



**4-BOYUTLU HEMEN HEMEN
PARAKOMPLEKS
PÜR-WALKER MANİFOLDLAR**

Hilmi SARSILMAZ

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Prof. Dr. Arif SALİMOV
2017**

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**4-BOYUTLU HEMEN HEMEN PARAKOMPLEKS PÜR-WALKER
MANİFOLDLAR**



Hilmi SARSILMAZ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı**

**ERZURUM
2017**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**4-BOYUTLU HEMEN HEMEN PARAKOMPLEKS PÜR-WALKER
MANİFOLDLAR**

Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında, Hilmi SARSILMAZ tarafından hazırlanan bu çalışma, 27/04/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı-Geometri Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği (5/5)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

İmza :

Üye : Prof. Dr. Arif SALİMOV

İmza :

Üye : Prof. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Aydın GEZER

İmza :

Üye : Doç. Dr. İsmail Gök

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 04/05/2017 tarih ve 18/14 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

4-BOYUTLU HEMEN HEMEN PARAKOMPLEKS PÜR-WALKER MANİFOLDLAR

Hilmi SARSILMAZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Bu tezde, ilk olarak nötral metriğe sahip hemen hemen parakompleks manifold oluşturularak dönüşümün matrisi yardımıyla Walker 4-manifold üzerine taşınmıştır. İkinci olarak Walker 4-manifold üzerinde elde edilen hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold için integrallenme şartları ve Kahler manifoldların bazı problemleri incelenmiştir. Son olarak, integrallenemeyen hemen hemen parakompleks yapıya sahip flat hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldlara bir örnek verilmiştir.

2017, 68 sayfa

Anahtar Kelimeler: hemen hemen parakompleks yapı, pür metrik, nötral metrik, Walker metrik, Kahler yapı.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON 4-DIMENSIONAL ALMOST PARACOMPLEX PURE-WALKER MANIFOLDS

Hilmi SARSILMAZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Geometry

Supervisor: Prof. Dr. Arif SALİMOV

In this thesis, firstly, an almost paracomplex manifolds with neutral metric was created and moved onto the Walker 4-manifolds with the help of transformation matrix. Secondly, for the almost paracomplex pure-Walker manifolds which is obtained on the Walker 4-manifolds, the conditions of integrability and some problems of the Kahler manifolds are investigated. Finally, an example is given to flat almost paracomplex pure-Walker manifolds which consists of a non-integrable almost paracomplex structures.

2017, 68 pages

Keywords: almost paracomplex structure, pure metric, neutral metric, Walker metric, Kahler structure.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a en içten dileklerimle saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım bölümümüzün öğretim üyelerine ve özellikle her adımda bilgilerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı eşime, aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Doktora eğitimime '2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı' ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TUBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hilmi SARSILMAZ

Nisan - 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	6
2.1. Tensörler.....	6
2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar	9
2.3. Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları	12
2.4. Kotanjant Vektörler ve 1-Formlar	14
2.5. Tensör Alanları.....	16
2.6. Lie Operatörü ve Lie Diferensiyellenmesi	18
2.7. Afın Konneksiyon ve Kovaryant Türev	19
2.8. Eğrilik ve Burulma Tensörleri.....	21
2.9. Riemann Manifoldu.....	23
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	28
3.1. Tachibana Operatörü	28
3.2. Hemen Hemen Parakompleks Manifoldlar	29
3.3. Nijenhuis Tensörü	31
3.4. Pür Tensörler	32
3.5. Kahler Manifoldlar	34
3.6. Dört Boyutlu Walker Manifoldlar	40
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	41
4.1. Nötral 4-manifold Üzerinde Pür Metrik	41
4.2. Pür-Walker Metrik	42
4.3. Parakompleks Pür-Walker Manifoldlar (φ^w -integrallenebilirlik)	45
4.4. Kahler Parakompleks Pür-Walker Manifoldlar.....	48
4.4.1. Kahler Pür-Walker Metrikler	48
4.4.2. Quasi-Kahler Pür-Walker Metrikler.....	50

4.4.3. Hemen Hemen Parakompleks Pür-Walker Manifold Üzerinde	
İzotropik-Kahler Yapılar.....	56
4.5. İntegrallenemeyen Flat Hemen Hemen Parakompleks Pür-Walker	
Manifoldlar	59
5. SONUÇ	64
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69



SİMGELER DİZİNİ

I	Birim Afinor Alanı
M_n	n -boyutlu Diferensiyellenebilir Manifold
∇	Burulmasız Riemann Konneksiyonu
g	Pseudo-Riemann Metrik
g^w	Pür-Walker Metrik
S_{ij}^k	Burulma Tensörü
R_{ijk}^m	Eğrilik Tensörü
Γ_{ij}^k	Cristoffel Sembolü
Φ	Tachibana Operatörü
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
N	Nijenhuis Tensörü
$\otimes$	Tensör Çarpım
D	Null Dağılım
G	Twin Metrik
(M_4, g, D)	4-boyutlu Walker Manifold

1. GİRİŞ

Geometri; şekil, boyut, figürlerin görelî konumu ve uzayın özellikleri ile ilgili soruları araştıran matematiğin bir dalıdır.

Geometri uzunluklar, alanlar ve hacimlerle başa çıkmak için pratik bir yol olarak çok eski kültürlerde ortaya çıkmıştır ve M.Ö. 6. yüzyılda Batı’da ortaya çıkan matematik öğelerini kullanmaya başlamıştır. M.Ö. 3. yüzyılda ise Öklid (Euclid) tarafından ‘*Elementler*’ kitabıyla aksiyomatik bir forma konmuştur. Birçok yüzyıl boyunca takip edilmesi gereken bir standart oluşturulmuştur. Öklid’in sonuçlarının birçoğu daha önceki matematikçiler tarafından ifade edilmiş olmasına rağmen, Öklid bu önermelerin kapsamlı, tündengelikle ve mantıksal bir sistemle nasıl uygulanabileceğini gösteren ilk kişidir. 17. yüzyılın başlarına gelindiğinde ise René Descartes ve Pierre de Fermat gibi matematikçiler tarafından sağlam bir analitik temel üzerine konulmuştur.

İki bin yılı aşkın bir süredir, başka hiçbir geometri tasarlanmadığından geometri için "Öklid" sıfatı gereksizdi. Ta ki 19. yüzyılın başlarına kadar. Bu dönemde Öklid olmayan geometrinin oluşturulmasında belirleyici adımlar atıldı. Birbirlerinden bağımsız olarak 1813 yılına kadar Carl Friedrich Gauss ve 1818 yılı civarında Alman hukuk profesörü Ferdinand Karl Schweikart Öklid olmayan geometrinin ana fikirlerini buldu, ancak hiç bir sonuç yayımlamadı. Daha sonra, 1830 yıllarında Macar matematikçi János Bolyai ve Rus matematikçi Nikolai Ivanovich Lobachevsky hiperbolik geometri üzerine makaleler yayımladılar. Hiperbolik geometri Bolyai-Lobachevsky geometrisi olarak adlandırılır. Çünkü her iki matematikçi birbirinden bağımsız olarak Öklid olmayan geometrinin temel yazarlarıdır.

19. yüzyılın ortalarında geometri için önemli gelişmeler yaşandı. Carl Friedrich Gauss doktora öğrencisi olan Bernhard Riemann’dan ‘Geometrinin temelleri üzerine hipotezler’ adlı konuyu sunmasını istedi. Riemann bu konuda tanımladığı çoklu genişletilmiş çokluklar (manifold) kavramı ile geometri için yeni bir bakış açısı sundu

ve Riemann geometriyi oluşturdu. Bu geometri 19. yuzyılın ikinci yarısında yoğun olarak gelişmiştir. Ayrıca izafiyet teorisinde önemli uygulama alanları vardır.

Riemann geometri, Öklid dışı geometrilerin standart tipleri de dahil olmak üzere, manifold üzerinde noktadan noktaya değişen metrik bağıntılılarıyla ilgilenir. Örneęin n -boyutlu Öklid uzayında $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ile $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \dots, x^n + dx^n)$ noktaları arasındaki uzunluk kavramı

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$$

biçiminde verilir. Burada n -boyutlu Öklid uzayı için $i = j$ için $g_{ij} = 1$ ve $i \neq j$ için $g_{ij} = 0$ olur. Böylece, Riemann Öklid uzayındaki uzunluk kavramını manifold üzerinde metrik bağıntılı olarak ifade etmiş oldu. Üstelik Öklid uzayında uzunluk kavramının belirlediği açı vb. kavramlar da manifold üzerinde tanımlanabilmektedir. Önemli olan uzayın geometrisini belirlemek için metrik bağıntıyı belirlemektir (şahin 2013).

Manifoldlar üzerindeki yapılar teorisi modern diferensiyel geometrinin ilgi çeken konularındandır. Bu konulardan birisi de parakompleks yapıya sahip manifoldlardır. Böyle manifoldların diferensiyel geometrik yönleri Riemann geometri için çok geniş ve çok verimli alanlardır.

Yano and Kon (1984) M_{2n} diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde alınan φ afinor alanı için $\varphi^2 = I$, $\varphi \neq \pm I$ şartını sağlayan φ yi hemen hemen çarpım yapı ve (M_{2n}, φ) ikilisini ise hemen hemen çarpım manifold olarak adlandırmışlardır.

Cruceanu *et al.* (1996) parakompleks geometri üzerine bir derleme çalışması yapmışlar ve (M_{2n}, φ) hemen hemen çarpım manifoldunda φ nin $+I$ ve $-I$ öz değerlerine karşılık gelen $T^+(M_{2n})$ ve $T^-(M_{2n})$ öz demetleri aynı ranka sahip ise φ yi hemen hemen parakompleks yapı olarak isimlendirmiştir.

Hemen hemen çarpım manifoldlar Walker (1955) tarafından çalışılmaya başlanmış ve Yano (1959) hemen hemen çarpım manifoldlarda afin konneksiyonları araştırmıştır.

Norden (1960) M_{2n} diferensiyellenebilir Riemann manifoldunda φ hemen hemen çarpım yapısına göre keyfi X ve Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

şartını sağlayan g metrik tensörünü B -tensör olarak tanımlamıştır. Vishnevskii (1970) hemen hemen çarpım yapısına göre pür olan g Riemann metriğini B -metrik olarak adlandırmıştır.

Salimov *et al.* (2007) paraholomorfik B -manifoldları ve özelliklerini incelemişlerdir. Bu çalışmada, hemen hemen B -manifoldun holomorfik B -manifold olması için gerek ve yeter şartın φ hemen hemen parakompleks yapının ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olması gerektiğini göstermişlerdir. Ayrıca hemen hemen B -manifoldun holomorfik B -manifold olması durumunda manifold üzerindeki yapının integrallenebildiği sonucuna ulaşmışlardır.

Dört boyutlu Walker manifoldlar (M_4, g, D) şeklindeki üçlüdür. Burada M_4 4 - boyutlu bir manifoldu, g belirsiz (indefinite) bir metriği ve D ise 2 -boyutlu paralel sıfır (null) dağılımı ifade eder. Böyle metriklerin kanonik formları Walker (1950) tarafından elde edilmiştir.

Walker 4-manifoldu üzerindeki en yoğun çalışmalar 2004 yılından sonra başlamıştır.

Matsushita (2004) Walker 4-manifoldlar üzerinde uygun (proper) hemen hemen kompleks yapı ve bu yapıyla ilişkili zıt (opposite) hemen hemen kompleks yapı inşa

etmiş, ve bu iki yapının integrallenebilirliğini araştırmıştır. Ayrıca Kahler 4-manifoldları oluşturmada kullanışlı bir yöntem bulmuştur.

Chaici *et al.* (2005) 4-boyutlu Walker metriklerinin eğrilik özelliklerini araştırmıştır. Bu çalışmada standart Walker metrik yerine kısıtlanmış (restricted) Walker metriği kullanmışlar ve bu metriğin Einstein ve locally conformally flat olma şartlarını incelemişlerdir.

Davidov *et al.* (2007) hemen hemen Kahler-Walker 4-manifoldları incelemiş ve Walker 4-manifold üzerinde alınan keyfi hemen hemen hermit yapının izotropik-Kahler olma şartlarını araştırmış, dahası; böyle bir yapının doğrudan izotropik-Kahler olduğunu göstermişlerdir.

Salimov and İşcan (2010) Norden-Walker metriklerin bazı özelliklerini incelemişlerdir. Bu çalışmada, uygun (proper) hemen hemen kompleks yapıya göre integrallenebilme ve Kahler olma şartlarını araştırmışlardır. Ayrıca Norden-Walker metriklerin eğrilik özellikleri incelenmiştir.

Salimov *et al.* (2010) hemen hemen parakompleks yapıya sahip 4-boyutlu Walker manifoldları incelemişlerdir. Bu çalışmada, hemen hemen parakompleks yapıya göre integrallenebilme şartlarını ve para-Kahler (paraholomorfik), quasi-para-Kahler ve izotropik-para-Kahler gibi Kahler manifoldların bazı problemlerini araştırmışlardır. Ayrıca para-Norden-Walker metriklerin eğrilik özelliklerini incelemişlerdir.

Sunulan bu tezde 4-boyutta hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldlar araştırılmıştır. Bu sebeple konunun anlaşılabilmesi için ikinci bölümde ilgili özellikler ve tanımlar kuramsal temeller başlığı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde Tachibana operatörü, hemen hemen parakompleks manifoldlar, Nijenhuis tensörü, pür tensörler, Kahler manifoldlar ve dört boyutlu Walker manifoldlar hakkında bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde üç amaç gözetilmiştir.

İlk olarak hemen hemen parakompleks pür metrik manifold koordinat dönüşüm matrisi yardımıyla Walker 4-manifoldlar üzerine taşınarak hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold elde edilmiştir.

İkinci olarak elde edilen hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldun sırasıyla parakompleks pür-Walker manifold, Kahler parakompleks pür-Walker manifold, quasi-Kahler parakompleks pür-Walker manifold ve son olarak izotropik-Kahler parakompleks pür-Walker manifold olma şartları araştırılmıştır.

Tricerri and Vanhecke (1977) integrallenemeyen hemen hemen kompleks yapıya sahip 4-boyutlu hemen hemen Hermit manifoldlara ait örnekler; buna ek olarak, Bonome *et al.* (2005) yine integrallenemeyen hemen hemen kompleks yapıya sahip flat hemen hemen Norden manifoldlara ait örnekler vermişlerdir. Bu tezde ise, üçüncü olarak, integrallenemeyen hemen hemen parakompleks yapıya sahip flat hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldlara bir örnek verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Tensörler

Tanım 2.1.1: B_n , n -boyutlu vektör uzay ve B_n^* ise B_n vektör uzayının dual uzayı

olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j=1, \dots, q$ ve $\vec{\xi}^i \in B_n^*$, $i=1, \dots, p$ olmak üzere

$$w = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^1, \vec{\xi}^2, \dots, \vec{\xi}^p)$$

reel değerli fonksiyonu her bir değişkenine göre lineerse t ye multi-linear fonksiyon denir.

