

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**4-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİN  
KARAKTERİZASYONLARI**

Yüksek Lisans Tezi

Zennure ÇİÇEK

**Anabilim Dalı:** Matematik

**Programı:** Geometri

MANİSA 2013

**4-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİN  
KARAKTERİZASYONLARI**

Yüksek Lisans Tezi

Zennure ÇİÇEK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14/12/2012

Tezin Savunulduğu Tarih: 04/01/2013

Tezin Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYIĞIT

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU



Doç. Dr. Mustafa KAZAZ



Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYIĞIT



MANİSA 2013

## İÇİNDEKİLER

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| TEŞEKKÜR.....                        | i   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ..... | ii  |
| ÖZET.....                            | iii |
| ABSTRACT.....                        | iv  |
| GİRİŞ.....                           | 1   |

## I.BÖLÜM

|                                                                  |   |
|------------------------------------------------------------------|---|
| Öklid 4-Uzayında Temel Tanım ve Teoremler.....                   | 2 |
| 1.1. $E^4$ Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....                   | 2 |
| 1.2 Kapalı Uzay Eğrileri İçin Diferansiyel Geometrik Kriter..... | 6 |

## II.BÖLÜM

|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| $E^4$ Öklid 4-Uzayında Sabit Genişlikli Eğriler.....                                                        | 11 |
| 2.1. $E^4$ Öklid 4-Uzayında Sabit Genişlikli Eğrilerin Diferansiyel Denklemlerinin Karakterizasyonları..... | 11 |
| 2.2. $E^4$ Öklid 4-Uzayında Sabit Genişlikli Eğrilerin Periyodik Olması Kriteri.....                        | 26 |

## III.BÖLÜM

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| $E_1^4$ Minkowski (Lorentz)Uzayı.....                | 40 |
| 3.1. $E_1^4$ Minkowski Uzayında Temel Kavramlar..... | 40 |

## IV.BÖLÜM

|                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| $E_1^4$ Minkowski 4-Uzayında Sabit Genişlikli Spacelike Eğriler.....                           | 45 |
| 4.1 $E_1^4$ Minkowski 4-Uzayında Sabit Genişlikli Spacelike Eğrilerin Karakterizasyonları..... | 45 |

4.2  $E_1^4$  Minkowski 4-Uzayında Sabit Genişlikli Spacelike Eğrilerin Periyodik

Olması Kriteri.....66

**V.BÖLÜM**

$E_1^4$  Minkowski 4-Uzayında Sabit Genişlikli Timelike Eğriler.....80

5.1  $E_1^4$  Minkowski 4-Uzayında Sabit Genişlikli Timelike Eğrilerin Karakterizasyonları.....80

5.2  $E_1^4$  Minkowski 4-Uzayında Sabit Genişlikli Timelike Eğrilerin Periyodik

Olması Kriteri.....95

KAYNAKLAR.....110

ÖZGEÇMİŞ.....112

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip özenle çalışmalarımı takip eden, bilgi ve tecrübesiyle destek veren ve hiçbir konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, çalışmalarımı takip eden ve hiçbir konuda yardımını esirgemeyen sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖNDER'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarıma ve yakın desteklerini gördüğüm eşim Mehmet ÇİÇEK ve arkadaşım Beyza Betül PEKACAR' a teşekkürlerimi sunarım.

Zennure ÇİÇEK

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

|                     |                                                         |
|---------------------|---------------------------------------------------------|
| $E^4$               | : 4-boyutlu Öklid Uzayı                                 |
| $E_1^4$             | : 4-Boyutlu Minkowski Uzayı                             |
| $IR$                | : Reel Sayılar                                          |
| $\dot{T}$           | : $T$ Teğet vektörünün $s$ parametresine göre türevi    |
| $S_1^2$             | : Lorentziyen birim küre                                |
| $H_0^2$             | : Hiperbolik birim küre                                 |
| $\Lambda$           | : Işık konisi                                           |
| $\times$            | : Vektörel çarpım                                       |
| $\langle , \rangle$ | : İç çarpım                                             |
| $C$                 | : Minkowski 4-uzayında spacelike veya timelike bir eğri |
| $k_1$               | : $C$ eğrisinin eğriliği                                |
| $k_2$               | : $C$ eğrisinin birinci burulması                       |
| $k_3$               | : $C$ eğrisinin ikinci burulması                        |
| $\rho$              | : Eğrilik yarıçapı                                      |

## ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde,  $E^4$  Öklid 4-uzayı temel tanım ve teoremler verilmiş ve kapalı uzay eğrileri için diferansiyel geometrik kriter ele alınmıştır

İkinci bölümde, Öklid 4-uzayında sabit genişlikli eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra bu eğriler için bir kriter verilmiş, ilgili bir örnek çözülmüştür.

