

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**3 BOYUTLU LİE GRUPLARDA VERİLEN BİR EĞRİ BOYUNCA
ORTALAMA EĞRİLİĞİ SABİT OLAN YÜZEYLER**

Sevinç TAZE

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

HAZİRAN 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

3 BOYUTLU LİE GRUPLARDA VERİLEN BİR EĞRİ BOYUNCA
ORTALAMA EĞRİLİĞİ SABİT OLAN YÜZEYLER

Tez Yazarı
Sevinç TAZE

Danışman
Doç. Dr. Zühal KÜÇÜKARSLAN YÜZBAŞI

HAZİRAN 2022
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: 3 Boyutlu Lie Gruplarda Verilen Bir Eğri Boyunca Ortalama Eğriligi Sabit Olan Yüzeyler

Yazarı: Sevinç TAZE

İlk Teslim Tarihi: 11.05.2022

Savunma Tarihi: 17.06.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Doç. Dr. Zühal KÜÇÜKARSLAN YÜZBAŞI Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i>	Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi		Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Ahmet KAZAN Malatya Turgut Özal Üniversitesi, Doğanşehir Vahap Küçük Meslek Yüksekokulu		Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “3 Boyutlu Lie Gruplarda Verilen Bir Eğri Boyunca Ortalama Eğriliği Sabit Olan Yüzeyler” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

17.06.2022

Sevinç TAZE



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında değerli zamanını ayıran ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren Sayın hocam Doç. Dr. Zühal KÜÇÜKARSLAN YÜZBAŞI' na minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmam süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen eşim Atilla TAZE' ye ve bana karşı olan inançlarını her zaman hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması “3 boyutlu Lie Gruplarda verilen Bir Eğri Boyunca Ortalama Eğriliği Sabit Olan Yüzeyler” konulu ve “FF.21.15” kod nolu FÜBAP projesi tarafından desteklenmektedir.

Sevinç TAZE
ELAZIĞ, 2022



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	İV
İÇİNDEKİLER	V
ÖZET	Vi
ABSTRACT	Vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	Viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	İx
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. 3-BOYUTLU LİE GRUPLARINDA ORTALAMA EĞRİLİĞİ SABİT OLAN YÜZEYLER.....	8
4. LİE GRUPLARINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ BOYUNCA SABİT ORTALAMA EĞRİLİKLİ YÜZEYLER.....	16
4.1. TN-Smarandache Eğrisi.....	16
4.2. NB-Smarandache Eğrisi	22
4.3. TB-Smarandache Eğrisi.....	27
4.4. TNB-Smarandache Eğrisi	32
5. LİE GRUPLARINDA ALTERNATİF$\{N,C,W\}$ÇATISI İLE VERİLEN EĞRİ BOYUNCA SABİT ORTALAMA EĞRİLİKLİ YÜZEYLER	37
6. SONUÇLAR.....	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

3 Boyutlu Lie Gruplarda Verilen Bir Eğri Boyunca Ortalama Eğriliği Sabit Olan Yüzeyler

Sevinç TAZE

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2022, Sayfa: ix + 44

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Lie gruplarda sabit ortalama eğriliğine sahip yüzeyler için yeterli şartlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçları destekleyecek bazı örnekler verilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tezin giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayı ve 3-boyutlu Lie grubu ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm ve sonrası, tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Lie grubunda alınan herhangi bir eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler bulmak için şartlar elde edilmiş ve örnekler verilmiştir. Dördüncü bölüm, 3-boyutlu Lie grubunda verilen eğrinin Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler bulmak için şartlar elde edilmiş ve örnekler oluşturulmuştur. Beşinci bölümde ise 3-boyutlu Lie grubunda alternatif $\{N, C, W\}$ çatısına göre verilen bir eğriden geçen ve ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler bulmak için şartlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ortalama Eğrilik, Yüzey Teorisi, Lie Grupları

ABSTRACT

Surfaces with Constant Mean Curvature Along a Given Curve in 3-Dimensional Lie Groups

Sevinç TAZE

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

June 2022, Pages: ix + 44

In this study, sufficient conditions are obtained for surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional Lie groups. Some examples are given to support the results obtained.

This study consists of five chapters. The first chapter, is devoted to the introduction. In the second part, basic definitions and theorems related to 3-dimensional Euclidean space and Lie group are given. The third part and beyond constitutes the original part of the thesis. In this section, conditions are obtained to find surfaces whose mean curvature is constant along a given curve in Lie group. In the fourth part conditions are obtained and examples are created to find surfaces with constant mean curvature along Smarandache curves in terms of the Frenet frame of the curve given in the 3-dimensional Lie group. In the fifth part, conditions are obtained to find surfaces with a constant mean curvature and passing through a given curve according to the alternative $\{N, C, W\}$ frame in the 3-dimensional Lie group.

Keywords: Mean Curvature, Surface Theory, Lie Groups

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_1(s, t)$ yüzeyi	12
Şekil 3.2. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_2(s, t)$ yüzeyi	13
Şekil 3.3. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_3(s, t)$ yüzeyi	14
Şekil 3.4. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_4(s, t)$ yüzeyi	14
Şekil 3.5. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_5(s, t)$ yüzeyi	15



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\ \cdot\ $	: Norm operatörü
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: İç çarpım operatörü
$\wedge$	: Öklid uzayında vektörel çarpım operatörü
T	: Teğet vektör alanı
N	: Asli normal vektör alanı
B	: Binormal vektör alanı
κ_1	: Eğrinin birinci eğriliği
κ_2	: Eğrinin ikinci eğriliği, burulması veya torsiyonu
$\bar{\kappa}_2$	: Geodezik torsiyon
$\{T, N, B\}$	: Hareketli Frenet çatısı
G	: 3-boyutlu Lie grubu
g	: Lie cebiri
$\tilde{h}$	: Harmonik eğrilik
H	: Ortalama Eğrilik
$[X, Y]$	: X ve Y vektör alanlarının Lie çarpımları
e	: G Lie grubunun birim elemanı
$T_G(e)$	: G Lie grubunun birim noktasındaki tanjant uzay
$\{N, C, W, x, y\}$	: Hareketli alternatif çatı
x	: Alternatif çatısına göre birinci eğrilik
y	: Alternatif çatısına göre ikinci eğrilik

1. GİRİŞ

Geometride, özellikle diferansiyel geometride eğriler teorisi önemli bir çalışma alanıdır. Eğriler üzerine Öklid ve Öklid olmayan uzaylarda birçok çalışma yapılmış ve üzerinde çalışılmaya devam edilmektedir. Eğrilerin karakterizasyonu problemi öne çıkan bir araştırma konusudur. Bu problemin çözümünde verilen eğrinin Frenet denklemleri (bu denklemler Serret-Frenet denklemleri olarak da bilinmektedir) ve eğrinin eğrilikleri önemli ve kullanışlı bir araçtır. Bu kavramlar yardımıyla eğrinin geometrik özellikleri incelenmektedir. Örnek olarak, verilen bir regüler α eğrisi eğrilikleri yardımıyla şu şekilde karakterize edilebilir. Eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri $\kappa_1(s)=0$ ve $\kappa_2(s)=0$ ise eğri bir geodeziktir. Eğrinin birinci eğriliği $\kappa_1(s)\neq 0$ bir sabit ve ikinci eğriliği $\kappa_2(s)=0$ ise eğri bir çember, eğrinin $\kappa_1(s)$ ve $\kappa_2(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler ise eğri bir dairesel helis eğrisidir.

Yüzey oluşturma problemleri birçok bilim insanı tarafından üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Bunlardan Wang vd ilk olarak bu tür problemi ortaya atarak bir çalışma yapmışlardır [18]. Verilen keyfi bir eğriden geçen ve bu eğriyi ortak geodezik kabul eden yüzeyleri elde etmiştir. Kasap vd ise Wang vd tarafından kullanılan sapma fonksiyonlarını genelleştirerek daha genel bir ortak geodezikli yüzey ailesi elde etmiştir [10,18]. Bunlardan farklı olarak Coşanoğlu ve Bayram 3- Boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğriden geçen sabit ortalama eğrilikli yüzeyleri çalışmıştır [3]. Ayrıca Öklidyen, Non Öklidyen ve Lie gruplarda verilen bir eğriden geçen ve bu eğrileri özel eğri kabul eden yüzeyler ve karakterizasyonları [2,19,20,21,22,23] verilmiştir. Biz bu çalışmada yukarıda bahsedilen çalışmalar ışığında 3 boyutlu Lie gruplarından alınan herhangi keyfi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler bulmak için yeterli şartları elde ettik.

Smarandache eğrisi, regüler bir eğrinin Frenet vektörleri ile üretilen yer vektörüne sahip regüler eğri olarak tanımlanır. Bu konu ile ilgili ilk çalışmalar, A. T Ali tarafından oluşturuldu. 3 boyutlu Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerini ifade etmiş ve özel bir durumun Serret-Frenet elemanlarını tanıtmıştır [1].

Bu çalışmada 3-boyutlu Lie gruplarda sabit ortalama eğriliğine sahip yüzeyler, verilen Smarandache eğrilerinden geçen sabit ortalama eğrilikli yüzeyler ve son olarak $\{N, C, W\}$ çatısına göre alınan keyfi bir eğriden geçen sabit ortalama eğrilikli yüzeyler elde edildi. Alınan keyfi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliğin sabit olması için sapma fonksiyonlarının sağlaması gereken şartlar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: Bir reel afin uzay A ve A birleşen bir vektör uzayı V olsun. V de ;
 $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan iç çarpım varsa A afin uzayına **Öklid uzayı** olarak adlandırılır [8].

Tanım 2.2: U ve V birer topolojik uzay olsun. $f: U \rightarrow V$ fonksiyonu sürekli , f^{-1} var ve f^{-1} sürekli ise f ye U dan V ye bir **homeomorfizm** olarak adlandırılır [8].

Tanım 2.3: $\mathbb{R}^3$ uzayında iki vektör $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y}=(y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere;
 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ eşitliğiyle tanımlanan

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}^3$ uzayında **Öklid iç çarpımı** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.4: $\mathbb{R}$ uzayında bir vektör $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ eşitliğiyle tanımlanan $\vec{x} \rightarrow \|\vec{x}\|$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$ uzayında **norm** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.5: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisini göz önüne alalım. $T(s) = \alpha'(s)$ şeklinde verilen $T(s)$ vektörüne α nın $\alpha(s)$ noktasındaki **teğet vektörü** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.6: $\mathbb{R}$ uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için $\kappa_1: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa_1(s) = \|\vec{T}'(s)\|$ biçiminde tanımlanan fonksiyona α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** ve $\kappa_1(s)$ değerine ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.7: $\alpha: I \rightarrow E^n$ biçiminde C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne E^n uzayı içinde bir **eğri** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.8: $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ yani eğrinin her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise eğri **regüler eğri** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.9: Eğer $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α birim hızlı eğri, t ise α eğrisinin **yay parametresi** olarak adlandırılır [8].

Tanım 2.10: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisini göz önüne alalım. $N(s) = \frac{1}{\kappa_1} T'(s)$ eşitliği ile verilen $N(s)$ vektörüne α nın $\alpha(s)$ noktasındaki **asli normal** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.11: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisini alalım. $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ eşitliği ile verilen $B(s)$ vektörüne α nın $\alpha(s)$ noktasındaki **binormal** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.12: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere; $\kappa_2: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa_2(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ biçiminde tanımlanan fonksiyona $\vec{a}$ eğrisinin

$\alpha(s)$ noktasındaki **burulma fonksiyonu** $\kappa_2(s)$ değerine ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.13: U, E^2 de açık alt küme olsun.

$\phi : U \subseteq E^2 \rightarrow E^3$ diferansiyellenebilir dönüşüm olmak üzere $\phi(U) \subseteq E^3$

$$(u,v) \rightarrow \phi(u,v)$$

alt kümesine E^3 de **parametrize edilmiş yüzey** denir.

Eğer ϕ dönüşümü regüler ise yüzey **regüler parametrize edilmiş yüzey** adını alır [11].

Tanım 2.14: Bir regüler S yüzeyi E^3 ün aşağıdaki özelliklerini sağlayan bir alt kümesidir $\forall P \in S$ için $V \subseteq E^3$ açığı ile bir $U \subseteq E^2$ açığı bulunabilir ve $\phi : U \rightarrow S \cap V \subseteq E^3$ dönüşümü için ;

- i. ϕ bir homeomorfizmdir.
- ii. ϕ bir diferansiyellenebilirdir.
- iii. ϕ regülerdir. (ϕ nin ϕ_* türev dönüşümünün jakobien matrisi $j(\phi, P)$ olmak üzere $\text{rank} j(\phi, P) = 2$ dir.) özellikleri sağlanır [11].

Tanım 2.15: $v_p \in T_p(M)$ olmak üzere

$$k_p(v_p) = \left\langle S \left(\frac{v_p}{\|v_p\|} \right), \frac{v_p}{\|v_p\|} \right\rangle$$

şeklinde tanımlanan $k_p(v_p)$ değerine M yüzeyinin p noktasında, v_p doğrultusundaki **normal eğriliği** denir [15].

Tanım 2.16: S, E^3 Öklid uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde regüler bir eğri alalım. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, $\alpha(s)$ noktasında S yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α ya S yüzeyi üzerinde bir **eğrilik çizgisi** olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.17: S, E^3 Öklid uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde regüler bir eğri alalım. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, $\alpha(s)$ noktasında S yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α ya S yüzeyi üzerinde bir **asimptotik eğri** olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.18: S, E^3 Öklid uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde regüler bir eğri alalım. S yüzeyinin birim dik vektör alanı n olsun α'' vektör alanı, $n \circ \alpha$ vektör alanına paralel ise α ya S yüzeyi üzerinde bir **geodezik eğri** olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.19: $\varphi : U \rightarrow E^3$ bir lokal yüzey olsun. U yüzey birim normal vektör alanı olmak üzere;

$$E = \|x_u\|^2, F = \langle x_u, x_v \rangle, G = \|x_v\|^2$$

şeklinde tanımlı $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonlarını alalım. O zaman

$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ifadesine φ in **birinci temel formu** denir. E, F, G ye ise φ in birinci temel formunun kat sayıları denir [7].

