

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TIMELIKE ASAL NORMALLİ
SPACELIKE SALKOWSKI EĞRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS

Birkan AKSAN

HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TIMELIKE ASAL NORMALLİ
SPACELIKE SALKOWSKI EĞRİSİ ÜZERİNE**

**ON THE SPACELIKE SALKOWSKI CURVE WITH TIMELIKE PRINCIPAL
NORMAL IN 3-DIMENSIONAL LORENTZIAN SPACE**

YÜKSEK LİSANS

Birkan AKSAN

**HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE**



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TIMELIKE ASAL NORMALLİ
SPACELIKE SALKOWSKI EĞRİSİ ÜZERİNE**

**ON THE SPACELIKE SALKOWSKI CURVE WITH TIMELIKE PRINCIPAL
NORMAL IN 3-DIMENSIONAL LORENTZIAN SPACE**

YÜKSEK LİSANS

Birkan AKSAN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sümeyye GÜR MAZLUM

**HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**3-Boyutlu Lorentz Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisi Üzerine**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

05/06/2023

Birkan AKSAN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince; akademik bilgilerini ve tecrübelerini benimle cömertçe paylaşan, bana yol gösteren ve akademik çalışma yapmayı sevdiren, beni her zaman motive eden ve her koşulda destekleyen, önerilerine ve fikirlerine çok değer verdiğim saygıdeğer danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Sümeyye GÜR MAZLUM'a, bu süreçte ve her daim yanımda olan, anlayışla ve sabırla beni destekleyen biricik ve çok kıymetli eşim Seher AKSAN'a ve varlığıyla bana ilham veren sevgili kızım Zeynep Sare AKSAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Birkan AKSAN
GÜMÜŞHANE –2023

ÖZET

Bu tez çalışmasının Giriş bölümünde, çalışmanın amacına, teknolojiye yeri, uygulama alanlarına ve bu alanda yapılmış diğ er çalışmalara yer verilmiştir. Genel Bilgiler bölümünde, Bulgular bölümünde kullanılacak olan temel kavramlardan detaylıca bahsedilmiştir. Materyal ve Yöntem bölümünde, çalışmanın ana konusu olan, 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisi hakkında bilgi verilmiştir. Bulgular bölümü ise çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde öncelikle Lorentz uzayındaki timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin yay uzunluğu ve Darboux vektörü hesaplanmıştır. Daha sonra bu eğrinin küresel gösterge eğrilerinin Frenet çatıları, eğrilikleri, Frenet türev formülleri, Darboux vektörleri, yay uzunlukları, $\mathbb{E}_1^3$, $\mathbb{H}_0^2$ (hiperbolik birim küre) ve $\mathbb{S}_1^2$ (Lorentzian birim küre) ye göre geodezik eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca bu küresel gösterge eğrilerinin bu küreler üzerindeki grafikleri çizilmiştir. Sonuç ve Öneriler bölümünde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlar ve yapılabilecek olan yeni çalışmalar hakkında öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, Geodezik eğrilik, Salkowski eğrisi, Küresel gösterge eğrileri.

SUMMARY

In the Introduction part of this thesis, the purpose of the study, its place in technology, application areas and other studies in this field are given. In the Preliminaries section, the basic concepts that will be used in the Findings section are mentioned in detail. In the Materials and Methods section, the information about the timelike prime normal spacelike Salkowski curve in 3-dimensional Lorentz space, which is the main subject of the study is given. The Findings section is the original part of the study. In this section, firstly, the arc length and Darboux vector of the timelike principal normal spacelike Salkowski curve in Lorentzian 3-space are calculated. Then, the Frenet frames, the curvatures, the Frenet derivative formulas, the Darboux vectors, the arc lengths and the geodesic curvatures according to $\mathbb{E}_1^3$, $\mathbb{H}_0^2$ (hyperbolic unit sphere) and $\mathbb{S}_1^2$ (Lorentzian unit sphere) of the spherical indicatrix curves of this curve are calculated. In addition, the graphs of these spherical indicatrix curves on these spheres are drawn. In the Conclusion and Suggestions section, the results obtained from this study and the suggestions about new studies that can be done are given.

Keywords: Frenet frames, Geodesic curvature, Salkowski curve, Spherical indicatrix curves.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	X
ŞEKİLLER DİZİNİ	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XIII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	9
2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....	9
2.2. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar.....	20
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	41
3.1. $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Salkowski Eğrisi.....	41
3.2. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisi.....	42
4. BULGULAR	45
4.1. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin Bazı Özellikleri	45
4.2. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin Küresel Gösterge Eğrileri	50
4.3. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin (T) Timelike Teğetler Göstergesi.....	51
4.4. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin (N) Spacelike Normaller Göstergesi.....	74
4.5. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin (B) Timelike Binormeller Göstergesi.....	92
4.6. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin (C) Spacelike Normaller Göstergesi.....	114
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	132

KAYNAKÇA	137
ÖZGEÇMİŞ.....	142

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin geometrik elemanları	132
Tablo 2. (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin geometrik elemanları	133
Tablo 3. (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin geometrik elemanları	134
Tablo 4. (C) spacelike pol gösterge eğrisinin geometrik elemanları.....	135

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Öklid'in Elementler kitabı (URL-1).....	1
Şekil 2. Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz tarafından Türkçe'ye çevrilen Öklid'in Elementler kitabı (URL-2).	2
Şekil 3. N. Lobachevsky, J. Bolyai, C. F. Gauss ve B. Riemann (soldan sağa) (URL-3, URL- 4, URL-5, URL-6).....	3
Şekil 4. Hiperbolik geometri, Öklid geometri ve Eliptik geometri (soldan sağa).....	3
Şekil 5. Albert Einstein'ın görelilik teorisi (URL-7).....	4
Şekil 6. H. Minkowski ve H. Lorentz (URL-8, URL-9).....	5
Şekil 7. M. A. Lancet (URL-10).	6
Şekil 8. DNA dizilimi ve sarmal merdiven (URL-11, URL-12).....	6
Şekil 9. Ernst Leopold Salkowski (URL-13).	7
Şekil 10. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim küre üzerinde oluşturduğu teğetler göstergesi.....	14
Şekil 11. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim küre üzerinde oluşturduğu normaller göstergesi	15
Şekil 12. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim küre üzerinde oluşturduğu binormaller göstergesi	16
Şekil 13. Darboux vektörü	17
Şekil 14. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim küre üzerinde oluşturduğu pol göstergesi	18
Şekil 15. Birim küre üzerinde teğetler, normaller, binormaller ve pol gösterge eğrileri	19
Şekil 16. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında birim küreler.....	23
Şekil 17. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında spacelike dönme eksenli bir dönel yüzey (Bilici, 2009).....	23
Şekil 18. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında timelike dönme eksenli bir dönel yüzey (Bilici, 2009).	24
Şekil 19. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında vektörler.....	24
Şekil 20. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{H}_0^2$ üzerinde teğetler göstergesi	35
Şekil 21. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde normaller göstergesi.....	36
Şekil 22. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde binormaller göstergesi.....	37
Şekil 23. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde pol göstergesi.....	38
Şekil 24. $m = \frac{1}{7}$ ve $m = \frac{1}{12}$ değerleri için 3-boyutlu Öklid uzayında Salkowski eğrisi	42

Şekil 25. $m = -6, -2, -\frac{10}{9}$ değerleri için timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisi	43
Şekil 26. $m = 4, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}$ değerleri için timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisi	43
Şekil 27. Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin Darboux vektörü	48
Şekil 28. Lorentz uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ ve $\mathbb{H}_0^2$ üzerinde küresel gösterge eğrileri	51
Şekil 29. (T) teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ de $\overrightarrow{F_T}(t)$ Darboux vektörü	68
Şekil 30. $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde (T) timelike teğetler gösterge eğrisi	69
Şekil 31. $\mathbb{H}_0^{2+}$ üzerinde (N) spacelike normaller gösterge eğrisi	85
Şekil 32. (N) normaller gösterge eğrisinin $\mathbb{H}_0^2$ de $\overrightarrow{F_N}(t)$ Darboux vektörü	88
Şekil 33. (B) teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ de $\overrightarrow{F_B}(t)$ Darboux vektörü	108
Şekil 34. $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde (B) timelike binormaller gösterge eğrisi	110
Şekil 35. $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde (C) spacelike normaller gösterge eğrisi	125
Şekil 36. (C) teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ de $\overrightarrow{F_C}(t)$ Darboux vektörü	128

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

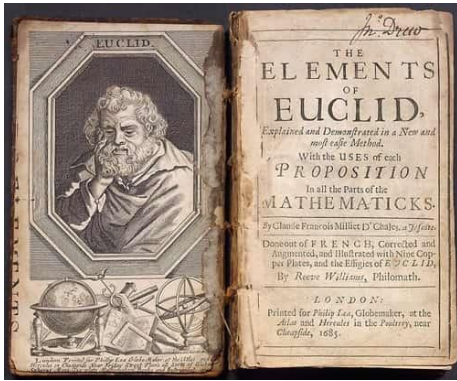
$\mathbb{E}_1^3$	: 3-boyutlu Lorentz Uzayı
$\mathbb{H}_0^2$	: Lorentz uzayında hiperbolik birim küre
$\mathbb{H}_0^{2+}$	: Lorentz uzayında future pointing hiperbolik birim küre
$\mathbb{H}_0^{2-}$	: Lorentz uzayında past pointing hiperbolik birim küre
$\mathbb{S}_1^2$	: Lorentz uzayında Lorentzian birim küre
(B)	: (α) eğrisinin binormaller gösterge eğrisi
$\vec{B}(t)$	: (α) eğrisinin binormal vektörü
$\vec{B}_B(t)$	: (B) eğrisinin binormal vektörü
$\vec{B}_N(t)$	: (B) eğrisinin normal vektörü
$\vec{B}_T(t)$	: (B) eğrisinin teğet vektörü
(C)	: (α) eğrisinin pol gösterge eğrisi
$\vec{C}(t)$	: (α) eğrisinin pol vektörü
$\vec{C}_B(t)$	: (C) eğrisinin binormal vektörü
$\vec{C}_N(t)$	: (C) eğrisinin normal vektörü
$\vec{C}_T(t)$	: (C) eğrisinin teğet vektörü
$\overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t)$	: $\vec{T}_B(t)$ vektörünün $\vec{B}_B(t)$ vektörü yönündeki türevi
$\overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t)$	: $\vec{T}_B(t)$ vektörünün $\vec{N}_B(t)$ vektörü yönündeki türevi
$\overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t)$	: $\vec{T}_B(t)$ vektörünün $\vec{T}_B(t)$ vektörü yönündeki türevi
$\overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t)$	: $\vec{T}_N(t)$ vektörünün $\vec{B}_N(t)$ vektörü yönündeki türevi
$\overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t)$	: $\vec{T}_N(t)$ vektörünün $\vec{N}_N(t)$ vektörü yönündeki türevi
$\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t)$	: $\vec{T}_N(t)$ vektörünün $\vec{T}_N(t)$ vektörü yönündeki türevi
$\overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t)$	: $\vec{T}_T(t)$ vektörünün $\vec{B}_T(t)$ vektörü yönündeki türevi
$\overrightarrow{D_{T_T} N_T}(t)$	: $\vec{T}_T(t)$ vektörünün $\vec{N}_T(t)$ vektörü yönündeki türevi

$\overrightarrow{D_T T_T}(t)$	: $\overrightarrow{T_T}(t)$ vektörünün $\overrightarrow{T_T}(t)$ vektörü yönündeki türevi
$\overrightarrow{F}(t)$	: (α) eğrisinin Darboux vektörü
$\overrightarrow{F_B}(t)$	: (B) eğrisinin Darboux vektörü
$\overrightarrow{F_C}(t)$	: (C) eğrisinin Darboux vektörü
$\overrightarrow{F_N}(t)$	: (N) eğrisinin Darboux vektörü
$\overrightarrow{F_T}(t)$	: (T) eğrisinin Darboux vektörü
$k_B(t)$	: (B) eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği
$k_C(t)$	: (C) eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği
$k_N(t)$	: (N) eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği
$k_T(t)$	: (T) eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği
$\kappa(t)$	: (α) eğrisinin eğriliği
$\kappa_B(t)$	: (B) eğrisinin eğriliği
$\kappa_C(t)$	: (C) eğrisinin eğriliği
$\kappa_N(t)$	: (N) eğrisinin eğriliği
$\kappa_T(t)$	: (T) eğrisinin eğriliği
(N)	: (α) eğrisinin normaller gösterge eğrisi
$\overline{N}(t)$	: (α) eğrisinin normal vektörü
$\overrightarrow{N_B}(t)$	: (N) eğrisinin binormal vektörü
$\overrightarrow{N_N}(t)$	: (N) eğrisinin normal vektörü
$\overrightarrow{N_T}(t)$	: (N) eğrisinin teğet vektörü
$s_B(t)$	: (B) eğrisinin yay uzunluğu
$s_C(t)$	: (C) eğrisinin yay uzunluğu
$s_N(t)$	: (N) eğrisinin yay uzunluğu
$s_T(t)$	: (T) eğrisinin yay uzunluğu
$s_\gamma(t)$	: (α) eğrisinin yay uzunluğu
t	: (α) eğrisinin parametresi

t_B	: (B) eğrisinin parametresi
t_C	: (C) eğrisinin parametresi
t_N	: (N) eğrisinin parametresi
t_T	: (T) eğrisinin parametresi
(T)	: (α) eğrisinin teğetler gösterge eğrisi
$\vec{T}(t)$	: (α) eğrisinin teğet vektörü
$\vec{T}_B(t)$	: (T) eğrisinin binormal vektörü
$\vec{T}_N(t)$	: (T) eğrisinin normal vektörü
$\vec{T}_T(t)$	: (T) eğrisinin teğet vektörü
$\tau(t)$	: (α) eğrisinin burulması
$\tau_B(t)$	: (B) eğrisinin burulması
$\tau_C(t)$	: (C) eğrisinin burulması
$\tau_N(t)$	: (N) eğrisinin burulması
$\tau_T(t)$	: (T) eğrisinin burulması
$\gamma_B(t)$	: (B) eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ deki geodezik eğriliği
$\gamma_T(t)$	: (T) eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ deki geodezik eğriliği
$\psi_C(t)$	: (C) eğrisinin $\mathbb{H}_0^2$ deki geodezik eğriliği
$\psi_N(t)$	: (N) eğrisinin $\mathbb{H}_0^2$ deki geodezik eğriliği
φ_B	: $\vec{T}_B(t)$ ve $\vec{F}_B(t)$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı
φ_C	: $\vec{T}_C(t)$ spacelike vektörü ile $\vec{F}_C(t)$ timelike vektörü arasındaki hiperbolik açı
φ_N	: $\vec{T}_N(t)$ spacelike vektörü ile $\vec{F}_N(t)$ timelike vektörü arasındaki hiperbolik açı
φ_T	: $\vec{T}_T(t)$ ve $\vec{F}_T(t)$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı

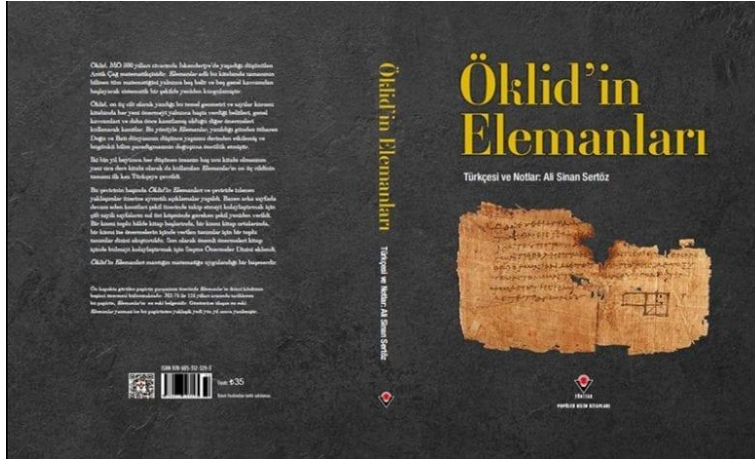
1. GİRİŞ

Öklid MÖ 330-275 yılları arasında yaşamış İskenderiyeli bir matematikçidir. Öklid gelmiş geçmiş matematikçilerin içinde adı geometri ile en çok özdeşleştirilen kişidir. Geometri dünyasında kapladığı bu seçkin yeri kendisinin büyük bir matematikçi olmasından çok geometrinin başlangıcından kendi zamanına kadar bilinen ismi ile Öğeler (Elementler) adını taşıyan kitabında toplamasına borçludur. Geometri bilgilerinin yanı sıra bu bilgileri sistematik bir yapı olarak işleyen 13 ciltlik kitabı “Elementler” bu alandaki ilk kapsamlı çalışmaydı, (Şekil 1).



Şekil 1. Öklid’in Elementler kitabı (URL-1).

İlk tam Türkçe çevirisi Prof. Dr. Ali Sinan SERTÖZ tarafından (2019) yapılan bu kitabın ön kapağında görülen papirüs parçasının üzerinde Elemanlar’ ın ikinci kitabının beşinci önermesi bulunmaktadır, (Şekil 2). M.S. 75 ile 125 yılları arasında tarihlenen bu papirüs Elemanlar’ ın en eski belgesidir. Günümüze ulaşan en eski Elemanlar yazması ise bu papirüsten yaklaşık yedi yüz yıl sonra yazılmıştır. Kendinden önceki Tales, Pisagor, Platon, Aristoteles gibi matematikçi ve geometricilerin çalışmalarını temel alan Öklid’in bu yapıtı, iki bin yıl boyunca önemli bir başvuru kaynağı olarak kullanılmıştır. Öklid’in her önermeyi daha önceki önermelerden çıkarma yöntemi, kendisine atfedilen “Geometrinin Babası” sözünü de haklı kılar. Bu kitaptaki Öklid Geometrisi; doğru, çember, paralel doğrular, açılar, benzer üçgenler, düzgün çokgenler, düzlemler gibi konuları inceler.



Şekil 2. Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz tarafından Türkçe'ye çevrilen Öklid'in Elementler kitabı (URL-2).

Bu geometri üç temel kavrama dayandırılmıştır. Tanımlar, alışılan anlamda, yani kendine özgü birtakım özellikleri olan geometrik nesneleri belirlemek ya da diğerlerinden ayırmak için onlara kısaca ad vermekten ibarettir. Aksiyomlar, doğruluğundan şüphelenmeksizin ispatsız olarak kabul edilen temel önermelerdir. Postulatlar da aksiyomlar gibi ispatsız kabul olunan ama doğruluklarına o zamanki anlayışa göre aksiyomlar kadar kesin gözle bakılmayan temel önermelerdir. Günümüzde bu çeşit temel önermeler arasında ayırım yapılmamaktadır.

Öklid'in aksiyomları şunlardır:

1. Bir şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittirler.
2. Eğer eşit şeylere eşit şeyler eklenirse, elde edilen bütünler de eşittir.
3. Eğer eşit şeylerden eşit şeyler çıkarılırsa, kalanlar da eşittir.
4. Birbirleriyle örtüşen şeyler birbirlerine eşittir.
5. Bütün, parçalarından büyüktür.

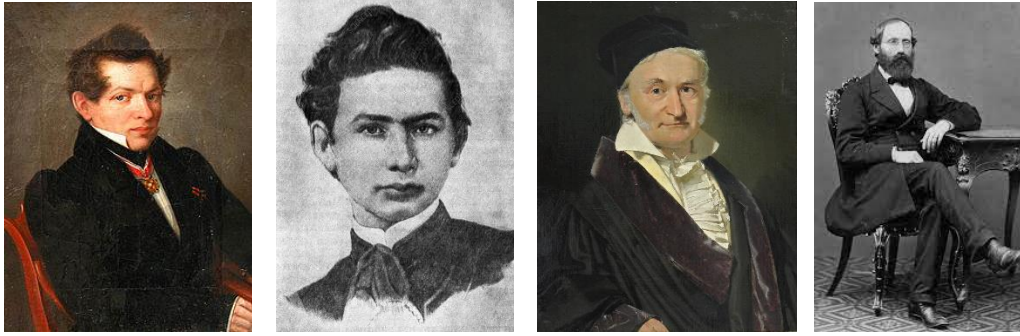
Öklid'in postulatları ise şunlardır:

1. Herhangi bir noktadan başka herhangi bir noktaya bir doğru çizilebilir.
2. Bir doğru istenildiği kadar yine bir doğru olacak şekilde uzatılabilir.
3. Herhangi bir merkez ve bir uzunluk verildiğinde bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5. Eğer bir doğru iki doğruyu kestiğinde bu doğrunun aynı tarafındaki iç açılar iki dik açıdan küçükse bu iki doğru o yönde uzatıldıklarında kesişir.

Öklid'in 5. postulatından ayrıca şu bilgiler çıkarılabilir:

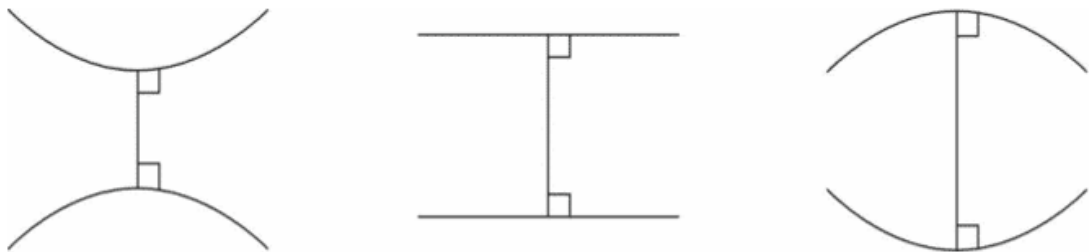
- Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir.
- Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnızca bir tek paralel çizilebilir.

19. yüzyılın başlarında Öklid'in 5. postulatından çıkarılan “bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir” ibaresi matematikçiler arasında büyük tartışmaların kaynağı olmuş ve yeni geometrilerin kurulmasına ilham vermiştir. Bu dönemde Rus matematikçi Nikolay Lobachevsky (1793-1856), Macar matematikçi Johann Bolyai (1802-1860), Alman matematikçiler Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve Bernhard Riemann (1826-1866) Öklid'in 5. postulatını kanıtlamak yerine bir başkası ile değiştirmek üzerine çalışmalar yaptılar, (Şekil 3).



Şekil 3. N. Lobachevsky, J. Bolyai, C. F. Gauss ve B. Riemann (soldan sağa) (URL-3, URL- 4, URL-5, URL-6).

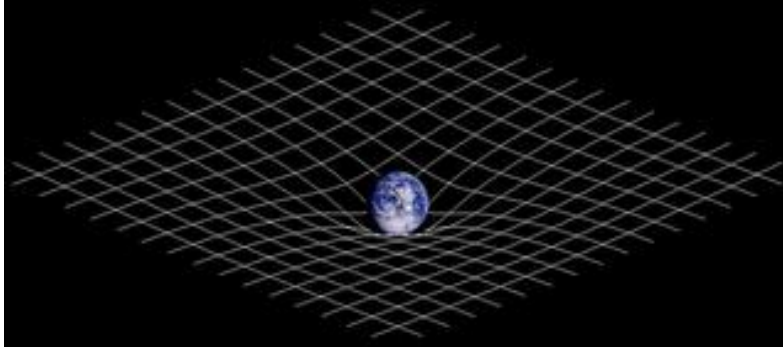
Lobachevsky ve Bolyai birbirinden bağımsız olarak Hiperbolik Geometri'yi, Riemann ise Eliptik (Küresel) Geometri'yi buldu, (Şekil 4).



Şekil 4. Hiperbolik geometri, Öklid geometri ve Eliptik geometri (soldan sağa)

Böylece Öklid Dışı Geometri kavramı ortaya çıktı. Lobaçevski'nin, Bolyai'nin ve Riemann'ın kurdukları bu Öklid dışı geometrilere uzun süre işe yaramaz olarak bakıldı.

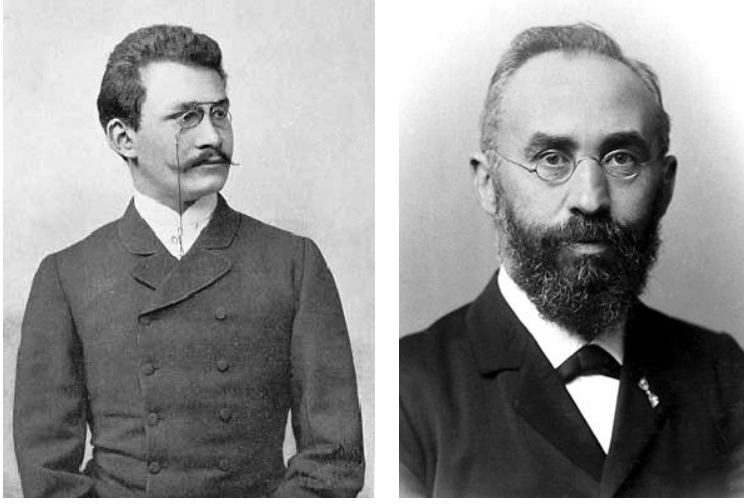
Ancak Einstein, içinde yaşadığımız üç boyutlu uzayın Öklid geometrisine değil, Öklid dışı geometriye uyduğunu gösterdiğinde bu algı tamamen değişti. Bu yeni geometriler o zamandan beri birçok alanda (fizik, astronomi vb.) kullanılıyor. Bugün Riemann Geometrisi (Eliptik geometri) ve Lobaçevski Geometrisi (Hiperbolik Geometri) NASA'nın en çok kullandığı geometrilerdir. Hatta Albert Einstein, "Riemann'ın bu çalışmasından haberim olmasaydı görelilik teorisini hiçbir zaman geliştiremeyecektim" demiştir, (Şekil 5).



Şekil 5. Albert Einstein'ın görelilik teorisi (URL-7).

Riemann Geometrisi günümüzde teorik veya uygulamalı fark etmeksizin, bilimin bütün alanlarında kullanılan bir yapı halini almıştır. Riemann geometrisi ile birlikte "Öklidyen geometri imparatorluğunu" neredeyse sona erdirmiş bir geometri olma özelliği taşır. 20. yüzyılda Einstein'ın özel ve genel görelilik teorilerinden sonra daha da ilgi çekici hale gelen ve gelişme şansı bulan bu mekânda, fiziğin yanı sıra diferansiyel geometri çalışmaları da önemli yere sahiptir.

Öklid dışı geometrilerin keşfi, sadece matematik değil düşünce tarihinde de bir dönüm noktası olarak kabul edilir. Bu sayede içinde yaşadığımız evrenin geometrisinin Öklid dışı bir geometri (küresel geometri) olduğu gösterildi. Küresel geometride çizgiler düz değildir. Bunlar büyük dairelerin parçalarıdır (yani, bir kürenin ve kürenin merkezinden geçen düzlemlerin kesişiminden elde edilen daireler). 1950 lerde Hendrik Lorentz ve Herman Minkowski tarafından ortaya konmuş Lorentz-Minkowski uzayı, teorik fizik ve matematikle uğraşanların kapsamlı bir şekilde çalıştığı bir alandır, (Şekil 6).



Şekil 6. H. Minkowski ve H. Lorentz (URL-8, URL-9).

Lorentz-Minkowski uzayı ile ilgili temel bilgiler kaynaklarda bulunabilir (Beem vd., 1981; Birman ve Nomizu, 1984; Çalışkan ve Uğurlu, 2012; Gür Mazlum, 2023; Hacısalihoğlu, 1998; Hacısalihoğlu, 2012; López, 2014; O'Neill, 1983; Özdemir, 2020; Ratcliffe, 1994; Sabuncuoğlu, 2016; Struik, 1961; Şenatalar, 1978; Şenyurt ve Gür, 2017; Walrave, 1995; Woestijne, 1990; Yüce, 2020).

Diferansiyel geometrideki en ilginç konulardan biri eğriler teorisidir. $\mathbb{E}_1^3$ teki diferansiyellenebilir bir (α) eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ sırasıyla $\vec{T}(t)$ teğet vektörü, $\vec{N}(t)$ normal vektörü ve $\vec{B}(t)$ binormal vektörüdür (Hacısalihoğlu, 1998). (α) eğrisinin Frenet çatısının her t anında bir eksen etrafında anlık bir helis hareketi yaptığı varsayılmaktadır. Bu eksene Darboux anlık dönme eksenini, bu eksenin yönünü veren vektöre Darboux vektörü denir. Darboux vektörü yönündeki birim vektöre pol vektörü denir. Düzenli bir eğrinin bu vektörlerinden elde edilen eğriliği $\kappa(t)$ ve burulması $\tau(t)$ eğrinin karakterizasyonunun belirlenmesinde önemli bir rol oynar. Eğrinin eğriliği $\kappa(t)$ ve burulmasına $\tau(t)$ göre durumları;

1. $\kappa = 0$ ise eğri bir doğrudur.
2. $\kappa(t) \neq 0$ ve $\tau(t) = 0$ ise eğri düzlemseldir.
3. $\kappa(t) = \text{sbt} > 0$ ve $\tau(t) = 0$ ise eğri, yarıçapı $r = \frac{1}{\kappa(t)}$ olan bir çemberdir.
4. $\kappa(t) = \text{sbt} > 0$ ve $\tau(t) = \text{sbt} \neq 0$ ise eğri bir dairesel helistir.

5. $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}$ oranı sabit ve sıfır olmayan eğrilik ve burulmaya sahip ise eğri genel helistir.

Michel Ange Lancet tarafından 1802 yılında ifade edilen ve helis eğrisinin geliştirilmesi olan genel helis eğrisi, teğet vektörünün sabit bir eksenle sabit bir açı yapan eğri olarak tanımlanır, (Şekil 7).



Şekil 7. M. A. Lancet (URL-10).

Genel helis örneklerine DNA yapısındaki moleküllerin dizilimi, karbon nanotüpler, sarmal merdivenler, bir fasulyenin bir çubuk üzerine sarılma şekli ve vida hareketleri verilebilir, (Şekil 8).



Şekil 8. DNA dizilimi ve sarmal merdiven (URL-11, URL-12).

Öte yandan asli normal vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğrilere slant helisler denir. Slant helislerin bir örneği olan Salkowski eğrisi (sabit eğriliğe ve sabit olmayan burulmaya sahip bir eğri ailesi), 1909'da Ernst Leopold Salkowski tarafından tanımlanmıştır (Salkowski, 1909), (Şekil 9). Benzer şekilde sabit burulmaya

sahip ancak sabit olmayan eğriliğe sahip eğriler ailesi de anti-Salkowski eğrisi olarak bilinir.



Şekil 9. Ernst Leopold Salkowski (URL-13).

O yıllardan beri bu eğriler üzerine hem 3-boyutlu Öklid uzayında hem de 3-boyutlu Lorentz uzayında çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Juan Monterde, Salkowski eğrisini ve Frenet vektörlerinin parametrik denklemini verdi (Monterde, 2009). Abdel-Aziz ve Saad, 3-boyutlu Lorentz uzayında özel eğrilerin Darboux çatısı üzerinde çalışmalar yapmıştır (Abdel-Aziz ve Saad, 2018). Aksan ve Gür, 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin pol gösterge eğrisinin üzerine hesaplamalar yapmışlardır (Aksan ve Gür, 2022). Öklid ve Lorentz uzaylarında Salkowski eğrisi ve anti-Salkowski eğrisi üzerine diğer çalışmalardan bazıları (Ali, 2011; Ali, 2012; Şenyurt vd., 2015; Şenyurt ve Eren, 2020). Alluhaibi ve Abdel-Baky, 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike yüzeylerin kinematik geometrisi üzerinde çalışma yapmışlardır (Alluhaibi ve Abdel-Baky, 2022). Balcı, hiperbolik spinor ve Minkowski uzayında Darboux çatısı üzerinde çalışmıştır (Balcı, 2016). Baş ve Körpınar, spacelike yüzey üzerinde spacelike eğrilerin Darboux çatısına göre hissedilebilir akışları üzerinde çalışma yapmışlardır (Baş ve Körpınar, 2013). Bilici ve Çalışkan, 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike binormalli spacelike eğri ve timelike binormalli spacelike eğri üzerinde bazı hesaplamalar yapmışlardır (Bilici ve Çalışkan, 2019; Bilici ve Çalışkan, 2022). Bilici, timelike-spacelike involüt-evolüt eğriler üzerinde çalışmıştır (Bilici, 2023). Bulut ve Bektaş, Minkowski uzayında özel helisler üzerinde çalışmışlardır (Bulut ve Bektaş, 2020). 3-boyutlu Minkowski uzayında involüt-evolüt eğrileri üzerine pek çok çalışma vardır, (Bukcu ve Karacan, 2007; Erdoğan ve Yavuz, 2019; Gür ve Şenyurt, 2012; Gür ve Şenyurt, 2013). Çapın, Minkowski uzayında Küresel Gösterge Eğrileri üzerinde çalışmıştır (Çapın, 2016).

Güler, 3-boyutlu Minkowski uzayında light-like üreteç eğrili time-like Helisoidal ve dönel yüzeyler üzerinde çalışmıştır (Güler, 2010). Benzer şekilde 3-boyutlu Minkowski uzayında çalışmalar mevcuttur (Gür Mazlum vd., 2022; Kılıçoğlu ve Hacısalihoğlu, 2008; Kızıltuğ ve Çakmak, 2013; Kızıltuğ ve Yaylı, 2013; Külahcı vd., 2009; Li vd., 2023; Yılmaz, 2018; Yüksel vd., 2014). Lorentz uzayında timelike-spacelike yüzeyler hakkındaki çalışmalardan bazıları (Izumiya ve Tkeuchi, 2004; Li ve Pei, 2016; Önder ve Uğurlu, 2013; Uğurlu ve Topal, 1996; Uğurlu ve Kocayiğit, 1996; Uğurlu, 1997). Li ve arkadaşları, birim küre üzerindeki Legendre eğrisi ve n . mertebeden slant helis eğrisi üzerine çalışmışlardır (Li vd., 2018; Li vd., 2020). Yüksel ve arkadaşları, Öklid uzayında DNA yapısının geometrik özellikleri üzerine çalışmışlardır (Yüksel vd., 2015). Gür ve Şenyurt, 3-boyutlu Öklid uzayında Salkowski eğrisinin küresel göstergelerinin Frenet vektörlerini ve geodezik eğriliklerini hesaplamışlardır (Gür ve Şenyurt, 2010).