Üçüncü bölümde,  $E_1^4$  Minkowski 4-uzayındaki temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Minkowski 4-uzayında sabit genişlikli spacelike eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra bu eğriler için bir kriter verilmiş, ilgili bir örnek uygulanmıştır.

Beşinci bölümde, Minkowski 4-uzayında sabit genişlikli timelike eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonları verilmiş, sonrasında bu denklemler kullanılarak bu eğrileri karakterize eden bir kriter bulunmuş ve son olarak bir özel durum örnek şeklinde ele alınmıştır.

İkinci, dördüncü ve beşinci bölümler bu tezin orjinal kısımlarıdır.

## ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, basic definitions and theorems are given in Euclidean 4-space  $E^4$  and differential geometric criterion for closed space curves are discussed.

In the second chapter, the differential equations which characterize curves of constant breadth are given in the 4-space  $E_1^4$ . Furthermore, a criterion for curves of constant breadth in 4-space  $E_1^4$  is introduced, and an example is given.

In the third chapter, the basic definitions and theorems are given Minkowski 4-space  $E_1^4$ .

In the fourth chapter, the differential equations which characterize spacelike curves of constant breadth are given in the Minkowski 4-space  $E_1^4$ . Also, a criterion for spacelike curves of constant breadth in Minkowski 4-space  $E_1^4$  is introduced, and an example is given.

In the fifth chapter, the differential equations characterizing timelike curves of constant breadth are given in the Minkowski 4-space  $E_1^4$ . Then, using these equations, a criterion which characterizes these curves is given. Finally, a special case is considered as an example.

The second, fourth and fifth chapters are original parts of this thesis.

## GİRİŞ

Sabit genişlikli eğriler ilk olarak L. Euler tarafından 1778'de "De curvis triangularibus" adı ile Acta Academiae Petropol dergisinde yayınladığı çalışmaya kadar gitmektedir[7]. L. Euler sabit genişlikli eğrileri düzlemde çalışmıştır. L. Euler 'den sonra birçok geometrici konveks eğriler düzleminin özellikleriyle ilgilenmiştir. Bu konu üzerine en önemli yayınların bir tanesini Struik tarafından yayınlanmıştır[22]. Ayrıca, sabit genişlikli eğri düzleminin bir dizi önemli özellikleri Ball[1], Barbier[2], Blaschke[3,4] ve Mellish[14] in çalışmalarında yer almıştır. Sabit genişlikli bir uzay eğrisi, 1914 de Fujiwara tarafından bir  $P$  noktasındaki normal düzlemi, eğri ile sadece bir tek  $Q$  noktasında ortak ve  $d(P, Q)$  uzaklığı sabit olan bir kapalı eğri olarak elde edilmiştir[9]. Böyle eğriler için  $PQ$  da  $Q$  noktasında normaldir. Fujiwara sabit genişlikli yüzeyler üzerine de çalışmıştır. Ayrıca Blaschke 1917 de küre üzerinde sabit genişlikli eğrileri tanımlamıştır[4]. 1986 da Köse [12] de Öklid 3-uzayında sabit genişlikli eğriler uzayı için bazı kavramlar sunmuştur ve [20] de sabit genişlikli eğriler uzayının diferansiyel karakterizasyonları 1989 da Sezer tarafından elde edilmiştir. Öklid 4-uzayında sabit genişlikli eğriler 1997 de Mağden ve Köse tarafından verilmiştir[13]. Önder, Kocayiğit ve Candan tarafından Minkowski 3-uzayında sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemler verilmiştir ayrıca Minkowski 4-uzayında sabit genişlikli spacelike eğriler için karşılık gelen karakterizasyonlar Kazaz, Önder ve Kocayiğit tarafından verilmiştir[11].

