

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Merve NAZİK

4. ANLAMDA s -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ
MERTEBEDEN İNTEGRALLER ARACILIĞIYLA KOORDİNATLARDA
ÇEŞİTLİ EŞİTSİZLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI – 2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

4. ANLAMDA s -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ MERTEBEDEN İNTEGRALLER ARACILIĞIYLA KOORDİNATLARDA ÇEŞİTLİ EŞİTSİZLİKLER

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ

Bu tezde, dikdörtgensel bölge üzerinde konveks fonksiyonlar incelenmiş ve bu fonksiyonlar için koordinatlarda çeşitli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Birinci bölümde, konveks fonksiyonlar ve eşitsizlik teorisinin tarihinden kısaca bahsedilmiş olup, literatürde bulunan çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, konveks fonksiyonlar için temel tanım ve kavramlar yer almış, devamında konveks fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Koordinatlarda konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve kavramlar, bu konveks fonksiyon sınıfları için önceden elde edilmiş çeşitli integral eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerin ispat yöntemleri üçüncü bölümde verilmiştir. Daha sonra bu bölümde koordinatlarda integral eşitsizlikleri için detaylı bir literatür bilgisi sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise öncelikle yeni bir koordinatlarda konveks fonksiyon sınıfı tanımlanmış ve bu sınıf için daha önceden literatürde olan eşitlikler kullanılarak dikdörtgensel bölge üzerinde 4. anlamda s -konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizliklere ilişkin sonuçlar elde edilmiştir.

2023, 85 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, koordinatlarda integral eşitsizlikler, konveks fonksiyon, s -konveks fonksiyon, 4. anlamda s -konveks fonksiyon.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

VARIOUS INEQUALITIES IN COORDINATES VIA FRACTIONAL INTEGRALS FOR s -CONVEX FUNCTIONS IN THE FOURTH SENSE

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Assoc. Prof. Dr. Merve AVCI ARDIÇ

In this thesis, convex functions on the rectangular region are investigated and various integral inequalities are obtained for these functions in coordinates. In the first chapter, the history of convex functions and inequality theory is briefly mentioned, and information about the existing studies in the literature is given. In the second chapter, basic definitions and concepts for convex functions are included, and then the relationship between convex function classes is mentioned. Basic definitions and concepts related to convex functions in coordinates, various integral inequalities and proof methods for these function classes are given in the third chapter. Then, in this section, a detailed literature information for integral inequalities in coordinates is presented. In the fourth chapter, firstly, a new integral equation is introduced, and then, with the help of this equation, results regarding new integral inequalities for convex functions on the rectangular region are obtained.

2023, 85 pages

Key Words: Inequalities, integral inequalities on the coordinates, convex function, s -convex function, s -convex function in the fourth sense.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans tez çalışmamın başlangıcından bu yana, bu alanda çalışmamı destekleyen, bütün enerjisi ve engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımnda eşsiz katkıları bulunan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak Akdemir'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca; tezimin yazım süresi boyunca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen,

Sayın Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU'ya

şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca yanımda olan ve yardımlarını esirgemeyen, ilgisini ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim,

Sayın Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e

teşekkür ederim.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen aileme ve varlığıyla bana güç veren biricik kızım Zeynep Ferhan NAZİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca; tez çalışmam boyunca maddi destek sağlayan bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Haziran 2023

Merve NAZİK

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	5
2.1. Genel Kavramlar.....	5
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler	16
3. MATERYAL VE YÖNTEM	23
3.1. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar.....	23
3.2. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı İntegral Eşitsizlikler	27
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	45
4.1. Koordinatlarda 4. Anlamda s -Konveks Fonksiyon.....	45
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	78
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	83

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Konveks Küme ve Konveks Olmayan Küme	5
2.2 Aralık üzerinde konveks fonksiyon	6
2.3 Quasi-konveks olmayan fonksiyon	10
2.4 Quasi konveks olmasına rağmen konveks olmayan fonksiyon	11
2.5 Quasi-monotonik fonksiyon	12
3.1 $\varsigma_1(s, t) = s^2 + t^2$ ve $\varsigma_2(s, t) = e^s + t^4$ konveks fonksiyonları	24



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
U	: $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
U^o	: U 'nun İçi
$L(\Delta)$	: Δ Bölgesi Üzerinde İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_1[\iota_1, \iota_2]$	: $[\iota_1, \iota_2]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_2(\Delta)$	: Δ Bölgesi Üzerinde İkinci Mertebeden İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
ζ''	: ζ Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}$	: ζ Fonksiyonunun λ ve γ 'ya Göre Kısmi Türevi
$J^{\alpha, \beta}$	: (α, β) mertebeden Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}^{AB}I^\alpha$	: α mertebeden Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali
$K_m(b)$	: m -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	: (α, m) -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^4	: Dördüncü Anlamda s -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$\max$	: Maksimum
$\min$	: Minimum
$Q(U)$	: Godunova-Levin Fonksiyonu
$P(U)$	: P -Fonksiyon
$C(U)$	: Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(U)$	: <i>Quasi</i> -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$J(U)$	: Jensen -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$QC(\Delta)$	: Δ Üzerinde <i>quasi</i> -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$J(\Delta)$	: Δ Üzerinde Jensen -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\left\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right\ _\infty$	: ζ 'nin λ, γ 'ya Göre Kısmi Türevinin Sonsuz Normu

1. GİRİŞ

Matematiğin tüm alanlarında olduğu gibi, eşitsizlikler mühendisliğin çeşitli alanlarında, sayısal entegrasyonda, istatistikte ve yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynar. Bu haliyle eşitsizlik kuramı birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve diğer birçok alanla bağlantılı olarak tarihsel bir gelişim göstermiştir. Eşitsizlik teorisi üzerine ilk çalışma; Hardy, Littlewood ve Pólya'nın 1934 tarihli "Inequalities" kitabıdır. Bu kitapta araştırmacılar birçok yeni eşitsizliği ve bunlarla ilgili uygulamaları tanıtarak eşitsizlik konusunu ayrıntılı olarak araştırmışlardır. Beckenbach and Bellman (1961) yılında yazılan "Inequalities" adlı ikinci kitap, 1934-1960 döneminde eşitsizlik hakkında bazı ilginç bulgular içermiştir. Daha sonra, Mitrinovic and Vasic (1970) yılında, bu iki kitapta bulunmayan yeni temalar içeren "Analytic Inequalities" adlı bir kitap yazmışlardır. Bu çalışmalara ek olarak, Mitrinovic et al. (1993) yılında yazılan "Classical and New Inequalities in Analysis" ve Pachpatte (2005) yılındaki "Mathematical Inequalities" adlı eseri eşitsizlikler konusunda yeni sonuçlar ortaya koymakta ve konu ile ilgili literatüre katkı sağlayan eserler arasında yer almaktadır. Son yıllarda Dragomir, Lakshmikantham ve Agarwal gibi araştırmacılar bu konuda çok fazla kitap, makale ve monografi yazmışlardır.

Günümüzde, Hadamard (veya Hermite-Hadamard) integral eşitsizliği, en önemli integral eşitsizliklerinden biridir. Hermite (1822-1901) bu eşitsizliği kanıtsız olarak Ekim 1881'de Mathesis dergisine sunmuştur. Bu çalışmadan neredeyse yirmi yıl sonra, Jensen eşitsizliği J.L.W.V. Jensen tarafından tanıtılmıştır (1905-1906). Konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikler konusu bu iki eserle ünlenmiştir ve bugüne kadar pek çok araştırmacının ilgisini çekmeye devam etmiştir.

20. yüzyılın başlarından günümüze kadar, bu alandaki araştırmacılar çeşitli tipte konveks fonksiyon sınıfları elde etmişler, bu fonksiyon sınıflarının özelliklerini incelemişler ve birçok integral eşitsizliği keşfetmişlerdir. Beckenbach and Bellman (1961) ve Mitrinovic and Vasic (1970) gibi birçok araştırmacı, araştırmalarında konveks eşitsizlikler sorununu ele almıştır. Yalnızca konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak, Pečarić and Beesack (1987) yazdıkları "Convex Functions: Inequalities" dir. Ek olarak, Roberts and Varberg (1973), Pečarić and Tong (1992), Niculescu and Persson (2006) dahil birçok araştırmacı konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çok fazla çalışma yapmışlardır.

Herhangi bir keyfi reel veya kompleks mertebeden türev ve integral hesabı, kesirli kalkülüs olarak bilinir. Kesirli kalkülüs son zamanlarda çok önemli hale gelmiştir. Ancak kesirli kalkülüsün temelleri 1695 yılına dayanmaktadır, bu nedenle çok yeni bir konu değildir. Liouville'nin ismi, matematik literatüründe etkili türev ve integral kavramlarıyla bağlantılıdır. Bununla birlikte, diferansiyel ve integral kalkülüsün yaratıcıları genellikle hem tam mertebeden hem de kesirli mertebeden türevlerini düşünmüşlerdir. Samko et al. (1993) yılındaki kitabından, kesirli türevlerin Leibniz'in çalışmalarının konusu olduğunu öğreniyoruz. Aynı zamanda Euler de kesirli türevler konusuyla ilgilenmiştir. Kesirli integral-türev kavramları Liouville, Abel, Riemann, Letnikov, Weyl, Hadamard ve matematiksel analizde önemli konularda gelişimi olan bu konunun ilerlemesini etkileyen geçmişten bugüne, iyi bilinen birçok matematikçinin de üstüne çalıştığı bir araştırma konusu olmuştur Loverro (2004); Ross (1977). Kesirli hesap tekniğinin matematik uygulamalarının çoğu 20. yüzyılda başlamış olsa da, mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarılar elde etmesi ancak son yüzyılda gerçekleşebilmiştir.

Kesirli türevin literatürde birçok tanımı vardır. Kesirli türev tanımını yapmak için bu tanımların birçoğu integral formundan yararlanır. Bu tür tanımlar arasında Riemann-Liouville ve Caputo en ünlüleridir. Grünwald-Letnikov'un tanımı, kesirli türevin tanımı için bir sınır formundan yararlanır. Bu kesirli türevlerin tanımlarıyla ilgili olarak çok sayıda çalışma yapılmıştır. Yukarıda adı geçen kesirli türev tanımları da dahil olmak üzere, literatürdeki çok sayıda kesirli türev tanımının klasik türev tanımından ortak bir özelliği vardır: lineer olma Khalil et al. (2014). Bunun dışında bir uyum tipik olarak söz konusu değildir. Örneğin, kesirli türevin Riemann-Liouville tanımında sabitin kesirli türevi sıfır değildir. Yine klasik türevdeki iki fonksiyonun çarpımı ve bölümü için türev formülü birçok kesirli türev için geçerli değildir. Benzer şekilde, kesirli türevlerin birçok tanımı, klasik türevdeki zincir kuralını sağlamaz. Bu tür zorlukların üstesinden gelmek için, Khalil et al. (2014) yılında kesirli türevlere ve integral teorisine dayanan uyumlu kesirli türev tanımını sunmuşlardır.

Set (2010), "Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri" adlı doktora tezinde, E -konveks ve $E - m$ -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Daha sonra m -konveks, (α, m) -konveks, h -konveks ve s -konveks gibi birçok farklı konveks fonksiyon sınıfı için bazı genellemeler ve yeni integral eşitsizlikleri vermiştir.

Alomari (2011), "Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski And Simpson Type For Convex, Quasi Convex And Convex Mappings And Applications" adlı doktora tezinde, *quasi*-konveks ve konveks fonksiyon sınıflarını kullanarak Hermite-Hadamard,

Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde etmiş ve bu eşitsizlikler için uygulamalar vermiştir .

Akdemir (2012)'in, "Farklı türden konveks fonksiyonlar için koordinatlarda integral eşitsizlikler" adlı doktora tezinde, koordinatlarda bazı konveks fonksiyon sınıfları incelenmiş ve bu fonksiyonlar için koordinatlarda çeşitli integral eşitsizlikleri bulunmuştur. Bununla birlikte, (α, m) -konveks, s -konveks, p -fonksiyon gibi birçok konveks fonksiyonların çarpımlarına ait koordinatlarda integral eşitsizlikleri bulunmuştur.

Avcı Ardıç (2013), "Konveks fonksiyonların çeşitli sınıfları için integral eşitsizlikler" isimli doktora tezinde $\varphi_{h,m}$ -konveks fonksiyon tanımını yapmış ve bu sınıf için eşitsizlikler oluşturmuştur. Buna ek, literatürdeki lemmalar kullanılarak konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler bulmuştur. s -konveks fonksiyonlarda ise Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Onay (2021), "Riemann integraller yardımıyla koordinatlarda çeşitli integral eşitsizlikler" adlı tez çalışmasında bir integral eşitliği ve ispatı verilmiş olup bu eşitlik yardımıyla konveks fonksiyonlar için koordinatlarda integral eşitsizliklere erişilmiştir. Sonuçların kanıtlanmasında çift katlı integraller için Hölder ve Power mean eşitsizlikleri ve konveks fonksiyon tanımı kullanılmıştır .

Eken (2022) "Fejer inequality for s -convex functions in the fourth sense" adlı makalesinde, 4. anlamda s -konveks fonksiyon adında yeni bir sınıf tanımlamış ve 4. anlamda s -konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler kurmuştur. Ayrıca bu eşitsizliklerin bazı uygulama örneklerini sunmuştur. Bu uygulamaları, Gauss hata fonksiyonu, Gama fonksiyonu ve Fresnel integralleri için sınır fonksiyonları ile sonuçlanmıştır .

Kemali (2021), "Hermite-Hadamard Type Inequality for s -Convex Functions in the Fourth Sense" adlı çalışmasında 4. anlamda s -konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğini bulmuştur. Ayrıca, Digamma fonksiyonlarını içeren bazı uygulama örneklerini sunmuştur .

Akdemir et al. (2022a), "Simpson's type inequalities for s -convex functions in the fourth sense" adlı çalışmada 4. anlamda s -konveks fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Hölder ve Young eşitsizlikleri kullanılarak yeni eşitsizlikler oluşturulmuştur .

Akdemir et al. (2022b), "New Approaches for Differentiable s -Convex Functions in the Fourth Sense via Fractional Integral Operators" adlı çalışmada türevlenebilir 4. anlamda s -konveks fonksiyonlar için kesirli mertebeden integral operatörleri kullanılarak yeni yaklaşımlar elde edilmiştir. Ayrıca Hölder ve Young eşitsizlikleri kullanılarak yeni eşitsizlikler

elde edilmiştir .

Aslan and Akdemir (2022), "Exponentially convex functions on the co-ordinates and related integral inequalities" adlı çalışmada, koordinatlar üzerinde üstel konveks fonksiyonlar tanımlanmış ve Hadamard tipi temel bir integral eşitsizliği koordinatlar üzerinde üstel konveks fonksiyonlar için kanıtlanmıştır .

Bayrak (2022), " Koordinatlarda s -konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri" adlı tezinde koordinatlarda s -konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri bulmuştur .

Bu çalışmanın ilk kısmında, koordinatlarda konveks fonksiyonların birçoğu ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Çalışmanın ikinci kısmında, konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve özelliklerin bazıları ile farklı türden konveks fonksiyon sınıflarının bazıları için integral eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü kısımda, koordinatlarda konveks fonksiyonlara ilişik tanımlamalar yapılmış ve bu fonksiyon sınıflarına ait bazı integral eşitsizlikler verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü kısmında ise çalışmanın önceki bölümünde verilen integral eşitlikler yardımıyla 4. anlamda s -konveks fonksiyonlar için koordinatlarda integral eşitsizlikler ispatlanmıştır. Bulguların kanıtlarında, çift katlı integraller için Hölder, Power mean ve Young eşitsizlikleri ve 4. anlamda s -konveks fonksiyon tanımı kullanılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

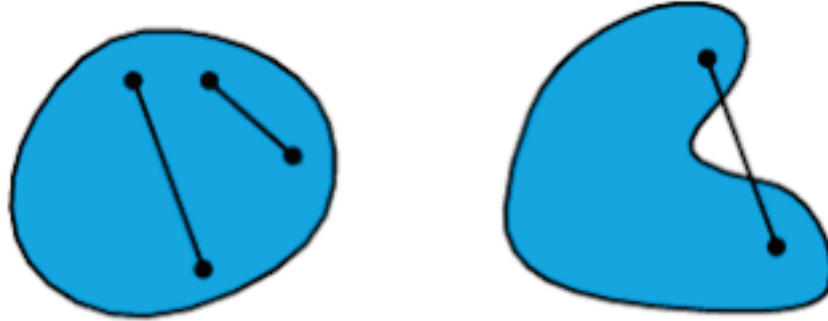
2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmanın dayanağı olan kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay $B \subseteq L$ ve $\mu_1, \mu_2 \in B$ keyfi elemanlar olmak üzere

$$C = \{w \in L : w = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq B$$

oluyorsa B kümesine konveks küme denir.