$\mathbb{E}_1^3$ te düzenli bir (α) eğrisinin birim teğet vektörleri, birim Hiperbolik Küre $\mathbb{H}_0^2$ (veya birim Lorentz Küre $\mathbb{S}_1^2$) üzerinde bir (T) eğrisi oluşturur. (T) eğrisine (α) eğrisinin teğetler gösterge eğrisi denir. Benzer şekilde (N) , (B) ve (C) sırasıyla (α) eğrisinin normaller gösterge eğrisi, binormaller gösterge eğrisi, pol gösterge eğrisidir. (T) , (N) , (B) ve (C) gösterge eğrilerinin parametreleri sırasıyla t_T , t_N , t_B ve t_C dir. Bu eğriler için parametrik denklemler aşağıdaki gibidir,

$$(T) = \vec{\alpha}(t_T) = \vec{T}(t), \quad (N) = \vec{\alpha}(t_N) = \vec{N}(t), \quad (B) = \vec{\alpha}(t_B) = \vec{B}(t), \quad (C) = \vec{\alpha}(t_C) = \vec{C}(t)$$

Bu tez çalışmasında $\mathbb{E}_1^3$ teki timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin Frenet çatıları, Frenet türev formülleri, Darboux vektörleri, pol vektörleri, yay uzunlukları, $\mathbb{E}_1^3$ teki ve $\mathbb{H}_0^2$ birim Hiperbolik Küre (ve $\mathbb{S}_1^2$ birim Lorentz Küre üzerindeki) geodezik eğrilikleri ve bu küresel gösterge eğrilerinin $\mathbb{H}_0^2$ birim Hiperbolik Küre (ve $\mathbb{S}_1^2$ birim Lorentz Küre) üzerindeki grafikleri üzerine çalışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa $\langle, \rangle$ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in V$ için,

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle a\vec{X} + b\vec{Y}, \vec{Z} \rangle = a\langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle + b\langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle,$$

$$\langle \vec{X}, a\vec{Y} + b\vec{Z} \rangle = a\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle + b\langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \langle \vec{Y}, \vec{X} \rangle$$

(O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu V uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

i) $\forall \vec{Z} \in V$ ve $\vec{Z} \neq 0$ için $\langle \vec{Z}, \vec{Z} \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ ye pozitif tanımlı,

ii) $\forall \vec{Z} \in V$ ve $\vec{Z} \neq 0$ için $\langle \vec{Z}, \vec{Z} \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ ye negatif tanımlı,

iii) $\forall \vec{Z} \in V$ ve $\vec{Z} \neq 0$ için $\langle \vec{Z}, \vec{Z} \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ ye yarı-pozitif tanımlı,

iv) $\forall \vec{Z} \in V$ ve $\vec{Z} \neq 0$ için $\langle \vec{Z}, \vec{Z} \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ ye yarı-negatif tanımlı,

v) $\forall \vec{Y}, \vec{Z} \in V$ için $\langle \vec{Z}, \vec{Y} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{Y} = 0$ ise $\langle, \rangle$ ye non-dejenere denir

(O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3. $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu simetrik, bilineer ve non-dejenere ise $\langle, \rangle$ ye V üzerinde bir skaler (iç) çarpım fonksiyonu, V vektör uzayına da skaler (iç) çarpım uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4. $\mathbb{E}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle, \rangle: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{Y}, \vec{Z}) \rightarrow \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3,$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\{\mathbb{E}^3, \langle, \rangle\}$ ikilisi 3-boyutlu Öklid Uzayı olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.5. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayı üzerinde

$$d: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{P}, \vec{Q}) \rightarrow d(\vec{P}, \vec{Q}) = \|\vec{PQ}\| = \|\vec{Q} - \vec{P}\| = \sqrt{\langle \vec{PQ}, \vec{PQ} \rangle}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona Öklid metriği veya uzaklık fonksiyonu denir. $d(\vec{P}, \vec{Q})$ reel sayısına da $\vec{P}, \vec{Q} \in \mathbb{E}^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.6. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ ve $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ te eğri denir (Hacısalıhoğlu, 1998; Özdemir, 2020).

Tanım 2.1.7. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinde, eğer her $t \in I$ için $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$ ise bu eğriye regüler (düzenli) eğri denilir (Hacısalıhoğlu, 1998; Özdemir, 2020).

Tanım 2.1.8. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ bir eğri olsun.

$$\vec{\alpha}'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \dots, \alpha_n'(t))$$

vektörüne (α) eğrisinin $\vec{\alpha}(t)$ noktasındaki hız vektörü denir. Bu vektör (α) eğrisinin $\vec{\alpha}(t)$ noktasında teğet olan vektördür (Hacısalıhoğlu, 1998; Özdemir, 2020).

Tanım 2.1.9. Bir $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin her $s \in I$ noktasındaki hız vektörü olan $\vec{\alpha}'(s)$ vektörü, birim vektör ise, yani $\|\vec{\alpha}'(s)\| = 1$ ise, (α) eğrisine birim hızlı eğri denir ve

$s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir (Hacısalıhoğlu, 1998; Yüce, 2020).

Tanım 2.1.10. Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $a, b \in I$ olmak üzere a dan b ye yay uzunluğu diye eğrinin $\vec{\alpha}(a)$ ve $\vec{\alpha}(b)$ noktaları arasındaki eğri boyunca uzaklığa karşılık tutulan

$$\int_a^b \|\vec{\alpha}'(s)\| ds ,$$

$s \in I$ reel sayısına denir (Hacısalıhoğlu, 1998; Yüce, 2020).

Tanım 2.1.11. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir eğri olsun.

$$\begin{cases} \vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}, \\ \vec{N}(t) = \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t), \\ \vec{B}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|} \end{cases}$$

vektörlerine sırasıyla eğrinin teğet vektörü, asli normal vektörü ve binormal vektörü denir. Bu vektörlere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\vec{\alpha}(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri ve $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ ortonormal sistemine (α) eğrisinin $\vec{\alpha}(t)$ noktasındaki Frenet çatısı denir (Hacısalıhoğlu, 1998; Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 2.1.12. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri ise Frenet vektörleri

$$\begin{cases} \vec{T}(s) = \vec{\alpha}'(s), \\ \vec{N}(s) = \frac{\vec{\alpha}''(s)}{\|\vec{\alpha}''(s)\|}, \\ \vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s) \end{cases}$$

şeklinde bulunur. (Hacısalıhoğlu, 1998; Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 2.1.13. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ regüler eğrisinin, eğriliği $\kappa(t)$ ve burulması $\tau(t)$,

$$\begin{cases} \kappa(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3}, \\ \tau(t) = \frac{\langle \vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t) \rangle}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2} \end{cases}$$

şeklinde bulunur (Hacısalıhoğlu, 1998; Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 2.1.14. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri ise eğrilik ve burulma

$$\begin{cases} \kappa(s) = \langle \vec{T}'(s), \vec{N}(s) \rangle = \|\vec{\alpha}''(s)\| = \|\vec{T}'(s)\|, \\ \tau(s) = \langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s) \rangle \end{cases}$$

şeklinde bulunur (Hacısalıhoğlu, 1998; Özdemir, 2020).

Sonuç 2.1.15. Eğrilik, eğrinin ne kadar eğildiğinin ölçüsüdür. Her noktada $\kappa(s) = 0$ ise eğri doğrusaldır.

Sonuç 2.1.16. Burulma, eğrinin düzleminden ne kadar saptığının ölçüsüdür. Her noktada $\tau(s) = 0$ ise eğri düzlemseldir.

Teorem 2.1.17. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ regüler eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)$, eğriliği $\kappa(t)$ ve burulması $\tau(t)$ olsun. Eğrinin Frenet vektörleri ve bu vektörlerin türevleri arasında

$$\begin{cases} \vec{T}'(t) = v(t)\kappa(t)\vec{N}(t), \\ \vec{N}'(t) = v(t)(-\kappa(t)\vec{T}(t) + \tau(t)\vec{B}(t)), \\ \vec{B}'(t) = -v(t)\tau(t)\vec{N}(t) \end{cases}$$

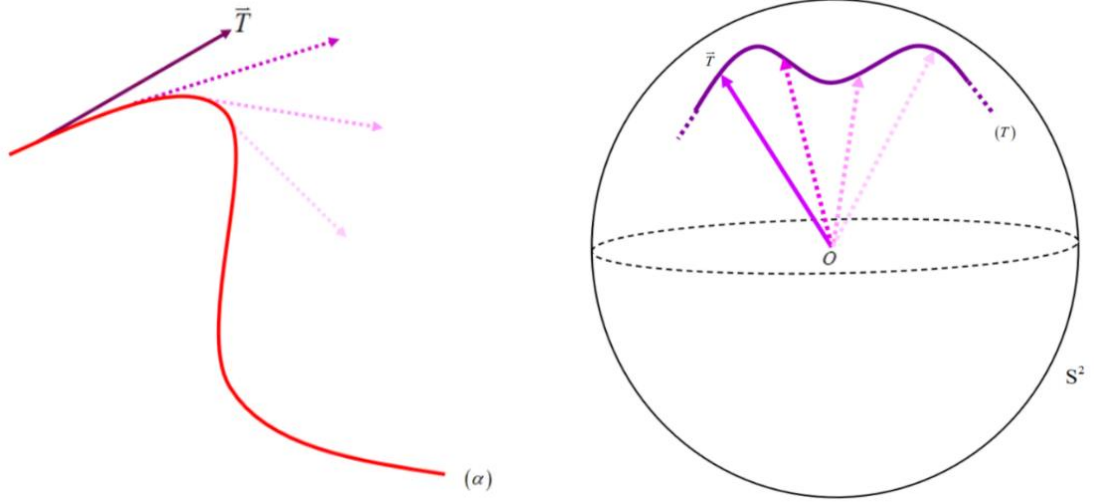
bağıntısı vardır. Bu bağıntıya Frenet formülleri denir. Burada $\|\vec{\alpha}'(t)\| = v(t)$ (Hacısalihoglu, 1998; Sabuncuoğlu, 2016).

Sonuç 2.1.18. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri ise eğrinin Frenet formülleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s), \\ \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s), \\ \vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s) \end{cases}$$

(Hacısalihoglu, 1998; Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 2.1.19. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}(s)$ olsun. (α) eğrisi çizilirken $\vec{T}(s)$ vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birinci küresel gösterge eğrisi veya teğetler göstergesi adı verilir, (Şekil 10).



Şekil 10. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim küre üzerinde oluşturduğu teğetler göstergesi

$\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin teğetler göstergesini (T) ile gösterelim. (T) nin denklemi

$$\vec{\alpha}_T = \vec{T}(s)$$

dir ve (T) nin parametresine s_T dersek, $s_T \neq s$ olup, yay elementi ise

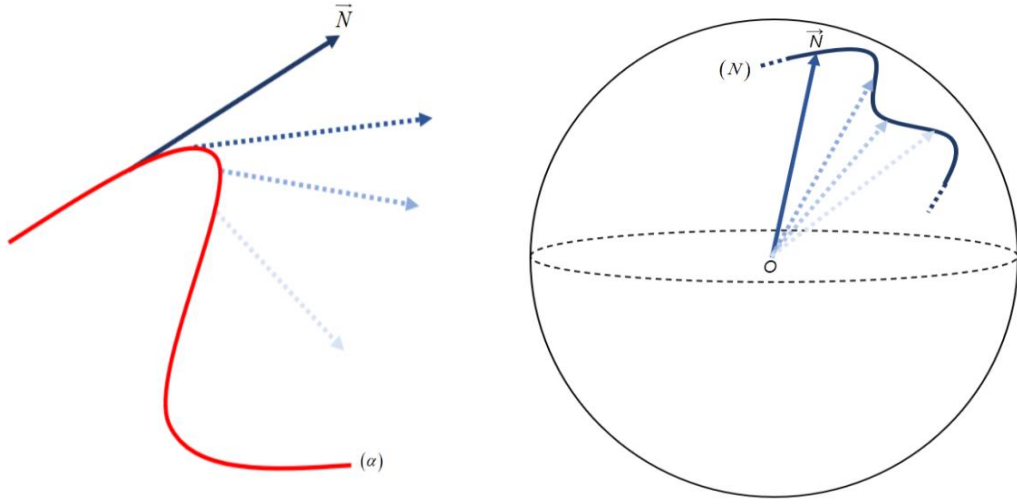
$$ds_T = \|\vec{T}'(s)\| ds$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Sonuç 2.1.20. Bir α eğrisinin eğriliği, teğetler göstergesinin yay elementinin, esas eğrinin yay elementine oranıdır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.21. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin birim asli normal vektörü $\vec{N}(s)$ olsun.

(α) eğrisi çizilirken $\vec{N}(s)$ vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin ikinci küresel göstergesi eğrisi veya asli normaller göstergesi adı verilir, (Şekil 11).



Şekil 11. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim küre üzerinde oluşturduğu normaller göstergesi

(α) eğrisinin asli normaller göstergesini (N) ile gösterelim. (N) nin denklemi

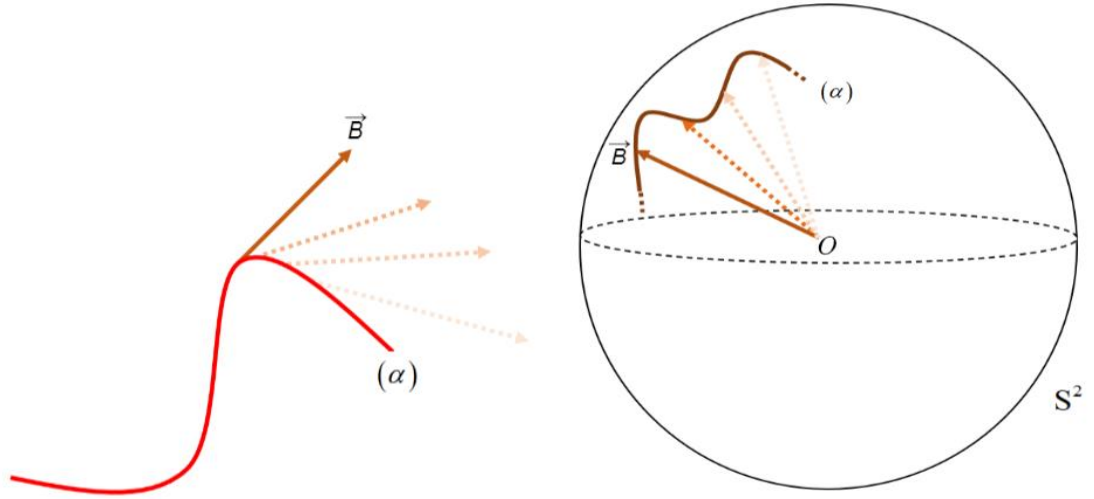
$$\vec{\alpha}_N = \vec{N}(s)$$

dir ve (N) nin parametresine s_N dersek, $s_N \neq s$ olup yay elementi ise

$$ds_N = \|\vec{N}'(s)\| ds$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.22. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin birim binormal vektörü $\vec{B}(s)$ olsun. (α) eğrisi çizilirken $\vec{B}(s)$ vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin üçüncü küresel gösterge eğrisi veya binormaller göstergesi adı verilir, (Şekil 12).



Şekil 12. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim küre üzerinde oluşturduğu binormaller göstergesi

(α) eğrisinin binormaller göstergesini (B) ile gösterelim. (B) nin denklemi

$$\vec{\alpha}_B = \vec{B}(s)$$

dir ve (B) nin parametresine s_B dersek, $s_B \neq s$ olup yay elementi ise

$$ds_B = \|\vec{B}'(s)\| ds$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Sonuç 2.1.23. Bir (α) eğrisinin burulması, binormaller göstergesinin yay elementinin, esas eğrinin yay elementine oranıdır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 2.1.24. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ vektörleri değişirler. Eğrinin $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ Frenet çatısının her t anında, bir eksen etrafında, bir ani helis yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin t parametresine karşılık gelen $\vec{\alpha}(t)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenidir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör $\vec{F}(t)$ ve $\|\vec{\alpha}'(t)\| = v(t)$ olmak üzere

$$\vec{F}(t) = \vec{N}(t) \wedge \vec{N}'(t) = v(t) (\tau(t) \vec{T}(t) + \kappa(t) \vec{B}(t))$$

olup, bu vektör eğrinin $\vec{\alpha}(t)$ noktasındaki Darboux vektörü adını alır.

Sonuç 2.1.25. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için Darboux vektörü

$$\vec{F}(s) = \tau(s)\vec{T}(s) + \kappa(s)\vec{B}(s)$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.26. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Darboux vektörü yönündeki birim vektör

$$\vec{C}(t) = \sin \phi \vec{T}(t) + \cos \phi \vec{B}(t)$$

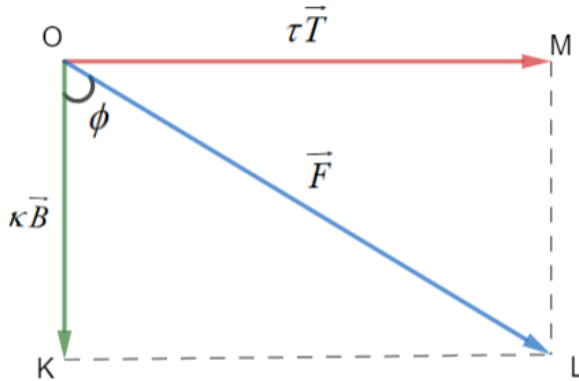
şeklindedir. Gerçekten $\vec{B}(s)$ ile $\vec{F}(t)$ arasındaki açı ϕ ile gösterilirse

$$\begin{cases} \kappa(t) = \|\vec{F}(t)\| \cos \phi, \\ \tau(t) = \|\vec{F}(t)\| \sin \phi \end{cases}$$

elde edilir, (Şekil 13). $\vec{F}(t)$ Darboux vektörü yönündeki birim vektör $\vec{C}(t)$ ise

$$\|\vec{F}(s)\| = \sqrt{(\kappa(s))^2 + (\tau(s))^2} > 0$$

olmak üzere, $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ yerine yazılırs

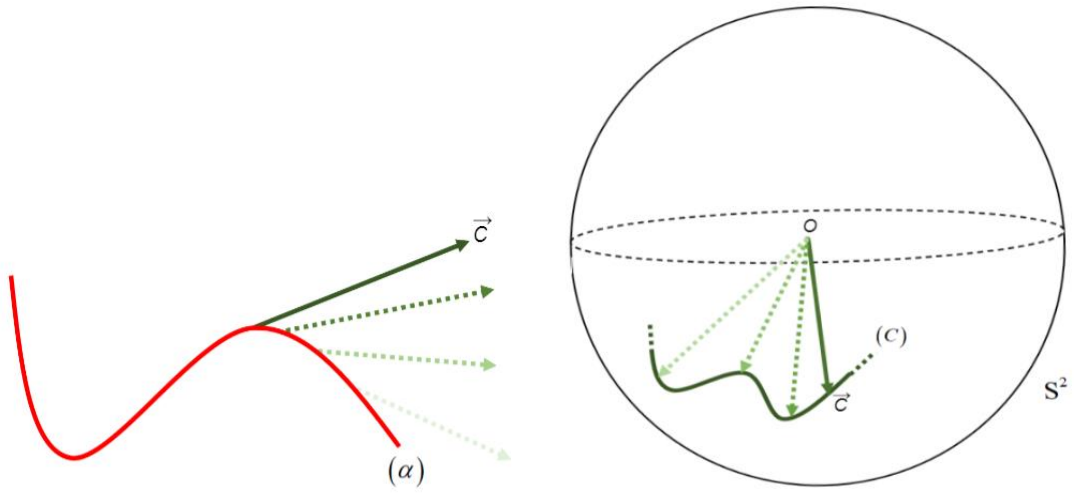


Şekil 13. Darboux vektörü

$$\vec{C}(t) = \sin \phi \vec{T}(t) + \cos \phi \vec{B}(t)$$

olduğu görülür (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.27. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin pol vektörü $\vec{C}(s)$ olsun. (α) eğrisi çizilirken $\vec{C}(s)$ birim vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye (α) eğrisinin sabit pol eğrisi (pol göstergesi) adı verilir, (Şekil 14).



Şekil 14. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim küre üzerinde oluşturduğu pol göstergesi

(α) eğrisinin pol eğrisi göstergesini (C) ile gösterelim. (C) nin denklemi

$$\vec{\alpha}_C = \vec{C}(s)$$

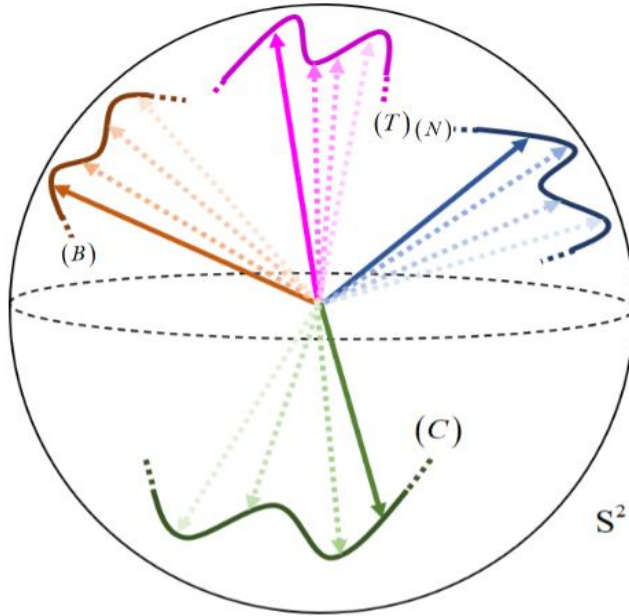
dir ve (C) nin parametresine s_C dersek, $s_C \neq s$ olup yay elementi ise

$$ds_C = \|\vec{C}'(s)\| ds$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.28. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin, 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir (α) eğrisinin (T) teğetler göstergesini, (N) asli normaller göstergesini, (B) binormaller göstergesini ve

(C) sabit pol eğrisini bir küre yüzeyi üzerinde gösterebiliriz (Hacısalıhoğlu, 1998) (Şekil 15).



Şekil 15. Birim küre üzerinde teğetler, normaller, binormaller ve pol gösterge eğrileri

Tanım 2.1.29. $\vec{Z}$, M yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı olmak üzere M nin bir P noktasında

$$S_p(\vec{E}_p) = -\overline{D_{E_p} \vec{Z}}$$

eşitliğiyle tanımlı S_p fonksiyonuna, M yüzeyinin P noktasında, $\vec{Z}$ birim normal vektör alanına bağlı şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir. Burada $\overline{D_{E_p} \vec{Z}}$, $\vec{Z}$ vektör alanının $\vec{E}_p$ vektör alanına göre kovaryant türevidir (Hacısalıhoğlu, 1998; Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 2.1.30. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}(s)$ olmak üzere,

$$k_g(s) = \left\| \overline{D_T \vec{T}}(s) \right\| = \left\| \frac{d^2 \alpha(s)}{ds^2} \right\|$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen, $\mathbb{E}^3$ teki geodezik eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 2012).

2.2. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{E}^3$ vektörleri için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 \quad (1)$$

fonksiyonu bir skaler çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{E}^3$ üzerinde Lorentz metriği denir. $\{\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_L\}$ ikilisine 3-boyutlu Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{E}_1^3$ ile gösterilir.

*Çalışma boyunca $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ yerine $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kullanılacaktır.

Tanım 2.2.2 $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü için;

i) $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle > 0$ veya $\vec{A} = 0$ ise $\vec{A}$ vektörü spacelike (uzaysı) vektör (sl),

ii) $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle < 0$ ise $\vec{A}$ vektörü timelike (zamansı) vektör (tl),

- $\vec{e} = (0, 0, 1)$ olmak üzere $\langle \vec{A}, \vec{e} \rangle < 0$ ise future pointing (pozitif) timelike vektör (fptl) olarak adlandırılır.
- $\vec{e} = (0, 0, 1)$ olmak üzere $\langle \vec{A}, \vec{e} \rangle > 0$ ise past pointing (negatif) timelike vektör (pptl) olarak adlandırılır.

iii) $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$ ise $\vec{A}$ vektörüne lightlike veya null (ışık) vektör

denir. Bu adlandırmalara vektörün causal karakteri adı verilir.

Tanım 2.2.3. Lorentz uzayında bir $\vec{A}$ vektörünün normu $\|\vec{A}\| = \sqrt{|\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle|}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.4. $\vec{A} \in \mathbb{E}_1^3$ için,

i) $\|\vec{A}\| > 0$,

ii) $\|\vec{A}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{A}$ bir null vektördür,

iii) $\vec{A}$ bir timelike vektör ise $\|\vec{A}\|^2 = -\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle$ dir,

iv) $\vec{A}$ bir spacelike vektör ise $\|\vec{A}\|^2 = \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle$ dir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.5. $\vec{A}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\vec{A}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \in \mathbb{E}_1^3$ vektörleri için $\vec{A}_1 \neq 0$ ve $\vec{A}_2 \neq 0$ olmak üzere $\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle = 0$ olsun. $\vec{A}_1$ timelike vektör ise $\vec{A}_2$ spacelike vektördür (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.2.6. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ olsun.

$$\wedge_L : \mathbb{E}_1^3 \times \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$$

$$\vec{A}_1 \wedge_L \vec{A}_2 = (a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}, a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (2)$$

fonksiyonuna vektörel çarpım fonksiyonu, $\vec{A}_1 \wedge_L \vec{A}_2$ vektörüne de $\vec{A}_1$ ile $\vec{A}_2$ nin vektörel çarpımı denir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

** Çalışma boyunca $\wedge_L$ yerine $\wedge$ kullanılacaktır.

Teorem 2.2.7. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ olsun.

- i) $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ spacelike vektör ise $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2$ bir timelike vektördür,
- ii) $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ timelike vektör ise $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2$ bir spacelike vektördür,
- iii) $\vec{A}_1$ spacelike ve $\vec{A}_2$ timelike vektör ise $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2$ bir spacelike vektördür,
- iv) $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ null vektör ise $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2$ bir spacelike vektördür,
- v) $\vec{A}_1$ timelike ve $\vec{A}_2$ null vektör ise $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2$ bir spacelike vektördür,
- vi) $\vec{A}_1$ spacelike ve $\vec{A}_2$ null vektör olmak üzere $\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle = 0$ ise $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2$ bir null vektör, $\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle \neq 0$ ise $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2$ bir spacelike vektördür (Turgut, 1995).

Teorem 2.2.8. $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3 \in \mathbb{E}_1^3$ olsun. Bu durumda;

- i) $\langle \vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2, \vec{A}_3 \rangle = -\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3)$,
- ii) $(\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) \wedge \vec{A}_3 = -\langle \vec{A}_1, \vec{A}_3 \rangle \vec{A}_2 + \langle \vec{A}_2, \vec{A}_3 \rangle \vec{A}_1$,
- iii) $\langle \vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2, \vec{A}_1 \rangle = 0$ ve $\langle \vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2, \vec{A}_2 \rangle = 0$,
- iv) $\langle \vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2, \vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2 \rangle = -\langle \vec{A}_1, \vec{A}_1 \rangle \langle \vec{A}_2, \vec{A}_2 \rangle + \langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle^2$

dir (Turgut, 1995).

Tanım 2.2.9. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ ve $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{E}_1^3$ te eğri denir.

Tanım 2.2.10. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinde, eğer her $t \in I$ için $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$ ise bu eğriye Lorentz uzayında regüler (düzenli) eğri denir.

Tanım 2.2.11. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin teğet vektörü $\vec{T}(t)$ olsun.

i) $\langle \vec{T}(t), \vec{T}(t) \rangle > 0$ ise $\vec{\alpha}(t)$ eğrisine spacelike (uzaysı) eğri,

ii) $\langle \vec{T}(t), \vec{T}(t) \rangle < 0$ ise $\vec{\alpha}(t)$ eğrisine timelike (zamansı) eğri,

- $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(t)$ timelike eğrisinin teğetleri future pointing vektörler ise $\vec{\alpha}(t)$ eğrisine future pointing timelike eğri (fptl) olarak adlandırılır.
- $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(t)$ timelike eğrisinin teğetleri past pointing vektörler ise $\vec{\alpha}(t)$ eğrisine past pointing timelike eğri (pptl) olarak adlandırılır.

iii) $\langle \vec{T}(t), \vec{T}(t) \rangle = 0$ ise $\vec{\alpha}(t)$ eğrisine lightlike veya null (ışıksı) eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.12. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir yüzeyin normal vektör alanı timelike ise yüzey spacelike, normal vektör alanı spacelike ise yüzey timelike bir yüzeydir. (Beem ve Ehrlich, 1981)

Tanım 2.2.13. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında küreler aşağıdaki gibidir:

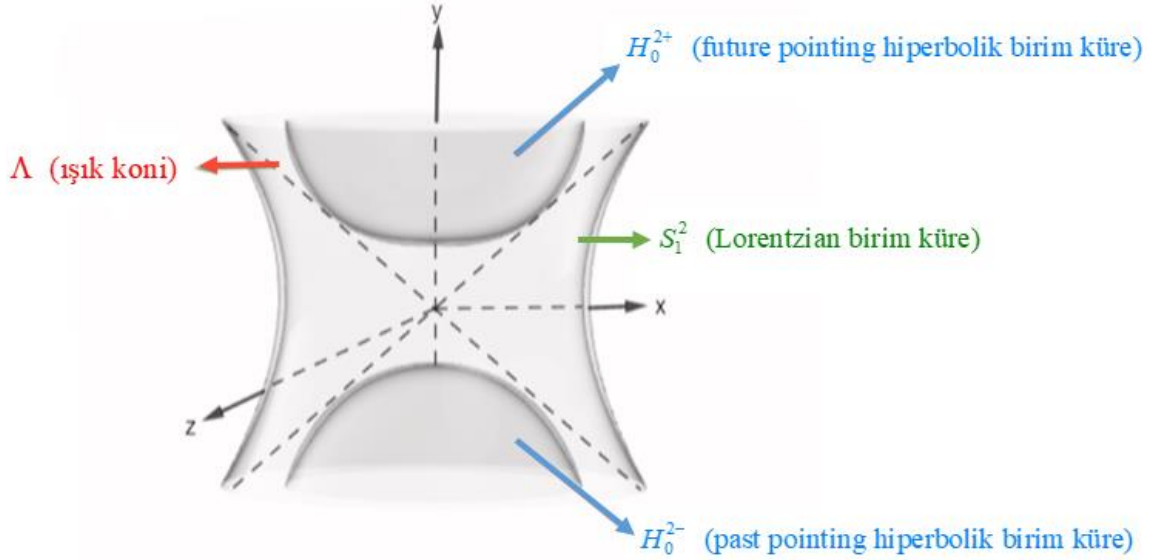
$$\mathbb{S}_1^2 = \{ \vec{A} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 1 \}$$

$$\mathbb{H}_0^{2+} = \{ \vec{A} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = -1, \langle \vec{A}, \vec{e} \rangle < 0 \}$$

$$\mathbb{H}_0^{2-} = \{ \vec{A} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = -1, \langle \vec{A}, \vec{e} \rangle > 0 \}$$

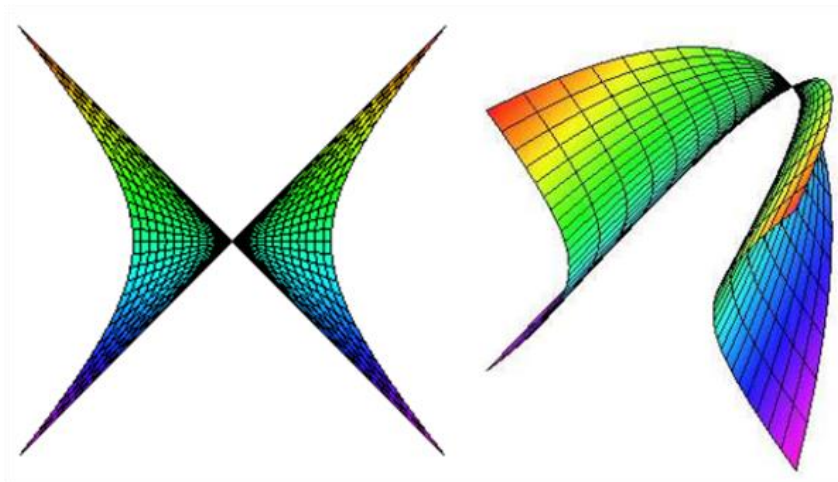
$$\Lambda = \{ \vec{A} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0 \}$$

Burada, $\mathbb{S}_1^2$ Lorentzian birim küre, $\mathbb{H}_0^{2+}$ future pointing hiperbolik birim küre, $\mathbb{H}_0^{2-}$ past pointing hiperbolik birim küre ve Λ ışık koni olarak tanımlanır, (Çalışkan ve Uğurlu, 2012), (Şekil 16).

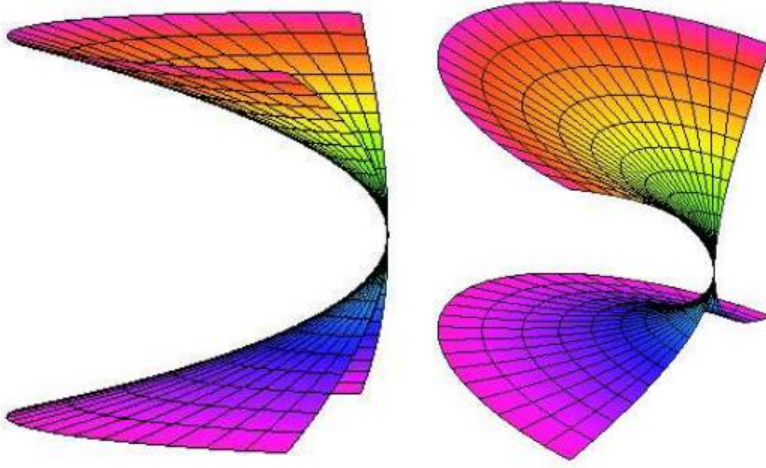


Şekil 16. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında birim küreler

Örnek 2.2.14. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\mathbb{S}_1^2$ ve $\mathbb{H}_0^2$ küreleri sırasıyla timelike ve spacelike yüzeylerdir (Şekil 16). $\mathbb{E}_1^3$ uzayında spacelike dönme eksenli bir dönel yüzey ve timelike dönme eksenli bir dönel yüzey Şekil 17 ve Şekil 18 de verilmiştir.