Ayrıca, Reuleaux 1963 de sabit genişlikli eğrileri çalışmış ve makine kinematiği için bu eğrilerle ilgili bir metot vermiştir[18]. Daha sonra, sabit genişlikli eğriler mühendislik bilimleri için önemli olmuştur[23].

Bu çalışmada, 4-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında sabit genişlikli spacelike ve timelike eğrilerin diferansiyel denklem ve bu eğrilerin integral karakterizasyonları verilmiştir.

## I. BÖLÜM

### ÖKLİD 4-UZAYINDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, Öklid 4-uzayındaki temel kavramlar, teoremler ve kapalı uzay eğrileri için diferansiyel geometrik kriter verilmiştir.

#### 1.1. $E^4$ Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde, Öklid 4-uzayında Afin uzayı, Öklid uzayı, uzaklık, Öklid metriği, açısı, Öklid çatısı, eğri, Frenet çatısı, eğrilik, burulma, eğriler teorisindeki temel ifadelerin tanımlarını vereceğiz.

**Tanım 1.1.1. (Afin Uzayı)** Boş olmayan bir cümle  $A$  ve bir  $\mathbb{Z}$  cismi üstünde bir vektör uzayı  $V$  olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonsiyonu varsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$(A1). \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A2). \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır. [10, 15, 16]}$$

**Tanım 1.1.2(Öklid Uzayı).** Bir reel afin uzay  $A$  ve  $A$  ile birleşen vektör uzayında  $V$  olsun.  $V$  de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle , \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i \begin{cases} x = x_1, \dots, x_4 \\ y = y_1, \dots, y_4 \end{cases}$$

tanımlanırsa  $A$ 'ya bir Öklid Uzayı adı verilir. Eğer  $A = \mathbb{R}^4$  ve  $V = \mathbb{R}^4$  alınırsa  $A = \mathbb{R}^4$  Öklid Uzayı veya Standart Öklid Uzayı denir. [10, 15, 16]

**Tanım 1.1.3(Uzaklık).**

$$d : E^4 \times E^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonunu  $E^4$  Öklid Uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(x, y)$  reel sayısına da  $x, y \in E^4$  noktaları arasındaki uzaklık denir.[10,15,16]

**Teorem 1.1.1.**  $E^4$  de uzaklık fonksiyonu bir metriktir.[10, 15, 16]

**Tanım 1.1.4.(Öklid Metriği)**

$$d : E^4 \times E^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^4$  de Öklid Metriği denir.[10,15,16]

**Tanım 1.1.5.(Açı)**  $\forall x, y, z \in E^4$  için  $\widehat{xyz}$  açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{xy}\| \|\overrightarrow{yz}\|}$$

dan hesaplanan  $\theta$  reel sayıdır.[10,15, 16]

**Tanım 1.1.6.(Öklid Çatısı)**  $E^4$  de sıralı bir  $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$  nokta beşlisine  $\mathbb{R}^4$  de karşılık gelen  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}, \overrightarrow{P_0P_4}\}$  vektör dördlüsü  $\mathbb{R}^4$  için bir ortonormal baz ise  $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$  sistemine  $E^4$  in bir dik çatısı veya Öklid Çatısı adı verilir[10,15,16]

**Tanım 1.1.7.**  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere,

$$\alpha : I \longrightarrow E^4 ,$$

diferansiyellenebilen fonksiyona  $E^4$  de bir eğri adı verilir Burada  $I \subseteq \mathbb{R}$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin parametre aralığı  $t \in I$  değişkenine de  $\alpha$  eğrisinin parametresi denir.[10, 15, 16]

**Tanım 1.1.8.** Öklid 4-uzayında bir  $(C)$  uzay eğrisinin her bir noktasında  $\vec{T}$  teğet,  $\vec{N}$  asli normal ve  $\vec{B}$  binormal  $\vec{E}$  ikinci binormal vektörlerden oluşan bir  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  ortonormal koordinat sisteminin var

olduğunu biliyoruz. Bu  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  dördlüsüne *hareketli dördlü* ya da *Frenet Çatısı* denir[10, 15, 16].