Tanım 2.20: $\varphi : U \rightarrow E^3$ bir regüler lokal yüzey olsun. U yüzey birim normal vektör alanı olmak üzere;

$$l = -\langle U_u, x_u \rangle = \langle U, x_{uu} \rangle$$

$$m = \langle U_v, x_u \rangle = \langle U, x_{uv} \rangle = \langle U_u, x_{vu} \rangle = -\langle U_u, x_v \rangle$$

$$n = -\langle U_v, x_v \rangle = \langle U, x_{vv} \rangle$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre

$ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$ ifadesine φ in **ikinci temel formu** adı verilir. l, m, n ye ise φ in ikinci temel formunun kat sayıları adı verilir [7].

Teorem 2.21: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisini alalım. Eğrinin Frenet vektör alanları, eğrilik ve burulması sırasıyla κ_1 ve κ_2 olsun.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

olur.

Bu eşitliklere verilen eğri için Frenet formülleri adı verilir [15].

Teorem 2.22: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi alalım. Eğrinin Frenet vektör alanları, eğriliği ve burulması sırasıyla κ_1 ve κ_2 olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}, \quad N = B \wedge T,$$

$$\kappa_1 = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \kappa_2 = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}.$$

Teorem 2.23: $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizasyonu ile regüler bir $M = \varphi(U)$ yüzeyi verilsin. E, F, G yüzeyin birinci temel form katsayıları; l, m, n de yüzeyin ikinci temel form katsayıları olmak üzere, yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{En - 2Fm + Gl}{EG - F^2}$$

ile bulunur.

M yüzeyinin şekil operatörü matrisi ,

$$S = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} \text{ olduğundan,}$$

determinantın özelliklerinden

$$H = \frac{iz(S)}{2} = \frac{1}{2} iz \left(\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} iz \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} lG - mF & -Gm + Fn \\ -Fl + Em & nE - mF \end{bmatrix} = \frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2}$$

elde edilir.

Tanım 2.24: G bir küme olsun. G kümesi üzerinde tanımlanan

$$N: G \times G \rightarrow G$$

$$(r, s) \rightarrow N(r, s)$$

ikili işlemi kapalı, birleşmeli ve ayrıca etkisiz elemana ve ters elemana sahip ise G bir **grup** olarak adlandırılır [6].

Tanım 2.25: G bir grup ve N bir diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere ;

$$L_1: G \text{ nin her elemanı } M \text{ nin noktaları ile çakışır.}$$

$$L_2: N \times N \rightarrow N, (a, b) \rightarrow ab^{-1} \text{ işlemi her yerde diferansiyellenebilirdir.}$$

aksiyomları sağlanırsa N ye Lie grubunun temel manifoldu G ye Lie grubunun temel grubu ve (N, G) ikilisi ise **Lie grubu** olarak adlandırılır [9].

Tanım 2.26: R cismi üzerinde bir vektör uzayı U olsun.

$$[,]: U \times U \rightarrow U$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümü ,

- i. Bilineerlik
- ii. Ters simetrik
- iii. Jakobi özdeşliği

$$[X, Y], Z + [Y, Z], X + [Z, X], Y = 0$$

şartları sağlanıyorsa R üstünde bir Lie operatörü veya parantez operatörü adı verilir.

(U, [,]) ikilisine ise **Lie cebiri** denir [9].

Tanım 2.27: G bir Lie grubu olsun bir $g_0 \in G$ noktasında $\forall g \in G$ için ;

$$l_{g_0}: G \rightarrow G, l_{g_0}(g) = g_0 g$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme G üzerinde **sol paralelizm (öteleme)** adı verilir.

Benzer biçimde

$$r_{g_0}: G \rightarrow G, r_{g_0}(g) = g g_0$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme de G üzerinde **sağ paralelizm (öteleme)** adı verilir [9].

Tanım 2.28: 3 boyutlu Lie grubunda yay parametrelili bir eğri $\alpha: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa_1, \kappa_2\}$ olsun.

$$\overline{\kappa_2} = \frac{1}{2} \langle [T, N], B \rangle$$

veya

$$\overline{\kappa_2} = \frac{1}{2\kappa_1^2 \kappa_2} \langle [T'', T], T' \rangle + \frac{1}{4\kappa_1^2 \kappa_2} \|[T, T]\|^2$$

dir [5].

Tanım 2.29: A , 3 boyutlu Lie grubu ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa_1, \kappa_2\}$ olmak üzere ; α eğrisinin eğriliği: $\kappa_1 = \|T'\|$ şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 2.30: 3 boyutlu Lie grubunda yay parametrelili bir eğri $\alpha: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa_1, \kappa_2\}$ olmak üzere;

$$\tilde{h} = \frac{\kappa_2 - \overline{\kappa_2}}{\kappa_1}$$

eşitliği ile verilen $\tilde{h}$ fonksiyonuna α eğrisinin **harmonik eğriliği** denir [13].

Teorem 2.31: 3 boyutlu Lie grubu G de birim hızlı bir eğri $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa_1, \kappa_2\}$ olsun. G Lie grubunun Levi –Civita konneksiyonu D olmak üzere α eğrisinin Frenet elemanları için

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T N \\ D_T B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. Buradan;

- i. α eğrisinin teğet vektör alanı T için

$$\begin{aligned} D_T T &= T' + \frac{1}{2} [T, T] \\ T' &= \kappa_1 N \end{aligned}$$

dir.

- ii. α eğrisinin asli normal vektör alanı N için

$$\begin{aligned} D_T N &= N' + \frac{1}{2} [T, N] \\ N' &= -\kappa_1 T + (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) B \end{aligned}$$

dir.

- iii. α eğrisinin binormal vektör alanı B için

$$\begin{aligned} D_T B &= B' + \frac{1}{2} [T, B] \\ B' &= -(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) N \end{aligned}$$

dir.

(i),(ii),(iii) eşitliklerinden α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ için ;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) \\ 0 & -(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

türev formülleri elde edilir.

Teorem 2.32: G bi invaryant metriğe sahip 3 boyutlu Lie grup olsun. O halde $SO(3)$ Lie gruplarında değişmeli gruplardan biridir. Aşağıdaki ifadeleri sağlar [5].

- (i) Eğer G değişimli $SO(3)$ ise, $\overline{\kappa_2}(s) = \frac{1}{2}$
- (ii) Eğer $G \cong SU(2)$, $\overline{\kappa_2}(s) = 1$
- (iii) Eğer G değişmeli bir grup ise, $\overline{\kappa_2}(s) = 0$

3. 3-BOYUTLU LİE GRUPLARINDA ORTALAMA EĞRİLİĞİ SABİT OLAN YÜZEYLER

$\alpha(s)$, 3-boyutlu Lie Gruplarında $\kappa_1(s)$ eğrilikli, $\kappa_2(s)$ burulmalı, birim hızlı regüler bir eğri alalım ve her s için $\alpha''(s) \neq 0$ olsun. $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $\alpha(s)$ eğrisinden geçen ve bu eğrinin Frenet çatısına bağlı olarak yazılan yüzey;

$$P(s, t) = \alpha(s) + f(s, t)T(s) + g(s, t)N(s) + h(s, t)B(s) \quad (3.1)$$

$$L_1 \leq s \leq L_2, T_1 \leq t \leq T_2,$$

(3.1) yüzeyi ile verilir.

$s \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $t \in J \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $\alpha: I \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri, $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet vektörleri olmak üzere,

$$P: I \times J \rightarrow G$$

(1) yüzeyi için $P(s, t_0) = \alpha(s)$ olacak biçimde

$$f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = 0 \quad (3.2)$$

$$L_1 \leq s \leq L_2, \exists t_0 \in [T_1, T_2]$$

(3.2) koşulunu sağlayan $f(s, t)$, $g(s, t)$, $h(s, t)$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonları varsa $\alpha(s)$, $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğridir veya $P(s, t)$ yüzeyi $\alpha(s)$ eğrisinden geçer denir. Burada $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ fonksiyonlarına (sapma fonksiyonları) C^1 sınıfından marching-scale fonksiyonlardır

$P(s, t)$ yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$H(s, t) = \frac{\det(P_{ss}, P_s, P_t) \|P_t\|^2 + \det(P_{tt}, P_s, P_t) \|P_s\|^2 - 2 \det(P_{st}, P_s, P_t) \langle P_s, P_t \rangle}{2(\|P_s\|^2 \|P_t\|^2 - \langle P_s, P_t \rangle^2)^{\frac{3}{2}}}(s, t) \quad (3.3)$$

(3.3) formülüyle hesaplanır.

Burada $\frac{\partial P}{\partial s} = P_s, \frac{\partial P}{\partial t} = P_t, \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = P_{ss}, \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = P_{tt}$ dir.

Şimdi $P(s, t)$ yüzeyinin kısmi türevlerini alalım,

$$\begin{aligned} P_s(s, t) &= \alpha' + f_s T + f T' + g_s N + g N' + h_s B + h B' \\ &= (1 + f_s - g \kappa_1) T + (f \kappa_1 + g_s - h(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})) N + (g(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) + h_s) B, \\ P_t(s, t) &= f_t T + g_t N + h_t B, \\ P_s(s, t_0) &= T, \\ P_{ss}(s, t_0) &= \kappa_1 N, \\ P_{ts} &= P_{st} = f_{ts} T + f_t T' + g_{ts} N + g_t N' + h_{ts} B + h_t B' \\ &= (f_{ts} - g_t \kappa_1) T + (f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})) N + (g_t(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) + h_{ts}) B \end{aligned}$$

$$P_{ts}(s, t_0) = P_{st}(s, t_0) = (-\kappa_1 g_t) T + (\kappa_1 f_t - (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) h_t) N + (g_t(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})) B,$$

$$P_{tt}(s, t) = f_{tt} T + g_{tt} N + h_{tt} B,$$

$$\det(P_{ss}, P_s, P_t) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ f_t & g_t & h_t \end{bmatrix} = -\kappa_1 h_t$$

$$\det(P_{st}, P_s, P_t) = \begin{bmatrix} f_{ts} - g_t \kappa_1 & f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) & g_t(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) + h_{ts} \\ 1 & 0 & 0 \\ f_t & g_t & h_t \end{bmatrix}$$

$$\det(P_{st}, P_s, P_t) = h_t(f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})) - g_t(g_t(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) + h_{ts})$$

$$\det(P_{tt}, P_s, P_t) = \begin{bmatrix} f_{tt} & g_{tt} & h_{tt} \\ 1 & 0 & 0 \\ f_t & g_t & h_t \end{bmatrix} = (-g_{tt} h_t + g_t h_{tt})$$

$$\langle P_s, P_t \rangle = f_t$$

$$\langle P_s, P_s \rangle = 1$$

$$\langle P_t, P_t \rangle = f_t^2 + g_t^2 + h_t^2$$

Yukardaki hesaplamalar (3.3) denkleminde yerine yazılırsa $\alpha(s)$ eğrisinden geçen $P(s, t)$ yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$H(s, t_0) = \frac{-\kappa_1 h_t(f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) + (-g_{tt} h_t + g_t h_{tt}) - 2f_t((h_t \kappa_1 f_t + h_t g_{ts} - g_t h_{ts}) - (h_t^2 + g_t^2)(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}))}{2(g_t^2 + h_t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4)$$

(3.4) denklemi olarak elde edilir.

Bu tez boyunca $f(s, t), g(s, t), h(s, t), \kappa_1(s), (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s)$ ve bunların kısmi türevlerine bağlı olarak elde edilen denklemlerde sabite eşit olarak verilen yapılar birbirine eşit veya farklı olacak şekilde sabittir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.1: $P(s, t)$ yüzeyinin, üzerindeki izoparametrik $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğrilikli olması için yeterli koşullar,

$L_1 \leq s \leq L_2, t_0 \in [T_1, T_2]$ olacak şekilde;

$$1. \quad \text{Koşul} \begin{cases} f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) \equiv 0 \\ (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s) = \text{sabit} \end{cases}$$

veya

$$2. \quad \text{Koşul} \begin{cases} f_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) \equiv 0 \\ (\kappa_1)(s) = \text{sabit} \\ (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s) = \text{sabit} \end{cases}$$

olmasıdır.

İspat: Bir $\alpha(s)$ eğrisi verilsin. (3.2) denkleminde $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s,t)$ yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması $f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = 0$ koşuluyla mümkündür.

1.koşul: $f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) \neq 0 \equiv h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0)$ olarak alınırsa (3.4) denklemini

$$H(s, t_0) = \frac{(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s) f_t(s, t_0)}{g_t(s, t_0)}$$

şeklinde elde ederiz. Bu durumda, eğri boyunca ortalama eğriliğin sabit olabilmesi

$(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s) = \text{sabit}$ olması ile mümkündür. Örnek olarak Anti-Salkowski eğrilerini verebiliriz.

2.koşul: $f_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) \neq 0 \equiv g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0)$ olarak alınırsa (3.4) denklemini

$$\begin{aligned} H(s, t_0) &= \frac{-\kappa_1 h_t (f_t^2 + h_t^2) - 2f_t [(h_t \kappa_1 f_t) - (h_t^2)(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})]}{2(h_t^2)^{\frac{3}{2}}} (s, t_0) \\ &= \frac{(-\kappa_1 f_t^2 - \kappa_1 h_t^2) - 2f_t^2 \kappa_1 + 2f_t h_t (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})}{2h_t^2} (s, t_0) \\ &= \frac{\kappa_1 (-3f_t^2 - h_t^2) + 2f_t h_t (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})}{2h_t^2} (s, t_0) \end{aligned}$$

Genellik bozulmayacak şekilde $f_t = 1$ ve $h_t = 1$ olarak alınabilir.

$$H(s, t_0) = \frac{(-3\kappa_1 - \kappa_1) + 2(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})}{2} = -2\kappa_1 + (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})$$

olur. Dolayısıyla, eğri boyunca ortalama eğriliğin sabit olabilmesi $(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s) = \kappa_1(s) = \text{sabit}$ ile mümkündür.