Şekil 2.1. Konveks Küme ve Konveks Olmayan Küme

Eşitsizlik teorisi için büyük önem taşıyan ve özellikle bu alanda sıklıkla kullanılan konvekslik kavramından birçok bilim insanı büyük ölçüde yararlanmaktadır.

Tanım 2.2 (J-konveks fonksiyon): $U, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık olsun. Bütün $\mu_1, \mu_2 \in U$ için

$$\varsigma\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{\varsigma(\mu_1) + \varsigma(\mu_2)}{2}$$

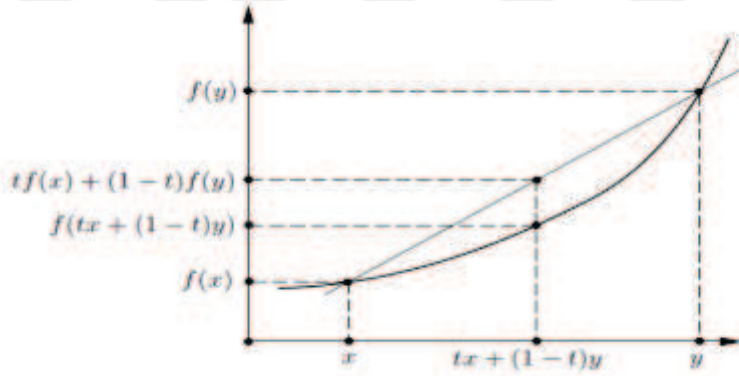
koşulunu gerçekleştiren ς fonksiyonuna U üzerinde Jensen anlamında konveks veya J - konveks fonksiyon denir (Mitrinovic and Vasic, 1970).

Tanım 2.3 (Konveks fonksiyon): $U, \mathbb{R}'de$ bir aralık ve $\varsigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere bütün $\mu_1, \mu_2 \in U$ ve $\gamma \in [0, 1]$ için

$$\varsigma(\gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2) \leq \gamma\varsigma(\mu_1) + (1 - \gamma)\varsigma(\mu_2)$$

şartını sağlayan ς fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pečarić and Tong, 1992).

U üzerinde tanımlanan bir ς fonksiyonunun konveks olması demek geometrik olarak $(\varepsilon, \varsigma(\varepsilon))$ ve $(\varpi, \varsigma(\varpi))$ noktalarını içeren U üzerindeki doğru parçasının ς 'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır (Bakınız 2.2).



Şekil 2.2. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Tanım 2.4 (m -konveks fonksiyon): $\varsigma : [0, w] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $w > 0$ olsun. Her $\mu_1, \mu_2 \in [0, w]$, $\rho \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$\varsigma(\rho\mu_1 + m(1 - \rho)\mu_2) \leq \rho\varsigma(\mu_1) + m(1 - \rho)\varsigma(\mu_2)$$

şartı sağlanıyorsa ς fonksiyonuna m -konvekstir denir (Toader, 1988).

Tanım 2.5 ((α, m) -konveks fonksiyon): $\varsigma : [0, w] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $w > 0$ olsun. Her $\mu_1, \mu_2 \in [0, w]$, $\rho \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$\varsigma(\rho\mu_1 + m(1 - \rho)\mu_2) \leq \rho^\alpha\varsigma(\mu_1) + m(1 - \rho^\alpha)\varsigma(\mu_2)$$

şartı sağlanıyorsa ς fonksiyonuna (α, m) -konvektir denir (Miheşan, 1993).

Burada $(\alpha, m) \in (0, 0)$ için artan fonksiyon, $(\alpha, m) \in (1, m)$ için m -konveks fonksiyon, $(\alpha, m) \in (1, 1)$ için konveks fonksiyon sınıflarına ulaşılır.

Tanım 2.6 (Godunova-Levin fonksiyonu): Negatif olmayan $\varsigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu_1, \mu_2 \in U, \beta \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\varsigma(\beta\mu_1 + (1 - \beta)\mu_2) \leq \frac{\varsigma(\mu_1)}{\beta} + \frac{\varsigma(\mu_2)}{1 - \beta}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ya Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(U)$ sınıfına aittir denir.

$\varsigma \in Q(U)$ ve $\mu, \nu, \eta \in U$ ise,

$$\varsigma(\mu)(\mu - \nu)(\mu - \eta) + \varsigma(\nu)(\nu - \mu)(\nu - \eta) + \varsigma(\eta)(\eta - \mu)(\eta - \nu) \geq 0$$

eşitsizliği gerçekleşir (Godunova and Levin, 1985).

Tanım 2.7 (P -Fonksiyon): Negatif olmayan $\varsigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu_1, \mu_2 \in U, \beta \in (0, 1)$ olmak üzere;

$$\varsigma(\beta\mu_1 + (1 - \beta)\mu_2) \leq \varsigma(\mu_1) + \varsigma(\mu_2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ya P -fonksiyon veya $P(U)$ sınıfına aittir denir (Dragomir et al., 1995).

Tanımlardan görüldüğü üzere, bütün negatif olmayan monoton ve konveks fonksiyonlar $Q(U)$ sınıfına aittir. Ek olarak, $Q(U) \supset P(U)$ ve $P(U)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan monoton, konveks ve quasi -konveks fonksiyonlardan oluşmaktadır.

Tanım 2.8 (Birinci anlamda s -konveks fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0, \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere her $\mu, \nu \in \mathbb{R}_+$ için $\varsigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu;

$$\varsigma(\alpha\mu + \beta\nu) \leq \alpha^s\varsigma(\mu) + \beta^s\varsigma(\nu)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye birinci anlamda s -konveks fonksiyon denir.

Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda, 1994).

Tanım 2.9 (İkinci anlamda s -konveks fonksiyon): $\rho \in [0, 1]$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere her $u, v \in [0, \infty)$ için $\varsigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$\varsigma(\rho u + (1 - \rho)v) \leq \rho^s \varsigma(u) + (1 - \rho)^s \varsigma(v).$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye ikinci anlamda s -konveks fonksiyon denir.

Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner, 1978).

Uyarı 2.1 Eğer yukarıdaki tanımda $s = 1$ seçilirse; klasik konveks fonksiyon tanımına eşdeğer olur.

Tanım 2.10 (Dördüncü anlamda s -konveks fonksiyon): $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks küme ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere her $u, v \in U$ ve $\rho \in [0, 1]$ için $\varsigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$\varsigma(\rho u + (1 - \rho)v) \leq \rho^{\frac{1}{s}} \varsigma(u) + (1 - \rho)^{\frac{1}{s}} \varsigma(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye dördüncü anlamda s -konveks fonksiyon denir.

Bu fonksiyonların sınıfı K_s^4 ile gösterilir (Eken, 2022).

Örnek 2.1 $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\varsigma : L_{\frac{1}{s}}^+[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $c > 0$ için $\varsigma(x) = c \int_a^b |x(t)|^{\frac{1}{s}} dt$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon 4. anlamda s -konvektir. Burada;

$$L_{\frac{1}{s}}^+[a, b] = \left\{ x \in L_{\frac{1}{s}}^+[a, b] \mid x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \right\}$$

biçimindedir.

$x, y \in L_{\frac{1}{s}}^+[a, b]$ ve $0 < \lambda < 1$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}
\varsigma(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= c \int_a^b |\lambda x(t) + (1 - \lambda)y(t)|^{\frac{1}{s}} dt \\
&\leq c \int_a^b \lambda^{\frac{1}{s}} |x(t)|^{\frac{1}{s}} + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} |y(t)|^{\frac{1}{s}} dt \\
&= \lambda^{\frac{1}{s}} c \int_a^b |x(t)|^{\frac{1}{s}} dt + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} c \int_a^b |y(t)|^{\frac{1}{s}} dt \\
&= \lambda^{\frac{1}{s}} \varsigma(x) + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \varsigma(y).
\end{aligned}$$

Böylece, $\varsigma \in K_s^4$ (Eken et al., 2021).

Örnek 2.2 $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $k \in \mathbb{R}_+$ olsun. $\varsigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\varsigma(x) = -k$ şeklinde tanımlansın. O halde ς 4. anlamda s -konveks bir fonksiyondur.

$\lambda \in [0, 1]$ için;

$$\begin{aligned}
\varsigma(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= -k \\
&= -(\lambda + (1 - \lambda))k \\
&= -\lambda k - (1 - \lambda)k \\
&\leq -\lambda^{\frac{1}{s}} k - (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} k \\
&= \lambda^{\frac{1}{s}} \varsigma(x) + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \varsigma(y).
\end{aligned}$$

Böylece $\varsigma \in K_s^4$ (Eken et al., 2021).

Tanım 2.11 (Quasi-konveks fonksiyon): $\varsigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $B \subset \mathbb{R}$ en az bir elemana sahip konveks küme olsun. $\forall \mu_1, \mu_2 \in B$ ve $\theta \in [0, 1]$ iken

$$\varsigma(\theta \mu_1 + (1 - \theta) \mu_2) \leq \max\{\varsigma(\mu_1), \varsigma(\mu_2)\}$$

ise ς 'ya *quasi- konveks fonksiyon* denir.

Eşit koşullarda;

$$\varsigma(\theta\mu_1 + (1 - \theta)\mu_2) < \max\{\varsigma(\mu_1), \varsigma(\mu_2)\}$$

ise ς 'ye *strictly quasi- konveks fonksiyon*,

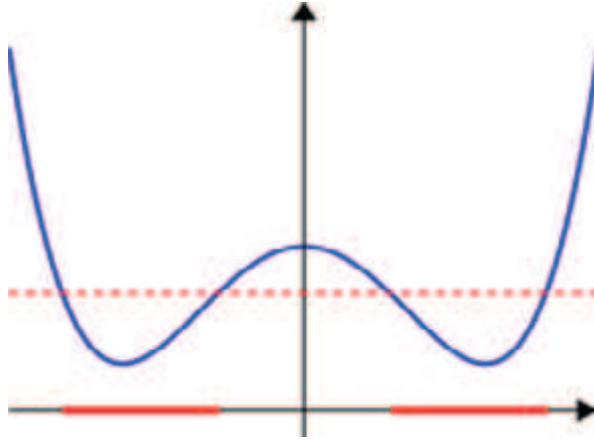
$$\varsigma(\theta\mu_1 + (1 - \theta)\mu_2) \geq \max\{\varsigma(\mu_1), \varsigma(\mu_2)\}$$

ise ς 'ye *quasi -konkav fonksiyon* ve

$$\varsigma(\theta\mu_1 + (1 - \theta)\mu_2) > \max\{\varsigma(\mu_1), \varsigma(\mu_2)\}$$

ise ς 'ye *strictly quasi -konkav fonksiyon* denir (Dragomir and Pearce, 1998).

Sonuç 2.1 *Quasi-konveks olmayan bir fonksiyon konveks değildir (Bakınız 2.3).*



Şekil 2.3. Quasi-konveks olmayan fonksiyon

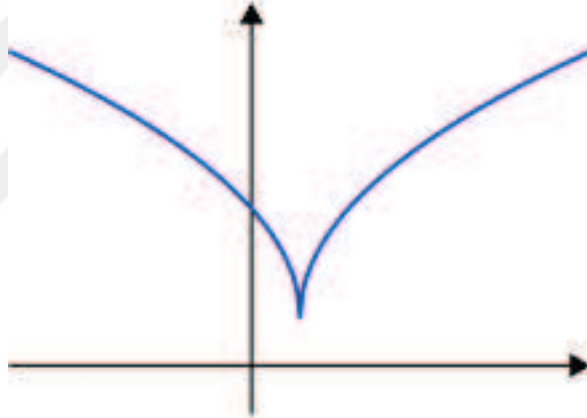
Şekil 2.3'te fonksiyonun tanım kümesinde, kesikli kırmızı çizginin altındaki değerlere sahip noktaların oluşturduğu aralıkların birleşiminde fonksiyon konveks değildir.

Sonuç 2.2 *Herhangi bir konveks fonksiyon quasi -konvektir fakat quasi -konveks her fonksiyon konveks olmak zorunda değildir.*

Örneğin;

$$\varsigma(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 1$$

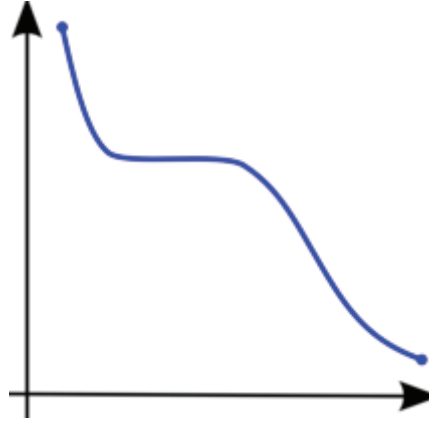
quasi-konvektir çünkü fonksiyonun grafiğindeki iki noktayı birleştiren herhangi bir yatay doğru parçası, fonksiyonun grafiğinin altında kalan hiçbir nokta içermez. Diğer yandan, konveks değildir çünkü grafikte iki noktayı birleştiren ve doğru parçasının bazı noktalarının fonksiyonun grafiğinin altında kaldığı doğru parçaları (yatay değil) vardır. Yani, uç noktalarından biri (1, 1) olan ve diğer uç noktası eğri üzerindeki farklı herhangi bir nokta olan doğru parçası, uç noktalar dışında tamamen eğrinin altında yer alır. (Bakınız 2.4).



Şekil 2.4. Quasi konveks olmasına rağmen konveks olmayan fonksiyon

Tanım 2.12 (Quasi -monotonik fonksiyon): ς hem quasi -konveks hem de quasi -konkav ise ς 'ya quasi -monotonik fonksiyon denir (Greenberg and Pierskalla, 1971).

Daha genel olarak, bir noktaya kadar azalan ve bu noktadan sonra artan bir fonksiyon quasi -monotoniktir (Bakınız 2.5).



Şekil 2.5. Quasi-monotonik fonksiyon

Tanım 2.13 (Beta Fonksiyonu):

$$\beta(\mu_1, \mu_2) = \int_0^1 t^{\mu_1-1} (1-t)^{\mu_2-1} dt, \quad \mu_1, \mu_2 > 0 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. (2.1) ya Euler tipi Beta fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak ifade edilir (Dragomir et al., 1999).

Tanım 2.14 (Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden İntegrali): $\varsigma \in L_1[\nu_1, \nu_2]$ olsun. $\nu_1 \geq 0$ iken $\alpha > 0$ için Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} J_{\nu_1^+}^\alpha \varsigma(u_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\nu_1}^{u_1} (u_1 - \gamma)^{\alpha-1} \varsigma(\gamma) d\gamma, & u_1 > \nu_1, \\ J_{\nu_2^-}^\alpha \varsigma(u_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{u_1}^{\nu_2} (\gamma - u_1)^{\alpha-1} \varsigma(\gamma) d\gamma, & u_1 < \nu_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Burada, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$ şeklinde tanımlı Gama fonksiyonudur ve $J_{\mu_1^+}^0 \varsigma(u_1) = J_{\mu_2^-}^0 \varsigma(u_1) = \varsigma(u_1)$ eşitliği sağlanır (Miller and Ross, 1993).