**Tanım 1.1.9.**  $\vec{T}$  teğet vektör olmak üzere bir eğri boyunca ilerlediğimiz zaman teğetin değişim oranını ifade eden  $\frac{d\vec{T}}{ds} = k_1 \vec{N}$  vektörüne *eğrilik vektörü* denir ve  $k_1$  çarpanına *birinci eğrilik* veya *eğrilik* adı verilir.  $k_1$  fonksiyonu

$$k_1 = \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{N} \right\rangle$$

eşitliği ile verilir. [10, 15, 16].

**Tanım 1.1.10.**  $\alpha = \alpha(s)$  bir eğri ve  $\vec{B}$  eğrinin bir noktasındaki binormal vektör olmak üzere  $\frac{d\vec{N}}{ds} = -k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}$  eşitliğini sağlayan  $k_2$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin *ikinci eğriliği* veya *burulması* denir.  $k_2$  fonksiyonu

$$k_2 = \left\langle \frac{d\vec{N}}{ds}, \vec{B} \right\rangle$$

eşitliği ile verilir. [10, 15, 16].

**Tanım 1.1.11.**  $\alpha = \alpha(s)$  bir eğri ve  $\vec{E}$  eğrinin bir noktasındaki ikinci binormal vektör olmak üzere  $\frac{d\vec{B}}{ds} = -k_2 \vec{N} + k_3 \vec{E}$  eşitliğini sağlayan  $k_3$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin *üçüncü eğriliği* denir.  $k_3$  fonksiyonu

$$k_3 = \left\langle \frac{d\vec{B}}{ds}, \vec{E} \right\rangle$$

eşitliği ile verilir. [10, 15, 16].

Burada  $\dot{\alpha}$ ,  $\alpha$  eğrisinin yay parametresine göre türevidir.  $k_1$  birinci eğrilik ve  $k_2$  ikinci eğrilik ayrıca  $k_3$  üçüncü eğrilik olmak üzere, Frenet türev formülleri şu şekilde verilir[10,16,17]

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \\ \vec{E}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \\ \vec{E} \end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}} &= k_1 \vec{N} \\ \dot{\vec{N}} &= -k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B} \\ \dot{\vec{B}} &= -k_2 \vec{N} + k_3 \vec{E} \\ \dot{\vec{E}} &= -k_3 \vec{B} \end{aligned} \quad (1.1)$$

dir.

**Tanım 1.1.12.** 4- Boyutlu Öklid uzayında yay uzunluk parametresi  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$  olan birim hızlı bir eğri olsun.  $\vec{\alpha}(s)$ 'nin Frenet çatısı  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  birim vektörler kümesi ile aşağıda verilmiştir.

$$\vec{T} = \frac{d\vec{\alpha}}{ds}, \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{k_1}, \vec{B} = \frac{\vec{N}' + k_1 \vec{T}}{\|\vec{N}' + k_1 \vec{T}\|}, \vec{E} = \varepsilon(\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{B}),$$

Burada üçlü vektörel çarpım  $\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{B}$  ile aşağıda verilmiştir.

$$\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{B} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

Burada,  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  matrisinin sonucu  $\varepsilon$  katsayısı +1 veya -1 seçilerek sağlanır. Frenet çatısı pozitif yönlü ve +1 katsayısını alırız[13].

**Tanım 1.1.13.**  $\alpha = \alpha(s)$  eğrisinin teğet vektörü sabit bir doğrultu ile her zaman sabit açı yapıyorsa bu eğriye *helis* veya *eğilim çizgisi* denir[10, 15, 16].

**Tanım 1.1.14.**  $(\alpha)$  ve  $(\alpha^*)$  birim hızlı uzay eğrileri olsunlar. Bu eğrilerin karşı noktalarındaki birim teğetleri paralel ve zıt yönlü, aynı zamanda bu noktalar arasındaki uzaklık sabit ise bu eğrilere *sabit genişlikli eğriler* denir[7, 9].