Teorem 3.2: $P(s, t)$ yüzeyinin, bir izoparametrik $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğrilikli olması için yeterli koşul

$L_1 \leq s \leq L_2, t_0 \in [T_1, T_2]$ olacak şekilde;

$$\begin{cases} f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) \equiv 0 \end{cases}$$

iken

$$(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s) = \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}.$$

İspat: Bir $\alpha(s)$ eğrisi verilsin. (2) denkleminde $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması $f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = 0$ ile mümkündür.

Ayrıca $f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) \neq 0$ olarak alınırsa (4) denklemini;

$$H(s, t_0) = \frac{-\kappa_1 h_t (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) - 2f_t [(h_t \kappa_1 f_t) - (h_t^2 + g_t^2)(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})]}{2(g_t^2 + h_t^2)^{\frac{3}{2}}} (s, t_0)$$

Genellik bozulmayacak şekilde $f_t = 1, g_t = \sqrt{2}, h_t = 1$ alınabilir.

$$H = \frac{(-4\kappa_1) - 2(\kappa_1 - 3(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}))}{2(3\sqrt{3})} = \frac{-4\kappa_1 - 2\kappa_1 + 3(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})}{2(3\sqrt{3})} = \frac{-6\kappa_1 + 3(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})}{2(3\sqrt{3})}$$

denklemini elde edilir.

Dolayısıyla $P(s, t)$ yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olması $\kappa_1(s) = (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s)$ sabit ile mümkündür. Bu duruma örnek Helis eğrilerini gösterebiliriz.

Teorem 3.3: $P(s, t)$ yüzeyinin $\alpha(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli koşul $L_1 \leq s \leq L_2, t_0 \in [T_1, T_2]$ için

$f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) \equiv 0$ olmak üzere

$g_t(s, t_0) \neq 0 = h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0)$ veya $g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, h_t(s, t_0) \neq 0$ ve

$\kappa_1(s) = \text{sbt}$ olmasıdır.

İspat: $f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) \equiv 0$ alınırsa $P_s(s, t_0) \perp P_t(s, t_0)$ olur ve ortalama eğrilik fonksiyonu;

$$H(s, t_0) = \frac{(-\kappa_1 h_t)(g_t^2 + h_t^2) + (-g_{tt} h_t + g_t h_{tt})}{2(g_t^2 + h_t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.5)$$

(3.5) denklemi şekline dönüşür.

$g_t(s, t_0) \neq 0 = h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0)$ olarak alınıp (3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$H(s, t_0) = 0 = \text{sabit}$ olur veya

$g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, h_t(s, t_0) \neq 0$ olarak alınıp (3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$H(s, t_0) = \frac{-\kappa_1(s)}{2}$ olur.

Ortalama eğriliğin sabit olması $\kappa_1(s) = \text{sabit}$ olması ile mümkündür. Bu duruma örnek olarak Salkowski eğrilerini gösterebiliriz.

Örnek 3.4: $\alpha(s) = (\sin s, \cos s, 0)$ birim hızlı eğrisini alalım. Eğrinin Frenet vektörleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$T(s) = \alpha'(s) = (\cos s, -\sin s, 0)$$

$$T'(s) = \alpha''(s) = (-\sin s, -\cos s, 0)$$

$$\|\alpha''(s)\| = \sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s + 0^2} = 1$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = (-\sin s, -\cos s, 0)$$

$$B = T \times N = (0, 0, -1)$$

$$\kappa_1 = \|T'(s)\| = 1$$

$$\overline{\kappa_2} = \frac{1}{2} \langle [T, N], B \rangle = \frac{1}{2} \langle T \times N, B \rangle = \frac{1}{2} \langle B, B \rangle = \frac{1}{2} \langle 0, 0, 1 \rangle = \frac{1}{2}$$

$$[T, B] = T \times B = (\sin s, \cos s, 0)$$

$$\kappa_2 = \left\| B' + \frac{1}{2} [T, B] \right\| - \overline{\kappa_2}$$

$$\kappa_2 = \left\| \left(\frac{1}{2} \sin s, \frac{1}{2} \cos s, 0 \right) \right\| - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\tilde{h}(s) = \frac{(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s)}{\kappa_1(s)} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

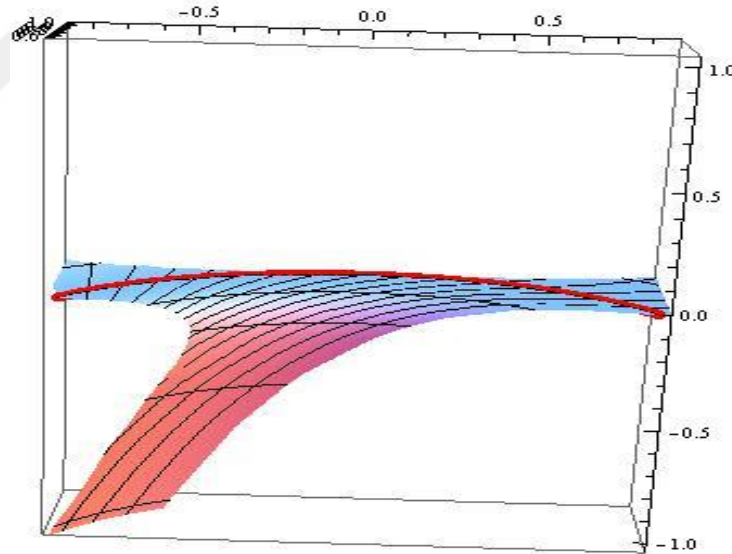
1. Durum: Sapma fonksiyonları Teorem 3.1 in 1. koşulunu sağlayacak şekilde $f(s, t) = -t, g(s, t) = t, h(s, t) = t^3, (f_t = -1 \neq 0, g_t = 1 \neq 0, h_t = 3t^2 = 0, h_{tt} = 6t = 0)$ ve $t_0 = 0$ seçilirse α eğrisi boyunca ortalama eğriliği

$$H = \frac{(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) f_t}{g_t} = \frac{\tilde{h} \kappa_1 f_t}{g_t} = \frac{(-\frac{1}{2})(-1)}{1} = \frac{1}{2} \text{ olan}$$

(3.1) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyi için ;

$$\begin{aligned} P_1(s, t) &= (\sin s, \cos s, 0) - t(\cos s, -\sin s, 0) + t(-\sin s, -\cos s, 0) + t^3(0, 0, -1) \\ &= ((1-t)\sin s - t\cos s, (1-t)\cos s + t\sin s, -t^3) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $P_1(s, t)$ yüzeyi Şekil 3.1 ile aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 3.1: $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_1(s, t)$ yüzeyi

2. Durum: Sapma fonksiyonları Teorem 3.1 in 2. koşulunu sağlayacak şekilde $f(s, t) = t, g(s, t) = st^3, h(s, t) = ssint, (f_t = 1 \neq 0, g_t = 3st^2 = 0, g_{tt} = 6st = 0, h_t = scost \neq 0)$ ve $t_0 = 0$ seçilirse α eğrisi boyunca ortalama eğriliği

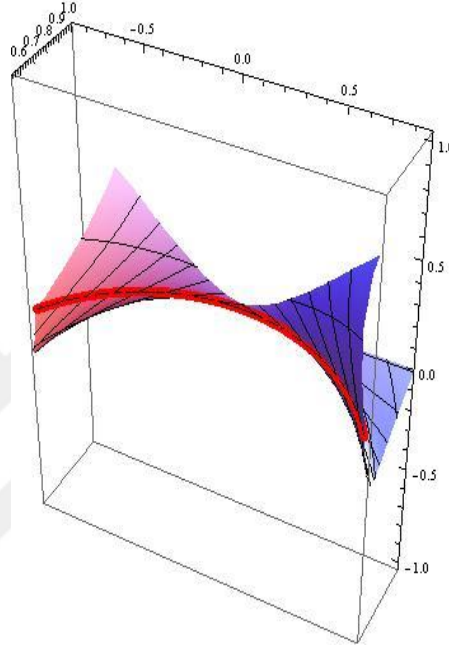
$$H = \frac{\kappa_1 (-3f_t^2 - h_t^2) + 2f_t h_t (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})}{2h_t^2}$$

$$H = \frac{(-3f_t^2 - h_t^2) - f_t h_t}{2h_t^2} = \frac{-3}{2} \text{ olan}$$

(3.1) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyi için;

$$\begin{aligned} P_2(s, t) &= (sins, coss, 0) + t(coss, -sins, 0) + st^3(-sins, -coss, 0) - t(0, 0, -1) \\ &= ((1 - st^3)sins + tcoss, (1 - st^3)coss - tsins, -ssint) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $P_2(s, t)$ yüzeyi Şekil 3.2 ile aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 3.2: $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_2(s, t)$ yüzeyi

3. Durum: Sapma fonksiyonları Teorem 3.2 nin koşulunu sağlayacak şekilde $f(s, t) = h(s, t) = -e^s t, g(s, t) = e^s t$, ve $t_0=0$ seçilirse α eğrisi boyunca ortalama eğriliği

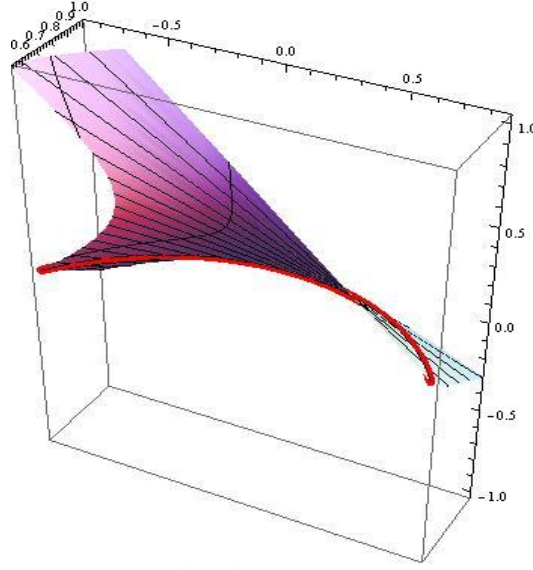
$$H = \frac{e^s(3e^{2s}) + 2e^s[(e^{2s}) + (e^{2s})]}{4e^{3s}}$$

$$H = \frac{(3e^{3s}) + 4e^{3s}}{4e^{3s}} = \frac{7}{4} \text{ olan}$$

(3.1) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyi için ;

$$\begin{aligned} P_3(s, t) &= (sins, coss, 0) - e^s t (coss, -sins, 0) + e^s t (-sins, -coss, 0) - e^s t (0, 0, -1) \\ &= ((1 - e^s t)sins - e^s t coss, (1 - e^s t)coss + e^s t sins, e^s t) \end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir. $P_3(s, t)$ yüzeyi Şekil 3.3 ile aşağıdaki şekilde çizilmiştir.

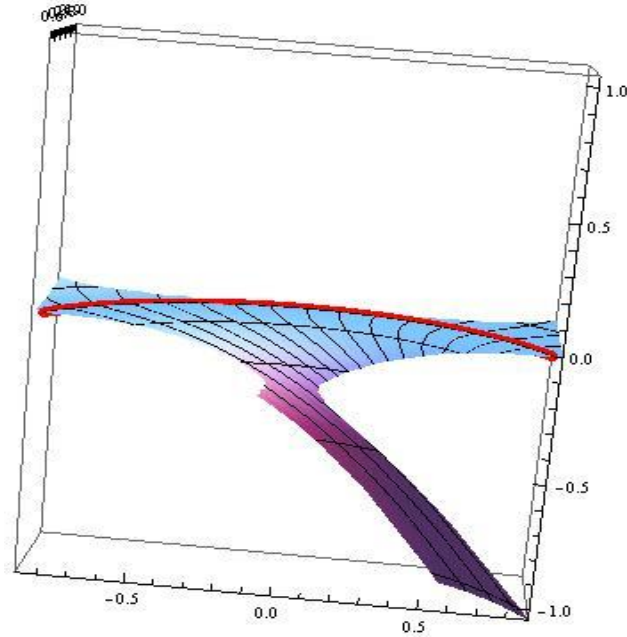


Şekil 3.3: $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_3(s, t)$ yüzeyi

4. Durum: Sapma fonksiyonları Teorem 3.3 ün 1. koşulunu sağlayacak şekilde $f(s, t) = t^2, g(s, t) = t, h(s, t) = t^3$ ve $t_0 = 0$ seçilirse ($f_t = 2t = 0, g_t = 1 \neq 0, h_t = 3t^2 = 0$) α eğrisi boyunca ortalama eğriliği $H=0$ olan (3.1) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyi için ;

$$\begin{aligned} P_4(s, t) &= (\sin s, \cos s, 0) + t^2(\cos s, -\sin s, 0) + t(-\sin s, -\cos s, 0) + t^3(0, 0, -1) \\ &= ((1-t)\sin s + t^2\cos s, (1-t)\cos s - t^2\sin s, -t^3) \end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir. $P_4(s, t)$ yüzeyi Şekil 3.4 ile aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 3.4: $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_4(s, t)$ yüzeyi

