

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-YUTAN ASALIMSI İDEALLERİN AMALGAMATED CEBRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali KÜÇÜKÖZER

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

OCAK 2025

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-YUTAN ASALIMSI İDEALLERİN AMALGAMETED CEBRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali KÜÇÜKÖZER

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Abuzer GÜNDÜZ

OCAK 2025

Ali KÜÇÜKÖZER tarafından hazırlanan “2-Yutan Asalımsı İdeallerin Amalgamated Cebri” adlı tez çalışması 31.01.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim **Dalı** **Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi** **Bilim** Dalı’nda **Yüksek Lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Dr. Öğr. Üyesi Abuzer GÜNDÜZ (Danışman)**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Doç. Dr. Suat KOÇ**
Marmara Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Dr. Öğr. Üyesi Emre KIŞI**
Sakarya Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “2-YUTAN ASALIMSI İDEALLERİN AMALGAMATED CEBRİ” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(31/01/2025)

Ali Küçüközer





Eşime ve çocuklarıma ...



TEŞEKKÜR

Tez dönemim boyunca bilgi ve birikimlerini bana aktaran, ilgi ve yardımını esirgemeyen, tezimi yöneten danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Abuzer GÜNDÜZ ‘e çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca maddi ve manevi desteklerini her zaman hissettiğim ağabeyim Orhan KÜÇÜKÖZER ‘e, eşim Selma KÜÇÜKÖZER ‘e ve manevi ağabeyim olarak gördüğüm Hasan KARA ‘ya ve meslektaşım Can METİN ‘e teşekkür ederim.

Ali Küçüközer



İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR.....	ix
İÇİNDEKİLER.....	xi
SİMGELER.....	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY.....	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatür Taraması ve Tezin Amacı.....	1
1.2. Cebirsel Tanımlar, Önermeler ve Teoremler	3
2. ASAL İDEALLER.....	9
2.1. 2-Yutan Asalımsı İdealler.....	10
3. AMALGAMATION.....	11
3.1. Amalgamation Cebri.....	11
3.2. 2-Yutan Asalımsı İdealler için Amalgamated Cebri	12
4. SONUÇLAR.....	15
KAYNAKLAR.....	19
ÖZGEÇMİŞ	21



SİMGELER

(S)	: S 'nin ürettiği ideal
$\bowtie^f$	: f homomorfizması altındaki amalgamation
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}_n$	: Tam sayıların mod n kalan sınıflarının kümesi
$\sqrt{I}$	: I idealinin radikali
$f^{-1}(I)$	: I idealinin f altındaki ters görüntüsü
$\forall$	: Bütün
$\exists$	: En az
$\in$	: Elamanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\cap$	: KEsişim
$\cup$	: Birleşim
$\cong$	: İzomorf
$\subseteq$	: Alt kümesidir
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi
$\text{Çek}f$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$B[[X]]$	: Katsayıları B 'den alınan kuvvet serileri halkası
$B[X]$	: Katsayıları B 'den alınan polinomlar halkası
$Nil(A)$	: A 'nın nilpotent elemanları
$T(A)$	: A 'nın bölüm halkalarının kümesi
$f(I)$	: I idealinin f altındaki görüntüsü
x/y	: x böler y



2-YUTAN ASALIMSIZ İDEALLERİN AMALGAMATED CEBRİ

ÖZET

Değişmeli cebirin en önemli problemlerinden biri yeni ideal sınıfları kurmak ve bu yeni ideal sınıflarını bir kısım özel halkalarda çalışmaktır. Buna örnek olarak asal idealleri verebiliriz. Asal idealler değişmeli halkalar teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Dolayısıyla asal ideal tanımını genelleştirerek yeni idealler vermek oldukça yaygındır. Örneğin, I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $a, b, c \in R$ elemanları için $abc \in I$ olduğu zaman $ab \in I$ ya da $bc \in I$ ya da $ac \in I$ oluyorsa I idealine R halkasının bir 2-yutan ideali denir. Bir başka örnek I, R halkasının bir ideali olmak üzere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \in R$ olsun. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \in I$ olduğu zaman a_i elemanlarından n tanesinin çarpımı I idealinde yer alıyorsa I idealine n -yutan ideal denir. Buna paralel I, R halkasının bir ideali olmak üzere $a, b, c \in R$ elemanları için $abc \in I$ olduğu zaman $ab \in I$ ya da $ac \in \sqrt{I}$ ya da $bc \in \sqrt{I}$ oluyorsa I idealine R halkasının bir 2-yutan asalımsız ideali denir. Bu idealler farklı halkalarda, örneğin yerel halkalar, Noetherian halkalar, Artinian halkalar veya aşık genişleme (trivial extension) için çalışılmıştır. Benzer biçimde yeni bir halka olan Amalgamated halkası için bu ideallerin bir kısmı farklı makalelerde çalışılmıştır. Bu çalışmada 2-yutan asalımsız idealleri Amalgamated halkasında belirlemeye çalışacağız.

A ve B iki halka, J, B 'nin ve I, A 'nın birer ideali, $f: A \rightarrow B$ ise bir halka homomorfizması olsun. $A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) : a \in A, j \in J\}$ kümesi her $a, a_1, a_2 \in A$ ve $j, j_1, j_2 \in J$ olmak üzere

- 1) $(a_1, f(a_1) + j_1) + (a_2, f(a_2) + j_2) := (a_1 + a_2, f(a_1) + f(a_2) + j_1 + j_2)$ ve
- 2) $(a_1, f(a_1) + j_1)(a_2, f(a_2) + j_2) := (a_1 a_2, f(a_1 a_2) + f(a_2)j_1 + f(a_1)j_2 + j_1 j_2)$

işlemler altında bir halkadır. Bu halka özel olarak $A \times B$ halkasının bir alt halkasıdır. Bu halkaya A ve B 'nin J ideali boyunca f altındaki amalgamationu denir. Ayrıca,

$$I \bowtie^f J := \{(i, f(i) + j) : i \in I, j \in J\}$$

kümesi $A \bowtie^f J$ halkasının bir idealidir.

Bu tezde temel motivasyonumuz $I \bowtie^f J$ idealinin verilen işlemler altında $A \bowtie^f J$ halkasında ne zaman bir 2-yutan asalımsız ideal olduğunu göstermektir. Öncelikle bu halkanın asal idealleri, idealin radikali ve asalımsız ideallerinin, 2-yutan asalımsız idealler ile ilişkisini verdik. Bununla ilgili bazı teoremler, örnekler ve sonuçlar elde ettik. Özellikle halkamız yerel halka, divided halka ve chain halka iken onun 2-yutan asalımsız idealleri ile ilgili sonuçlar verdik.



2-ABSORBING PRIMARY IDEALS OF AMALGAMATIONS

SUMMARY

Throughout this thesis, all rings are commutative with identities and all modules are unital. Determining the new ideal classes is one of the most important problems of commutative algebra. Also finding these ideal classes for some special rings is another important problem. This usually occurs as an extension of prime ideals.

The ideal I is called prime ideal for $a, b \in R$, if $ab \in I$ then $a \in I$ or $b \in I$. The set $\sqrt{I} = \{r \in R: r^n \in I, n \geq 1 \text{ and } n \in \mathbb{N}\}$ is called the radical of the ideal I . For P is a prime ideal and $\sqrt{I} = P$, then I ideal is called P – prime ideal of R . Also, $\text{Nil}(R)$ is called the nil radical of R , which is consisted of the set of nilpotent element of the R .