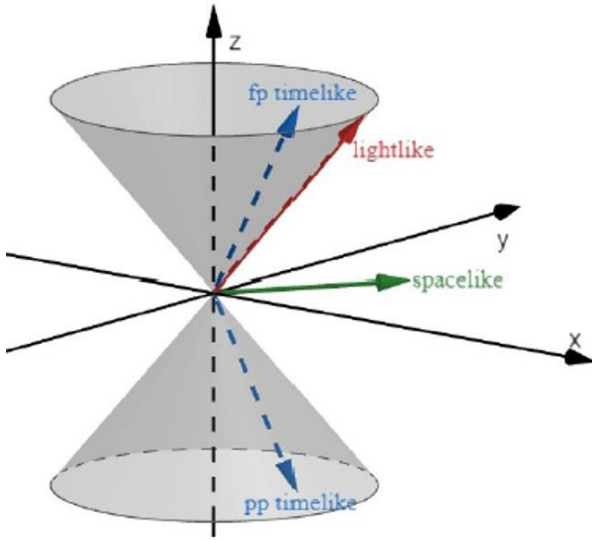


Şekil 17. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında spacelike dönme eksenli bir dönel yüzey (Bilici, 2009).



Şekil 18. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında timelike dönme eksenli bir dönel yüzey (Bilici, 2009).

Tanım 2.2.15. $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki timelike vektörler ışık koni içerisinde, lightlike (null) vektörler ışık konisi üzerinde ve spacelike vektörler ışık konisi dışında bulunurlar, (Şekil 19).



Şekil 19. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında vektörler

Teorem 2.2.16. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu bir Lorentz uzayı olsun.

- i) $\vec{A}_1, \vec{A}_2 \in \mathbb{E}_1^3$ future pointing (past pointing) timelike vektörler ve $\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle < 0$ olmak üzere

$$\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle = -\|\vec{A}_1\| \|\vec{A}_2\| \cosh \varphi \quad (3)$$

timelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

ii) $\vec{A}_1 \in \mathbb{E}_1^3$ future pointing ve $\vec{A}_2 \in \mathbb{E}_1^3$ past pointing timelike vektörler olmak üzere

$$\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle = \|\vec{A}_1\| \|\vec{A}_2\| \cosh \varphi \quad (4)$$

timelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

iii) $\vec{A}_1, \vec{A}_2 \in \mathbb{E}_1^3$ spacelike vektörler olsun. Bu vektörlerin gerdiği düzlem spacelike ise

$$\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle = \|\vec{A}_1\| \|\vec{A}_2\| \cos \varphi, \quad (5)$$

spacelike vektörler arasındaki Lorentzian spacelike açı denir.

iv) $\vec{A}_1, \vec{A}_2 \in \mathbb{E}_1^3$ spacelike vektörler olsunlar. Eğer $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ vektörlerinin gerdiği düzlem timelike ise,

$$\left| \langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle \right| = \|\vec{A}_1\| \|\vec{A}_2\| \cosh \varphi, \quad (6)$$

spacelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

v) $\vec{A}_1 \in \mathbb{E}_1^3$ spacelike ve $\vec{A}_2 \in \mathbb{E}_1^3$ timelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$\left| \langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle \right| = \|\vec{A}_1\| \|\vec{A}_2\| \sinh \varphi, \quad (7)$$

spacelike ve timelike iki vektör arasındaki Lorentzian timelike açı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.17. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı olmayan timelike eğrisinin Frenet çatısı

$\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ ve eğrilikleri $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}, \\ \vec{N}(t) = -\vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t), \\ \vec{B}(t) = -\frac{\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|} \end{cases} \quad (8)$$

ve

$$\begin{cases} \kappa(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3}, \\ \tau(t) = \frac{\langle \vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t) \rangle}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2} \end{cases} \quad (9)$$

şeklindedir. Burada

$$\vec{T}(t) \wedge \vec{N}(t) = -\vec{B}(t) \quad , \quad \vec{N}(t) \wedge \vec{B}(t) = \vec{T}(t) \quad , \quad \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t) = -\vec{N}(t). \quad (10)$$

Tanım 2.2.18. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı olmayan timelike eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ ve eğrilikleri $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ ise eğrinin Frenet formülleri ve Frenet çatısının Darboux vektörü

$$\begin{cases} \vec{T}'(t) = v(t)\kappa(t)\vec{N}(t), \\ \vec{N}'(t) = v(t)(\kappa(t)\vec{T}(t) - \tau(t)\vec{B}(t)), \\ \vec{B}'(t) = v(t)\tau(t)\vec{N}(t) \end{cases} \quad (11)$$

ve

$$\vec{F}(t) = v(t) \left(\tau(t) \vec{T}(t) - \kappa(t) \vec{B}(t) \right) \quad (12)$$

şeklindedir. Burada $\|\vec{\alpha}'(t)\| = v(t)$. Eğrinin Darboux vektörü ve Frenet vektörleri arasında

$$\begin{cases} \vec{T}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{T}(t), \\ \vec{N}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{N}(t), \\ \vec{B}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{B}(t), \end{cases} \quad (13)$$

ilişkisi vardır. Darboux vektörünün normu

$$\|\vec{F}(t)\| = v(t) \sqrt{\kappa^2(t) - \tau^2(t)} \quad (14)$$

a) $|\kappa(t)| > |\tau(t)|$ ise $\langle \vec{F}(t), \vec{F}(t) \rangle > 0$ olacağından $\vec{F}(t)$ spacelike vektör olur.

Bu durumda, $\vec{B}(t)$ ile $\vec{F}(t)$ vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ ile gösterilirse, eğrilikler ve $\vec{F}(t)$ yönündeki birim $\vec{C}(t)$ vektörü,

$$\begin{cases} \kappa(t) = \|\vec{F}(t)\| \cosh \varphi \\ \tau(t) = \|\vec{F}(t)\| \sinh \varphi \end{cases}, \quad \|\vec{F}(t)\| = v(t) \sqrt{\kappa^2(t) - \tau^2(t)} \quad (15)$$

ve

$$\vec{C}(t) = \sinh \varphi \vec{T}(t) - \cosh \varphi \vec{B}(t) \quad (16)$$

şeklindedir.

b) $|\kappa(t)| < |\tau(t)|$ ise $\langle \vec{F}(t), \vec{F}(t) \rangle < 0$ olacağından $\vec{F}(t)$ timelike vektör olur.

Bu durumda, $\vec{B}(t)$ ile $\vec{F}(t)$ vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ ile gösterilirse, eğrilikler ve $\vec{F}(t)$ yönündeki birim $\vec{C}(t)$ vektörü,

$$\begin{cases} \kappa(t) = \|\vec{F}(t)\| \sinh \varphi \\ \tau(t) = \|\vec{F}(t)\| \cosh \varphi \end{cases}, \quad \|\vec{F}(t)\| = v(t) \sqrt{\tau^2(t) - \kappa^2(t)} \quad (17)$$

ve

$$\vec{C}(t) = \cosh \varphi \vec{T}(t) - \sinh \varphi \vec{B}(t) \quad (18)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.2.19. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı timelike eğrisinin Frenet formülleri ve Frenet çatısının Darboux vektörü

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \kappa(s) \vec{N}(s), \\ \vec{N}'(s) = \kappa(s) \vec{T}(s) - \tau(s) \vec{B}(s), \\ \vec{B}'(s) = \tau(s) \vec{N}(s) \end{cases} \quad (19)$$

ve

$$\vec{F}(s) = \tau(s) \vec{T}(s) - \kappa(s) \vec{B}(s) \quad (20)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.20. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı olmayan spacelike binormalı spacelike bir eğrisinin (timelike asal normalı spacelike eğri) Frenet çatısı $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ ve eğrilikleri $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}, \\ \vec{N}(t) = \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t), \\ \vec{B}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|} \end{cases} \quad (21)$$

ve

$$\begin{cases} \kappa(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3}, \\ \tau(t) = \frac{\langle \vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t) \rangle}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2} \end{cases} \quad (22)$$

şeklindedir. Burada

$$\vec{T}(t) \wedge \vec{N}(t) = -\vec{B}(t) \quad , \quad \vec{N}(t) \wedge \vec{B}(t) = -\vec{T}(t) \quad , \quad \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t) = \vec{N}(t) \quad (23)$$

Tanım 2.2.21. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı olmayan spacelike binormalli spacelike bir eğrisinin (timelike asal normalli spacelike eğri) Frenet çatısı $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ ve eğrilikleri $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ ise eğrinin Frenet formülleri ve Frenet çatısının Darboux vektörü

$$\begin{cases} \vec{T}'(t) = v(t)\kappa(t)\vec{N}(t), \\ \vec{N}'(t) = v(t)(\kappa(t)\vec{T}(t) + \tau(t)\vec{B}(t)), \\ \vec{B}'(t) = v(t)\tau(t)\vec{N}(t) \end{cases} \quad (24)$$

ve

$$\vec{F}(t) = v(t) \left(-\tau(t) \vec{T}(t) + \kappa(t) \vec{B}(t) \right) \quad (25)$$

şeklindedir, burada $\|\vec{\alpha}'(t)\| = v(t)$. Eğrinin Darboux vektörü ve Frenet vektörleri arasında

$$\begin{cases} \vec{T}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{T}(t), \\ \vec{N}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{N}(t), \\ \vec{B}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{B}(t) \end{cases} \quad (26)$$

ilişkisi vardır. Darboux vektörünün normu

$$\|\vec{F}(t)\| = v(t) \sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)} \quad (27)$$

şeklindedir. Burada $\langle \vec{F}(t), \vec{F}(t) \rangle > 0$ olduğundan $\vec{F}(t)$ spacelike vektör olur. $\vec{B}(t)$ ile $\vec{F}(t)$ vektörü arasındaki Lorentzian spacelike açı φ ile gösterilirse, eğrilikler ve $\vec{F}(t)$ yönündeki birim $\vec{C}(t)$ vektörü,

$$\begin{cases} \kappa(t) = \|\vec{F}(t)\| \cos \varphi \\ \tau(t) = \|\vec{F}(t)\| \sin \varphi \end{cases}, \quad \|\vec{F}(t)\| = v(t) \sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)} \quad (28)$$

olmak üzere

$$\vec{C}(t) = -\sin \varphi \vec{T}(t) + \cos \varphi \vec{B}(t) \quad (29)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.2.22. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı spacelike binormalli spacelike bir eğrisinin (timelike asal normalli spacelike eğri) Frenet formülleri ve Frenet çatısının Darboux vektörü

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \kappa(s) \vec{N}(s), \\ \vec{N}'(s) = \kappa(s) \vec{T}(s) + \tau(s) \vec{B}(s), \\ \vec{B}'(s) = \tau(s) \vec{N}(s) \end{cases} \quad (30)$$

ve

$$\vec{F}(s) = -\tau(s) \vec{T}(s) + \kappa(s) \vec{B}(s) \quad (31)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.23. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı olmayan timelike binormalli spacelike bir eğrinin Frenet çatısı $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ ve eğrilikleri $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}, \\ \vec{N}(t) = -\vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t), \\ \vec{B}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|} \end{cases} \quad (32)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3}, \\ \tau(t) = \frac{\langle \vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t) \rangle}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2} \end{array} \right. \quad (33)$$

şeklindedir. Burada

$$\vec{T}(t) \wedge \vec{N}(t) = \vec{B}(t) \quad , \quad \vec{N}(t) \wedge \vec{B}(t) = -\vec{T}(t) \quad , \quad \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t) = -\vec{N}(t). \quad (34)$$

Tanım 2.2.24. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı olmayan timelike binormalli spacelike bir eğrinin Frenet çatısı $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ ve eğrilikleri $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ ise eğrinin Frenet formülleri ve Frenet çatısının Darboux vektörü

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}'(t) = v(t) \kappa(t) \vec{N}(t), \\ \vec{N}'(t) = v(t) (-\kappa(t) \vec{T}(t) + \tau(t) \vec{B}(t)), \\ \vec{B}'(t) = v(t) \tau(t) \vec{N}(t) \end{array} \right. \quad (35)$$

ve

$$\vec{F}(t) = v(t) (\tau(t) \vec{T}(t) - \kappa(t) \vec{B}(t)) \quad (36)$$

şeklindedir, burada $\|\vec{\alpha}'(t)\| = v(t)$. Eğrinin Darboux vektörü ve Frenet vektörleri arasında

$$\begin{cases} \vec{T}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{T}(t), \\ \vec{N}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{N}(t), \\ \vec{B}'(t) = \vec{F}(t) \wedge \vec{B}(t) \end{cases} \quad (37)$$

ilişkisi vardır. Darboux vektörünün normu

$$\|\vec{F}(s)\| = v(t) \sqrt{\tau^2(t) - \kappa^2(t)} \quad (38)$$

Bu durumda

a) $|\tau(t)| > |\kappa(t)|$ ise $\langle \vec{F}(t), \vec{F}(t) \rangle > 0$ olduğundan $\vec{F}(t)$ spacelike vektör olur.

$\vec{B}(t)$ ile $\vec{F}(t)$ vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ ile gösterilirse, eğrilikler ve $\vec{F}(t)$ yönündeki birim $\vec{C}(t)$ vektörü,

$$\begin{cases} \kappa(t) = \|\vec{F}(t)\| \sinh \varphi \\ \tau(t) = \|\vec{F}(t)\| \cosh \varphi \end{cases}, \quad \|\vec{F}(t)\| = v(t) \sqrt{\tau^2(t) - \kappa^2(t)} \quad (39)$$

olmak üzere

$$\vec{C}(t) = \cosh \varphi \vec{T}(t) - \sinh \varphi \vec{B}(t) \quad (40)$$

şeklinde bulunur.

b) $|\tau(t)| < |\kappa(t)|$ ise $\langle \vec{F}(t), \vec{F}(t) \rangle < 0$ olacağından $\vec{F}(t)$ timelike vektör olur.

$\vec{B}(t)$ ile $\vec{F}(t)$ vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ ile gösterilirse, eğrilikler ve $\vec{F}(t)$ yönündeki birim $\vec{B}(t)$ vektörü,

$$\begin{cases} \kappa(t) = \|\vec{F}(t)\| \cosh \varphi \\ \tau(t) = \|\vec{F}(t)\| \sinh \varphi \end{cases}, \quad \|\vec{F}(t)\| = v(t) \sqrt{\kappa^2(t) - \tau^2(t)} \quad (41)$$

olmak üzere

$$\vec{C}(t) = \sinh \varphi \vec{T}(t) - \cosh \varphi \vec{B}(t) \quad (42)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.2.25. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı timelike binormalli spacelike bir eğrinin Frenet formülleri ve Frenet çatısının Darboux vektörü

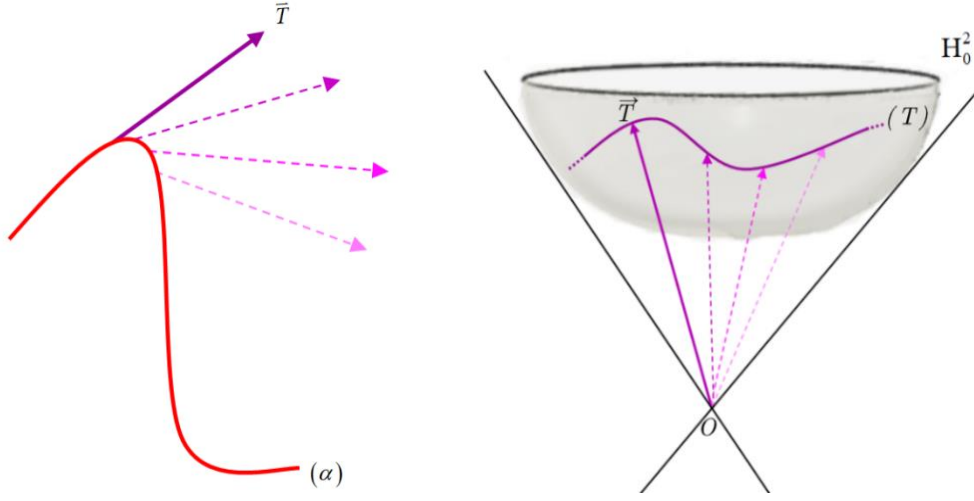
$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \kappa(s) \vec{N}(s), \\ \vec{N}'(s) = \kappa(s) \vec{T}(s) + \tau(s) \vec{B}(s), \\ \vec{B}'(s) = \tau(s) \vec{N}(s) \end{cases} \quad (43)$$

ve

$$\vec{F}(s) = -\tau(s) \vec{T}(s) + \kappa(s) \vec{B}(s) \quad (44)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.26. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı eğrisinin teğet vektörü $\vec{T}(s)$ olsun. (α) eğrisi çizilirken $\vec{T}(s)$ vektörünün uç noktalarının $\mathbb{H}_0^2$ üzerinde meydana getirdiği eğriye $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin **teğetler göstergesi** adı verilir, (Şekil 20).



Şekil 20. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{H}_0^2$ üzerinde teğetler göstergesi

$\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin teğetler göstergesini (T) ile gösterelim. (T) nin denklemi

$$(T) = \vec{\alpha}_T(s) = \vec{T}(s)$$

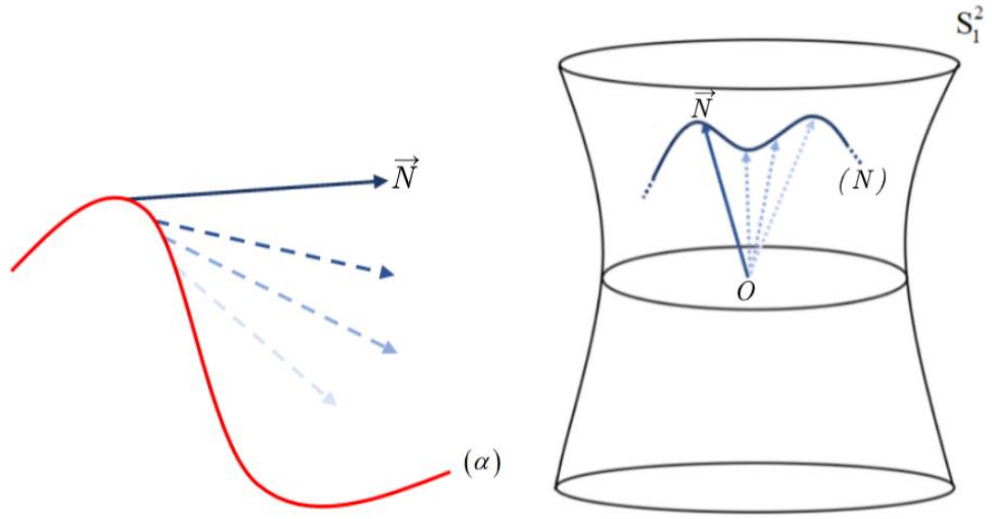
dir ve (T) nin parametresine s_T dersek $s_T \neq s$ olup yay elementi ise

$$ds_T = \|\vec{T}'(s)\| ds$$

ile verilir (Çalışkan ve Uğurlu, 2012).

Sonuç 2.2.27. Bir fptl (α) eğrisinin eğriliği, teğetler göstergesinin yay elementinin, esas eğrinin yay elementine oranıdır (Çalışkan ve Uğurlu, 2012).

Tanım 2.2.28. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı eğrisinin asli normal vektörü $\vec{N}(s)$ olsun. (α) eğrisi çizilirken $\vec{N}(s)$ vektörünün uç noktalarının $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde meydana getirdiği eğriye $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin asli normaller göstergesi adı verilir, (Şekil 21).



Şekil 21. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde normaller göstergesi

$\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin asli normaller göstergesini (N) ile gösterirsek (N) nin denklemi

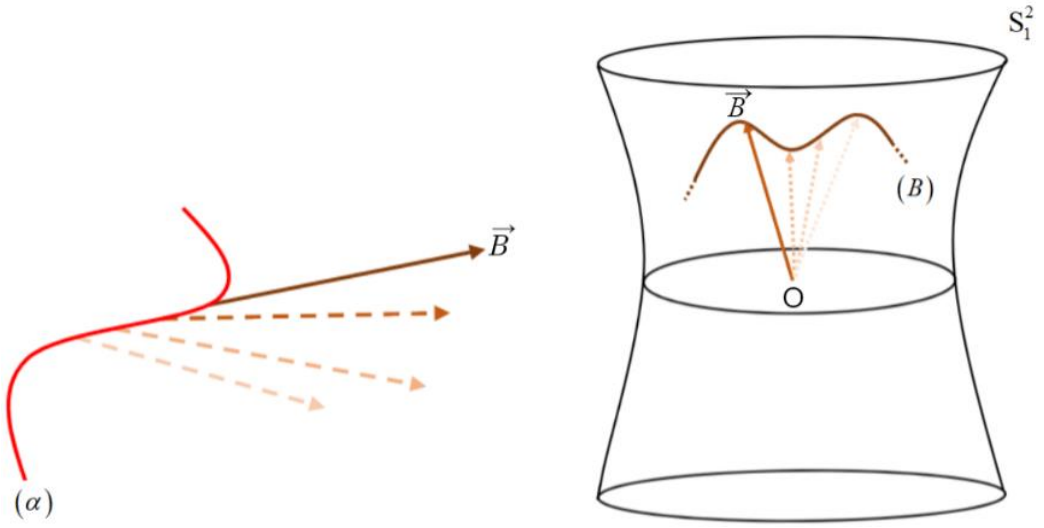
$$(N) = \vec{\alpha}_N(s) = \vec{N}(s)$$

ve parametresine s_N dersek $s_N \neq s$ olup yay elementinin de

$$ds_N = \|\vec{N}'(s)\| ds$$

ile verilir (Çalışkan ve Uğurlu, 2012).

Tanım 2.2.29. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı eğrisinin binormal vektörü $\vec{B}(s)$ olsun. (α) eğrisi çizilirken $\vec{B}(s)$ vektörünün uç noktalarının $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde meydana getirdiği eğriye $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin binormaller göstergesi adı verilir, (Şekil 22).



Şekil 22. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde binormaller göstergesi

$\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin binormaller göstergesini (B) ile gösterelim. (B) nin denklemi

$$(B) = \vec{\alpha}_B(s) = \vec{B}(s)$$

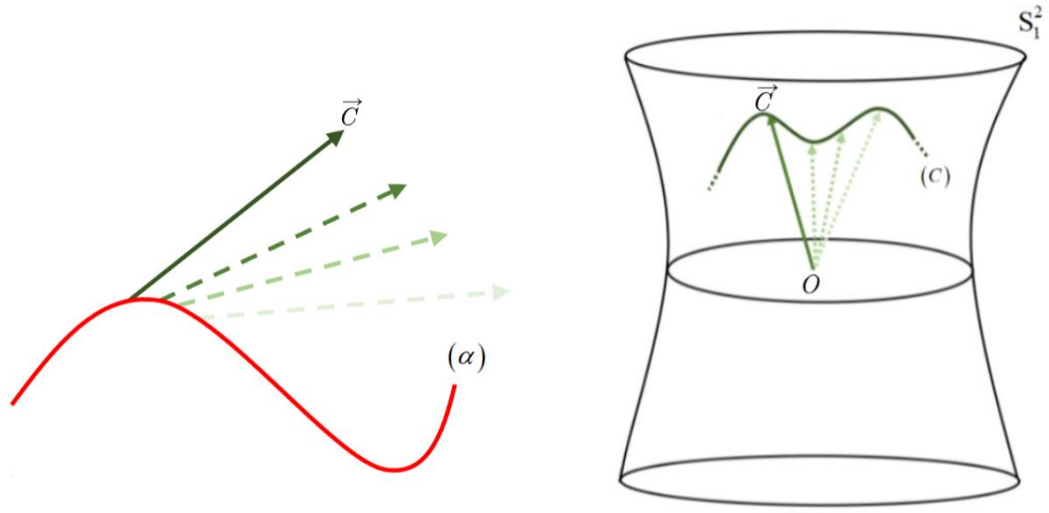
dir ve (B) nin parametresine s_B dersek $s_B \neq s$ olup yay elementi ise

$$ds_B = \|\vec{B}'(s)\| ds$$

ile verilir (Çalışkan ve Uğurlu, 2012).

Sonuç 2.2.30. Bir fptl (α) eğrisinin burulması, binormaller göstergesinin yay elementinin, esas eğrinin yay elementine oranıdır (Çalışkan ve Uğurlu, 2012).

Tanım 2.2.31. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı eğrisinin pol vektörü $\vec{C}(s)$ olsun. (α) eğrisi çizilirken $\vec{C}(s)$ birim vektörünün uç noktalarının $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde meydana getirdiği eğriye (α) eğrisinin sabit pol eğrisi (pol göstergesi) adı verilir (Şekil 23).



Şekil 23. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde pol göstergesi

$\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin sabit pol eğrisinin göstergesini (C) ile gösterirsek (C) nin denklemi

$$\vec{\alpha}_C(s) = \vec{C}(s)$$

ve parametresine s_C dersek $s_C \neq s$ olup yay elementinin de

$$ds_C = \|\vec{C}'(s)\| ds$$

ile verilir (Çalışkan ve Uğurlu, 2012).

Tanım 2.2.32. $\mathbb{E}_1^n$, n -boyutlu bir Lorentz uzayı ve $\vec{\alpha}(t)$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $\vec{\alpha}(t)$ eğrisinin $\vec{\alpha}(m)$ ve $\vec{\alpha}(n)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$s_\alpha = \int_m^n \|\vec{\alpha}'(t)\| dt \quad (45)$$

dir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.2.33. $\vec{T}(t)$, (α) eğrisinin teğet vektörü olmak üzere $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği

$$k_T(t) = \left\| \overrightarrow{D_T T}(t) \right\| \quad (46)$$

şeklindedir. Eğer $\vec{T}(t)$ birim spacelike vektör ve yüzey normali $\vec{N}(t)$ ise $\mathbb{S}_1^2$ deki geodezik eğriliği

$$\gamma_T(t) = \left\| \overrightarrow{D_T T}(t) \right\| \quad (47)$$

şeklindedir. Aşağıdaki Gauss denkleminde

$$\overrightarrow{D_T T}(t) = \overrightarrow{D_T T}(t) + \varepsilon \left\langle S(\vec{T}(t)), \vec{T}(t) \right\rangle \vec{T}(t) \quad (48)$$

şeklindedir. Burada $\varepsilon = \left\langle \vec{N}(t), \vec{N}(t) \right\rangle$ dir.

Eğer $\vec{T}(t)$ birim timelike vektör ve yüzey normali $\vec{N}(t)$ ise $\mathbb{H}_0^2$ deki geodezik eğriliği

$$\psi_T(t) = \left\| \overrightarrow{D_T T}(t) \right\| \quad (49)$$

şeklindedir. Aşağıdaki Gauss denkleminde

$$\overrightarrow{D_T T}(t) = \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) + \varepsilon \left\langle S(\vec{T}(t)), \vec{T}(t) \right\rangle \vec{T}(t) \quad (50)$$

şeklindedir. Burada $\varepsilon = \left\langle \vec{N}(t), \vec{N}(t) \right\rangle$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.34. $(\alpha) \subset \mathbb{E}_1^3$ bir birim hızlı eğri olsun. $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}(s)$ olmak üzere

$$k_g = \left\| \overrightarrow{D_T T}(s) \right\| \quad (51)$$

ifadesine $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği, $\overline{D}, \mathbb{S}_1^2$ ($\overline{\overline{D}}, \mathbb{H}_0^2$ in Gauss anlamında kovaryant türev operatörleri) olmak üzere,

$$\gamma_g = \left\| \overrightarrow{\overline{D}_T T}(s) \right\| \left(\psi_g = \left\| \overrightarrow{\overline{\overline{D}_T T}}(s) \right\| \right) \quad (52)$$

ifadesine de $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ (veya $\mathbb{H}_0^2$) deki geodezik eğriliği denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Salkowski Eğrisi

Tanım 3.1.1. $m \in \mathbb{R}$ için $m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0$ ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ için parametrik denklemi

aşağıda verilen eğriye 3-boyutlu Öklid Uzayında Salkowski eğrisi denir.

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)t) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)t) - \frac{1}{2} \sin(t), \right. \\ & \left. \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)t) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)t) + \frac{1}{2} \cos(t), \frac{1}{4m} \cos(2nt) \right) \end{aligned}$$

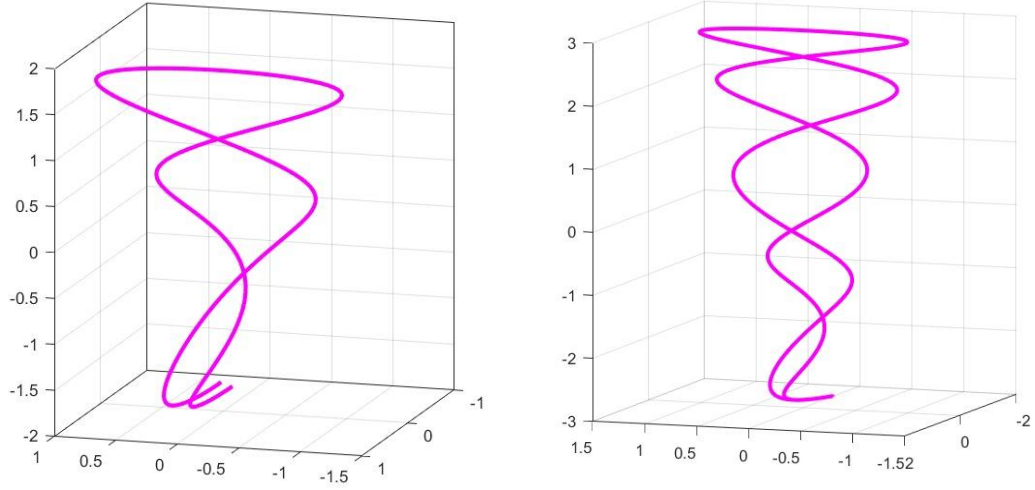
Burada

$$\left\| \vec{\beta}_m'(t) \right\| = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{1+m^2}}$$

dir. Eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{cases} \vec{T}(t) = \left(\cos(t) \cos(nt) + n \sin(t) \sin(nt), \sin(t) \cos(nt) - n \cos(t) \sin(nt), \frac{n}{m} \sin(nt) \right), \\ \vec{N}(t) = n \left(\frac{\sin(t)}{m}, -\frac{\cos(t)}{m}, -1 \right), \\ \vec{B}(t) = \left(-\cos(t) \sin(nt) + n \sin(t) \cos(nt), -\sin(t) \sin(nt) - n \cos(t) \cos(nt), \frac{n}{m} \cos(nt) \right) \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca $\vec{\beta}_m(t)$ eğrisinin eğriliği $\kappa(t) = 1$, burulması $\tau(t) = \tan(nt)$ şeklindedir, (Şekil 24).



Şekil 24. $m = \frac{1}{7}$ ve $m = \frac{1}{12}$ değerleri için 3-boyutlu Öklid uzayında Salkowski eğrisi

3.2. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisi

Tanım 3.2.1. $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$ ya da $m < -1$ ve $n = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}$ için parametrik denklemi

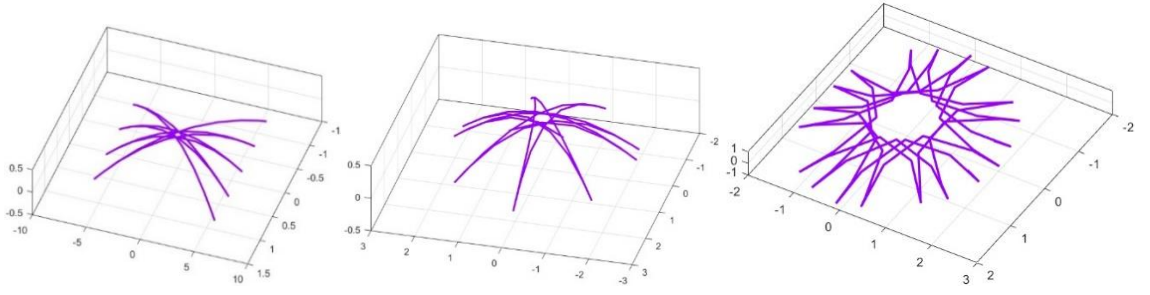
aşağıda verilen eğriye 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisi denir:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma}_m(t) = & \left(2 \sin t - \frac{1+n}{1-2n} \sin[(1-2n)t] - \frac{1-n}{1+2n} \sin[(1+2n)t], \right. \\ & \left. 2 \cos t - \frac{1+n}{1-2n} \cos[(1-2n)t] - \frac{1-n}{1+2n} \cos[(1+2n)t], \frac{1}{m} \cos(2nt) \right), \end{aligned}$$

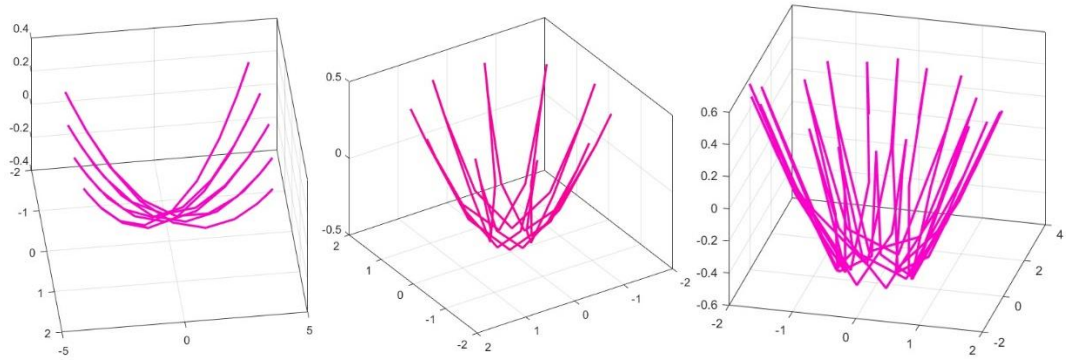
(Şekil 25 ve Şekil 26). Burada

$$\|\overrightarrow{\gamma}'_m(t)\| = v(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{m^2 - 1}} = \frac{n}{m} \sin(nt) \quad (53)$$

şeklindedir. Eğrinin Frenet vektörleri



Şekil 25. $m = -6, -2, -\frac{10}{9}$ değerleri için timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisi



Şekil 26. $m = 4, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}$ değerleri için timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisi

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}(t) = \left(\cos t \sin(nt) - n \sin t \cos(nt), -\sin t \sin(nt) - n \cos t \cos(nt), \right. \\ \quad \left. -\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \text{ sl,} \\ \vec{N}(t) = \frac{n}{m} (\sin t, \cos t, m) \text{ tl,} \\ \vec{B}(t) = \left(-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt), \sin t \cos(nt) - n \cos t \sin(nt), \right. \\ \quad \left. -\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \text{ sl} \end{array} \right. \quad (54)$$

şeklindedir. Ayrıca $\vec{\gamma}_m(t)$ eğrisinin eğriliği ve burulması

$$\kappa(t)=1 \text{ , } \tau(t)=-\cot(nt) . \quad (55)$$

şeklindedir. Yay uzunluğu $\left[-\frac{\pi}{2n}, t\right]$ aralığında

$$s=-\frac{\cos(nt)}{m} . \quad (56)$$

şeklindedir.