Tanım 2.15 (Koordinatlarda Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden İntegrali):

$\varsigma \in L_1([\nu_1, \nu_2] \times [\nu_3, \nu_4])$ olsun. $\nu_1, \nu_3 \geq 0$ iken $\alpha, \beta > 0$ için Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$u_1 > \nu_1, u_2 > \nu_3 \quad \text{iken};$$

$$J_{\nu_1^+, \nu_3^+}^{\alpha, \beta} \varsigma(u_1, u_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\nu_1}^{u_1} \int_{\nu_3}^{u_2} (u_1 - \gamma)^{\alpha-1} (u_2 - \lambda)^{\beta-1} \varsigma(\gamma, \lambda) d\lambda d\gamma,$$

$$u_1 > \nu_1, u_2 < \nu_4 \quad \text{iken};$$

$$J_{\nu_1^+, \nu_4^-}^{\alpha, \beta} \varsigma(u_1, u_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\nu_1}^{u_1} \int_{u_2}^{\nu_4} (u_1 - \gamma)^{\alpha-1} (\lambda - u_2)^{\beta-1} \varsigma(\gamma, \lambda) d\lambda d\gamma,$$

$$u_1 < \nu_2, u_2 > \nu_3 \quad \text{iken};$$

$$J_{\nu_2^-, \nu_3^+}^{\alpha, \beta} \varsigma(u_1, u_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{u_1}^{\nu_2} \int_{\nu_3}^{u_2} (\gamma - u_1)^{\alpha-1} (u_2 - \lambda)^{\beta-1} \varsigma(\gamma, \lambda) d\lambda d\gamma,$$

$$u_1 < \nu_2, u_2 < \nu_4 \quad \text{iken};$$

$$J_{\nu_2^-, \nu_4^-}^{\alpha, \beta} \varsigma(u_1, u_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{u_1}^{\nu_2} \int_{u_2}^{\nu_4} (\gamma - u_1)^{\alpha-1} (\lambda - u_2)^{\beta-1} \varsigma(\gamma, \lambda) d\lambda d\gamma.$$

(2.3)

Burada, Γ Gama fonksiyonudur ayrıca;

$$J_{\nu_1^+, \nu_3^+}^{0,0} \varsigma(u_1, u_2) = J_{\nu_1^+, \nu_4^-}^{0,0} \varsigma(u_1, u_2) = J_{\nu_2^-, \nu_3^+}^{0,0} \varsigma(u_1, u_2)$$

$$= J_{\nu_2^-, \nu_4^-}^{0,0} \varsigma(u_1, u_2) = \varsigma(u_1, u_2) \quad (2.4)$$

ve

$$\begin{aligned}
J_{\nu_1^+, \nu_3^+}^{1,1} \varsigma(u_1, u_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\nu_1}^{u_1} \int_{\nu_3}^{u_2} \varsigma(\Theta_1, \Theta_2) d\Theta_2 d\Theta_1, \\
J_{\nu_1^+, \nu_4^-}^{1,1} \varsigma(u_1, u_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\nu_1}^{u_1} \int_{u_2}^{\nu_4} \varsigma(\Theta_1, \Theta_2) d\Theta_2 d\Theta_1 \\
J_{\nu_2^-, \nu_3^+}^{1,1} \varsigma(u_1, u_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{u_1}^{\nu_2} \int_{\nu_3}^{u_2} \varsigma(\Theta_1, \Theta_2) d\Theta_2 d\Theta_1 \\
J_{\nu_2^-, \nu_4^-}^{1,1} \varsigma(u_1, u_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{u_1}^{\nu_2} \int_{u_2}^{\nu_4} \varsigma(\Theta_1, \Theta_2) d\Theta_2 d\Theta_1 \quad (2.5)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır (Sarıkaya, 2014).

Teorem 2.1 (Young Eşitsizliği): $\varsigma, c > 0$ için $[0, c]$ üzerinde tanımlı reel değerli, sürekli ve artan fonksiyon olsun. $\varsigma(0) = 0, \iota_1 \in [0, c]$, ve $\iota_2 \in [0, \varsigma(c)]$ için ünlü Young eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^{\iota_1} \varsigma(x) dx + \int_0^{\iota_2} \varsigma^{-1}(x) dx \geq \iota_1 \iota_2.$$

Burada ς^{-1} , ς fonksiyonunun tersidir. Eğer $\varsigma(\iota_2) = \varsigma(\iota_1)$ ise eşitsizlik eşitliğe dönüşür. ς kuvvet fonksiyonu olan $\varsigma(w) = w^{p-1}$ seçilirse:

$$\frac{\iota_1^p}{p} + \left(\frac{p-1}{p} \right) \iota_2^{p/p-1} \geq \iota_1 \iota_2,$$

benzer şekilde;

$$\frac{\iota_1^p}{p} + \frac{\iota_2^q}{q} \geq \iota_1 \iota_2,$$

dir. Burada $\iota_1, \iota_2 \geq 0, p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 2.2 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. ς_1 ve ς_2 , $[\iota_1, \iota_2]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\varsigma_1|^p$ ve $|\varsigma_2|^q$, $[\iota_1, \iota_2]$ aralığında integral-lenebilir fonksiyonlar ise;

$$\int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu) \varsigma_2(\mu)| d\mu \leq \left(\int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_2(\mu)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Mitrinovic et al., 1993).

Benzer şekilde, çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\int_{\iota_1}^{\iota_2} \int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu_1, \mu_2) \varsigma_2(\mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 \leq \left(\int_{\iota_1}^{\iota_2} \int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu_1, \mu_2)|^p d\mu_1 d\mu_2 \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\iota_1}^{\iota_2} \int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_2(\mu_1, \mu_2)|^q d\mu_1 d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ayrıca; Power mean eşitsizliği, Hölder eşitsizliğinin bir sonucudur:

Sonuç 2.3 (Power Mean Eşitsizliği): $q \leq 1$ olsun. ς_1 ve ς_2 , $[\iota_1, \iota_2]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\varsigma_1|$ ve $|\varsigma_2|^q$, $[\iota_1, \iota_2]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu) \varsigma_2(\mu)| d\mu \leq \left(\int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu)| d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu)| |\varsigma_2(\mu)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Benzer şekilde, çift katlı integraller için Power mean eşitsizliği;

$$\int_{\iota_1}^{\iota_2} \int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu_1, \mu_2) \varsigma_2(\mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 \leq \left(\int_{\iota_1}^{\iota_2} \int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\iota_1}^{\iota_2} \int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma_1(\mu_1, \mu_2)| |\varsigma_2(\mu_1, \mu_2)|^q d\mu_1 d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklindedir. Reel sayılarda bir diğer temel eşitsizlik de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.3 (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi $\varkappa_1, \varkappa_2$ reel sayıları için

$$|\varkappa_1 + \varkappa_2| \leq |\varkappa_1| + |\varkappa_2|,$$

$$||\varkappa_1| - |\varkappa_2|| \leq |\varkappa_1 - \varkappa_2|,$$

$$||\varkappa_1| - |\varkappa_2|| \leq |\varkappa_1 + \varkappa_2|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|\varkappa_1 + \dots + \varkappa_n| \leq |\varkappa_1| + \dots + |\varkappa_n|$$

eşitsizlikleri gerçekleşir (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 2.4 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $\varsigma, [\iota_1, \iota_2]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyon olsun.

$$\left| \int_{\iota_1}^{\iota_2} \varsigma(\mu) d\mu \right| \leq \int_{\iota_1}^{\iota_2} |\varsigma(\mu)| d\mu \quad (\iota_1 < \iota_2)$$

eşitsizliği sağlanır (Mitrinovic et al., 1993).

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral

Eşitsizlikler

Teorem 2.5 $U, \mathbb{R}$ 'de bir aralık, $\mu_1, \mu_2 \in U$ ve $\mu_1 < \mu_2$ olmak üzere $\varsigma : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun.

$$\varsigma\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \varsigma(z) dz \leq \frac{\varsigma(\mu_1) + \varsigma(\mu_2)}{2} \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanır. Konveks fonksiyonlar için (2.6) literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak ünlenmiştir (Pečarić and Tong, 1992).

Teorem 2.6 $\varsigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $m \in (0, 1]$ olmak üzere m -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq \mu_1 < \mu_2$ ve $\varsigma \in L_1[\mu_1 m, \mu_2]$ ise;

$$\frac{1}{m+1} \left[\int_{\mu_1}^{m\mu_2} \varsigma(z) dz + \frac{m\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - m\mu_1} \int_{m\mu_1}^{\mu_2} \varsigma(z) dz \right] \leq (m\mu_2 - \mu_1) \frac{\varsigma(\mu_1) + \varsigma(\mu_2)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir, 2001).

Teorem 2.7 $\varsigma \in Q(U)$, $\iota_1, \iota_2 \in U$, $\iota_1 < \iota_2$ ve $\varsigma \in L_1[\iota_1, \iota_2]$ olsun. O halde;

$$p(k) = \frac{(\iota_2 - k)(k - \iota_1)}{(\iota_2 - \iota_1)^2}, \quad k \in U$$

olmak üzere

$$\varsigma\left(\frac{\iota_1 + \iota_2}{2}\right) \leq \frac{4}{\iota_2 - \iota_1} \int_{\iota_1}^{\iota_2} \varsigma(k) dk$$

ve

$$\frac{1}{\iota_2 - \iota_1} \int_{\iota_1}^{\iota_2} p(k) \varsigma(k) dk \leq \frac{\varsigma(\iota_1) + \varsigma(\iota_2)}{2}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir (Dragomir et al., 1995).

Teorem 2.8 $\varsigma \in P(U)$, $\varpi_1, \varpi_2 \in U$, $\varpi_1 < \varpi_2$ ve $\varsigma \in L_1[\varpi_1, \varpi_2]$ olsun. O halde;

$$\varsigma\left(\frac{\varpi_1 + \varpi_2}{2}\right) \leq \frac{2}{\varpi_2 - \varpi_1} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} \varsigma(z) dz \leq 2[\varsigma(\varpi_1) + \varsigma(\varpi_2)]$$

eşitsizliği gerçekleşir (Dragomir et al., 1995).

Teorem 2.9 c pozitif bir sayı, $\varsigma_1, \varsigma_2 \in SX(ch, U)$, $\mu_1, \mu_2 \in U$, $\mu_1 < \mu_2$ ve $\varsigma_1 \varsigma_2 \in L_1[\mu_1, \mu_2]$ olsun. O halde;

$$\frac{1}{2ch\left(\frac{1}{2}\right)} (\varsigma_1 \varsigma_2) \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} (\varsigma_1 \varsigma_2)(z) dz \leq c[(\varsigma_1 \varsigma_2)(\mu_1) + (\varsigma_1 \varsigma_2)(\mu_2)] \int_0^1 h(\theta) d\theta$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya et al., 2010).

Teorem 2.10 $\varsigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0, 1]^2$ olmak üzere (α, m) -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq \mu_1 < \mu_2$ ve $\varsigma \in L_1[\mu_1 m, \mu_2]$ ise;

$$\frac{1}{m\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{m\mu_2} \varsigma(w) dw + \frac{1}{\mu_2 - m\mu_1} \int_{m\mu_1}^{\mu_2} \varsigma(w) dw \leq \frac{1}{\alpha + 1} [(1 + \alpha m)(\varsigma(\mu_1) + \varsigma(\mu_2))]$$

eşitsizliği geçerlidir (Set et al., 2012).

Hermite-Hadamard eşitsizliği ikinci anlamda s -konveks fonksiyonlar için ise aşağıdaki gibi bulunmuştur:

Teorem 2.11 $s \in (0, 1)$ olmak üzere $\varsigma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s -konveks bir fonksiyon, $\varpi_1, \varpi_2 \in [0, \infty)$ ve $\varpi_1 < \varpi_2$ olsun. $\varsigma \in L_1[\varpi_1, \varpi_2]$ ise

$$2^{s-1} \varsigma\left(\frac{\varpi_1 + \varpi_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\varpi_2 - \varpi_1} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} \varsigma(w) dw \leq \frac{\varsigma(\varpi_1) + \varsigma(\varpi_2)}{s + 1}$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafında mümkün olan en iyi sabit $k = 1/(s + 1)$ 'dir (Dragomir and Fitzpatrick, 1999).

Teorem 2.12 $[\varpi_1, \varpi_2] \subset \mathbb{R}$, $\varpi_1 < \varpi_2$ ve $\varsigma_1, \varsigma_2 : [\varpi_1, \varpi_2] \rightarrow [0, \infty)$ iki konveks fonksiyon olsun.

$$\Xi(\mu_1, \mu_2) = \varsigma_1(\varpi_1)\varsigma_2(\varpi_1) + \varsigma_1(\varpi_1)\varsigma_2(\varpi_2)$$

ve

$$\Omega(\varpi_1, \varpi_2) = \varsigma_1(\varpi_1)\varsigma_2(\varpi_2) + \varsigma_1(\varpi_2)\varsigma_2(\varpi_1)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{\varpi_2 - \varpi_1} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} \varsigma(w)g(w)dw \leq \frac{1}{3}\Xi(\varpi_1, \varpi_2) + \frac{1}{6}\Omega(\varpi_1, \varpi_2)$$

dir (Pachpatte, 2003).

Teorem 2.13 $\varsigma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 4. anlamda s -konveks fonksiyon olsun. $s \in (0, 1)$, $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0, \infty)$ ve $\epsilon_1 < \epsilon_2$ olmak üzere $\varsigma \in L[\epsilon_1, \epsilon_2]$ ise,

$$2^{\frac{1}{s}-1} \varsigma\left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \varsigma(t)dt \leq \frac{s}{s+1} [\varsigma(\epsilon_1) + \varsigma(\epsilon_2)]$$

dir. Burada, $k = \frac{s}{s+1}$ mümkün olan en iyi sabittir (Kemali, 2021).

Teorem 2.14 $\varsigma : U \subset [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, U° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\varsigma' \in L[\iota_1, \iota_2]$ olsun. Burada, $\iota_1, \iota_2 \in U$ ve $\iota_1 < \iota_2$ 'dir. Eğer, $\iota_2 \geq 1$, ve $s \in (0, 1]$ için $|\varsigma'(x)|$, $[\iota_1, \iota_2]$ üzerinde 4. anlamda s -konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\varsigma(\iota_1) + 4\varsigma\left(\frac{\iota_1 + \iota_2}{2}\right) + \varsigma(\iota_2) \right] - \frac{1}{\iota_2 - \iota_1} \int_{\iota_1}^{\iota_2} \varsigma(x) dx \right| \\
& \leq (\iota_2 - \iota_1) \frac{1 + \frac{s}{6} + s^2 \left[2\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2s+1}{s}} + \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2s+1}{s}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s+1}{s}} - \frac{2}{3} \right]}{(2s+1)(s+1)} \\
& \quad \times [|\varsigma'(\iota_1)| + |\varsigma'(\iota_2)|]
\end{aligned}$$

(Akdemir et al., 2022a).

Teorem 2.15 $\varsigma : U \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, U° üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\varsigma' \in L[\iota_1, \iota_2]$ olsun. Burada, $\iota_1, \iota_2 \in U$ ve $\iota_1 < \iota_2$ 'dir. Eğer, $s \in (0, 1]$ ve $p > 1$ için $[\iota_1, \iota_2]$ üzerinde $|\varsigma'(x)|^{\frac{p}{p-1}}$ 4. anlamda s -konveks bir fonksiyon ise, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\varsigma(\iota_1) + 4\varsigma\left(\frac{\iota_1 + \iota_2}{2}\right) + \varsigma(\iota_2) \right] - \frac{1}{\iota_2 - \iota_1} \int_{\iota_1}^{\iota_2} \varsigma(x) dx \right| \\
& \leq (\iota_2 - \iota_1) \left[2^{\frac{p+1}{p}} + 1 \right] \left[\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{s}{q+s} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times [|\varsigma'(\iota_1)| + |\varsigma'(\iota_2)|].
\end{aligned}$$

Burada, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Akdemir et al., 2022a).

Teorem 2.16 $\varsigma : U \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, U° üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\varsigma' \in L[\iota_1, \iota_2]$ olsun. Burada, $\iota_1, \iota_2 \in U$ ve $\iota_1 < \iota_2$ 'dir. Eğer, $s \in (0, 1]$ ve $p > 1$ için $[\iota_1, \iota_2]$ üzerinde $|\varsigma'(x)|^q$ 4. anlamda s -konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\varsigma(\iota_1) + 4\varsigma\left(\frac{\iota_1 + \iota_2}{2}\right) + \varsigma(\iota_2) \right] - \frac{1}{\iota_2 - \iota_1} \int_{\iota_1}^{\iota_2} \varsigma(x) dx \right| \\
& \leq (\iota_2 - \iota_1) \left\{ 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{p+1} \left[\frac{1 + 2^{p+1}}{p(p+1)} \right] + \left(\frac{s}{q(q+s)} \right) [|\varsigma'(\iota_1)|^q + |\varsigma'(\iota_2)|^q] \right\}.
\end{aligned}$$

Burada, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Akdemir et al., 2022a).

Teorem 2.17 $\varsigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 4. anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. $s \in (0, 1]$ ve $\iota_1 < \iota_2$ koşulunu sağlayan $\iota_1, \iota_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\varsigma \in L[\iota_1, \iota_2]$ olduğunda her $\alpha \in (0, 1]$ aralığındaki bir eşitsizlik aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{1}{s}} \frac{\varsigma\left(\frac{\iota_1+\iota_2}{2}\right)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} + \frac{1-\alpha}{(\iota_2-\iota_1)^\alpha} \left[\frac{\varsigma(\iota_1) + \varsigma(\iota_2)}{B(\alpha)} \right] \\ & \leq \frac{1}{(\iota_2-\iota_1)^\alpha} \left[{}^{AB}I_{\iota_1}^\alpha \{\varsigma(\iota_2)\} + {}^{AB}I_{\iota_2}^\alpha \{\varsigma(\iota_1)\} \right] \\ & \leq \left[\frac{\varsigma(\iota_1) + \varsigma(\iota_2)}{B(\alpha)} \right] \left[\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)(\alpha + \frac{1}{s})} + \frac{1-\alpha}{(\iota_2-\iota_1)^\alpha} + \frac{\alpha\beta(\alpha, 1 + \frac{1}{s})}{\Gamma(\alpha)} \right] \end{aligned}$$

(Akdemir et al., 2022b).

