektir. Ayrıca bu bölüm için [13] numaralı referans incelenebilir.

7.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ 2-NORMLU UZAYLARIN 2-PROXİMAL ALTUZAYI

Tanım 7.1.1: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2 normlu uzay, $W_1 \subseteq X$ ve $W_2 \subseteq Y$ olsun. Eğer her $(x, y) \in X \times Y$ için $(w_0, g_0) \in W_1 \times W_2$ varsa ve

$$\|x - w_0, y - g_0\| = \inf_{(w, g) \in W_1 \times W_2} \{\|x - w, y - g\| : (w, g) \in W_1 \times W_2\}$$

eşitliği sağlanıyorsa $W_1 \times W_2$ **2-proximal** olarak adlandırılır. Bu durumda (w_0, g_0) , $W_1 \times W_2$ de (x, y) nin **2-en iyi yaklaşımı** denir ve $W_1 \times W_2$ de (x, y) nin en iyi yaklaşımlarının kümesi $P_{W_1 \times W_2}^2(x, y)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 7.1.2: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve f , $X \times Y$ üzerinde gerçel değerli fonksiyon olsun.

Her $x, x_1, x_2 \in X$ ve her $y, y_1, y_2 \in Y$ için,

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &\leq f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ f(x, y_1 + y_2) &\leq f(x, y_1) + f(x, y_2) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa f fonksiyonuna **2-alt toplamsaldır** denir.

Teorem 7.1.3: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay, W_1 , X in altuzayı ve W_2 , Y nin altuzayı olsun. $(w_0, g_0) \in W_1 \times W_2$ ve $(x, y) \in X \times Y$ olsun. O halde

$$(w_0, g_0) \in P_{W_1 \times W_2}^2(x, y)$$

olması için gerek ve yeter koşul $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir 2-alt toplamsal fonksiyonu vardır. Öyle ki

$$f|_{W_1 \times \{y\}} = f|_{\{x\} \times W_2} = f|_{W_1 \times W_2} = 0$$

$$\|f\| \leq 1 \text{ ve } f(x - w_0, y - g_0) = \|x - w_0, y - g_0\|$$

dır.

İspat: $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, 2-alt toplamsal fonksiyon olsun. Öyle ki,

$$f|_{W_1 \times \{y\}} = f|_{\{x\} \times W_2} = f|_{W_1 \times W_2} = 0$$

$$\|f\| \leq 1 \text{ ve } f(x - w_0, y - g_0) = \|x - w_0, y - g_0\|$$

dır. $w \in W_1$ ve $g \in W_2$ için,

$$f(x - w_0, y - g_0) = f(x - w, y - g) = f(x, y)$$

elde edilir. Böylece her $w \in W_1$ ve $g \in W_2$ için,

$$\begin{aligned} \|x - w_0, y - g_0\| &= f(x - w_0, y - g_0) \\ &\leq f(x - w, y - g) \\ &\leq \|f\| \|x - w, y - g\| \\ &\leq \|x - w, y - g\| \end{aligned}$$

dır. Buradan $(w_0, g_0) \in P_{W_1 \times W_2}^2(x, y)$ olur.

Şimdi, $(w_0, g_0) \in P_{W_1 \times W_2}^2(x, y)$ olsun. $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \inf \{ \|x - w, y - g\| : w \in W_1, g \in W_2 \}$$

f fonksiyonunu 2-alt toplamsaldır. Öyle ki,

$$f|_{W_1 \times \{y\}} = f|_{\{x\} \times W_2} = f|_{W_1 \times W_2} = 0, \quad \|f\| \leq 1$$

olur. Her $(x, y) \in X \times Y$ için,

$$|f(x, y)| = f(x, y) \leq \|x, y\|$$

dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \inf \{ \|x - w, y - g\| : w \in W_1, g \in W_2 \} \\ f(x - w_0, y - g_0) &= \inf \{ \|x - w_0 - w, y - g_0 - g\| : w \in W_1, g \in W_2 \} \\ &= \inf \{ \|x - t, y - s\| : t \in W_1, s \in W_2 \} \\ &= \|x - w_0, y - g_0\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve $W_1 \subseteq X$ ve $W_2 \subseteq Y$ olsun.

$W_1 \times W_2$, X in 2-proximal altuzayıdır ancak ve ancak her $f(x, y) \in X \times Y$ için $X \times Y$ üzerinde 2-alttoplamsal f fonksiyonu vardır. Öyle ki,

$$f|_{W_1 \times \{y\}} = f|_{\{x\} \times W_2} = f|_{W_1 \times W_2} = 0$$

$$\|f\| \leq 1$$

$$f(x - w_0, y - g_0) = \|x - w_0, y - g_0\|$$

olur.