Daha açık ifadelerle Tanım 2.1.1 de verilen t nin multi-linear olması $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve

$\forall \vec{x}_k, \vec{x}_m \in B_n$ veya $\forall \vec{\xi}^k \in B_n^*, \vec{\xi}^m \in B_n^*$ için

$$\begin{aligned} t(\vec{x}_1, \dots, \lambda \vec{x}_k + \mu \vec{x}_m, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^1, \vec{\xi}^2, \dots, \vec{\xi}^p) &= \lambda t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^1, \vec{\xi}^2, \dots, \vec{\xi}^p) \\ &\quad + \mu t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^1, \vec{\xi}^2, \dots, \vec{\xi}^p) \\ t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^1, \dots, \lambda \vec{\xi}^k + \mu \vec{\xi}^m, \dots, \vec{\xi}^p) &= \lambda t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^1, \dots, \vec{\xi}^k, \dots, \vec{\xi}^p) \\ &\quad + \mu t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^1, \dots, \vec{\xi}^m, \dots, \vec{\xi}^p) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlamasıyla mümkündür.

Tanım 2.1.2: B_n , n -boyutlu vektör uzay ve B_n^* ise B_n vektör uzayının dual uzayı

olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j=1, \dots, q$ ve $\vec{\xi}^i \in B_n^*$, $i=1, \dots, p$ olmak üzere

$$t : \overbrace{B_n \times B_n \times \dots \times B_n}^{q \text{ tane}} \times \overbrace{B_n^* \times B_n^* \times \dots \times B_n^*}^{p \text{ tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan multi-lineer t dönüşümüne p . dereceden kontravaryant q . dereceden kovaryant tensör denir. Bu tensörlerin kümesi $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. (p, q) sembolü tensörün tipini ifade eder.

Eğer $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $t_1, t_2 \in T_q^p(B_n)$ için toplama ve skalerle çarpma işlemi

$$(t_1 + t_2)(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\xi^1}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p}) = t_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\xi^1}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p}) + t_2(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\xi^1}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p})$$

$$(\lambda t)(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\xi^1}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p}) = \lambda t(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\xi^1}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p})$$

biçiminde tanımlanırsa $T_q^p(B_n)$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzay olur.

B_n , n -boyutlu vektör uzay ve B_n^* ise B_n vektör uzayının dual uzayı olsun. Keyfi $t \in T_q^p(B_n)$ için

$$w = t(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\xi^1}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p})$$

multi-lineer fonksiyonunda $\overrightarrow{x_1}$ ve $\overrightarrow{\xi^1}$ değişkenleri sabit alınsın. Bu durumda

$$t'(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p})$$

multi-linner fonksiyonu yazılır. t' tensörüne t tensörünün $\overrightarrow{\alpha}$ ve α vektörleri üzerindeki özel izi denir. $\overrightarrow{\alpha}$ ve α vektörleri yerine sırasıyla $\{\overrightarrow{e_i}\}$ ve $\{\alpha^i\}$ bazlarını alınıp, bütün özel izler toplanırsa yani;

$$\sum_i t'(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\alpha^i}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p}) = t'(\overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{\xi^2}, \dots, \overrightarrow{\xi^p})$$

olur.

Tanım 2.1.3: B_n , n -boyutlu vektör uzay ve B_n^* ise B_n vektör uzayının dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j=1, \dots, q$ ve $\vec{\xi}^i \in B_n^*$, $i=1, \dots, p$ olmak üzere

$$C_j^i : T_q^p(B_n) \rightarrow T_{q-1}^{p-1}(B_n)$$

$$t \rightarrow (C_j^i t)(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^1, \vec{\xi}^2, \dots, \vec{\xi}^p) = t'(\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \vec{\xi}^2, \dots, \vec{\xi}^p)$$

ile tanımlanan dönüşüme t tensörü üzerinde kontraksiyon (daralma) dönüşümü denir. Kontraksiyon dönüşümünün (p, q) tipli bir tensörü $(p-1, q-1)$ tipli bir tensöre taşıdığı aşikardır.

$t(\vec{x}, \vec{y})$ bilinear fonksiyonunu göz önüne alalım. $t(\vec{y}, \vec{x})$ fonksiyonunun da bilinear ve $t(\vec{x}, \vec{y}) \neq t(\vec{y}, \vec{x})$ olduğu aşikardır. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için yeni bilinear fonksiyon

$$t'(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda t(\vec{x}, \vec{y}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x})$$

biçiminde tanımlansın. λ ve μ değerlerini değiştirerek sonsuz sayıda yeni tensörler elde edilebilir. Bunlar içerisinde herhangi biri $\lambda = \mu = \frac{1}{2!}$ olarak seçilsin. Buna karşılık gelen tensöre $t(\vec{x}, \vec{y})$ tensörünün simetrikleşmesi adı verilir. Yani;

$$Sim(t(\vec{x}, \vec{y})) = \frac{1}{2!} (t(\vec{x}, \vec{y}) + t(\vec{y}, \vec{x}))$$

olur. Eğer değişkenlerin sayısı 3 tane olursa

$$Sim(t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})) = \frac{1}{3!} \left[t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + t(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) + t(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) \right. \\ \left. + t(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}) + t(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) + t(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) \right]$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde

$$t'(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda t(\vec{x}, \vec{y}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x})$$

eşitliğinde $\lambda = -\mu = \frac{1}{2!}$ olarak seçilirse, yeni elde edilen tensöre $t(\vec{x}, \vec{y})$ tensörünün alterneleştirilmesi (anti-simetrikleştirilmesi) denir. Yani;

$$Alt(t(\vec{x}, \vec{y})) = \frac{1}{2!} (t(\vec{x}, \vec{y}) - t(\vec{y}, \vec{x}))$$

olur. Eğer değişkenlerin sayısı 3 tane olursa

$$Alt(t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})) = \frac{1}{3!} [t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + t(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) + t(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) - t(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}) - t(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) - t(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z})]$$

biçiminde olur. Simetrikleştirme ve alterneleştirme işlemleri $\forall(0, p)$ ve $\forall(q, 0)$ tipli tensörler için benzer şekilde bulunabilir.

Tanım 2.1.4: Eğer $Sim(t) = t$ ise t tensörüne simetrik tensör, $Alt(t) = t$ ise t tensörüne anti-simetrik tensör adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

$U \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olmak üzere $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ dönüşümü her bir $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in U$ noktasını belirli bir

$$f(x) = y = (y^1, y^2, \dots, y^p) \in \mathbb{R}^p$$

noktasına dönüştürür. Yani f dönüşümü p sayıda

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, p$$

fonksiyonuyla tayin edilir. Burada $y^1, y^2, \dots, y^p$ fonksiyonlarına f dönüşümünün bileşenleri denir.

Tanım 2.2.1: $U \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olmak üzere $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ dönüşümü verilmiş olsun. f dönüşümünün bileşenleri U da k . mertebeden kısmi türevlere sahip ve sürekli ise, f dönüşümüne C^k sınıfındandır denir ve $f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ ile gösterilir. Eğer f dönüşümünün bileşenleri keyfi mertebeden kısmi türevlere sahip ve sürekli ise f fonksiyonuna C^∞ sınıfındandır denir ve bu durumda ise $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^p)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2: M Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi $U \subset X$ açık kümesini $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine taşıyan

$$\begin{aligned} \varphi: U \subset M &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow \varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \end{aligned}$$

homeomorfizmine M de n -boyutlu harita denir.

Tanım 2.2.2 deki $x^1, x^2, \dots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir. Bazı kaynaklar haritayı (U, φ) şeklinde gösterir.

Tanım 2.2.3: M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer $\forall x \in M$ için $\mathbb{R}^n$ deki bir açık kümeye homeomorf olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu varsa M ye bir topolojik manifold veya kısaca manifold adı verilir. Bu durumda $\text{boy}(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifoldun boyutu da n olur. Böylece M manifoldu M_n ile gösterilebilir.

M üzerindeki haritaların ailesi olan $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ kümesini göz önüne alalım.

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) iki harita olsun. $U_\alpha \cap U_\beta$ kümesinde

bir x noktasının φ_α altındaki koordinatları $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ve φ_β altındaki koordinatları ise $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ olarak verilsin. Bu durumda bu koordinatlar arasında

$$y^i = \varphi_{\alpha\beta}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

$$x^i = \varphi_{\beta\alpha}^i(y^1, y^2, \dots, y^n) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(y^1, y^2, \dots, y^n)$$

bulunur. Burada $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ve $(y^1, y^2, \dots, y^n) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ olur.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ve $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ homeomorfizmaları birbirlerinin tersi olduğundan $\varphi_{\alpha\beta}^i$ ve $\varphi_{\beta\alpha}^i$ fonksiyonları süreklidir. Eğer bu fonksiyonlar k . mertebeden diferensiyellenebilirse $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları k . mertebeden uyumludur denir. $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ olması durumunda $\varphi_{\alpha\beta}^i$ ve $\varphi_{\beta\alpha}^i$ fonksiyonları tayin edilemez. Bu durumda uyumlu olduğu kabul edilir.

Tanım 2.2.4: M n - boyutlu bir manifold olsun. Eğer M üzerindeki haritaların ailesi olan $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A koleksiyonuna M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir atlas denir:

i. $\{U_\alpha\}$ açık kümelerin koleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür. Yani:

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

ii. Keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) gibi iki farklı haritayı göz önüne alalım. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri C^k sınıfındandır.

Tanım 2.2.5: M n -boyutlu bir manifold olsun. Eğer M manifoldu üzerinde k . mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M ye k . mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M manifolduna C^∞ manifold (veya diferensiyellenebilir manifold) denir (Şahin 2013).

2.3. Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları

Tanım 2.3.1: M_n n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $x \in M_n$ noktasındaki C^k sınıfından fonksiyonların kümesi $C_x^k(M_n, \mathbb{R})$ olsun. x noktasındaki harita (U, φ) olmak üzere

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \Rightarrow x = \varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

olur. Keyfi $f \in C_x^k(M_n, \mathbb{R})$ için,

$$y = f(x) = f(\varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)) = f^*(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

yazılabilir. Burada $f^* = f \circ \varphi^{-1}$ şeklindedir. Ayrıca

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x = \left. \frac{\partial f^*}{\partial x^i} \right|_{\varphi(x)}$$

biçiminde gösterilsin. Bu durumda $\xi^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ sayıları için

$$X(f) = \sum_{i=1}^n \xi^i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x$$

biçiminde tanımlı $X : C_x^k(M_n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu göz önüne alınarak, bu fonksiyon

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x = \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x = \xi^i \partial_i \Big|_x$$

şeklinde işaretlensin. Bu şekilde tanımlanan tüm fonksiyonların kümesi $T_x(M_n)$ ile gösterilir. Bu küme üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri

$$(X_1 + X_2)(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

$$(\lambda X)(f) = \lambda X(f)$$

biçiminde tanımlanırsa $T_x(M_n)$ uzayı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzay olur. Bu vektör uzayına M_n manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına ise tanjant vektör adı verilir.

Tanım 2.3.1: M_n n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. $T_x(M_n)$ M_n manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı olmak üzere

$$X : M_n \rightarrow \bigcup_{x \in M_n} T_x(M_n)$$

biçiminde tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşüme vektör alanı denir.

Tanım 2.3.1 deki tanıma göre bir vektör alanı dönüşümünün manifoldun her bir noktasına o noktada tanımlı tanjant uzayından bir tanjant vektörü karşılık getirdiği söylenebilir. Ayrıca X vektör alanının diferensiyellenebilir olması $\forall f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için

$$X(f) : M_n \rightarrow \mathbb{R}, X(f(x)) = X_x(f)$$

ile tanımlanan fonksiyonunun C^∞ sınıfında olmasıyla mümkündür.

M_n üzerindeki (U, φ) lokal koordinat sistemi üzerinde X vektör alanı

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$$

biçiminde gösterilir.

Vektör alanlarının kümesi $T_0^1(M_n)$ ile gösterilir. Bu küme üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri her $X, Y \in T_0^1(M_n)$ ve $f, g \in C^\infty(X_n, \mathbb{R})$ için

$$(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$$

$$(gX)(f) = gX(f)$$

biçiminde tanımlanırsa $T_0^1(M_n)$ kümesi $C^\infty(X_n, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modül olur.

2.4. Kotanjant Vektörler ve 1-Formlar

Tanım 2.4.1: M_n n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold, $x \in M_n$ bir nokta ve $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun x noktasındaki diferensiyeli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} \Big|_x dx^k$$

biçiminde tanımlanır.

$\forall f, g \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f + g \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ fonksiyonunun diferensiyeli $df + dg$, $af \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ fonksiyonunun diferensiyeli ise adf olur. Buna göre $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ kümesindeki fonksiyonların x noktasındaki diferensiyelleri $\mathbb{R}$ üzerinde $T_x^*(M_n)$ uzayını oluşturur.

$x^k \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ koordinat fonksiyonları için $dx^k \in T_x^*(M_n)$ olduğu aşıkardır.

$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$ eşitliğinde $\frac{\partial f}{\partial x^k} \in \mathbb{R}$ olduğundan her $df \in T_x^*(M_n)$ diferensiyeli dx^k diferensiyellerinin lineer terkibi olarak yazılabilir.

$T_x^*(M_n)$ uzayının keyfi df elemanı ve $X \in T_x(M_n)$ olmak üzere

$$df : T_x(M_n) \rightarrow \mathbb{R}, (df)(X) = X(f)$$

biçiminde bir lineer dönüşüm tayin eder. Eğer son eşitlikte $f = x^i$ ve $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ alınırsa

$$(dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_j^i$$

elde edilir. Yani, $\{dx^i\}$ ve $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ karşılıklı bazlardır. Bu durumda $T_x^*(M_n)$ uzayı

$T_x(M_n)$ vektör uzayının dual uzayı olur. $T_x^*(M_n)$ uzayına M_n manifoldunun x noktasındaki kotanjant uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına ise M_n manifoldunun x noktasındaki kovektörü adı verilir. Ayrıca $\text{boy}(T_x^*(M_n)) = n$ olduğu açıktır.

$T_x(M_n)$ uzayının $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $\{X_i\}$ bazı M_n de x noktasındaki çatı olarak tanımlanır. Bu çatıya $T_x^*(M_n)$ uzayında karşılık gelen $\{\theta^k\}$ bazına, yani

$$\theta^k(X_i) = \delta_i^k$$

şartını sağlayan θ^k kovektörlerine $x \in M_n$ noktasındaki koçatı denir. Özel halde

$\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ ve $\{dx^i\}$ çatılarına sırasıyla standart çatı ve standart koçatı adı verilir.