4.BULGULAR

4.1. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin Bazı Özellikleri

Öncelikle 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin Darboux vektörünü, Darboux vektörü yönündeki birim vektörünü ve (nt) açısını bulalım.

Teorem 4.1.1. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin Darboux vektörü $\vec{F}(t)$ olmak üzere

$$\vec{F}(t) = \left(-\frac{n^2}{m} \sin t, -\frac{n^2}{m} \cos t, -\frac{n^2}{m^2} \right) \quad (57)$$

İspat: (54) ifadesindeki $\vec{N}(t)$ vektörünün t ye göre türevi alınırsa

$$\vec{N}'(t) = \left(\frac{n}{m} \cos t, -\frac{n}{m} \sin t, 0 \right) \quad (58)$$

elde edilir. (26) vektörel çarpımından

$$\vec{F}(t) = \left(-\frac{n^2}{m} \sin t, -\frac{n^2}{m} \cos t, -\frac{n^2}{m^2} \right)$$

olur. Diğer yandan (25) ifadesinde (53), (54) ve (55) ifadeleri yerine yazılırsa yine

$$\vec{F}(t) = \frac{n}{m} \sin(nt) \left[\frac{\cos(nt)}{\sin(nt)} (\cos t \sin(nt) - n \sin t \cos(nt)), -\sin t \sin(nt) - n \cos t \cos(nt), \right.$$

$$\begin{aligned} & -\frac{n}{m}\cos(nt)\Bigg)+(-\cos t\cos(nt)-n\sin t\sin(nt), \sin t\cos(nt)-n\cos t\sin(nt), \\ & -\frac{n}{m}\sin(nt)\Bigg)\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) = & \frac{n}{m}\sin(nt)\Bigg[\Bigg(\cos t\cos(nt)-\frac{n\sin t\cos^2(nt)}{\sin(nt)}, -\sin t\cos(nt)-\frac{n\cos t\cos^2(nt)}{\sin(nt)}, \\ & -\frac{n\cos^2(nt)}{m\sin(nt)}\Bigg)+(-\cos t\cos(nt)-n\sin t\sin(nt), \sin t\cos(nt)-n\cos t\sin(nt), \\ & -\frac{n}{m}\sin(nt)\Bigg)\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) = & \frac{n}{m}\sin(nt)\Bigg[\Bigg(\cos t\cos(nt)-\frac{n\sin t\cos^2(nt)}{\sin(nt)}-\cos t\cos(nt)-n\sin t\sin(nt), \\ & -\sin t\cos(nt)-\frac{n\cos t\cos^2(nt)}{\sin(nt)}+\sin t\cos(nt)-n\cos t\sin(nt), \\ & -\frac{n\cos^2(nt)}{m\sin(nt)}-\frac{n}{m}\sin(nt)\Bigg)\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) = & \frac{n}{m}\sin(nt)\Bigg[\Bigg[-\frac{n\sin t\cos^2(nt)}{\sin(nt)}-n\sin t\sin(nt), -\frac{n\cos t\cos^2(nt)}{\sin(nt)}-n\cos t\sin(nt), \\ & -\frac{n\cos^2(nt)}{\sin(nt)}-\frac{n}{m}\sin(nt)\Bigg)\Bigg], \end{aligned}$$

$$\vec{F}(t) = \frac{n}{m}\sin(nt)\left(-\frac{n\sin t}{\sin(nt)}, -\frac{n\cos t}{\sin(nt)}, -\frac{n}{m\sin(nt)}\right),$$

$$\vec{F}(t) = \left(-\frac{n^2}{m}\sin t, -\frac{n^2}{m}\cos t, -\frac{n^2}{m^2}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin Darboux ani dönme vektörü yönündeki birim vektör

$$\vec{C}(t) = \left(-n \sin t, -n \cos t, -\frac{n}{m} \right) \quad (59)$$

İspat: (57) ifadesinin normu alınır

$$\|\vec{F}(t)\| = \sqrt{\left| \frac{n^4}{m^2} \sin^2 t + \frac{n^4}{m^2} \cos^2 t - \frac{n^4}{m^4} \right|} = \sqrt{\left| \frac{n^4(m^2 - 1)}{m^4} \right|} = \sqrt{\left| \frac{n^2}{m^2} \right|} ,$$

$$\|\vec{F}(t)\| = \frac{n}{m} \quad (60)$$

elde edilir. $\vec{C}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{\|\vec{F}(t)\|}$ ifadesinde (57) ve (60) ifadeleri yerine yazılırsa,

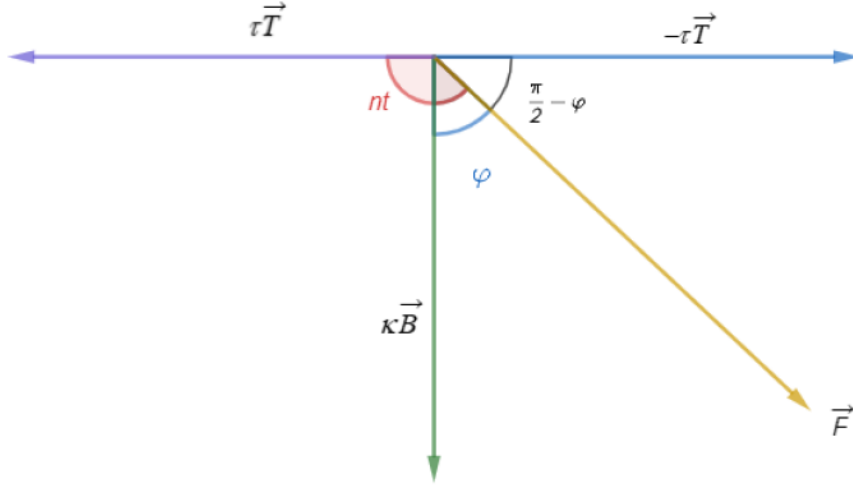
$$\vec{C}(t) = \left(-n \sin t, -n \cos t, -\frac{n}{m} \right)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin spacelike Darboux ani dönme vektörü $\vec{F}(t)$ ile spacelike binormal vektörü $\vec{B}(t)$ arasındaki φ reel açısı

$$\varphi = nt - \frac{\pi}{2} , \quad (61)$$

şeklindedir, (Şekil 27).



Şekil 27. Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin Darboux vektörü

İspat: (5) ifadesinde (54) ve (57) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\langle \vec{F}(t), \vec{B}(t) \rangle = \frac{n}{m} \cos \varphi \quad (62)$$

elde edilir veya (25) ifadesinin her iki tarafı $\vec{B}(t)$ ile Lorentzian iç çarpılıp, gerekli işlemler yapılırsa yine (62) ifadesi elde edilir. Diğer yandan (1) ifadesinde (54) ve (57) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}(t), \vec{B}(t) \rangle &= \frac{n^2}{m} \sin t \cos t \cos(nt) + \frac{n^3}{m} \sin^2 t \sin(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \cos t \cos(nt) \\ &\quad + \frac{n^3}{m} \cos^2 t \sin(nt) - \frac{n^3}{m^3} \sin(nt), \end{aligned}$$

$$\langle \vec{F}(t), \vec{B}(t) \rangle = \frac{n}{m} \sin(nt) \quad (63)$$

bulunur. (62) ve (63) ifadelerinin eşitliklerinden,

$$\sin(nt) = \cos \varphi \quad (64)$$

elde edilir. Ayrıca (5) ifadesinde (54) ve (57) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\langle \vec{F}(t), \vec{T}(t) \rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{n}{m}(-\sin \varphi) \quad (65)$$

elde edilir veya (25) ifadesinin her iki tarafı $\vec{T}(t)$ ile Lorentzian iç çarpılıp, gerekli işlemler yapılırsa yine (65) ifadesi elde edilir. Diğer yandan (1) ifadesinde (54) ve (57) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}(t), \vec{T}(t) \rangle = & -\frac{n^2}{m} \cos t \sin t \sin(nt) + \frac{n^3}{m} \sin^2 t \cos(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \sin t \sin(nt) \\ & + \frac{n^3}{m} \cos^2 t \cos(nt) - \frac{n^3}{m^3} \cos(nt), \end{aligned}$$

$$\langle \vec{F}(t), \vec{T}(t) \rangle = \frac{n}{m} \cos(nt) \quad (66)$$

bulunur. (65) ve (66) ifadelerinin eşitliklerinden,

$$\cos(nt) = -\sin \varphi \quad (67)$$

bulunur. (64) ve (67) ifadelerinden

$$\begin{cases} \cos(nt) + \sin \varphi = 0 \Rightarrow \cos^2(nt) + 2 \cos(nt) \sin \varphi + \sin^2 \varphi, \\ \sin(nt) - \cos \varphi = 0 \Rightarrow \sin^2(nt) - 2 \sin(nt) \cos \varphi + \cos^2 \varphi, \end{cases}$$

$$2 + 2(\cos(nt) \sin \varphi - \sin(nt) \cos \varphi) = 0,$$

$$\sin(nt) \cos \varphi - \cos(nt) \sin \varphi = 1,$$

$$\sin(nt - \varphi) = 1$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuçtan (nt) ile φ arasındaki ilişki $\varphi = nt - \frac{\pi}{2}$ şeklindedir.

Ayrıca (64) ve (67) ifadelerinden

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{\cos(nt)}{\sin(nt)},$$

$$\tan \varphi = -\cot(nt) = \tau(t) \quad (68)$$

ulaşılır. $\vec{\gamma}_m(t)$ eğrimizin bize verilen yay uzunluğunu $s_\gamma = -\frac{\cos(nt)}{m}$ olarak

bulabilmemiz için yay uzunluğu aralığını $\left[-\frac{\pi}{2n}, t\right]$ olarak almamız gerekir. O halde

(45) ifadesinden

$$s_\gamma = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t \left\| \vec{\gamma}_m'(t) \right\| dt,$$

$$s_\gamma = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t \frac{\sin(nt)}{\sqrt{m^2-1}} dt = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\frac{\pi}{2n}}^t = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} - 0 \right],$$

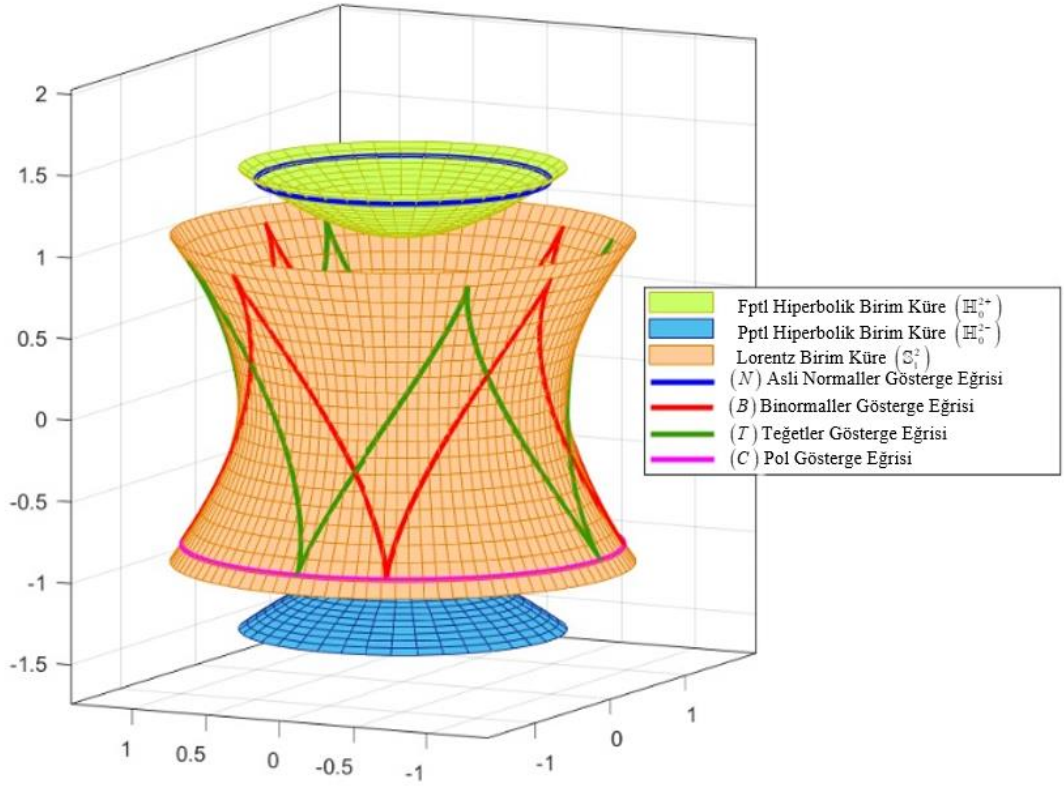
$$s_\gamma = -\frac{\cos(nt)}{m}$$

olarak bulunur.

4.2. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin

Küresel Gösterge Eğrileri

Bu bölümde $\mathbb{E}_1^3$ teki timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin teğetler, asli normaller, binormaller ve pol gösterge eğrilerini inceleyeceğiz. Bu eğrilerin $\mathbb{S}_1^2$ ve $\mathbb{H}_0^2$ birim küreleri üzerindeki grafikleri Şekil 28' deki gibidir.



Şekil 28. Lorentz uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ ve $\mathbb{H}_0^2$ üzerinde küresel gösterge eğrileri

4.3. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin (T)

Timelike Teğetler Göstergesi

Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin spacelike teğet vektörü $\vec{T}(t)$ ve (T) timelike teğetler gösterge eğrisi olmak üzere timelike (T) eğrisinin Frenet vektörleri $\{\vec{T}_T(t), \vec{N}_T(t), \vec{B}_T(t)\}$, eğriliği $\kappa_T(t)$ ve burulması (torsiyonu) $\tau_T(t)$ olsun.

Teorem 4.3.1. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin Frenet vektörleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{T}_T(t) = \left(\frac{n}{m} \sin t, \frac{n}{m} \cos t, n \right) \text{ tl} , \\ \overrightarrow{N}_T(t) = (\cos t, -\sin t, 0) \text{ sl} , \\ \overrightarrow{B}_T(t) = \left(n \sin t, n \cos t, \frac{n}{m} \right) \text{ sl} \end{array} \right. \quad (69)$$

şeklindedir.

İspat: (54) ifadesindeki $\overrightarrow{T}(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}'(t) = & \left(-\sin t \sin(nt) + n \cos t \cos(nt) - n \cos t \cos(nt) + n^2 \sin t \sin(nt), \right. \\ & -\cos t \sin(nt) - n \sin t \cos(nt) + n \sin t \cos(nt) + n^2 \cos t \sin(nt), \\ & \left. + \frac{n^2}{m} \sin(nt) \right), \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{T}'(t) = \left((n^2 - 1) \sin t \sin(nt), (n^2 - 1) \cos t \sin(nt), \frac{n^2}{m} \sin(nt) \right) \quad (70)$$

elde edilir. (70) ifadesinin normu alınırsa

$$\|\overrightarrow{T}'(t)\| = v_T(t) = \sqrt{\left| \left\langle \overrightarrow{T}'(t), \overrightarrow{T}'(t) \right\rangle \right|},$$

$$\|\overrightarrow{T}'(t)\| = \sqrt{\left| (n^2 - 1)^2 \sin^2 t \sin^2(nt) + (n^2 - 1)^2 \cos^2 t \sin^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} \sin^2(nt) \right|},$$

$$\|\overrightarrow{T}'(t)\| = \sqrt{\left| \sin^2(nt) \left((n^2 - 1)^2 - \frac{n^4}{m^2} \right) \right|},$$

$$\|\overrightarrow{T}'(t)\| = \frac{n}{m} \sin(nt) \quad (71)$$

bulunur. (70) ve (71) ifadeleri (8) ifadesinde yerine yazılırsa (T) timelike eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}_T(t)$

$$\vec{T}_T(t) = \left(\frac{n}{m} \sin t, \frac{n}{m} \cos t, n \right) \quad (72)$$

elde edilir. (54) ifadesindeki $\vec{T}(t)$ vektörünün ikinci türevi alınır

$$\begin{aligned} \vec{T}''(t) = & \left(\frac{n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{n^3}{m^2} \sin t \cos(nt), -\frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos(nt), \right. \\ & \left. + \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos(nt), \frac{n^3}{m} \cos(nt) \right) \end{aligned} \quad (73)$$

olur. (70) ve (73) ifadelerine (2) ifadesindeki vektörel çarpım işlemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) \wedge \vec{T}''(t) = & \left(-\frac{n^4}{m^3} \sin t \sin^2(nt) + \frac{n^5}{m^3} \sin(nt) \cos t \cos(nt) - \frac{n^5}{m^3} \sin(nt) \cos t \cos(nt), \right. \\ & + \frac{n^5}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{n^4}{m^3} \sin^2(nt) \cos t - \frac{n^5}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt), \\ & - \frac{n^4}{m^4} \sin^2 t \sin^2(nt) + \frac{n^5}{m^4} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) - \frac{n^4}{m^4} \sin^2 t \cos^2(nt) \\ & \left. - \frac{n^5}{m^4} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) \right), \end{aligned} \quad (74)$$

elde edilir. (74) ifadesinin normu alınır

$$\|\vec{T}'(t) \wedge \vec{T}''(t)\| = \sqrt{\left| \frac{n^8}{m^6} \sin^2 t \sin^4(nt) + \frac{n^8}{m^6} \cos^2 t \sin^4(nt) - \frac{n^8}{m^8} \sin^4(nt) \right|},$$

$$\|\vec{T}'(t) \wedge \vec{T}''(t)\| = \sqrt{\left| \frac{(m^2 - 1)n^8}{m^8} \sin^4(nt) \right|},$$

$$\|\vec{T}'(t) \wedge \vec{T}''(t)\| = \frac{n^3}{m^3} \sin^2(nt) \quad (75)$$

bulunur. (74) ve (75) ifadeleri (8) ifadesinde yerine yazılırsa (T) timelike eğrisinin birim binormal vektörü $\vec{B}_T(t)$

$$\vec{B}_T(t) = \left(n \sin t, n \cos t, \frac{n}{m} \right) \quad (76)$$

elde edilir. (72) ve (76) ifadeleri (8) ifadesinde yerine yazılırsa (T) timelike eğrisinin birim normal vektörü $\vec{N}_T(t)$

$$\vec{N}_T(t) = (\cos t, -\sin t, 0) \quad (77)$$

elde edilir. (72), (76) ve (77) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin eğriliği ve burulması sırasıyla

$$\begin{cases} \kappa_T(t) = \frac{1}{\sin(nt)}, \\ \tau_T(t) = \frac{m}{\sin(nt)}. \end{cases} \quad (78)$$

İspat (9) ifadesinden timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin eğriliği

$$\kappa_T(t) = \frac{\|\vec{T}'(t) \wedge \vec{T}''(t)\|}{\|\vec{T}'(t)\|^3} \quad (79)$$

şeklindedir. (71) ve (75) ifadeleri (79) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\kappa_T(t) = \frac{1}{\sin(nt)} \quad (80)$$

elde edilir. Diğer taraftan (73) ifadesinin türevi alınır

$$\begin{aligned} \vec{T}'''(t) = & \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{n^4}{m^2} \sin t \sin(nt), \right. \\ & -\frac{n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) - \frac{n^3}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{n^3}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{n^4}{m^2} \cos t \sin(nt), \\ & \left. -\frac{n^4}{m} \sin(nt) \right) \end{aligned} \quad (81)$$

olur. (74) ile (81) ifadeleri skaler (iç) çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \vec{T}'(t) \wedge \vec{T}''(t), \vec{T}'''(t) \rangle = & \left(\frac{n^6 + n^8}{m^5} \right) \sin^2 t \sin^3(nt) - \frac{2n^7}{m^5} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos(nt) \\ & + \left(\frac{n^6 + n^8}{m^5} \right) \cos^2 t \sin^3(nt) + \frac{2n^7}{m^5} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos(nt) - \frac{n^8}{m^5} \sin^3(nt), \\ \langle \vec{T}'(t) \wedge \vec{T}''(t), \vec{T}'''(t) \rangle = & \left(\frac{n^6 + n^8}{m^5} - \frac{n^8}{m^5} \right) \sin^3(nt), \\ \langle \vec{T}'(t) \wedge \vec{T}''(t), \vec{T}'''(t) \rangle = & \frac{n^6}{m^5} \sin^3(nt) \end{aligned} \quad (82)$$

elde edilir. (9) ifadesinden timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_T(t) = \frac{\langle \overrightarrow{T}'(t) \wedge \overrightarrow{T}''(t), \overrightarrow{T}'''(t) \rangle}{\|\overrightarrow{T}'(t) \wedge \overrightarrow{T}''(t)\|^2} \quad (83)$$

şeklindedir. (75) ve (82) ifadeleri (83) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\tau_T(t) = \frac{m}{\sin(nt)} \quad (84)$$

olarak bulunur. (80) ve (84) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.3. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) = \left(\frac{\cos t}{\sin(nt)}, -\frac{\sin t}{\sin(nt)}, 0 \right) \text{ sl} , \\ \overrightarrow{D_{T_T} N_T}(t) = \left(-\frac{m \sin t}{n \sin(nt)}, -\frac{m \cos t}{n \sin(nt)}, 0 \right) \text{ sl} , \\ \overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t) = \left(\frac{m \cos t}{\sin(nt)}, -\frac{m \sin t}{\sin(nt)}, 0 \right) \text{ sl} . \end{cases} \quad (85)$$

İspat: (19) ifadesine timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_T} N_T}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_T(t) & 0 \\ \kappa_T(t) & 0 & -\tau_T(t) \\ 0 & \tau_T(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T_T}(t) \\ \overrightarrow{N_T}(t) \\ \overrightarrow{B_T}(t) \end{bmatrix} \quad (86)$$

şeklindedir. (77) ve (80) ifadeleri (86) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) = \left(\frac{\cos t}{\sin(nt)}, -\frac{\sin t}{\sin(nt)}, 0 \right) \quad (87)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) = \frac{d\overrightarrow{T_T}(t)}{dt_T} = \frac{d\overrightarrow{T_T}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_T} = \frac{\overrightarrow{T_T}'(t)}{v_T(t)} \quad (88)$$

şeklinde yazılabilir. (72) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{T_T}'(t) = \left(\frac{n}{m} \cos t, -\frac{n}{m} \sin t, n \right) \quad (89)$$

olarak bulunur. (71) ve (89) ifadeleri (88) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) = \left(\frac{\cos t}{\sin(nt)}, -\frac{\sin t}{\sin(nt)}, 0 \right)$$

olarak bulunur. (72), (76), (80) ve (84) ifadeleri (86) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_T} N_T}(t) = \left(-\frac{m \sin t}{n \sin(nt)}, -\frac{m \cos t}{n \sin(nt)}, 0 \right) \quad (90)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_T} N_T}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_T} N_T}(t) = \frac{d\overrightarrow{N_T}(t)}{dt_T} = \frac{d\overrightarrow{N_T}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_T} = \frac{\overrightarrow{N_T}'(t)}{v_T(t)} \quad (91)$$

şeklinde yazılabilir. (77) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{N_T}'(t) = (-\sin t, -\cos t, 0) \quad (92)$$

olarak bulunur. (71) ve (92) ifadeleri (91) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_T} N_T}(t) = \left(-\frac{m \sin t}{n \sin(nt)}, -\frac{m \cos t}{n \sin(nt)}, 0 \right)$$

elde edilir. Son olarak (77) ve (84) ifadeleri (86) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t) = \left(\frac{m \cos t}{\sin(nt)}, -\frac{m \sin t}{\sin(nt)}, 0 \right) \quad (93)$$

olur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t) = \frac{d\overrightarrow{B_T}(t)}{dt_T} = \frac{d\overrightarrow{B_T}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_T} = \frac{\overrightarrow{B_T}'(t)}{v_T(t)} \quad (94)$$

şeklinde yazılabilir. (76) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{B_T}'(t) = (n \cos t, -n \sin t, 0) \quad (95)$$

olarak bulunur. (71) ve (95) ifadeleri (94) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t) = \left(\frac{m \cos t}{\sin(nt)}, -\frac{m \sin t}{\sin(nt)}, 0 \right)$$

olarak bulunur. (87), (90) ve (93) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.4. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin Frenet vektörleri için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) & \overrightarrow{D_{T_T}^2 T_T}(t) & \overrightarrow{D_{T_T}^3 T_T}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_T} N_T}(t) & \overrightarrow{D_{T_T}^2 N_T}(t) & \overrightarrow{D_{T_T}^3 N_T}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t) & \overrightarrow{D_{T_T}^2 B_T}(t) & \overrightarrow{D_{T_T}^3 B_T}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_T \\ \mu_T \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (96)$$

burada

$$\lambda_T(t) = -\frac{1}{\sin^2(nt)} \quad (97)$$

ve

$$\mu_T(t) = \frac{3m \cos(nt)}{\sin^2(nt)} \quad (98)$$

şeklindedir.

İspat: (87) ifadesinin türevi alınır

$$\left(\overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t)\right)' = \left(\frac{-\sin t \sin(nt) - n \cos t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, \frac{-\cos t \sin(nt) + n \sin t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, 0\right) \quad (99)$$

olur. $\overrightarrow{D_{T_T}^2 T_T}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_T}^2 T_T}(t) = \frac{dt}{dt_T} \left(\overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t)\right)' = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t)\right)' \quad (100)$$

şeklinde yazılabilir. (99) ifadesi (100) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_T}^2 T_T}(t) = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\frac{-\sin t \sin(nt) - n \cos t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, \frac{-\cos t \sin(nt) + n \sin t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, 0\right),$$

$$\overrightarrow{D_{T_T}^2 T_T}(t) = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(-\frac{\sin t}{\sin(nt)} - \frac{n \cos t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, -\frac{\cos t}{\sin(nt)} + \frac{n \sin t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, 0\right),$$

$$\overrightarrow{D_{T_T}^2 T_T}(t) = \left(-\frac{m \sin t}{n \sin^2(nt)} - \frac{m \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)}, -\frac{m \cos t}{n \sin^2(nt)} + \frac{n \sin t \cos(nt)}{\sin^3(nt)}, 0\right) \quad (101)$$

elde edilir. (101) ifadesinin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{D^2_{T_t} T_T}(t)\right)' &= \left(\frac{-mn \cos t \sin^2(nt) + 2mn^2 \sin t \sin(nt) \cos(nt)}{n^2 \sin^4(nt)} \right. \\
&\quad - \left(\frac{\sin^3(nt) (-m \sin t \cos(nt) - mn \cos t \sin(nt)) - 3mn \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) \cos(nt)}{\sin^6(nt)} \right), \\
&\quad + \frac{mn \sin t \sin^2(nt) + 2mn^2 \cos t \sin(nt) \cos(nt)}{n^2 \sin^4(nt)} \\
&\quad \left. + \frac{\sin^3(nt) (m \cos t \cos(nt) - mn \sin t \sin(nt)) + 3mn \sin t \cos(nt) \sin^2(nt) \cos(nt)}{\sin^6(nt)}, 0 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{D^2_{T_t} T_T}(t)\right)' &= \left(-\frac{m \cos t}{n \sin^2 nt} + \frac{2m \sin t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} + \frac{m \sin t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} + \frac{mn \cos t}{\sin^2(nt)} \right. \\
&\quad + \frac{3mn \cos t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, \frac{m \sin t}{n \sin^2 nt} + \frac{2m \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} + \frac{m \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} - \frac{mn \sin t}{\sin^2(nt)} \\
&\quad \left. + \frac{3mn \sin t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, 0 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{D^2_{T_t} T_T}(t)\right)' &= \left(-\frac{m \cos t}{n \sin^2 nt} + \frac{3m \sin t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} + \frac{mn \cos t}{\sin^2(nt)} + \frac{3mn \cos t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, \right. \\
&\quad \left. + \frac{m \sin t}{n \sin^2 nt} + \frac{3m \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} - \frac{mn \sin t}{\sin^2(nt)} + \frac{3mn \sin t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, 0 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{D^2_{T_t} T_T}(t)\right)' &= \left(+\frac{n \cos t}{m \sin^2(nt)} + \frac{3m \sin t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} + \frac{3mn \cos t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, \right. \\
&\quad \left. -\frac{n \cos t}{m \sin^2(nt)} + \frac{3m \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} + \frac{3mn \sin t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, 0 \right)
\end{aligned} \tag{102}$$

elde edilir. $\overrightarrow{D^3_{T_t} T_T}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_T} T_T}(t) = \frac{dt}{dt_T} \left(\overrightarrow{D^2_{T_T} T_T}(t) \right)' = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\overrightarrow{D^2_{T_T} T_T}(t) \right)' \quad (103)$$

şeklinde yazılabilir. (102) ifadesi (103) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^3_{T_T} T_T}(t) = \left(+\frac{\cos t}{\sin^3(nt)} + \frac{3m^2 \sin t \cos(nt)}{n \sin^4(nt)} + \frac{3m^2 \cos t \cos^2(nt)}{\sin^5(nt)}, \right. \\ \left. -\frac{\sin t}{\sin^3(nt)} + \frac{3m^2 \cos t \cos(nt)}{n \sin^4(nt)} + \frac{3m^2 \sin t \cos^2(nt)}{\sin^5(nt)}, 0 \right) \quad (104)$$

elde edilir. (96) ifadesinden

$$\lambda_T(t) \overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) + \mu_T(t) \overrightarrow{D^2_{T_T} T_T}(t) + \overrightarrow{D^3_{T_T} T_T}(t) = \vec{0} \quad (105)$$

yazılır. (87), (101) ve (104) ifadeleri (105) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$\lambda_T(t) \frac{\cos t}{\sin(nt)} - \mu_T(t) \left(\frac{m \sin t}{n \sin^2(nt)} + \frac{m \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} \right) + \frac{\cos t}{\sin^3(nt)} \\ + \frac{3m^2 \sin t \cos(nt)}{n \sin^4(nt)} + \frac{3m^2 \cos t \cos^2(nt)}{\sin^5(nt)} = 0 \quad (106)$$

elde edilir. (106) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_T(t) = -\frac{1}{\sin^2(nt)} \quad \text{ve} \quad \mu_T(t) = \frac{3m \cos(nt)}{\sin^2(nt)}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (90) ifadesinin türevi

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D_{T_r} N_T}(t) \right)' = & \left(\frac{-mn \cos t \sin(nt) + mn^2 \sin t \cos(nt)}{n^2 \sin^2(nt)}, \right. \\ & \left. + \frac{mn \sin t \sin(nt) + mn^2 \cos t \cos(nt)}{n^2 \sin^2(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (107)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{D_{T_r}^2 N_T}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_r}^2 N_T}(t) = \frac{dt}{dt_{T_r}} \left(\overrightarrow{D_{T_r} N_T}(t) \right)' = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\overrightarrow{D_{T_r} N_T}(t) \right)' \quad (108)$$

şeklinde yazılabilir. (107) ifadesi (108) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_{T_r}^2 N_T}(t) = & \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\frac{-mn \cos t \sin(nt) + mn^2 \sin t \cos(nt)}{n^2 \sin^2(nt)}, \right. \\ & \left. \frac{mn \sin t \sin(nt) + mn^2 \cos t \cos(nt)}{n^2 \sin^2(nt)}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{D_{T_r}^2 N_T}(t) = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(-\frac{m \cos t}{n \sin(nt)} + \frac{m \sin t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, \frac{m \sin t}{n \sin(nt)} + \frac{m \cos t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D_{T_r}^2 N_T}(t) = \left(-\frac{m^2 \cos t}{n^2 \sin^2(nt)} + \frac{m^2 \sin t \cos(nt)}{n \sin^3(nt)}, \frac{m^2 \sin t}{n^2 \sin^2(nt)} + \frac{m^2 \cos t \cos(nt)}{n \sin^3(nt)}, 0 \right) \quad (109)$$

elde edilir. (109) ifadesinin türevi

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D_{T_r}^2 N_T}(t) \right)' = & \left(-\frac{(m^2 n^2 - m^2) \sin t \sin^2(nt) - 3m^2 n \cos t \cos(nt) \sin(nt)}{n^2 \sin^4(nt)} \right. \\ & \frac{+3m^2 n^2 \sin t \cos^2(nt)}{n^2 \sin^4(nt)}, -\frac{(m^2 n^2 - m^2) \cos t \sin^2(nt) + 3m^2 n \sin t \cos(nt) \sin(nt)}{n^2 \sin^4(nt)} \\ & \left. -\frac{3m^2 n^2 \cos t \cos^2(nt)}{n^2 \sin^4(nt)}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D^2_{T_T} N_T(t)} \right)' = & \left(-\frac{\sin t}{\sin^2 nt} + \frac{3m^2 \cos t \cos(nt)}{n \sin^3(nt)} - \frac{3m^2 \sin t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, \right. \\ & \left. -\frac{\cos t}{\sin^2 nt} - \frac{3m^2 \sin t \cos(nt)}{n \sin^3(nt)} - \frac{3m^2 \cos t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (110)$$

elde edilir. $\overrightarrow{D^3_{T_T} N_T(t)}$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_T} N_T(t)} = \frac{dt}{dt_T} \left(\overrightarrow{D^2_{T_T} N_T(t)} \right)' = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\overrightarrow{D^2_{T_T} N_T(t)} \right)' \quad (111)$$