A prime ideal I of a ring R is said to be a divided prime ideal if $I \subset (s)$ for every every $s \in R/I$, thus a divided prime ideal is comparable to every ideal of R (Badawi, 2007). An integral domain R is said to be a divided domain if every prime ideal of R is divided prime ideal. If $m|k$ (in R) or $k|m$ (in R) for every nonzero $m, k \in R$ then an integral domain is a divided domain. An integral domain R is said to be a Dedekind domain if $II^{-1} = R$ for every nonzero ideal I of A (Badawi, 2007).

Prime ideals are very important in the characterization of commutative algebra (see Cohen's theorem, Gunduz, (2021) theorem 88 and their main effects are seen in areas such as algebraic geometry (correspond to irreducible algebraic sets). Therefore, the study and extension of prime ideals is one of the main motivations of commutative algebra. There are several ways to generalize the concept of prime ideal. It was introduced by Badawi (2007)

For this purpose, Badawi (2007) first gave the definition of 2-absorbing ideals and many related results in his work. For instance, a nonzero proper ideal I is called 2-absorbing ideal if whenever $a, b, c \in R$ such that $abc \in I$, then either $ab \in I$ or $ac \in I$ or $bc \in I$. 2-absorbing ideals were first introduced by Badawi (2007). Later, Anderson and Badawi (2011) expanded the 2-absorbing ideals and gave the definition of n -absorbing ideals in D. F. Anderson et al (2011). A proper ideal I of R is called n -absorbing ideal if whenever $a_1 \dots a_{n+1} \in I$ for $a_1 \dots a_{n+1} \in R$, then there are n of the a_i 's whose product is in I . In Badawi and others (2014), defined the 2-absorbing primary ideal such that a proper ideal I is called 2-absorbing primary ideal if whenever $a, b, c \in R$ such that $abc \in I$, then either $ab \in I$ or $ac \in \sqrt{I}$ or $bc \in \sqrt{I}$, see Badawi et al (2014). We focus on over 2-absorbing primary ideal to detect a 2-absorbing primary ideal of amalgamation algebra that is a special ring in commutative algebra. This ring is constructed in recent years.

The Amalgamation ring was first introduced by D'Anna et al. in the article D'Anna et al. (2007) and many related results were given. Similarly, the work continued in the articles D'Anna et al. (2009) and D'Anna et al. (2010). Here the behavior of many different ideal classes in the Amalgamation ring was investigated. The main ones are the Amalgamation of n -absorbing ideals see Issoual et al (2020), the Amalgamation

of weakly prime ideals and the Amalgamation of 1-absorbing prime and 1-absorbing primary ideals see Mahdou (2020).

The trivial extension, which is the extension of A by E , where A is a ring and E is an A -module, was first given in Nagata (1962) [16, p. 2]. This ring constructed a ring by the operations. $(a, e)(b, f) := (ab, af + be)$.

Let's now examine the amalgamated ring, which is a special case of this extension.

Let A and B be ring, J is a ideal of B and I is a ideal of A , and $f: A \rightarrow B$ be a ring homomorphism.

For all $a, a_1, a_2 \in A$ ve $j, j_1, j_2 \in J$ the set of

$A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) : a \in A, j \in J\}$ is a ring under the following operations

- 1) $(a_1, f(a_1) + j_1) + (a_2, f(a_2) + j_2) := (a_1 + a_2, f(a_1) + f(a_2) + j_1 + j_2)$ ve
- 2) $(a_1, f(a_1) + j_1)(a_2, f(a_2) + j_2) := (a_1 a_2, f(a_1 a_2) + f(a_2)j_1 + f(a_1)j_2 + j_1 j_2)$

Also it is a subset of the ring $A \times B$ and is called the amalgamation of A and B along J with respect to f . This ring are studied in many article such as D'Anna, M. (2006), D'Anna, M. (2007), D'Anna, M. (2010).

On the other hand, consider the following sets

$$I \bowtie^f J := \{(i, f(i) + j) : i \in I, j \in J\}$$

$$\bar{K}^f := \{(a, f(a) + j) : a \in A, j \in J, f(a) + j \in K\}$$

$$\overline{I \times \bar{K}^f} := \{(a, f(a) + j) : a \in I, j \in J, f(a) + j \in K\}$$

Here $I \bowtie^f J$, $\bar{K}^f$ and $\overline{I \times \bar{K}^f}$ are ideal of the ring $A \bowtie^f J$ respectively, see D'Anna, M. (2006).

Let R_1, R_2 are two rings and J is an ideal of R_2 , $f: R_1 \rightarrow R_2$ is the ring homomorphism. The set $R_1 \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) : a \in R_1, j \in J\}$ is called the amalgamation of R_1 and R_2 under f along the ideal J , which is a subring of $R_1 \times R_2$.

In Issoual, M. et al. (2020), They gave when $I \bowtie^f J$, $\bar{K}^f$ and $\overline{I \times \bar{K}^f}$ are n – absorbing (and syrongly n – absorbing) ideal of the ring $A \bowtie^f J$ respectively by special isomorphism in proposition 5.1.(2) D'Anna et al. (2009). This technique is very effective and surprising. It can probably be tried to solve many basic problems. Also they gave many results about n – absorbing ideal of $R_1 \bowtie^f J$ in case different rings.

The main motivation and an application of amalgamated duplication (generalization of amalgamated rings) for the $R \bowtie J$ case can be given in the paper D'Anna et al.(2009) where D'Anna tried to construct reduced Gorenstein rings from the $R \bowtie I$ case to relate them to Cohen-Macaulay rings and curve singularities. This is very important. Because establishing a relationship with the theory of singularity means that this ring can be associated with the solution of many new problems, especially algebraic geometry problems. The behavior of this ring can be examined for different singular classes, for example Dual Singularities. It can also be examined for isolated and non-isolated singularities. This modification of these singular loci can again be interesting problems.

Since the amalgamation can be studied in the frame of pullback constructions, we can have this level of generality is chosen. This perspective provides an easily summarized description of the $R_1 \bowtie^f J$ in relation to the properties of R_1, J and f .

D'anna et al.(2009) introduced on the generalization of amalgamation multiplication of ideals in the ring (D'anna et al. 2009) and other classical structures (such as $R_1 + XR_2[X]$, $R_1 + XR_2[X]$ ve $D+M$) have also been studied. They firstly gave a study of the basic properties of $R_1 \bowtie^f J$. Especially, they presented all the constructions cases of the amalgamation. Beside, they showed the CPI extensions are related to amalgamations of a special type and we compare Nagata's idealization with the amalgamation. They take the iteration of the amalgamation process, giving some geometrical applications of it. They showed that the amalgamation can be realized as a pull-back and we characterize those pullbacks that arise from an amalgamation. Also, they applied its some results to study the basic algebraic properties of the amalgamation, with particular attention to the finiteness conditions.

Nagatas Idealization, a classical structure was introduced by Nagata (1962) and CPI expansion was introduced by Boisen and Sheldon (1977). What makes these structures special is that they are an amalgamation product of the I ideal.