Bundan sonraki Teoremlerde;

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{\iota_2 - \iota_1} \left[({}^{AB}I_{\frac{\iota_1+\iota_2}{2}}^\alpha) \{\varsigma(\iota_1)\} + {}^{AB}I_{\frac{\iota_1+\iota_2}{2}}^\alpha \{\varsigma(\iota_2)\} \right] \\ & - \frac{1-\alpha}{(\iota_2-\iota_1)B(\alpha)} [\varsigma(\iota_1) + \varsigma(\iota_2)] - \frac{(\iota_2-\iota_1)^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \varsigma\left(\frac{\iota_1+\iota_2}{2}\right) \end{aligned}$$

olarak kabul edilecektir.

Teorem 2.18 $\iota_1 < \iota_2$ iken $\iota_1, \iota_2 \in U^0$ ve $\varsigma : U \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, U^0 üzerinde diferansiyelenebilir bir fonksiyon ve $\varsigma'' \in L(\iota_1, \iota_2)$ olsun. Eğer $s \in (0, 1]$ için $|\varsigma''|$, $[\iota_1, \iota_2]$ üzerinde 4. anlamda s -konveks bir fonksiyon ise Atangana-Baleanu integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|F| \leq \frac{(\iota_2 - \iota_1)^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+\frac{1}{s}+2}}{\alpha + \frac{1}{s} + 2} + \beta_{\frac{1}{2}}(\alpha + 2, \frac{1}{s} + 1) \right) (|\varsigma''(\iota_1)| + |\varsigma''(\iota_2)|).$$

Burada, $\alpha \in (0, 1]$ dir (Akdemir et al., 2022b).

Teorem 2.19 $\iota_1 < \iota_2$ iken $\iota_1, \iota_2 \in U^0$ ve $\varsigma : U \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, U^0 üzerinde diferansiyelenebilir bir fonksiyon ve $\varsigma'' \in L[\iota_1, \iota_2]$ olsun. Eğer, $s \in (0, 1]$ için $|\varsigma''|^q$, $[\iota_1, \iota_2]$ üzerinde 4. anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. Atangana-Baleanu integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|F| \leq \frac{(\iota_2 - \iota_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(\frac{1}{2})^{\alpha p + p}}{\alpha p + p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(\frac{1}{s} + 1)^{\frac{1}{q}}} (|\varsigma''(\iota_1)| + |\varsigma''(\iota_2)|)$$

burada, $\alpha \in (0, 1]$, $q > 1$, ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Akdemir et al., 2022b).

Teorem 2.20 $\iota_1 < \iota_2$ iken $\iota_1, \iota_2 \in U^0$ ve $\varsigma : U \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, U^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\varsigma'' \in L[\iota_1, \iota_2]$ olsun. Eğer, $s \in (0, 1]$ için $|\varsigma''|^q$, $[\iota_1, \iota_2]$ üzerinde 4. anlamda s -konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu integral operatörleri için (2.7) eşitsizliği elde edilir :

$$|F| \leq \frac{(\iota_2 - \iota_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(\frac{1}{2})^{(\alpha+1)(\frac{q-p}{q-1})}(q-1)}{(\alpha+1)(q-p)+q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} (|\varsigma''(\iota_1)|^q + |\varsigma''(\iota_2)|^q)^{\frac{1}{q}} \times \left(\frac{(\frac{1}{2})^{(\alpha+1)p+\frac{1}{s}+1}}{(\alpha+1)p+\frac{1}{s}+1} + \beta_{\frac{1}{2}}((\alpha+1)p+1, \frac{1}{s}+1) \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.7)$$

Burada, $\alpha \in (0, 1]$, $q \geq p > 1$ dir (Akdemir et al., 2022b).

Teorem 2.21 $\iota_1 < \iota_2$, $\iota_1, \iota_2 \in U^0$ ve $\varsigma : U \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, U^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\varsigma'' \in L[\iota_1, \iota_2]$ olsun. Eğer $s \in (0, 1]$ için $|\varsigma''|^q$, $[\iota_1, \iota_2]$ üzerinde 4. anlamda s -konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu integral operatörleri için (2.8) eşitsizliği geçerlidir:

$$|F| \leq \frac{(\iota_2 - \iota_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(\frac{1}{2})^{(\alpha+1)p}}{((\alpha+1)p+1)p} + \frac{|\varsigma''(\iota_1)|^q + |\varsigma''(\iota_2)|^q}{(\frac{1}{s} + 1)q} \right). \quad (2.8)$$

Burada, $\alpha \in (0, 1]$, $q > 1$ dir (Akdemir et al., 2022b).

Teorem 2.22 $\iota_1 < \iota_2$ iken $\iota_1, \iota_2 \in U^0$ ve $\varsigma : U \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, U^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\varsigma'' \in L[\iota_1, \iota_2]$ olsun. Eğer, $s \in (0, 1]$ için $|\varsigma''|^q$, $[\iota_1, \iota_2]$ üzerinde 4. anlamda s -konkav bir fonksiyon ise Atangana-Baleanu integral operatörleri için (2.9) eşitsizliği geçerlidir:

$$|F| \leq \frac{(\iota_2 - \iota_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(\frac{1}{2})^{(\alpha+1)p}}{((\alpha+1)p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} \left| \varsigma'' \left(\frac{\iota_1 + \iota_2}{2} \right) \right|. \quad (2.9)$$

Burada $\alpha \in (0, 1]$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Akdemir et al., 2022b).



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar

Çalışma süresince $\Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \subset \mathbb{R}^2$ ve $\varkappa_1 < \varkappa_2, \varkappa_3 < \varkappa_4$ olarak alınacaktır.

Tanım 3.1 (Koordinatlarda Konveks Fonksiyon): $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (p, r), (s, t) \in \Delta$ ve $\varepsilon \in [0, 1]$ olmak üzere eğer

$$\varsigma(\varepsilon p + (1 - \varepsilon)s, \varepsilon r + (1 - \varepsilon)t) \leq \varepsilon \varsigma(p, r) + (1 - \varepsilon) \varsigma(s, t)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye Δ üzerinde konvektir denir (Dragomir, 2001).

$\forall p \in [\varkappa_1, \varkappa_2]$ ve $\forall r \in [\varkappa_3, \varkappa_4]$ için;

$$\varsigma_r : [\varkappa_1, \varkappa_2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varsigma_r(w) = \varsigma(w, r)$$

ve

$$\varsigma_p : [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varsigma_p(z) = \varsigma(p, z)$$

dönüşümleri konveks olduğu sürece $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konvektir.

Lemma 3.1 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan bütün konveks fonksiyonlar koordinatlarda konvektir, diğer yandan tersi genel olarak doğru değildir (Dragomir, 2001).

Örnek 3.1 $\varsigma : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varsigma(u, v) = uv$ şeklinde tanımlı olsun. ς fonksiyonu koordinatlarda konvektir fakat konveks değildir (Dragomir, 2001).

Koordinatlarda konveks fonksiyon tanımının emsali bir tanım şu şekilde verilebilir:

Tanım 3.2 (Koordinatlarda Konveks Fonksiyon): $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$\begin{aligned}\varsigma(\alpha x + (1 - \alpha)y, \beta p + (1 - \beta)r) &\leq \alpha\beta\varsigma(x, p) + \beta(1 - \alpha)\varsigma(y, p) \\ &\quad + \alpha(1 - \beta)\varsigma(x, r) + (1 - \alpha)(1 - \beta)\varsigma(y, r)\end{aligned}$$

eşitsizliği her $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ve $(x, p), (x, r), (y, p), (y, r) \in \Delta$ için sağlanır ise ς 'ye Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon denir (Latif and Alomari, 2009).

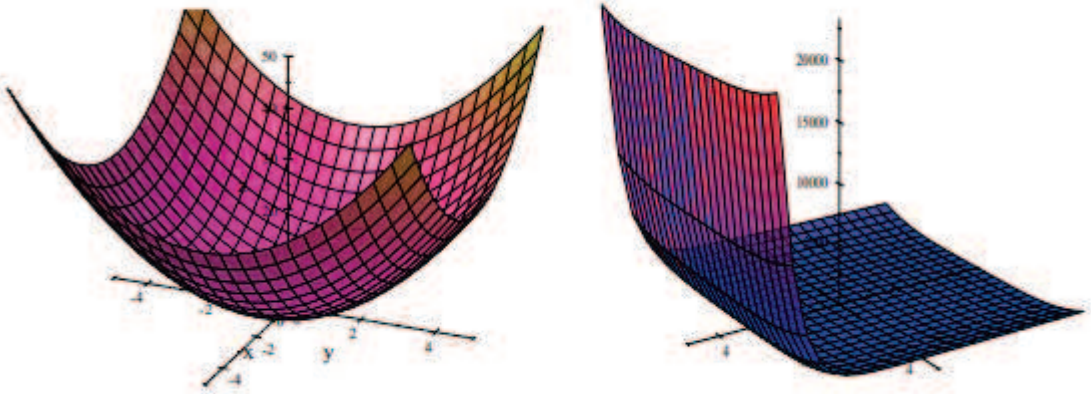
Lemma 3.2 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ şeklinde tanımlı ve ς ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ise ς 'nin koordinatlarda konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$\varsigma_r : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varsigma_r(u) = \varsigma(u, r)$$

ve

$$\varsigma_p : [z, w] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varsigma_p(v) = \varsigma(p, v)$$

dönüşümleri için $\varsigma_p'' \geq 0$ ve $\varsigma_r'' \geq 0$ koşulunu gerçekleştirmesidir (Latif and Alomari, 2009).



Şekil 3.1. $\varsigma_1(s, t) = s^2 + t^2$ ve $\varsigma_2(s, t) = e^s + t^4$ konveks fonksiyonları

Lemma 3.3 $\varsigma_1, \varsigma_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı koordinatlarda konveks fonksiyonlar ve $k \geq 0$ olsun. Bu taktirde $\varsigma_1 + \varsigma_2$ ve $k\varsigma_1$ koordinatlarda konvektir (Latif and Alomari, 2009).

Lemma 3.4 $\varsigma_1, \varsigma_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı koordinatlarda konveks fonksiyonlar olsunlar. O halde $\varsigma_1\varsigma_2$ koordinatlarda konvektir (Latif and Alomari, 2009).

Tanım 3.3 (Koordinatlarda m -konveks Fonksiyon): $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (p, r), (s, t) \in \Delta_1$ ve $m, \theta \in [0, 1]$ için

$$\varsigma(\theta p + (1 - \theta)s, \theta r + (1 - \theta)t) \leq \theta \varsigma(p, r) + m(1 - \theta)\varsigma(s, t)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye Δ_1 üzerinde m -konvektir denir.

$\forall p \in [0, \varkappa_1]$ ve $\forall r \in [0, \varkappa_2]$ için eğer

$$\varsigma_r : [0, \varkappa_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varsigma_r(\alpha) = \varsigma(\alpha, r)$$

ve

$$\varsigma_p : [0, \varkappa_2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varsigma_p(\beta) = \varsigma(p, \beta)$$

dönüşümleri m -konveks olduğu sürece $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda m -konvektir (Ozdemir and Set, 2011).

Lemma 3.5 $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı m -konveks fonksiyonların tamamı $m \in [0, 1]$ olduğu durumda koordinatlarda m -konvektir (Ozdemir and Set, 2011).

Tanım 3.4 (Koordinatlarda (α, m) -Konveks Fonksiyon): $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$\forall (a, b), (c, d) \in \Delta_1$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2, \theta \in [0, 1]$ için

$$\varsigma(\theta a + (1 - \theta)c, \theta b + m(1 - \theta)d) \leq \theta^\alpha \varsigma(a, b) + m(1 - \theta^\alpha)\varsigma(c, d) \quad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ya Δ_1 üzerinde (α, m) -konvektir denir (Ozdemir and Set, 2011).

(3.1)'de $(\alpha, m) = (1, m)$ olması halinde koordinatlarda m -konveks fonksiyon $(\alpha, m) = (1, 1)$ olması halinde ise koordinatlarda konveks fonksiyon sonucuna ulaşılır.

Lemma 3.6 $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan (α, m) -konveks fonksiyonların tamamı $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ olduğu durumda koordinatlarda (α, m) -konvektir (Ozdemir and Set, 2011).

Tanım 3.5 (Koordinatlarda Birinci Anlamda s -Konveks fonksiyon): $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$\forall (a, b), (c, d) \in \Delta, t^s + u^s = 1, s \in (0, 1]$ ve $t, u \geq 0$ için

$$\varsigma(ta + uc, tb + ud) \leq t^s \varsigma(a, b) + u^s \varsigma(c, d)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye Δ üzerinde birinci anlamda s -konvektir denir (Alomari and Darus, 2008a).

Tanım 3.6 (Koordinatlarda İkinci Anlamda s -Konveks Fonksiyon): $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (a, b), (c, d) \in \Delta, s \in (0, 1]$ ve $\varphi \in [0, 1]$ için

$$\varsigma(\varphi a + (1 - \varphi)c, \varphi b + (1 - \varphi)d) \leq \varphi^s \varsigma(a, b) + (1 - \varphi)^s \varsigma(c, d)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye Δ üzerinde ikinci anlamda s -konvektir denir (Alomari and Darus, 2008a).

Tanım 3.7 (Δ üzerinde Quasi-Konveks Fonksiyon): $\forall (a, b), (c, d) \in \Delta, \varphi \in [0, 1]$ olmak üzere $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$\varsigma(\varphi a + (1 - \varphi)c, \varphi b + (1 - \varphi)d) \leq \max \varsigma(a, b), \varsigma(c, d)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye Δ üzerinde quasi -konvektir denir. Bu fonksiyonların sınıfının gösterimi $QC(\Delta)$ dir (Ozdemir et al., 2010).

Lemma 3.7 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ quasi -konveks fonksiyonların tamamı koordinatlarda quasi -konvektir (Ozdemir et al., 2010).

Tanım 3.8 (Δ üzerinde Godunova-Levin Sınıfına ait Fonksiyon): Negatif olmayan $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (p, r), (s, t) \in \Delta$ ve $\varphi \in (0, 1)$ için

$$\varsigma(\varphi p + (1 - \varphi)s, \varphi r + (1 - \varphi)t) \leq \frac{\varsigma(p, r)}{\varphi} + \frac{\varsigma(s, t)}{(1 - \varphi)}$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa ς 'ye Δ üzerinde Godunova-Levin sınıfından fonksiyon denir (Akdemir and Ozdemir, 2010).

Lemma 3.8 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı Godunova-Levin sınıfından fonksiyonların tamamı aynı zamanda koordinatlarda Godunova-Levin sınıfına aittir (Akdemir and Ozdemir, 2010).

Tanım 3.9 (Δ üzerinde P -Fonksiyon): Negatif olmayan $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$\forall (p, r), (s, t) \in \Delta$ ve $\varphi \in (0, 1)$ için

$$\varsigma(\varphi p + (1 - \varphi)s, \varphi r + (1 - \varphi)t) \leq \varsigma(p, r) + \varsigma(s, t)$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa ς 'ye Δ üzerinde P -Fonksiyon denir (Akdemir and Ozdemir, 2010).

Lemma 3.9 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı P -fonksiyonların tamamı aynı zamanda koordinatlarda P -fonksiyondur (Akdemir and Ozdemir, 2010).

3.2. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı İntegral

Eşitsizlikler

Koordinatlarda konveks fonksiyonlar için iyi bilinen bazı eşitsizlikler bu bölümde verilmiştir.

Teorem 3.1 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konveks fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} & \varsigma\left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma\left(x, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}\right) dx + \frac{1}{(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, y\right) dy \right] \\ & \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\ & \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_1) dx + \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_2) dx \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_3, y) dy + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_4, y) dy \right] \\ & \leq \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir, 2001).

Koordinatlarda s -konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Teorem 3.2 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu koordinatlarda s -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\varsigma\left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}\right) &\leq 2^{s-2} \left[\frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma\left(x, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}\right) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, y\right) dy \right] \\
&\leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\
&\leq \frac{1}{2(s+1)} \left[\frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_1) dx + \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_2) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_3, y) dy + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_4, y) dy \right] \\
&\leq \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Alomari and Darus, 2008a).

Teorem 3.3 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu koordinatlarda birinci anlamda s -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma \left(x, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, y \right) dy \right] \\
&\leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\
&\leq \frac{1}{2(s+1)} \left[\frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_1) dx + \frac{s}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_2) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_1, y) dy + \frac{s}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_2, y) dy \right] \\
&\leq \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + s\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + s\varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + s^2\varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari and Darus, 2008b).

Ozdemir and Set (2011) çalışmalarındaki koordinatlarda m -konveks ve (α, m) -konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler aşağıdadır:

Teorem 3.4 $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda m -konveks fonksiyon olsun. $m \in (0, 1]$ olmak üzere $0 \leq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \infty$ ve $0 \leq \varkappa_3 < \varkappa_4 < \infty$ iken;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\
&\leq \frac{1}{4(\varkappa_2 - \varkappa_1)} \min\{\eta_1, \eta_2\} + \frac{1}{4(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \min\{\eta_3, \eta_4\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada;

$$\eta_1 = \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_3) dx + m \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma \left(x, \frac{\varkappa_4}{m} \right) dx, \quad \eta_2 = \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_4) dx + m \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma \left(x, \frac{\varkappa_3}{m} \right) dx,$$

$$\eta_3 = \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_1, y) dy + m \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_2}{m}, y\right) dy, \quad \eta_4 = \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_2, y) dy + m \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_1}{m}, y\right) dy$$

şeklindedir (Ozdemir and Set, 2011).