şeklinde yazılabilir. (110) ifadesi (111) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D^3_{T_T} N_T(t)} = & \left(-\frac{m \sin t}{n \sin^3(nt)} + \frac{3m^3 \cos t \cos(nt)}{n^2 \sin^4(nt)} - \frac{3m^3 \sin t \cos^2(nt)}{n \sin^5(nt)}, \right. \\ & \left. -\frac{m \cos t}{n \sin^3(nt)} - \frac{3m^3 \sin t \cos(nt)}{n^2 \sin^4(nt)} - \frac{3m^3 \cos t \cos^2(nt)}{n \sin^5(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (112)$$

elde edilir. (96) ifadesinden

$$\lambda_T(t) \overrightarrow{D_{T_T} N_T(t)} + \mu_T(t) \overrightarrow{D^2_{T_T} N_T(t)} + \overrightarrow{D^3_{T_T} N_T(t)} = \vec{0} \quad (113)$$

yazılır. (90), (109) ve (112) ifadeleri (113) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$\begin{aligned} -\lambda_T(t) \frac{m \sin t}{n \sin(nt)} - \mu_T(t) \frac{m^2 \cos t}{n^2 \sin^2(nt)} + \mu_T(t) \frac{m^2 \sin t \cos(nt)}{n \sin^3(nt)} - \frac{m \sin t}{n \sin^3(nt)} \\ + \frac{3m^3 \cos t \cos(nt)}{n^2 \sin^4(nt)} - \frac{3m^3 \sin t \cos^2(nt)}{n \sin^5(nt)} = 0 \end{aligned} \quad (114)$$

elde edilir. (114) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_T(t) = -\frac{1}{\sin^2(nt)} \quad \text{ve} \quad \mu_T(t) = \frac{3m \cos(nt)}{\sin^2(nt)}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (93) ifadesinin türevi alınırsa

$$\left(\overrightarrow{D_{T_r} B_T}(t)\right)' = \left(\frac{-m \sin t \sin(nt) - mn \cos t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, \frac{-m \cos t \sin(nt) - mn \sin t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, 0 \right) \quad (115)$$

olur. $\overrightarrow{D_{T_r}^2 B_T}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_r}^2 B_T}(t) = \frac{dt}{dt_{T_r}} \left(\overrightarrow{D_{T_r} B_T}(t)\right)' = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\overrightarrow{D_{T_r} B_T}(t)\right)' \quad (116)$$

şeklinde yazılabilir. (115) ifadesi (116) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_r}^2 B_T}(t) = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\frac{-m \sin t \sin(nt) - mn \cos t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, \frac{-m \cos t \sin(nt) - mn \sin t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D_{T_r}^2 B_T}(t) = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(-\frac{m \sin t}{\sin(nt)} - \frac{mn \cos t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, -\frac{m \cos t}{\sin(nt)} - \frac{mn \sin t \cos(nt)}{\sin^2(nt)}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D_{T_r}^2 B_T}(t) = \left(-\frac{m^2 \sin t}{n \sin^2(nt)} - \frac{m^2 \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)}, -\frac{m^2 \cos t}{n \sin^2(nt)} + \frac{m^2 \sin t \cos(nt)}{\sin^3(nt)}, 0 \right) \quad (117)$$

elde edilir. (117) ifadesinin türevi

$$\left(\overrightarrow{D_{T_r}^2 B_T}(t)\right)' = \left(\frac{n \cos t}{\sin^3(nt)} - \frac{3m^2 \sin t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} - \frac{3m^2 n \cos t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, -\frac{n \sin t}{\sin^2 nt} + \frac{3m^2 \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} - \frac{3m^2 n \sin t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, 0 \right) \quad (118)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{D^3_{T_T} B_T}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_T} B_T}(t) = \frac{dt}{dt_T} \left(\overrightarrow{D^2_{T_T} B_T}(t) \right)' = \frac{m}{n \sin(nt)} \left(\overrightarrow{D^2_{T_T} B_T}(t) \right)' \quad (119)$$

şeklinde yazılabilir. (118) ifadesi (119) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D^3_{T_T} B_T}'(t) = \frac{m}{n \sin(nt)} & \left(\frac{n \cos t}{\sin^3(nt)} - \frac{3m^2 \sin t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} - \frac{3m^2 n \cos t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)} \right. \\ & \left. - \frac{n \sin t}{\sin^2(nt)} + \frac{3m^2 \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} - \frac{3m^2 n \sin t \cos^2(nt)}{\sin^4(nt)}, 0 \right), \\ \overrightarrow{D^3_{T_T} B_T}(t) = & \left(\frac{m \cos t}{\sin^4(nt)} + \frac{3m^3 \sin t \cos(nt)}{n \sin^4(nt)} - \frac{3m^3 \cos t \cos^2(nt)}{n \sin^5(nt)} \right. \\ & \left. - \frac{m \sin t}{\sin^3(nt)} + \frac{3m^3 \cos t \cos(nt)}{n \sin^4(nt)} - \frac{3m^3 \sin t \cos^2(nt)}{\sin^5(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (120)$$

olarak bulunur. (96) ifadesinden

$$\lambda_T(t) \overrightarrow{D_{T_T} B_T}(t) + \mu_T(t) \overrightarrow{D^2_{T_T} B_T}(t) + \overrightarrow{D^3_{T_T} B_T}(t) = \vec{0} \quad (121)$$

şeklindedir. (93), (117) ve (120) ifadeleri (121) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \lambda_T(t) \frac{m \cos t}{\sin(nt)} - \mu_T(t) \frac{m^2 \sin t}{n \sin^2(nt)} - \mu_T(t) \frac{m^2 \cos t \cos(nt)}{\sin^3(nt)} - \frac{m \cos t}{\sin^4(nt)} \\ + \frac{3m^3 \sin t \cos(nt)}{n \sin^4(nt)} - \frac{3m^3 \cos t \cos^2(nt)}{n \sin^5(nt)} = 0 \end{aligned} \quad (122)$$

elde edilir. (126) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_T(t) = -\frac{1}{\sin^2(nt)} \quad \text{ve} \quad \mu_T(t) = \frac{3m \cos(nt)}{\sin^2(nt)}$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (106), (114) ve (122) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.5. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin Darboux vektörü $\overrightarrow{F_T}(t)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{F_T}(t) = (0, 0, 1) \quad \text{tl.} \quad (123)$$

İspat: (69) ifadesindeki $\overrightarrow{N_T}(t)$ vektörünün t ye göre türev alınır

$$\overrightarrow{N_T}'(t) = (-\sin t, -\cos t, 0) \quad (124)$$

elde edilir. (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin Darboux vektörü

$$\overrightarrow{F_T}(t) = -\overrightarrow{N_T}(t) \wedge \overrightarrow{N_T}'(t) \quad (125)$$

şeklindedir. (69) ve (124) ifadeleri (125) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{F_T}(t) = (0, 0, 1) \quad (126)$$

olur. Diğer yandan (12) ifadesinden

$$\overrightarrow{F_T}(t) = v_T(t) \left(\tau_T(t) \overrightarrow{T_T}(t) - \kappa_T(t) \overrightarrow{B_T}(t) \right) \quad (127)$$

şekindedir. (127) ifadesinde (69), (71) ve (78) ifadeleri yerine yazılırsa yine

$$\overrightarrow{F_T}(t) = \frac{n}{m} \sin(nt) \left[\frac{m}{\sin(nt)} \left(\frac{n}{m} \sin t, \frac{n}{m} \cos t, n \right) - \frac{1}{\sin(nt)} \left(n \sin t, n \cos t, \frac{n}{m} \right) \right],$$

$$\overrightarrow{F_T}(t) = (0, 0, 1)$$

elde edilir.

Teorem 4.3.6. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin Darboux ani dönme vektörü yönündeki birim vektör

$$\overrightarrow{C_T}(t) = (0, 0, 1). \quad (128)$$

İspat: (126) ifadesinin normu alınır

$$\|\overrightarrow{F_T}(t)\| = 1 \quad (129)$$

elde edilir. $\overrightarrow{C_T}(t) = \frac{\overrightarrow{F_T}(t)}{\|\overrightarrow{F_T}(t)\|}$ ifadesinde (126) ve (129) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\overrightarrow{C_T}(t) = (0, 0, 1) \quad (130)$$

elde edilir.

Teorem 4.3.7. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin $\overrightarrow{T_T}(t)$ ve $\overrightarrow{F_T}(t)$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı φ_T olmak üzere

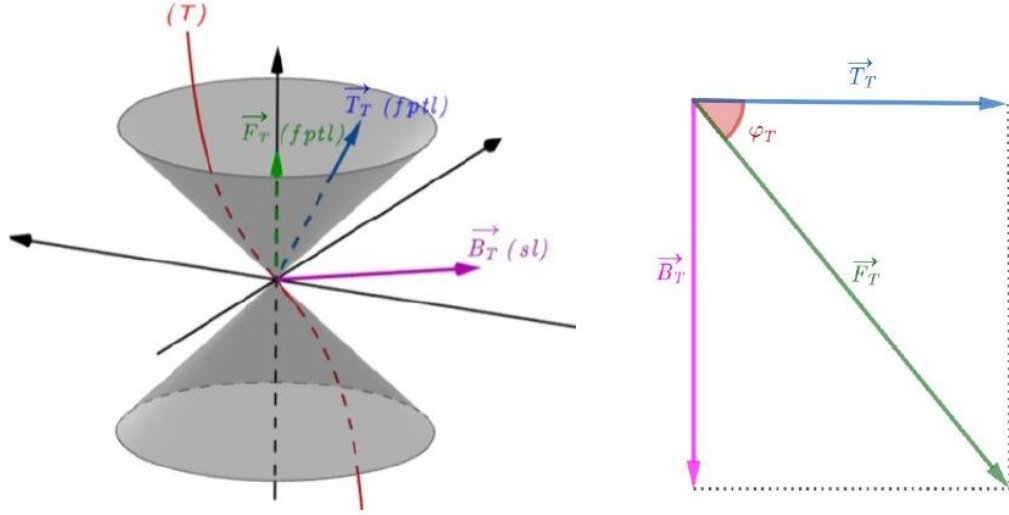
$$\varphi_T = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m+1}{m-1}\right), \quad (131)$$

dir, (Şekil 29)

İspat: (3) ifadesinde (69) ile (126) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\langle \overrightarrow{F_T}(t), \overrightarrow{T_T}(t) \rangle = -\cosh \varphi_T \quad (132)$$

elde edilir. Diğer yandan (12) ifadesinin her iki tarafı $\overrightarrow{T_T}(t)$ ile Lorentzian iç çarpılıp, gerekli işlemler yapılırsa yine (132) ifadesi elde edilir. Ayrıca (1) ifadesinde (69) ve (126) ifadeleri yerine yazılırsa



Şekil 29. (T) teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ de $\vec{F}_T(t)$ Darboux vektörü

$$\cosh \varphi_T = n \quad (133)$$

elde edilir. Diğer yandan (7) ifadesinde (69) ile (126) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\left| \langle \vec{F}_T(t), \vec{B}_T(t) \rangle \right| = \sinh \varphi_T = \frac{n}{m} \quad (134)$$

elde edilir. (133) ve (134) eşitliklerinden

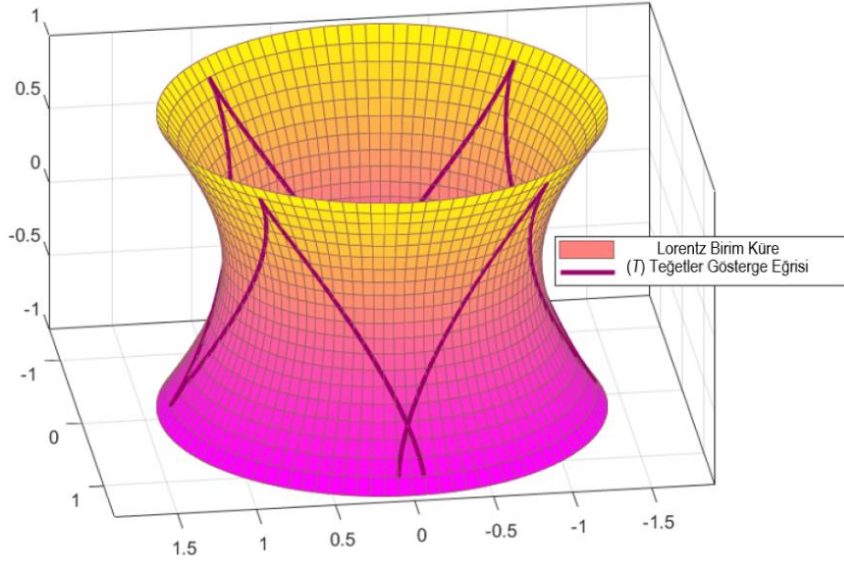
$$\varphi_T = \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{m} \right)$$

elde edilir. $\cosh \varphi_T + \sinh \varphi_T = e^{\varphi_T}$ eşitliği kullanılırsa

$$\varphi_T = \ln \left(\frac{n(m+1)}{m} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m+1}{m-1} \right) \quad (135)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.8. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir helis oluşturur ve bu helisin eksenini $\vec{C}_T(t)$ vektörüdür, (Şekil 30).



Şekil 30. $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde (T) timelike teğetler gösterge eğrisi

İspat: Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin $\overrightarrow{T}_T(t)$ teğet vektörü ve sabit bir $\overrightarrow{U}_T(t)$ doğrultusu arasındaki açı θ_T olsun. (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin (78) ifadesinden eğrilikler oranı

$$\frac{\tau_T(t)}{\kappa_T(t)} = \coth \theta_T \quad (136)$$

dır. (133) ve (134) eşitliklerinden (136) ifadesi

$$\coth \theta_T = m \text{ (sabit)} \quad (137)$$

olur. (137) ifadesinde θ_T açısı sabit elde edildiğinden (T) timelike teğetler gösterge eğrisi bir helistir ve eksenini $\overrightarrow{U}_T(t)$ dir. Burada $\overrightarrow{U}_T(t)$ vektörü birim timelike vektör olarak kabul edilirse, (3) ifadesinden

$$\langle \overrightarrow{T}_T(t), \overrightarrow{U}_T(t) \rangle = -\cosh \theta_T = -n \quad (138)$$

olur. Benzer şekilde (7) ifadesinden

$$\langle \overrightarrow{B}_T(t), \overrightarrow{U}_T(t) \rangle = \sinh \theta_T = \frac{n}{m} \quad (139)$$

elde edilir. Ayrıca $\overrightarrow{U}_T(t)$ vektörü Frenet vektörlerinin lineer bileşimi olarak

$$\overrightarrow{U}_T(t) = a\overrightarrow{T}_T(t) + b\overrightarrow{N}_T(t) + c\overrightarrow{B}_T(t) \quad (140)$$

şeklinde yazılabilir, burada $a, b, c \in \mathbb{R}$. (140) ifadesinin her iki yanı sırasıyla $\overrightarrow{T}_T(t)$, $\overrightarrow{N}_T(t)$ ve $\overrightarrow{B}_T(t)$ vektörleriyle iç çarpılırsa

$$\begin{cases} a = \cosh \theta_T = n, \\ b = 0, \\ c = -\sinh \theta_T = -\frac{n}{m} \end{cases} \quad (141)$$

bulunur. (141) ifadesi ile (133) ve (134) ifadelerinin eşitliğinden

$$\theta_T = \varphi_T \quad (142)$$

olduğu görülür. (69) ve (141) ifadeleri (140) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{U}_T(t) = \cosh \theta_T \overrightarrow{T}_T(t) - \sinh \theta_T \overrightarrow{B}_T(t) = (0, 0, 1) = \overrightarrow{C}_T(t) \quad (143)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.9. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin yay uzunluğu

$$s_T(t) = -\frac{\cos(nt)}{m}. \quad (144)$$

İspat: $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin $\left[-\frac{\pi}{2n}, t\right]$ aralığındaki yay uzunluğu (45) ifadesine göre

$$s_T(t) = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t \|\vec{T}'(t)\| dt = \frac{n}{m} \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t \sin(nt) dt = -\frac{\cos(nt)}{m} \quad (145)$$

olur. Gerçekten (145) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$t = \frac{\arccos(-ms_T)}{n} \quad (146)$$

bulunur. (146) ifadesi timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin denklemi olan

$$\vec{T}(t) = \left(\cos t \sin(nt) - n \sin t \cos(nt), -\sin t \sin(nt) - n \cos t \cos(nt), -\frac{n}{m} \cos(nt) \right)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa bu eğri birim hızlı bir eğri olur, yani $\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{ds_T} \right\| = 1$.

Teorem 4.3.10. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ te ve $\mathbb{S}_1^2$ deki geodezik eğrilikleri sırasıyla $k_T(t)$ ve $\gamma_T(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} k_T(t) = \frac{1}{\sin(nt)} \\ \gamma_T(t) = \cot(nt) \end{cases} \quad (147)$$

İspat: Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği $k_T(t)$, (46) ifadesinden

$$k_T(t) = \left\| \overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t), \overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) \right\rangle} \quad (148)$$

şeklindedir. (87) ifadesi (148) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_T(t) = \frac{1}{|\sin(nt)|} \quad (149)$$

olur. Diğer yandan (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ teki geodezik eğriliği $\gamma_T(t)$, (47) ifadesinden

$$\gamma_T(t) = \left\| \overrightarrow{\overline{D_{T_T} T_T}}(t) \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_T} T_T}}(t), \overrightarrow{\overline{D_{T_T} T_T}}(t) \right\rangle} \quad (150)$$

şeklinde yazılır. (48) ifadesinden

$$\overrightarrow{D_{T_T} T_T}(t) = \overrightarrow{\overline{D_{T_T} T_T}}(t) + \varepsilon \left\langle S(\overrightarrow{T_T}(t)), \overrightarrow{T_T}(t) \right\rangle \overrightarrow{T_T}(t) \quad (151)$$

dir. Burada

$$\varepsilon = \left\langle \overrightarrow{T_T}(t), \overrightarrow{T_T}(t) \right\rangle = 1. \quad (152)$$

Ayrıca

$$S(\overrightarrow{T_T}(t)) = -\overrightarrow{\overline{D_{T_T} T_T}}(t) = -\overrightarrow{T_T}(t) \quad (153)$$

olur. (153) ifadesinden

$$\left\langle S(\overrightarrow{T_T}(t)), \overrightarrow{T_T}(t) \right\rangle = \left\langle -\overrightarrow{T_T}(t), \overrightarrow{T_T}(t) \right\rangle = 1 \quad (154)$$

elde edilir. (152) ve (154) ifadeleri (151) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t) = \overrightarrow{D_{T_r} T_T}(t) - \vec{T}(t) \quad (155)$$

olur. (54) ve (87) ifadeleri (155) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t) = & \left(\frac{\cos t}{\sin(nt)}, -\frac{\sin t}{\sin(nt)}, 0 \right) - \left(\cos t \sin(nt) - n \sin t \cos(nt), \right. \\ & \left. -\sin t \sin(nt) - n \cos t \cos(nt), -\frac{n}{m} \cos(nt) \right), \\ \overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t) = & \left(\frac{\cos t (1 - \sin^2(nt)) + n \sin t \cos(nt) \sin(nt)}{\sin(nt)}, -\frac{\sin t (1 - \sin^2(nt))}{\sin(nt)} \right. \\ & \left. -\frac{n \cos t \cos(nt) \sin(nt)}{\sin(nt)}, -\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \end{aligned} \quad (156)$$

olarak bulunur. (156) ifadesi kendisiyle iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t), \overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t) \right\rangle = & \frac{\cos^2 t \cos^4(nt) + 2n \cos t \cos^3(nt) \sin t \sin(nt)}{\sin^2(nt)} \\ & + \frac{n^2 \sin^2 t \cos^2 t \sin^2(nt) + \sin^2(nt) \cos^4(nt) - 2n \sin t \cos^3(nt) \cos t \sin(nt)}{\sin^2(nt)} \\ & + \frac{n^2 \sin^2 t \cos^2 t \sin^2(nt)}{\sin^2(nt)} - \frac{n^2 \cos^2(nt)}{m^2}, \\ \left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t), \overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t) \right\rangle = & \frac{\cos^4(nt)}{\sin^2(nt)} + n^2 \cos^2(nt) - \frac{n^2 \cos^2(nt)}{m^2}, \\ \left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t), \overrightarrow{\overline{D_{T_r} T_T}}(t) \right\rangle = & \frac{\cos^2(nt)}{\sin^2(nt)} \end{aligned} \quad (157)$$

elde edilir. (157) ifadesi (150) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\gamma_T(t) = |\cot(nt)| \quad (158)$$

olur. (149) ve (158) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.11. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin geometrik elemanları Tablo 1’deki gibidir.

4.4. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin

(N) Spacelike Normaller Göstergesi

Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin timelike normal vektörü $\vec{N}(t)$ ve (N) spacelike normaller gösterge eğrisi olmak üzere spacelike (N) eğrisinin Frenet vektörleri $\{\vec{T}_N(t), \vec{N}_N(t), \vec{B}_N(t)\}$, eğriliği $\kappa_N(t)$ ve burulması (torsiyonu) $\tau_N(t)$ olsun.

Teorem 4.4.1. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{cases} \vec{T}_N(t) = (\cos t, -\sin t, 0) \text{ sl} , \\ \vec{N}_N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0) \text{ sl} , \\ \vec{B}_N(t) = (0, 0, -1) \text{ tl} \end{cases} \quad (159)$$

şeklindedir.

İspat: (54) ifadesindeki $\vec{N}(t)$ ifadesinin türevi alınır

$$\vec{N}'(t) = \left(\frac{n}{m} \cos t, -\frac{n}{m} \sin t, 0 \right) \quad (160)$$

elde edilir. (160) ifadesinin normu alınır

$$\|\vec{N}'(t)\| = \nu_N(t) = \sqrt{\langle \vec{N}'(t), \vec{N}'(t) \rangle},$$

$$\|\vec{N}'(t)\| = \sqrt{\left| \frac{n^2}{m^2} \cos^2 t + \frac{n^2}{m^2} \sin^2 t \right|},$$

$$\|\vec{N}'(t)\| = \frac{n}{m} \quad (161)$$

bulunur. (160) ve (161) ifadeleri (32) ifadesinde yerine yazılırsa (N) spacelike eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}_N(t)$

$$\vec{T}_N(t) = (\cos t, -\sin t, 0) \quad (162)$$

(54) ifadesindeki $\vec{N}(t)$ vektörünün ikinci türevi alınırsa

$$\vec{N}''(t) = \left(-\frac{n}{m} \sin t, -\frac{n}{m} \cos t, 0 \right) \quad (163)$$

olur. (160) ve (163) ifadelerine (2) ifadesindeki vektörel çarpım işlemi uygulanırsa

$$\vec{N}'(t) \wedge \vec{N}''(t) = \left(0, 0, -\frac{n^2}{m^2} \right) \quad (164)$$

elde edilir. (164) ifadesinin normu alınırsa

$$\|\vec{N}'(t) \wedge \vec{N}''(t)\| = \sqrt{\left| -\frac{n^2}{m^2} \right|},$$

$$\|\vec{N}'(t) \wedge \vec{N}''(t)\| = \frac{n^2}{m^2} \quad (165)$$

bulunur. (164) ve (165) ifadeleri (32) ifadesinde yerine yazılırsa (N) spacelike eğrisinin birim binormal vektörü $\vec{B}_N(t)$

$$\overrightarrow{B_N}(t) = (0, 0, -1) \quad (166)$$

elde edilir. (162) ve (166) ifadeleri (32) ifadesinde yerine yazılırsa (N) spacelike eğrisinin birim normal vektörü $\overrightarrow{N_N}(t)$

$$\overrightarrow{N_N}(t) = (-\sin t, -\cos t, 0) \quad (167)$$

elde edilir. (162), (166) ve (167) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.2. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin eğriliği ve burulması sırasıyla

$$\begin{cases} \kappa_N(t) = \frac{m}{n} , \\ \tau_N(t) = 0 . \end{cases} \quad (168)$$

İspat: (33) ifadesinden timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin eğriliği

$$\kappa_N(t) = \frac{\|\overrightarrow{N'}(t) \wedge \overrightarrow{N''}(t)\|}{\|\overrightarrow{N'}(t)\|^3} \quad (169)$$

şeklindedir. (161) ve (165) ifadeleri (169) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\kappa_N(t) = \frac{m}{n} \quad (170)$$

elde edilir. Diğer taraftan (163) ifadesinin türevi alınırsa

$$\overrightarrow{N'''}(t) = \left(-\frac{n}{m} \cos t, \frac{n}{m} \sin t, 0 \right) \quad (171)$$

olur. (164) ile (171) ifadeleri skaler (iç) çarpılırsa,

$$\langle \overrightarrow{N'}(t) \wedge \overrightarrow{N''}(t), \overrightarrow{N'''}(t) \rangle = \left\langle \left(0, 0, -\frac{n^2}{m^2} \right), \left(-\frac{n}{m} \cos t, \frac{n}{m} \sin t, 0 \right) \right\rangle,$$

$$\langle \overrightarrow{N'}(t) \wedge \overrightarrow{N''}(t), \overrightarrow{N'''}(t) \rangle = 0 \quad (172)$$

elde edilir. (33) ifadesinden timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_N(t) = \frac{\langle \overrightarrow{N'}(t) \wedge \overrightarrow{N''}(t), \overrightarrow{N'''}(t) \rangle}{\|\overrightarrow{N'}(t) \wedge \overrightarrow{N''}(t)\|^2} \quad (173)$$

şeklindedir. (165) ve (172) ifadeleri (173) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\tau_N(t) = 0 \quad (174)$$

olarak bulunur. (170) ve (174) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.3. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) = \left(-\frac{m \sin t}{n}, -\frac{m \cos t}{n}, 0 \right) \text{ sl}, \\ \overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) = \left(-\frac{m \cos t}{n}, \frac{m \sin t}{n}, 0 \right) \text{ sl}, \\ \overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) = (0, 0, 0) \text{ sl}. \end{cases} \quad (175)$$

İspat: (43) ifadesine göre timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_N(t) & 0 \\ -\kappa_N(t) & 0 & \tau_N(t) \\ 0 & \tau_N(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T_N}(t) \\ \overrightarrow{N_N}(t) \\ \overrightarrow{B_N}(t) \end{bmatrix} \quad (176)$$

şeklindedir. (167) ve (170) ifadeleri (176) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) = \left(-\frac{m \sin t}{n}, -\frac{m \cos t}{n}, 0 \right) \quad (177)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) = \frac{d\overrightarrow{T_N}(t)}{dt_N} = \frac{d\overrightarrow{T_N}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_N} = \frac{\overrightarrow{T_N}'(t)}{v_N(t)} \quad (178)$$

şeklinde yazılabilir. (162) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{T_N}'(t) = (-\sin t, -\cos t, 0) \quad (179)$$

olarak bulunur. (161) ve (179) ifadeleri (178) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) = \left(-\frac{m \sin t}{n}, -\frac{m \cos t}{n}, 0 \right)$$

olarak bulunur. (162), (166), (170) ve (174) ifadeleri (176) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) = \left(-\frac{m \cos t}{n}, \frac{m \sin t}{n}, 0 \right) \quad (180)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) = \frac{d \overrightarrow{N_N}(t)}{dt_N} = \frac{d \overrightarrow{N_N}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_N} = \frac{\overrightarrow{N_N}'(t)}{v_N(t)} \quad (181)$$

şeklinde yazılabilir. (167) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{N_N}'(t) = (-\cos t, \sin t, 0) \quad (182)$$

olarak bulunur. (161) ve (182) ifadeleri (181) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) = \left(-\frac{m \cos t}{n}, \frac{m \sin t}{n}, 0 \right)$$

elde edilir. Son olarak (167) ve (174) ifadeleri (176) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) = (0, 0, 0) \quad (183)$$

olur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) = \frac{d \overrightarrow{B_N}(t)}{dt_N} = \frac{d \overrightarrow{B_N}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_N} = \frac{\overrightarrow{B_N}'(t)}{v_N(t)} \quad (184)$$

şeklinde yazılabilir. (166) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{B_N}'(t) = (0, 0, 0) \quad (185)$$

olarak bulunur. (161) ve (185) ifadeleri (184) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) = (0, 0, 0)$$

olarak bulunur. (177), (180) ve (183) ifadeleri göz önüne alınır ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.4. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin Frenet vektörleri için aşağıdaki gibi denklem vardır,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) & \overrightarrow{D_{T_N}^2 T_N}(t) & \overrightarrow{D_{T_N}^3 T_N}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) & \overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t) & \overrightarrow{D_{T_N}^3 N_N}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) & \overrightarrow{D_{T_N}^2 B_N}(t) & \overrightarrow{D_{T_N}^3 B_N}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_N \\ \mu_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (186)$$

burada

$$\lambda_N(t) = \frac{m^2}{n^2} \quad (187)$$

ve

$$\mu_N(t) = 0 \quad (188)$$

şeklindedir.