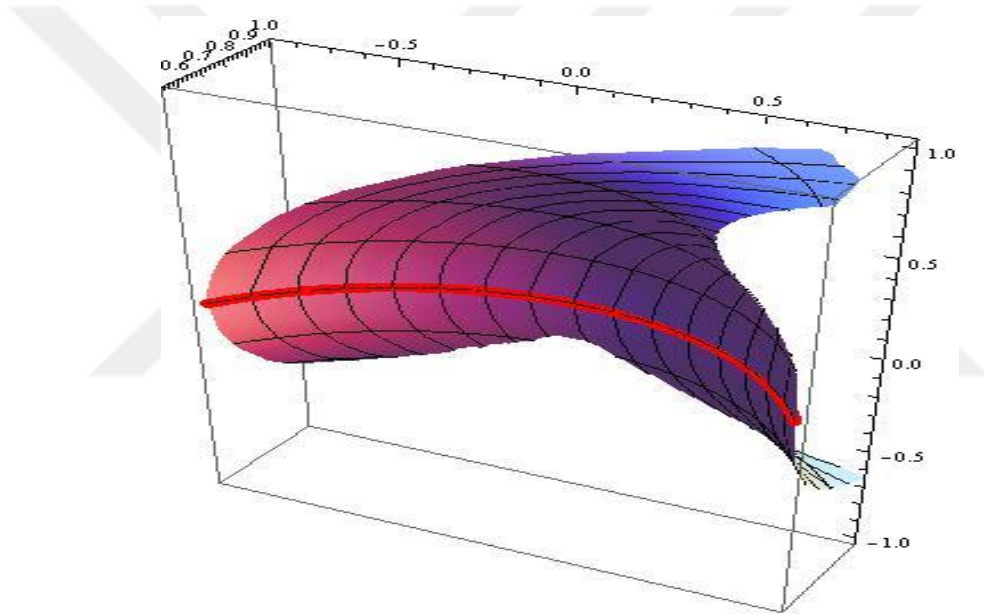
5. Durum: Sapma fonksiyonları Teorem 3.3 ün 2. koşulunu sağlayacak şekilde $f(s, t) = t^2, g(s, t) = t^3, h(s, t) = -t$ ve $t_0=0$ seçilirse α eğrisi boyunca ortalama eğriliği

$$H = \frac{\kappa_1(s)}{2} = \frac{1}{2} \text{ olan}$$

(3.1) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyi için ;

$$\begin{aligned} P_5(s, t) &= (s \sin s, \cos s, 0) + t^2 (\cos s, -s \sin s, 0) + t^3 (-s \sin s, -\cos s, 0) - t(0, 0, -1) \\ &= ((1 - t^3) \sin s + t^2 \cos s, (1 - t^3) \cos s - t^2 \sin s, t) \end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir. $P_5(s, t)$ yüzeyi Şekil 3.5 ile aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 3.5: $\alpha(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğriliğe sahip $P_5(s, t)$ yüzeyi

4. LİE GRUPLARINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ BOYUNCA SABİT ORTALAMA EĞRİLİKLİ YÜZEYLER

$\alpha : I \rightarrow G$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin ve Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

Konum vektörü;

$$\beta = \frac{f(s)T(s) + g(s)N(s) + h(s)B(s)}{\sqrt{f^2(s) + g^2(s) + h^2(s)}}$$

olan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denilmektedir.

$$TN\text{-Smarandache eğrisi } \beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + N(s))$$

$$NB\text{-Smarandache eğrisi } \beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(s) + B(s))$$

$$TB\text{-Smarandache eğrisi } \beta_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + B(s))$$

$$TNB\text{-Smarandache eğrisi } \beta_{TNB}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T(s) + N(s) + B(s)) \quad [1,14,16].$$

$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ 3 boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa_1, \kappa_2\}$ olsun. G Lie grubunun α eğrisinin Frenet elemanları;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) \\ 0 & -(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

4.1. TN -Smarandache Eğrisi

$\alpha_{TN}(s)$, 3-boyutlu Lie Gruplarında $\kappa_1(s)$ ve $(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s)$ eğrilikli birim hızlı regüler bir eğri alalım. $\alpha_{TN}(s)$ eğrisini $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına bağlı olarak yazılan yüzeyler parametrik olarak;

$$P(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + N(s)) + f(s, t)T(s) + g(s, t)N(s) + h(s, t)B(s) \quad (4.1)$$

$$L_1 \leq s \leq L_2, \quad T_1 \leq t \leq T_2,$$

(4.1) yüzeyi ile verilir.

$P(s, t)$ yüzeyinin Smarandache eğrileri boyunca birim normal vektör alanını

$$\mu(s, t) = \frac{P_s(s, t) \times P_t(s, t)}{\|P_s(s, t) \times P_t(s, t)\|}$$

formülü kullanılarak bulunacaktır.

$f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = 0$ koşulunu sağlayan $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonları varsa $\alpha(s)$ eğrisi $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğridir veya $P(s, t)$ yüzeyi $\alpha(s)$ eğrisinden geçer denir. Burada $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ fonksiyonlarına (sapma fonksiyonları) C^1 sınıfından marching-scale fonksiyonlardır ve bu fonksiyonların farklı seçimlerinden $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi üzerinden geçen farklı yüzeyler elde edilecek ve $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğrilikli olması için yeterli şartlar bulunacaktır.

$P(s, t)$ yüzeyinin $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi boyunca birim normal vektör alanını hesaplamak için gerekli kısmi türevler alınırsa;

$$T' = \kappa_1 N, \quad N' = -\kappa_1 T + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) B, \quad B' = -(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) N$$

$$P_s(s, t) \frac{1}{\sqrt{2}} (T'(s) + N'(s)) + f_s T(s) + f T'(s) + g_s N(s) + g N'(s) + h_s B(s) + h B'(s)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 + f_s - g \kappa_1 \right) T(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 + f \kappa_1 + g_s - h(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \right) N(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + g(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_s \right) B(s)$$

$$P_s(s, t_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 T(s) + \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 N(s) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) B(s)$$

$$P_t(s, t_0) = f_t T(s) + g_t N(s) + h_t B(s)$$

$$P_{tt}(s, t_0) = f_{tt} T(s) + g_{tt} N(s) + h_{tt} B(s)$$

$$P_{ts}(s, t_0) = (f_{ts} - g_t \kappa_1) T(s) + (f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) N(s) + (g_t (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_{ts}) B(s)$$

$$P_{ss}(s, t_0) = T(s) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1^2 \right) + N(s) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\kappa_1^2 + \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 \right) + B(s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + \frac{\partial}{\partial s} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2))$$

$$\mu(s, t_0) = \frac{P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)}{\|P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)\|}$$

$$P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t) T(s) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) N(s) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t) B(s)$$

$$\|P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)\|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)^2}$$

Dolayısıyla yüzeyin birim vektör alanı;

$$\mu(s, t_0) = \frac{(\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t) + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) - (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)}{\sqrt{(\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)^2}}$$

şeklinededir. Ortalama eğriliği hesaplamak için, birinci ve ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E(s, t_0) = \langle P_s, P_s \rangle = \kappa_1^2 + \frac{(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2}{2}$$

$$F(s, t_0) = \langle P_s, P_t \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1 f_t + \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1 g_t + \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t$$

$$G(s, t_0) = \langle P_t, P_t \rangle = f_t^2 + g_t^2 + h_t^2$$

$$l(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ss} \rangle = \frac{\left((\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t) \left(-\frac{\partial}{\partial s}\kappa_1 - \kappa_1^2 \right) + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t) \left(-\kappa_1^2 + \frac{\partial}{\partial s}\kappa_1 - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 \right) - (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t) \left(\kappa_1(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - \frac{\partial}{\partial s}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \right) \right)}{\sqrt{2}\sqrt{(\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)^2}}$$

$$m(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ts} \rangle = \frac{((\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)(f_{ts} - g_t \kappa_1) + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)(f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) - (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)(g_t(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_{ts}))}{\sqrt{(\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)^2}}$$

$$n(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{tt} \rangle = \frac{(\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)f_{tt} + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)g_{tt} - (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)h_{tt}}{\sqrt{(\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)^2}}$$

Yukarda bulunan ifadeleri aşağıdaki ortalama eğrilik denkleminde yerine yazılırsa

$$H = \frac{lG + nE - 2mF}{2(EG - F^2)}$$

$H =$

$$\begin{aligned} & (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\kappa_1 h_t - \tilde{h}\kappa_1 g_t) \left(-\frac{\partial}{\partial s}\kappa_1 - \kappa_1^2 \right) + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) \left(-\kappa_1^2 + \frac{\partial}{\partial s}\kappa_1 - (\tilde{h}\kappa_1)^2 \right) - (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t) \left(\kappa_1(\tilde{h}\kappa_1) - \frac{\partial}{\partial s}(\tilde{h}\kappa_1) \right) \right) + \\ & \left((\kappa_1 h_t - \tilde{h}\kappa_1 g_t)f_{tt} + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)g_{tt} - (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)h_{tt} \right) \left(\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h}\kappa_1)^2}{2} \right) - \\ & 2 \left((\kappa_1 h_t - \tilde{h}\kappa_1 g_t)(f_{ts} - g_t \kappa_1) + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)(f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t \tilde{h}\kappa_1) - (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)(g_t \tilde{h}\kappa_1 + h_{ts}) \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1 f_t + \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1 g_t + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{h}\kappa_1 h_t \right) \\ & 2 \left(\left(\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h}\kappa_1)^2}{2} \right) (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) - \frac{1}{2}(-\kappa_1 f_t + \kappa_1 g_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)^2 \right) \sqrt{(\kappa_1 h_t - \tilde{h}\kappa_1 g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)^2 + (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ortalama eğrilik denklemi (4.2) şeklinde elde edilir. $\tilde{h}(s) = \frac{(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)(s)}{\kappa_1(s)}$ olarak alınacaktır.

Teorem 4.1.1: $\alpha_{TN}(s)$, $L_1 \leq s \leq L_2$, birim hızlı ve eğriliği sıfırdan farklı bir eğri kabul edelim. Alınan eğri (4.1) ile verilen yüzey üzerinde parametre eğri olması ve yüzeyin bu eğri boyunca sabit Ortalama eğrilikli olması için yeterli koşullar

$$\begin{aligned} \text{a) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = 0, \\ g_t(s, t_0) &= h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (4.3)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{b) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &= h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (4.4)$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{c) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\
f_t(s, t_0) &= g_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\
\tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{d) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\
h_t(s, t_0) &\neq 0, \\
\tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{e) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\
g_t(s, t_0) &= \text{sabit} \neq 0, \\
\tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{f) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\
f_t(s, t_0) &\neq 0, \\
\tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olmasıdır.

İspat:

a) Sapma fonksiyonları Teorem (4.1.1) in (4.3) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.1) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TN}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.3) denklemindeki koşullar (4.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(g_t^2 + h_t^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\tilde{h} \kappa_1 g_t \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 + \kappa_1 g_t \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h} \kappa_1) - 2 h_t \kappa_1^3 - h_t \kappa_1 (\tilde{h} \kappa_1)^2 \right) + (\kappa_1 h_t g_{tt} - \kappa_1 g_t h_{tt}) \left(\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h} \kappa_1)^2}{2} \right) - 2 \left((\kappa_1 h_t + h_{ts}) (-g_t \kappa_1) + (\kappa_1 h_t) (g_{ts} - h_t \tilde{h} \kappa_1) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 g_t + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{h} \kappa_1 h_t \right)}{2 \left(\left(\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h} \kappa_1)^2}{2} \right) (g_t^2 + h_t^2) - \frac{1}{2} (\kappa_1 g_t + \tilde{h} \kappa_1 h_t)^2 \right) \sqrt{(\kappa_1 h_t - \tilde{h} \kappa_1 g_t)^2 + (\kappa_1 h_t)^2 + (\kappa_1 g_t)^2}}$$

sabit olduğu görülür.

b) Sapma fonksiyonları Teorem (4.1.1) in (4.4) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.1) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TN}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.4) denklemindeki koşullar (4.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(f_t^2 + h_t^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left((\kappa_1 h_t) \left(-(\tilde{h} \kappa_1)^2 - 2\kappa_1^2 \right) + f_t \tilde{h} \kappa_1 \left(-(\tilde{h} \kappa_1)^2 + \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 \right) \right) + (\kappa_1 h_t f_{tt} - \kappa_1 f_t h_{tt}) \left(\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h} \kappa_1)^2}{2} \right) - (\kappa_1 f_t) \left(-2\kappa_1 \tilde{h} \kappa_1 - \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h} \kappa_1) \right)}{2 \left((\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h} \kappa_1)^2}{2}) (f_t^2 + h_t^2) - \frac{1}{2} (-\kappa_1 f_t + \tilde{h} \kappa_1 h_t)^2 \right) \sqrt{(\kappa_1 h_t)^2 + (\kappa_1 h_t + \tilde{h} \kappa_1 f_t)^2 + (\kappa_1 f_t)^2}}$$

sabit olduğu görülür.

c) Sapma fonksiyonları Teorem (4.1.1) in (4.5) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.1) denklemine yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TN}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.5) denklemdeki koşullar (4.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(f_t^2 + g_t^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(g_t \left(\tilde{h} \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 + \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h} \kappa_1) \right) + (\tilde{h} \kappa_1 f_t) \left(-2\kappa_1^2 + \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - (\tilde{h} \kappa_1)^2 \right) - \kappa_1 f_t \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h} \kappa_1) \right) + (-\tilde{h} \kappa_1 g_t f_{tt} + \tilde{h} \kappa_1 f_t g_{tt}) \left(\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h} \kappa_1)^2}{2} \right) - 2 \left((-\tilde{h} \kappa_1 g_t) (f_{ts} - g_t \kappa_1) + (\tilde{h} \kappa_1 f_t) (f_t \kappa_1 + g_{ts}) - (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t) (g_t \tilde{h} \kappa_1) \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 f_t + \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 g_t \right)}{2 \left(\left(\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h} \kappa_1)^2}{2} \right) (f_t^2 + g_t^2) - \frac{1}{2} (-\kappa_1 f_t + \kappa_1 g_t)^2 \right) \sqrt{(-\tilde{h} \kappa_1 g_t)^2 + (\tilde{h} \kappa_1 f_t)^2 + (\kappa_1 g_t + \kappa_1 f_t)^2}}$$

sabit olduğu görülür.

d) Sapma fonksiyonları Teorem (4.1.1) in (4.6) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.1) denklemine yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TN}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.6) denklemdeki koşullar (4.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(\tilde{h}^2 + 2)}{4}$$

sabit olduğu görülür.

e) Sapma fonksiyonları Teorem (4.1.1) in (4.7) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.1) denklemine yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TN}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.7) denklemdeki koşullar (4.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{h} \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 + \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h} \kappa_1) \right)}{2 \left(\kappa_1^2 + \frac{(\tilde{h} \kappa_1)^2}{2} \right) \kappa_1 g_t \sqrt{\tilde{h}^2 + 1}}$$

sabit olduğu görülür.

f) Sapma fonksiyonları Teorem (4.1.1) in (4.8) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.1) denklemine yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TN}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TN}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.8) denklemdeki koşullar (4.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \tilde{h}\kappa_1 - (\tilde{h}\kappa_1)^3)}{\sqrt{2}(\kappa_1^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sabit olduğu görülür.