Besides, the $R_1 \bowtie^f J$ amalgamation structure is related to the classical structures recommended by Anderson (2006) and expressed by Dorroh (1962) and this amalgamation structure tries to express the embedding of a non-united structure into a unitary structure. (D.D. Anderson, 2006; dorroh, 1932).

There are many studies on determining different ideal classes of amalgamation rings. In parallel, Issoual, M. et al. (2020) defined n-absorbing prime ideals of amalgamation rings and gave many new results there. Also, the 1-absorbing prime and 1-absorbing primary ideals of amalgamation rings and gave many new results, see Gündüz (2023) and Khalfi et al. (2023).

Similarly, 2-absorbing prime ideals were defined for amalgamation rings in Gonca (2023) and uniformly 1-absorbing primary ideals were defined for amalgamation rings in Alhazmy, K. Et al. (2025), with giving many new results. As a result, the extensions of prime ideals are a subject that continues to be actively studied, especially by mathematicians such as Badawi A., Tekir, U. and Mahdoo, N.

Especially, Gündüz (2023) and Khalfi et al. (2023) studied over 1-absorbing prime ideals and 1-absorbing primary ideals in amalgamation.

Both studies gave several definitions and results (Gündüz, 2023; Khalfi et al. 2023). However, Gündüz (2023) used the special isomorphism that stated in proposition 5.1.(2) D'Anna et al. (2009) like Issoual, M. et al. (2020) and gave many results for the amalgamated agebra of 1-absorbing prime ideals and 1-absorbing primary ideals (Gündüz, 2023). For example, he gave the 1-absorbing prime ideals of $R_1 \bowtie^f J$ when R_1 is a Noetherian integral domain which is not a field, a quasi-local ring, localization of ring and 1-absorbing primary ideals of $R_1 \bowtie^f J$ when R_1 is a valuation domain, Prufer do-main, Noetherian integral domain, a Dedekind domain, and localization of ring. But (Khalfi et al. 2023) used the definition of these ideal classes to get the proff of main theorems. Compared to the (Khalfi et al. 2023), Gunduz (2023) gave more general and condition-free main theorems. Therefore, we decided to use the technique in this article. Also (Gonca, 2024) studied over 2-absorbing ideal of amalgamations and get many results with this technique.

Our main motivation in this paper is to detect when $I \bowtie^f J$ is 2 – absorbing primary ideals of the amalgamation ring $A \bowtie^f J$. First, we give the relations of the prime ideals and primary ideals of this ring and 2 – absorbing primary ideals. We obtain some theorems, examples and results related to this. In particular, we give results about the

2 – absorbing primary ideals of amalgamation when it is a local ring, a divided ring or a chain ring.



1. GİRİŞ

1.1. Literatür Taraması ve Tezin Amacı

Bu tez boyunca tüm halkalar birimli ve değişmeli alacağız. R bir halka ve I , R halkasının R 'den farklı bir ideali olmak üzere $\sqrt{I} = \{r \in R: r^n \in I, n \geq 1 \text{ ve } n \text{ pozitif tam sayı}\}$ olarak tanımlanan kümeye I idealinin radikali denir. I asalımsı ideal olduğunda I idealinin radikali asal idealdir ve $\sqrt{I} = P$ elde edilir. Bununla birlikte I ideali P – *asalımsı* diye isimlendirilir. Buradaki P bir asal idealdir. R halkasının her bir nilpotent elemanlarının kümesi $Nil(R)$ dersek bu kümeye R 'nin nil radikali denir.

Asal idealler değişmeli halkalar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Dolayısıyla asal ideal tanımını genelleştirmek için birden fazla yol verilmiştir. Örneğin, I , R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $a, b, c \in R$ elemanları için $abc \in I$ olduğu zaman $ab \in I$ ya da $bc \in I$ ya da $ac \in I$ oluyorsa I idealine R halkasının bir 2-yutan ideali denir. Badawi (2007) 'deki çalışmasında 2-yutan ideallerden ilk kez bahsetmiştir (Badawi, 2007). Sonrasında Anderson ve Badawi (2011) 2-yutan idealler kavramını ifade etmişler ve n-yutan ideallerin tanımını da belirtmişlerdir (D. F. Anderson & Badawi, 2011). I , R halkasının bir ideali olmak üzere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \in R$ olsun. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \in I$ olduğu zaman a_i elemalarından n tanesinin çarpımı I idealinde yer alıyorsa I idealine n-yutan ideal denir. Badawi ve ark. (2014) yaptığı çalışmalarda 2-yutan asalımsı ideallerin tanımını yapmışlardır (Badawi vd., 2014). I , R halkasının bir ideali olmak üzere $a, b, c \in R$ elemanları için $abc \in I$ olduğu zaman $ab \in I$ ya da $ac \in \sqrt{I}$ ya da $bc \in \sqrt{I}$ oluyorsa I idealine R halkasının bir 2-yutan asalımsı ideali denir.

Yapılan bu tanımlar ışığında her asal idealin 2-yutan ideal olduğunu ancak bunun tersinin doğru olmadığını biliyoruz. Bennis ve Fahid (2007) yaptığı çalışmalarda 2-yutan asal olması şartını sağlayan bir R halkası tanıtarak detaylandırdılar (Bennis & Fahid, 2017). Tanıttıkları bu yapıları $2-R_1R_2$ ismini verdiler ve sonrasında bunlarla ilgili Issoual ve Mahdou (2020) da çalışmışlardır (Issoual & Mahdou, 2020).

2-yutan idealler konusuyla ilgili Payrovi ve Babaei (2012) de çalışmışlardır ve polinom halkalarının birkaç sonucunu vermişlerdir. (Payrovi & Babaei, 2012)

Badawi ve Darani (2013) zayıf 2-yutan idealleri çalışmışlardır (Badawi & Darani, 2013). Yarı lokal halkalarda ve cisimlerde uygun ideallerin zayıf 2-yutan idealleri olabilmesinin koşulunu ve gerekliliğini vermişlerdir.

R_1, R_2 iki halka ve J, R_2 'nin bir ideali, $f: R_1 \rightarrow R_2$ halka homomorfizması olmak üzere $R_1 \times R_2$ 'nin bir alt halkasını tanımlarsak $R_1 \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j): a \in R_1, j \in J\}$ kümesine R_1 'in ve R_2 'in J ideali boyunca f altındaki amalgamationu denir. D'anna ve ark. (2009) tarafından halkadaki ideallerin amalgamation çarpımının genelleştirilmesinin tanıtımı yapılmış ve üzerinde açılmıştır (D'anna vd., 2009). İlave olarak diğer klasik yapılarda da $(R_1 + XR_2[X], R_1 + XR_2[X])$ ve D+M gibi çalışılmıştır. Nagata (1962) tarafından (Nagata, 1962) klasik bir yapı olan Nagatas İdealizasyonu, Boisen ve Sheldon (1977) tarafından (Boisen & Sheldon, 1977) ise CPI genişlemesi tanıtılmıştır. Bu yapıları özel yapan I idealinin bir amalgamation çarpımı olmasıdır. R bir halka ve I da R nin bir ideali olmak üzere $R \bowtie I := \{(a, a + i): a \in R, i \in I\}$ kümesine R 'nin I ideali boyunca amalgamation çoğalması denir.