İspat: (177) ifadesinin türevi alınır

$$\left(\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) \right)' = \left(-\frac{m \cos t}{n}, \frac{m \sin t}{n}, 0 \right) \quad (189)$$

olur. $\overrightarrow{D_{T_N}^2 T_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_N}^2 T_N}(t) = \frac{dt}{dt_N} \left(\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) \right)' = \frac{m}{n} \left(\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) \right)' \quad (190)$$

şeklinde yazılabilir. (189) ifadesi (190) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N}^2 T_N}(t) = \frac{m}{n} \left(-\frac{m \cos t}{n}, \frac{m \sin t}{n}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D^2_{T_N} T_N}(t) = \left(-\frac{m^2 \cos t}{n^2}, \frac{m^2 \sin t}{n^2}, 0 \right) \quad (191)$$

elde edilir. (191) ifadesinin türevi alınır

$$\left(\overrightarrow{D^2_{T_N} T_N}(t) \right)' = \left(\frac{m^2 \sin t}{n^2}, \frac{m^2 \cos t}{n^2}, 0 \right) \quad (192)$$

elde edilir. $\overrightarrow{D^3_{T_N} T_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_N} T_N}(t) = \frac{dt}{dt_N} \left(\overrightarrow{D^2_{T_N} T_N}(t) \right)' = \frac{m}{n} \left(\overrightarrow{D^2_{T_N} T_N}(t) \right)' \quad (193)$$

şeklinde yazılabilir. (192) ifadesi (193) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^3_{T_N} T_N}(t) = \frac{m}{n} \left(\frac{m^2 \sin t}{n^2}, \frac{m^2 \cos t}{n^2}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D^3_{T_N} T_N}(t) = \left(\frac{m^3 \sin t}{n^3}, \frac{m^3 \cos t}{n^3}, 0 \right) \quad (194)$$

elde edilir. (186) ifadesinden

$$\lambda_N(t) \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) + \mu_N(t) \overrightarrow{D^2_{T_N} T_N}(t) + \overrightarrow{D^3_{T_N} T_N}(t) = \vec{0} \quad (195)$$

yazılır. (177), (191) ve (194) ifadeleri (195) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$-\lambda_N(t) \frac{m \sin t}{n} - \mu_N(t) \frac{m^2 \cos t}{n^2} + \frac{m^3 \sin t}{n^3} = 0 \quad (196)$$

elde edilir. (196) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_N(t) = \frac{m^2}{n^2} \text{ ve } \mu_N(t) = 0$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (180) ifadesinin türevi

$$\left(\overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) \right)' = \left(\frac{m \sin t}{n}, \frac{m \cos t}{n}, 0 \right) \quad (197)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t) = \frac{dt}{dt_N} \left(\overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) \right)' = \frac{m}{n} \left(\overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) \right)' \quad (198)$$

şeklinde yazılabilir. (197) ifadesi (198) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t) = \frac{m}{n} \left(\frac{m \sin t}{n}, \frac{m \cos t}{n}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t) = \left(\frac{m^2 \sin t}{n^2}, \frac{m^2 \cos t}{n^2}, 0 \right) \quad (199)$$

elde edilir. (199) ifadesinin türevi

$$\left(\overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t) \right)' = \left(\frac{m^2 \cos t}{n^2}, -\frac{m^2 \sin t}{n^2}, 0 \right) \quad (200)$$

elde edilir. $\overrightarrow{D_{T_N}^3 N_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_N}^3 N_N}(t) = \frac{dt}{dt_N} \left(\overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t) \right)' = \frac{m}{n} \left(\overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t) \right)' \quad (201)$$

şeklinde yazılabilir. (200) ifadesi (201) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_N}^3 N_N}(t) = \frac{m}{n} \left(\frac{m^2 \cos t}{n^2}, -\frac{m^2 \sin t}{n^2}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D_{T_N}^3 N_N}(t) = \left(\frac{m^3 \cos t}{n^3}, -\frac{m^3 \sin t}{n^3}, 0 \right) \quad (202)$$

elde edilir. (186) ifadesinden

$$\lambda_N(t) \overrightarrow{D_{T_N} N_N}(t) + \mu_N(t) \overrightarrow{D_{T_N}^2 N_N}(t) + \overrightarrow{D_{T_N}^3 N_N}(t) = \vec{0} \quad (203)$$

yazılır. (180), (199) ve (202) ifadeleri (203) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$-\lambda_N(t) \frac{m \cos t}{n} + \mu_N(t) \frac{m^2 \sin t}{n^2} + \frac{m^3 \cos t}{n^3} = 0 \quad (204)$$

elde edilir. (204) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_N(t) = \frac{m^2}{n^2} \text{ ve } \mu_N(t) = 0$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (183) ifadesinin türevi alınır

$$\left(\overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) \right)' = (0, 0, 0) \quad (205)$$

olur. $\overrightarrow{D_{T_N}^2 B_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_N}^2 B_N}(t) = \frac{dt}{dt_N} \left(\overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) \right)' = \frac{m}{n} \left(\overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) \right)' \quad (206)$$

şeklinde yazılabilir. (205) ifadesi (206) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^2_{T_N} B_N}(t) = \frac{m}{n}(0, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{D^2_{T_N} B_N}(t) = (0, 0, 0) \quad (207)$$

elde edilir. (207) ifadesinin türevi

$$\left(\overrightarrow{D^2_{T_N} B_N}(t)\right)' = (0, 0, 0) \quad (208)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{D^3_{T_N} B_N}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_N} B_N}(t) = \frac{dt}{dt_N} \left(\overrightarrow{D^2_{T_N} B_N}(t)\right)' = \frac{m}{n} \left(\overrightarrow{D^2_{T_N} B_N}(t)\right)' \quad (209)$$

şeklinde yazılabilir. (208) ifadesi (209) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^3_{T_N} B_N}(t) = \frac{m}{n}(0, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{D^3_{T_N} B_N}(t) = (0, 0, 0) \quad (210)$$

olarak bulunur. (186) ifadesinden

$$\lambda_N(t) \overrightarrow{D_{T_N} B_N}(t) + \mu_N(t) \overrightarrow{D^2_{T_N} B_N}(t) + \overrightarrow{D^3_{T_N} B_N}(t) = \vec{0} \quad (211)$$

şeklindedir. (183), (207) ve (210) ifadeleri (211) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

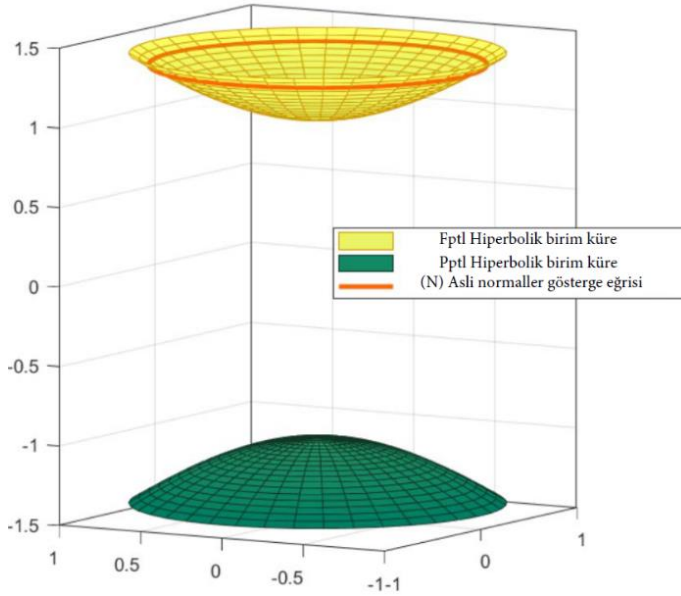
$$\lambda_N(t) \vec{0} + \mu_N(t) \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \quad (212)$$

elde edilir. (212) ifadesi $\lambda_N(t)$ ve $\mu_N(t)$ nin her reel değeri için sağlanır. Bu durumda özel olarak

$$\lambda_N(t) = \frac{m^2}{n^2} \text{ ve } \mu_N(t) = 0$$

seçilmesi genelliği bozmaz. Gerekli işlemler yapılırsa elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (196), (204) ve (212) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.5. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike teğetler gösterge eğrisi $\mathbb{H}_0^{2+}$ üzerinde eğrilik yarıçapı $\frac{n}{m}$ olan bir çemberdir, (Şekil 31).



Şekil 31. $\mathbb{H}_0^{2+}$ üzerinde (N) spacelike normaller gösterge eğrisi

İspat: Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike teğetler gösterge eğrisi $\mathbb{H}_0^{2+}$ üzerinde eğrilik yarıçapı $r = \frac{1}{\kappa_N(t)} = \frac{n}{m}$ olan bir çemberdir.

Teorem 4.4.6. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin Darboux vektörü $\overrightarrow{F_N}(t)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{F_N}(t) = (0, 0, 1) \quad \text{t.l.} \quad (213)$$

İspat: (159) ifadesindeki $\overrightarrow{N_N}(t)$ vektörünün t ye göre türev alınırsa

$$\overrightarrow{N_N}'(t) = (-\cos t, \sin t, 0) \quad (214)$$

elde edilir. (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin Darboux vektörü

$$\overrightarrow{F_N}(t) = -\overrightarrow{N_N}(t) \wedge \overrightarrow{N_N}'(t) \quad (215)$$

şeklindedir. (159) ve (214) ifadeleri yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{F_N}(t) = (0, 0, 1) \quad (216)$$

olur. Diğer yandan (36) ifadesinden

$$\overrightarrow{F_N}(t) = \nu_N(t) (\tau_N(t) \overrightarrow{T_N}(t) - \kappa_N(t) \overrightarrow{B_N}(t)) \quad (217)$$

şeklindedir. (217) ifadesine (159), (161) ve (168) ifadeleri yerine yazılırsa yine

$$\overrightarrow{F_N}(t) = \frac{n}{m} \left(0 - \frac{m}{n} (0, 0, -1) \right),$$

$$\overrightarrow{F_N}(t) = (0, 0, 1)$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.7. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin $\overrightarrow{F_N}(t)$ Darboux vektörünün birim vektörü $\overrightarrow{C_N}(t)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{C_N}(t) = (0, 0, 1). \quad (218)$$

İspat: (216) ifadesinin normu alınır

$$\|\overrightarrow{F_N}(t)\| = 1 \quad (219)$$

elde edilir. $\overrightarrow{C_N}(t) = \frac{\overrightarrow{F_N}(t)}{\|\overrightarrow{F_N}(t)\|}$ ifadesinde (216) ve (218) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\overrightarrow{C_N}(t) = (0, 0, 1) \quad (220)$$

elde edilir.

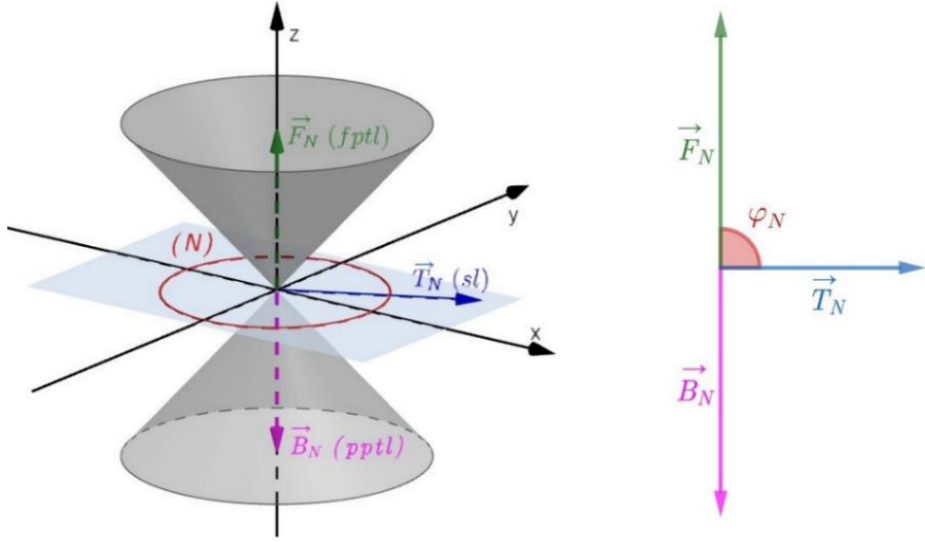
Teorem 4.4.8. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike teğetler gösterge eğrisinin $\overrightarrow{T_N}(t)$ spacelike vektörü ile $\overrightarrow{F_N}(t)$ timelike vektörü arasındaki hiperbolik açı φ_N olmak üzere

$$\varphi_N = 0 \quad (221)$$

dir, (**İspat:** Şekil 32).

İspat: (7) ifadesinde (159) ile (216) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\left| \left\langle \overrightarrow{F_N}(t), \overrightarrow{T_N}(t) \right\rangle \right| = \sinh \varphi_N \quad (222)$$



Şekil 32. (N) normaller gösterge eğrisinin $\mathbb{H}_0^2$ de $\overrightarrow{F_N}(t)$ Darboux vektörü

elde edilir. Diğer yandan (36) ifadesinin her iki tarafı $\overrightarrow{T_N}(t)$ ile Lorentzian iç çarpılıp, gerekli işlemler yapılırsa yine (222) ifadesi elde edilir. Ayrıca (1) ifadesinde (159) ve (216) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\langle \overrightarrow{F_N}(t), \overrightarrow{T_N}(t) \rangle = 0 \quad (223)$$

bulunur. (222) ve (223) ifadelerinin eşitliklerinden

$$\sinh \varphi_N = 0 \quad (224)$$

elde edilir. Diğer yandan (4) ifadesinde (159) ile (216) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\langle \overrightarrow{F_N}(t), \overrightarrow{B_N}(t) \rangle = \cosh \varphi_N \quad (225)$$

elde edilir. Diğer yandan (36) ifadesinin her iki tarafı $\overrightarrow{B_N}(t)$ ile Lorentzian iç çarpılıp, gerekli işlemler yapılırsa yine (222) ifadesi elde edilir. Ayrıca (1) ifadesinde (159) ve (216) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\langle \overrightarrow{F_N}(t), \overrightarrow{B_N}(t) \rangle = 1 \quad (226)$$

elde edilir. (225) ve (226) ifadelerinin eşitliklerinden

$$\cosh \varphi_N = 1 \quad (227)$$

elde edilir. (224) ve (227) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\varphi_N = 0$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.9. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin yay uzunluğu $s_N(t)$ olmak üzere

$$s_N = \frac{nt}{m} + \frac{\pi}{2m} . \quad (228)$$

İspat: $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin $\left[-\frac{\pi}{2n}, t\right]$ aralığındaki yay uzunluğu (45) ifadesine göre

$$s_N = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t \|\overrightarrow{N'}(t)\| dt = \frac{n}{m} \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t dt = \frac{nt}{m} + \frac{\pi}{2m} . \quad (229)$$

olur. Gerçekten (229) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$t = \frac{ms_N}{n} - \frac{\pi}{2m} \quad (230)$$

bulunur. (230) ifadesi timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin denklemi olan

$$\vec{N}(t) = \frac{n}{m}(\sin t, \cos t, m)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa bu eğri birim hızlı bir eğri olur, yani $\left\| \frac{d\vec{N}(t)}{ds_N} \right\| = 1$.

Teorem 4.4.10. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ te ve $\mathbb{H}_0^2$ deki geodezik eğrilikleri sırasıyla $k_N(t)$ ve $\psi_N(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} k_N(t) = \left| \frac{m}{n} \right|, \\ \psi_N(t) = |m|. \end{cases} \quad (231)$$

İspat: Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği $k_T(t)$, (46) ifadesinden

$$k_N(t) = \left\| \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t), \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) \right\rangle} \quad (232)$$

dir. (177) ifadesi (232) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_N(t) = \left| \frac{m}{n} \right| \quad (233)$$

olur. Diğer yandan (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin $\mathbb{H}_0^2$ deki geodezik eğriliği $\psi_N(t)$, (49) ifadesinden

$$\psi_N(t) = \left\| \overrightarrow{\overline{D_{T_N} T_N}}(t) \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_N} T_N}}(t), \overrightarrow{\overline{D_{T_N} T_N}}(t) \right\rangle} \quad (234)$$

şeklinde yazılır. (50) ifadesinden

$$\overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) = \overrightarrow{\overline{\overline{D_{T_N} T_N}}}(t) + \varepsilon \left\langle S(\overrightarrow{T_N}(t)), \overrightarrow{T_N}(t) \right\rangle \overrightarrow{N}(t) \quad (235)$$

dir. Burada

$$\varepsilon = \left\langle \overrightarrow{N}(t), \overrightarrow{N}(t) \right\rangle = -1 \quad (236)$$

Ayrıca

$$S(\overrightarrow{T_N}(t)) = -\overrightarrow{D_{T_N} T}(t) = -\overrightarrow{T_N}(t) \quad (237)$$

olur. (237) ifadesinden

$$\left\langle S(\overrightarrow{T_N}(t)), \overrightarrow{T_N}(t) \right\rangle = \left\langle -\overrightarrow{T_N}(t), \overrightarrow{T_N}(t) \right\rangle = -1 \quad (238)$$

elde edilir. (236) ve (238) ifadeleri (235) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{\overline{\overline{D_{T_N} T_N}}}(t) = \overrightarrow{D_{T_N} T_N}(t) - \overrightarrow{N}(t) \quad (239)$$

olur. (54) ve (177) ifadeleri (239) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{\overline{D_{T_N} T_N}}}(t) &= \left(-\frac{m \sin t}{n}, -\frac{m \cos t}{n}, 0 \right) - \left(\frac{n \sin t}{m}, \frac{n \cos t}{m}, n \right), \\ \overrightarrow{\overline{\overline{D_{T_N} T_N}}}(t) &= \left(-\frac{\sin t (n^2 + m^2)}{nm}, -\frac{\cos t (n^2 + m^2)}{nm}, -n \right) \end{aligned} \quad (240)$$

olarak bulunur. (240) ifadesi kendisiyle iç çarpılırsa

$$\left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_N} T_N}(t)}, \overrightarrow{\overline{D_{T_N} T_N}(t)} \right\rangle = \frac{(n^2 + m^2)^2}{n^2 m^2} - n^2,$$

$$\left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_N} T_N}(t)}, \overrightarrow{\overline{D_{T_N} T_N}(t)} \right\rangle = m^2 \quad (241)$$

elde edilir. (241) ifadesi (234) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\psi_N(t) = |m| \quad (242)$$

olur. (233) ve (242) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.11. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin geometrik elemanları Tablo 2'deki gibidir.

4.5. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin (B)

Timelike Binormeller Göstergesi

Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin spacelike binormal vektörü $\overrightarrow{B}(t)$ ve (B) timelike binormaller gösterge eğrisi olmak üzere timelike (B) eğrisinin Frenet vektörleri $\{\overrightarrow{T_B}(t), \overrightarrow{N_B}(t), \overrightarrow{B_B}(t)\}$, eğriliği $\kappa_B(t)$ ve burulması (torsiyonu) $\tau_B(t)$ olsun.

Teorem 4.5.1. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{cases} \overrightarrow{T_B}(t) = \left(-\frac{n}{m} \sin t, -\frac{n}{m} \cos t, -n \right) \text{ tl} , \\ \overrightarrow{N_B}(t) = (-\cos t, \sin t, 0) \text{ sl} , \\ \overrightarrow{B_B}(t) = \left(n \sin t, n \cos t, \frac{n}{m} \right) \text{ sl} \end{cases} \quad (243)$$

şeklindedir.

İspat: (54) ifadesindeki $\vec{B}(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\vec{B}'(t) = & \left(\sin t \cos(nt) + n \cos t \sin(nt) - n \cos t \sin(nt) - n^2 \sin t \cos(nt), \cos t \cos(nt) \right. \\ & \left. - n \sin t \sin(nt) + n \sin t \sin(nt) - n^2 \cos t \cos(nt), \right. \\ & \left. - \frac{n^2}{m} \cos(nt) \right), \\ \vec{B}'(t) = & \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt), -\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt), -\frac{n^2}{m} \cos(nt) \right)\end{aligned}\quad (244)$$

elde edilir. (244) ifadesinin normu alınırsa

$$\begin{aligned}\|\vec{B}'(t)\| &= v_B(t) = \sqrt{\left\langle \vec{B}'(t), \vec{B}'(t) \right\rangle}, \\ \|\vec{B}'(t)\| &= \sqrt{\frac{n^4}{m^4} \sin^2 t \cos^2(nt) + \frac{n^4}{m^4} \cos^2 t \cos^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} \cos^2(nt)}, \\ \|\vec{B}'(t)\| &= \sqrt{\left| -\frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) \right|}, \\ \|\vec{B}'(t)\| &= \frac{n}{m} \cos(nt)\end{aligned}\quad (245)$$

bulunur. (244) ve (245) ifadeleri (8) ifadesinde yerine yazılırsa (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}_B(t)$

$$\vec{T}_B(t) = \left(-\frac{n}{m} \sin t, -\frac{n}{m} \cos t, -n \right) \quad (246)$$

elde edilir. (54) ifadesindeki $\vec{B}(t)$ vektörünün ikinci türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B''}(t) = & \left(-\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{n^3}{m^2} \sin t \sin(nt), \right. \\ & \left. \frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{n^3}{m^2} \cos t \sin(nt), + \frac{n^3}{m} \sin(nt) \right)\end{aligned}\quad (247)$$

olur. (244) ve (247) ifadelerine (2) ifadesindeki vektörel çarpım işlemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'}(t) \wedge \overrightarrow{B''}(t) = & \left(-\frac{n^4}{m^3} \sin t \cos^2(nt) - \frac{n^5}{m^3} \cos t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{n^5}{m^3} \cos t \sin(nt) \cos(nt), \right. \\ & -\frac{n^5}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{n^4}{m^3} \cos t \cos^2(nt) + \frac{n^5}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt), \\ & -\frac{n^4}{m^4} \sin^2 t \cos^2(nt) - \frac{n^5}{m^4} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) - \frac{n^4}{m^4} \cos^2 t \cos^2(nt) \\ & \left. + \frac{n^5}{m^4} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) \right),\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{B'}(t) \wedge \overrightarrow{B''}(t) = \left(-\frac{n^4}{m^3} \sin t \cos^2(nt), -\frac{n^4}{m^3} \cos t \cos^2(nt), -\frac{n^4}{m^4} \cos^2(nt) \right) \quad (248)$$

elde edilir. (248) ifadesinin normu alınır

$$\|\overrightarrow{B'}(t) \wedge \overrightarrow{B''}(t)\| = \sqrt{\left| \frac{n^8}{m^6} \sin^2 t \cos^4(nt) + \frac{n^8}{m^6} \cos^2 t \cos^4(nt) - \frac{n^8}{m^8} \cos^4(nt) \right|},$$

$$\|\overrightarrow{B'}(t) \wedge \overrightarrow{B''}(t)\| = \sqrt{\left| \frac{n^6}{m^6} \cos^4(nt) \right|},$$

$$\|\overrightarrow{B'}(t) \wedge \overrightarrow{B''}(t)\| = \frac{n^3}{m^3} \cos^2(nt) \quad (249)$$

bulunur. (248) ve (249) ifadeleri (8) ifadesinde yerine yazılırsa (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin birim binormal vektörü $\overrightarrow{B_B}(t)$

$$\overrightarrow{B}_B(t) = \left(n \sin t, n \cos t, \frac{n}{m} \right) \quad (250)$$

elde edilir. (246) ve (250) ifadeleri (8) ifadesinde yerine yazılırsa (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin birim normal vektörü $\overrightarrow{N}_B(t)$

$$\overrightarrow{N}_B(t) = (-\cos t, \sin t, 0) \quad (251)$$

elde edilir. (246), (250) ve (251) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.2. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin eğriliği ve burulması sırasıyla

$$\begin{cases} \kappa_B(t) = \frac{1}{\cos(nt)} , \\ \tau_B(t) = -\frac{m}{\cos(nt)} . \end{cases} \quad (252)$$

İspat: (9) ifadesinden timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin eğriliği

$$\kappa_B(t) = \frac{\|\overrightarrow{B}'(t) \wedge \overrightarrow{B}''(t)\|}{\|\overrightarrow{B}'(t)\|^3} \quad (253)$$

şeklindedir. (245) ve (249) ifadeleri (253) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\kappa_B(t) = \frac{1}{\cos(nt)} \quad (254)$$

elde edilir. Diğer taraftan (247) ifadesinin türevi alınır

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'''}(t) = & \left(\left(\frac{n^2 + n^4}{m^2} \right) \sin t \cos(nt) + \frac{2n^3}{m^2} \cos t \sin(nt), \right. \\ & \left(\frac{n^2 + n^4}{m^2} \right) \cos t \cos(nt) - \frac{2n^3}{m^2} \sin t \sin(nt), \\ & \left. + \frac{n^4}{m} \cos(nt) \right)\end{aligned}\quad (255)$$

olur. (248) ile (255) ifadeleri skaler (iç) çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{B'}(t) \wedge \overrightarrow{B''}(t), \overrightarrow{B'''}(t) \rangle = & \left(\frac{-n^6 - n^8}{m^5} \right) \sin^2 t \cos^3(nt) - \frac{2n^7}{m^5} \sin t \sin(nt) \cos t \cos^2(nt) \\ & \left(\frac{-n^6 - n^8}{m^5} \right) \cos^2 t \cos^3(nt) + \frac{2n^7}{m^5} \sin t \sin(nt) \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^8}{m^5} \cos^3(nt) \\ & - \frac{n^6}{m^5} \cos^3(nt)\end{aligned}\quad (256)$$

elde edilir. (9) ifadesinden timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin eğrisinin (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_B(t) = \frac{\langle \overrightarrow{B'}(t) \wedge \overrightarrow{B''}(t), \overrightarrow{B'''}(t) \rangle}{\|\overrightarrow{B'}(t) \wedge \overrightarrow{B''}(t)\|^2}\quad (257)$$

şeklindedir. (249) ve (256) ifadeleri (257) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\tau_B(t) = -\frac{m}{\cos(nt)}\quad (258)$$

olarak bulunur. (254) ve (258) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.3. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin Frenet formülleri

$$\left\{ \begin{aligned} \overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) &= \left(\frac{-\cos t}{\cos(nt)}, \frac{\sin t}{\cos(nt)}, 0 \right) \text{ sl} , \\ \overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) &= \left(\frac{m \sin t}{n \cos(nt)}, \frac{m \cos t}{n \cos(nt)}, 0 \right) \text{ sl} , \\ \overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) &= \left(\frac{m \cos t}{\cos(nt)}, -\frac{m \sin t}{\cos(nt)}, 0 \right) \text{ sl} . \end{aligned} \right. \quad (259)$$

İspat: (19) ifadesine timelike asal normalli spacelike Salkowski (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_B(t) & 0 \\ \kappa_B(t) & 0 & -\tau_B(t) \\ 0 & \tau_B(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T_B}(t) \\ \overrightarrow{N_B}(t) \\ \overrightarrow{B_B}(t) \end{bmatrix} \quad (260)$$

şeklindedir. (251) ve (254) ifadeleri (260) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) = \left(\frac{-\cos t}{\cos(nt)}, \frac{\sin t}{\cos(nt)}, 0 \right) \quad (261)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) = \frac{d\overrightarrow{T_B}(t)}{dt_B} = \frac{d\overrightarrow{T_B}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_B} = \frac{\overrightarrow{T_B}'(t)}{v_B(t)} \quad (262)$$

şeklinde yazılabilir. (246) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{T_B}'(t) = \left(-\frac{n}{m} \cos t, \frac{n}{m} \sin t, 0 \right) \quad (263)$$

olarak bulunur. (245) ve (263) ifadeleri (262) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) = \left(\frac{-\cos t}{\cos(nt)}, \frac{\sin t}{\cos(nt)}, 0 \right)$$

olarak bulunur. (246), (250), (254) ve (258) ifadeleri (260) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) = \left(\frac{m \sin t}{n \cos(nt)}, \frac{m \cos t}{n \cos(nt)}, 0 \right) \quad (264)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) = \frac{d \overrightarrow{N_B}(t)}{dt_B} = \frac{d \overrightarrow{N_B}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_B} = \frac{\overrightarrow{N_B}'(t)}{v_B(t)} \quad (265)$$

şeklinde yazılabilir. (251) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{N_B}'(t) = (\sin t, -\cos t, 0) \quad (266)$$

olarak bulunur. (245) ve (266) ifadeleri (265) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) = \left(\frac{m \sin t}{n \cos(nt)}, \frac{m \cos t}{n \cos(nt)}, 0 \right)$$

elde edilir. Son olarak (251) ve (258) ifadeleri (260) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) = \left(\frac{m \cos t}{\cos(nt)}, -\frac{m \sin t}{\cos(nt)}, 0 \right) \quad (267)$$

olur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) = \frac{d \overrightarrow{B_B}(t)}{dt_B} = \frac{d \overrightarrow{B_B}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_B} = \frac{\overrightarrow{B_B}'(t)}{v_B(t)} \quad (268)$$

şeklinde yazılabilir. (250) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{B_B'}(t) = (n \cos t, -n \sin t, 0) \quad (269)$$

olarak bulunur. (245) ve (269) ifadeleri (268) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) = \left(\frac{m \cos t}{\cos(nt)}, -\frac{m \sin t}{\cos(nt)}, 0 \right)$$

olarak bulunur. (261), (264) ve (267) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.4. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin Frenet vektörleri için aşağıdaki gibi denklem vardır,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) & \overrightarrow{D_{T_B}^2 T_B}(t) & \overrightarrow{D_{T_B}^3 T_B}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) & \overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B}(t) & \overrightarrow{D_{T_B}^3 N_B}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) & \overrightarrow{D_{T_B}^2 B_B}(t) & \overrightarrow{D_{T_B}^3 B_B}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \mu_B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (270)$$

burada

$$\lambda_B(t) = -\frac{1}{\cos^2(nt)} \quad (271)$$

ve

$$\mu_B(t) = -\frac{3m \sin(nt)}{\cos^2(nt)} \quad (272)$$

şeklindedir.

İspat: (261) ifadesinin türevi alınır

$$\left(\overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t)\right)' = \left(\frac{\sin t \cos(nt) - n \cos t \sin(nt)}{\cos^2(nt)}, \frac{\cos t \cos(nt) + n \sin t \sin(nt)}{\cos^2(nt)}, 0 \right) \quad (273)$$

olur. $\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) = \frac{dt}{dt_B} \left(\overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) \right)' = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) \right)' \quad (274)$$

şeklinde yazılabilir. (273) ifadesi (274) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\frac{\sin t \cos(nt) - n \cos t \sin(nt)}{\cos^2(nt)}, \frac{\cos t \cos(nt) + n \sin t \sin(nt)}{\cos^2(nt)}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\frac{\sin t}{\cos(nt)} - \frac{n \cos t \sin(nt)}{\cos^2(nt)}, \frac{\cos t}{\cos(nt)} + \frac{n \sin t \sin(nt)}{\cos^2(nt)}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) = \left(\frac{m \sin t}{n \cos^2(nt)} - \frac{m \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)}, \frac{m \cos t}{n \cos^2(nt)} + \frac{m \sin t \sin(nt)}{\cos^3(nt)}, 0 \right) \quad (275)$$

elde edilir. (275) ifadesinin türevi alınır

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) \right)' &= \left(+ \frac{m \cos t}{n \cos^2(nt)} + \frac{2m \sin t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} + \frac{m \sin t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} - \frac{mn \cos t}{\cos^2(nt)} \right. \\ &\quad - \frac{3mn \cos t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)}, - \frac{m \sin t}{n \cos^2(nt)} + \frac{2m \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} + \frac{m \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} + \frac{mn \sin t}{\cos^2(nt)} \\ &\quad \left. + \frac{3mn \sin t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) \right)' &= \left(+ \frac{m \cos t}{n \cos^2(nt)} + \frac{3m \sin t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} - \frac{mn \cos t}{\cos^2(nt)} - \frac{3mn \cos t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)}, \right. \\ &\quad \left. - \frac{m \sin t}{n \cos^2(nt)} + \frac{3m \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} + \frac{mn \sin t}{\cos^2(nt)} + \frac{3mn \sin t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) \right)' = & \left(+ \frac{n \cos t}{m \cos^2(nt)} + \frac{3m \sin t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} - \frac{3mn \cos t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)}, \right. \\ & \left. - \frac{n \sin t}{m \cos^2(nt)} + \frac{3m \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} + \frac{3mn \sin t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (276)$$

elde edilir. $\overrightarrow{D^3_{T_B} T_B}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_B} T_B}(t) = \frac{dt}{dt_B} \left(\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) \right)' = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) \right)' \quad (277)$$

şeklinde yazılabilir. (276) ifadesi (277) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D^3_{T_B} T_B}(t) = & \left(- \frac{\cos t}{\cos^3(nt)} + \frac{3m^2 \sin t \sin(nt)}{n \cos^4(nt)} - \frac{3m^2 \cos t \sin^2(nt)}{\cos^5(nt)}, \right. \\ & \left. + \frac{\sin t}{\cos^3(nt)} + \frac{3m^2 \cos t \sin(nt)}{n \cos^4(nt)} + \frac{3m^2 \sin t \sin^2(nt)}{\cos^5(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (278)$$

elde edilir. (270) ifadesinden

$$\lambda_B(t) \overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) + \mu_B(t) \overrightarrow{D^2_{T_B} T_B}(t) + \overrightarrow{D^3_{T_B} T_B}(t) = \vec{0} \quad (279)$$

yazılır. (261), (275) ve (278) ifadeleri (279) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$\begin{aligned} -\lambda_B(t) \frac{\cos t}{\cos(nt)} + \mu_B(t) \left(\frac{\sin t}{\cos(nt)} - \frac{n \cos t \sin(nt)}{\cos^2(nt)} \right) - \frac{\cos t}{\cos^3(nt)} \\ + \frac{3m^2 \sin t \sin(nt)}{n \cos^4(nt)} - \frac{3m^2 \cos t \sin^2(nt)}{\cos^5(nt)} = 0 \end{aligned} \quad (280)$$

elde edilir. (280) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_B(t) = - \frac{1}{\cos^2(nt)} \quad \text{ve} \quad \mu_B(t) = - \frac{3m \sin(nt)}{\cos^2(nt)}$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (264) ifadesinin türevi

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) \right)' = & \left(\frac{mnsint \sin(nt) + mcost \cos(nt)}{n \cos^2(nt)}, \right. \\ & \left. + \frac{mncost \sin(nt) - msint \cos(nt)}{n \cos^2(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (281)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B}(t) = \frac{dt}{dt_B} \left(\overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) \right)' = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\overrightarrow{D_{T_B} N_B}(t) \right)' \quad (282)$$

şeklinde yazılabilir. (281) ifadesi (282) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B}(t) = & \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\frac{mnsint \sin(nt) + mcost \cos(nt)}{n \cos^2(nt)}, \right. \\ & \left. \frac{mncost \sin(nt) - msint \cos(nt)}{n \cos^2(nt)}, 0 \right), \\ \overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B}(t) = & \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\frac{msint \sin(nt)}{\cos^2(nt)} + \frac{mcost}{n \cos(nt)}, \frac{mcost \sin(nt)}{\cos^2(nt)} - \frac{msint}{n \cos(nt)}, 0 \right), \\ \overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B}(t) = & \left(\frac{m^2 \sin t \sin(nt)}{n \cos^3(nt)} + \frac{m^2 \cos t}{n^2 \cos^2(nt)}, \frac{m^2 \cos t \sin(nt)}{n \cos^3(nt)} - \frac{m^2 \sin t}{n^2 \cos^2(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (283)$$

elde edilir. (283) ifadesinin türevi

$$\left(\overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B}(t) \right)' = \left(\frac{3m^2 n^2 \sin t \sin^2(nt) + 3m^2 n \cos t \cos(nt) \sin(nt)}{n^2 \cos^4(nt)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(m^2 n^2 - m^2) \sin t \cos^2(nt)}{n^2 \cos^4(nt)}, \frac{3m^2 n^2 \cos t \sin^2(nt) - 3m^2 n \sin t \cos(nt) \sin(nt)}{n^2 \cos^4(nt)} \\
& + \frac{(m^2 n^2 - m^2) \cos t \cos^2(nt)}{n^2 \cos^4(nt)}, 0 \Bigg), \\
& \left(\overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B(t)} \right)' = \left(\frac{3m^2 \sin t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)} + \frac{3m^2 \cos t \sin(nt)}{n \cos^3(nt)} + \frac{\sin t}{\cos^2(nt)}, \right. \\
& \quad \left. + \frac{3m^2 \cos t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)} - \frac{3m^2 \sin t \sin(nt)}{n \cos^3(nt)} + \frac{\cos t}{\cos^2(nt)}, 0 \right)
\end{aligned} \tag{284}$$

olarak elde edilir. $\overrightarrow{D_{T_B}^3 N_B(t)}$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_B}^3 N_B(t)} = \frac{dt}{dt_B} \left(\overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B(t)} \right)' = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B(t)} \right)' \tag{285}$$

şeklinde yazılabilir. (284) ifadesi (285) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{D_{T_B}^3 N_B(t)} = & \left(\frac{3m^3 \sin t \sin^2(nt)}{n \cos^5(nt)} + \frac{3m^3 \cos t \cos(nt)}{n^2 \cos^4(nt)} + \frac{m \sin t}{n \cos^3(nt)}, \right. \\
& \left. + \frac{3m^3 \cos t \sin^2(nt)}{n \cos^5(nt)} - \frac{3m^3 \sin t \sin(nt)}{n^2 \cos^4(nt)} + \frac{m \cos t}{n \cos^3(nt)}, 0 \right)
\end{aligned} \tag{286}$$

elde edilir. (270) ifadesinden

$$\lambda_B(t) \overrightarrow{D_{T_B} N_B(t)} + \mu_B(t) \overrightarrow{D_{T_B}^2 N_B(t)} + \overrightarrow{D_{T_B}^3 N_B(t)} = \vec{0} \tag{287}$$

yazılır. (274), (283) ve (286) ifadeleri (287) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinden,

$$\begin{aligned} \lambda_B(t) \frac{m \sin t}{n \cos(nt)} + \mu_B(t) \left(\frac{m^2 \sin t \sin(nt)}{n \cos^3(nt)} - \frac{m^2 \cos t}{n^2 \cos^2(nt)} \right) + \frac{3m^3 \sin t \sin^2(nt)}{n \cos^5(nt)} \\ + \frac{3m^3 \cos t \cos(nt)}{n^2 \cos^4(nt)} + \frac{m \sin t}{n \cos^3(nt)} = 0 \end{aligned} \quad (288)$$