Teorem 3.5 $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda m -konveks fonksiyon olsun. $m \in (0, 1]$, $0 \leq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \infty$ ve $0 \leq \varkappa_3 < \varkappa_4 < \infty$ olmak üzere $\varsigma_x \in L_1[0, \varkappa_4]$, $\varsigma_y \in L_1[0, \varkappa_2]$ iken;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma\left(x, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}\right) dx + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, y\right) dy \\ & \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \left[\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \frac{\varsigma(x, y) + m\varsigma\left(x, \frac{y}{m}\right)}{2} dy dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \frac{f(x, y) + m\varsigma\left(\frac{x}{m}, y\right)}{2} dx dy \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ozdemir and Set, 2011).

Teorem 3.6 $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda (α, m) -konveks fonksiyon olsun. $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, $0 \leq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \infty$ ve $0 \leq \varkappa_3 < \varkappa_4 < \infty$ olmak üzere $\varsigma_x \in L_1[0, \varkappa_4]$, $\varsigma_y \in L_1[0, \varkappa_2]$ iken;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma\left(x, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}\right) dx + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, y\right) dy \\ & \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \left[\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \frac{2\varsigma(x, y) + m(2^\alpha - 1)(\varsigma\left(x, \frac{y}{m}\right) + \varsigma\left(\frac{x}{m}, y\right))}{2^\alpha} dx dy \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\ & \leq \frac{1}{2(\alpha + 1)(\varkappa_2 - \varkappa_1)} \min\{\psi_1, \psi_2\} + \frac{1}{2(\alpha + 1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \min\{\psi_3, \psi_4\} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada;

$$\psi_1 = \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_3) dx + \alpha m \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma\left(x, \frac{\varkappa_4}{m}\right) dx,$$

$$\psi_2 = \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_4) dx + \alpha m \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma\left(x, \frac{\varkappa_3}{m}\right) dx,$$

$$\psi_3 = \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_1, y) dy + \alpha m \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_2}{m}, y\right) dy,$$

$$\psi_4 = \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_2, y) dy + \alpha m \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_1}{m}, y\right) dy$$

şeklindedir (Ozdemir and Set, 2011).

Theorem 3.7 $\varsigma : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda (α, m) -konveks fonksiyon olsun. $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, $0 \leq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \infty$ ve $0 \leq \varkappa_3 < \varkappa_4 < \infty$ olmak üzere $\varsigma_x \in L_1[0, \varkappa_4]$, $\varsigma_y \in L_1[0, \varkappa_2]$ iken;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\ & \leq \frac{1}{4(\alpha + 1)} \left[\frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_3) dx + \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_4) dx \right. \\ & \quad + \frac{m\alpha}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma\left(x, \frac{\varkappa_3}{m}\right) dx + \frac{m\alpha}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma\left(x, \frac{\varkappa_4}{m}\right) dx \\ & \quad + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_1, y) dy + \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_2, y) dy \\ & \quad \left. + \frac{m\alpha}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_1}{m}, y\right) dy + \frac{m\alpha}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma\left(\frac{\varkappa_2}{m}, y\right) dy \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ozdemir and Set, 2011).

Sarıkaya et al. (2010) yaptıkları çalışmalarında aşağıdaki lemmayı bulmuşlardır:

Lemma 3.10 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. Eğer, $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \in L_2(\Delta)$ ise;

$$\begin{aligned}
& \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\
& - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_4, y) dy + \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_1) dx + \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_2) dx \right] \\
& = \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \int_0^1 \int_0^1 (1-2t)(1-2s) \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} (t\varkappa_1 + (1-t)\varkappa_2, s\varkappa_3 + (1-s)\varkappa_4) dt ds
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya et al., 2010).

Sarıkaya et al. (2010) yaptıkları çalışmalarında Lemma 3.10 ile koordinatlarda birçok eşitsizlik elde etmişlerdir.

Teorem 3.8 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|$ koordinatlarda konveks ise;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy - A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir ve burada

$$\begin{aligned}
A = \frac{1}{2} & \left[\frac{1}{(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_3, y) dy + \frac{1}{(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_4, y) dy \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_1) dx + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_2) dx \right]
\end{aligned}$$

dir (Sarıkaya et al., 2010).

Teorem 3.9 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğu sürece $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|$ koordinatlarda konveks ise;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy - A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
& \quad \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q [(\varkappa_1, \varkappa_3) + (\varkappa_1, \varkappa_4) + (\varkappa_2, \varkappa_3) + (\varkappa_2, \varkappa_4)]}{4} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada A , Teorem 3.8'deki A ile aynıdır (Sarıkaya et al., 2010).

Theorem 3.10 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $q \geq 1$ olduğu sürece $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|$ koordinatlarda konveks ise;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy - A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \\
& \quad \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q [(\varkappa_1, \varkappa_3) + (\varkappa_1, \varkappa_4) + (\varkappa_2, \varkappa_3) + (\varkappa_2, \varkappa_4)]}{4} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir ve burada A , Teorem 3.8'deki A ile aynıdır (Sarıkaya et al., 2010).

Ozdemir et al. (2021) bir lemmaya ulaşmış ve koordinatlarda konveks fonksiyon için Hadamard-tipi eşitsizlikler elde etmiştir. Bu Lemma 3.11 ve buna bağlı eşitsizlikler aşağıdakiler gibidir:

Lemma 3.11 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. Eğer $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \in L_2[\Delta]$ ise;

$$\begin{aligned}
R &= \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) - \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, y \right) dy \\
&\quad - \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma \left(x, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) dx + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\
&= \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \left[\int_0^1 \int_0^1 ts \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(t \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} + (1-t)\varkappa_1, s \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} + (1-s)\varkappa_3 \right) dt ds \right. \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (t-1)(s-1) \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(t \varkappa_2 + (1-t) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}, s \varkappa_4 + (1-s) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) dt ds \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 t(s-1) \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(t \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} + (1-t)\varkappa_1, s \varkappa_4 + (1-s) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) dt ds \\
&\quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 s(t-1) \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(t \varkappa_2 + (1-t) \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, s \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} + (1-s)\varkappa_3 \right) dt ds \right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ve burada $t, s \in [0, 1]$ 'dir (Ozdemir et al., 2021).

Teorem 3.11 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve R , Lemma 3.11 de tanımlandığı gibiyse;

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{144} \\
&\quad \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right. \\
&\quad + 4 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right| \\
&\quad \left. + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ozdemir et al., 2021).

Teorem 3.12 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer, $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve R , Lemma 3.11’de verildiği üzere, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için;

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
&\times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right. \\
&+ \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q \\
&\left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ozdemir et al., 2021).

Teorem 3.13 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve R , Lemma 3.11’de tanımlandığı gibiyse ve $q \geq 1$ iken;

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \\
&\times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{36} \right. \\
&+ \frac{4 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q}{9} \\
&\left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right)}{9} \right]^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ozdemir et al., 2021).

Ozdemir et al. (2012a) çalışmada bir lemma ve bu lemmaya bağlı eşitsizlikler elde etmişlerdir. Bunlar aşağıdakiler gibidir:

Lemma 3.12 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. Eğer, $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \in L_2[\Delta]$ ise;

$$\begin{aligned} M &= \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) - \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, y \right) dy \\ &\quad - \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma \left(x, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} q(x, t) q(y, s) \\ &\quad \times \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \left(\frac{\varkappa_2 - t}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_1 + \frac{t - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - s}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{s - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) dx dy \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ve burada

$$p(x, t) = \begin{cases} t - \varkappa_1, & x \in \left[\varkappa_1, \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} \right) \\ t - \varkappa_2, & x \in \left[\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_2 \right] \end{cases}$$

ve

$$q(y, s) = \begin{cases} s - \varkappa_3, & y \in \left[\varkappa_3, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \\ s - \varkappa_4, & y \in \left[\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}, \varkappa_4 \right] \end{cases}$$

dir (Ozdemir et al., 2012a).

Teorem 3.14 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve M , Lemma 3.12,'te tanımlandığı gibiyse;

$$|M| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{64}$$

$$\times \left(\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|(\varkappa_2, \varkappa_4) \right)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ozdemir et al., 2012a).

Teorem 3.15 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}, \Delta$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve M , Lemma 3.12'te tanımlandığı gibiyse ve $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ iken;

$$|M| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ozdemir et al., 2012a).

Teorem 3.16 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}, \Delta$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve M , Lemma 3.12'te tanımlandığı gibiyse ve $q \geq 1$ iken;

$$|M| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial s} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ozdemir et al., 2012a).

Ozdemir et al. (2012a) çalışmalarında bir lemma daha bulup koordinatlarda s -konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler ispatlamışlardır. Bunlar aşağıdaki gibidir:

Lemma 3.13 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}, \Delta$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $t, \delta \in [0, 1]$ olmak üzere eğer, $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \in L_2[\Delta]$ ise;

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \omega_2 \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \omega_1 \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \omega_1 \omega_2 \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \\
&\quad - \left(\frac{\omega_2}{\omega_2 + 1} \right) \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_2, y) dy \\
&\quad - \left(\frac{1}{\omega_1 + 1} \right) \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_1, y) dy - \left(\frac{\omega_2}{\omega_2 + 1} \right) \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_4) dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{\omega_1 + 1} \right) \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_3) dx + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\
&= \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \\
&\quad \times \left[\int_0^1 \int_0^1 ((\omega_1 + 1)t - 1)((\omega_2 + 1)\delta - 1) \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} (t\varkappa_2 + (1-t)\varkappa_1, s\varkappa_4 + (1-s)\varkappa_3) dt ds \right]
\end{aligned}$$

eşitliği $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$ için gerçekleşir (Ozdemir et al., 2012a).

Teorem 3.17 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s -konveks ve N , Lemma 3.13'te tanımlandığı gibi olmak üzere;

$$\begin{aligned}
|N| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)(s + 1)^2(s + 2)^2} \\
&\quad \times \left(\Lambda \Phi \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| + \Upsilon \Phi \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| + \Psi \Lambda \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| \right. \\
&\quad \left. + \Psi \Upsilon \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\Lambda = \left(s + 1 + 2(\omega_1 + 1) \left(\frac{1}{\omega_1 + 1} \right)^{s+2} - \omega_1 \right)$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \left(s + 1 + 2(\omega_2 + 1) \left(\frac{1}{\omega_2 + 1} \right)^{s+2} - \omega_2 \right) \\ \Upsilon &= \left(\omega_2(s + 1) + 2 \left(\frac{1}{\omega_2 + 1} \right)^{s+1} - 1 \right) \\ \Psi &= \left(\omega_2(s + 1) + 2 \left(\frac{1}{\omega_2 + 1} \right)^{s+1} - 1 \right)\end{aligned}$$

dir (Ozdemir et al., 2012a).

Teorem 3.18 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $p > 1$ iken $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s -konveks ve N , Lemma 3.13'te tanımlandığı gibiyken;

$$\begin{aligned}|N| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3) \left(1 + \omega_1^{\frac{p+1}{p}} \right) \left(1 + \omega_2^{\frac{p+1}{p}} \right)}{(\omega_1 + 1)^{\frac{p+1}{p}} (\omega_2 + 1)^{\frac{p+1}{p}} (p + 1)^{\frac{2}{p}}} \\ &\quad \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{(s + 1)^2} \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

eşitsizliği $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$, $s \in (0, 1]$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ için gerçekleşir (Ozdemir et al., 2012a).

Teorem 3.19 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $p \leq 1$ iken $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s -konveks ve N , Lemma 3.13'te tanımlandığı gibiyken;

$$\begin{aligned}|N| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \left(\frac{(1 + \omega_1^2)(1 + \omega_2^2)}{4(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\ &\quad \times \left(\frac{\Lambda \Phi \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \Upsilon \Phi \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \Psi \Lambda \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \Psi \Upsilon \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \delta} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{(s + 1)^2 (s + 2)^2} \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

eşitsizliği $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$, $s \in (0, 1]$ için gerçekleşir (Ozdemir et al., 2012a).

Ozdemir et al. (2012b) çalışmalarında bu kez koordinatlarda konveks fonksiyonların çarpımlarıyla ilgili birtakım eşitsizlikler ispatlamışlardır.

Teorem 3.20 ς_1, ς_2 ve $\varsigma_1 \varsigma_2 \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $\varsigma_1, \varsigma_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Negatif olmayan ς_1 fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon, $t = \frac{t_1+t_2}{2}$, $t_1, t_2 \in (0, 1]$ ve ς_2 fonksiyonu koordinatlarda ikinci anlamda s -konveks fonksiyon iken;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma_1(x, y) \varsigma_2(x, y) dy dx \\ & \leq \frac{1}{2}(a^2 + c^2) \Psi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) + \frac{1}{2}(ab + cd) \Phi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) \\ & \quad + \frac{1}{2}(b^2 + d^2) \Lambda(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\begin{aligned} \Psi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) &= \varsigma_1(\varkappa_1, \varkappa_3) \varsigma_2(\varkappa_1, \varkappa_3) \\ &+ \varsigma_1(\varkappa_2, \varkappa_3) \varsigma_2(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma_1(\varkappa_1, \varkappa_4) \varsigma_2(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma_1(\varkappa_2, \varkappa_4) \varsigma_2(\varkappa_2, \varkappa_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) &= \varsigma_1(\varkappa_1, \varkappa_4) \varsigma_2(\varkappa_1, \varkappa_3) \\ &+ \varsigma_1(\varkappa_2, \varkappa_3) g(\varkappa_2, \varkappa_4) + \varsigma_1(\varkappa_2, \varkappa_4) \varsigma_2(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma_1(\varkappa_2, \varkappa_3) \varsigma_2(\varkappa_1, \varkappa_3) \\ &+ \varsigma_1(\varkappa_2, \varkappa_4) \varsigma_2(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma_1(\varkappa_1, \varkappa_3) \varsigma_2(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma_1(\varkappa_1, \varkappa_4) \varsigma_2(\varkappa_2, \varkappa_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) &= \varsigma_1(\varkappa_2, \varkappa_3) \varsigma_2(\varkappa_1, \varkappa_4) \\ &+ \varsigma_1(\varkappa_2, \varkappa_4) \varsigma_2(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma_1(\varkappa_1, \varkappa_3) \varsigma_2(\varkappa_2, \varkappa_4) + \varsigma_1(\varkappa_1, \varkappa_4) \varsigma_2(\varkappa_2, \varkappa_3) \end{aligned}$$

ve

$$a = \frac{1}{t_2 + 2}, \quad b = \frac{1}{(t_2 + 1)(t_2 + 2)}, \quad c = \frac{1}{t_2 + 2}, \quad d = \frac{1}{(t_1 + 1)(t_1 + 2)}$$

şeklindedir (Ozdemir et al., 2012b).

Teorem 3.21 ς_1, ς_2 ve $\varsigma_1 \varsigma_2 \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $\varsigma_1, \varsigma_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Negatif olmayan ς_1 fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon, $t = \frac{t_1+t_2}{2}$, $t_1, t_2 \in (0, 1]$ ve ς_2 fonksiyonu koordinatlarda ikinci anlamda s -konveks fonksiyon ise;

$$\begin{aligned}
& 2^{t_1+t_2} \varsigma_1 \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \varsigma_2 \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \\
& \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma_1(x, y) dy dx \\
& \quad + \frac{1}{2}(b^2 + d^2 + 2ad + 2bc) \Psi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) \\
& \quad + \frac{1}{2}(ab + cd + 2bd + 2ca) \Phi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) \\
& \quad + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 + 2ad + 2cb) \Lambda(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\Psi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4), \Phi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4), \Lambda(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4), a, b, c$ ve d Teorem 3.20'teki gibi tanımlanmıştır (Ozdemir et al., 2012b).

Teorem 3.22 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda α -star s -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\left[\frac{2^{2s}}{(1 + \alpha^s)^2} \right] \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) & \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\
& \leq \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \alpha^s \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \alpha^s \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \alpha^{2s} \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{(s + 1)^2}
\end{aligned}$$

olur (Akdemir, 2012).