Örnek 4.1.1: $\alpha(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}})$, $0 \leq s \leq 2\pi$ birim hızlı eğrisini alalım. Eğrinin Frenet vektörleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$T'(s) = \alpha''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0\right)$$

$$\kappa_1 = \|T'(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$B = T \times N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, \cos s, -(\sin^2 s + \cos^2 s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1)$$

$$\overline{\kappa}_2 = \frac{1}{2} \langle [T, N], B \rangle = \frac{1}{2} \langle T \times N, B \rangle = \frac{1}{2} \langle B, B \rangle = 0$$

$$\kappa_2 = -\langle B', N \rangle = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 s + 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{h}(s) = \frac{(\kappa_2 - \overline{\kappa}_2)(s)}{\kappa_1(s)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 0}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \text{ dir.}$$

Sapma fonksiyonları Teorem 4.1.1'in (4.6) koşulunu sağlayacak şekilde

$$f(s, t_0) = 0, g(s, t_0) = t^3, h(s, t_0) = ssint$$

(Burada $f_{tt}(s, t_0) = 0, g_t(s, t_0) = 3t^2, g_{tt}(s, t_0) = 6t, h_t(s, t_0) = scost \neq 0$) ve $t_0 = 0$ seçilirse α eğrisi boyunca ortalama eğriliği

$$H = \frac{2 + \tilde{h}^2}{4} = \frac{2 + 1}{4} = \frac{3}{4}$$

olan (4.1) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyi için;

$$\begin{aligned} P_1(s, t_0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + 0 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + t^3(-\cos s, -\sin s, 0) + \\ &ssint \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - t^3 \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} ssint \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - t^3 \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} ssint \cos s, \frac{s}{\sqrt{2}} + \right. \\ &\left. \frac{1}{\sqrt{2}} ssint\right) \end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir.

4.2. NB- Smarandache Eğrisi

$\alpha_{NB}(s)$, 3-boyutlu Lie Gruplarında $\kappa_1(s)$ ve $(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)(s)$ eğrilikli birim hızlı regüler bir eğri alalım. $\alpha_{NB}(s)$ eğrisini $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına bağlı olarak yazılan yüzeyler parametrik olarak;

$$P(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(s) + B(s)) + f(s, t)T(s) + g(s, t)N(s) + h(s, t)B(s) \quad (4.9)$$

$$L_1 \leq s \leq L_2, T_1 \leq t \leq T_2,$$

(4.9) yüzeyi ile verilir.

$f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = 0$ koşulunu sağlayan $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonları varsa $\alpha(s)$ eğrisi $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğridir veya $P(s, t)$ yüzeyi $\alpha(s)$ eğrisinden geçer denir. Burada $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ fonksiyonlarına (sapma fonksiyonları) C^1 sınıfından marching-scale fonksiyonlardır Bu fonksiyonların farklı seçimlerinden $\alpha_{NB}(s)$ eğrisinden geçen yeni yüzeyler elde edilecek ve $\alpha_{NB}(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli şartlar elde edilecektir.

$$T' = \kappa_1 N, N' = -\kappa_1 T + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) B, B' = -(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) N$$

$$P_s(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N'(s) + B'(s)) + f_s T(s) + f T'(s) + g_s N(s) + g N'(s) + h_s B(s) + h B'(s)$$

$$= (-\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1 + f_s - g\kappa_1) T(s) + (-\frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + f\kappa_1 + g_s - h(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) N(s) + (\frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + g(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_s) B(s)$$

$$P_s(s, t_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1 T(s) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) N(s) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) B(s)$$

$$P_t(s, t) = f_t T(s) + g_t N(s) + h_t B(s)$$

$$P_{tt}(s, t) = f_{tt} T(s) + g_{tt} N(s) + h_{tt} B(s)$$

$$P_{ts}(s, t) = (f_{ts}\kappa_1) T(s) + (f_t\kappa_1 + g_{ts} - h_t(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) N(s) + (g_t(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_{ts}) B(s)$$

$$P_{ss}(s, t_0) = T(s)(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial s}\kappa_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + N(s)(-\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial s}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2) + B(s)(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial s}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2)$$

$$\mu(s, t_0) = \frac{P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)}{\|P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)\|} \text{ olup,}$$

$$P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t \right] T(s) + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t) N(s) + (-\kappa_1 g_t + \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t) B(s)$$

$$\|P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{((\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}$$

Dolayısıyla yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mu(s, t_0) = \frac{(-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t) + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t) + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)}{\sqrt{((\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}}$$

şeklinde dir. Ortalama eğriliği hesaplamak için, birinci ve ikinci temel form katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$E(s, t_0) = \langle P_s, P_s \rangle = \frac{\kappa_1^2}{2} + \frac{(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2}{2}$$

$$F(s, t_0) = \langle P_s, P_t \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_1 f_t - \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t + \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t$$

$$G(s, t_0) = \langle P_t, P_t \rangle = f_t^2 + g_t^2 + h_t^2$$

$$l(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ss} \rangle = \frac{\left((-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)(h_t + g_t)) \left(-\frac{\partial}{\partial s}\kappa_1 + \kappa_1(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \right) + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t) \left(-\kappa_1^2 - \frac{\partial}{\partial s}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 \right) + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t) \left(-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 + \frac{\partial}{\partial s}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \right) \right)}{\sqrt{2}\sqrt{(-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}}$$

$$m(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ts} \rangle = \frac{\left((-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)(h_t + g_t))(f_{ts} - g_t \kappa_1) + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)(f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)(g_t(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_{ts}) \right)}{\sqrt{(-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}}$$

$$n(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{tt} \rangle = \frac{(-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)f_{tt} + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)g_{tt} + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)h_{tt}}{\sqrt{(-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}}$$

Bulunan ifadeleri aşağıdaki ortalama eğrilik denkleminde yerine yazalım.

$$H = \frac{lG + nE - 2mF}{2(EG - F^2)}$$

$$H =$$

$$\begin{aligned} & (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) \left(\left(-(\tilde{h}\kappa_1)(h_t + g_t) \right) \left(-\frac{\partial}{\partial s}\kappa_1 + \kappa_1(\tilde{h}\kappa_1) \right) + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) \left(-\kappa_1^2 - \frac{\partial}{\partial s}(\tilde{h}\kappa_1) - (\tilde{h}\kappa_1)^2 \right) + \right. \\ & \quad \left. (-\kappa_1 g_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) \left(-(\tilde{h}\kappa_1)^2 + \frac{\partial}{\partial s}(\tilde{h}\kappa_1) \right) \right) + \\ & \quad \left((-\tilde{h}\kappa_1)(h_t + g_t) \right) f_{tt} + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) g_{tt} + (-\kappa_1 g_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) h_{tt} \left(\frac{\kappa_1^2}{2} + \frac{(\tilde{h}\kappa_1)^2}{2} \right) - \\ & \quad \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left((-\tilde{h}\kappa_1)(h_t + g_t) \right) (f_{ts} - g_t \kappa_1) + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) (f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t \tilde{h}\kappa_1) + (-\kappa_1 g_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) (g_t \tilde{h}\kappa_1 + h_{ts})}{\sqrt{((\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}} \left(-\kappa_1 f_t - (\tilde{h}\kappa_1)(h_t + g_t) \right) \\ & \quad \left((\kappa_1^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2)(f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) - (-\kappa_1 f_t - \tilde{h}\kappa_1 g_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)^2 \right) \sqrt{(-(\tilde{h}\kappa_1)(g_t + h_t))^2 + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ortalama eğrilik denklemi (4.10) şeklinde elde edilir. $\tilde{h}(s) = \frac{(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)(s)}{\kappa_1(s)}$ olarak alınacaktır.

Teorem 4.2.1: $\alpha_{NB}(s)$, $L_1 \leq s \leq L_2$, birim hızlı, eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğri olsun. $\alpha_{NB}(s)$ eğrisinin (4.9) ile verilen yüzey üzerinde parametre eğri olması ve yüzeyin bu eğri boyunca sabit ortalama eğrilikli olması için yeter koşullar

$$\mathbf{a)} f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = 0,$$

$$g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0,$$

$$\tilde{h}(s) = \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}$$

$$(4.11)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{b) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &= h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (4.12)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{c) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &= g_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (4.13)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{d) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\ h_t(s, t_0) &\neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (4.14)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{e) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ g_t(s, t_0) &\neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (4.15)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{f) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &\neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (4.16)$$

olmasıdır.

İspat:

a) Sapma fonksiyonları Teorem (4.2.1) in (4.11) denklemindeki şekilde alınırsa ve bunlar (4.9) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.11) denklemindeki koşullar (4.10) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(g_t^2 + h_t^2) \left(\left(-\tilde{h}\kappa_1 - \frac{\partial}{\partial s}\kappa_1 - \kappa_1 - \frac{\partial}{\partial s}(\tilde{h}\kappa_1) \right) (h_t + g_t) + (\kappa_1 h_t) (-2\kappa_1^2 - 2(\tilde{h}\kappa_1)^2) \right) + (\kappa_1 h_t g_{tt} - \kappa_1 g_t h_{tt}) \left(\frac{\kappa_1^2}{2} + \frac{(\tilde{h}\kappa_1)^2}{2} \right) - \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}(\kappa_1 h_t g_{ts} - \kappa_1 g_t h_{ts}) (-\tilde{h}\kappa_1) (h_t + g_t)}{\left((\kappa_1^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2) (g_t^2 + h_t^2) - (-\tilde{h}\kappa_1) (h_t + g_t)^2 \right) \sqrt{(-\tilde{h}\kappa_1) (g_t + h_t)^2 + (\kappa_1 h_t)^2 + (-\kappa_1 g_t)^2}}}{}$$

sabit olduğu görülür.

b) Sapma fonksiyonları Teorem (4.2.1) in (4.12) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.9) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.12) denklemindeki koşullar (4.10) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(f_t^2 + h_t^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\tilde{h}\kappa_1 h_t \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 + (\kappa_1 h_t) \left(-\kappa_1^2 - \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) - 2(\tilde{h}\kappa_1)^2 \right) + (\tilde{h}\kappa_1 f_t) \left(-(\tilde{h}\kappa_1)^2 - 2(\tilde{h}\kappa_1)^2 \right) \right) + (-\tilde{h}\kappa_1 h_t f_{tt} + \tilde{h}\kappa_1 f_t h_{tt}) \left(\frac{\kappa_1^2}{2} + \frac{(\tilde{h}\kappa_1)^2}{2} \right) - \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left((-\tilde{h}\kappa_1 h_t) (f_{ts}) + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) (f_t \kappa_1 - h_t \tilde{h}\kappa_1) + (\tilde{h}\kappa_1 f_t) (h_{ts}) \right) (-\kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)}{\left((\kappa_1^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2) (f_t^2 + h_t^2) - (-\kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)^2 \right) \sqrt{(\tilde{h}\kappa_1 h_t)^2 + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)^2 + (\tilde{h}\kappa_1 f_t)^2}}$$

sabit olduğu görülür.

c) Sapma fonksiyonları Teorem (4.2.1) in (4.13) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.9) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.13) denklemindeki koşullar (4.10) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(f_t^2 + g_t^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\tilde{h}\kappa_1 g_t \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1 g_t \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) \right) + (\tilde{h}\kappa_1 f_t) \left(-\kappa_1^2 - 2(\tilde{h}\kappa_1)^2 \right) + (-\tilde{h}\kappa_1 g_t f_{tt} + \tilde{h}\kappa_1 f_t g_{tt}) \left(\frac{\kappa_1^2}{2} + \frac{(\tilde{h}\kappa_1)^2}{2} \right) - \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left((-\tilde{h}\kappa_1 g_t) (f_{ts} - g_t \kappa_1) + (\tilde{h}\kappa_1 f_t) (f_t \kappa_1 + g_{ts}) + (-\kappa_1 g_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) (g_t \tilde{h}\kappa_1) \right) (-\kappa_1 f_t - \tilde{h}\kappa_1 g_t)}{\left((\kappa_1^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2) (f_t^2 + g_t^2) - (-\kappa_1 f_t - \tilde{h}\kappa_1 g_t)^2 \right) \sqrt{(-\tilde{h}\kappa_1 g_t)^2 + (\tilde{h}\kappa_1 f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)^2}}$$

sabit olduğu görülür.

d) Sapma fonksiyonları Teorem (4.2.1) in (4.14) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.9) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.14) denklemindeki koşullar (4.10) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\left(\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1^3 - \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) \right)}{\sqrt{2} \kappa_1^2 \sqrt{-(\tilde{h}\kappa_1)^2 + \kappa_1^2}}$$

sabit olduğu görülür.

e) Sapma fonksiyonları Teorem (4.2.1) in (4.15) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.9) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.15) denklemindeki koşullar (4.10) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1)}{\sqrt{2}\kappa_1^2 \sqrt{(\tilde{h}\kappa_1)^2 + \kappa_1^2}}$$

sabit olduğu görülür.

f) Sapma fonksiyonları Teorem (4.2.1) in (4.16) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.9) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.16) denklemindeki koşullar (4.10) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{1-2\tilde{h}^2}{4\tilde{h}^2}$$

sabit olduğu görülür.

Örnek 4.2.2: $\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$, $0 \leq s \leq 2\pi$ birim hızlı eğrisini alalım. Eğrinin Frenet vektörleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$T'(s) = \alpha''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0\right)$$

$$\kappa_1 = \|T'(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$B = T \times N = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin s, \cos s, -(\sin^2 s + \cos^2 s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin s, -\cos s, 1)$$

$$\overline{\kappa}_2 = \frac{1}{2} \langle [T, N], B \rangle = \frac{1}{2} \langle T \times N, B \rangle = \frac{1}{2} \langle B, B \rangle = 0$$

$$\kappa_2 = -\langle B', N \rangle = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 s + 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{h}(s) = \frac{(\kappa_2 - \overline{\kappa}_2)(s)}{\kappa_1(s)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 0}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \text{ dir.}$$

Sapma fonksiyonları Teorem 4.2.1' in (4.15) koşulunu sağlayacak şekilde

$$f(s, t_0) = e^s t, g(s, t_0) = t^3, h(s, t_0) = 0$$

(Burada $h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, g_t(s, t_0) = 3t^2 = 0, g_{tt}(s, t_0) = 6t = 0, f_t(s, t_0) = e^s \neq 0$) ve $t_0 = 0$ seçilirse α eğrisi boyunca ortalama eğriliği

$$H = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}^2}} = 0$$

olan (4.9) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyi için;

$$P_2(s, t_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}} \right) + e^s t \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + t^3 (-\cos s, -\sin s, 0) + 0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$P_2(s, t_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - e^s t \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - t^3 \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s + e^s t \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - t^3 \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^s t \right)$$

yüzeyi elde edilir.