şeklinde (288) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_B(t) = -\frac{1}{\cos^2(nt)} \text{ ve } \mu_B(t) = -\frac{3m \sin(nt)}{\cos^2(nt)}$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinden de aynı sonuca ulaşılır. (267) ifadesinin türevi alınır

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) \right)' = \left(\frac{mn \cos t \sin(nt) - m \sin t \cos(nt)}{\cos^2(nt)}, \right. \\ \left. -\frac{mn \sin t \sin(nt) + m \cos t \cos(nt)}{\cos^2(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (289)$$

olur. $\overrightarrow{D_{T_B}^2 B_B}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_B}^2 B_B}(t) = \frac{dt}{dt_B} \left(\overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) \right)' = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) \right)' \quad (290)$$

şeklinde yazılabilir. (289) ifadesi (290) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_{T_B}^2 B_B}(t) = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\frac{mn \cos t \sin(nt) - m \sin t \cos(nt)}{\cos^2(nt)}, \right. \\ \left. -\frac{mn \sin t \sin(nt) + m \cos t \cos(nt)}{\cos^2(nt)}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{D_{T_B}^2 B_B}(t) = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\frac{mn \cos t \sin(nt)}{\cos^2(nt)} - \frac{m \sin t}{\cos(nt)}, -\frac{mn \sin t \sin(nt)}{\cos^2(nt)} - \frac{m \cos t}{\cos(nt)}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D^2_{T_B} B_B}(t) = \left(\frac{m^2 \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} - \frac{m^2 \sin t}{n \cos^2(nt)}, -\frac{m^2 \sin t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} - \frac{m^2 \cos t}{n \cos^2(nt)}, 0 \right) \quad (291)$$

elde edilir. (291) ifadesinin türevi

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{D^2_{T_B} B_B}(t) \right)' = & \left(\frac{3m^2 n \cos t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)} - \frac{3m^2 \sin t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} + \frac{n \cos t}{\cos^2(nt)}, \right. \\ & \left. - \frac{3m^2 n \sin t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)} - \frac{3m^2 \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} - \frac{n \sin t}{\cos^2(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (292)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{D^3_{T_B} B_B}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_B} B_B}(t) = \frac{dt}{dt_B} \left(\overrightarrow{D^2_{T_B} B_B}(t) \right)' = \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\overrightarrow{D^2_{T_B} B_B}(t) \right)' \quad (293)$$

şeklinde yazılabilir. (292) ifadesi (293) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D^3_{T_B} B_B}(t) = & \frac{m}{n \cos(nt)} \left(\frac{3m^2 n \cos t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)} - \frac{3m^2 \sin t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} + \frac{n \cos t}{\cos^2(nt)}, \right. \\ & \left. - \frac{3m^2 n \sin t \sin^2(nt)}{\cos^4(nt)} - \frac{3m^2 \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} - \frac{n \sin t}{\cos^2(nt)}, 0 \right), \\ \overrightarrow{D^3_{T_B} B_B}(t) = & \left(\frac{3m^3 \cos t \sin^2(nt)}{\cos^5(nt)} - \frac{3m^3 \sin t \sin(nt)}{n \cos^4(nt)} + \frac{m \cos t}{\cos^3(nt)}, \right. \\ & \left. - \frac{3m^3 \sin t \sin^2(nt)}{\cos^5(nt)} - \frac{3m^3 \cos t \sin(nt)}{n \cos^4(nt)} - \frac{m \sin t}{\cos^3(nt)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (294)$$

olarak bulunur. (270) ifadesinden

$$\lambda_B(t) \overrightarrow{D_{T_B} B_B}(t) + \mu_B(t) \overrightarrow{D^2_{T_B} B_B}(t) + \overrightarrow{D^3_{T_B} B_B}(t) = \vec{0} \quad (295)$$

şeklindedir. (267), (291) ve (294) ifadeleri (295) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \lambda_B(t) \frac{m \cos t}{\cos(nt)} + \mu_B(t) \frac{m^2 \cos t \sin(nt)}{\cos^3(nt)} - \mu_B(t) \frac{m^2 \sin t}{n \cos^2(nt)} + \frac{3m^3 \cos t \sin^2(nt)}{\cos^5(nt)} \\ - \frac{3m^3 \sin t \sin(nt)}{n \cos^4(nt)} + \frac{m \cos t}{\cos^3(nt)} = 0 \end{aligned} \quad (296)$$

elde edilir. (296) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_B(t) = -\frac{1}{\cos^2(nt)} \text{ ve } \mu_B(t) = -\frac{3m \sin(nt)}{\cos^2(nt)}$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında elde edilen vektörün ikici ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (280), (288) ve (296) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.5. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin Darboux vektörü $F_B(t)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{F_B}(t) = (0, 0, 1) \quad \text{tl.} \quad (297)$$

İspat: (243) ifadesindeki $\overrightarrow{N_B}(t)$ vektörünün t ye göre türev alınır

$$\overrightarrow{N_B}'(t) = (\sin t, -\cos t, 0) \quad (298)$$

elde edilir. (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin Darboux vektörü

$$\overrightarrow{F_B}(t) = -\overrightarrow{N_B}(t) \wedge \overrightarrow{N_B}'(t) \quad (299)$$

şeklindedir. (243) ve (298) ifadeleri (299) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{F}_B(t) = (0, 0, 1) \quad (300)$$

olur. Diğer yandan (12) ifadesinden

$$\overrightarrow{F}_B(t) = \nu_B(t) \left[\tau_B(t) \overrightarrow{T}_B(t) - \kappa_B(t) \overrightarrow{B}_B(t) \right] \quad (301)$$

şeklinde (301) ifadesinde (243), (245) ve (252) ifadeleri yerine yazılırsa yine

$$\overrightarrow{F}_B(t) = (0, 0, 1)$$

elde edilir.

Teorem 4.5.6. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin Darboux ani dönme vektörü yönündeki birim vektör

$$\overrightarrow{C}_B(t) = (0, 0, 1). \quad (302)$$

İspat: (300) ifadesinin normu alınır

$$\|\overrightarrow{F}_B(t)\| = 1 \quad (303)$$

elde edilir. $\overrightarrow{C}_B(t) = \frac{\overrightarrow{F}_B(t)}{\|\overrightarrow{F}_B(t)\|}$ ifadesinde (300) ve (303) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\overrightarrow{C}_B(t) = (0, 0, 1) \quad (304)$$

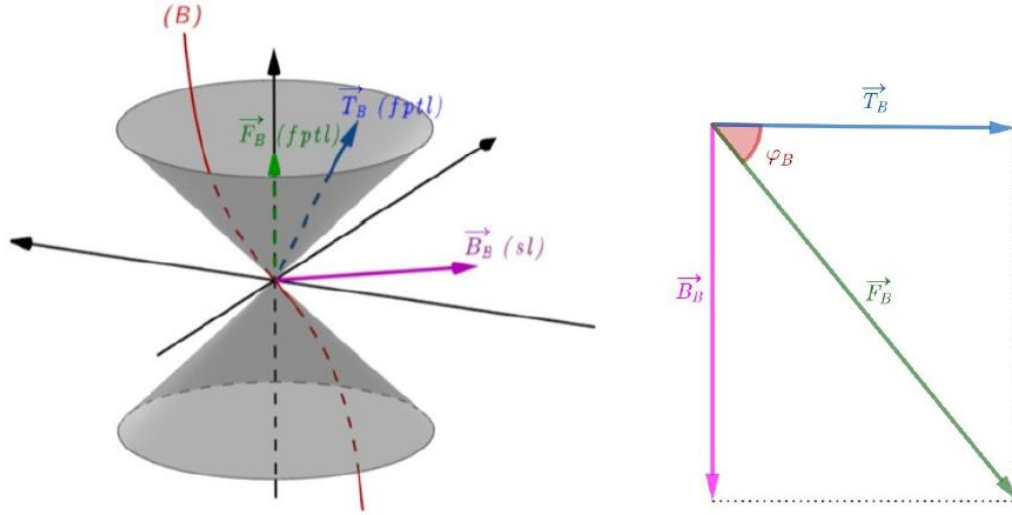
elde edilir.

Teorem 4.5.7. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin $\overrightarrow{T}_B(t)$ ve $\overrightarrow{F}_B(t)$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı φ_B olmak üzere

$$\varphi_B = \operatorname{arctanh}\left(-\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m-1}{m+1}\right) \quad (305)$$

dir, (Şekil 33).

İspat:



Şekil 33. (B) teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ de $\overrightarrow{F}_B(t)$ Darboux vektörü

(3) ifadesinde (243) ile (300) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\langle \overrightarrow{F}_B(t), \overrightarrow{T}_B(t) \rangle = -\cosh \varphi_B \quad (306)$$

elde edilir. Diğer yandan (12) ifadesinin her iki tarafı $\overrightarrow{T}_B(t)$ ile Lorentzian iç çarpılıp, gerekli işlemler yapılırsa yine (306) ifadesi elde edilir. Ayrıca (1) ifadesinde (243) ve (300) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\langle \overrightarrow{F}_B(t), \overrightarrow{T}_B(t) \rangle = n \quad (307)$$

bulunur. (306) ve (307) ifadelerinin eşitliklerinden

$$\cosh \varphi_B = -n \quad (308)$$

olarak elde edilir. Diğer yandan (7) ifadesinde (243) ile (300) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\left| \left\langle \overrightarrow{F}_B(t), \overrightarrow{B}_B(t) \right\rangle \right| = \sinh \varphi_B = \frac{n}{m} \quad (309)$$

ulaşılır. (308) ve (309) eşitliklerinden

$$\varphi_B = \operatorname{arctanh} \left(-\frac{1}{m} \right)$$

elde edilir. $\cosh \varphi_B + \sinh \varphi_B = e^{\varphi_B}$ eşitliği kullanılırsa

$$\varphi_B = \ln \left(\frac{n(1-m)}{m} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m-1}{m+1} \right) \quad (310)$$

olarak ulaşılır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5.8. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir helis oluşturur ve bu helisin eksenini $\overrightarrow{C}_B(t)$ vektörüdür, (Şekil 34).

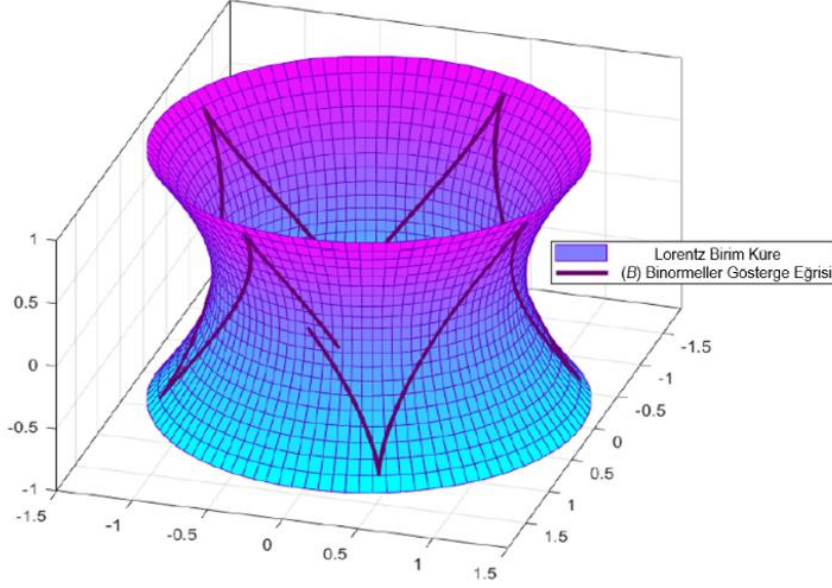
İspat: Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin $\overrightarrow{T}_B(t)$ teğet vektörü ve sabit bir $\overrightarrow{U}_B(t)$ doğrultusu arasındaki açı θ_B olsun. (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin (252) ifadesinden eğrilikler oranı

$$\frac{\tau_B(t)}{\kappa_B(t)} = \coth \theta_B \quad (311)$$

dır. (308) ve (309) eşitliklerinden (311) ifadesi

$$\coth \theta_B = -m \text{ (sabit)} \quad (312)$$

şeklinde olur. (312) ifadesinde θ_B açısı sabit elde edildiğinden (B) timelike binormaller gösterge eğrisi bir helistir ve eksenini $\overrightarrow{U}_B(t)$ dir. Burada $\overrightarrow{U}_B(t)$ vektörü birim timelike vektör olarak kabul edilirse, (3) ifadesinden



Şekil 34. $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde (B) timelike binormaller gösterge eğrisi

$$\langle \overrightarrow{T}_B(t), \overrightarrow{U}_B(t) \rangle = -\cosh \theta_B = -n \quad (313)$$

olur. Benzer şekilde (7) ifadesinden

$$\langle \overrightarrow{B}_B(t), \overrightarrow{U}_B(t) \rangle = \sinh \theta_B = \frac{n}{m} \quad (314)$$

elde edilir. Ayrıca $\overrightarrow{U}_B(t)$ vektörü Frenet vektörlerinin lineer bileşimi olarak

$$\overrightarrow{U}_B(t) = a_1 \overrightarrow{T}_B(t) + b_1 \overrightarrow{N}_B(t) + c_1 \overrightarrow{B}_B(t) \quad (315)$$

şeklinde yazılabilir, burada $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$. (315) ifadesinin her iki yanını sırasıyla $\overrightarrow{T}_B(t)$, $\overrightarrow{N}_B(t)$ ve $\overrightarrow{B}_B(t)$ vektörleriyle iç çarpılırsa

$$\begin{cases} a_1 = \cosh \theta_T = n , \\ b_1 = 0 , \\ c_1 = -\sinh \theta_T = -\frac{n}{m} \end{cases} \quad (316)$$

bulunur. (316) ifadesi ile (308) ve (309) ifadelerinin eşitliğinden

$$\theta_B = \varphi_B \quad (317)$$

olduğu görülür. (243) ve (316) ifadeleri (315) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{U}_B(t) = \cosh \theta_B \overrightarrow{T}_B(t) - \sinh \theta_B \overrightarrow{B}_B(t) = (0, 0, 1) = \overrightarrow{C}_B(t)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.9. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin yay uzunluğu $s_B(t)$ olmak üzere

$$s_B(t) = -\frac{\sin(nt) + n}{m}. \quad (318)$$

İspat: $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin $\left[-\frac{\pi}{2n}, t\right]$ aralığındaki yay uzunluğu (45) ifadesine göre

$$s_B(t) = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t \|\overrightarrow{B}'(t)\| dt = \frac{n}{m} \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t \cos(nt) dt = \frac{\sin(nt) + n}{m} \quad (319)$$

olur. Gerçekten (319) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$t = \frac{\arcsin(ms_B - n)}{n} \quad (320)$$

bulunur. (320) ifadesi timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin denklemi olan

$$\vec{B}(t) = \left(-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt), \sin t \cos(nt) - n \cos t \sin(nt), -\frac{n}{m} \sin(nt) \right)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa bu eğri birim hızlı bir eğri olur, yani $\left\| \frac{d\vec{B}(t)}{ds_B} \right\| = 1$ olarak elde edilir.

Teorem 4.5.10. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ te ve $\mathbb{S}_1^2$ deki geodezik eğrilikleri sırasıyla $k_B(t)$ ve $\gamma_B(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} k_B(t) = \frac{1}{|\cos(nt)|}, \\ \gamma_B(t) = |\tan(nt)|. \end{cases} \quad (321)$$

İspat: Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği $k_T(t)$, (46) ifadesinden

$$k_B(t) = \left\| \overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t), \overrightarrow{D_{T_B} T_B}(t) \right\rangle} \quad (322)$$

dir. (261) ifadesi (322) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_B(t) = \frac{1}{|\cos(nt)|} \quad (323)$$

olur. Diğer yandan (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ teki geodezik eğriliği $\gamma_T(t)$, (47) ifadesinden

$$\gamma_B(t) = \left\| \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t), \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) \right\rangle} \quad (324)$$

şeklinde yazılır. (48) ifadesinden

$$\overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) = \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) + \varepsilon \left\langle S(\overrightarrow{T_B}(t)), \overrightarrow{T_B}(t) \right\rangle \overrightarrow{B}(t) \quad (325)$$

dir. Burada

$$\varepsilon = \left\langle \overrightarrow{B}(t), \overrightarrow{B}(t) \right\rangle = 1 \quad (326)$$

Ayrıca

$$S(\overrightarrow{T_B}(t)) = -\overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) = -\overrightarrow{T_B}(t) \quad (327)$$

olur. (327) ifadesinden

$$\left\langle S(\overrightarrow{T_B}(t)), \overrightarrow{T_B}(t) \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{T_B}(t), \overrightarrow{T_B}(t) \right\rangle = 1 \quad (328)$$

elde edilir. (326) ve (328) ifadeleri (325) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) = \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) - \overrightarrow{B}(t) \quad (329)$$

olur. (54) ve (261) ifadeleri (329) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) = & \left(\frac{-\cos t}{\cos(nt)}, \frac{\sin t}{\cos(nt)}, 0 \right) - (-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt), \\ & + \sin t \cos(nt) - n \cos t \sin(nt), -\frac{n}{m} \sin(nt)) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) = \left(\frac{\cos t(-1 - \cos^2(nt)) + n \sin t \cos(nt) \sin(nt)}{\cos(nt)}, \frac{\sin t(1 - \cos^2(nt))}{\cos(nt)}, \frac{n \cos t \cos(nt) \sin(nt)}{\cos(nt)}, \frac{n \sin(nt)}{m} \right) \quad (330)$$

olarak bulunur. (330) ifadesi kendisiyle iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t), \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) \right\rangle &= \frac{\cos^2 t \sin^4(nt) - 2n \cos t \sin t \sin^3(nt) \cos(nt)}{\cos^2(nt)} \\ &+ \frac{n^2 \sin^2 t \cos^2(nt) \sin^2(nt) + \sin^2(nt) \sin^4(nt) + 2n \sin t \sin^3(nt) \cos t \cos(nt)}{\cos^2(nt)} \\ &+ \frac{n^2 \cos^2(nt) \cos^2 t \sin^2(nt)}{\cos^2(nt)} - \frac{n^2 \sin^2(nt)}{m^2}, \end{aligned}$$

$$\left\langle \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t), \overrightarrow{\overline{D_{T_B} T_B}}(t) \right\rangle = \frac{\sin^2(nt)}{\cos^2(nt)} \quad (331)$$

elde edilir. (331) ifadesi (324) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\gamma_B(t) = |\tan(nt)| \quad (332)$$

olur. (324) ve (332) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5.11. $\mathbb{E}_1^3$ te Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (B) timelike binormaller gösterge eğrisinin geometrik elemanlarını Tablo 3'teki gibidir.

4.6. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayında Timelike Asal Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinin (C)

Spacelike Normaller Göstergesi

Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin timelike pol vektörü $\overrightarrow{C}(t)$ ve (C) spacelike normaller gösterge eğrisi olmak üzere spacelike (C) eğrisinin Frenet vektörleri $\{\overrightarrow{T_C}(t), \overrightarrow{N_C}(t), \overrightarrow{B_C}(t)\}$, eğriliği $\kappa_C(t)$ ve burulması (torsiyonu) $\tau_C(t)$ olsun.

Teorem 4.6.1. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike normeller gösterge eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{cases} \vec{T}_C(t) = (-\cos t, \sin t, 0) \text{ sl} , \\ \vec{N}_C(t) = (\sin t, \cos t, 0) \text{ sl} , \\ \vec{B}_C(t) = (0, 0, -1) \text{ tl} \end{cases} \quad (333)$$

şeklindedir.

İspat: (59) ifadesindeki $\vec{C}(t)$ ifadesinin türevi alınır

$$\vec{C}'(t) = (-n \cos t, n \sin t, 0) \quad (334)$$

elde edilir. (334) ifadesinin normu alınır

$$\|\vec{C}'(t)\| = \nu_C(t) = \sqrt{\langle \vec{C}'(t), \vec{C}'(t) \rangle},$$

$$\|\vec{C}'(t)\| = \sqrt{n^2 \cos^2 t + n^2 \sin^2 t},$$

$$\|\vec{C}'(t)\| = n \quad (335)$$

bulunur. (334) ve (335) ifadeleri (32) ifadesinde yerine yazılırsa (C) spacelike eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}_C(t)$

$$\vec{T}_C(t) = (-\cos t, \sin t, 0) \quad (336)$$

elde edilir. (59) ifadesindeki $\vec{C}(t)$ vektörünün ikinci türevi alınır

$$\vec{C}''(t) = (n \sin t, n \cos t, 0) \quad (337)$$

olur. (334) ve (337) ifadelerine (2) ifadesindeki vektörel çarpım işlemi uygulanırsa

$$\overrightarrow{C'}(t) \wedge \overrightarrow{C''}(t) = (0, 0, -n^2) \quad (338)$$

elde edilir. (338) ifadesinin normu alınır

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{C'}(t) \wedge \overrightarrow{C''}(t)\| &= \sqrt{|-n^4|}, \\ \|\overrightarrow{C'}(t) \wedge \overrightarrow{C''}(t)\| &= n^2 \end{aligned} \quad (339)$$

bulunur. (338) ve (339) ifadeleri (32) ifadesinde yerine yazılırsa (C) spacelike eğrisinin birim binormal vektörü $\overrightarrow{B}_C(t)$

$$\overrightarrow{B}_C(t) = (0, 0, -1) \quad (340)$$

elde edilir. (336) ve (340) ifadeleri (32) ifadesinde yerine yazılırsa (C) spacelike eğrisinin birim normal vektörü $\overrightarrow{N}_C(t)$

$$\overrightarrow{N}_C(t) = (-\sin t, -\cos t, 0) \quad (341)$$

elde edilir. (336), (340) ve (341) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.2. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin eğriliği ve burulması sırasıyla

$$\begin{cases} \kappa_C(t) = \frac{1}{n}, \\ \tau_N(t) = 0. \end{cases} \quad (342)$$

İspat: (33) ifadesinden timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin eğriliği

$$\kappa_C(t) = \frac{\|\overline{C}'(t) \wedge \overline{C}''(t)\|}{\|\overline{C}'(t)\|^3} \quad (343)$$

şeklindedir. (335) ve (339) ifadeleri (343) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\kappa_C(t) = \frac{1}{n} \quad (344)$$

elde edilir. Diğer taraftan (337) ifadesinin türevi alınır

$$\overline{C}'''(t) = (n \cos t, -n \sin t, 0) \quad (345)$$

olur. (338) ile (345) ifadeleri skaler (iç) çarpılırsa,

$$\langle \overline{C}'(t) \wedge \overline{C}''(t), \overline{C}'''(t) \rangle = \langle (0, 0, -n^2), (n \cos t, -n \sin t, 0) \rangle,$$

$$\langle \overline{C}'(t) \wedge \overline{C}''(t), \overline{C}'''(t) \rangle = 0 \quad (346)$$

elde edilir. (33) ifadesinden timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_C(t) = \frac{\langle \overline{C}'(t) \wedge \overline{C}''(t), \overline{C}'''(t) \rangle}{\|\overline{C}'(t) \wedge \overline{C}''(t)\|^2} \quad (347)$$

şeklindedir. (339) ve (346) ifadeleri (347) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\tau_C(t) = 0 \quad (348)$$

olarak bulunur. (344) ve (348) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.3. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) = \left(\frac{\sin t}{n}, \frac{\cos t}{n}, 0 \right) \text{ sl} , \\ \overrightarrow{D_{T_C} N_C}(t) = \left(\frac{\cos t}{n}, -\frac{\sin t}{n}, 0 \right) \text{ sl} , \\ \overrightarrow{D_{T_C} B_C}(t) = (0, 0, 0) \text{ sl} . \end{cases} \quad (349)$$

İspat: (43) ifadesine göre timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_C} N_C}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_C} B_C}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_C(t) & 0 \\ -\kappa_C(t) & 0 & \tau_C(t) \\ 0 & \tau_C(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T_C}(t) \\ \overrightarrow{N_C}(t) \\ \overrightarrow{B_C}(t) \end{bmatrix} \quad (350)$$

şeklindedir. (341) ve (344) ifadeleri (350) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) = \left(\frac{\sin t}{n}, \frac{\cos t}{n}, 0 \right) \quad (351)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) = \frac{d\overrightarrow{T_C}(t)}{dt_C} = \frac{d\overrightarrow{T_C}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_C} = \frac{\overrightarrow{T_C}'(t)}{v_C(t)} \quad (352)$$

şeklinde yazılabilir. (336) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{T_C'}(t) = (\sin t, \cos t, 0) \quad (353)$$

olarak bulunur. (335) ve (353) ifadeleri (352) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) = \left(\frac{\sin t}{n}, \frac{\cos t}{n}, 0 \right)$$

olarak bulunur. (336), (340), (344) ve (348) ifadeleri (350) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_C} N_C}(t) = \left(\frac{\cos t}{n}, -\frac{\sin t}{n}, 0 \right) \quad (354)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_C} N_C}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_C} N_C}(t) = \frac{d\overrightarrow{N_C}(t)}{dt_C} = \frac{d\overrightarrow{N_C}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_C} = \frac{\overrightarrow{N_C'}(t)}{v_C(t)} \quad (355)$$

şeklinde yazılabilir. (341) ifadesinin türevi alınır

$$\overrightarrow{N_C'}(t) = (\cos t, -\sin t, 0) \quad (356)$$

olarak bulunur. (335) ve (356) ifadeleri (355) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_C} N_C}(t) = \left(\frac{\cos t}{n}, -\frac{\sin t}{n}, 0 \right)$$

elde edilir. Son olarak (341) ve (348) ifadeleri (350) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_C} B_C}(t) = (0, 0, 0) \quad (357)$$

olur. Diğer yandan $\overrightarrow{D_{T_C} B_C}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_C} B_C}(t) = \frac{d\overrightarrow{B_C}(t)}{dt_C} = \frac{d\overrightarrow{B_C}(t)}{dt} \frac{dt}{dt_C} = \frac{\overrightarrow{B_C}'(t)}{v_C(t)} \quad (358)$$

şeklinde yazılabilir. (340) ifadesinin türevi alınırsa

$$\overrightarrow{B_C}'(t) = (0, 0, 0) \quad (359)$$

olarak bulunur. (335) ve (359) ifadeleri (358) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_C} B_C}(t) = (0, 0, 0)$$

olarak bulunur. (351), (354) ve (357) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.4. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin Frenet vektörleri için aşağıdaki gibi denklem vardır,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) & \overrightarrow{D_{T_C}^2 T_C}(t) & \overrightarrow{D_{T_C}^3 T_C}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_C} N_C}(t) & \overrightarrow{D_{T_C}^2 N_C}(t) & \overrightarrow{D_{T_C}^3 N_C}(t) \\ \overrightarrow{D_{T_C} B_C}(t) & \overrightarrow{D_{T_C}^2 B_C}(t) & \overrightarrow{D_{T_C}^3 B_C}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_C \\ \mu_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (360)$$

burada

$$\lambda_C(t) = \frac{1}{n^2} \quad (361)$$

ve

$$\mu_C(t) = 0 \quad (362)$$

şeklindedir.

İspat: (351) ifadesinin türevi alınırsa

$$\left(\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t)\right)' = \left(\frac{\cos t}{n}, -\frac{\sin t}{n}, 0\right) \quad (363)$$

olur. $\overrightarrow{D^2_{T_C} T_C}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^2_{T_C} T_C}(t) = \frac{dt}{dt_C} \left(\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t)\right)' = \frac{1}{n} \left(\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t)\right)' \quad (364)$$

şeklinde yazılabilir. (363) ifadesi (364) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^2_{T_C} T_C}(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\cos t}{n}, -\frac{\sin t}{n}, 0\right),$$

$$\overrightarrow{D^2_{T_C} T_C}(t) = \left(\frac{\cos t}{n^2}, -\frac{\sin t}{n^2}, 0\right) \quad (365)$$

elde edilir. (365) ifadesinin türevi alınır

$$\left(\overrightarrow{D^2_{T_C} T_C}(t)\right)' = \left(-\frac{\sin t}{n^2}, -\frac{\cos t}{n^2}, 0\right) \quad (366)$$

elde edilir. $\overrightarrow{D^3_{T_C} T_C}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_C} T_C}(t) = \frac{dt}{dt_C} \left(\overrightarrow{D^2_{T_C} T_C}(t)\right)' = \frac{1}{n} \left(\overrightarrow{D^2_{T_C} T_C}(t)\right)' \quad (367)$$

şeklinde yazılabilir. (366) ifadesi (367) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^3_{T_C} T_C}(t) = \frac{1}{n} \left(-\frac{\sin t}{n^2}, -\frac{\cos t}{n^2}, 0\right),$$

$$\overrightarrow{D^3_{T_C} T_C}(t) = \left(-\frac{\sin t}{n^3}, -\frac{\cos t}{n^3}, 0\right) \quad (368)$$

elde edilir. (360) ifadesinden

$$\lambda_c(t) \overrightarrow{D_{T_c} T_c}(t) + \mu_c(t) \overrightarrow{D_{T_c}^2 T_c}(t) + \overrightarrow{D_{T_c}^3 T_c}(t) = \vec{0} \quad (369)$$

yazılır. (351), (365) ve (368) ifadeleri (369) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$\lambda_c(t) \frac{\sin t}{n} + \mu_c(t) \frac{\cos t}{n^2} + -\frac{\sin t}{n^3} = 0 \quad (370)$$

elde edilir. (370) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_c(t) = \frac{1}{n^2} \text{ ve } \mu_c(t) = 0$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (354) ifadesinin türevi

$$\left(\overrightarrow{D_{T_c} N_c}(t) \right)' = \left(-\frac{\sin t}{n}, -\frac{\cos t}{n}, 0 \right) \quad (371)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{D_{T_c}^2 N_c}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D_{T_c}^2 N_c}(t) = \frac{dt}{dt_c} \left(\overrightarrow{D_{T_c} N_c}(t) \right)' = \frac{1}{n} \left(\overrightarrow{D_{T_c} N_c}(t) \right)' \quad (372)$$

şeklinde yazılabilir. (371) ifadesi (372) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D_{T_c}^2 N_c}(t) = \frac{1}{n} \left(-\frac{\sin t}{n}, -\frac{\cos t}{n}, 0 \right),$$

$$\overrightarrow{D_{T_c}^2 N_c}(t) = \left(-\frac{\sin t}{n^2}, -\frac{\cos t}{n^2}, 0 \right) \quad (373)$$

elde edilir. (373) ifadesinin türevi

$$\left(\overrightarrow{D^2_{T_C} N_C}(t)\right)' = \left(-\frac{\cos t}{n^2}, \frac{\sin t}{n^2}, 0\right) \quad (374)$$

elde edilir. $\overrightarrow{D^3_{T_C} N_C}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_C} N_C}(t) = \frac{dt}{dt_C} \left(\overrightarrow{D^2_{T_C} N_C}(t)\right)' = \frac{1}{n} \left(\overrightarrow{D^2_{T_C} N_C}(t)\right)' \quad (375)$$

şeklinde yazılabilir. (374) ifadesi (375) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^3_{T_C} N_C}(t) = \frac{1}{n} \left(-\frac{\cos t}{n^2}, \frac{\sin t}{n^2}, 0\right),$$

$$\overrightarrow{D^3_{T_C} N_C}(t) = \left(-\frac{\cos t}{n^3}, \frac{\sin t}{n^3}, 0\right) \quad (376)$$

elde edilir. (360) ifadesinden

$$\lambda_C(t) \overrightarrow{D_{T_C} N_C}(t) + \mu_C(t) \overrightarrow{D^2_{T_C} N_C}(t) + \overrightarrow{D^3_{T_C} N_C}(t) = \vec{0} \quad (377)$$

yazılır. (354), (373) ve (376) ifadeleri (377) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

$$\lambda_C(t) \frac{\cos t}{n} - \mu_C(t) \frac{\sin t}{n^2} - \frac{\cos t}{n^3} = 0 \quad (378)$$

elde edilir. (378) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_C(t) = \frac{1}{n^2} \text{ ve } \mu_C(t) = 0$$

olarak bulunur. (184) ifadesinin türevi alınır

$$\left(\overrightarrow{D_{T_c} B_C}(t)\right)' = (0, 0, 0) \quad (379)$$

olur. $\overrightarrow{D^2_{T_c} B_C}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^2_{T_c} B_C}(t) = \frac{dt}{dt_c} \left(\overrightarrow{D_{T_c} B_C}(t)\right)' = \frac{1}{n} \left(\overrightarrow{D_{T_c} B_C}(t)\right)' \quad (380)$$

şeklinde yazılabilir. (379) ifadesi (380) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^2_{T_c} B_C}(t) = \frac{1}{n} (0, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{D^2_{T_c} B_C}(t) = (0, 0, 0) \quad (381)$$

elde edilir. (207) ifadesinin türevi

$$\left(\overrightarrow{D^2_{T_c} B_C}(t)\right)' = (0, 0, 0) \quad (382)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{D^3_{T_c} B_C}(t)$ ifadesi

$$\overrightarrow{D^3_{T_c} B_C}(t) = \frac{dt}{dt_c} \left(\overrightarrow{D^2_{T_c} B_C}(t)\right)' = \frac{1}{n} \left(\overrightarrow{D^2_{T_c} B_C}(t)\right)' \quad (383)$$

şeklinde yazılabilir. (382) ifadesi (383) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{D^3_{T_c} B_C}(t) = \frac{1}{n} (0, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{D^3_{T_c} B_C}(t) = (0, 0, 0) \quad (384)$$

olarak bulunur. (360) ifadesinden

$$\lambda_C(t) \overrightarrow{D_{T_C} B_C}(t) + \mu_C(t) \overrightarrow{D_{T_C}^2 B_C}(t) + \overrightarrow{D_{T_C}^3 B_C}(t) = \vec{0} \quad (385)$$

elde edilir. (357), (381) ve (384) ifadeleri (385) ifadesinde yerine yazılırsa elde edilen vektörün birinci bileşenlerinin eşitliğinden,

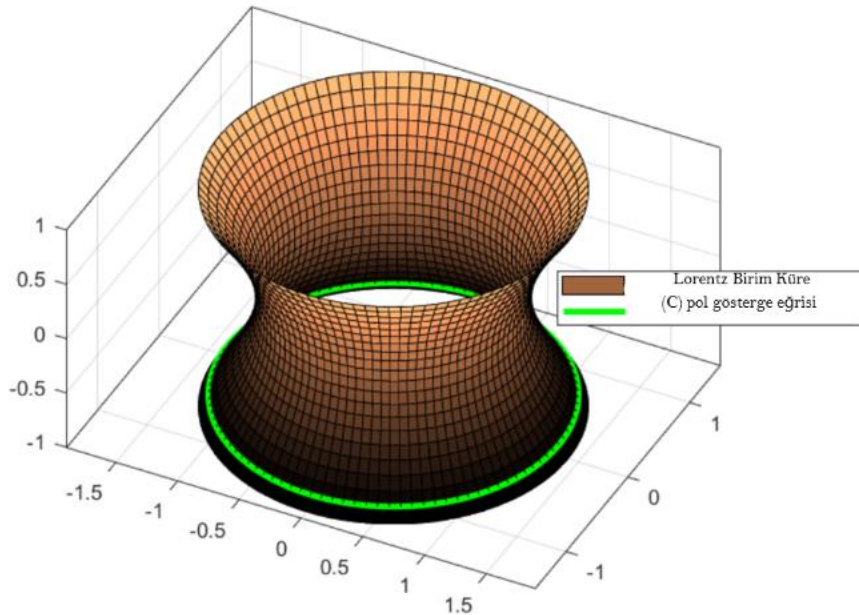
$$\lambda_C(t) \vec{0} + \mu_C(t) \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \quad (386)$$

şeklindedir. (386) ifadesi $\lambda_C(t)$ ve $\mu_C(t)$ nin her reel değeri için sağlanır. Bu durumda özel olarak

$$\lambda_C(t) = \frac{1}{n^2} \text{ ve } \mu_C(t) = 0$$

seçilmesi genelliği bozmaz. Gerekli işlemler yapılırsa elde edilen vektörün ikinci ve üçüncü bileşenlerinin eşitliğinden de aynı sonuca ulaşılır. (370), (378) ve (386) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.6.5. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde eğrilik yarıçapı n olan bir çemberdir, (Şekil 35).