Diğer taraftan $R_1 \bowtie^f J$ amalgamiton yapısı Anderson (2006) tarafından tavsiye edilen ve Dorroh (1962) 'un ifade ettiği klasik yapılarla ilgilidir ve bu amalgamation yapısı birimli olmayan bir yapının birimli olan bir yapıya gömülmesini ifade etmeye çalışır. (D. D. Anderson, 2006; Dorroh, 1932)

Amalgamated duplicationun (Amalgamated halkaların genelleştirilmesi) ($R \bowtie I$ durumu için) temel motivasyonu ve bir uygulaması olarak [D'Anna, M. (2006)] makalesi verilebilir. Bu makalede D'Anna Cohen-Macaulay halkaları ile ve eğir teklikleri ile ilişkilendirmek için $R \bowtie I$ durumundan indirgenmiş Gorenstein halkalarını inşa etmeye çalışmıştır.

Gündüz (2023) ve Khalfi ve ark. (2023) da amalgamation cebrinde 1-yutan asal ideal ve 1-yutan asalımsı idealleri çalışarak birkaç tanımlama ve sonuç açıklamışlardır (Gündüz, 2023; Khalfi vd., 2023). Ve bu idealler altında bazı özel yapıları vermişlerdir. Gündüz (2023) çalışmasında D'Anna ve ark. (2009) 'nın proposition 5.1(2) 'de belirtmiş olduğu izomorfizma yapısından faydalananarak 1-yutan asal idealler

ve 1-yutan asalımsı ideallerin amalgamated cebri için fazlasıyla sonuç açıklamıştır (Gündüz, 2023).

Bu tez çalışmasında ise amacımız amalgamation yapılarında 2-yutan ideal olma şartını bulmaya çalışmak ve bununla ilgili teorem, örnek ve birkaç sonuç vermektir.

1.2. Cebirsel Tanımlar, Önermeler ve Teoremler

Bu bölümdeki temel tanımlar, teoremler ve örnekler için [Çallıalp] ve [G. Agargun] kitapları takip edilecektir.

Tanım 1: $A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \times A$ 'dan A 'ya tanımlanan fonksiyona A 'da bir ikili işlem denir.

Örnek 1: $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu bir işlem belirtir. Buna karşın $-: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ifadesi bir işlem belirtmez. Çünkü $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$ 'dir.

Tanım 2: $A \neq \emptyset$ olmak üzere, A üzerinde en az bir Δ ikili işlem tanımlı ise (A, Δ) ikilisine bir cebirsel yapı denir.

Örnek 2: $(\mathbb{R}, \cdot)$ ikilisi bir cebirsel yapıdır.

Tanım3: $A \neq \emptyset$ ve Δ, A kümesi üzerinde bir ikili işlem olmak üzere (A, Δ) cebirsel yapısı aşağıdaki ifadeleri sağlıyorsa A 'ya bir grup denir.

- i. $\forall x, y \in A$ için $x \Delta y \in A$
- ii. $\forall x, y, z \in A$ için $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$ (Birleşme özelliği)
- iii. $\forall x \in A$ için $x \Delta e = e \Delta x = e$ olacak şekilde $\exists e \in K$ vardır. Bu elemana grubun birim (etkisiz) eleman denir.
- iv. $x \in K$ için $x^{-1} \Delta x = x \Delta x^{-1} = e$ olacak şekilde $\exists x^{-1} \in A$ vardır. Bu elemana x elemanının G grubundaki tersi denir.

Tanım4: (A, Δ) bir grup ve $\forall x, y \in A$ için $x \Delta y = y \Delta x$ özelliği sağlanıyorsa değişme özelliği vardır denir ve değişme özelliği olan gruba değişmeli grup ya da Abel Grup denir.

Tanım5: $A \neq \emptyset$ ve A üzerinde iki tane ikili işlem $+$ ve $\cdot$ işlemleri tanımlı olsun.

$(A, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa A 'ya bir "halka" denir.

- i. $(A, +)$ cebirsel yapısı değişmeli bir gruptur.

ii. İkinci işleme göre birleşmelidir. Yani $\forall x, y, z \in A$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ 'dir.

iii. İkinci işlemin birinci işlem üzerine dağılma özelliği vardır. Yani

$\forall x, y, z \in A$ için $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ve $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ 'dir.

Halkanın ilk işleme göre birim elemanına o halkanın sıfırı denir ve 0_A ile gösterilir, fakat ikinci işleme göre birim elemanı olmayabilir ama varsa bu elemene halkanın birimi denir ve 1_A ile gösterilir. İkinci işlemin değişme özelliği varsa bu halkaya değişmeli halka denir.

Tezin devamında kolaylık sağlaması yönünden $x \cdot y$ yerine xy yazılacaktır. Biz bu çalışmada değişmeli ve birimli halkalar üzerinde çalışacağız.

Örnek 1: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cebirsel yapıları hem birimli hem de değişmeli halkadır.

Tanım 6: A halkasında sıfırdan farklı bir $x \in A$ elemanı için $xy = 0_A$ ya da $yx = 0_H$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir $y \in A$ bulunursa x 'e halkanın bir sıfır böleni, böyle bir x yoksa da sıfır bölensizdir denir.

Tanım7: Sıfır bölensiz ve değişmeli halkaya tamlik bölgesi denir.

Örnek 2: $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{p + r\sqrt{7} : p, r \in \mathbb{Z}\}$ kümesi “+” ve “ $\cdot$ ” işlemleri için bir tamlik bölgesidir.

Tanım 8: A bir tamlik bölgesi ve A 'nin sıfırdan farklı $\forall x \in A$ için $xy = 1_A$ olacak biçimde bir $y \in A$ bulunuyorsa A halkasına cisim denir. Yani her elemanın ikinci işleme göre tersi mevcutsa bu halkaya cisim denir.

Tanım 9: Bir A halkasında $\forall x \in A$ için $mx = 0_A$ şartını sağlayan bir m pozitif tam sayısı varsa bu tam sayılardan en küçüğüne halkanın karakteristiği denir. Bu şartı sağlayan bir pozitif tam sayı yoksa A halkasının karakteristiği sıfırdır.

Örnek 3: $\mathbb{Z}_6$ halkasının karakteristiği 6 'dır

Tanım 10: Bir A halkasında $x \in A$ için $x^m = 0_A$ şartını sağlayan bir $m \geq 1$ tam sayısı varsa x 'e bir nilpotent eleman denir.

Örnek 4: $\mathbb{Z}_{16}$ halkasında 2 elemanı nilpotent elemandır. Çünkü $\mathbb{Z}_{16}$ 'da $m = 4$ için $2^4 = \bar{0}$ 'dır.

Tanım 11: A bir halka ve $\emptyset \neq H \subseteq A$ olsun. Eğer H alt kümesi, halkadaki işlemlere göre bir halka oluyorsa o zaman H, A' nin bir alt halkasıdır denir.

Teorem 1: A bir halka ve $\emptyset \neq H \subseteq A$ olsun. H 'nin bir alt halka olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in H$ için

$$x - y \in H \quad \text{ve} \quad xy \in H \quad \text{olmalıdır.}$$

Tanım 12: A bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq A$ bir alt kümesi olsun.

$\forall x, y \in I$ ve $\forall r \in A$ için; $x - y \in I$ ve $ra \in I$ (ya da $ar \in I$) oluyorsa I 'ya A 'nın bir sol (ya da sağ) ideali denir.