Tanım 2.4.2: M_n n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. $T_x^*(M_n)$ M_n manifoldunun x noktasındaki kovektör uzayı olmak üzere

$$\omega: M_n \rightarrow \bigcup_{x \in X_n} T_x^*(M_n)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme kovektör alanı veya 1-form denir.

Tanım 2.4.2 deki tanıma göre bir kovektör alanı dönüşümünün manifoldun her bir noktasına o noktada tanımlı kovektör uzayından bir kovektörü karşılık getirdiği söylenebilir. $\omega = \omega_i dx^i$ kovektörünün diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart $\omega_i = \omega_i(x^i)$ nin diferensiyellenmesidir. Ayrıca $T_x^*(M_n)$ kümesi $C^\infty(X_n, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modül olur.

2.5. Tensör Alanları

Tanım 2.5.1: M_n n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $x \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzay $T_q^p(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} t: M_n &\rightarrow T_q^p(M_n) \\ x &\rightarrow t(x) \in T_q^p(M_n) \end{aligned}$$

biçiminde verilen t ye M_n üzerinde tanımlı tensör alanı denir.

Tanım 2.5.1 göz önüne alınarak, tez boyunca, vektör alanlarının kümesi $T_0^1(M_n)$, kovektör alanlarının (veya 1-formların) kümesi $T_1^0(M_n)$ ve M_n manifoldu üzerinde tanımlı tüm reel değerli C^∞ sınıfından fonksiyonların kümesi $T_0^0(M_n)$ ile gösterilecektir.

x^i lokal koordinatların verildiği U koordinat komşuluğundaki (p, q) tipli tensör alanı

$$t = t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ lere t tensör alanının U koordinat komşuluğunda lokal koordinat sistemindeki koordinatları denir. Eğer $t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(x)$ fonksiyonları C^∞ sınıfından ise t tensör alanı da C^∞ sınıfından olur.

(p, q) tipli tensör uzay $T_q^p(M_n)$ $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzaydır. Bu tensörlerin toplamı

$$\mathfrak{T}(M_n) = \sum_{p, q=0}^{\infty} T_q^p(M_n)$$

şeklinde gösterilsin. Her $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}(M_n)$ ve her $x \in M_n$ için noktasal olarak

$$t_1 \otimes t_2 = (t_1)_x \otimes (t_2)_x$$

biçiminde tanımlanırsa $\mathfrak{T}(M_n)$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir olur.

Tanım 2.5.2: Aşağıdaki şartları sağlayan $D: \mathfrak{T}(M_n) \rightarrow \mathfrak{T}(M_n)$ dönüşümüne $\mathfrak{T}(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellenmesi denir.

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $t, s \in \mathfrak{T}(M_n)$ için D dönüşümü

1. Sabit katsayılara göre lineerdir ($D(at + bs) = aDt + bDs$),
2. Tipi korur ($D(\mathfrak{T}_q^p(M_n)) \subset \mathfrak{T}_q^p(M_n)$),
3. Leibniz kuralını sağlar ($D(t \otimes s) = Dt \otimes s + t \otimes Ds$),
4. Tensörlerin kontraksiyon operatörü ile yer değiştirebilir ($D(Ct) = C(Dt)$).

2.6. Lie Operatörü ve Lie Diferensiyellenmesi

Tanım 2.6.1: M_n n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold, M_n üzerinde (U, φ) koordinat sistemindeki keyfi vektör alanları $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ olmak üzere

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

biçiminde tanımlı

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

dönüşümüne X ve Y vektör alanlarının Lie operatörü denir.

Teorem 2.6.2: M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve her $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ olmak üzere Lie operatörü aşağıdaki şartları sağlar:

1. $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$,
2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$,
3. $[X, Y] = -[Y, X]$,
4. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Tanım 2.6.3: X ve Y M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde keyfi vektör alanları ve f ise M_n de tanımlı reel değerli C^∞ sınıfından bir fonksiyon olsun. Bu durumda

1. $L_X f = Xf$
2. $L_X Y = [X, Y]$

şartını sağlayan L_X e X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellenmesi adı verilir. Burada $[X, Y]$ Lie parantezidir. Ayrıca Lie diferensiyellenmesi işlemi sonucunda bulunan değere Lie türevi denir.

$X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\omega^1, \dots, \omega^p \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ olmak üzere keyfi $t \in \mathfrak{S}_q^p(M_n)$ tensör alanının $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanı yönündeki Lie türevi

$$\begin{aligned} (L_X t)(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) &= X \left(t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^q t(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \\ &\quad - \sum_{j=1}^p t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, L_X \omega^j, \dots, \omega^p) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Koordinatlarla bu ifade

$$(L_X t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^q (\partial_{j_\lambda} X^k) t_{j_1 \dots k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^p (\partial_k X^{i_\mu}) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots k \dots i_p}$$

biçimindedir.

2.7. Afin Konneksiyon ve Kovaryant Türev

Tanım 2.7.1: M_n , n -boyutlu C^∞ sınıfından bir manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanları ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ fonksiyonu için,

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y) : \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

ile tanımlanan ∇ dönüşümü

1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$
4. $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y.$

şartlarını sağlarsa bu dönüşüme afin konneksiyon veya lineer konneksiyon ve (M_n, ∇) ikilisine ise afin konneksiyonlu uzay denir. Ayrıca

$$\nabla_X : \mathfrak{I}(M_n) \rightarrow \mathfrak{I}(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant türev adı verilir.

Tanım 2.7.1 de verilen tanıma göre bir afin konneksiyon M_n manifoldu üzerinde alınan bir vektör alanını yine M_n de bir vektör alanına taşıyan dönüşümdür.

M_n manifoldu üzerinde U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarını ve bu komşuluktaki $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ doğal vektör alanları göz önüne alınsın. $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ biçiminde işaretlenmek üzere

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

biçiminde elde edilir. Burada $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$, U komşuluğunda tayin edilmiş C^∞ sınıfından fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlara ∇ afin konneksiyonunun katsayıları adı verilir.

$X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $\omega^1, \dots, \omega^p \in \mathfrak{I}_1^0(M_n)$ olmak üzere keyfi $t \in \mathfrak{I}_q^p(M_n)$ tensör alanının $Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ vektör alanı yönündeki kovaryant türevi

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y t)(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{p}{\omega}) &= Y \left(t(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{p}{\omega}) \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^q t(X_1, \dots, \nabla_Y X_i, \dots, X_q, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{p}{\omega}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^p t(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{\omega}, \dots, \nabla_Y \overset{j}{\omega}, \dots, \overset{p}{\omega})
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Koordinatlarla bu ifade

$$(\nabla_k t)_{j_1 \dots j_q}^{\overset{i_1}{\dots} \overset{i_p}{\dots}} = \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{\overset{i_1}{\dots} \overset{i_p}{\dots}} - \sum_{\lambda=1}^q \Gamma_{k\lambda_j}^m t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{\overset{i_1}{\dots} \overset{i_p}{\dots}} + \sum_{\mu=1}^p \Gamma_{km}^{\lambda_j} t_{j_1 \dots j_q}^{\overset{i_1}{\dots} \overset{m}{\dots} \overset{i_p}{\dots}}$$

biçimindedir.

2.8. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

M_n manifoldu üzerinde $f = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$df = \partial_i f dx^i$$

biçimindedir. Burada $\partial_i f = w_i$ df nin koordinatlarıdır. w_i ye f fonksiyonunun gradient kovektörü veya 1-formu denir. w_i kovektörünün kovaryant türevi alınır

$$\nabla_j w_i = \partial_j w_i - \Gamma_{ji}^k w_k$$

bulunur. i ve j indislerine göre antisimetrikleştirme işlemi yapılırsa

$$\nabla_{[j} w_{i]} = \partial_{[j} w_{i]} - \Gamma_{[ji]}^k w_k$$

elde edilir. Analizden bilinen Schwarz teoremine göre sürekli bir fonksiyonda kısmi türevler değişmelidir. Dolayısıyla f diferensiyellenebilir fonksiyonu için $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ ve dahası $\partial_{[j} w_{i]} = 0$ yazılabilir. Böylece son eşitlikten

$$\nabla_{[i} w_{j]} = -\Gamma_{[ij]}^k w_k = S_{ij}^k w_k$$

elde edilir. Burada

$$S_{ij}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)$$

ile tanımlı (1,2) tipli S_{ij}^k tensörüne ∇ konneksiyonunun burulma tensörü denir. Burulma tensörünün invaryant halde yazılışı ise her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanları için,

$$2S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

biçimindedir. Burada $[,]$ Lie parantezini ifade etmektedir.

Burulması sıfır olan uzaylara burulmasız uzaylar denir. Afın konneksiyonlu uzaylarda burulmasız uzaylar önemli bir sınıf teşkil eder. Bu türden uzaylarda konneksiyon katsayılarının simetrik olacağı aşıkardır. Yani $S_{ij}^k = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ olur. Ayrıca invaryant halde bu durum

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

biçiminde olur.

(M_n, ∇) afın konneksiyonlu uzay olmak üzere $V = v^i \partial_i \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanı olsun.

$\nabla_s v^i$ kovaryant türevinin bir kez daha kovaryant türevi alınır,

$$\begin{aligned} \nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^i \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \Gamma_{sk}^i \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m v^k - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \end{aligned}$$

olur. Burada r ve s indislerine göre antisimetrikleştirme işlemi yapılırsa

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i = R_{rs}^i v^k - 2S_{ij}^m$$

bulunur. Bu son eşitliğe v^i vektör alanı için Ricci özdeşliği denir. Burada R_{rs}^i bileşenlerine ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörünün bileşenleri denir. Eğrilik tensörünün invaryant halde yazılışı ise her $X, Y, Z \in \mathfrak{V}_0^1(M_n)$ vektör alanları için,

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

biçimindedir. Burada $[,]$ Lie parantezini ifade etmektedir. Doğal koordinatlarla eğrilik tensörü

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m$$

şeklinindedir. Buradan eğrilik tensörünün alt iki indise göre antisimetrik olduğu söylenebilir. Yani: $R_{ijk}^l = -R_{jik}^l$. Böylece $R_{(ij)k}^l = 0$ olur.

Lemma 3.8.1: $R, (M_n, \nabla)$ afin konneksiyonlu burulmasız uzayın eğrilik tensörü olmak üzere

1. $R_{ijk}^l + R_{kij}^l + R_{jki}^l = 0,$
2. $\nabla_m R_{ijk}^l + \nabla_j R_{mik}^l + \nabla_i R_{jmk}^l = 0$

biçimindedir. Burada 1. şarta 1. Bianchi ve 2. şarta ise 2. Bianchi veya Bianchi-Padov özdeşlikleri denir.

2.9. Riemann Manifoldu

Tanım 2.9.1: M_n diferensiyellenebilir manifold ve $\mathfrak{V}_0^1(M_n)$ ise bu manifold üzerinde tanımlı vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$g : \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow C^\infty(M_n, \mathbb{R})$$

biçiminde verilen g bilineer formu aşağıdaki şartları sağlarsa, g ye Riemann metriği ya da metrik tensör denir. Bu durumda (M_n, g) ikilisi ise Riemann manifoldu olarak adlandırılır.

1. Her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $g(X, Y) = g(Y, X)$,
2. Her $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $g(X, X) \geq 0$ ve $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Tanım 2.9.1 de verilen şartların birincisi simetriklik ikinci ise pozitif tanımlılık şartlarıdır. Dolayısıyla ' g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise Riemann metriği olur.' denilebilir.

Tanım 2.9.1 de verilen ikinci şart yerine ondan daha zayıf olan ' $\text{Her } Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n) \text{ için } g(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$.' şartı konulursa, bu durumda (M_n, g) ikilisine yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu denir.

'Her $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $g(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$.' olması şartına g bilineer forumunun regülerlik (non-dejenere) şartı denir. Metrik tensörün regülerlik şartı koordinatlarla $X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ olmak üzere

$$g(X, Y) = g(X^i \partial_i, Y^j \partial_j) = g_{ij} X^i Y^j$$

bulunur. Buradan, her Y^j için $g_{ij}(X^i, Y^j) = 0$ olacağından $g_{ij} X^i = 0$ olur. Bu denklem sisteminin $X^i = 0$ çözüme sahip olması için $\text{Det}(g_{ij}) \neq 0$ olması gerekir.

Teorem 2.9.2: M_n diferensiyellenebilir manifold, bu manifold üzerinde tanımlı afin konneksiyon ∇ ve g Riemann metriği olsun. Eğer

$$\nabla g = 0$$

ise, ∇ afin konneksiyonuna g ye göre metrik konneksiyon denir.

Teorem 2.9.3: (M_n, g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlı burulmasız bir tek metrik konneksiyon vardır.

Teorem 2.9.3 te verilen metrik konneksiyona Levi-Civita veya Riemann konneksiyonu denir.

Teorem 2.9.4: (M_n, g) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ için

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) + Zg(X, Y) \\ - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])$$

dir.

Teorem 2.9.4 te verilen formüle Kozsul formülü denir. Kozsul formülü doğal koordinatlarla $X = \partial_i, Y = \partial_j$ ve $Z = \partial_k$ olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

biçiminde bulunur. Burada verilen Γ_{ij}^h fonksiyonlarına Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.9.5: (M_n, g) Riemann manifoldu ve ∇ ise bu manifoldun Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ için,

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

şartını sağlayan R tensörüne Riemann eğrilik tensörü denir.

Teorem 2.9.6: (M_n, g) Riemann manifoldunun R eğrilik tensörü özdeş olarak sıfıra eşit ise M_n ye flat (düz) manifold denir.

Levi-Civita konneksiyonu burulmasız afin konneksiyon olduğundan burulmasız afin konneksiyonun eğriliği için geçerli olan tüm özellikler Riemann eğrilik tensörü için de geçerlidir.

Tanım 2.9.5 ten de görüleceği gibi Riemann eğrilik tensörü $(1,3)$ tiplidir. Bu tensörün kontravaryant indisi indirilerek, $(0,4)$ tipli kovaryant tensör ele edilebilir. Yani:

$$R_{ijk}{}^m g_{ml} = R_{ijkl}.$$

Teorem 2.9.7: (M_n, g) Riemann manifoldunun $(0,4)$ tipli kovaryant R eğrilik tensörü aşağıdaki şartları sağlar:

1. $R_{ij(kl)} = 0$,
2. $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Teorem 2.9.7 de verilen birinci şart yardımıyla

$$\begin{aligned} R_{ij(kl)} = 0 &\Rightarrow R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0 \\ &\Rightarrow R_{ijk}{}^m g_{ml} + R_{ijl}{}^m g_{mk} = 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitliğin her iki tarafının g^{lk} ile kontraksiyonu alınırsa,

$$\begin{aligned} R_{ijk}{}^m g_{ml} g^{lk} + R_{ijl}{}^m g_{mk} g^{lk} &= 0 \Rightarrow R_{ijk}{}^m \delta_m^k + R_{ijl}{}^m \delta_m^l = 0 \\ &\Rightarrow R_{ijk}{}^k = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 2.9.8: Eğrilik tensörü yardımıyla tanımlanan $R_{ijk}{}^l = R_{jk}{}^l{}_i$ tensörüne Ricci eğrilik tensörü denir.