Şekil 35. $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde (C) spacelike normaller gösterge eğrisi

İspat: Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike teğetler gösterge eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde eğrilik yarıçapı $r = \frac{1}{\kappa_C(t)} = n$ olan bir çemberdir.

Teorem 4.6.6. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike teğetler gösterge eğrisinin Darboux vektörü $\overrightarrow{F_C}(t)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{F_C}(t) = (0, 0, 1) \quad \text{tl.} \quad (387)$$

İspat: (333) ifadesindeki $\overrightarrow{N_N}(t)$ vektörünün t ye göre türev alınır

$$\overrightarrow{N_C}'(t) = (\cos t, -\sin t, 0) \quad (388)$$

elde edilir. (C) spacelike pol gösterge eğrisinin Darboux vektörü

$$\overrightarrow{F_C}(t) = -\overrightarrow{N_C}(t) \wedge \overrightarrow{N_C}'(t) \quad (389)$$

şeklindedir. (333) ve (388) ifadeleri (389) ifadede yerine yazılırsa vektörel çarpımından

$$\overrightarrow{F_C}(t) = (0, 0, 1) \quad (390)$$

olur. Diğer yandan (36) ifadesinden

$$\overrightarrow{F_C}(t) = \nu_C(t) \left(\tau_C(t) \overrightarrow{T_C}'(t) - \kappa_C(t) \overrightarrow{B_C}(t) \right) \quad (391)$$

şeklindedir. (391) ifadesine (333), (337) ve (344) ifadeleri yerine yazılırsa yine

$$\overrightarrow{F_C}(t) = n \left(0 - \frac{1}{n} (0, 0, -1) \right),$$

$$\overrightarrow{F_C}(t) = (0, 0, 1)$$

elde edilir.

Sonuç 4.6.7. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) timelike pol gösterge eğrisinin $\overrightarrow{F_C}(t)$ Darboux vektörünün birim vektörü $\overrightarrow{C_C}(t)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{C_C}(t) = (0, 0, 1). \quad (392)$$

İspat: (390) ifadesinin normu alınır

$$\|\overrightarrow{F_C}(t)\| = 1 \quad (393)$$

elde edilir. $\overrightarrow{C_C}(t) = \frac{\overrightarrow{F_C}(t)}{\|\overrightarrow{F_C}(t)\|}$ ifadesinde (390) ve (392) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\overrightarrow{C_C}(t) = (0, 0, 1) \quad (394)$$

elde edilir.

Teorem 4.6.8. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin $\overrightarrow{T_C}(t)$ spacelike vektörü ile $\overrightarrow{F_C}(t)$ timelike vektörü arasındaki hiperbolik açı φ_C olmak üzere

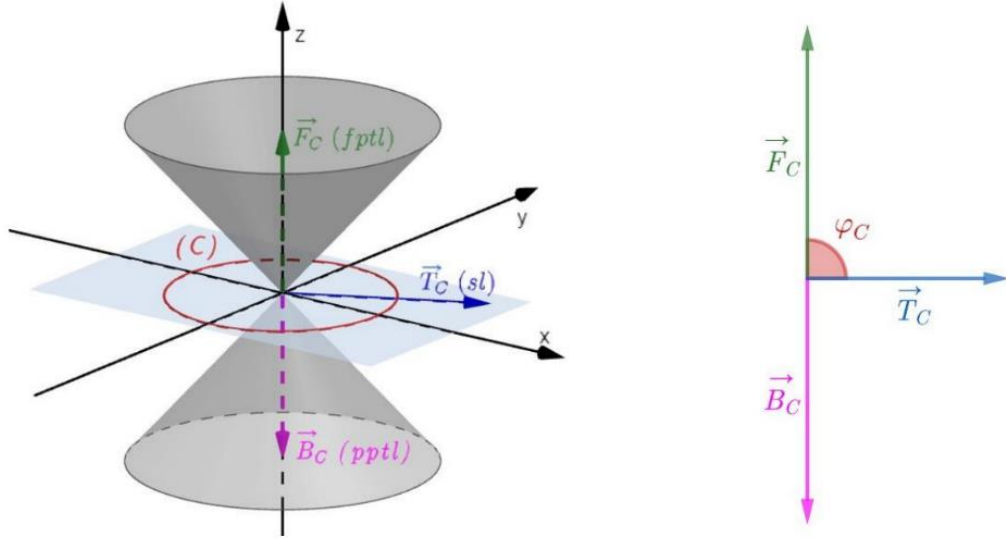
$$\varphi_C = 0 \quad (395)$$

dir, (Şekil 36).

İspat: (7) ifadesinde (333) ile (390) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\left| \left\langle \overrightarrow{F_C}(t), \overrightarrow{T_C}(t) \right\rangle \right| = \sinh \varphi_C \quad (396)$$

elde edilir. Diğer yandan (36) ifadesinin her iki tarafı $\overrightarrow{T_C}(t)$ ile Lorentzian iç çarpılıp, gerekli işlemler yapılırsa yine (396) ifadesi elde edilir. Ayrıca (1) ifadesinde (333) ve (390) ifadeleri yerine yazılırsa



Şekil 36. (C) teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ de $\overrightarrow{F}_C(t)$ Darboux vektörü

$$\langle \overrightarrow{F}_C(t), \overrightarrow{T}_C(t) \rangle = 0 \quad (397)$$

bulunur. (396) ve (397) ifadelerinin eşitliklerinden

$$\sinh \varphi_C = 0 \quad (398)$$

elde edilir. Diğer yandan (4) ifadesinde (333) ile (390) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\langle \overrightarrow{F}_C(t), \overrightarrow{B}_C(t) \rangle = \cosh \varphi_C \quad (399)$$

elde edilir. Diğer yandan (36) ifadesinin her iki tarafı $\overrightarrow{B}_N(t)$ ile Lorentzian iç çarpılıp, gerekli işlemler yapılırsa yine (396) ifadesi elde edilir. Ayrıca (1) ifadesinde (333) ve (390) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\langle \overrightarrow{F}_C(t), \overrightarrow{B}_C(t) \rangle = 1 \quad (400)$$

elde edilir. (399) ve (400) ifadelerinin eşitliklerinden

$$\cosh \varphi_C = 1 \quad (401)$$

elde edilir. (398) ve (401) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\varphi_C = 0$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.9. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin yay uzunluğu $s_C(t)$ olmak üzere

$$s_C(t) = nt + \frac{\pi n}{2}. \quad (402)$$

İspat: $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin $\left[-\frac{\pi}{2n}, t\right]$ aralığındaki yay uzunluğu (45) ifadesine göre

$$s_C(t) = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t \|\vec{C}'(t)\| dt = n \int_{-\frac{\pi}{2n}}^t dt = nt + \frac{\pi n}{2} \quad (403)$$

olur. Gerçekten (403) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$t = \frac{s_C}{n} - \frac{\pi}{2} \quad (404)$$

bulunur. (404) ifadesi timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin denklemi olan

$$\vec{C}(t) = \left(-n \sin t, -n \cos t, -\frac{n}{m} \right)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa bu eğri birim hızlı bir eğri olur, yani $\left\| \frac{d\vec{C}(t)}{ds_C} \right\| = 1$.

Teorem 4.6.10. $\mathbb{E}_1^3$ te timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike teğetler gösterge eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ te ve $\mathbb{S}_1^2$ deki geodezik eğrilikleri sırasıyla $k_C(t)$ ve $\gamma_C(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} k_C(t) = \frac{1}{|n|}, \\ \gamma_C(t) = \frac{1}{|m|}. \end{cases} \quad (405)$$

İspat: Timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin (C) spacelike pol gösterge eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ teki geodezik eğriliği $k_T(t)$, (46) ifadesinden

$$k_C(t) = \|\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t)\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t), \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) \right\rangle} \quad (406)$$

dir. (351) ifadesi (406) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_C(t) = \frac{1}{|n|} \quad (407)$$

olur. Diğer yandan (C) spacelike pol gösterge eğrisinin $\mathbb{S}_1^2$ deki geodezik eğriliği $\gamma_C(t)$, (47) ifadesinden

$$\gamma_C(t) = \|\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t)\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t), \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) \right\rangle} \quad (408)$$

şeklinde yazılır. (48) ifadesinden

$$\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) = \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) + \varepsilon \left\langle S(\overrightarrow{T_C}(t)), \overrightarrow{T_C}(t) \right\rangle \overrightarrow{C}(t) \quad (409)$$

dir. Burada

$$\varepsilon = \langle \vec{C}(t), \vec{C}(t) \rangle = 1. \quad (410)$$

Ayrıca

$$S(\vec{T}_C(t)) = -\overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) = -\vec{T}_C(t) \quad (411)$$

olur. (411) ifadesinden

$$\langle S(\vec{T}_C(t)), \vec{T}_C(t) \rangle = \langle -\vec{T}_C(t), \vec{T}_C(t) \rangle = -1 \quad (412)$$

elde edilir. (410) ve (412) ifadeleri (409) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D_{T_C} T_C}}(t) = \overrightarrow{D_{T_C} T_C}(t) + \vec{C}(t) \quad (413)$$

olur. (59), (351) ve (349) ifadeleri (413) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overrightarrow{D_{T_C} T_C}}(t) &= \left(\frac{\sin t}{n}, \frac{\cos t}{n}, 0 \right) + \left(-n \sin t, -n \cos t, -\frac{n}{m} \right), \\ \overrightarrow{\overrightarrow{D_{T_C} T_C}}(t) &= \left(\frac{\sin t(1-n^2)}{n}, \frac{\cos t(1-n^2)}{n}, -\frac{n}{m} \right) \end{aligned} \quad (414)$$

olarak bulunur. (414) ifadesi kendisiyle iç çarpılırsa

$$\left\langle \overrightarrow{\overrightarrow{D_{T_C} T_C}}(t), \overrightarrow{\overrightarrow{D_{T_C} T_C}}(t) \right\rangle = \frac{1}{m^2} \quad (415)$$

elde edilir. (415) ifadesi (408) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\gamma_C(t) = \frac{1}{|m|} \quad (416)$$

olur. (407) ve (416) ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

(T) timelike teğetler gösterge eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilikleri, Frenet türev vektörleri, $\lambda_T(t)\overrightarrow{D_{T_T}N_T}(t) + \mu_T(t)\overrightarrow{D_{T_T}^2N_T}(t) + \overrightarrow{D_{T_T}^3N_T}(t) = \vec{0}$ denkleminin katsayıları, Darboux vektörü, yay uzunluğu, $\mathbb{E}_1^3$ e ve $\mathbb{S}_1^2$ ye göre geodezik eğrilikleri hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 1’deki gibi elde edilmiştir.

Tablo 1. (T) timelike teğetler gösterge eğrisinin geometrik elemanları

(T) timelike teğetler gösterge eğrisinin geometrik elemanları	
$\overrightarrow{T_T}(t) = \left(\frac{n}{m} \sin t, \frac{n}{m} \cos t, n \right)$ tl	$\overrightarrow{D_{T_T}T_T}(t) = \left(\frac{\cos t}{\sin(nt)}, -\frac{\sin t}{\sin(nt)}, 0 \right)$ sl
$\overrightarrow{B_T}(t) = \left(n \sin t, n \cos t, \frac{n}{m} \right)$ sl	$\overrightarrow{D_{T_T}N_T}(t) = \left(-\frac{m \sin t}{n \sin(nt)}, -\frac{m \cos t}{n \sin(nt)}, 0 \right)$ sl
$\overrightarrow{N_T}(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$ sl	$\overrightarrow{D_{T_T}B_T}(t) = \left(\frac{m \cos t}{\sin(nt)}, -\frac{m \sin t}{\sin(nt)}, 0 \right)$ sl
$v_T(t) = \frac{n}{m} \sin(nt)$	$\frac{dt}{dt_T} = \frac{m}{n \sin(nt)}$
$\kappa_T(t) = \frac{1}{\sin(nt)}$	$\lambda_T = -\frac{1}{\sin^2(nt)}$
$\tau_T(t) = \frac{m}{\sin(nt)}$	$\mu_T = \frac{3m \cos t}{\sin^2(nt)}$
$\varphi_T = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m+1}{m-1}\right)$	$s_T(t) = -\frac{\cos(nt)}{m}$
$\overrightarrow{F_T}(t) = (0, 0, 1)$ tl	$k_T(t) = \frac{1}{\cos \varphi}$
$\overrightarrow{C_T}(t) = (0, 0, 1)$ tl	$\gamma_T = \tan \varphi$

(N) spacelike normaller gösterge eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilikleri, Frenet türev vektörleri, φ_N açısı, $\lambda_N(t)\overrightarrow{D_{T_N}N_N}(t)+\mu_N(t)\overrightarrow{D_{T_N}^2N_N}(t)+\overrightarrow{D_{T_N}^3N_N}(t)=\vec{0}$ denkleminin katsayıları, Darboux vektörü, yay uzunluğu, $\mathbb{E}_1^3$ e ve $\mathbb{H}_0^2$ ye göre geodezik eğrilikleri hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 2'deki gibi elde edilmiştir.

Tablo 2. (N) spacelike normaller gösterge eğrisinin geometrik elemanları

(N) spacelike normaller gösterge eğrisinin geometrik elemanları	
$\overrightarrow{T_N}(t)=(\cos t, -\sin t, 0)$ sl	$\overrightarrow{D_{T_N}T_N}(t)=\left(-\frac{m\sin t}{n}, -\frac{m\cos t}{n}, 0\right)$ sl
$\overrightarrow{B_N}(t)=(0, 0, -1)$ tl	$\overrightarrow{D_{T_N}N_N}(t)=\left(-\frac{m\cos t}{n}, \frac{m\sin t}{n}, 0\right)$ sl
$\overrightarrow{N_N}(t)=(-\sin t, -\cos, 0)$ sl	$\overrightarrow{D_{T_N}B_N}(t)=(0, 0, 0)$ sl
$v_N(t)=\frac{n}{m}$	$\frac{dt}{dt_N}=\frac{m}{n}$
$\kappa_N(t)=\frac{m}{n}$	$\lambda_N=\frac{m^2}{n^2}$
$\tau_N(t)=0$	$\mu_T=0$
$\varphi_N=0$	$s_N=\frac{nt}{m}+\frac{\pi}{2m}$
$\overrightarrow{F_N}(t)=(0, 0, 1)$ tl	$k_N(t)=\left \frac{m}{n}\right $
$\overrightarrow{C_N}(t)=(0, 0, 1)$ tl	$\psi_N(t)= m $

(B) timelike teğetler gösterge eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilikleri, Frenet türev vektörleri, φ_B açısı, $\lambda_B(t)\overrightarrow{D_{T_B}N_B}(t)+\mu_B(t)\overrightarrow{D_{T_B}^2N_B}(t)+\overrightarrow{D_{T_B}^3N_B}(t)=\vec{0}$ denkleminin katsayıları, Darboux vektörü, yay uzunluğu, $\mathbb{E}_1^3$ e ve $\mathbb{S}_1^2$ ye göre geodezik eğrilikleri hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 3'teki gibi elde edilmiştir.

Tablo 3. (B) timelike binormeller gösterge eğrisinin geometrik elemanları

(B) timelike binormeller gösterge eğrisinin geometrik elemanları	
$T_B(t)=\left(-\frac{n}{m}\sin t, -\frac{n}{m}\cos t, -n\right)$ tl	$\overrightarrow{D_{T_B}T_B}(t)=\left(-\frac{\cos t}{\cos(nt)}, \frac{\sin t}{\cos(nt)}, 0\right)$ sl
$B_B(t)=\left(n\sin t, n\cos t, \frac{n}{m}\right)$ sl	$\overrightarrow{D_{T_B}N_B}(t)=\left(\frac{m\sin t}{n\cos(nt)}, \frac{m\cos t}{n\cos(nt)}, 0\right)$ sl
$N_B(t)=(-\cos t, \sin t, 0)$ sl	$\overrightarrow{D_{T_B}B_B}(t)=\left(\frac{m\cos t}{n\cos(nt)}, -\frac{m\sin t}{n\cos(nt)}, 0\right)$ sl
$v_B(t)=\frac{n}{m}\cos(nt)$	$\frac{dt}{dt_B}=\frac{m}{n\cos(nt)}$
$\kappa_B(t)=\frac{1}{\cos(nt)}$	$\lambda_B(t)=-\frac{1}{\cos^2(nt)}$
$\tau_B(t)=-\frac{m}{\sin(nt)}$	$\mu_B(t)=-\frac{3m\sin t}{\cos^2(nt)}$
$\varphi_B=\operatorname{arctanh}\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m-1}{m+1}\right)$	$s_B(t)=\frac{\sin(nt)+n}{m}$
$\overrightarrow{F_B}(t)=(0, 0, 1)$ tl	$k_B(t)=\frac{1}{ \cos(nt) }$
$\overrightarrow{C_B}(t)=(0, 0, 1)$ tl	$\gamma_B=\tan(nt)$

(C) spacelike teğetler gösterge eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilikleri, Frenet türev vektörleri, φ_C açısı, $\lambda_C(t)\overrightarrow{D_{T_C}N_C}(t)+\mu_C(t)\overrightarrow{D_{T_C}^2N_C}(t)+\overrightarrow{D_{T_C}^3N_C}(t)=\vec{0}$ denkleminin katsayıları, Darboux vektörü, yay uzunluğu, $\mathbb{E}_1^3$ e ve $\mathbb{H}_0^2$ ye göre geodezik eğrilikleri hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 4'teki gibi elde edilmiştir (Aksan ve Gür, 2022).

Tablo 4. (C) spacelike pol gösterge eğrisinin geometrik elemanları

(C) spacelike pol gösterge eğrisinin geometrik elemanları	
$\overrightarrow{T_C}(t)=(-\cos t, \sin t, 0)$ sl	$\overrightarrow{D_{T_C}T_C}(t)=\left(\frac{\sin t}{n}, \frac{\cos t}{n}, 0\right)$ sl
$\overrightarrow{N_C}(t)=(\sin t, \cos t, 0)$ sl	$\overrightarrow{D_{T_C}N_C}(t)=\left(\frac{\cos t}{n}, -\frac{\sin t}{n}, 0\right)$ sl
$\overrightarrow{B_C}(t)=(0, 0, -1)$ tl	$\overrightarrow{D_{T_C}B_C}(t)=(0, 0, 0)$ sl
$v_C(t)=n$	$\frac{dt}{dt_C}=\frac{1}{n}$
$\kappa_C(t)=\frac{1}{n}$	$\lambda_C(t)=\frac{1}{n^2}$
$\tau_C(t)=0$	$\mu_C=0$
$\varphi_C=0$	$s_C(t)=nt+\frac{\pi}{2}$
$\overrightarrow{F_C}(t)=(0, 0, 1)$ tl	$k_C(t)=\frac{1}{ n }$
$\overrightarrow{C_C}(t)=(0, 0, 1)$ tl	$\gamma_C(t)=\frac{1}{ m }$

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. Benzer çalışmalar, Lorentz uzayındaki diğer karakterizasyonlu Salkowski veya anti-Salkowski eğrileri üzerinde veya farklı uzaylarda da yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Abdel-Aziz, H. S. ve Saad, M. K. (2018). On special curves according to darboux frame in the three dimensional Lorentz space. *Infinite Study*, 54(3). 229-249.
- Akutagawa, K. ve Nishikawa, S. (1990). The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 42(1), 67-82.
- Aksan, B. ve Gür, S. (2022). On the pole indicatrix curve of the spacelike Salkowski curve with timelike principal normal in Lorentzian 3-space. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 12(4), 1168-1179.
- Ali, A. T. (2011). Spacelike Salkowski and anti-Salkowski curves with timelike principal normal in Minkowski 3-space. *Mathematica Aeterna*, 1(4), 201-210.
- Ali, A. T. (2012). Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 20(1), 1–6.
- Alluhaibi, N. ve Abdel-Baky, R. A. (2022). Kinematic geometry of timelike ruled surfaces in Minkowski 3-space $\mathbb{E}_1^3$, *Symmetry*, 14(4), 749.
- Balcı, Y. (2016). *Hiperbolik Spinor ve Minkowski Uzayında Darboux Çatısı. Yüksek Lisans tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.*
- Baş, S. ve Körpınar, T. (2013). Nextensible Flows of Spacelike Curves on Spacelike Surfaces according to Darboux Frame in M_1^3 . *Bol. Soc. Paran. Mat*, 31, 9-17.
- Beem, J.K., Ehrlich, P.E. ve Easley, K.L. (1981). *Global Lorentzian Geometry*, CRC Press, New York.
- Bilici, M., (2009). *Timelike veya Spacelike İnvölüt – Evolüt Eğri Çiftleri Üzerine. Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.*
- Bilici, M. ve Çalışkan, M. (2019). Some new results on the curvatures of the spherical indicatrices of the involutes of a spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space. *MathLAB Dergisi* , 2 (1), 110-119.
- Bilici, M. ve Çalışkan, M. (2022). New characterizations for spherical indicatrices of involutes of a spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-space. *Journal of Science and Arts*, 22(3), 629-638.
- Bilici, M. (2023). A Survey on Timelike-Spacelike Involute-Evolute Curve Pair. *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 16(1), 49-57.

- Birman, G. S. and Nomizu, K. (1984). Trigonometry in Lorentzian geometry. *The American Mathematical Monthly*, 91(9), 534–549.
- Bulut, F. ve Bektaş, M. (2020). Special helices on equiform differential geometry of spacelike curves in Minkowski space-time. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1045–1056.
- Bukcu, B. ve Karacan, M. K. (2007). On the involute and evolute curves of the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 2(5), 221-232.
- Çalışkan, A. ve Uğurlu, H.H. (2012). *Spacelike ve timelike yüzeyler geometrisi*, Celal Bayar Üniversitesi Rektörlük Matbaası, Manisa.
- Çapın, R. (2016). *Minkowski Uzayında Küresel Gösterge Eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.*
- Erdoğan, M. ve Yavuz, A. (2019). Minkowski Uzayında Sabit Eğrilikli İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri için Bazı Karakterizasyonlar. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 19(3), 605-614.
- Güler, E. (2010). *3-Boyutlu Minkowski Uzayında Light-like Üreteç Eğrili Time-like Helisoidal ve Dönel Yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.*
- Gür, S. ve Şenyurt, S. (2010). Frenet Vectors and Geodesic Curvatures of Spheric Indicators Of Salkowski Curve in $\mathbb{E}^3$. *Hadronic Journal*, 33(5), 485- 512.
- Gür, S. ve Şenyurt, S. (2012). On the dual spacelike-spacelike involute-evolute curve couple on dual Lorentzian space. *International Journal of Mathematical Engineering and Science*, 1(5).
- Gür, S. ve Şenyurt, S. (2013). Spacelike-timelike involute-evolute curve couple on dual Lorentzian space. *J. Math. Comput. Sci*, 3(4), 1054-1075.
- Gür Mazlum, S., Şenyurt, S. ve Bektaş, M. (2022). Salkowski curves and their modified orthogonal frames in $\mathbb{E}^3$, *Journal of New Theory*, 40, 1226.
- Gür Mazlum, S. (2023). Geometric properties of timelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space. *Filomat*, 37(17), 5735-5749.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1998). *Diferansiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (2012). *Diferansiyel Geometri-II*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya.

- Izumiya, S. ve Tkeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 28(2), 153–163.
- Kılıçoğlu, Ş. ve Hacısalihoğlu, H. (2008). On the b-scrolls with time-like generating vector in 3dimensional Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$. *Beykent University Journal of Science and Technology*, 3(2), 55–67.
- Kızıltuğ, S. ve Çakmak, A. (2013). Developable ruled surfaces with Darboux Frame in Minkowski 3-space. *Life Science Journal*, 10(4), 1906-1914.
- Kızıltuğ, S. ve Yaylı, Y. (2013). Timelike Tubes with Darboux frame in Minkowski 3-space. *International Journal of Physical Sciences*, 8(1), 31-36.
- Külahcı, M., Bektaş, M. ve Ergüt, M. (2009). On harmonic curvatures of a Frenet curve in Lorentzian space. *Chaos, Solitons and Fractals*, 41(4), 1668–1675.
- Li, Y. ve Pei, D. (2016). Evolutes of dual spherical curves for ruled surfaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(11), 3005-3015.
- Li, Y., Pei, D., Takahashi, M. ve Yu, H. (2018). Envelopes of Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 69(2), 631653.
- Li, Y., Wang, Z. ve Zhao, T. (2020). Slant helix of order n and sequence of Darboux developables of principal-directional curves. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(17), 98889903.
- Li, Y., Mazlum, S.G. ve Şenyurt, S. (2023). The Darboux trihedrons of timelike surfaces in the Lorentzian 3-space. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 20(2), 2350030-82.
- López, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1), 44-107.
- Monterde, J. (2009). Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. *Computer Aided Geometric Design*, 26(3), 271-278.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, California.
- Önder, M. ve Uğurlu, H. H. (2013). Frenet frames and invariants of timelike ruled surfaces. *Ain Shams Engineering Journal*, 4(3), 507-513.
- Özdemir, M. (2020). *Diferansiyel Geometri*, Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım, İzmir.
- Ratcliffe, J. G. (1994). Hyperbolic geometry. In *Foundations of Hyperbolic Manifolds* (pp. 56-104). Springer, New York, NY.

- Sabuncuoğlu, A. (2016). *Diferansiyel Geometri*, Nobel Yayınları, Ankara.
- Salkowski, E. (1909). Zur transformation von raumkurven. *Mathematische Annalen*, 66(4), 517-557.
- Struik, D. J. (1961). *Lectures on classical differential geometry*. Courier Corporation.
- Şenatalar, M. (1978). *Differential geometry (curves and surfaces theory)*, Istanbul State Engineering and Architecture Academy Publications: Istanbul, Türkiye.
- Şenyurt, S. ve Gür, S. (2012). Timelike-spacelike involute-evolute curve couple on dual Lorentzian space. *J. Math. Comput. Sci.* 2(6), 1808-1823.
- Şenyurt, S., Gür, S. ve Özyılmaz, E. (2015). The Frenet vectors and the geodesic curvatures of spherical indicatrix of the timelike Salkowski curve in Minkowski 3-space. *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, 7(4), 20-42.
- Şenyurt, S. ve Gür, S. (2017). Spacelike surface geometry. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(09), 1750118.
- Şenyurt, S. ve Uzun, M. (2020). Salkowski Eğrisinin Birim Darboux Vektörünün Sabban Çatısından Elde Edilen Smarandache Eğrileri. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 10(3), 1966-1974.
- Şenyurt, S. ve Eren, K. (2020). Frenet Çatısına Göre Spacelike Normalli Spacelike Salkowski Eğrisinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri. *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 13, 7-17.
- Turgut, A. (1995). *3 Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.*
- Uğurlu, H. H. ve Topal, A. (1996). Relation between Darboux instantaneous rotation vectors of curves on time-like surface. *Mathematical and Computational Applications*, 1(2), 149–157.
- Uğurlu, H. H. ve Kocayigit, H. (1996). The Frenet and Darboux instantaneous rotation vectors of curves on time-like surface. *Mathematical and Computational Applications*, 1(2), 133–141.
- Uğurlu, H. H. (1997). On the geometry of timelike surfaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 46, 211-223.
- URL-1, <https://uzayla.com/okludin-elementleri-genel-bir-bakis/> . 13 Ekim 2022.
- URL-2, <http://sertoz.bilkent.edu.tr/elemanlar.htm> . 15 Ekim 2022.
- URL-3, https://tr.wikipedia.org/wiki/Nikolay_Lobačevski . 1 Kasım 2022
- URL-4, <https://kmatematikatolyesi.com/2019/09/12/yeni-garip-dunya/> .4 Kasım 2022.

- URL-5, https://tr.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss .12 Kasım 2022.
- URL-6, <http://www.leblebitozu.com/bati-dunyasinin-onemli-matematikcileri-bolum-2/>.
18 Kasım 2022.
- URL-7, <https://beyinsizler.net/einstein-uzay-zaman-ve-izafiyet-teorisi/>.13 Aralık 2022.
- URL-8, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hermann_Minkowski_2.png . 13 Aralık 2022.
- URL-9, https://tr.wikipedia.org/wiki/Hendrik_Lorentz . 13 Aralık 2022.
- URL-10, https://en.wikipedia.org/wiki/Michel_Ange_Lancet . 13 Aralık 2022.
- URL-11, <https://www.technopat.net/2014/05/09/bilim-dunyasi-dnanin-alfabesiyle-oyunuyor/> . 15 Aralık 2022.
- URL-12, <https://okuryazarim.com/sembolizmde-merdiven/> . 17 Aralık 2022.
- URL-13, https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Leopold_Salkowski . 20 Aralık 2022.
- Walrave, J. (1995). *Curves and surfaces in Minkowski space*, Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit, Leuven, Belgium.
- Van de Woestijne, I. (1990). Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. *Geometry and topology of submanifolds*, 2, 344-369.
- Yılmaz, İ. (2018). *Lorentz-Minkowski 3-Boyutlu uzayda yüzeyler üzerinde eğrilerin Darboux görüntüleri. Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.*
- Yüce, S. (2020). *Diferansiyel Geometri*, Pegem Akademi Yayıncılık, Ankara.
- Yüksel, N., Saltık, B. ve Damar, E. (2014). Parallel curves in Minkowski 3-space. *Gümüşhane University Journal of Science and Technology*, 12(2), 480-486.
- Yüksel, N., Vanlı, A. T. ve Damar, E. (2015). A new approach for geometric properties of DNA structure in E^3 , *Life Science Journal*, 12(2), 7179.

ÖZGEÇMİŞ

İlk ve orta öğrenimini Yozgat ili Boğazlıyan ilçesinde bulunan Uzunlu Cumhuriyet Ortaokulu'nda tamamladı. 2014 yılında Boğazlıyan Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2018 yılında Ordu Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 2019 yılında Ağrı Merkez Mehmet Akif Ersoy Ortaokulu'na atandı. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği ana bilim dalında yüksek lisans yapmaya hak kazandı. Evli ve bir kız çocuğu sahibi.

Akademik Çalışmaları

Yayınlar:

- Aksan, B. ve Gür Mazlum, S. (2022). On the pole indicatrix curve of the spacelike Salkowski curve with timelike principal normal in Lorentzian 3-space. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 12(4), 1168-1179.
- Aksan, B. ve Gür Mazlum, S. (2023). On The Spherical Indicatrix Curves Of The Spacelike Salkowski Curve With Timelike Principal Normal in Lorentzian 3-Space. *Honam Mathematical Journal*, Accepted.

Bildiriler:

- Gür Mazlum, S. ve Aksan B.(2022). On the pole indicatrix curve of the spacelike Salkowski curve with timelike principal normal in Lorentzian 3-space. 11th International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications (IECMSA-2022), 29 Ağustos-1 Eylül 2022, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Gür Mazlum, S. ve Aksan B. (2022). On the spherical indicatrix curves of the spacelike Salkowski curve with timelike principal normal in Lorentzian 3-space. 11th International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications (IECMSA-2022), 29 Ağustos-1 Eylül 2022, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Gür Mazlum, S. ve Aksan B. (2023). On the Darboux frame of the pole indicatrix curve of the spacelike salkowski curve with spacelike binormal in Lorentzian 3-space. 7th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2023), 20-21 Mayıs 2023, Fırat Üniversitesi, Elazığ.