## 1.2.Kapalı Uzay Eğrileri İçin Diferansiyel Geometrik Kriter

**Tanım.1.2.1.(Kapalı eğri)** Başlangıç ve bitiş noktaları çakışan eğrilere basit *kapalı eğri* denir.

Bu bölümde  $E^3$  uzayında [20] de Sezer tarafından kullanılan sabit genişlikli eğrilerde diferansiyel geometrik kriteri vereceğiz. Benzer olarak  $E_1^4$  de aynı metodu kullanacağız.

$(C)$  uzay eğrisinin yay uzunluğunu  $s$  olsun. Burada  $k_1(s) > 0$  eğriliği ve  $k_2(s)$  burulması olsun.  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  üç boyutlu Öklid uzayının orta normal bir bazını oluşturmak üzere,

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 \vec{e}_1 + \vec{\alpha}_2 \vec{e}_2 + \vec{\alpha}_3 \vec{e}_3$$

denklemini  $(C)$  eğrisinin konum vektörünü gösterir.

$(C)$  kapalı bir eğri ise  $\vec{\alpha}(s)$  konum vektörü  $\omega = 2\pi$  periyodunun bir periyodik fonksiyonudur.

Burada  $\omega$ ,  $(C)$  eğrisinin toplam uzunluğudur. Bu takdirde  $k_1(s)$  eğriliği ve  $k_2(s)$  burulmaları aynı periyodda periyodiktir. Ayrıca  $k_1(s)$  eğriliği ve  $k_2(s)$  burulmasının periyodik olması bir eğrinin kapalı olduğunu garanti etmez. Dönel helisler bu duruma bir örnektir.

$k_1(s)$  eğriliği ve  $k_2(s)$  burulmasının her ikisinin de  $\omega$  periyoduna sahip periyodik bir fonksiyon olduğunu farz edelim.  $\vec{\alpha}(s)$  konum vektörü  $C^4$  sınıfındandır.  $C$  uzay eğrisinin her bir noktasında  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  vektörleri mevcuttur[6]

$(C)$  eğrisi üzerindeki genel bir noktada

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = k_1 \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{N}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -k_2 \vec{N}. \quad (1.2)$$

Frenet formülleri göz önüne alınarak yazılabilir. Şimdi  $\varphi$  ve  $\frac{d\varphi}{ds} = k_1 = \frac{1}{\rho}$  kullanılarak (1.2)

formülleri

$$\frac{d\vec{T}}{d\varphi} = \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{d\varphi} = -\vec{T} + \rho k_2 \vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{d\varphi} = -\rho k_2 \vec{N}, \quad (1.3)$$

formunda yazılabilir. Ayrıca  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  vektörleri koordinat formunda

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^3 t_i \vec{e}_i, \quad \vec{N} = \sum_{i=1}^3 n_i \vec{e}_i, \quad \vec{B} = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i \quad (1.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$  vektörleri  $E^3$  uzayının ortonormal bazı olduğundan (1.3) ve türevleri (1.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \frac{dt_1}{d\varphi} = n_1, & \frac{dt_2}{d\varphi} = n_2, & \frac{dt_3}{d\varphi} = n_3 \\ \frac{dn_1}{d\varphi} = -t_1 + \rho k_2 b_1, & \frac{dn_2}{d\varphi} = -t_2 + \rho k_2 b_2, & \frac{dn_3}{d\varphi} = -t_3 + \rho k_2 b_3 \\ \frac{db_1}{d\varphi} = -\rho k_2 n_1, & \frac{db_2}{d\varphi} = -\rho k_2 n_2, & \frac{db_3}{d\varphi} = -\rho k_2 n_3 \end{cases} \quad (1.5)$$

lineer diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (1.5) denklemlerinden  $\{t_1, n_1, b_1\}, \{t_2, n_2, b_2\}, \{t_3, n_3, b_3\}$  cümleleri

$$\frac{d\psi_1}{d\varphi} = \psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{d\varphi} = -\psi_1 + \rho k_2 \psi_3, \quad \frac{d\psi_3}{d\varphi} = -\rho k_2 \psi_2 \quad (1.6)$$

genel formundaki diferansiyel denklem sisteminin üç bağımsız çözümüdür.