Tanım 2.9.10 da verilen Ricci eğrilik tensörü $R_{ijk}{}^l$ eğrilik tensörünün C_1^1 kontraksiyon işlemi sonucunda bulunmuştur. Eğrilik tensörü (1,3) tipli olacağından Ricci eğrilik tensörünün (0,2) tipli olacağı aşıkardır. Ayrıca, Ricci eğrilik tensörü simetriktir.

Tanım 2.9.9: Ricci eğrilik tensörünün tam kontraksiyonuna skaler eğrilik denir ve τ ile gösterilir. Yani: $\tau = g^{jk} R_{jk}$.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tachibana Operatörü

Tanım 3.1.1: $\mathfrak{Z}(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \mathfrak{T}_q^p(M_n)$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri ve $\varphi \in \mathfrak{Z}_1^1(M_n)$ olsun.

Eğer $\Phi_\varphi : \mathfrak{Z}_q^p(M_n) \rightarrow \mathfrak{Z}_{q+1}^p(M_n)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa Φ_φ dönüşümüne Tachibana operatörü denir.

1. Φ_φ sabit katsayılarla göre lineerdir,
2. Her (p, q) için; $\Phi_\varphi : \mathfrak{Z}_q^p(M_n) \rightarrow \mathfrak{Z}_{q+1}^p(M_n)$,
3. Her $K, L \in \mathfrak{Z}(M_n)$ için; $\Phi_\varphi(K \overset{C}{\otimes} L) = (\Phi_\varphi K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} (\Phi_\varphi L)$,
4. Her $X, Y \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ için; $\Phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi) X$, (burada L_Y Y ye göre Lie türevidir.)
5. Her $\omega \in \mathfrak{Z}_1^0(M_n)$ ve her $X, Y \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ için $(l_Y \omega) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi X}(l_Y \omega) &= (d(l_Y \omega)(\varphi X) - (d(l_Y(\omega \circ \varphi)))(X)) \\ &= (\varphi X)(l_Y \omega) - X(l_{\varphi Y} \omega) \end{aligned}$$

dir. Burada $l_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$ dir

$X, Y_1, \dots, Y_q \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ ve $\omega, \dots, \omega \in \mathfrak{Z}_1^0(M_n)$ olmak üzere $t \in \mathfrak{Z}_q^p(M_n)$ tensör alanına uygulanan Tachibana operatörü

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi t(X, Y_1, \dots, Y_q, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{p}{\omega}) &= (\varphi X)t(X, Y_1, \dots, Y_q, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{p}{\omega}) \\ &\quad - Xt(\varphi Y_1, \dots, Y_q, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{p}{\omega}) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^q t(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} \varphi) X, \dots, Y_q, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{p}{\omega}) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^p t(Y_1, \dots, Y_q, \overset{1}{\omega}, \dots, L_{\varphi X} \overset{\mu}{\omega} - L_X(\overset{\mu}{\omega} \circ \varphi), \dots, \overset{p}{\omega}) \end{aligned}$$

biçiminde olup, $X = \partial_k$, $Y_\lambda = \partial_{j_\lambda}$ $\lambda = 1, \dots, q$ ve $\omega = dx^{i_\mu}$ $\mu = 1, \dots, p$ biçiminde yazılırsa, bu son eşitlikle verilen ifade koordinatlarla

$$\begin{aligned} (\Phi_\varphi t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= \varphi_k^m \partial_m t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \partial_k (t \circ \varphi)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \\ &+ \sum_{\lambda=1}^q (\partial_{j_\lambda} \varphi_k^m)_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^p (\partial_k \varphi_m^{i_\mu} - \partial_m \varphi_k^{i_\mu})_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \end{aligned}$$

biçiminde olur. Burada

$$(t \circ \varphi)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = t_{m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_1}^m = \dots = t_{j_1 \dots m}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_q}^m = t_{j_1 \dots j_q}^{m \dots i_p} \varphi_m^{i_1} = \dots = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m} \varphi_m^{i_p}$$

şeklindedir (Tachibana 1960; Salimov 2013).

Özel olarak $\omega \in \mathfrak{T}_q^0(M_n)$ pür tensörüne Tachibana operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (\Phi_\varphi \omega)(X, Y_1, \dots, Y_q) &= (\varphi X)(\omega(Y_1, \dots, Y_q)) - X(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_q)) \\ &+ \omega((L_{Y_1} \varphi)X, \dots, Y_q) + \dots + \omega(Y_1, \dots, (L_{Y_q} \varphi)X) \end{aligned} \quad (3.1)$$

biçiminde olur.

3.2. Hemen Hemen Parakompleks Manifoldlar

Tanım 3.2.1: M_n diferensiyellenebilir manifold ve $\mathfrak{T}_1^1(M_n)$ (1,1) tipli tensör alanlarının uzayı olsun. Bu uzayın elemanlarına afinor denir.

Tanım 3.2.1 de verilen afinorlara M_n manifoldunun endomorfizmleri gözüyle bakılabilir. Bu sebeple $\varphi \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ olmak üzere $\varphi: \mathfrak{T}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ biçimindedir. Her $X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ vektör alanı için

$$\begin{aligned} \varphi: \mathfrak{T}_0^1(M_n) &\rightarrow \mathfrak{T}_0^1(M_n) \\ X &\rightarrow \varphi(X) \end{aligned}$$

olur. Eğer X vektör alanı yerine $\varphi(X)$ alınırsa

$$\begin{aligned}\varphi: \mathfrak{S}_0^1(M_n) &\rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n) \\ \varphi(X) &\rightarrow \varphi^2(X)\end{aligned}$$

yazılır.

Tanım 3.2.2: M_n diferensiyellenebilir manifold ve $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ afinor olsun. Bu durumda

1. $\varphi^2(X) = I$ ise φ ye hemen hemen çarpım yapı,
2. $\varphi^2(X) = -I$ ise φ ye hemen hemen kompleks yapı ve
3. $\varphi^2(X) = 0$ ise φ ye hemen hemen tanjant(dual) yapı

denir. Burada I birim afinordur (Yano and Kon 1984).

Tanım 3.2.2 de verilen φ afinoru M_n manifoldu ile beraber (M_n, φ) ikilisini oluşturur. Bu ikiliye φ nin yukarıda sağladığı şarta göre sırasıyla hemen hemen çarpım manifold, hemen hemen kompleks manifold ve hemen hemen dual manifold adı verilir.

Tanım 3.2.3: (M_n, φ) hemen hemen çarpım manifold olsun. Eğer φ nin $+I$ ve $-I$ öz değerlerine karşılık gelen $T^+(M_n)$ ve $T^-(M_n)$ öz demetleri aynı ranka sahipse, φ ye hemen hemen parakompleks yapı ve (M_n, φ) ikilisine hemen hemen parakompleks manifold denir (Cruceanu *et al.* 1996).

Tanım 3.2.3 de verilen hemen hemen parakompleks manifoldun boyutunun çift olması gerekir.

3.3. Nijenhuis Tensörü

Tanım 3.3.1: M_n diferensiyellenebilir manifold ve $A, B \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ afinor olsun. Her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(X_n)$ için

$$N_{AB}(X, Y) = [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X, Y] + BA[X, Y] \\ - A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y]$$

biçiminde tanımlı N_{AB} ye Nijenhuis tensörü adı verilir. Burada $[,]$ Lie parantezidir (Yano 1965).

Yukarıdaki tanımda verilen eşitliğin sağ tarafı vektör alanı olduğundan $N_{AB}(X, Y) \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmalıdır. Buradan Nijenhuis tensörünün $(1, 2)$ tipli tensör alanı olduğu söylenebilir. Yani: $N_{AB} \in \mathfrak{S}_2^1(M_n)$.

Tanım 3.3.1 de verilen A ve B afinorları yerine çeşitli kaynaklarda ‘bir tek afinor için Nijenhuis tensörü’ ifadesi kullanılır. Bir tek afinor için $A = B = \varphi$ alınarak Nijenhuis tensörü

$$N_\varphi(X, Y) = 2N(X, Y) = 2\left([\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y]\right)$$

biçiminde elde edilir. Burada X ve Y vektör alanlarıdır. Eğer $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ alınırsa, Nijenhuis tensörü lokal koordinatlarla $\varphi^2 = I$ için

$$N_{ij}^k = \varphi_i^s \partial_s \varphi_j^k - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^k - \partial_i \varphi_j^l \varphi_l^k + \partial_j \varphi_i^s \varphi_s^k$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3.2: M_n diferensiyellenebilir manifold ve $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ afinor olsun. Eğer her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$N_\varphi(X, Y) = 0$$

ise φ ye integrallenebilirdir denir (Kobayashi and Nomizu 1969).

M_n diferensiyellenebilir manifold üzerinde φ hemen hemen parakompleks yapı verilmiş olsun. Eğer keyfi X ve Y vektör alanları için $N_\varphi(X, Y) = 0$ ise φ ye integrallenebilirdir denir ve bu durumda φ parakompleks yapı adını alır. Benzer şekilde (M_n, φ) ikilisi parakompleks manifold olarak adlandırılır.

3.4. Pür Tensörler

Tanım 3.4.1: M_n diferensiyellenebilir manifold ve $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ afinor ve $t \in \mathfrak{S}_q^p(M_n)$ tensör alanı verilmiş olsun. Eğer her $X_1, X_2, \dots, X_q \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve her $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa, (p, q) tipli t tensör alanına φ ye göre pürdür denir.

$$\begin{aligned} t(\varphi X_1, X_2, \dots, X_q, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p) &= t(X_1, \varphi X_2, \dots, X_q, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p) \\ &\vdots \\ &= t(X_1, X_2, \dots, \varphi X_q, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p) \\ &= t(X_1, X_2, \dots, X_q, \varphi \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p) \\ &= t(X_1, X_2, \dots, X_q, \omega^1, \varphi \omega^2, \dots, \omega^p) \\ &\vdots \\ &= t(X_1, X_2, \dots, X_q, \omega^1, \omega^2, \dots, \varphi \omega^p) \end{aligned}$$

Burada φ , φ nin eşlenik operatörüdür ve her $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ için

$$(\varphi\omega)(X) = \omega(\varphi X) = (\omega \circ \varphi)(X)$$

biçiminde tanımlanır (Salimov 2013).

Tanım 3.4.1 de verilen şarta pürlük şartı da denir. M_n üzerindeki $x^1, x^2, \dots, x^n$ lokal koordinat sistemine göre $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, X_q = \frac{\partial}{\partial x^{i_q}}$ ve $\omega^1 = dx^{j_1}, \dots, \omega^p = dx^{j_p}$ alınırsa pürlük şartı koordinatlarla

$$t_{m_2 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \varphi_{i_1}^m = \dots = t_{i_1 \dots m}^{j_1 \dots j_p} \varphi_{i_q}^m = t_{i_1 \dots i_q}^{m \dots j_p} \varphi_m^{j_1} = \dots = t_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots m} \varphi_m^{j_p}$$

şeklinde ifade edilir.

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde φ ye göre pür olan tensör alanları $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}_q^p(M_n)$ ve $f \in \mathfrak{T}_0^0(M_n)$ olmak üzere $t_1 + t_2$ ve $f \cdot t_1$ tensör alanları yine pürdür. φ ye göre pür olan (p, q) tipli tensör alanlarının modülü $\mathfrak{T}_q^p(M_n)$ ile gösterilir.

Vektörler kovektörler ve skaler fonksiyonlar pür tensör olarak kabul edilirler. İki pür tensörün tensörel çarpımı genellikle pürlük şartını sağlamaz. Ancak bu çarpımda kontraksiyon varsa pürlük şartı sağlanır.

Tez boyunca $(0, 2)$ tipli pür tensör alanları kullanılacaktır. Bu sebeple bu tipten tensör alanları için pürlük şartı önemlidir. M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $\varphi \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ afinor alanı ve $g \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ $(0, 2)$ tipli tensör alanı verilmiş olsun. Eğer keyfi $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ için

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

şartını sağlayan g tensör alanına φ ye göre pürdür denir. Ayrıca $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ olmak üzere, pürlük şartının lokal koordinatlarla ifadesi

$$g_{im}\varphi_j^m = g_{mj}\varphi_i^m$$

biçimindedir.

M_{2n} diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $(0,2)$ tipli, simetrik ve regüler olan g metriğine yarı-Riemann metrik denir. Eğer M_{2n} böyle bir metriğe sahipse diferensiyellenebilir yarı-Riemann manifold olarak adlandırılır (Tanım 2.9.1'e bakınız). M_{2n} diferensiyellenebilir yarı-Riemann manifoldu üzerinde φ hemen hemen parakompleks yapı verilmiş olsun. Bu durumda (M_{2n}, φ) ikilisine hemen hemen parakompleks manifold denir (Tanım 3.2.3'e bakınız). Eğer g metriği φ ye göre pürse, yani keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_{2n})$ için

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

şartını sağlıyorsa (M_{2n}, φ, g) üçlüsüne g pür metriğine sahip hemen hemen parakompleks manifold veya hemen hemen parakompleks pür-metrik manifold denir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan pür metrikler (Makerov *et al.* 1985; Gribachev *et al.* 1985; Ganchev and Borisov 1986; Gadea *et al.* 2003; Bonome *et al.* 2005; Salimov *et al.* 2007; Iscan and Salimov 2009) yazarlar tarafından B -metrik, Norden metrik ve anti-Hermitian metrik gibi çeşitli isimlerle çalışılmıştır.

3.5. Kahler Manifoldlar

Tanım 3.5.1: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen parakompleks pür-metrik manifold olsun. Eğer keyfi $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) = 0$$

ise g metriğine holomorftur denir ve (M_{2n}, φ, g) üçlüsüne ise holomorfik parakompleks pür metrik manifold adı verilir. Burada Φ , Tachibana operatörüdür. Yukarıda verilen holomorf olma şartı Tachibana operatörünün g metriğine uygulanmasıyla

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) = g((\nabla_Y \varphi)Z, X) + g((\nabla_Z \varphi)X, Y) - g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = 0 \quad (3.2)$$

biçimindedir (Yano 1968).