I alt kümesi sol ve sağ ideal olabiliyorsa I 'ya iki yönlü ideal ya da kısaca ideal denir. Tanımdan dolayı da idealler, bir alt halkadır. Şayet halka değişmeli ise her sol ya da sağ ideal, bir ideal olur.

Tanım 13: A bir halka ve alt kümelerinden $\{0_A\}$ ve A , A halkasının daima bir idealidirler. Bu iki ideale halkanın aşık (trivial) idealleri denir.

Aşağıdaki tanım bir A halkasının keyfi bir alt kümesinin bir ideal olamadığı durumda bile ondan bir ideal üretilebileceğini söyler.

Tanım 14: A bir halka ve $\emptyset \neq K \subseteq A$ olsun. A 'nin, K 'yi kapsayan bütün ideallerinin kesişimine K 'nin ürettiği ideal denir ve $(K) = \bigcap_{K \subseteq I} I$ biçiminde gösterilir. Birimli ve değişmeli A halkası için

$$(K) = \left\{ \sum_{i=1}^k r_i x_i : x_i \in A, r_i \in K \right\} \dots (*) \quad \text{eşitliği sağlanır.}$$

Tanım 15: Şayet $K = \{r_1, \dots, r_n\}$ kümesi sonlu ise K nin üretmiş olduğu bu ideale sonlu üretilmiş ideal denir ve $(K) = (\{r_1, \dots, r_n\})$ ile gösterilir. Şayet özel olarak $(K) = (\{r\})$ ise yani tek eleman tarafından üretilirse (K) 'ye r ile üretilmiş temel ideal denir ve gösterimi (r) şeklindedir.

Sonuç 1: A bir halka ve $a \in A$ olsun. O zaman $(a) = \{ra : r \in A\}$ olur.

Örnek 5: Bir A halkasını ve A 'nin bir I idealini alalım. $\forall x, y \in A$ için

$$x \equiv y \pmod{I} \Leftrightarrow x - y \in I \quad \text{ile tanımlansın.}$$

Önerme 1: A halkasının bir I idealine göre tanımlanan $\equiv$ bağıntısı A 'de bir denklik bağıntısıdır.

$r \in A$ 'nın denklik sınıfı

$$\bar{r} = r + I = \{r + a : a \in I\} \quad (1.1)$$

'dir. Tüm denklik sınıflarının kümesi A/I biçiminde gösterilir.

Not 1: A halkasının bir I idealine göre tanımlanmış denklik sınıflarının A 'nın toplamsal grubu I alt grubuna göre tanımlanan denklik sınıfıdır.

Önerme 2: A halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I \quad (1.2)$$

$$(x + I) \odot (y + I) = (xy) + I \quad (1.3)$$

biçiminde tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine için A/I bir halkadır. Bu halkaya A 'nın I idealine göre bölüm halkası denir.

Tanım 17: $(A_1, +, \cdot)$ ve $(A_2, \Delta, *)$ iki halka ve $f: A_1 \rightarrow A_2$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in A_1$ için

$$f(x + y) = f(x) \Delta f(y) \quad (1.4)$$

$$f(x \Delta y) = f(x) * f(y) \quad (1.5)$$

eşitliği sağlanıyorsa f 'ye A_1 den A_2 ye bir halka homomorfizması denir. Şayet f birebir ise f 'ye monomorfizma, örten ise f 'ye epimorfizma, birebir ve örten ise f 'ye izomorfizma denir. İki halka arasında bir izomorfizma varsa bunlara izomorf halkalar denir ve $A_1 \cong A_2$ biçiminde gösterilir. Şayet f monomorfizma ise f 'ye gömme(embedding) denir.

Tanım 18: $f: A_1 \rightarrow A_2$ bir halka homomorfizması olsun. O halde bu homomorfizmanın çekirdeği

$$\text{Çek}(f) = \{x \in A_1 : f(x) = 0_{A_2}\} \text{ ile gösterilir.}$$

Teorem 2: $f: A_1 \rightarrow A_2$ bir halka homomorfizması ise f 'nin birebir olması için gerek ve yeter koşul $\text{Çek}(f) = \{0_{A_1}\}$ 'dır.

Teorem 3: $f: A_1 \rightarrow A_2$ bir halka homomorfizması ise $\text{Çek}f$, A_1 'nin bir idealidir.

Teorem 4 (Homomorfizma Teoremi): $f: A_1 \rightarrow A_2$ bir halka homomorfizması ise $A_1/\text{Çek}(f) \cong f(A_1)$ 'dir.

Sonuç 2: $f: A_1 \rightarrow A_2$ bir örten halka homomorfizması ise $A_1/\text{Çek}(f) \cong A_2$ dir.





2. ASAL İDEALLER

Bu bölümde temel olarak tanımlar, örnekler ve teoremler için [Gunduz] kitabını takip edeceğiz.

Tanım 1: R bir değişmeli halka, I da R 'nin kendisinden farklı bir ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ oluyorsa bu I idealine R halkasının bir asal ideali denir.

Örnek: Örneğin tamsayılar halkasında (3) ideali bir asal idealdir.

Tanım 2: R bir değişmeli halka ve I , R 'nin bir ideali fakat $I \neq R$ olsun. Eğer R halkasının I idealini kapsayan I 'den başka bir ideali yoksa bu I idealine R halkasının bir maksimal ideali denir.

Örnek: Örneğin tamsayılar halkasında (7) ideali bir maksimal idealdir. Fakat (0) ideali bir asal ideal olmasına rağmen $(0) \subset (7) \subset \mathbb{Z}$ kapsamalarından bir maksimal ideal değildir.

Tanım 3: R bir halka ve S , R 'nin bir alt kümesi olsun. $1 \in S, 0 \notin S$ ve $\forall s_1, s_2 \in S$ elemanları için $s_1 s_2 \in S$ sağlanıyorsa bu S kümesine R halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi denir.

Örnek 1: $S = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ 'nin bir çarpımsal kapalı bir alt kümesidir.

Tanım 4: R bir halka ve I , R nin bir asal ideali olmak üzere,

$$\sqrt{I} = \{r \in R : r^m \in I, \exists m \in \mathbb{Z}^+\} \quad (2.1)$$

kümesine I 'nin radikali denir.

Tanım 5: I , R halkasının kendisinden farklı bir ideali olsun. Birim elemandan farklı $\forall x, y \in R$ için $xy \in I$ iken $x \in I$ veya $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ olduğunda $y^m \in I$ oluyorsa I idealine R nin bir asalımsı (primary) ideali denir.

Teorem: I , R halkasının bir asalımsı ideali olduğunda $P = \sqrt{I}$ ideali de bir asal idealdir ve I idealine bir P -asalımsı ideal denir.

Örnek: Örneğin tamsayılar halkasında (8) ideali bir asalımsı ideal iken $(2) = \sqrt{(2^3)} = \sqrt{(8)}$ ideali bir asal idealdir.

2.1. 2-Yutan Asalımsı İdealler

Tanım 1: R birimli ve değişmeli bir halka ve $1 \neq 0$, I, R 'nin sıfırdan farklı uygun bir ideali olmak üzere $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ olduğunda $ab \in I$ veya $bc \in I$ veya $ac \in I$ oluyorsa I idealine 2-yutan ideal denir.

Tanım 2: I, R 'nin bir ideali olsun. $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ iken $ab \in I$ veya $ac \in \sqrt{I}$ veya $bc \in \sqrt{I}$ oluyorsa I idealine 2-yutan asalımsı ideali denir.