4.3. TB- Smarandache Eğrisi

$\alpha_{TB}(s)$, 3-boyutlu Lie Gruplarında $\kappa_1(s)$ ve $(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s)$ eğrilikli birim hızlı regüler bir eğri alalım. $\alpha_{TB}(s)$ eğrisini $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına bağlı olarak yazılan yüzeyler parametrik olarak;

$$P(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (T(s) + B(s)) + f(s, t)T(s) + g(s, t)N(s) + h(s, t)B(s) \quad (4.17)$$

$$L_1 \leq s \leq L_2, T_1 \leq t \leq T_2,$$

(4.17) yüzeyi ile verilir.

$f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = 0$ koşulunu sağlayan $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonları varsa $\alpha(s)$ eğrisi $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğridir veya $P(s, t)$ yüzeyi $\alpha(s)$ eğrisinden geçer denir. Burada $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ fonksiyonlarına (sapma fonksiyonları) C^1 sınıfından marching-scale fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların değişik seçimlerinden $\alpha_{TB}(s)$ eğrisinden geçen yeni yüzeyler elde edilecek ve $\alpha_{TB}(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli şartlar elde edilecektir.

$$T' = \kappa_1 N, N' = -\kappa_1 T + (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) B, B' = -(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) N$$

$$P_s(s, t) = (f_s - g\kappa_1) T(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) + f\kappa_1 + g_s - h(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) \right) N(s) + (g(\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) + h_s) B(s)$$

$$P_s(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 N(s) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) N(s)$$

$$P_t(s, t) = f_t T(s) + g_t N(s) + h_t B(s)$$

$$P_{tt}(s, t) = f_{tt} T(s) + g_{tt} N(s) + h_{tt} B(s)$$

$$P_{ts}(s, t_0) = (f_{ts} - g_t \kappa_1) T(s) + (f_t \kappa_1 + g_{ts} - h_t (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})) N(s) + (g_t (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) + h_{ts}) B(s)$$

$$P_{ss}(s, t_0) = T(s) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1^2 \right) + N(s) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial s} (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) \right) + B(s) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 (\kappa_2 - \overline{\kappa_2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_2 - \overline{\kappa_2})^2 \right)$$

olup,

$$\mu(s, t_0) = \frac{P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)}{\|P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)\|}$$

$$P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t + \kappa_1 h_t) T(s) + \frac{1}{\sqrt{2}} (-\kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t) B(s)$$

$$\|P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)\| = \sqrt{\frac{1}{2} (-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t + \kappa_1 h_t)^2 + \frac{1}{2} (-\kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}$$

Dolayısıyla yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mu(s, t_0) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} (-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t + \kappa_1 h_t) T(s) + \frac{1}{\sqrt{2}} (-\kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t) B(s)}{\sqrt{\frac{1}{2} (-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t + \kappa_1 h_t)^2 + \frac{1}{2} (-\kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}} = \frac{h_t - f_t}{\sqrt{(h_t^2 - f_t^2)}}$$

şeklindedir. ortalama eğriliği hesaplamak için, birinci ve ikinci temel form katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$E(s, t_0) = \langle P_s, P_s \rangle = \frac{1}{2} (\kappa_1 - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2))^2$$

$$F(s, t_0) = \langle P_s, P_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) g_t$$

$$G(s, t_0) = \langle P_t, P_t \rangle = f_t^2 + g_t^2 + h_t^2$$

$$l(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ss} \rangle = \frac{(h_t) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \right) - (f_t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1 (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 \right)}{\sqrt{(h_t^2 - f_t^2)}}$$

$$m(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ts} \rangle = \frac{(h_t)(f_{ts} - g_t \kappa_1) - (f_t)(g_t (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_{ts})}{\sqrt{(h_t^2 - f_t^2)}}$$

$$n(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{tt} \rangle = \frac{(h_t) f_{tt} - (f_t) h_{tt}}{\sqrt{(h_t^2 - f_t^2)}}$$

yukarda bulunan ifadeleri aşağıdaki ortalama eğrilik denkleminde yerine yazılırsa

$$H = \frac{LG + nE - 2mF}{2(EG - F^2)}$$

$$H = \frac{(f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) \left((h_t) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\kappa}_1 \right) - (f_t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\kappa}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\kappa}_1)^2 \right) \right) + \frac{1}{2} (h_t f_{tt} - f_t h_{tt}) (\kappa_1 - \tilde{\kappa}_1)^2 - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 - \tilde{\kappa}_1) g_t \right) \left((h_t)(f_{ts} - g_t \kappa_1) - (f_t)(g_t \tilde{\kappa}_1 + h_{ts}) \right)}{\left(((\kappa_1 - \tilde{\kappa}_1)^2) (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) - ((\kappa_1 - \tilde{\kappa}_1) g_t)^2 \right) \sqrt{(h_t^2 - f_t^2)}}$$

(4.18)

denklemimiz (4.18) şeklinde elde edilir. $\tilde{h}(s) = \frac{(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)(s)}{\kappa_1(s)}$ olarak alınacaktır.

Teorem 4.3.1: $\alpha_{TB}(s)$, $L_1 \leq s \leq L_2$, birim hızlı, eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğri olsun. $\alpha_{TB}(s)$ eğrisinin (4.17) ile verilen yüzey üzerinde parametre eğri olması ve yüzeyin bu eğri boyunca sabit ortalama eğrilikli olması için yeterli koşullar

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = 0, \\
& g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\
& \tilde{h}(s) \neq 1 = \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\
& f_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\
& \tilde{h}(s) = \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\
& f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\
& \tilde{h}(s) \neq 1 = \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad & f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\
& h_t(s, t_0) \neq 0, \\
& \tilde{h}(s) \neq 1 = \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{e)} \quad & f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\
& g_t(s, t_0) \neq 0, \\
& \tilde{h}(s) = \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

veya

$$\begin{aligned}
\text{f)} \quad & f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\
& f_t(s, t_0) \neq 0, \\
& \tilde{h}(s) \neq 1 = \text{sabit}, \kappa_1(s) = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

olmasıdır.

İspat:

a) Sapma fonksiyonları Teorem (4.3.1) in (4.19) denklemindeki şekilde alınırsa ve bunlar (4.17) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.19) denklemindeki koşullar (4.18) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(g_t^2 + h_t^2)}{\sqrt{2}h_t^2(1-\tilde{h})}$$

sabit olduğu görülür.

b) Sapma fonksiyonları Teorem (4.3.1) in (4.20) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.17) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.20) denklemindeki koşullar (4.18) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(f_t^2 + h_t^2) \left((h_t)(-\kappa_1^2 + \kappa_1 \tilde{h} \kappa_1) - (f_t)(\kappa_1 \tilde{h} \kappa_1 - (\tilde{h} \kappa_1)^2) \right) + (h_t f_{tt} - f_t h_{tt})(\kappa_1 - \tilde{h} \kappa_1)^2}{\sqrt{2} \left((\kappa_1 - \tilde{h} \kappa_1)^2 (f_t^2 + h_t^2) \right) \sqrt{(h_t^2 - f_t^2)}}$$

sabit olduğu görülür.

c) Sapma fonksiyonları Teorem (4.3.1) in (4.21) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.17) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.21) denklemindeki koşullar (4.18) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{-(f_t^2 + g_t^2) \tilde{h}}{\sqrt{2} f_t^2 (1 - \tilde{h})}$$

sabit olduğu görülür.

d) Sapma fonksiyonları Teorem (4.3.1) in (4.22) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.17) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.22) denklemindeki koşullar (4.18) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{-1}{\sqrt{2}(1-\tilde{h})}$$

sabit olduğu görülür.

e) Sapma fonksiyonları Teorem (4.3.1) in (4.23) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.17) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.23) denklemindeki koşullar (4.18) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = 0$$

sabit olduğu görülür.

f) Sapma fonksiyonları Teorem (4.3.1) in (4.24) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.17) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.24) denklemindeki koşullar (4.18) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\tilde{h}}{\sqrt{2}(1-\tilde{h})}$$

sabit olduğu görülür.

Örnek 4.3.2: $\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$, $0 \leq s \leq 2\pi$ birim hızlı eğrisini alalım. Eğrinin Frenet vektörleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$T'(s) = \alpha''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, 0\right)$$

$$\kappa_1 = \|T'(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$B = T \times N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, \cos s, -(\sin^2 s + \cos^2 s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1)$$

$$\overline{\kappa_2} = \frac{1}{2}\langle [T, N], B \rangle = \frac{1}{2}\langle T \times N, B \rangle = \frac{1}{2}\langle B, B \rangle = 0$$

$$\kappa_2 = -\langle B', N \rangle = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 s - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 s + 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{h}(s) = \frac{(\kappa_2 - \overline{\kappa_2})(s)}{\kappa_1(s)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 0}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \text{ dir.}$$

Sapma fonksiyonları Teorem 4.3.1' in (4.23) koşulunu sağlayacak şekilde

$$f(s, t_0) = st^3, g(s, t_0) = ssint, h(s, t_0) = 0$$

(Burada $h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0$, $f_t(s, t_0) = 3st^2 = 0$, $f_{tt}(s, t_0) = 6st = 0$, $g_t(s, t_0) = scost \neq 0$) ve $t_0 = 0$ seçilirse α eğrisi boyunca ortalama eğriliği

$$H = 0$$

olan (4.17) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyi için;

$$P_3(s, t_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + st^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + ssint \left(-\cos s, -\sin s, 0\right) + 0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P_3(s, t_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s - st^3 \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s - ssint \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s + st^3 \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s - ssint \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}st^3\right)$$

yüzeyi elde edilir.

4.4. TNB- Smarandache Eğrisi

$\alpha_{TNB}(s)$, 3-boyutlu Lie Gruplarında $\kappa_1(s)$ ve $(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)(s)$ eğrilikli birim hızlı regüler bir eğri alalım. $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisini $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına bağlı olarak yazılan yüzeyler parametrik olarak;

$$P(s, t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T(s) + N(s) + B(s)) + f(s, t)T(s) + g(s, t)N(s) + h(s, t)B(s) \quad (4.25)$$

$$L_1 \leq s \leq L_2, T_1 \leq t \leq T_2,$$

(4.25) yüzeyi ile verilir.

$f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = 0$ koşulunu sağlayan $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonları varsa $\alpha(s)$ eğrisi $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğridir veya $P(s, t)$ yüzeyi $\alpha(s)$ eğrisinden geçer denir. Burada $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ fonksiyonlarına (sapma fonksiyonları) C^1 sınıfından marching-scale fonksiyonlardır ve bu fonksiyonların farklı seçimlerinden $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisinden geçen yeni yüzeyler bulunacak ve yüzeyin $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisi boyunca sabit ortalama eğrilikli olması için yeterli şartlar elde edilecektir.

$$T' = \kappa_1 N, N' = -\kappa_1 T + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) B, B' = -(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) N$$

$$P_s(s, t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\kappa_1 + f_s - g\kappa_1\right) T(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\kappa_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + f\kappa_1 + g_s - h(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)\right) N(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + g(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_s\right) B(s)$$

$$P_s(s, t_0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\kappa_1\right) T(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\kappa_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)\right) N(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)\right) B(s)$$

$$P_t(s, t) = f_t T(s) + g_t N(s) + h_t B(s)$$

$$P_{tt}(s, t) = f_{tt} T(s) + g_{tt} N(s) + h_{tt} B(s)$$

$$P_{ts}(s, t_0) = (f_{ts}(s, t) - g_t \kappa_1) T(s) + (f_t \kappa_1 + g_{ts}(s, t) - h_t(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) N(s) + (g_t(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_{ts}(s, t)) B(s)$$

$$P_{ss}(s, t_0) = T(s) \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 + \kappa_1(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 - \kappa_1^2\right) + N(s) \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1^2 - \frac{\partial}{\partial s}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2\right) + B(s) \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\kappa_1(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 + \frac{\partial}{\partial s}(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)\right)$$

olup,

$$\mu(s, t_0) = \frac{P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)}{\|P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)\|}$$

$$P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t\right) T(s) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t\right) N(s) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t\right) B(s)$$

$$\|P_s(s, t_0) \times P_t(s, t_0)\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(-(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)f_t)^2}$$

Dolayısıyla yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mu(s, t_0) = \frac{((- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t) T(s) + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) N(s) + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) B(s))}{\sqrt{(- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2}}$$