Lemma 3.14 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\alpha, \beta > 0$ ve $\varkappa_1, \varkappa_3 \geq 0$ iken $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \in L(\Delta)$ fonksiyonu için;

$$\left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left[\int_0^1 \int_0^1 \gamma^\alpha \lambda^\beta \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda) \varkappa_4) d\gamma d\lambda \right. \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^1 (1 - \gamma)^\alpha \lambda^\beta \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda) \varkappa_4) d\gamma d\lambda \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^1 \gamma^\alpha (1 - \lambda)^\beta \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda) \varkappa_4) d\gamma d\lambda \\
&\quad \left. - \int_0^1 \int_0^1 (1 - \gamma)^\alpha (1 - \lambda)^\beta \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda) \varkappa_4) d\gamma d\lambda \right] \quad (3.2)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{4(\varkappa_2 - \varkappa_1)^\alpha(\varkappa_4 - \varkappa_3)^\beta} \left[J_{\varkappa_1^+, \varkappa_3^+}^{\alpha, \beta} \varsigma(\vartheta, y) + J_{\varkappa_1^+, \varkappa_4^-}^{\alpha, \beta} \varsigma(x, y) \right. \\
&\quad \left. + J_{\varkappa_2^-, \varkappa_3^+}^{\alpha, \beta} \varsigma(\vartheta, y) + J_{\varkappa_2^-, \varkappa_4^-}^{\alpha, \beta} \varsigma(\vartheta, y) \right] \\
&\quad - \frac{\Gamma(\beta + 1)}{4(\varkappa_4 - \varkappa_3)^\beta} \left[J_{\varkappa_4^-}^\beta \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + J_{\varkappa_4^-}^\beta \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + J_{\varkappa_3^+}^\beta \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4) + J_{\varkappa_3^+}^\beta \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) \right] \\
&\quad - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(\varkappa_2 - \varkappa_1)^\alpha} \left[J_{\varkappa_2^-}^\alpha \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + J_{\varkappa_2^-}^\alpha \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + J_{\varkappa_1^+}^\beta \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4) + J_{\varkappa_1^+}^\beta \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) \right] \quad (3.3)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
J_{\varkappa_1^+, \varkappa_3^+}^{\alpha, \beta} \varsigma(\vartheta, \eta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} (\varkappa_2 - \vartheta)^{\alpha-1} (\varkappa_4 - \eta)^{\beta-1} \varsigma(\vartheta, \eta) d\eta d\vartheta, \\
J_{\varkappa_1^+, \varkappa_4^-}^{\alpha, \beta} \varsigma(\vartheta, \eta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} (\vartheta - \varkappa_1)^{\alpha-1} (\varkappa_4 - \eta)^{\beta-1} \varsigma(\vartheta, \eta) d\eta d\vartheta, \\
J_{\varkappa_2^-, \varkappa_3^+}^{\alpha, \beta} \varsigma(\vartheta, \eta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} (\varkappa_2 - \vartheta)^{\alpha-1} (\eta - \varkappa_3)^{\beta-1} \varsigma(\vartheta, \eta) d\eta d\vartheta, \\
J_{\varkappa_2^-, \varkappa_4^-}^{\alpha, \beta} \varsigma(\vartheta, \eta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} (\varkappa_2 - \vartheta)^{\alpha-1} (\varkappa_4 - \eta)^{\beta-1} \varsigma(\vartheta, \eta) d\eta d\vartheta, \quad (3.4)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Sarıkaya, 2014).

Teorem 3.23 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \in L(\Delta)$, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda üstel konveks fonksiyon ise;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\ & \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(\alpha + 1)(\beta + 1)} \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|}{e^{\alpha_1(\varkappa_1 + \varkappa_3)}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|}{e^{\alpha_1(\varkappa_1 + \varkappa_4)}} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|}{e^{\alpha_1(\varkappa_2 + \varkappa_3)}} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|}{e^{\alpha_1(\varkappa_2 + \varkappa_4)}} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

eşitsizliği sağlanır (Akdemir et al., 2023).

Teorem 3.24 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \in L(\Delta)$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$ olsun. $q > 1$ ve $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ için $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda üstel konveks fonksiyon ise;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\ & \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4^{1+\frac{1}{q}}(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}(\beta p + 1)^{\frac{1}{p}}} \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q}{e^{\alpha_1(\varkappa_1 + \varkappa_3)}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q}{e^{\alpha_1(\varkappa_1 + \varkappa_4)}} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q}{e^{\alpha_1(\varkappa_2 + \varkappa_3)}} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q}{e^{\alpha_1(\varkappa_2 + \varkappa_4)}} \right]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Akdemir et al., 2023).

Teorem 3.25 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \in L(\Delta)$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$ olsun. $q > 1$ ve $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ için $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda üstel konveks fonksiyon ise;

$$\left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left[\frac{4}{p(\alpha + 1)^p(\beta + 1)^p} \right. \\
&\quad + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q}{qe^{\alpha_1(\varkappa_1 + \varkappa_3)}} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q}{qe^{\alpha_1(\varkappa_1 + \varkappa_4)}} \\
&\quad \left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q}{qe^{\alpha_1(\varkappa_2 + \varkappa_3)}} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q}{qe^{\alpha_1(\varkappa_2 + \varkappa_4)}} \right] \quad (3.7)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Akdemir et al., 2023).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon tanımlanacak ve bu fonksiyon için yeni integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

4.1. Koordinatlarda 4. Anlamda s -Konveks Fonksiyon

Tanım 4.1 (*Dikdörtgensel Bölge Üzerinde 4. Anlamda s -Konveks Fonksiyon*): $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_3] \times [\varkappa_2, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\gamma \in [0, 1]$, $(\varkappa_1, \varkappa_2), (\varkappa_3, \varkappa_4) \in \Delta$ ise;

$$\varsigma(\gamma\varkappa_1 + (1 - \gamma)\varkappa_3, \gamma\varkappa_2, (1 - \gamma)\varkappa_4) \leq \gamma^{\frac{1}{s}}\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_2) + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}}\varsigma(\varkappa_3, \varkappa_4)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ς 'ye Δ üzerinde 4. anlamda s -konveks fonksiyon denir.

$\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$ 4. anlamda s -konveks fonksiyonu için eğer;

$$\varsigma_y : [\varkappa_1, \varkappa_3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varsigma_y(p) = \varsigma(p, y)$$

ve

$$\varsigma_x : [\varkappa_2, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varsigma_x(r) = \varsigma(x, r)$$

kısmi dönüşümleri $\forall x \in [\varkappa_1, \varkappa_3]$ ve $\forall y \in [\varkappa_2, \varkappa_4]$ için 4. anlamda s -konveks fonksiyon ise ς 'ye Δ üzerinde 4. anlamda s -konveks fonksiyon denir.

Lemma 4.1 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her 4. anlamda s -konveks fonksiyon koordinatlarda 4. anlamda s -konvektir.

İspat $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde 4. anlamda s -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda, $\varsigma_y : [\varkappa_1, \varkappa_3] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varsigma_y(p) = \varsigma(p, y)$ kısmi dönüşümünü için. $\forall p_1, p_2 \in [\varkappa_1, \varkappa_3]$ ve $\gamma \in [0, 1]$

ise;

$$\begin{aligned}
\varsigma_y(\gamma p_1 + (1 - \gamma)p_2) &= \varsigma((\gamma p_1 + (1 - \gamma)p_2), y) \\
&= \varsigma((\gamma p_1 + (1 - \gamma)p_2), \gamma y + (1 - \gamma)y) \\
&\leq \gamma^{\frac{1}{s}} \varsigma(p_1, y) + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \varsigma(p_2, y) \\
&= \gamma^{\frac{1}{s}} \varsigma_y(p_1) + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \varsigma_y(p_2)
\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla $\varsigma_y(p) = \varsigma(p, y)$ kısmi dönüşümü $[\varkappa_1, \varkappa_3]$ üzerinde 4. anlamda s -konvektir.

Benzer şekilde $\varsigma_x : [\varkappa_2, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varsigma_x(r) = \varsigma(x, r)$ dönüşümü içinde $\forall r_1, r_2 \in [\varkappa_2, \varkappa_4]$ ve $\gamma \in [0, 1]$ için;

$$\begin{aligned}
\varsigma_x(\gamma r_1 + (1 - \gamma)r_2) &= \varsigma(x, (\gamma r_1 + (1 - \gamma)r_2)) \\
&= \varsigma((\gamma x + (1 - \gamma)x), \gamma r_1 + (1 - \gamma)r_2) \\
&\leq \gamma^{\frac{1}{s}} \varsigma(x, r_1) + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \varsigma(x, r_2) \\
&= \gamma^{\frac{1}{s}} \varsigma_x(r_1) + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \varsigma_x(r_2)
\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla $\varsigma_x(r) = \varsigma(x, r)$ kısmi dönüşümünün de $[\varkappa_2, \varkappa_4]$ üzerinde 4. anlamda s -konvektir.

4. anlamda s -konveks fonksiyon tanımına denk bir tanım aşağıdaki gibidir:

Tanım 4.2 (Koordinatlarda 4. Anlamda s -Konveks Fonksiyon): $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\forall (x, z), (x, w), (y, z), (y, w) \in \Delta$ ve $s \in (0, 1], \delta_1, \delta_2 \in [0, 1]$ için;

$$\begin{aligned}
& \varsigma(\delta_1 x + (1 - \delta_1)y, \delta_2 z + (1 - \delta_2)w) \\
& \leq \delta_1^{\frac{1}{s}} \delta_2^{\frac{1}{s}} \varsigma(x, z) + \delta_1^{\frac{1}{s}} (1 - \delta_2)^{\frac{1}{s}} \varsigma(x, w) + \delta_2^{\frac{1}{s}} (1 - \delta_1)^{\frac{1}{s}} \varsigma(y, z) \\
& \quad + (1 - \delta_1)^{\frac{1}{s}} (1 - \delta_2)^{\frac{1}{s}} \varsigma(y, w)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ς 'ye koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon denir.

Teorem 4.1 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
4^{\frac{1}{s}} \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) & \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \\
& \leq \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

olur.

İspat Koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon tanımında $x = \delta_1 \varkappa_1 + (1 - \delta_1) \varkappa_2$, $y = \delta_1 \varkappa_2 + (1 - \delta_1) \varkappa_1$, $z = \delta_2 \varkappa_3 + (1 - \delta_2) \varkappa_4$, $w = \delta_2 \varkappa_4 + (1 - \delta_2) \varkappa_3$ ve $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}
& \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \\
& \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{s}} \left[\varsigma(\delta_1 \varkappa_1 + (1 - \delta_1) \varkappa_2, \delta_2 \varkappa_3 + (1 - \delta_2) \varkappa_4) \right. \\
& \quad + \varsigma(\delta_1 \varkappa_1 + (1 - \delta_1) \varkappa_2, \delta_2 \varkappa_4 + (1 - \delta_2) \varkappa_3) \\
& \quad + \varsigma(\delta_1 \varkappa_2 + (1 - \delta_1) \varkappa_1, \delta_2 \varkappa_3 + (1 - \delta_2) \varkappa_4) \\
& \quad \left. + \varsigma(\delta_1 \varkappa_2 + (1 - \delta_1) \varkappa_1, \delta_2 \varkappa_4 + (1 - \delta_2) \varkappa_3) \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının δ_1, δ_2 'ye göre $[0, 1] \times [0, 1]$ üzerinden integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}
& \varsigma\left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}\right) \\
& \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{s}} \left[\int_0^1 \int_0^1 \varsigma(\delta_1 \varkappa_1 + (1 - \delta_1) \varkappa_2, \delta_2 \varkappa_3 + (1 - \delta_2) \varkappa_4) d\delta_1 d\delta_2 \right. \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \varsigma(\delta_1 \varkappa_1 + (1 - \delta_1) \varkappa_2, \delta_2 \varkappa_4 + (1 - \delta_2) \varkappa_3) d\delta_1 d\delta_2 \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \varsigma(\delta_1 \varkappa_2 + (1 - \delta_1) \varkappa_1, \delta_2 \varkappa_3 + (1 - \delta_2) \varkappa_4) d\delta_1 d\delta_2 \\
& \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \varsigma(\delta_1 \varkappa_2 + (1 - \delta_1) \varkappa_1, \delta_2 \varkappa_4 + (1 - \delta_2) \varkappa_3) d\delta_1 d\delta_2 \right]
\end{aligned}$$

olur. Gerekli değişken değiştirmeleri yapıldığında (4.1)'in sol tarafı elde edilir.

(4.1)'in sağ tarafının ispatı için yine koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon tanımında $x = \varkappa_1, y = \varkappa_2, z = \varkappa_3$ ve $w = \varkappa_4$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}
& \varsigma(t_1 \varkappa_1 + (1 - t_1) \varkappa_2, t_2 \varkappa_3 + (1 - t_2) \varkappa_4) \\
& \leq t_1^{\frac{1}{s}} t_2^{\frac{1}{s}} \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + t_1^{\frac{1}{s}} (1 - t_2)^{\frac{1}{s}} \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) \\
& \quad + t_2^{\frac{1}{s}} (1 - t_1)^{\frac{1}{s}} \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + (1 - t_1)^{\frac{1}{s}} (1 - t_2)^{\frac{1}{s}} \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının t_1, t_2 'ye göre $[0, 1] \times [0, 1]$ üzerinden integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \varsigma(t_1 \varkappa_1 + (1-t_1) \varkappa_2, t_2 \varkappa_3 + (1-t_2) \varkappa_4) dt_1 dt_2 \\
& \leq \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) \int_0^1 \int_0^1 t_1^{\frac{1}{s}} t_2^{\frac{1}{s}} dt_1 dt_2 + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) \int_0^1 \int_0^1 t_1^{\frac{1}{s}} (1-t_2)^{\frac{1}{s}} dt_1 dt_2 \\
& \quad + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) \int_0^1 \int_0^1 t_2^{\frac{1}{s}} (1-t_1)^{\frac{1}{s}} dt_1 dt_2 \\
& \quad + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4) \int_0^1 \int_0^1 (1-t_1)^{\frac{1}{s}} (1-t_2)^{\frac{1}{s}} dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa (4.1)'in sağ tarafı kanıtlanmış olur.

Uyarı 4.1 *Teorem 4.1'deki (4.1) eşitsizliğinde $s = 1$ olarak alınırsa; Teorem 3.1'deki eşitsizlik elde edilir.*

Teorem 4.2 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|$ fonksiyonu koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon ve $s \in (0, 1]$ için;

$$\begin{aligned}
|R| & \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \\
& \times \left(\frac{4}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| + \frac{2\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right| \right. \\
& \quad + \frac{2}{\left(\frac{1}{s} + 1\right) \left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) \right| + \frac{2\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| \\
& \quad + \frac{2}{\left(\frac{1}{s} + 1\right) \left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| + \left(\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right) \right)^2 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| \\
& \quad + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right) \left(\frac{1}{s} + 2\right)} \left(\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| \right) \\
& \quad \left. + \frac{2}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2 \left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right)
\end{aligned}$$

burada $\beta(x, y)$ Euler Beta Fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.11'den ve modülün özelliğinden;

$$\begin{aligned}
|R| &= \left| \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) - \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, y \right) dy \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma \left(x, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) dx + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \right| \\
&\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \\
&\quad \times \left[\int_0^1 \int_0^1 \lambda \gamma \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} + (1 - \lambda) \varkappa_1, \gamma \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} + (1 - \gamma) \varkappa_3 \right) \right| d\lambda d\gamma \right. \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (1 - \lambda)(1 - \gamma) \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \varkappa_2 + (1 - \lambda) \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| d\lambda d\gamma \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 \lambda(1 - \gamma) \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} + (1 - \lambda) \varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| d\lambda d\gamma \\
&\quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \gamma(1 - \lambda) \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \varkappa_2 + (1 - \lambda) \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \gamma \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} + (1 - \gamma) \varkappa_3 \right) \right| d\lambda d\gamma \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğu kullanılıp integraller bulunup gerekli işlemler yapılırsa;

$$|R| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| + \frac{2\beta(2, \frac{1}{s} + 1)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right| \right. \\ & + \frac{2}{\left(\frac{1}{s} + 1\right) \left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) \right| + \frac{2\beta(2, \frac{1}{s} + 1)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| \\ & + \frac{2}{\left(\frac{1}{s} + 1\right) \left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right| + \left(\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right) \right)^2 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_1, \varkappa_3) \right| \\ & + \frac{\beta(2, \frac{1}{s} + 1)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right) \left(\frac{1}{s} + 2\right)} \left(\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_1, \varkappa_4) \right| \right) \\ & \left. + \frac{2}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2 \left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right) \end{aligned}$$

bulunur ve Teorem 4.2 kanıtlanmış olur.

Sonuç 4.1 *Teorem 4.2'nin şartları altında $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}$ fonksiyonu eğer;*

$$\left\| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right\|_{\infty} = \sup \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right| < \infty$$

şartını sağlar ve $s = 1$ seçilirse;

$$|R| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \left\| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right\|_{\infty}$$

elde edilir.