2-yutan asalımsı idealler, asal ideallerin hatta asalımsı ideallerin bir genişlemesidir. Yani her asal (asalımsı) ideal bir 2-yutan asalımsı idealdir, fakat aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere tersi doğru değildir.

Örneğin $\mathbb{Z}$ 'nin (6) ideali $\mathbb{Z}$ 'nin bir 2-yutan asalımsı idealidir, fakat asal ideal değildir hatta bir asalımsı ideal de değildir.

$2 \cdot 3 \in (6)$ iken $2 \notin (6)$ ve $3 \notin (6)$ yani asal ideal değildir, fakat $1 \cdot 2 \cdot 3 \in (6)$ iken $1 \cdot 2 \notin (6)$ fakat $(2 \cdot 3)^n \in (6)$ olacak şekilde bir $n > 1$ tamsayısı bulunabilir.

Tanım 3: I, R halkasının bir ideali olsun. $\forall a \in R/I$ için $I \subset (a)$ oluyorsa I idealine bölünmüş asal ideal denir. Bölünmüş asal idealler R halkasındaki tüm idealler için geçerlidir.

Tanım 4: R bir tamlık bölgesi ve sıfırdan farklı her $n, l \in R$ için $n|l$ veya $l|n$ oluyorsa R 'ye bir valuation domain denir. (Badawi, 2007)

Tanım 5: $U(R)$ dhalkasının bütün bölüm halkalarının kümesi ve I, R 'nin sıfır olmayan bir ideali olmak üzere, şu halde $I^{-1} = \{a \in U(A): aI \subset R\}$ dir. (Badawi, 2007)

Tanım 6: R bir tamlık bölgesi ve I, R nin sıfırdan farklı sonlu üretilmiş ideali olsun. Eğer $II^{-1} = R$ sağlanıyorsa R halkasına bir Prüfer domain denir. (Badawi, 2007)

Tanım 7: R bir tamlık bölgesi, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $II^{-1} = R$ sağlanıyorsa R halkasına bir Dedekind domain denir. (Badawi, 2007)

3. AMALGAMATION

3.1. Amalgamation Cebri

Bu bölümdeki temel tanım ve teoremler için D'Anna ve ark. (2009) 'nın çalışmasını takip edeceğiz.

Tanım 1: R_1 ve R_2 iki halka, J , R_2 'nin bir ideali ve $f: R_1 \rightarrow R_2$ bir halka homomorfizması olsun.

$$R_1 \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) : a \in R_1, j \in J\} \quad (3.1)$$

kümesine R_1 halkası ve R_2 halkasının J ideali boyunca f fonksiyonu altındaki amalgamationu (çoğaltması) denir.

$a_1, a_2 \in R_1$ ve $j_1, j_2 \in J$ olmak üzere

$$(a_1, f(a_1) + j_1) + (a_2, f(a_2) + j_2) := (a_1 + a_2, f(a_1) + f(a_2) + j_1 + j_2) \text{ ve}$$

$$(a_1, f(a_1) + j_1)(a_2, f(a_2) + j_2) := (a_1 a_2, f(a_1 a_2) + f(a_2)j_1 + f(a_1)j_2 + j_1 j_2)$$

işlemleri altında $R_1 \bowtie^f J$ amalgamation yapısı bir halka ifade eder.

Önerme 1: [D'Anna, M. (2009)] I , R_1 halkasının bir ideali olmak üzere, $I \bowtie^f J = \{(i, f(i) + j) : i \in I, j \in J\}$ kümesi $R_1 \bowtie^f J$ halkasının bir idealidir ve $g: R_1 \bowtie^f R_2 \rightarrow R_1 \bowtie^f J / I \bowtie^f J$ örten bir homomorfizmadır. Dahası $\frac{R_1 \bowtie^f J}{I \bowtie^f J} \cong \frac{R_1}{I}$ olur. (D'Anna vd., 2009)

İspat: $I \bowtie^f J$, $A \bowtie^f J$ 'nin bir ideali olmak üzere i ve π homomorfizmalarının $A \xrightarrow{i} A \bowtie^f J \xrightarrow{\pi} A \bowtie^f J / I \bowtie^f J$ bileşkesinden $A \xrightarrow{\pi i} A \bowtie^f J / I \bowtie^f J$ örten halka homomorfizması elde edilir. Bunun çekirdeği I olduğundan $\frac{A}{I} \cong \frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J}$ izomorfizması elde edilir.

Bu izomorfizma yardımıyla $R_1 \bowtie^f J$ 'nin 2 –yutan asalimsi ideallerini belirlemeye çalışacağız.

3.2. 2 –Yutan Asalımsı İdealler için Amalgamated Cebri

Bu bölümde [Issoual, M., ve ark. (2020)] ve [Gündüz, A. (2023)] makalelerinde kullanılan yöntemle Amalgamated halkasının 2 –yutan asalımsı ideallerini belirleyeceğiz. Bu amaçla yeni teorem ve sonuçlar vereceğiz. Bu kısım çalışmanın özgün kısmını oluşturmaktadır.

R_1 ve R_2 iki halka olsun ve $f: R_1 \rightarrow R_2$ homomorfizması, I, R_1 nin ve J, R_2 halkasının birer ideali olmak üzere çalışma boyunca $R_1 \bowtie^f J$, R_1 ile R_2 nin f altında J ideali boyunca bir amalgamationını belirtir.

Aşağıdaki kümeyi tanımlayalım.

$$I \bowtie^f J := \{(i, f(i) + j) : i \in I, j \in J\} \quad (3.2)$$

Açıktır ki $I \bowtie^f J$, kümesi $R_1 \bowtie^f J$ halkası için bir idealdir. Şimdi $I \bowtie^f J$ nin $R_1 \bowtie^f J$ halkası için ne zaman 2-yutan asalımsı ideal olduğu gösterilecektir.

Teorem 1: Bu bölümün başında tanımlanan notasyonlar altında;

$I \bowtie^f J$ nin, $R_1 \bowtie^f J$ halkasının bir 2-yutan ideali olması için gerek ve yeter koşul I nin R_1 halkasının bir 2-yutan ideali olmasıdır.

Bu teoremin ispatını verebilmek için bir kısım lemmalara ihtiyacımız var. Şimdi bunları verelim.

Lemma 1: [Badawi, A., ve ark. (2014)], Thm. 2.20]

R_1, R_2 iki halka $f: R_1 \rightarrow R_2$ halka homomorfizması olmak üzere,

i) I_2, R_2 nin bir 2-yutan asalımsı ideali $\Rightarrow f^{-1}(I_2)$ de R_1 'in bir 2-yutan asalımsı idealidir.

ii) Eğer f bir epimorfizma ve I_1, R_1 'de $I_1 \subseteq \text{Ker} f$ koşulunu sağlayan bir 2-yutan asalımsı ideal ise $f(I_1)$ de R_2 'de bir 2-yutan asalımsı idealdir.