Ayrıca, M_{2n} üzerindeki $x^1, x^2, \dots, x^n$ lokal koordinat sistemine göre $X = \partial_k$, $Y = \partial_i$ ve $Z = \partial_j$ denirse lokal koordinatlarla bu şart

$$(\Phi_\varphi g)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m g_{ij} - \varphi_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj} (\partial_i \varphi_k^m - \partial_k \varphi_i^m) + g_{im} \partial_j \varphi_k^m = 0$$

şeklinde olur.

Tanım 3.5.2: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen parakompleks pür metrik manifoldu

$$\nabla \varphi = 0$$

şartını sağlarsa bu manifolda Kahler parakompleks pür metrik manifold denir. Burada ∇ Riemann kovaryant türev operatörüdür.

Lemma 3.5.3: (M_{2n}, φ, g) parakompleks pür-metrik manifold olsun Her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_{2n})$ olmak üzere

$$g(Z, (\nabla_Y \varphi)(X)) = g((\nabla_Y \varphi)(Z), X) \quad (3.3)$$

olur. Burada ∇ g ye göre Riemann kovaryant türev operatörüdür (Salimov *et al.* 2007).

İspat: Parakompleks yapıya göre g pür metrik olduğundan

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

ve

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

eşitliklerinden

$$Yg(\varphi Z, X) = Yg(Z, \varphi X)$$

olup

$$g(\nabla_Y \varphi Z, X) + g(\varphi Z, \nabla_Y X) = g(\nabla_Y Z, \varphi X) + g(Z, \nabla_Y \varphi X)$$

veya

$$g(\varphi Z, \nabla_Y X) - g(Z, \nabla_Y \varphi X) = g(\nabla_Y Z, \varphi X) - g(\nabla_Y \varphi Z, X)$$

yazılabilir. Sonuç olarak, $K \in T_s^1(M_{2n})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\nabla_X K)(X_1, \dots, X_s) &= (\nabla K)(X_1, \dots, X_s, X) \\ &= \nabla_X (K(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s K(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s) \end{aligned} \quad (3.4)$$

olur. Bu sebeple

$$g(Z, \varphi(\nabla_Y X) - \nabla_Y \varphi X) = g(\varphi(\nabla_Y Z) - \nabla_Y \varphi Z, X)$$

eşitliği yazılır (Salimov *et al.* 2007).

Teorem 3.5.4: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen parakompleks pür-metrik manifoldun holomorfik parakompleks pür metrik manifold olması için gerek ve yeter şart φ hemen

hemen parakompleks yapının ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır.

Yani: $\Phi_\varphi g = 0 \Leftrightarrow \nabla \varphi = 0$ (Salimov *et al.* 2007).

İspat:

$$(L_X g)(Y_1, Y_2) = X(g(Y_1, Y_2)) - g([X, Y_1], Y_2) - g(Y_1, [X, Y_2])$$

ve

$$L_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X - T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa, (3.1) den dolayı

$$\begin{aligned} (\Phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) &= (\varphi X)g(Z_1, Z_2) - g(\nabla_{\varphi X} Z_1 - \nabla_{Z_1} \varphi X, Z_2) \\ &\quad - g(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2 - \nabla_{Z_2} \varphi X) - Xg(\varphi Z_1, Z_2) \\ &\quad + (g \circ \varphi)(\nabla_X Z_1 - \nabla_{Z_1} X, Z_2) + (g \circ \varphi)(Z_1, \nabla_X Z_2 - \nabla_{Z_2} X) \\ &\quad + g(Z_1, \varphi(\nabla_X Z_2 - \nabla_{Z_2} X)) - g(\varphi Z_1, (\nabla_X Z_2 - \nabla_{Z_2} X)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) &= (\varphi X)g(Z_1, Z_2) - Xg(\varphi Z_1, Z_2) - g(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) \\ &\quad + g(\nabla_{Z_1} \varphi X, Z_2) - g(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) + g(Z_1, \nabla_{Z_2} \varphi X) \\ &\quad + g(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) - g(\varphi(\nabla_{Z_1} X), Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) \\ &\quad - g(\varphi Z_1, \nabla_{Z_2} X) + g(Z_1, \varphi(\nabla_X Z_2)) - g(Z_1, \varphi(\nabla_{Z_2} X)) \\ &\quad - g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_{Z_2} X) \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} (\Phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) &= (\varphi X)g(Z_1, Z_2) - Xg(\varphi Z_1, Z_2) - g(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) \\ &\quad + g(\nabla_{Z_1} \varphi X, Z_2) - g(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) + g(Z_1, \nabla_{Z_2} \varphi X) \\ &\quad + g(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) - g(\varphi(\nabla_{Z_1} X), Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) \\ &\quad - g(Z_1, \varphi(\nabla_{Z_2} X)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

yazılır. (3.4) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} &g(\nabla_{Z_1} \varphi X, Z_2) - g(\varphi(\nabla_{Z_1} X), Z_2) + g(Z_1, \nabla_{Z_2} \varphi X) - g(Z_1, \varphi(\nabla_{Z_2} \varphi X)) \\ &= g((\nabla \varphi)(X, Z_1), Z_2) + g(Z_1, (\nabla \varphi)(X, Z_2)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6) eşitliği (3.5) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 (\Phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) &= (\varphi X)g(Z_1, Z_2) - Xg(\varphi Z_1, Z_2) \\
 &\quad + g((\nabla \varphi)(X, Z_1), Z_2) + g(Z_1, (\nabla \varphi)(X, Z_2)) \\
 &\quad - g(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) - g(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) \\
 &\quad + g(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak yazılır.

Diğer taraftan, ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre

$$(\varphi X)g(Z_1, Z_2) - g(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) - g(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) = (\nabla_{\varphi X} g)(Z_1, Z_2) = 0 \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
 &-Xg(\varphi Z_1, Z_2) + g(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) \\
 &= -Xg(\varphi Z_1, Z_2) + g((\nabla_X \varphi Z_1), Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) - g((\nabla_X \varphi)Z_1, Z_2) \\
 &= -(\nabla_X g)(\varphi Z_1, Z_2) - g((\nabla_X \varphi)Z_1, Z_2) \\
 &= -g((\nabla_X \varphi)Z_1, Z_2)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

yazılır. (3.8) ve (3.9) eşitliklerinden, (3.7) eşitliği

$$(\Phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) = -g((\nabla_X \varphi)Z_1, Z_2) + g((\nabla_{Z_1} \varphi)X, Z_2) + g(Z_1, (\nabla_{Z_2} \varphi)X) \tag{3.10}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$(\Phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) = -g((\nabla_{Z_2} \varphi)Z_1, X) + g((\nabla_{Z_1} \varphi)Z_2, X) + g(Z_1, (\nabla_X \varphi)Z_2) \tag{3.11}$$

yazılabilir. (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden

$$(\Phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) + (\Phi_\varphi g)(Z_2, Z_1, X) = 2g(X, (\nabla_{Z_1} \varphi)Z_2)$$

olur. Son eşitlikte $\Phi_\varphi g = 0$ yazılırsa, $\nabla\varphi = 0$ olduğu görülebilir. (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden ise $\nabla\varphi = 0$ olduğunda $\Phi_\varphi g = 0$ dır (Salimov *et al.* 2007).

Sonuç 3.5.5: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen parakompleks pür-metrik manifold olsun. Eğer $\Phi_\varphi g = 0$ ise φ hemen hemen parakompleks yapı integrallenebilirdir (Salimov *et al.* 2007).

(M_{2n}, φ, g) hemen hemen parakompleks pür-metrik manifold olsun. Eğer $\Phi_\varphi g = 0$ ise bu manifoldta holomorfik parakompleks manifold (Tanım 3.5.1'e bakınız.), $\nabla\varphi = 0$ ise Kahler manifold (Tanım 3.5.2'ye bakınız.) adı verilmişti. Teorem 3.5.4 te holomorfik parakompleks manifold olma şartı ile Kahler manifold olma şartının birbirine denk olduğu söylenmektedir. Bu sebeple 'Her holomorfik parakompleks pür-metrik manifold Kahler parakompleks pür metrik manifolddur.' denilebilir.

Tez boyunca 'holomorfik parakompleks pür-metrik manifold' terimi yerine 'Kahler parakompleks pür metrik manifold' terimi kullanılacaktır.

Pür metriğe sahip hemen hemen parakompleks manifoldların temel sınıflarından biri pür metriğe sahip quasi-Kahler manifoldlardır. Bu temel sınıf integrallenemeyen hemen hemen parakompleks yapıya sahiptir.

Tanım 3.5.6: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen parakompleks manifold olsun. Her X, Y ve Z vektör alanları için

$$\sigma_{X,Y,Z} g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = 0$$

eşitliği sağlanırsa, (M_{2n}, φ, g) üçlüsü quasi-Kahler manifold olarak adlandırılır. Burada σ, X, Y ve Z nin döngüsel toplamıdır (Ganchev and Borisov 1986; Manev and Makerov 2008).

Tanım 3.5.7: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen parakompleks pür metrik manifold olsun. $(\nabla \varphi \neq 0)$ olmak üzere, $\|\nabla \varphi\|^2 = 0$ şartını sağlayan hemen hemen parakompleks pür metrik manifold izotropik-Kahler manifold olarak adlandırılır (Garcia-Rio and Matsushita 2000).

3.6. Dört Boyutlu Walker Manifolds

(M_n, g) üzerinde alınan bir $\vec{x} \neq 0$ vektörü için $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ ise $\vec{x}$ e null vektör denir.

4-boyutlu Walker manifold (M_4, g, D) şeklinde bir üçlüdür. Burada g belirsiz (indefinite) metrik ve D ise g ye göre null ve paralel olan iki boyutlu baz düzlem dağılımını (distribution) gösterir. Walker' in teoreminden (Walker 1950) g nin

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

kanonik formuna sahip olduğu (x^1, x^2, x^3, x^4) koordinat sistemi vardır. Burada a, b ve c (x^1, x^2, x^3, x^4) ün koordinat fonksiyonlarıdır. Ayrıca g $(++--)$ nötral formuna sahiptir. Paralel null 2 -düzlemi lokal olarak $\{\partial_1, \partial_2\}$ tarafından gerilir. Burada $\partial_i, \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i=1, \dots, 4)$ nin sade gösterimidir. Bu şekildeki Walker metrikleri (Iscan 2010; Matsushita 2004; Matsushita 2005; Salimov and Iscan 2010; Salimov *et al.* 2010) bir çok yazar tarafından çalışılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölüm (Iscan, Sarsilmaz and Turanlı 2014) makalesinde yayımlanan bulgulardan oluşmaktadır.

4.1. Nötral 4-manifold Üzerinde Pür Metrik

M_4 $(++--)$ nötral işarete sahip 4-boyutlu yarı-Riemannian manifold olsun. $\{e_i\}$ $(i=1,2,3,4)$ ortonormal çatı ve $\{e^j\}$ $(j=1,2,3,4)$ 1-formların dual çatısı olmak üzere g nötral metriği ve φ hemen hemen parakompleks yapısı aşağıdaki gibi verilsin:

$$g = g(e_i, e_j) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\varphi = \varphi(e_i, e^j) = (\varphi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

(4.1) de verilen g nötral metriği (4.2) de verilen φ hemen hemen parakompleks yapısına göre pürdür. Bu durumda g metriğine nötral 4-manifold üzerinde pür metrik ve (M_4, φ, g) üçlüsüne ise hemen hemen parakompleks pür metrik manifold denir.

(4.2) ile verilen φ hemen hemen parakompleks yapısıyla pür ve daha basit bir forma sahip olan pür metrik aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

(4.2) de verilen φ hemen hemen parakompleks yapısı ve (4.3) ile verilen g pür metriği göz önüne alınırsa, (M_4, φ, g) üçlüsü de hemen hemen parakompleks pür metrik manifold olur.

4.2. Pür-Walker Metrik

Bu bölümde (4.2) ve (4.3) kullanılarak elde edilen (M_4, φ, g) hemen hemen parakompleks pür metrik manifold Walker 4-manifold üzerine taşınacaktır. Ayrıca (3.12) de verilen standart Walker metriği

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}$$

yerine (Bonome *et al.* 2005), (Iscan 2010) ve (Matsushita 2004) gibi yazarların çalışmalarında da olduğu gibi $c = 0$ yazılarak elde edilen

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

kısıtlanmış Walker metriği kullanılacaktır.

(M_4, g) , (4.4) de verilen Walker metriği ile verilmiş bir Walker 4-manifold olsun.

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$ iki ortonormal çatı olmak üzere $A = (A_j^i)$ koordinat dönüşüm matrisi

$$g = A^T g' A \quad (4.5)$$

eşitliğini sağlar. (4.4) ve (4.1) de verilen metrikler (4.5) eşitliğinde yerine yazılırsa, A matrislerinden biri

$$A = (A_j^i) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-a) & 0 & -\frac{1}{2}(1+a) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-b) & 0 & -\frac{1}{2}(1+b) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

biçiminde bulunur (Bonome 2005). Ayrıca afinorlar için $A = (A_j^i)$ matrisi

$$\varphi = A^{-1} \varphi' A \quad (4.7)$$

eşitliğini sağlar. (4.6) da verilen A matrisinin tersi aşağıdaki gibidir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}(1+a) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(1+b) \\ -1 & 0 & \frac{1}{2}(1-a) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2}(1-b) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Teorem 4.2.1: (M_4, φ, g) sırasıyla (4.3) ve (4.2) de verilen g nötral metriğe ve φ hemen hemen parakompleks yapıya sahip hemen hemen parakompleks pür metrik manifold olsun. g metriği (4.6) eşitliğiyle elde edilen A koordinat dönüşüm matrisi yardımıyla Walker 4-manifold üzerine taşınırsa, g^w aşağıdaki gibi elde edilir:

$$g^w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

İspat: (4.3) eşitliğiyle verilen g nötral metrik ve (4.6) eşitliğiyle elde edilen A matrisi

$$g = A^T g^w A$$

eşitliğinde yerine yazılırsa g^w metriğinin (4.9) da ki gibi olduğu kolaylıkla görülebilir.

(4.9) ile elde edilen g^w metriği Walker 4-manifold üzerinde olduğundan bu metrik pür-Walker metrik olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.2: (M_4, φ, g) sırasıyla (4.3) ve (4.2) eşitliğiyle verilen g nötral metriğe ve φ hemen hemen parakompleks yapıya sahip hemen hemen parakompleks pür metrik manifold olsun. φ hemen hemen parakompleks yapı (4.6) eşitliğiyle elde edilen A koordinat dönüşüm matrisi ve (4.8) de bulunan A matrisinin tersi yardımıyla Walker 4-manifold üzerine taşınırsa, φ^w aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varphi^w = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) \\ -b & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) & 0 \\ 0 & 2 & 0 & b \\ 2 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

İspat: (4.2) eşitliğiyle verilen φ hemen hemen parakompleks yapı (4.6) ve (4.8) eşitliklerindeki A matrisi ve A matrisinin tersi

$$\varphi = A^{-1}\varphi^w A$$

eşitliğinde yerine yazılırsa φ^w yapının (4.10) da ki gibi olduğu kolaylıkla görülebilir.