Lemma 7.1.4: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay, $W_1 \subseteq X$ ve $W_2 \subseteq Y$,

$(x, y) \in X \times Y$ olsun. $M \subseteq P_{W_1 \times W_2}^2(x, y)$ olması için gerek ve yeter şart $X \times Y$ üzerinde f 2-alt toplamsal fonksiyonu olmasıdır. Öyle ki $(m_1, m_2) \in M$ için,

$$f|_{W_1 \times \{y\}} = f|_{\{x\} \times W_2} = f|_{W_1 \times W_2} = 0, \quad \|f\| \leq 1 \text{ ve}$$

$$f(x - m_1, y - m_2) = \|x - m_1, y - m_2\|$$

elde edilir.

İspat: $M \subseteq P_{W_1 \times W_2}^2(x, y)$ ve sabit $(t_1, t_2) \in M$ olsun. Teorem 7.1.6 dan $X \times Y$ üzerinde f 2-alt toplamsal fonksiyonu vardır. Öyle ki,

$$f|_{W_1 \times \{y\}} = f|_{\{x\} \times W_2} = f|_{W_1 \times W_2} = 0, \|f\| \leq 1$$

$$f(x-t_1, y-t_2) = \|x-t_1, y-t_2\|$$

olur. Ancak her $(m_1, m_2) \in M$ için,

$$f(x-t_1, y-t_2) = f(x-m_1, y-m_2)$$

elde edilir. Sonuç olarak her $(m_1, m_2) \in M$ için,

$$f(x-m_1, y-m_2) = \|x-t_1, y-t_2\| = \|x-m_1, y-m_2\|$$

bulunur.

Örnek 7.1.5: $X = Y = \mathbb{R}^2$,

$$W_1 = \{(x_1, x_2) \in X : x_1 = x_2\}$$

$$W_2 = \{(y_1, y_2) \in Y : y_1 = y_2\}$$

olarak tanımlansın. $\|.,.\| : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, her $(x_1, x_2) \in X$, $(y_1, y_2) \in Y$ için,

$$\|(x_1, x_2), (y_1, y_2)\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

olsun. $\|.,.\|$, $X \times Y$ üzerinde genelleştirilmiş 2-norm ve $W_1 \times W_2$, $X \times Y$ nin 2-proximinal altuzayıdır.

1. Eğer $y_1 = y_2, x_1 \neq x_2$ ise,

$$P_{W_1 \times W_2}^2(x, y) = W_1 \times \left\{ \left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}, \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} \right) \right\} \text{ dir.}$$

2. Eğer $y_1 \neq y_2, x_1 = x_2$ ise,

$$P_{W_1 \times W_2}^2(x, y) = \left\{ \left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 - y_2}, \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 - y_2} \right) \right\} \times W_2 \text{ dir.}$$

3. Eğer $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ ise $P_{W_1 \times W_2}^2(x, y) = W_1 \times W_2$ dir.

4. Eğer $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ ise

$$\left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 - y_2}, \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 - y_2}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}, \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} \right) \in P_{w_1 \times w_2}^2(x, y)$$

dir.



KAYNAKLAR

- [1] Sabuncuoğlu A. (2014), Lineer Cebir, 5.Baskı, Nobel Yayınevi.
- [2] Okten, S. (2010), Çukurova Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
- [3] Kreyszig, E. (1989), *Introductory Functional Analysis With Applications*, 91-292.
- [4] Gähler, S. (1964), *Lineare 2-Normite Raume*, *Math. Nachr.* **28**, 1-43.
- [5] By Albert George White, 2-Banach Spaces, (Eingegange am 29.12.1967).
- [6] Lewandowska, Z. Moslehian, M., Moghaddam, A., Hahn-Banach Theorem In Generalized 2-Normed Spaces, *Communications In Mathematical Analysis*, **Vol.1** No.2 (2006) 109-113.
- [7] Acikgöz, M. 2-Normlu Küme Üzerinde Sınırlı 2-Lineer Operatörler, XIX. Ulusal Matematik Sempozyumu 22-25 Ağustos 2006, Kütahya.
- [8] Lewandowska, Z. Bounded 2-linear operators on 2-normed sets. *Glas. Mat. Ser. III*, 39(59) (2) (2004), pp. 301–312.
- [9] Singh, K., Kumar, R. 2-Normed D -Modules and Hanh-Banach Theorem For D -Linear 2-Functionals.
- [10] Vijayaragavan, R. Best Approximation in Real Linear 2-Normed Spaces, (May-June.2013), pp 16-24.
- [11] Elumalai, S., Vijayaragavan, R. Best Simultaneous Approximation in Linear 2-Normed Spaces, *General Mathematics* **Vol. 16**, No. 1 (2008), 73-81.

- [12] Acikgöz, M. ε -Approximation in Generalized 2-Normed Spaces, **61** (2009), 159-163.
- [13] Rezapour, Sh. 2-Proximality in generalized 2-normed spaces, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics* 33 (2009), 109-113.