İspat: $\forall a_1, b_1, c_1 \in R_1$ öyle ki $a_1 b_1 c_1 \in f^{-1}(I_2)$ olsun. Bu durumda $f(a_1 b_1 c_1) = f(a_1) f(b_1) f(c_1) \in I_2$ olur. Hipotezden I_2 bir 2-yutan asalımsı ideal olduğundan ya $f(a_1) f(b_1) \in I_2$ ya $f(b_1) f(c_1) \in \sqrt{I_2}$ ya da $f(a_1) f(c_1) \in \sqrt{I_2}$ ve böylece ya $a_1 b_1 \in f^{-1}(I_2)$ ya $b_1 c_1 \in f^{-1} \sqrt{I_2}$ ya da $a_1 c_1 \in f^{-1}(\sqrt{I_2})$. Ayrıca $f^{-1}(\sqrt{I_2}) = \sqrt{f^{-1}(I_2)}$

Eşitliğinden $f^{-1}(I_2)$ de bir 2-yutan asalımsı ideal olur.

ii) $\forall a_2, b_2, c_2 \in R_2$ ve $a_2 b_2 c_2 \in f(I_1)$ olsun. O zaman $\exists a_1, b_1, c_1 \in R_1$ vardır ki $f(a_1) = a_2, f(b_1) = b_2, f(c_1) = c_2$ yazılabilir. Buradan $f(a_1 b_1 c_1) = a_2 b_2 c_2 \in f(I_1)$ olur. $\text{Kerf} \subseteq I_1$ olduğundan $a_1 b_1 c_1 \in I_1$ olur. Hipotezden I_1 bir 2-yutan asalımsı ideal olduğundan ya $a_1 b_1 \in I_1$ ya $a_1 c_1 \in \sqrt{I_1}$ ya da $b_1 c_1 \in \sqrt{I_1}$ olur. Yani ya $f(a_1 b_1) = f(a_1) f(b_1) = a_2 b_2 \in f(I_1)$ ya $f(a_1 c_1) = a_2 c_2 \in f(\sqrt{I_2}) \subseteq \sqrt{f(I_2)}$ ya da $b_2 c_2 \in f(\sqrt{I_2}) \subseteq \sqrt{f(I_2)}$ olur. Böylelikle $f(I_1)$ de R_2 de bir 2-yutan asalımsı ideal olur.

Lemma2: [Badawi, A., ve ark. (2014), Sonuç 2.21]

I ve J , A 'nın iki farklı ideali ve $I \subseteq J$ olsun.

J, A 'nın bir 2-yutan asalımsı idealidir $\Leftrightarrow J/I$ 'nın A/I 'nın bir 2-yutan asalımsı ideali olmasıdır.

İSPAT: $\Rightarrow$: [Badawi, A., ve ark. (2014), Sonuç.2.2.1]

$\Leftarrow$: $\tilde{f}: A \rightarrow A/I$ bir halka homomorfizmasıdır.

$$a \rightarrow a + I$$

$J/I, A/I$ 'da bir 2-yutan asalımsı ideal ise (Lemma 1(i) 'den)

$f^{-1}(J/I) = J$ de A 'da bir 2-yutan asalımsı ideal olur.

Özel olarak I 'nın A 'da bir 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul (0) idealinin A/I 'da 2-yutan asalımsı ideal olmasıdır.

Burada $I = J$ alırsa; " I, A 'nın idealidir $\Leftrightarrow (0), A/I$ 'nın idealidir." elde edilir.

İspat: Teorem1 D'Anna ve ark. (2009) Proposition 5.1.(2) 'den $\frac{A \rtimes^f J}{I \rtimes^f J} \cong \frac{A}{I}$ olduğunu hatırlayalım.

- i. Lemma 2 'den I idealinin A halkasında bir 2-yutan asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul (0) idealinin A/I halkasının bir 2-yutan asalımsı ideali olmasıdır. Yukarıdaki izomorfizmadan (0) idealinin A/I halkasının bir 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul (0) idealinin $\frac{A \rtimes^f J}{I \rtimes^f J}$ halkasının bir 2-yutan asalımsı ideali olmasıdır. Öte yandan tekrar Lemma 2' den (0) idealinin

$\frac{A \rtimes^f J}{I \rtimes^f J}$ nin bir 2-yutan asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul $I \rtimes^f J$ idealinin $A \rtimes^f J$ halkasının bir 2-yutan asalımsı ideal olması demektir. Gerektirme zincirinden ispat biter.



4. SONUÇLAR

- i. Eğer I ; A 'nın bir 2-yutan asalımsı ideali ise $\sqrt{I} \bowtie^f J$ de $A \bowtie^f J$ bir 2- yutan asal idealidir.
- ii. P_1, P_2 A ' da bir asal ideal I_1, P_1 -asalımsı ideal ve I_2, P_2 -asalımsı ideal olmak üzere
 - $I_1 I_2 \bowtie^f J$ 'de $A \bowtie^f J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.
 - $I_1 \cap I_2 \bowtie^f J$ 'de $A \bowtie^f J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.
- iii. Eğer P , A 'nın bir asal ideali ise $P^n \bowtie^f J$ 'de $A \bowtie^f J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.
- iv. Eğer A bir “divided” halkası ve I da onun bir ideali ise $I \bowtie^f J$, $A \bowtie^f J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı ideali olur.
- v. Eğer A bir “chained” halkası ve I da A 'nın bir ideali ise $I \bowtie^f J$, $A \bowtie^f J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı ideali olur.
- vi. Eğer $S^{-1}I$, $S^{-1}A$ 'nın bir 2-yutan asalımsı ideali ve $S \cap Z_I(A) = \emptyset \Rightarrow I \bowtie^f J$ 'de $A \bowtie^f J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı ideali olur.
- vii. Eğer I , A 'nın bir 2-yutan asalımsı ideali ve $I \cap S = \emptyset \Rightarrow f \sim: S^{-1}A \rightarrow S^{-1}B$ halka homomorfizması için $S^{-1}I \bowtie^{f \sim} S^{-1}J$ de $S^{-1}A \bowtie^{f \sim} S^{-1}J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

İspatlar:

- i. Badawi ve ark. (2014) theorem 2.2 'den makalesinden biliyoruz ki I ; A 'nın bir 2-yutan asalımsı ideali ise $\sqrt{I}$ de A 'nin bir 2- yutan asal idealidir. Böylelikle ana teoremimizden I ; A 'nın bir 2-yutan asalımsı ideali ise $\sqrt{I} \bowtie^f J$ de $A \bowtie^f J$ bir 2- yutan asal idealidir sonucuna varırız.
- ii. Badawi ve ark. (2014) makalesi theorem 2.4 'den biliyoruz ki P_1, P_2 A ' da bir asal ideal I_1, P_1 -asalımsı ideal ve I_2, P_2 -asalımsı ideal olmak üzere $I_1 I_2$ ve $I_1 \cap I_2$ de A 'nin bir 2-yutan asalımsı ideali olur. Böylelikle ana teoremimizden $I_1 I_2 \bowtie^f J$ ve $I_1 \cap I_2 \bowtie^f J$ 'de $A \bowtie^f J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı ideali olur.