şeklinde dir. ortalama eğriliği hesaplamak için, birinci ve ikinci temel form katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$E(s, t_0) = \langle P_s, P_s \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \kappa_1^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} (\kappa_1 - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2))^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2$$

$$F(s, t_0) = \langle P_s, P_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (-\kappa_1 f_t + (\kappa_1 - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) g_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t)$$

$$G(s, t_0) = \langle P_t, P_t \rangle = f_t^2 + g_t^2 + h_t^2$$

$$l(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ss} \rangle =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(-\frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 + \kappa_1 (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - \kappa_1^2 \right) (- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1^2 - \frac{\partial}{\partial s} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 \right) (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) + \left(\kappa_1 (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 + \frac{\partial}{\partial s} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \right) (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) \right)}{\sqrt{(- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2}}$$

$$m(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ts} \rangle = \frac{\left((f_{ts} - g_t \kappa_1) (- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t) + (\kappa_1 f_t + g_{ts} - h_t (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)) (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) + (g_t (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) + h_{ts}) (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) \right)}{\sqrt{(- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2}}$$

$$n(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{tt} \rangle = \frac{(- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t) f_{tt} + (\kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) g_{tt} + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t) h_{tt}}{\sqrt{(- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2}}$$

yukarda bulunan ifadeleri aşağıdaki ortalama eğrilik denkleminde yerine yazılırsa,

$$H = \frac{lG + nE - 2mF}{2(EG - F^2)}$$

$$H =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(-\frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 + \kappa_1 \tilde{h} \kappa_1 - \kappa_1^2 \right) (-\tilde{h} \kappa_1 h_t + \kappa_1 h_t - \tilde{h} \kappa_1 g_t) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1^2 - \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h} \kappa_1) - (\tilde{h} \kappa_1)^2 \right) (\kappa_1 h_t + \tilde{h} \kappa_1 f_t) + \left(\kappa_1 \tilde{h} \kappa_1 - (\tilde{h} \kappa_1)^2 + \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h} \kappa_1) \right) (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + \tilde{h} \kappa_1 f_t) \right)}{\sqrt{(- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2}} \left(f_t^2 + g_t^2 + h_t^2 \right) + \frac{\frac{1}{3} \left((-\tilde{h} \kappa_1 h_t + \kappa_1 h_t - \tilde{h} \kappa_1 g_t) f_{tt} + (\kappa_1 h_t - \tilde{h} \kappa_1 f_t) g_{tt} + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + \tilde{h} \kappa_1 f_t) h_{tt} \right) (\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h} \kappa_1)^2 + (\tilde{h} \kappa_1)^2) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left((f_{ts} - g_t \kappa_1) (-\tilde{h} \kappa_1 h_t + \kappa_1 h_t - \tilde{h} \kappa_1 g_t) + (\kappa_1 f_t + g_{ts} - h_t \tilde{h} \kappa_1) (\kappa_1 h_t + \tilde{h} \kappa_1 f_t) + (g_t \tilde{h} \kappa_1 + h_{ts}) (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + \tilde{h} \kappa_1 f_t) \right) (-\kappa_1 f_t + (\kappa_1 - \tilde{h} \kappa_1) g_t + \tilde{h} \kappa_1 h_t)}{\sqrt{(- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2}} \left(\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h} \kappa_1)^2 + (\tilde{h} \kappa_1)^2 (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) \right) - \frac{2}{3} \left(\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h} \kappa_1)^2 + (\tilde{h} \kappa_1)^2 (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) \right) \left(\sqrt{(- (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) h_t + \kappa_1 h_t - (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) g_t)^2 + (\kappa_1 h_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) f_t)^2} \right) \right) \quad (4.26)$$

Ortalama eğrilik denklemi (4.26) şeklinde elde edilir. $\tilde{h}(s) = \frac{\kappa_2(s) - \bar{\kappa}_2(s)}{\kappa_1(s)}$ olmak üzere,

Teorem 4.4.1: $\alpha_{TNB}(s)$, $L_1 \leq s \leq L_2$, birim hızlı ve eğriliği sıfır olmayan bir eğri olsun. $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisinin (4.25) ile verilen yüzey üzerinde parametre eğri olması ve yüzeyin bu eğri boyunca Ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli koşullar

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad & f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = 0, \\ & g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\tilde{h}(s)=sabit, \kappa_1(s)=sabit$$

veya

$$\begin{aligned} \text{b) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &= h_t(s, t_0) = sabit \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= sabit, \kappa_1(s) = sabit \end{aligned} \quad (4.28)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{c) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &= g_t(s, t_0) = sabit \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= sabit, \kappa_1(s) = sabit \end{aligned} \quad (4.29)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{d) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\ h_t(s, t_0) &= sabit \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= sabit, \kappa_1(s) = sabit \end{aligned} \quad (4.30)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{e) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ g_t(s, t_0) &\neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= sabit, \kappa_1(s) = sabit \end{aligned} \quad (4.31)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{f) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &= sabit \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= sabit, \kappa_1(s) = sabit \end{aligned} \quad (4.32)$$

olmasıdır.

İspat:

a) Sapma fonksiyonları Teorem (4.4.1) in (4.27) denklemindeki şekilde alınırsa ve bunlar (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TNB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.27) denklemindeki koşullar (4.26) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$H=$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 \right) (h_t + g_t) + \left(-2 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) - 2(\tilde{h}\kappa_1)^2 \right) (\kappa_1 h_t) \pm \kappa_1 g_t \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) \right) (g_t^2 + h_t^2) + \\ & \frac{1}{3} (\kappa_1 h_t g_{tt} - \kappa_1 g_t h_{tt}) (\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1)^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2) - \\ & \frac{2 \left((-g_t \kappa_1) (-\tilde{h}\kappa_1 h_t + \kappa_1 h_t) + (g_{ts} - h_t \tilde{h}\kappa_1) (\kappa_1 h_t) - \kappa_1 g_t h_{ts} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} ((\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1) g_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)}{\frac{2}{3} (\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1)^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2 (g_t^2 + h_t^2) - ((\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1) g_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)^2) \sqrt{(-\tilde{h}\kappa_1 h_t + \kappa_1 h_t - \tilde{h}\kappa_1 g_t)^2 + (\kappa_1 h_t)^2 + (-\kappa_1 g_t)^2}} \end{aligned}$$

sabit olduğu görülür.

b) Sapma fonksiyonları Teorem (4.4.1) in (4.28) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TNB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.28) denklemindeki koşullar (4.26) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$H=$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 \right) (h_t + f_t) + \left(-2\kappa_1^2 + 2\kappa_1 \tilde{h}\kappa_1 - 2(\tilde{h}\kappa_1)^2 \right) (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) + (\kappa_1 f_t - \kappa_1 h_t) \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) \right) (f_t^2 + h_t^2) + \\ & \frac{1}{3} ((-\tilde{h}\kappa_1 h_t + \kappa_1 h_t) f_{tt} + (-\kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) h_{tt}) (\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1)^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2) - \\ & \frac{2 \left((f_{ts}) (-\tilde{h}\kappa_1 h_t + \kappa_1 h_t) + (\kappa_1 f_t - h_t \tilde{h}\kappa_1) (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) + (h_{ts}) (-\kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) \right) \frac{1}{\sqrt{3}} (-\kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)}{\frac{2}{3} (\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1)^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2 (f_t^2 + h_t^2) - (-\kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)^2) \sqrt{(-\tilde{h}\kappa_1 h_t + \kappa_1 h_t)^2 + (\kappa_1 h_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)^2 + (-\kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 h_t)^2}} \end{aligned}$$

sabit olduğu görülür.

c) Sapma fonksiyonları Teorem (4.4.1) in (4.29) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TNB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.29) denklemindeki koşullar (4.26) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$H=$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) \right) (f_t + g_t) + \left(2\tilde{h}\kappa_1 \kappa_1 - \kappa_1^2 - 2(\tilde{h}\kappa_1)^2 \right) (\tilde{h}\kappa_1 f_t) \right) (f_t^2 + g_t^2) + \\ & \frac{1}{3} (-\tilde{h}\kappa_1 g_t f_{tt} - \tilde{h}\kappa_1 f_t g_{tt}) (\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1)^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2) - \\ & \frac{2 \left(-f_{ts} \tilde{h}\kappa_1 g_t + (\kappa_1 f_t + g_{ts}) (\tilde{h}\kappa_1 f_t) + (g_t \tilde{h}\kappa_1) (-\kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t) \right) \frac{1}{\sqrt{3}} (-\kappa_1 f_t + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1) g_t)}{\frac{2}{3} (\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1)^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2 (f_t^2 + g_t^2) - (-\kappa_1 f_t + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1) g_t)^2) \sqrt{(-\tilde{h}\kappa_1 g_t)^2 + (\tilde{h}\kappa_1 f_t)^2 + (-\kappa_1 g_t - \kappa_1 f_t + \tilde{h}\kappa_1 f_t)^2}} \end{aligned}$$

sabit olduğu görülür.

d) Sapma fonksiyonları Teorem (4.4.1) in (4.30) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TNB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.30) denklemindeki koşullar (4.26) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\left(\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 + 2\tilde{h}\kappa_1 \kappa_1^2 - 2\kappa_1^3 - \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) \right) (h_t^2)}{\frac{2}{3\sqrt{3}} (\kappa_1^2 + (\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1)^2) \sqrt{(-\tilde{h}\kappa_1 + \kappa_1)^2 + \kappa_1^2}}$$

sabit olduğu görülür.

e) Sapma fonksiyonları Teorem (4.4.1) in (4.31) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TNB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından

$\alpha_{TNB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.31) denklemindeki koşullar (4.26) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{-\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1)}{\frac{2}{3\sqrt{3}} (\kappa_1^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sabit olduğu görülür.

f) Sapma fonksiyonları Teorem (4.4.1) in (4.32) denklemindeki şekilde alınırsa ve bunlar (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{TNB}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{TNB}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (4.32) denklemindeki koşullar (4.26) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{(\tilde{h}\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} \kappa_1 - 2(\tilde{h}\kappa_1)^3 - \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{h}\kappa_1) + 2\kappa_1 (\tilde{h}\kappa_1)^2)}{\frac{2}{3\sqrt{3}} ((\kappa_1 - \tilde{h}\kappa_1)^2 + (\tilde{h}\kappa_1)^2 (f_t^2)) \sqrt{(\tilde{h}\kappa_1)^2 + (-\kappa_1 + \tilde{h}\kappa_1)^2}}$$

sabit olduğu görülür.

5. LİE GRUPLARINDA ALTERNATİF $\{N, C, W\}$ ÇATISI İLE VERİLEN EĞRİ BOYUNCA SABİT ORTALAMA EĞRİLİKLİ YÜZEYLER

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ birim hızlı regüler eğri olsun. Frenet çatısından farklı bir alternatif çatı $\{N(s), C(s), W(s)\}$ ile tanımlı olmak üzere

$$N(s) = N(s), \quad C(s) = \frac{N'(s)}{\|N'(s)\|}, \quad W(s) = N(s) \wedge C(s) \text{ şeklindedir [17].}$$

$\alpha_{NCW}(s)$, 3- boyutlu birim hızlı bir eğri olsun. $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatının birinci eğriliği x ve ikinci eğriliği y olsun. Lie grupta yüzeyimiz (5.1) yüzeyi ile verilir.

$$P(s, t) = \alpha_{NCW}(s) + f(s, t)N(s) + g(s, t)C(s) + h(s, t)W(s) \quad (5.1)$$

$$0 \leq s \leq 1,$$

$$\begin{bmatrix} N'(s) \\ C'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x(s) & 0 \\ -x(s) & 0 & y(s) \\ 0 & -y(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) \\ C(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

$$N'(s) = x(s)C$$

$$C'(s) = -x(s)N + y(s)W$$

$$W'(s) = -y(s)C$$

Ayrıca burada $x = k_1 \sqrt{1 + \tilde{h}^2}$ ve $y = \frac{\tilde{h}'}{1 + \tilde{h}^2}$ şeklindedir.

$$W(s) = \frac{\tilde{h}}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}} T(s) + \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}} B(s)$$

$$C(s) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}} T(s) + \frac{\tilde{h}}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}} B(s)$$

$W(s)$ ' yi $(-\tilde{h})$ ile çarpıp $C(s)$ ile toplarsak;

$$-\tilde{h}W(s) + C(s) = \frac{-\tilde{h}^2 - 1}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}} T(s) = \frac{-(1 + \tilde{h}^2)}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}} T(s) = -(1 + \tilde{h}^2)^{\frac{1}{2}} T(s)$$

elde ederiz.

$$T(s) = \frac{\tilde{h}W(s)}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}} - \frac{C(s)}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}}$$

$$T(s) = \frac{k_1 \tilde{h}W(s)}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}} - \frac{k_1 C(s)}{\sqrt{1 + \tilde{h}^2}}$$

$$T(s) = \frac{k_1 \tilde{h}W(s) - k_1 C(s)}{x}$$

$f(s, t_0) = g(s, t_0) = h(s, t_0) \equiv 0$ koşulunu sağlayan $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonları varsa $\alpha(s)$ eğrisi $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik

eğridir denir. Burada $f(s, t), g(s, t), h(s, t)$ fonksiyonlarına (sapma fonksiyonları) C^1 sınıfından marching-scale fonksiyonlardır Bu fonksiyonların farklı seçimlerinden $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisinden geçen yeni yüzeyler elde edilecek ve $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli şartlar elde edilecektir.

P yüzeyinin $\alpha(s)$ eğrisi boyunca birim normal vektör alanı

$$\mu(s, t) = \frac{P_s(s, t) \times P_t(s, t)}{\|P_s(s, t) \times P_t(s, t)\|}$$