Eğer  $(C)$  eğrisi sabit genişlikli bir eğri ise, (1.6) ve (1.2) sistemleri aynı olmalıdır. Bu nedenle,

$\psi_1 = m_1, \psi_2 = m_2, \psi_3 = m_3$  dür. Kısaca (1.2) ya da (1.6) denklem sistemi

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = A(\varphi)\psi, \quad (1.7)$$

formunda ifade edilir. Burada

$$\psi = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}, \quad A(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \rho k_2 \\ 0 & -\rho k_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

dir.

Açık olarak, (1.7) denklemi,  $a_{ij}(t)$   $\omega$  periyotlu sürekli kabul edilmek üzere

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi, \\ \varphi = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (n \geq 3) \end{cases} \quad (1.8)$$

genel lineer diferansiyel denkleminin özel bir durumudur[6,14].

$\psi_i(0) = x_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  başlangıç koşulu olsun.

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

ve

$$\psi(t, x) = [m_1(t, x) m_2(t, x) \dots m_n(t, x)]^T.$$

denklemlerini ele alalım. Bu takdirde (1.8) denklemi

$$\frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi, \quad \psi(0) = x$$

formunda yazılabilir[6]. Eğer

$$\int_0^\omega A(\xi) \psi(\xi, x) d\xi = 0$$

ve

$$\begin{cases} \psi(t, x) = \{E + M(t)\}x, (E = \text{birim matris}), \\ M(t) = IA(t) + I^{(2)}A(t) + \dots + I^{(n)}A(t) + \dots, \\ (IA)(t) \equiv I^{(1)}A(t) = \int_0^t A(\xi) d\xi \\ (I^{(n)}A)(t) = \int_0^t A(\xi) (I^{(n-1)}A)(\xi) d\xi, n > 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

ise, bu denklemin  $\psi(t, x)$  çözümü  $\omega$  periyodunda periyodiktir[6].

**Teorem 1.2.1.**  $\frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi$  denklemleri, sıfırdan farklı  $\omega$  periyotlu periyodik çözüme sahiptir

ancak ve ancak  $\det(M(\omega)) = 0$  dır. Özellikle,  $\frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi$  denklemlerinin  $\omega$  periyotlu  $n$  lineer bağımsız periyodik çözümlere sahip olması için gerek ve yeter şart  $M(\omega)$  matrisinin sıfır matrisi olmasıdır[6].

Eğer  $M(\omega) = 0$  ise,  $\omega$  periyotlu  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  birim vektör fonksiyonları vardır, öyle ki  $\{t_i, n_i, b_i\}$ ,  $(i=1, 2, 3)$  fonksiyonlarının her bir kümesi  $(A_i, B_i, C_i)$  başlangıç koşuluna karşılık gelen denklemin bir çözümünü oluşturur.  $(C)$  eğrisi

$$\vec{\alpha}(s) = \int_0^s \vec{T}(s) ds \quad \text{ya da} \quad \vec{\alpha}(\varphi) = \int_0^\varphi \rho(\varphi) \vec{T}(\varphi) d\varphi.$$

denklemleriyle tanımlanabilir. Burada  $\vec{T}$  (1.9) denklemleri tarafından belirlenen

$$\begin{bmatrix} t_i \\ n_i \\ b_i \end{bmatrix} = \{E + M(\varphi)\} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix}, (i=1, 2, 3) \quad (1.10)$$

denklemleri kullanılarak bulunabilir.  $(A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3)$  bir ortonormal çatı oluşturmak üzere, başlangıç koşulu  $t_i(0) = A_i, n_i(0) = B_i, b_i(0) = C_i, (i=1, 2, 3)$  olarak alınırsa, bu takdirde (1.10) dan

$$t_i = (1 + m_{11}) A_i + m_{12} B_i + m_{13} C_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.11)$$

bulunur.  $(C)$  eğrisi sabit genişlikli aynı zamanda  $\omega$  periyotlu periyodik bir eğri olduğunda

$$\int_0^{\omega} \rho t_i d\varphi = 0. \quad (1.12)$$

dır. Buradan (1.11) ve (1.12) den

$$A_i \int_0^{\omega} \rho (1 + m_{11}) d\varphi + B_i \int_0^{\omega} \rho m_{12} d\varphi + C_i \int_0^{\omega} \rho m_{13} d\varphi = 0; \quad (i = 1, 2, 3).$$

elde edilir. Bu sistemde katsayılar determinantı  $\Delta \neq 0$  olduğundan, bir eğri için sabit genişlikli olma koşulunu sağlayan

$$\int_0^{\omega} \rho (1 + m_{11}) d\varphi = 0 = \int_0^{\omega} \rho m_{12} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{13} d\varphi, \quad (1.13)$$

denklemleri elde edilir. Burada  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  olduğundan  $\omega = 2\pi$  periyodu alınabilir. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir[6].