(4.9) ile verilen g^w pür-Walker metrik ve (4.10) ile verilen φ^w hemen hemen parakompleks yapı Walker 4-manifold üzerinde (M_4, g^w, φ^w) üçlüsünü oluşturur. Bu üçlüye hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold denir.

4.3. Parakompleks Pür-Walker Manifoldlar (φ^w -integrallenebilirlik)

φ^w hemen hemen parakompleks yapı için Nijenhuis tensörü

$$(N_{\varphi^w})_{jk}^i = (\varphi^w)_j^m \partial_m (\varphi^w)_k^i - (\varphi^w)_k^m \partial_m (\varphi^w)_j^i - (\varphi^w)_m^i \partial_j (\varphi^w)_k^m + (\varphi^w)_m^i \partial_k (\varphi^w)_j^m \quad (4.11)$$

biçiminde olur. Eğer

$$(N_{\varphi^w})_{jk}^i = 0$$

ise φ^w integrallenebilirdir denir ve bu durumda φ^w parakompleks yapı olarak adlandırılır.

(4.10) ile verilen φ^w hemen hemen parakompleks yapı ve (4.11) eşitliği göz önüne alındığında φ^w için integrallenme şartları aşağıdaki teoremle verilebilir:

Teorem 4.3.1. (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldun parakompleks pür-Walker manifold (φ^w nın integrallenebilir) olması için gerek ve yeter şart

$$a_1 = b_2 = 0, \quad ba_2 - 2a_4 = 0, \quad ab_1 - 2b_3 = 0 \quad (4.12)$$

olmasıdır.

İspat: (4.11) de verildiği gibi koordinatlarla φ^w için Nijenhuis tensörü

$$(N_{\varphi^w})_{jk}^i = (\varphi^w)_j^m \partial_m (\varphi^w)_k^i - (\varphi^w)_k^m \partial_m (\varphi^w)_j^i - (\varphi^w)_m^i \partial_j (\varphi^w)_k^m + (\varphi^w)_m^i \partial_k (\varphi^w)_j^m$$

biçimindedir. Dikkat edilirse bu tensör j ve k indislerine göre antisimetriktir. Dolayısıyla

$$(N_{\varphi^w})_{jk}^i = -(N_{\varphi^w})_{kj}^i \Rightarrow (N_{\varphi^w})_{(jk)}^i = 0$$

olur.

Nijenhuis tensörünün antisimetrik olduğu göz önüne alınarak (4.10) ile verilen φ^w bu denklemde yerine yazılırsa, $(N_{\varphi^w})_{jk}^i = N_{jk}^i$ olmak üzere Nijenhuis tensörünün sıfırdan farklı koordinatları aşağıdaki gibi bulunur:

$$N_{12}^1 = ab_2 + ba_2 - 2a_4, \quad N_{13}^1 = \frac{1}{2}(2ab_3 - a^2b_1 - a_1), \quad N_{14}^1 = \frac{1}{2}b(ab_2 + ba_2 - 2a_4)$$

$$N_{23}^1 = -\frac{1}{2}a(ab_2 + ba_2 - 2a_4), \quad N_{24}^1 = -\frac{1}{2}(2ab_3 - a^2b_1 - a_1),$$

$$N_{34}^1 = -\frac{1}{4}(1-ab)(ab_2 + ba_2 - 2a_4),$$

$$\begin{aligned}
N_{12}^2 &= 2b_3 - ab_1 - ba_1, \quad N_{13}^2 = \frac{1}{2}(b^2a_2 + b_2 - 2ba_4), \\
N_{14}^2 &= \frac{1}{2}b(2b_3 - ab_1 - ba_1), \quad N_{23}^2 = -\frac{1}{2}a(2b_3 - ab_1 - ba_1), \quad N_{24}^2 = -\frac{1}{2}(b^2a_2 + b_2 - 2ba_4) \\
N_{34}^2 &= \frac{1}{4}(1-ab)(2b_3 - ab_1 - ba_1), \\
N_{12}^3 &= -2b_2, \quad N_{13}^3 = ab_1 - 2b_3, \quad N_{14}^3 = -bb_2, \quad N_{23}^3 = ab_2, \quad N_{24}^3 = -(ab_1 - 2b_3), \\
N_{34}^3 &= \frac{1}{2}(1-ab)b_2, \quad N_{12}^4 = 2a_1, \quad N_{13}^4 = -(ba_2 - 2a_4), \\
N_{14}^4 &= ba_1, \quad N_{23}^4 = aa_1, \quad N_{24}^4 = ba_2 - 2a_4, \\
N_{34}^4 &= \frac{1}{2}(1-ab)a_1.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$(N_{\varphi^w})_{jk}^i = 0$ olması istenildiğinden

$$ab_2 + ba_2 - 2a_4 = 0, \quad 2ab_3 - a^2b_1 - a_1 = 0,$$

$$2b_3 - ab_1 - ba_1 = 0, \quad b^2a_2 + b_2 - 2ba_4 = 0,$$

$$ab_1 - 2b_3 = 0, \quad b_2 = 0,$$

$$a_1 = 0, \quad ba_2 - 2a_4 = 0$$

olması gerekir. Bu eşitlikler ortak çözülürse,

$$a_1 = b_2 = 0, \quad ba_2 - 2a_4 = 0, \quad ab_1 - 2b_3 = 0$$

elde edilir.

Tersine $a_1 = b_2 = 0$, $ba_2 - 2a_4 = 0$ ve $ab_1 - 2b_3 = 0$ ise (4.13) de verilen Nijenhuis tensörünün sıfırdan farklı koordinatlarının tümünün sıfır olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla

$$(N_{\varphi^w})_{jk}^i = 0$$

olur.

4.4. Kahler Parakompleks Pür-Walker Manifoldlar

Bu bölümde, (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold üzerinde Kahler manifoldların bazı problemleri incelenecektir.

4.4.1. Kahler Pür-Walker Metrikler

(M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kij} &= (\varphi^w)_k^m \partial_m (g^w)_{ij} - (\varphi^w)_i^m \partial_k (g^w)_{mj} \\ &+ (g^w)_{mj} \left[\partial_i (\varphi^w)_k^m - \partial_k (\varphi^w)_i^m \right] + (g^w)_{im} \partial_j (\varphi^w)_k^m = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

ise φ^w integrallenebilirdir (Sonuç 3.5.5'e bakınız) ve (M_4, φ^w, g^w) üçlüsüne Kahler parakompleks pür-Walker manifold denir.

Teorem 4.4.1.1: (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldun Kahler parakompleks pür-Walker manifold olması için $(\Phi_{\varphi^w} g^w = 0)$ gerek ve yeter şart a nın sadece x^3 e ve b nin ise sadece x^4 e bağlı fonksiyonlar olmasıdır. Yani, a ve b nin kısmi türevleri aşağıdaki şartları sağlar:

$$a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0. \quad (4.15)$$

İspat: (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olsun. Eğer

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kij} &= (\varphi^w)_k^m \partial_m (g^w)_{ij} - (\varphi^w)_i^m \partial_k (g^w)_{mj} \\
&+ (g^w)_{mj} \left[\partial_i (\varphi^w)_k^m - \partial_k (\varphi^w)_i^m \right] + (g^w)_{im} \partial_j (\varphi^w)_k^m = 0
\end{aligned}$$

ise (M_4, φ^w, g^w) Kahler parakompleks pür-Walker manifold olur. Yani $(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kij}$ koordinatlarının sıfırdan farklı bileşenleri sıfır tutulursa, ispat tamamlanır.

$(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kij} = (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kji}$ olduğundan, sadece $(i < j)$ için $(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kij}$ koordinatlarını göz önünde bulundurmak yeterlidir. (4.9) ve (4.10) de elde edilen pür-Walker metrik ve hemen hemen parakompleks yapı (4.14) te uygulanırsa, $(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kij}$ nin sıfırdan farklı koordinatları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{113} &= -a_1 + b_1, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{123} = b_2, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{124} = b_1, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{133} = -aa_1 + 2b_3, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{134} &= -\frac{1}{2}b(a_2 - b_2) - a_4, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{144} = bb_1, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{213} = -a_2, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{214} &= -a_1, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{224} = -a_2 + b_2, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{233} = -aa_2, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{234} &= -\frac{1}{2}a(a_1 + b_1) - b_3, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{244} = -2a_4 + bb_2, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{311} = 2a_1, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{312} &= a_2, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{313} = \frac{1}{2}a(a_1 + b_1), \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{314} = a_4, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{323} &= \frac{1}{2}a(a_2 + b_2), \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{324} = b_3, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{333} = ab_3, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{334} &= \frac{1}{4}(1 - ab)(a_2 - b_2) + aa_4, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{344} = bb_3, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{412} = -b_1, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{413} &= -a_4, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{414} = -\frac{1}{2}b(a_1 + b_1), \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{422} = -2b_2, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{423} &= -b_3, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{424} = -\frac{1}{2}b(a_2 + b_2), \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{433} = -aa_4, \\
(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{434} &= \frac{1}{4}(1 - ab)(a_1 - b_1) - bb_3, \quad (\Phi_{\varphi^w} g^w)_{444} = -ba_4.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kij} = 0$ olması istendiğinden

$$-a_1 + b_1 = 0, b_2 = 0, b_1 = 0, -aa_1 + 2b_3 = 0, -\frac{1}{2}b(a_2 - b_2) - a_4 = 0, bb_1 = 0, -a_2 = 0,$$

$$-a_1 = 0, -a_2 + b_2 = 0, -aa_2 = 0, -\frac{1}{2}a(a_1 + b_1) - b_3 = 0, -2a_4 + bb_2 = 0, 2a_1 = 0, a_2 = 0$$

$$, \frac{1}{2}a(a_1 + b_1) = 0, a_4 = 0, \frac{1}{2}a(a_2 + b_2) = 0, b_3 = 0, ab_3 = 0, \frac{1}{4}(1 - ab)(a_2 - b_2) + aa_4 = 0,$$

$$bb_3 = 0, -b_1 = 0, -a_4 = 0, -\frac{1}{2}b(a_1 + b_1) = 0, -2b_2 = 0, -b_3 = 0, -\frac{1}{2}b(a_2 + b_2) = 0,$$

$$-aa_4 = 0, \frac{1}{4}(1 - ab)(a_1 - b_1) - bb_3 = 0, -ba_4 = 0$$

olmalıdır. Bu eşitlikler ortak çözülürse,

$$a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

elde edilir.

Tersine $a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ise (4.16) de elde edilen koordinatların tümünün sıfır olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla

$$(\Phi_{\varphi^w} g^w)_{kij} = 0$$

olur.

4.4.2. Quasi-Kahler Pür-Walker Metrikler

(M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olmak üzere her X , Y ve Z vektör alanları için

$$\sigma_{X,Y,Z} g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z) = 0 \quad (4.17)$$

ise (M_4, φ^w, g^w) üçlüsü quasi-Kahler manifold parakompleks pür-Walker manifold olur. Burada $\sigma_{X,Y,Z}$ nin dögüsel toplamıdır.

(3.2) da verilen eşitlik (M_4, φ^w, g^w) manifoldu için göz önüne alınır

$$(\Phi_{\varphi^w} g^w)(X, Y, Z) = g^w((\nabla_Y \varphi^w)Z, X) + g^w((\nabla_Z \varphi^w)X, Y) - g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z)$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanına $2g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z)$ eklenirse,

$$\begin{aligned} (\Phi_{\varphi^w} g^w)(X, Y, Z) + 2g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z) &= g^w((\nabla_Y \varphi^w)Z, X) + g^w((\nabla_Z \varphi^w)X, Y) \\ &\quad - g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z) + 2g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} (\Phi_{\varphi^w} g^w)(X, Y, Z) + 2g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z) &= g^w((\nabla_Y \varphi^w)Z, X) + g^w((\nabla_Z \varphi^w)X, Y) \\ &\quad + g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafı $\sigma_{X,Y,Z} g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z)$ dögüsel toplamıdır. Böylece M_4 üzerindeki her X, Y ve Z vektör alanları için

$$\sigma_{X,Y,Z} g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z) = (\Phi_{\varphi^w} g^w)(X, Y, Z) + 2g^w((\nabla_X \varphi^w)Y, Z) = 0 \quad (4.18)$$

olduğu görülür.

(M_4, φ^w, g^w) manifoldu ile ilişkili pür metrik her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_4)$ için

$$G^w(X, Y) = (g^w \circ \varphi^w)(X, Y) \quad (4.19)$$

biçimindedir. Dikkat edilirse g^w nin ikiz metriği olarak adlandırılan G^w yeni bir pür metriktir. Koordinatlarla (4.19) eşitliği

$$(G^w)_{ij} = (\varphi^w)_i^h (g^w)_{hj} \quad (4.20)$$

şeklindedir.

(4.18) eşitliğinden dolayı (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldu

$$\Phi_k (g^w)_{ij} + 2\nabla_k (G^w)_{ij} = 0 \quad (4.21)$$

şartını sağlarsa (M_4, φ^w, g^w) üçlüsüne quasi-Kahler parakompleks pür-Walker manifold olur.

Teorem 4.4.2.1: (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldun quasi-Kahler parakompleks pür-Walker manifold olması için $\left[\Phi_k (g^w)_{ij} + 2\nabla_k (G^w)_{ij} = 0 \right]$ gerek ve yeter şart

$$a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0 \quad (4.22)$$

olmasıdır.

İspat: $\Phi_k (g^w)_{ij} + 2\nabla_k (G^w)_{ij} = 0$ olsun. Bu durumda

$$a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

olduğunu gösterilmelidir.

(M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olsun. (4.16)

eşitliklerinde $\Phi_k (g^w)_{ij}$ nin sıfırdan farklı koordinatları hesaplanmıştır. Dolayısıyla, G^w

ikiz pür metriğin kovaryant türevinin sıfırdan farklı koordinatının bulunmalıdır. (4.9) ve

(4.10) ile verilen g^w ve φ^w (4.20) de yerine yazılırsa

$$G^w = (G^w)_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -b \\ a & 0 & \frac{1}{2}(a^2 - 1) & 0 \\ 0 & -b & 0 & -\frac{1}{2}(b^2 - 1) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

olarak elde edilir.