şeklinde hesaplanır. Yüzeyin birim normal vektör alanını hesaplamak için,

$$\begin{aligned} P_s(s, t) &= \alpha' + f_s N(s) + f N'(s) + g_s C(s) + g C'(s) + h_s W(s) + h W'(s) \\ &= T + f_s N(s) + f x C(s) + g_s C(s) + g(-x N(s) + y W(s) + h_s W(s) + h(-y C(s))) \\ &= \frac{k_1 \tilde{h} W(s) - \tilde{h} C(s)}{x} + f_s N(s) + f x C(s) + g_s C(s) - g x N(s) + g y W(s) + h_s W(s) - h y C(s) \\ &= N(f_s - g x) + C\left(-\frac{\tilde{h}}{x} + f x + g_s - h y\right) + W\left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} + g y + h_s\right) \end{aligned}$$

$$P_s(s, t_0) = \left(-\frac{k_1}{x}\right) C + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x}\right) W$$

$$P_t(s, t) = f_t N(s) + g_t C(s) + h_t W(s)$$

$$P_{tt}(s, t) = f_{tt} N(s) + g_{tt} C(s) + h_{tt} W(s)$$

$$P_{ts}(s, t) = (f_{ts} - g_t x) N(s) + (f_t x + g_{ts} - h_t y) C(s) + (g_t y + h_{ts}) W(s)$$

$$\begin{aligned} P_{ss}(s, t) &= (f_{ss} - g_s x - g \frac{\partial}{\partial s} x) N + (f_s - g x) f C + \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{k_1}{x} + f_s x + f \frac{\partial}{\partial s} x + g_{ss} + h_s y - h \frac{\partial}{\partial s} y\right) C \\ &+ \left(-\frac{k_1}{x} + f x + g_s - h y\right)(-x N + y) W + \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{k_1 \tilde{h}}{x} + g_s y + g \frac{\partial}{\partial s} y + h_{ss}\right) W - \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} + g y + h_s\right) y C \end{aligned}$$

$$P_{ss}(s, t_0) = k_1 N(s) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{k_1}{x} - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} y\right) C(s) + \left(-\frac{k_1 y}{x} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{k_1 \tilde{h}}{x}\right) W(s)$$

$$\mu(s, t) = \frac{P_s(s, t) \times P_t(s, t)}{\|P_s(s, t) \times P_t(s, t)\|} \text{ olup,}$$

$$\begin{aligned} P_s(s, t) \times P_t(s, t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k_1}{x} & \frac{k_1 \tilde{h}}{x} \\ f_t & g_t & h_t \end{bmatrix} \\ &= N\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t\right) + C\left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t\right) + W\left(\frac{k_1}{x} f_t\right) \end{aligned}$$

$$\|P_s(s, t) \times P_t(s, t)\| = \sqrt{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t\right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t\right)^2 + \left(\frac{k_1}{x} f_t\right)^2}$$

$$\mu(s, t_0) = \frac{N\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t\right) + C\left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t\right) + W\left(\frac{k_1}{x} f_t\right)}{\sqrt{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t\right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t\right)^2 + \left(\frac{k_1}{x} f_t\right)^2}}$$

$$E(s, t_0) = \langle P_s, P_s \rangle = \left(\frac{k_1}{x}\right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x}\right)^2$$

$$F(s, t_0) = \langle P_s, P_t \rangle = -\frac{k_1}{x} g_t + \frac{k_1 \tilde{h}}{x} h_t$$

$$G(s, t_0 \langle P_t, P_t \rangle) = f_t^2 + g_t^2 + h_t^2$$

$$l(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ss} \rangle = \frac{k_1 \left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) + \left(\frac{\partial k_1}{\partial s} - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} y \right) \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) + \left(-\frac{k_1 y}{x} + \frac{\partial k_1 \tilde{h}}{\partial s} \right) \left(\frac{k_1}{x} f_t \right)}{\sqrt{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right)^2 + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right)^2}}$$

$$m(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{ts} \rangle = \frac{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) (f_{ts} - g_t x) + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) (f_t x + g_{ts} - h_t y) + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) (g_t y + h_{ts})}{\sqrt{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right)^2 + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right)^2}}$$

$$n(s, t_0) = \langle \mu(s, t_0), P_{tt} \rangle = \frac{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) f_{tt} + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) g_{tt} + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) h_{tt}}{\sqrt{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right)^2 + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right)^2}}$$

Bulunan ifadeleri aşağıdaki ortalama eğrilik denkleminde yerine yazalım.

$$H = \frac{lG + nE - 2mF}{2(EG - F^2)}$$

$$\left(k_1 \left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) + \left(\frac{\partial k_1}{\partial s} - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} y \right) \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) + \left(-\frac{k_1 y}{x} + \frac{\partial k_1 \tilde{h}}{\partial s} \right) \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) \right) (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) +$$

$$\left(\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) f_{tt} + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) g_{tt} + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) h_{tt} \right) \left(\left(\frac{k_1}{x} \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right)^2 \right) -$$

$$2 \left(\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) (f_{ts} - g_t x) + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) (f_t x + g_{ts} - h_t y) + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) (g_t y + h_{ts}) \right) \left(\frac{-k_1}{x} g_t + \frac{k_1 \tilde{h}}{x} h_t \right)$$

$$H = \frac{2 \left(\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) (f_{ts} - g_t x) + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) (f_t x + g_{ts} - h_t y) + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) (g_t y + h_{ts}) \right) \left(\frac{-k_1}{x} g_t + \frac{k_1 \tilde{h}}{x} h_t \right)}{2 \left(\left(\frac{k_1}{x} \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right)^2 (f_t^2 + g_t^2 + h_t^2) - \left(\frac{-k_1}{x} g_t + \frac{k_1 \tilde{h}}{x} h_t \right)^2 \right) \sqrt{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right)^2 + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right)^2}} \quad (5.2)$$

denklemimiz (5.2) şeklinde elde edilir.

Teorem 5.1: $\alpha_{NCW}(s), L_1 \leq s \leq L_2$, birim hızlı, eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğri olsun. $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisinin (5.1) yüzeyi üzerinde parametre eğri olması ve yüzeyin bu eğri boyunca Ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli şartlar

$$\begin{aligned} \text{a) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = 0, \\ g_t(s, t_0) &= h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, k_1(s) = \text{sabit}, x(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (5.3)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{b) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &= h_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= \text{sabit}, k_1(s) = \text{sabit}, x(s) = \text{sabit}, y(s) = \text{sabit} \end{aligned} \quad (5.4)$$

veya

$$\begin{aligned} \text{c) } f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = h_t(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &= g_t(s, t_0) = \text{sabit} \neq 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\tilde{h}(s)=sabit, k_1(s)=sabit, x(s)=sabit, y(s)=sabit$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{d)} f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = g_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = 0, \\ h_t(s, t_0) &\neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= sabit, k_1(s) = sabit, x(s) = sabit \end{aligned} \quad (5.6)$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{e)} f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = f_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = f_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ g_t(s, t_0) &\neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= sabit, k_1(s) = sabit, x(s) = sabit \end{aligned} \quad (5.7)$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{f)} f(s, t_0) &= g(s, t_0) = h(s, t_0) = g_t(s, t_0) = h_t(s, t_0) = g_{tt}(s, t_0) = h_{tt}(s, t_0) = 0, \\ f_t(s, t_0) &\neq 0, \\ \tilde{h}(s) &= sabit, k_1(s) = sabit, x(s) = sabit, y(s) = sabit \end{aligned} \quad (5.8)$$

olmasıdır.

İspat:

a) Sapma fonksiyonları Teorem (5.1) in (5.3) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (5.1) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NCW}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (5.3) denklemindeki koşullar (5.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\left(k_1 \left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) \right) (g_t^2 + h_t^2) - 2 \left((-k_1 h_t - k_1 \tilde{h} g_t) (-g_t) \right) \left(\frac{-k_1}{x} g_t + \frac{k_1 \tilde{h}}{x} h_t \right)}{2 \left(\left(\left(\frac{k_1}{x} \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right)^2 \right) (g_t^2 + h_t^2) - \left(\frac{-k_1}{x} g_t + \frac{k_1 \tilde{h}}{x} h_t \right)^2 \right) \sqrt{\left(\frac{-k_1}{x} h_t - \frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right)^2}}$$

sabit olduğu görülür.

b) Sapma fonksiyonları Teorem (5.1) in (5.4) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (5.1) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NCW}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (5.4) denklemindeki koşullar (5.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\left(k_1 \left(-\frac{k_1}{x} h_t \right) + \left(\frac{\partial k_1}{\partial s} - \frac{k_1 \tilde{h} y}{x} \right) \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) + \left(-\frac{k_1 y}{x} + \frac{\partial k_1 \tilde{h}}{\partial s} \right) \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) \right) (f_t^2 + h_t^2) + \left(\left(-\frac{k_1}{x} h_t \right) f_{tt} + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) h_{tt} \right) \left(\left(\frac{k_1}{x} \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right)^2 \right) - 2 \left(\left(-\frac{k_1}{x} h_t \right) (f_{ts}) + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) (f_t x - h_t y) + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) (h_{ts}) \right) \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} h_t \right)}{2 \left(\left(\frac{k_1}{x} \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right)^2 \right) (f_t^2 + h_t^2) - \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} h_t \right)^2} \sqrt{\left(-\frac{k_1}{x} h_t \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right)^2 + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right)^2}$$

sabit olduğu görülür.

c) Sapma fonksiyonları Teorem (5.1) in (5.5) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (5.1) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NCW}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (5.5) denklemdeki koşullar (5.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\left(k_1 \left(-\frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) + \left(\frac{\partial k_1}{\partial s} - \frac{k_1 \tilde{h} y}{x} \right) \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) + \left(-\frac{k_1 y}{x} + \frac{\partial k_1 \tilde{h}}{\partial s} \right) \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) \right) (f_t^2 + g_t^2) + \left(\left(-\frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) f_{tt} + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) g_{tt} \right) \left(\left(\frac{k_1}{x} \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right)^2 \right) - 2 \left(\left(-\frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right) (f_{ts} - g_t x) + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right) (f_t x + g_{ts}) + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right) (g_t y) \right) \left(-\frac{k_1}{x} g_t \right)}{2 \left(\left(\frac{k_1}{x} \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right)^2 \right) (f_t^2 + g_t^2) - \left(-\frac{k_1}{x} g_t \right)^2} \sqrt{\left(-\frac{k_1 \tilde{h}}{x} g_t \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} f_t \right)^2 + \left(\frac{k_1}{x} f_t \right)^2}$$

sabit olduğu görülür.

d) Sapma fonksiyonları Teorem (5.1) in (5.6) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (5.1) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NCW}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (5.6) denklemdeki koşullar (5.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{x^2}{2k_1}$$

sabit olduğu görülür.

e) Sapma fonksiyonları Teorem (5.1) in (5.7) denklemindeki şekilde alınır ve bunlar (5.1) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NCW}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (5.7) denklemdeki koşullar (5.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \left(\frac{x}{2\tilde{h}} \right)^2$$

sabit olduğu görülür.

f) Sapma fonksiyonları Teorem (5.1) in (5.8) denklemindeki şekilde alınırsa ve bunlar (5.1) denkleminde yerine yazılırsa $P(s, t_0) = \alpha_{NCW}(s)$ olur, dolayısıyla parametrik eğri tanımından $\alpha_{NCW}(s)$ eğrisi parametre eğrisi olur. Son olarak (5.8) denklemindeki koşullar (5.2) formülünde yerine yazılırsa ortalama eğrilik sabit olur. Gerçekten verilen şartlar yerine yazılırsa;

$$H = \frac{\left(\left(\frac{\partial k_1}{\partial s} - \frac{k_1 \tilde{h} y}{x} \right) \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right) + \left(-\frac{k_1 y}{x} + \frac{\partial k_1 \tilde{h}}{\partial s} \right) \left(\frac{k_1}{x} \right) \right)}{2 \left(\left(\frac{k_1}{x} \right)^2 + \left(\frac{k_1 \tilde{h}}{x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

sabit olduğu görülür.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında 3 boyutlu Lie gruplarda alınan keyfi bir eğrinin Frenet çatısına göre ve sapma fonksiyonları olarak adlandırılan C^1 sınıfından fonksiyonlara bağlı yüzeyler oluşturuldu. 3 boyutlu Lie gruplarda Smarandache eğrileri ve yine 3 boyutlu Lie grubunda alternatif $\{N, C, W\}$ çatısına göre ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler oluşturuldu. Daha sonra elde edilen yüzeylere örnekler verildi.



KAYNAKLAR

- [1] Ali, A. T. (2010). *Special Smarandache curves in the Euclidean space*. International Journal of Mathematical Combinatorics, Vol.2, 30-36.
- [2] Bayram, E., Güler. F., Kasap, (2012). *Parametric Representation of a Surface Pencil with a Common Asymptotic Curve* Computer-Aided Design 44 (7), 637-643
- [3] Bayram, E., Coşanoğlu, H., (2020). *E^3 te Verilen Bir Eğri Boyunca Sabit Ortalama Eğirlikli Yüzeylerin Oluşturulması* Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 55139, Samsun
- [4] Carmo, Do, M.P. (1976). *Differential Geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs
- [5] Çiftçi, Ü. (2009). *A Generalization of Lançet's theorem*, Journal of Geometry Physics
- [6] Gilmore, R. (2008). *Lie Groups Physics and Geometry*, Cambridge University Press, New York, 319
- [7] Gray, J. J. Brannan, D., A., Esplen, M., F., (1999). 'Geometry', The Open University, Cambridge University Press.
- [8] Hacısalıhoğlu, H.H. (1998). *Diferansiyel geometri*, 1.cilt Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları
- [9] Hacısalıhoğlu, H.H. (2006). *Yüksek diferansiyel geometriye giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Elazığ
- [10] Kasap, E., Akyıldız, F. T., Orbay, K. (2008) *A Generalization of Surfaces Family with Common Spatial Geodesic*, Applied Mathematics and Computation
- [11] Kasap, E. *Diferansiyel Geometri II*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, Samsun
- [12] Millman vd. (1977). *Elements of Differential Geometry*, Prentice Hall
- [13] O'Neill, B. (1966). *Elementary differential geometry*. Academic Press, Inc., New York.
- [14] Okuyucu, O.Z., Değirmen, C., Yıldız, Ö. G. *Smarandache Curves in three dimensional Lie Groups*
- [15] Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferansiyel Geometri*, Nobel Yayınları, Ankara
- [16] Şenyurt, S., Sivas, S. (2013). *Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama*, Ordu Üniversitesi Bilim Teknik Dergisi, Vol.3, 46-60. Ordu
- [17] Uzunoğlu B., Gök I. ve Yaylı Y., (2016). *A New Approach on Curves of Constant Precession*. Appl. Math. Comput., 275, 317-323.
- [18] Wang, G.J., Tang, K., ve Tai, C.L. (2004). *Parametric representation of a surface pencil with a Common spatial geodesic*. Computer-Aided Design, 36(5), 447-459
- [19] Yoon, D.W., Yüzbaşı, Z. K., (2021). *A Generalization for Surfaces using a Line of Curvature in Lie Group*, Hacettepe Journal of. Mathematics. Statistics. Volume 50, 444 – 452
- [20] Yoon, D.W., Yüzbaşı, Z. K., Bektaş, M. (2017). *An Approach for Surfaces using an Asymptotic curve in Lie group*. Journal of Advanced Physics, 6(4), 586-590
- [21] Yüzbaşı, Z. K., Bektaş, M. (2016). *On the Construction of a Surface Family with Common Geodesic in Galilean Space G_3* . Open Physics, 14(1), 360-363.
- [22] Yüzbaşı, Z. K. (2022). *Surfaces Using a Common Geodesic Curve With an Alternative Moving Frame in the 3-Dimensional Lie Group*. Cumhuriyet Science Journal, 43(1), 77-81.
- [23] Yüzbaşı, Z. K. (2016) *On a Family of Surfaces with Common Asymptotic Curve in the Galilean space G_3* . J. Nonlinear Sci. Appl 9: 518-523

ÖZGEÇMİŞ

Sevinç TAZE

[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]