Uyarı 4.2 *Teorem 4.2'de $s = 1$ olarak tercih edilirse; Teorem 3.11'teki eşitsizlik elde edilir.*

Teorem 4.3 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. Eğer, $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olmak

üzere, $q > 1, s \in (0, 1]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için;

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
&\times \left\{ \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_3)}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&+ \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left. + \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

İspat Lemma 3.11 ve çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \left(\int_0^1 \int_0^1 (\lambda \gamma)^p d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} + (1 - \lambda) \varkappa_1, \gamma \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} + (1 - \gamma) \varkappa_3 \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 \int_0^1 ((1 - \lambda)(1 - \gamma))^p d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \varkappa_2 + (1 - \lambda) \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 \int_0^1 (\lambda(1-\gamma))^p d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} + (1-\lambda)\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1-\gamma) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 \int_0^1 (\gamma(1-\lambda))^p d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \varkappa_2 + (1-\lambda) \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \gamma \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} + (1-\gamma)\varkappa_3 \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğu kullanılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$\begin{aligned}
|R| & \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
& \times \left\{ \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_3)}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur ve Teorem 4.3 kanıtlanmış olur.

Uyarı 4.3 Teorem 4.3'te $s = 1$ olarak alınırsa; Teorem 3.12'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.4 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer, $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olmak üzere, $q \geq 1$ ve $s \in (0, 1]$ için;

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \left(\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right) \right)^2 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{1}{s} + 2\right)} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1 \right)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{1}{s} + 2\right)} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

İspat Lemma 3.11 ve çift katlı integrallerde Power mean eşitsizliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \left(\int_0^1 \int_0^1 \lambda \gamma d\gamma d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \lambda \gamma \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} + (1-\lambda)\varkappa_1, \gamma \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} + (1-\gamma)\varkappa_3 \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \int_0^1 (1-\lambda)(1-\gamma) d\gamma d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \varkappa_2 + (1-\lambda) \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \gamma \varkappa_4 + (1-\gamma) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \int_0^1 \lambda (1-\gamma) d\gamma d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} + (1-\lambda)\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1-\gamma) \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \int_0^1 \gamma (1-\lambda) d\gamma d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\lambda \varkappa_2 + (1-\lambda) \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \gamma \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} + (1-\gamma)\varkappa_3 \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğu kullanılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \left(\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right) \right)^2 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_4 \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{1}{s} + 2\right)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_3 \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\frac{1}{s} + 2} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2} \right) \right|^q + \frac{\beta \left(2, \frac{1}{s} + 1\right)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{1}{s} + 2\right)} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur ve Teorem 4.4 kanıtlanmış olur.

Uyarı 4.4 Teorem 4.4'te $s = 1$ olarak tercih edilirse; Teorem 3.13'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.5 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olmak üzere, $s \in (0, 1]$ için;

$$|M| \leq \frac{(2s^2 - 2^{-\frac{1}{s}})^2(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(s+1)^2(2s+1)^2} \\ \times \left[\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right].$$

İspat Lemma 3.12 ve modülün özelliğinden;

$$|M| \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \\ \times \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |p(x, \lambda)q(y, \gamma)| \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_1 + \frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| d\gamma d\lambda \\ \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right| \text{ koordinatlarda 4. anlamda } s\text{-konveks olduğundan;}$$

$$|M| \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \\ \times \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |q(y, \gamma)| \left\{ \int_{\varkappa_1}^{\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}} (\lambda - \varkappa_1) \left[\left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| \right] d\lambda \right. \\ \left. + \int_{\varkappa_1}^{\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}} (\lambda - \varkappa_1) \left[\left(\frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| \right] d\lambda \right. \\ \left. + \int_{\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}}^{\varkappa_2} (\varkappa_2 - \lambda) \left[\left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| \right] d\lambda \right. \\ \left. + \int_{\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}}^{\varkappa_2} (\varkappa_2 - \lambda) \left[\left(\frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| \right] d\lambda \right\} d\gamma$$

dir. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$|M| \leq \frac{(2s^2 - 2^{-\frac{1}{s}})(\varkappa_2 - \varkappa_1)}{2(s+1)(2s+1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \left[\int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |q(y, \gamma)| \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_1, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| \right. \\ \left. + \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |q(y, \gamma)| \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| \right] d\gamma$$

bulunur. $\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|$ koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğu tekrar kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(2s^2 - 2^{-\frac{1}{s}})(\varkappa_2 - \varkappa_1)}{2(s+1)(2s+1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \\
& \times \left\{ \int_{\varkappa_3}^{\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}} (\gamma - \varkappa_3) \left[\left(\frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| \right] d\gamma \right. \\
& + \int_{\varkappa_3}^{\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}} (\gamma - \varkappa_3) \left[\left(\frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| \right] d\gamma \\
& + \int_{\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}}^{\varkappa_4} (\varkappa_4 - \gamma) \left[\left(\frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| \right] d\gamma \\
& + \int_{\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}}^{\varkappa_4} (\varkappa_4 - \gamma) \left[\left(\frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| \right] d\gamma \\
& + \int_{\varkappa_3}^{\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}} (\gamma - \varkappa_3) \left[\left(\frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| \right] d\gamma \\
& + \int_{\varkappa_3}^{\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}} (\gamma - \varkappa_3) \left[\left(\frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right] d\gamma \\
& + \int_{\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}}^{\varkappa_4} (\varkappa_4 - \gamma) \left[\left(\frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| \right] d\gamma \\
& \left. + \int_{\frac{\varkappa_3 + \varkappa_4}{2}}^{\varkappa_4} (\varkappa_4 - \gamma) \left[\left(\frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right] d\gamma \right\}
\end{aligned}$$

dir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında sonuca ulaşılır.

Uyarı 4.5 *Teorem 4.5'te $s = 1$ olarak tercih edilirse; Teorem 3.14'deki eşitsizlik elde edilir.*

Teorem 4.6 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer, $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olmak

üzere, $q > 1, s \in (0, 1]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için;

$$|M| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Lemma 3.12'ten ;

$$|M| \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \times \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |p(x, \lambda)q(y, \gamma)| \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_1 + \frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| d\gamma d\lambda$$

eşitsizliği yazılır. Çift katlı integrallerde Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$|M| \leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \left\{ \left(\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |p(x, t)q(y, \gamma)|^p d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_1 + \frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.2)$$

dir. $\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğundan;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_1 + \frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right|^q \\ & \leq \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q \\ & \quad + \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q \\
& + \left(\frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q
\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir ve (4.2) ve (4.3) eşitsizlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
|M| & \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
& \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur ve burada;

$$\left(\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |p(x, \lambda)q(y, \gamma)|^p d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{[(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)]^{1+\frac{1}{p}}}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}}$$

dir ve Teorem 4.6 kanıtlanmış olur.

Uyarı 4.6 Teorem 4.6’te $s = 1$ olarak tercih edilirse; Teorem 3.15’deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.7 $\varsigma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer, $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olmak üzere, $q \geq 1$ ve $s \in (0, 1]$ için;

$$\begin{aligned}
|M| & \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \\
& \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Lemma 3.12 ve çift katlı integraller için Power mean eşitsizliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \\
&\times \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |p(x, \lambda)q(y, \gamma)| \\
&\times \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_1 + \frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right| d\gamma d\lambda \\
&\leq \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \left(\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |p(x, \lambda)q(y, \gamma)|^p d\lambda d\gamma \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left[\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |p(x, \lambda)q(y, \gamma)| \right. \\
&\times \left. \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_1 + \frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right|^q d\gamma d\lambda \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

bulunur. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğu için;

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_1 + \frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \varkappa_2, \frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_3 + \frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \varkappa_4 \right) \right|^q \\
&\leq \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q \\
&\quad + \left(\frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q \\
&\quad + \left(\frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\varkappa_4 - \gamma}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q \\
&\quad + \left(\frac{\lambda - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\gamma - \varkappa_3}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \right)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q
\end{aligned} \tag{4.5}$$

dir. (4.4) ve (4.5) eşitsizlikleri kullanılırsa;

$$|M| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{16} \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada;

$$\left(\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} |p(x, \lambda)q(y, \gamma)|^p d\lambda d\gamma \right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)^2(\varkappa_4 - \varkappa_3)^2}{16} \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

dir ve Teorem 4.7 kanıtlanmış olur.

Uyarı 4.7 Teorem 4.7’te $s = 1$ olarak tercih edilirse; Teorem 3.16’deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.8 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer, $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olmak üzere;

$$|N| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2\left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \times \left(\Lambda \Phi \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| + \Upsilon \Phi \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| + \Psi \Lambda \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| \right. \\ \left. + \Psi \Upsilon \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right) \quad (4.6)$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\Lambda = \left(\frac{1}{s} + 1 + 2(\omega_1 + 1) \left(\frac{1}{\omega_1 + 1} \right)^{\frac{1}{s}+2} - \omega_1 \right) \\ \Phi = \left(\frac{1}{s} + 1 + 2(\omega_2 + 1) \left(\frac{1}{\omega_2 + 1} \right)^{\frac{1}{s}+2} - \omega_2 \right) \\ \Upsilon = \left(\omega_2 \left(\frac{1}{s} + 1 \right) + 2 \left(\frac{1}{\omega_2 + 1} \right)^{\frac{1}{s}+1} - 1 \right)$$

$$\Psi = \left(\omega_2 \left(\frac{1}{s} + 1 \right) + 2 \left(\frac{1}{\omega_2 + 1} \right)^{\frac{1}{s} + 1} - 1 \right)$$

şeklindedir.

İspat $\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|$ koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon olduğu kullanılarak;

$$\begin{aligned} |N| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)((\omega_2 + 1)\gamma - 1)| \\ &\quad \times \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\lambda \varkappa_2 + (1 - \lambda)\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right| d\lambda d\gamma \\ &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \int_0^1 \left[\int_0^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)((\omega_2 + 1)\gamma - 1)| \right. \\ &\quad \times \left\{ \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right| \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right| \right\} d\lambda \right] d\gamma \end{aligned}$$

bulunur. İntegraler hesaplandığında;

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)| \left\{ \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \varkappa_3) \right| \right. \\
& \quad \left. + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \varkappa_3) \right| \right\} d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{1}{\omega_1 + 1}} (1 - (\omega_1 + 1)\lambda) \left\{ \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \varkappa_3) \right| \right. \\
& \quad \left. + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \varkappa_3) \right| \right\} d\lambda \\
&+ \int_{\frac{1}{\omega_1 + 1}}^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)| \left\{ \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \varkappa_3) \right| \right. \\
& \quad \left. + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \varkappa_3) \right| \right\} d\lambda \\
&= \frac{1}{(\frac{1}{s} + 1)(\frac{1}{s} + 2)} \left[\left(\omega_1 \left(\frac{1}{s} + 1 \right) + 2 \left(\frac{1}{\omega_1 + 1} \right)^{\frac{1}{s} + 1} - 1 \right) \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \varkappa_3) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{s} + 1 + 2(\omega_1 + 1) \left(\frac{\omega_1}{\omega_1 + 1} \right)^{\frac{1}{s} + 2} - \omega_1 \right) \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma) \varkappa_3) \right| \right] \\
& \tag{4.7}
\end{aligned}$$

dir. Diğer integraller içinde benzer işlemler ve $\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|$ koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |((\omega_2 + 1)\gamma - 1)| \left\{ \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right| \right\} d\gamma \\
& \leq \int_0^{\frac{1}{\omega_2 + 1}} (1 - (\omega_2 + 1)\gamma) \left\{ \gamma^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| \right\} d\gamma \\
& \quad + \int_{\frac{1}{\omega_2 + 1}}^1 ((\omega_2 + 1)\gamma - 1) \left\{ \gamma^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| \right\} d\gamma \\
& = \frac{1}{(\frac{1}{s} + 1)(\frac{1}{s} + 2)} \left\{ \frac{1}{(\omega_2 + 1)^{\frac{1}{s} + 1}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right. \\
& \quad + \left[\omega_2 \left(\frac{1}{s} + 1 \right) + \frac{1}{(\omega_2 + 1)^{\frac{1}{s} + 1}} - 1 \right] \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| \\
& \quad + \left[\frac{1}{s} - \omega_2 + 1 + \omega_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_2 + 1} \right)^{\frac{1}{s} + 1} \right] \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| \\
& \quad \left. + \omega_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_2 + 1} \right)^{\frac{1}{s} + 1} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizlik ile (4.7) eşitsizliği kullanılarak (4.6) ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2 ω 'ların farklı değerleriyle iki ayrı sonuç elde edilir:

- Teorem 4.8'deki (4.6) eşitsizliğinde $\omega_1 = \omega_2 = 1$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_2) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} [\varsigma(\varkappa_2, y) + \varsigma(\varkappa_1, y)] dy \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} [\varsigma(x, \varkappa_4) + \varsigma(x, \varkappa_3)] dx \right] + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4 \left(\frac{1}{s} + 1\right)^2 \left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}\right)^2 \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{s}} + 1} \left(\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2^{\frac{1}{s}+1}} \right) \left(\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

• Teorem 4.8'deki (4.6) eşitsizliğinde $\omega_1 = \omega_2 = 0$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
&\left| \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) - \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_1, y) dy - \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_3) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \right| \\
&\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2 \left(\frac{1}{s} + 2\right)^2} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{s} + 1 \right) \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.9 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $p > 1$ olmak üzere $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s - konveks olmak üzere;

$$\begin{aligned}
|N| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3) \left(1 + \omega_1^{\frac{p+1}{p}}\right) \left(1 + \omega_2^{\frac{p+1}{p}}\right)}{(\omega_1 + 1)^{\frac{p+1}{p}} (\omega_2 + 1)^{\frac{p+1}{p}} (p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
&\quad \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$, $s \in (0, 1]$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ için geçerlidir.

İspat Lemma 3.13 ve çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$|N| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)((\omega_2 + 1)\gamma - 1)|^p d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\lambda \varkappa_2 + (1 - \lambda)\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right|^q d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon olduğu kullanılıp integraller hesaplanırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3 ω 'ların farklı değerleriyle iki ayrı sonuç elde edilir:

• *Teorem 4.9'da $\omega_1 = \omega_2 = 1$ seçilirse;*

$$\left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_2) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} [\varsigma(\varkappa_2, y) + \varsigma(\varkappa_1, y)] dy + \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} [\varsigma(x, \varkappa_4) + \varsigma(x, \varkappa_3)] dx \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \right| \\ \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\ \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}} \quad (4.8)$$

bulunur.

• Teorem 4.9’da $\omega_1 = \omega_2 = 0$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
& \left| \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) - \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_1, y) dy - \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_3) dx \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
& \quad \times \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 4.8 (4.8) eşitsizliğinde $s = 1$ tercih edilirse; Teorem 3.15 elde edilir.

Teorem 4.10 $\varsigma : \Delta \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $p \leq 1$ olmak üzere $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s - konveks olmak üzere;

$$\begin{aligned}
|N| & \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \left(\frac{(1 + \omega_1^2)(1 + \omega_2^2)}{4(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\frac{\Lambda \Phi \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3) + \Upsilon \Phi \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + \Psi \Lambda \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) + \Psi \Upsilon \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4)}{(\frac{1}{s} + 1)^2 (\frac{1}{s} + 2)^2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$, $s \in (0, 1]$ için geçerlidir.

İspat Lemma 3.13 ve iyi bilinen Power mean eşitsizliği kullanırsa;

$$\begin{aligned}
|N| &\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)((\omega_2 + 1)\gamma - 1)| d\lambda d\gamma \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left[\int_0^1 \int_0^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)((\omega_2 + 1)\gamma - 1)| \right. \\
&\quad \times \left. \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\lambda \varkappa_2 + (1 - \lambda)\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right|^q d\lambda d\gamma \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. $\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\lambda \varkappa_2 + (1 - \lambda)\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right|^q \\
&\leq \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_2, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right|^q + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right|^q
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma}(\lambda \varkappa_2 + (1 - \lambda)\varkappa_1, \gamma \varkappa_4 + (1 - \gamma)\varkappa_3) \right|^q \\
&\leq \lambda^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_4) + \lambda^{\frac{1}{s}} (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_2, \varkappa_3) \\
&\quad + \gamma^{\frac{1}{s}} (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_4) + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q(\varkappa_1, \varkappa_3)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned}
|N| \leq & \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \left(\frac{(1 + \omega_1^2)(1 + \omega_2^2)}{4(\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1)} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)((\omega_2 + 1)\gamma - 1)| \left\{ \lambda^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_4) \right. \right. \\
& + \lambda^{\frac{1}{s}} (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_3) + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_4) \\
& \left. \left. + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_3) \right\} d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olur ve gerekli hesaplamalar yapıldığında;

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 \int_0^1 |((\omega_1 + 1)\lambda - 1)((\omega_2 + 1)\gamma - 1)| \left\{ \lambda^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_4) \right. \right. \\
& + \lambda^{\frac{1}{s}} (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_3) + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_4) \\
& \left. \left. + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_3) \right\} d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(\frac{\Lambda \Phi \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_3) + \Upsilon \Phi \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_4) + \Psi \Lambda \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_3) + \Psi \Upsilon \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_4)}{(\frac{1}{s} + 1)^2 (\frac{1}{s} + 2)^2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir ve Teorem 4.10 kanıtlanmış olur. Burada Ψ, Υ, Λ ve Φ , Teorem 4.8'te tanımlanmış fonksiyonlardır.