(0,2) tipli ikiz pür metrik G^w nin kovaryant türevi koordinatlarla

$$\nabla_k (G^w)_{ij} = \partial_k (G^w)_{ij} - \Gamma_{ki}^s (G^w)_{sj} - \Gamma_{kj}^s (G^w)_{is} \quad (4.24)$$

biçiminde olur. Burada Γ g^w pür-Walker metriğin Levi-Civita konneksiyon katsayısıdır. Yukarıdaki eşitlikten de görüldüğü gibi $\nabla_k (G^w)_{ij}$ koordinatlarını bulabilmek için öncelikle

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} (\tilde{g}^w)^{rk} \left[\partial_i (g^w)_{jk} + \partial_j (g^w)_{ik} - \partial_k (g^w)_{ij} \right] \quad (4.25)$$

hesaplanmalıdır. Burada $\tilde{g}^w$, g^w pür-Walker metriğin tersidir. Direkt hesaplamalar kullanılarak, g^w pür-Walker metriğin tersi

$$\tilde{g}^w = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}(a-b) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

biçimindedir. (4.9) ile verilen pür-Walker metrik ve (4.26) da elde edilen $\tilde{g}^w$ pür-Walker metriğin tersi (4.25) eşitliğinde yerine yazılırsa, g^w pür-Walker metriğin sıfırdan farklı Levi-Civita konneksiyon katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1} \partial_3 &= \frac{1}{4}(a_1 - b_1) \partial_1, \quad \nabla_{\partial_1} \partial_4 = -\frac{1}{4}(a_1 - b_1) \partial_2, \quad \nabla_{\partial_2} \partial_3 = \frac{1}{4}(a_2 - b_2) \partial_1, \\
\nabla_{\partial_2} \partial_4 &= -\frac{1}{4}(a_2 - b_2) \partial_2, \quad \nabla_{\partial_3} \partial_1 = \frac{1}{4}(a_1 - b_1) \partial_1, \quad \nabla_{\partial_3} \partial_2 = \frac{1}{4}(a_2 - b_2) \partial_1, \\
\nabla_{\partial_3} \partial_3 &= \frac{1}{2}(a_3 - b_3) \partial_1, \quad \nabla_{\partial_4} \partial_1 = -\frac{1}{4}(a_1 - b_1) \partial_2, \quad \nabla_{\partial_4} \partial_2 = -\frac{1}{4}(a_2 - b_2) \partial_2, \\
\nabla_{\partial_3} \partial_4 &= -\frac{1}{8}(a - b)(a_2 - b_2) \partial_1 - \frac{1}{8}(a - b)(a_1 - b_1) \partial_2 + \frac{1}{4}(a_2 - b_2) \partial_3 - \frac{1}{4}(a_1 - b_1) \partial_4, \\
\nabla_{\partial_4} \partial_3 &= -\frac{1}{8}(a - b)(a_2 - b_2) \partial_1 - \frac{1}{8}(a - b)(a_1 - b_1) \partial_2 + \frac{1}{4}(a_2 - b_2) \partial_3 - \frac{1}{4}(a_1 - b_1) \partial_4, \\
\nabla_{\partial_4} \partial_4 &= -\frac{1}{2}(a_4 - b_4) \partial_2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$(\nabla G^w)_{ijk} = \nabla_i (G^w)_{jk}$ biçiminde işaretlensin. (4.23) ve (4.27) eşitlikleri (4.24) te yerine yazılırsa G^w nin kovaryant türevlerinin sıfırdan farklı koordinatları

$$\begin{aligned}
\nabla_1 (G^w)_{13} &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad \nabla_1 (G^w)_{24} = -\frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad \nabla_1 (G^w)_{33} = \frac{1}{2}a(a_1 + b_1), \\
\nabla_1 (G^w)_{44} &= -\frac{1}{2}b(a_1 + b_1), \quad \nabla_2 (G^w)_{24} = -\frac{1}{2}(a_2 + b_2), \quad \nabla_2 (G^w)_{33} = \frac{1}{2}a(a_2 + b_2), \\
\nabla_2 (G^w)_{44} &= -\frac{1}{2}b(a_2 + b_2), \quad \nabla_3 (G^w)_{11} = -a_1 + b_1, \quad \nabla_3 (G^w)_{12} = \frac{1}{2}(-a_2 + b_2), \\
\nabla_3 (G^w)_{13} &= \frac{1}{4}a(-a_1 + b_1) + b_3, \quad \nabla_3 (G^w)_{14} = -\frac{1}{4}b(a_2 - b_2) \\
\nabla_3 (G^w)_{23} &= \frac{1}{4}a(-a_2 + b_2), \quad \nabla_3 (G^w)_{24} = \frac{1}{4}a(-a_1 + b_1) - b_3, \quad \nabla_3 (G^w)_{33} = ab_3, \\
\nabla_3 (G^w)_{34} &= \frac{1}{8}(1 - ab)(a_2 - b_2), \quad \nabla_3 (G^w)_{44} = \frac{1}{4}(1 - ab)(a_1 - b_1) - bb_3, \\
\nabla_4 (G^w)_{12} &= \frac{1}{2}(-a_1 + b_1), \quad \nabla_4 (G^w)_{13} = \frac{1}{4}b(-a_2 + b_2) + a_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_4(G^w)_{14} &= \frac{1}{4}b(-a_1 + b_1), \quad \nabla_4(G^w)_{22} = -a_2 + b_2, \quad \nabla_4(G^w)_{23} = \frac{1}{4}a(-a_1 + b_1), \\
\nabla_4(G^w)_{24} &= \frac{1}{4}b(-a_2 + b_2) - a_4, \quad \nabla_4(G^w)_{33} = \frac{1}{4}(1 - ab)(a_2 - b_2) + aa_4, \\
\nabla_4(G^w)_{34} &= \frac{1}{4}b(-a_2 + b_2), \quad \nabla_4(G^w)_{44} = -ba_4
\end{aligned} \tag{4.28}$$

biçiminde elde edilir.

(4.16) ve (4.28) de elde edilen ifadeler

$$\Phi_k(g^w)_{ij} + 2\nabla_k(G^w)_{ij} = 0$$

şartında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
2b_1 &= 0, \quad b_2 = 0, \quad -a_1 = 0, \quad ba_1 = 0, \quad -2a_2 = 0, \quad ab_2 = 0, \quad -2a_4 - ba_2 = 0, \quad ab_1 + 2b_3 = 0, \\
3ba_4 &= 0, \quad 3ab_3 = 0, \quad \frac{1}{2}(ab - 1)(b_2 - a_2) + aa_4 = 0, \quad \frac{1}{2}(ab - 1)(b_1 - a_1) - bb_3 = 0, \\
\frac{1}{2}b(b_2 - a_2) + a_4 &= 0, \quad \frac{1}{2}a(b_1 - a_1) - b_3 = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

sonuçlar elde edilir. (4.29) de bulunan denklemler ortak çözülürse,

$$a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0 \tag{4.30}$$

bulunur.

Diğer taraftan, $a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ise hem (4.16) da bulunan $\Phi_k(g^w)_{ij}$ koordinatları hem de (4.28) de elde edilen $\nabla_k(G^w)_{ij}$ koordinatları ayrı ayrı sıfıra eşittir.

Dolayısıyla

$$\Phi_k(g^w)_{ij} + 2\nabla_k(G^w)_{ij} = 0$$

olduğu açıktır.

4.4.3. Hemen Hemen Parakompleks Pür-Walker Manifold Üzerinde İzotropik-Kahler Yapılar

(M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olsun. Eğer $\nabla \varphi^w = 0$ ise bu durumda (M_4, φ^w, g^w) üçlüsü Kahler parakompleks pür-Walker manifold olur.

(M_4, φ^w, g^w) Kahler para-kompleks pür-Walker manifold ise $\|\nabla \varphi^w\|^2 = 0$ dır. Ancak, bu önermenin tersi genelde doğru değildir. Yani, genel olarak $\|\nabla \varphi^w\|^2 = 0$ olması $\nabla \varphi^w = 0$ olmasını gerektirmez.

(M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold için $\nabla \varphi^w \neq 0$ olmak üzere

$$\|\nabla \varphi^w\|^2 = 0 \quad (4.31)$$

ise bu manifold izotropik-Kahler parakompleks pür-Walker manifold olur. Koordinatlarla (4.31) denklemi

$$\|\nabla \varphi^w\|^2 = (\tilde{g}^w)^{ij} (\tilde{g}^w)^{kl} (g^w)_{ms} \nabla_i (\varphi^w)_k^m \nabla_j (\varphi^w)_l^s \quad (4.32)$$

biçimindedir.

Teorem 4.4.3.1: (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldun izotropik-Kahler parakompleks pür-Walker manifold olması için $\left(\|\nabla \varphi^w\|^2 = 0\right)$ gerek ve yeter şart

$$a_1 + b_1 = 0, \quad a_2 + b_2 = 0 \quad (4.33)$$

olmasıdır.

İspat: (4.32) de verildiği gibi $\|\nabla \varphi^w\|^2$ koordinatlarla

$$\|\nabla \varphi^w\|^2 = (\tilde{g}^w)^{ij} (\tilde{g}^w)^{kl} (g^w)_{ms} \nabla_i (\varphi^w)_k^m \nabla_j (\varphi^w)_l^s \quad (4.34)$$

biçiminde tanımlanır. (4.34) eşitliğinin sağ tarafında verilen toplamı bulabilmek için g^w pür-Walker metriğin tersi ve φ^w hemen hemen parakompleks yapının kovaryant türevi bulunmalıdır. g^w pür-Walker metriğin tersi (4.26) da verilmişti. (1,1) tipli φ^w hemen hemen parakompleks yapının kovaryant türevi koordinatlarla

$$(\nabla \varphi^w)_{ik}^m = \nabla_i (\varphi^w)_k^m = \partial_i (\varphi^w)_k^m + \Gamma_{is}^m (\varphi^w)_k^s - \Gamma_{ik}^s (\varphi^w)_s^m \quad (4.35)$$

biçimindedir. (4.10) da verilen φ^w ve (4.27) de elde edilen g^w metriğin Levi-Civita konneksiyon katsayıları (4.35) eşitliğinde yerine yazılırsa $(\nabla \varphi^w)_{ik}^m$ nin sıfırdan farklı koordinatları aşağıdaki gibi bulunur:

$$(\nabla \varphi^w)_{12}^1 = -\frac{1}{2}(a_1 + b_1), (\nabla \varphi^w)_{14}^1 = -\frac{1}{4}(a+b)(a_1 + b_1), (\nabla \varphi^w)_{22}^1 = -\frac{1}{2}(a_2 + b_2),$$

$$(\nabla \varphi^w)_{24}^1 = -\frac{1}{4}(a+b)(a_2 + b_2), (\nabla \varphi^w)_{31}^1 = \frac{1}{4}a(b_2 - a_2), (\nabla \varphi^w)_{32}^1 = -\frac{1}{4}a(a_1 - b_1) - b_3,$$

$$(\nabla \varphi^w)_{33}^1 = \frac{1}{8}(b_2 - a_2)(a^2 - 1), (\nabla \varphi^w)_{34}^1 = -\frac{1}{2}(a+b)b_3 + \frac{1}{8}(b_1 - a_1)(a^2 + ab - 2),$$

$$(\nabla \varphi^w)_{41}^1 = \frac{1}{4}a(b_1 - a_1), (\nabla \varphi^w)_{42}^1 = \frac{1}{4}(2a - b)(b_2 - a_2) - a_4,$$

$$(\nabla \varphi^w)_{43}^1 = \frac{1}{8}(b_1 - a_1)(a^2 - 1), (\nabla \varphi^w)_{44}^1 = -\frac{1}{2}(a+b)a_4 + \frac{1}{8}(ab - b^2)(b_2 - a_2),$$

$$(\nabla \varphi^w)_{21}^2 = -\frac{1}{2}(a_2 + b_2), (\nabla \varphi^w)_{23}^2 = -\frac{1}{4}(a+b)(a_2 + b_2),$$

$$(\nabla \varphi^w)_{31}^2 = \frac{1}{4}(b_1 - a_1)(a - 2b) - b_3, (\nabla \varphi^w)_{32}^2 = \frac{1}{4}b(a_2 - b_2),$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \varphi^w)_{33}^2 &= -\frac{1}{2}(a+b)b_3 + \frac{1}{8}a(a-b)(b_1-a_1), \quad (\nabla \varphi^w)_{34}^2 = \frac{1}{8}(1-b^2)(b_2-a_2), \\
(\nabla \varphi^w)_{41}^2 &= \frac{1}{4}b(a_2-b_2)-a_4, \quad (\nabla \varphi^w)_{42}^2 = \frac{1}{4}b(a_1-b_1), \\
(\nabla \varphi^w)_{43}^2 &= -\frac{1}{2}(a+b)a_4 + \frac{1}{8}(1-ab-b^2)(b_2-a_2), \quad (\nabla \varphi^w)_{44}^2 = \frac{1}{8}(1-b^2)(b_1-a_1), \\
(\nabla \varphi^w)_{14}^3 &= \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad (\nabla \varphi^w)_{24}^3 = \frac{1}{2}(a_2+b_2), \quad (\nabla \varphi^w)_{31}^3 = \frac{1}{2}(a_2-b_2), \\
(\nabla \varphi^w)_{33}^3 &= \frac{1}{4}a(a_2-b_2), \quad (\nabla \varphi^w)_{34}^3 = b_3 - \frac{1}{4}a(b_1-a_1), \quad (\nabla \varphi^w)_{41}^3 = -\frac{1}{2}(b_1-a_1), \\
(\nabla \varphi^w)_{42}^3 &= a_2-b_2, \quad (\nabla \varphi^w)_{43}^3 = \frac{1}{4}a(b_1-a_1), \quad (\nabla \varphi^w)_{44}^3 = a_4 + \frac{1}{4}b(a_2-b_2), \\
(\nabla \varphi^w)_{13}^4 &= \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad (\nabla \varphi^w)_{23}^4 = \frac{1}{2}(a_2+b_2), \quad (\nabla \varphi^w)_{31}^4 = b_1-a_1, \quad (\nabla \varphi^w)_{32}^4 = -\frac{1}{2}(a_2-b_2) \\
, \quad (\nabla \varphi^w)_{33}^4 &= \frac{1}{4}a(b_1-a_1)+b_3, \quad (\nabla \varphi^w)_{34}^4 = \frac{1}{4}b(b_2-a_2), \quad (\nabla \varphi^w)_{42}^4 = \frac{1}{2}(b_1-a_1), \\
(\nabla \varphi^w)_{43}^4 &= a_4 + \frac{1}{4}b(b_2-a_2), \quad (\nabla \varphi^w)_{44}^4 = \frac{1}{4}b(b_1-a_1).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

(4.9) ile verilen g^w pür-Walker metrik, (4.26) da elde edilen g^w pür-Walker metriğin tersi ve (4.36) de bulunan $(\nabla \varphi^w)_{ik}^m$ nin sıfırdan farklı koordinatları (4.34) te yerine yazılırsa en sade halde

$$\begin{aligned}
&(a_1+b_1) \left[\frac{1}{2}(a-b)(a_2-b_2) + 3a_4 \right] + (a+b)(b_1b_2-a_1a_2) \\
&+ (a-b)(a_1+b_1)(a_2+b_2) + (a_2+b_2) [a(b_1-a_1) - 2b_3]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur. $\|\nabla \varphi^w\|^2 = 0$ olması istendiğinden (4.37) de elde edilen sonuç sıfıra eşitlenirse

$$a_1 + b_1 = 0, \quad a_2 + b_2 = 0 \tag{4.38}$$

bulunur.