- iii. Badawi ve ark. (2014) makalesi theorem 2.8 ‘den biliyoruz ki P , A ’nin ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali ise P^n de A ’nin bir 2- yutan asal idealidir. Böylelikle ana teoremimizden $P^n \bowtie^f J$ ‘de $A \bowtie^f J$ ‘nin bir 2-yutan asalımsı ideali olur.
- iv. Badawi ve ark. (2014) makalesi theorem 2.10 ‘den biliyoruz Eğer A bir “divided” halkası ve I da onun bir ideali ise I, A ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali olur. Böylelikle ana teoremimizden eğer A bir “divided” halkası ve I da onun bir ideali ise $I \bowtie^f J, A \bowtie^f J$ ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali olur.
- v. Badawi ve ark. (2014) makalesi theorem 2.10 ‘den biliyoruz Eğer A bir “chained” halkası ve I da onun bir ideali ise I, A ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali olur. Böylelikle ana teoremimizden eğer A bir “chained” halkası ve I da onun bir ideali ise $I \bowtie^f J, A \bowtie^f J$ ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali olur.
- vi. Badawi ve ark. (2014) makalesi theorem 2.22(1) ‘den biliyoruz Eğer $S^{-1}I$, $S^{-1}A$ ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali ve $S \cap Z_I(A) = \emptyset$ olsun. Buradan I, A ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali olur. Böylelikle ana teoremimizden Böylelikle ana teoremimizden $I \bowtie^f J$ ‘de $A \bowtie^f J$ ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali olur.
- vii. Badawi ve ark. (2014) makalesi theorem 2.22(2) ‘den biliyoruz eğer I, A ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali ve $I \cap S = \emptyset$ ise $\check{f}: S^{-1}A \rightarrow S^{-1}B$ halka homomorfizması için $S^{-1}I, S^{-1}A$ ‘nın bir 2-yutan asalımsı ideali olur. Böylelikle ana teoremimizden $S^{-1}I \bowtie^{\check{f}} S^{-1}J$ de $S^{-1}A \bowtie^{f\sim} S^{-1}J$ ‘nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

Örnekler:

R bir halka ve I onun bir ideali olsun. Eğer I bir 2-yutan asal ideal ise aynı zamanda bir 2-yutan asalımsı idealdir. Örneğin $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasından $I = (12)$ ideali bir 2-yutan asal ideal değildir fakat bir 2-yutan asalımsı idealdir. Çünkü

$2 \cdot 2 \cdot 3 \in I$ iken $2 \cdot 2 \notin I$ ve $2 \cdot 3 \notin I$ olduğundan 2-yutan asal ideal değildir. Fakat $2 \cdot 2 \cdot 3 \in I$ için $2 \cdot 2 \notin I$ olmasına rağmen $2 \cdot 3 \in \sqrt{I}$ dır. Çünkü $(2 \cdot 3)^n = 6^n \in I = (12)$ olacak şekilde bir $n > 1$ tam sayısı $n = 2$ alınabilir.

Ayrıca açıktır ki R ‘nın tüm asalımsı idealleri aynı zamanda R ‘nın bir 2-yutan asalımsı idealleridir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$ ‘nin (6) ideali $\mathbb{Z}$ ‘nin bir 2-yutan asalımsı idealidir, fakat bir asalımsı ideali değildir.

$2 \cdot 3 \in (6)$ iken $2 \notin (6)$ ve $3 \notin (6)$ yani asal ideal değildir, fakat $1 \cdot 2 \cdot 3 \in (6)$ iken $1 \cdot 2 \notin (6)$ fakat $(1 \cdot 3)^n \in (6)$ veya $(2 \cdot 3)^n \in (6)$ olacak şekilde bir $n > 1$ tamsayısı bulunabilir.

Ayrıca biliyoruz ki I, R 'nın bir 2-yutan asalımsı ideal ise $\sqrt{I}$, R 'nın bir 2-yutan asalımsı ideali olur.

$R_1 = \mathbb{Z}$, $R_2 = \mathbb{Z}$, $I = \mathbb{Z}$ ve $f: R_1 \rightarrow R_2$ bir halka homomorfizması olmak üzere $I = (12) = 12\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ 'nin bir asalımsı ideali olduğundan aynı zamanda bir 2- yutan asalımsı ideali olur. Dolayısıyla Main Theromden [Thu 2.2.(1)] (Ali)

$I \propto^f J$, $R_1 \propto^f J$ 'nin bir 2-yutan asalımsı ideali olur. $12\mathbb{Z} \propto^f \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z} \propto^f \mathbb{Z}$ 'nin bir 2-yutan asalımsı ideali olur. By [[BTT] Ex. 2.6] 'dan



KAYNAKLAR

- Alhazmy, K., Almahdi, F. A. A., Bouba, E. M. ve Koc, S. (2025). Some results concerning uniformly (1-Absorbing) primary ideals. *Journal of Algebra and its Applications*.
- Anderson, D. D. ve Winders, M. (2009). Idealization of a module. *Journal of commutative algebra*, 1(1), 3-56.
- Badawi, A. (2007). On 2-absorbing ideals of commutative rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 75(3), 417-429.
- Badawi, A. ve Celikel, E. Y. (2020). On 1-absorbing primary ideals of commutative rings. *Journal of Algebra and its Applications*, 19(6), 2050111.
- Badawi, A., Tekir, U. ve Yetkin, E. (2014). On 2-absorbing primary ideals in commutative rings. *Bull. Korean Math. Soc*, 51(4), 1163-1173.
- Çallıalp, F. (1994). *Cebir*. Sakarya Üniversitesi.
- D'Anna, M. (2006). A construction of Gorenstein rings. *Journal of Algebra*, 306(2), 507-519.
- D'Anna, M. (2009). Amalgamated algebras along an ideal. *Commutative Algebra and its Applications/Walter de Gruyter*.ß
- D'Anna, M. ve Fontana, M. (2007). An amalgamated duplication of a ring along an ideal: The basic properties. *Journal of Algebra and its Applications*, 6(3), 443-459.
- D'Anna, M., Finocchiaro, C. A. ve Fontana, M. (2010). Properties of chains of prime ideals in an amalgamated algebra along an ideal. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 214(9), 1633-1641.
- Gündüz, A. (2021). *Halka teorisi*. Nobel Akademik Yayıncılık.
- Gündüz, A. (2023). On 1-absorbing prime and 1-absorbing primary ideals of amalgamations. *Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences*, 76(9), 1317-1325.
- Issoual, M., Mahdou, N. ve Moutui, M. A. S. (2020). On n-Absorbing and Strongly N-Absorbing Ideals of Amalgamation. *Journal of Algebra and Its Applications*, 19(10), 2050199.
- Kabbaj, S. E. ve Mahdou, N. (2004). Trivial extensions defined by coherent-like conditions. *Communications in Algebra*, 32(10), 3937-3953.
- Mahdou, N., Moutui, M. A. S. ve Zahir, Y. (2020). Weakly prime ideals issued from an amalgamated algebra. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(3), 1159-1167.
- Nagata, M. (1962). *Local rings*. Interscience Tracts in Pure and Appl. Math.

- Ünye Telli, G. (2024). *2-Yutan idealler için Amalgamated Cebri= 2-Absorbing Ideals of Amalgamations* [Yüksek lisans tezi]. Sakarya Üniversitesi.
- Yassine, A., Nikmehr, M. J. ve Nikandish, R. (2021). On 1-absorbing prime ideals of commutative rings. *Journal of Algebra and its Applications*, 20(10), 2150175.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ali KÜÇÜKÖZER

ÖĞRENİM DURUMU:

- Lisans** : 2007, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2010-2025 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı.
- “Depresyonel Düşünceler” adında yayınlanmış bir eseri bulunmaktadır.