Sonuç 4.4 ω 'ların farklı değerleriyle iki ayrı sonuç elde edilir:

• *Teorem 4.10'da $\omega_1 = \omega_2 = 1$ seçilirse;*

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_2) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} \right. \\
& - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} [\varsigma(\varkappa_2, y) + \varsigma(\varkappa_1, y)] dy + \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} [\varsigma(x, \varkappa_4) + \varsigma(x, \varkappa_3)] dx \right] \\
& \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[\frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{s}+1}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_3) + \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2^{\frac{1}{s}+1}} \right) \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_1, \varkappa_4) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_3) + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} \right|^q (\varkappa_2, \varkappa_4)}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2 \left(\frac{1}{s} + 2 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir.

• *Teorem 4.10'da $\omega_1 = \omega_2 = 0$ seçilirse;*

$$\begin{aligned}
& \left| \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) - \frac{1}{\varkappa_4 - \varkappa_3} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(\varkappa_1, y) dy - \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \varsigma(x, \varkappa_3) dx \right. \\
& \left. + \frac{1}{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \int_{\varkappa_3}^{\varkappa_4} \varsigma(x, y) dx dy \right| \\
& \leq (\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3) \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[\frac{\left(\frac{1}{s} + 1 \right) \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \lambda \partial \gamma} (\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q}{\left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2 \left(\frac{1}{s} + 2 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir.

Uyarı 4.9 *Teorem 4.10'da $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ve $s = 1$ tercih edilirse; Teorem 3.16 elde edilir.*

Teorem 4.11 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon, $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \in L(\Delta)$ ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon ise;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left[\frac{1}{(\beta + \frac{1}{s} + 1)(\alpha + \frac{1}{s} + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(1 + \frac{1}{s})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{s} + 2)(\beta + \frac{1}{s} + 1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(1 + \frac{1}{s})}{\Gamma(\beta + \frac{1}{s} + 2)(\alpha + \frac{1}{s} + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma^2(1 + \frac{1}{s})}{\Gamma(\beta + \frac{1}{s} + 2)\Gamma(\alpha + \frac{1}{s} + 2)} \right] \\
& \quad \times \left[\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right] \quad (4.9)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\Gamma(x)$ Euler Gamma Fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.14 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left[\int_0^1 \int_0^1 \gamma^\alpha \lambda^\beta \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma)\varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda)\varkappa_4) \right| d\lambda d\gamma \right. \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 (1 - \gamma)^\alpha \lambda^\beta \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma)\varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda)\varkappa_4) \right| d\lambda d\gamma \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \gamma^\alpha (1 - \lambda)^\beta \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma)\varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda)\varkappa_4) \right| d\lambda d\gamma \\
& \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 (1 - \gamma)^\alpha (1 - \lambda)^\beta \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma)\varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda)\varkappa_4) \right| d\lambda d\gamma \right] \quad (4.10)
\end{aligned}$$

bulunur. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğu kullanılırsa;

$$\left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left[\int_0^1 \int_0^1 \left[\gamma^\alpha \lambda^\beta + (1 - \gamma)^\alpha \lambda^\beta + \gamma^\alpha (1 - \lambda)^\beta + (1 - \gamma)^\alpha (1 - \lambda)^\beta \right] \right. \\
&\times \left[\gamma^{\frac{1}{s}} \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| + \gamma^{\frac{1}{s}} (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| \right. \\
&+ \left. (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right] d\lambda d\gamma \Bigg] \\
&\quad (4.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral alma işlemleri yapılırsa Teorem 4.11 kanıtlanmış olur.

Sonuç 4.5 *Teorem 4.11’de $s = 1$ tercih edilirse;*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
&\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(\beta + 1)(\alpha + 1)} \\
&\times \left[\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right| + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right] \\
&\quad (4.12)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.12 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon, $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \in L(\Delta)$ ve $\alpha, \beta \in (0, 1]$ olsun. $q > 1$ ve $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4.anlamda s -konveks fonksiyon ise;

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
&\leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4 \left(\frac{1}{s} + 1 \right)^{\frac{2}{q}} (\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}} (\beta p + 1)^{\frac{1}{p}}} \\
&\times \left[\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad (4.13)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat Lemma 3.14 ve çift katlı integrallerde Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \times \left[\left(\int_0^1 \int_0^1 [\gamma^\alpha \lambda^\beta]^p d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& + \left(\int_0^1 \int_0^1 [(1-\gamma)^\alpha \lambda^\beta]^p d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 \int_0^1 [\gamma^\alpha (1-\lambda)^\beta]^p d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{p}} \\
& + \left. \left(\int_0^1 \int_0^1 [(1-\gamma)^\alpha (1-\lambda)^\beta]^p d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1-\gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1-\lambda) \varkappa_4) \right|^q d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}(\beta p + 1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1-\gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1-\lambda) \varkappa_4) \right|^q d\lambda d\gamma \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}(\beta p + 1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \times \left[\gamma^{\frac{1}{s}} \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\varkappa_1, \varkappa_3) \right| + \gamma^{\frac{1}{s}} (1-\lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\varkappa_1, \varkappa_4) \right| \right. \\
& + \left. (1-\gamma)^{\frac{1}{s}} \lambda^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\varkappa_2, \varkappa_3) \right| + (1-\gamma)^{\frac{1}{s}} (1-\lambda)^{\frac{1}{s}} \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\varkappa_2, \varkappa_4) \right| \right] d\lambda d\gamma
\end{aligned} \tag{4.16}$$

bulunur. İntegraller hesaplandığında;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4 \left(\frac{1}{s} + 1\right)^{\frac{2}{q}} (\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}} (\beta p + 1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \quad \times \left[\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir ve Teorem 4.12 kanıtlanmış olur.

Sonuç 4.6 *Teorem 4.12’de $s = 1$ tercih edilirse;*

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4^{1+\frac{1}{q}} (\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}} (\beta p + 1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \quad \times \left[\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Teorem 4.13 $\varsigma : \Delta = [\varkappa_1, \varkappa_2] \times [\varkappa_3, \varkappa_4] \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon, $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \in L(\Delta)$ ve $\alpha, \beta \in (0, 1]$ olsun. $q > 1$ ve $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon ise;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left[\frac{4}{p(\alpha + 1)^p (\beta + 1)^p} + \left(\frac{4}{q \left(\frac{1}{s} + 1\right)^2} \right) \right. \\
& \quad \times \left. \left[\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q \right] \right]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat Lemma 3.14 ve Young eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \times \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \int_0^1 (\gamma^\alpha \lambda^\beta)^p d\lambda d\gamma \right. \\
& \quad + \frac{1}{q} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda) \varkappa_4) \right|^q d\lambda d\gamma \\
& \quad + \frac{1}{p} \int_0^1 \int_0^1 ((1 - \gamma)^\alpha \lambda^\beta)^p d\lambda d\gamma \\
& \quad + \frac{1}{q} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda) \varkappa_4) \right|^q d\lambda d\gamma \\
& \quad + \frac{1}{p} \int_0^1 \int_0^1 (\gamma^\alpha (1 - \lambda)^\beta)^p d\lambda d\gamma \\
& \quad + \frac{1}{q} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda) \varkappa_4) \right|^q d\lambda d\gamma \\
& \quad + \frac{1}{p} \int_0^1 \int_0^1 ((1 - \gamma)^\alpha (1 - \lambda)^\beta)^p d\lambda d\gamma \\
& \quad \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\gamma \varkappa_1 + (1 - \gamma) \varkappa_2, \lambda \varkappa_3 + (1 - \lambda) \varkappa_4) \right|^q d\lambda d\gamma \right] \quad (4.20)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, $\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} \right|$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda 4. anlamda s -konveks olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left[\frac{4}{p(\alpha + 1)^p(\beta + 1)^p} + \left(\frac{4}{q \left(\frac{1}{s} + 1 \right)^2} \right) \right. \\
& \quad \times \left[\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda} (\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q \right] \quad (4.21)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve Teorem 4.13 kanıtlanmış olur.

Sonuç 4.7 *Teorem 4.13'de $s = 1$ tercih edilirse;*

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varsigma(\varkappa_1, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_1, \varkappa_4) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_3) + \varsigma(\varkappa_2, \varkappa_4)}{4} + A \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_3)}{4} \left[\frac{4}{p(\alpha + 1)^p(\beta + 1)^p} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_3) \right|^q}{q} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_1, \varkappa_4) \right|^q}{q} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_3) \right|^q}{q} + \frac{\left| \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \gamma \partial \lambda}(\varkappa_2, \varkappa_4) \right|^q}{q} \right]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışmanın dördüncü bölümü olan Araştırma Bulguları kısmında, koordinatlarda 4. anlamda s -konveks fonksiyon sınıfı ve bu sınıfın bazı özellikleri sunulmaktadır. Ayrıca konveks fonksiyonlarla ilgili çift katlı integrallerde iyi bilinen eşitsizlikler olan Hölder, Young ve Power mean eşitsizlikleri kullanılarak elde edilmiş 4. anlamda s -konveks fonksiyon sınıfı için yeni integral eşitsizlikler ve genellemeler verilmiştir. Bulunan sonuçların bazı özel durumları, literatürde bulunan önceki çalışmaların sonuçlarını içermektedir. Böylece, 4. anlamda s -konveks fonksiyonlar için yeni üst sınırlar bulunmuştur.

Bu tez çalışmasında verilen lemmalar veya onlara benzer yeni lemmalar kurularak koordinatlarda konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Ayrıca, Hermite-Hadamard tipli veya Simpson tipli fonksiyonlar için yeni genellemeler ve birçok yeni eşitsizlikler yazılabilir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, Araştırma Bulguları kısmında kullanılan lemmaları farklı konveks fonksiyonlara uygulayabilirler. Böylece koordinatlarda yeni integral eşitsizlikleri elde edebilirler.

KAYNAKLAR

- Akdemir, A. (2012). *Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikler*. PhD thesis, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Akdemir, A., Aslan, S., Dokuyucu, M., and Çelik, E. (2023). Exponentially convex functions on the coordinates and novel estimations via Riemann-Liouville fractional operator. *Journal of Function Spaces*, 2023.
- Akdemir, A., Nazik, M., and Ozdemir, M. (2022a). Simpson's type inequalities for s -convex functions in the fourth sense. *COIA 2022, Bakü, Azerbaijan, Abstract Book*, page 57.
- Akdemir, A., Nazik, M., Set, E., and Ekinci, A. (2022b). New approaches for differentiable s -convex functions in the fourth sense via fractional integral operators. In *5th International Conference on Mathematical and Related Sciences Book of Proceedings*, page 78.
- Akdemir, A. and Ozdemir, M. (2010). Some Hadamard-type inequalities for coordinated p -convex functions and Godunova-Levin functions. 1309(1):7–15.
- Alomari, M. (2011). *Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson type for s -convex, Quasi-convex and r -convex mappings and applications*. PhD thesis, Citeseer.
- Alomari, M. and Darus, M. (2008a). Co-ordinated s -convex function in the first sense with some Hadamard-type inequalities. *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 3(32):1557–1567.
- Alomari, M. and Darus, M. (2008b). The Hadamard's inequality for s -convex function of 2-variables on the co-ordinates. *Int. J. Math. Anal*, 2(13):629–638.
- Aslan, S. and Akdemir, A. (2022). Exponentially convex functions on the co-ordinates and related integral inequalities. *COIA 2022, Bakü, Azerbaijan, Abstract Book*, page 120.
- Avcı Ardıç, M. (2013). *Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları için İntegral Eşitsizlikler*. PhD thesis, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

- Bayrak, G. (2022). Koordinatlarda s–konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri. Master’s thesis, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Beckenbach, E. and Bellman, R. (1961). An introduction to inequalities. Technical report, Mathematical Association of America Washington, DC.
- Breckner, W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS)*, 23(37):13–20.
- Dragomir, S. (2001). On the Hadamard’s inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane. *Taiwanese Journal of Mathematics*, pages 775–788.
- Dragomir, S., Agarwal, R., and Barnett, N. (1999). Inequalities for Beta and Gamma functions via some classical and new integral inequalities. *RGMIA research report collection*, 2(3).
- Dragomir, S. and Fitzpatrick, S. (1999). The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, 32(4):687–696.
- Dragomir, S. and Pearce, C. (1998). Quasi-convex functions and Hadamard’s inequality. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 57(3):377–385.
- Dragomir, S., Pecaric, J., and Persson, L. (1995). Some inequalities of Hadamard type. *Soochow J. Math*, 21(3):335–341.
- Eken, Z. (2022). Fejer inequality for s-convex functions in the fourth sense. *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(1).
- Eken, Z., Sezer, S., Tınaztepe, G., and Adilov, G. (2021). s-convex functions in the fourth sense and some of their properties. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(2):260–267.
- Godunova, E. and Levin, V. (1985). Neravenstva dlja funkciï širokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkciï. vycislitel. mat. i. Fiz. Mezhvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva, 9:138–142.
- Greenberg, H. and Pierskalla, W. (1971). A review of quasi-convex functions. *Operations*

research, 19(7):1553–1570.

Hardy, G., Littlewood, J., and Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.

Hudzik, H. and Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes mathematicae*, 48(1):100–111.

Kemali, S. (2021). Hermite-Hadamard type inequality for s-convex functions in the fourth sense. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 13(2):287–293.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264:65–70.

Latif, M. and Alomari, M. (2009). Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates. In *Int. Math. Forum*, volume 4, pages 2327–2338.

Loverro, A. (2004). Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer. *Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering*, pages 1–28.

Mihesan, V. (1993). A generalization of the convexity, seminar on functional equations, approx. *Convex, Cluj-Napoca*, 1.

Miller, K. and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, New York, 1993.

Mitrinovic, D., Pecaric, J., and Fink, A. (1993). Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic, Dordrecht.

Mitrinovic, D. and Vasic, P. (1970). *Analytic inequalities*, volume 1. Springer.

Niculescu, C. and Persson, L. (2006). *Convex functions and their applications*, volume 23. Springer.

Onay, K. (2021). Riemann İntegraller yardımıyla koordinatlarda çeşitli integral eşitsizlikler. Master’s thesis, Yüksek Lisans, Fen Bilimleri Enstitüsü, Agri İbrahim Çeçen Üniversitesi,

Agri.

Ozdemir, M., Akdemir, A., and Ekinici, A. (2021). New integral inequalities for co-ordinated convex functions. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 2(1):52–69.

Ozdemir, M., Akdemir, A., and Yıldız, Ç. (2010). On co-ordinated quasi-convex functions. *arXiv preprint arXiv:1012.3622*.

Ozdemir, M., Kavurmaci, H., Akdemir, A., and M, A. A. (2012a). Inequalities for convex and s-convex functions on $\delta=[a, b] \times [c, d]$. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1):1–19.

Ozdemir, M., Latif, M., and Akdemir, A. (2012b). On some Hadamard-type inequalities for product of two s-convex functions on the co-ordinates. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1):1–13.

Ozdemir, M. and Set, E. (2011). Some new hadamard type inequalities for co-ordinated m-convex and (α, m) -convex functions. *Hacettepe journal of mathematics and statistics*, 40(2):219–229.

Pachpatte, B. (2003). On some inequalities for convex functions. *RGMIA Res. Rep. Coll*, 6(1):1–9.

Pachpatte, B. (2005). *Mathematical inequalities*. Elsevier.

Pečarić, J. and Beesack, P. (1987). On Knopp's inequality for convex functions. *Canadian Mathematical Bulletin*, 30(3):267–272.

Pečarić, J. and Tong, Y. (1992). *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. Academic press.

Roberts, A. and Varberg, D. (1973). Convex functions academic press. *New York*, 62.

Ross, B. (1977). The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica*, 4(1):75–89.

- Samko, S., Kilbas, A., and Marichev, O. (1993). *Fractional integrals and derivatives*, volume 1. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland.
- Sarikaya, M. (2014). On the Hermite–Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex function via fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions*, 25(2):134–147.
- Sarikaya, M., Set, E., Ozdemir, M., and Dragomir, S. (2010). New some Hadamard’s type inequalities for co-ordinated convex functions. *arXiv preprint arXiv:1005.0700*.
- Set, E. (2010). *Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri*. PhD thesis, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Set, E., Sardari, M., Ozdemir, M., and Roojin, J. (2012). On generalizations of the hadamard inequality for (α, m) -convex functions. *Kyungpook Mathematical Journal*, 52(3):307–317.
- Toader, G. (1988). On a generalization of the convexity. *Mathematica*, 30(53):83–87.