Diğer taraftan $a_1 + b_1 = 0$ ve $a_2 + b_2 = 0$ ise (4.36) da elde edilen $(\nabla \varphi^w)_{ik}^m$ nin sıfırdan farklı koordinatları

$$(m, k = 1, 2, 3, 4), (i = 3, 4), (m = 4 \Rightarrow k \neq 1) \text{ ve } (m = 3 \Rightarrow k \neq 2)$$

olmak şartıyla toplamda otuz tanedir. Ancak $g^w \neq 0$ ve $\tilde{g}^w \neq 0$ olmak üzere bu otuz koordinatın hiçbirisi (4.34) denkleminde ikişerli olarak çarpım durumunda değildir. Bu durumda $\|\nabla \varphi^w\|^2 = 0$ olduğu söylenebilir.

4.5. İntegrallenemeyen Flat Hemen Hemen Parakompleks Pür-Walker Manifoldlar

Bu bölümde, üzerinde tanımlı hemen hemen parakompleks yapının integrallenemeyen olduğu 4-boyutlu flat hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldlara bir örnek verilecektir.

(M_4, φ^w, g^w) (4.9) da verilen pür-Walker metriğe (g^w) ve (4.10) da verilen hemen hemen parakompleks yapıya (φ^w) sahip hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olsun.

$$g^w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinde görüldüğü gibi g^w $a - b$ farkına bağlıdır. Eğer

$$a(x^1, x^2, x^3, x^4) - b(x^1, x^2, x^3, x^4) = \alpha(x^1, x^2, x^3, x^4)$$

denirse,

$$\left(R^w\right)_{ijk}^s = \partial_i \left(\Gamma^w\right)_{jk}^s - \partial_j \left(\Gamma^w\right)_{ik}^s + \left(\Gamma^w\right)_{im}^s \left(\Gamma^w\right)_{jk}^m - \left(\Gamma^w\right)_{jm}^s \left(\Gamma^w\right)_{ik}^m$$

olup, g^w pür-Walker metriğin Levi-Civita konneksiyon katsayılarının bulunduğu (4.27) eşitlikleri göz önüne alınarak g^w pür-Walker metriğe sahip R^w Riemannian eğrilik tensörünün sıfırdan farklı koordinatları

$$\begin{aligned} \left(R^w\right)_{1314} &= \frac{1}{4} \alpha_{11}, \left(R^w\right)_{1324} = \left(R^w\right)_{1423} = \frac{1}{4} \alpha_{12}, \left(R^w\right)_{1334} = -\frac{1}{16} (\alpha_1)^2 + \frac{1}{4} \alpha_{13}, \\ \left(R^w\right)_{1434} &= -\frac{1}{16} \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_{14}, \left(R^w\right)_{2324} = \frac{1}{4} \alpha_{22}, \left(R^w\right)_{2334} = -\frac{1}{16} \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{4} \alpha_{23}, \\ \left(R^w\right)_{2434} &= -\frac{1}{16} (\alpha_2)^2 - \frac{1}{4} \alpha_{24}, \left(R^w\right)_{3434} = -\frac{1}{16} \alpha \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_{34}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

biçiminde bulunur.

Şimdi, bir flat metrik oluşturmak amacıyla

$$a(x^1, x^2, x^3, x^4) - b(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2\alpha(x^3, x^4)$$

olduğunu kabul edilirse, (4.39) dan R^w Riemannian eğrilik tensörünün sıfırdan farklı tek koordinatı

$$\left(R^w\right)_{3434} = -\frac{1}{2} \alpha_{34} \quad (4.40)$$

olarak bulunur.

(4.40) da görüldüğü gibi g^w pür-Walker metrik henüz flat değildir. Eğer

$$\alpha(x^3, x^4) = 2 \left[\beta(x^3) + \gamma(x^4) \right]$$

biçiminde yazılırsa g^w flat olur.

Teorem 4.5.1: (M_4, φ^w, g^w) (4.9) da verilen pür-Walker metriğe (g^w) ve (4.10) da verilen hemen hemen parakompleks yapıya (φ^w) sahip hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold ve

$$a(x^1, x^2, x^3, x^4) - b(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2\alpha(x^3, x^4)$$

olmak üzere

$$\alpha(x^3, x^4) = 2[\beta(x^3) + \gamma(x^4)]$$

olsun. Yani (4.9) ile verilen pür-Walker metrik

$$g^w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \alpha(x^3) + \beta(x^4) \\ 1 & 0 & \alpha(x^3) + \beta(x^4) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

biçiminde verilsin. Bu durumda

- i. g^w pür-Walker metrik flattir.
- ii. φ^w hemen hemen parakompleks yapı genel olarak integrallenemez. Üstelik, φ^w nin integrallenmesi için gerek ve yeter şart

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 - 2\beta_3 = 0 \quad \text{ve} \quad a_4 - 2\gamma_4 = 0$$

olmasıdır.

İspat:

i. (4.39) eşitliklerinde R^w Riemannian eğrilik tensörünün sıfırdan farklı koordinatları bulunmuştu. Eğer g^w pür-Walker metriği (4.41) eşitliğindeki gibi verilirse tüm koordinatlar için $R^w = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda g^w pür-Walker metrik flattir.

ii. Teorem 4.3.1 de φ^w hemen hemen parakompleks yapının integrallenme şartları

$$a_1 = b_2 = 0, \quad ba_2 - 2a_4 = 0, \quad ab_1 - 2b_3 = 0 \quad (4.42)$$

biçiminde olduğu gösterilmişti. a ve b fonksiyonları

$$a(x^1, x^2, x^3, x^4) - b(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2[\beta(x^3) + \gamma(x^4)] \quad (4.43)$$

denklemini sağlasın. Buradan sırasıyla x^1 , x^2 , x^3 ve x^4 koordinatlarına göre kısmi türev alınırsa

$$a_1 - b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = b_1,$$

$$a_2 - b_2 = 0 \Rightarrow a_2 = b_2,$$

$$a_3 - b_3 = 2\beta_3 \Rightarrow b_3 = a_3 - 2\beta_3,$$

$$a_4 - b_4 = 2\gamma_4 \Rightarrow b_4 = a_4 - 2\gamma_4$$

elde edilir. Bu durumda (4.42) de verilen integrallenme şartları

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 - 2\beta_3 = 0 \quad \text{ve} \quad a_4 - 2\gamma_4 = 0$$

şeklinde olur. Buradan (4.43) deki şartı sağlayan φ^w hemen hemen parakompleks yapının genel olarak integrallenmediği söylenebilir.

Sonuç 4.5.1: (M_4, φ^w, g^w) (4.9) da verilen pür-Walker metriğe (g^w) ve (4.10) da verilen hemen hemen parakompleks yapıya (φ^w) sahip hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olsun. Eğer $a(x^1, x^2, x^3, x^4) - b(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2[\beta(x^3) + \gamma(x^4)]$ ise (M_4, φ^w, g^w) flat pür-Walker metriğe ve integrallenemeyen hemen hemen parakompleks yapıya sahip bir hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olur.



5. SONUÇ

Sunulan bu tezde ilk olarak g nötral metriğin

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

biçimindeki seçimi ve

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

kısıtlanmış Walker metriği kullanılarak koordinat dönüşüm matrislerinden birinin

$$A = (A_j^i) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-a) & 0 & -\frac{1}{2}(1+a) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-b) & 0 & -\frac{1}{2}(1+b) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde olduğu söylenmiştir. Daha basit bir forma sahip olan

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nötral metriği ve

$$\varphi = (\varphi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hemen hemen parakompleks yapısı A matrisi yardımıyla Walker 4-manifoldlar üzerinde

$$g^w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^w = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) \\ -b & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) & 0 \\ 0 & 2 & 0 & b \\ 2 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilmiştir. Böylece (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold oluşturulmuştur.

İkinci olarak elde edilen (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifoldun

1. parakompleks pür-Walker manifold olması için (φ^w nin integrallenebilmesi için) gerek ve yeter şartın

$$a_1 = b_2 = 0, \quad ba_2 - 2a_4 = 0, \quad ab_1 - 2b_3 = 0,$$

2. Kahler parakompleks pür-Walker manifold olması için gerek ve yeter şartın

$$a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$

3. quasi-Kahler parakompleks pür-Walker manifold olması için gerek ve yeter şartın

$$a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$

4. izotropik-Kahler parakompleks pür-Walker manifold olması için gerek ve yeter şartın

$$a_1 + b_1 = 0, \quad a_2 + b_2 = 0$$

olduğu gösterilmiştir.

Son olarak (M_4, φ^w, g^w) hemen hemen parakompleks pür-Walker manifold olmak üzere

$$a(x^1, x^2, x^3, x^4) - b(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2[\beta(x^3) + \gamma(x^4)]$$

biçiminde seçilirse (M_4, φ^w, g^w) manifoldunun flat pür-Walker metriğe ve integrallenemeyen hemen hemen parakompleks yapıya sahip olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Bonome A., Castro R., Hervella L. M. and Matsushita Y., 2005. Construction of Norden structures on neutral 4-manifolds. *JP J. Geom. Topol.*, 5 (2), 121-140.
- Bonome A., Castro R., Hervella L. M. and Matsushita Y., 2005. Flat almost Norden metrics with nonintegrable almost complex structures in dimensional four. *JP J. Geom. Topol.*, 5 (2), 141-153.
- Chaici M., Garcia-Rio E. and Matsushita Y., 2005. Curvature properties of four-dimensional Walker metrics. *Classical and Quantum Gravity*, 22, 3, 559.
- Cruceanu V., Fortuny P. and Gadea P. M., 1996. A survey on paracomplex Geometry. *Rocky Mountain J. Math.*, 26, 83-115.
- Davidov, J., Diaz-Ramos J. C., Garcia-Rio E., Matsushita Y., Muskarov O. And Vazquez-Lorenzo R., 2007. Almost Kahler Walker 4-manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 57, 3, 1075-1088.
- Gadea P. M., Grifone J. and Munoz Masque J., 2003. Manifolds modelled over free modules over the double numbers. *Acta. Math. Hungar.*, 100, 187-203.
- Ganchev G. T. and Borisov A. V., 1986. Note on the almost complex manifolds with a Norden metric. *CR Acad Bulgarie Sci.*, 39, 31-34.
- Garcia-Rio E. and Matsushita Y., 2000. Isotropic Kahler structures on Engel 4-manifolds. *J. Geom. Phys.*, 33, 288-294.
- Gribachev K. I., Mekerov D. G. and Djelepov G. D., 1985. Generalized B-manifolds. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 38, 299-302.
- Gribachev K. I., Djelepov G. D. and Mekerov D. G., 1985. On some subclasses of generalized B- manifolds. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 38, 437-440.
- Gribachev K. I., Djelepov G. D. and Mekerov D. G., 1985. On the geometry of almost B-manifolds. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 38, 563-566.
- Iscan M. and Salimov A. A., 2009. On Kahler-Norden manifolds. *Proc. Indian Acad. Sci.*, 119, 71-80.
- Iscan M. and Magden A., 2010. On B-manifolds defined by algebra of plural numbers. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 35, 57-63.
- Iscan M., 2010. On Norden structures on neutral 4-manifolds with almost paracomplex structures. *International Journal of Geometric ethods in Modern Physics*, 10, 1350052.
- Iscan M., Sarsilmaz H. and Turanli S., 2014. On 4-dimensional almost para-complex pure-Walker manifolds. *Turk. J. Math.*, 38, 1071-1080.
- Kobayashi S. and Nomizu K., 1969. *Foundation of Diferential Geometry*. Vol. 2, New York, NY., USA, John Wiley.
- Manev M. and Mekerov D., 2008. On Lie groups as quasi-Kahler manifolds with Killing Norden metric. *Adv. Geom.*, 8, 343-352.
- Matsushita Y., 2004. Four-dimensional Walker metrics and symplectic structure. *J Geom. Phys.*, 52, 89-99.
- Matsushita Y., 2005. Walker 4-manifolds with proper almost kompleks structure. *J Geom. Phys.*, 55, 385-398.
- Mekerov D. G., 1985. On some classes of almost B-manifolds. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 38, 559-561.

- Norden A. P., 1960. On a certain class of four-dimensional A-spaces. *Izv. Vuzov. Mat.*, no.4, 145-157
- Salimov A. A., Iscan M. and Etayo F., 2007. Palaholomorphic B-manifold and its properties. *Topol. Appl.*, 154, 925-933.
- Salimov A. A. ve Mağden A., 2008. *Diferensiyel Geometriye Giriş*. Atatürk Üniversitesi
- Salimov A. A. and Iscan M., 2010. Some properties of Norden Walker metrics. *Kodai. Math. J.*, 33, 283- 293.
- Salimov A. A., Iscan M. and Akbulut K., 2010. Notes on para-Norden Walker 4-manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 7, 1331-1347.
- Salimov A. A., 2013. Tensor operator and their applications. *Mathematics Research Developments Series*. Nova Science Publishers, Inc., New York, xii+186pp.
- Şahin B., 2013. *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*. Nobel yayıncılık, Ankara.
- Tachibana S., 1960. Some theorems on locally product Riemann space. *Tohoku Math J.*, 12, 281-292
- Tricerri F. and Vanhecke L., 1977. Flat almost Hermitian manifolds which are not Kahler manifolds. *Tensor (NS)*, 31, 249-254.
- Vishnevskii V. V., 1970. Affinor structures of affine connection space. *Izv. Vuzov. Math.*, No 1, 12-23
- Walker A. G., 1950. Canonical form for a Riemann space with a parallel field of null planes. *Quart J. Math., Oxford* 1 (2), 69-79.
- Walker A. G., 1955. Connections for parallel distributions in the large. I. *Quart. J. Math. Oxford* (2) 6, 301-308.
- Yano K., 1959. Affine connections in an almost product space. *Kodai Math. Sem. Rep.* 11, 1-24.
- Yano K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 20, 414-436.
- Yano K. and Kon M., 1984. *Structure on Manifolds*. Singapore, World Scientific, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Hilmi Sarsılmaz 1989 yılında İskenderun’da dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini İskenderun’da tamamladı. 2007 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2011 yılında mezun oldu. 2011 yılında aynı bölümde yüksek lisansa başladı. 2013 yılında yüksek lisansı bitirdi ve aynı bölümde doktora eğitimine başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.