**Sonuç 1.2.1.**  $\rho(\varphi) > 0$  ve  $k_2(\varphi)$ ,  $\omega$  periyotlu sürekli periyodik fonksiyonlar,  $(C)$ ,  $E^3$  de bir eğri olsun. Bu takdirde  $(C)$  sabit genişlikli aynı zamanda  $\omega$  periyotlu periyodik bir eğridir ancak ve ancak

$$M(\omega) = 0, \quad \int_0^{\omega} \rho (1 + m_{11}) d\varphi = 0 = \int_0^{\omega} \rho m_{12} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{13} d\varphi, \quad (1.14)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada

$$\begin{cases} M(t) = IA(t) + I^{(2)}A(t) + \dots + I^{(n)}A(t) + \dots, \\ A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \rho k_2 \\ 0 & -\rho k_2 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.15)$$

ve  $m_{ij}(t)$ ,  $M(t)$  matrisinin elemanlarıdır[6].

## II. BÖLÜM

### $E^4$ ÖKLİD 4-UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLER

#### 2.1. $E^4$ Öklid 4-uzayında Sabit Genişlikli Eğrilerin Diferansiyel Denklemlerinin

##### Karakterizasyonları

$\vec{\alpha}(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$  parametrizasyonu ile verilen  $(C)$ ,  $E^4$  de birim hızlı regüler bir eğri olsun.  $E^4$  de  $(C)$  eğrisi boyunca Frenet çatısı  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  ile gösterilir. Frenet formülleri (1.1) deki gibi verilebilir.

Şimdi  $E^4$  de  $(C)$ ,  $(C^*)$  sırasıyla  $\vec{\alpha}(s)$ ,  $\vec{\alpha}^*(s^*)$  konum vektörüyle verilen birim hızlı regüler eğri olsun. Burada  $\vec{\alpha}(s)$  ve  $\vec{\alpha}^*(s^*)$  konum vektörlerinin yay uzunluk parametreleri sırasıyla  $s$  ve  $s^*$  dir. Karşıt noktalarda zıt yönlü paralel teğetlere sahip sabit genişlikli kapalı basit bir  $(C^*)$  eğrisi

$$\vec{\alpha}^*(s) = \vec{\alpha}(s) + m_1(s)\vec{T}(s) + m_2(s)\vec{N}(s) + m_3(s)\vec{B}(s) + m_4(s)\vec{E}(s) \quad (2.1)$$

ile de verilebilir[9]. Burada  $m_i(s)$ ,  $(1 \leq i \leq 4)$ ,  $(C)$  nin yay uzunluğu olan  $s$  in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Bu denklemin  $s$  ye göre diferansiyeli alınır ve eğriler için Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\alpha}^*}{ds} = & \vec{T} + \frac{dm_1}{ds}\vec{T} + k_1m_1\vec{N} + \frac{dm_2}{ds}\vec{N} + \left[-k_1\vec{T} + k_2\vec{B}\right]m_2 \\ & + \frac{dm_3}{ds}\vec{B} + m_3(-k_2\vec{N} + k_3\vec{E}) + \frac{dm_4}{ds}\vec{E} - k_3m_4\vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha^*}{ds} &= \vec{T} \left( 1 + \frac{dm_1}{ds} - k_1 m_2 \right) + \vec{N} \left( k_1 m_1 + \frac{dm_2}{ds} - k_2 m_3 \right) \\ &\quad + \vec{B} \left( k_2 m_2 + \frac{dm_3}{ds} - k_3 m_4 \right) + \vec{E} \left( m_3 k_3 + \frac{dm_4}{ds} \right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\alpha}^*}{ds} &= \vec{T}^* \frac{ds^*}{ds} = \left( 1 + \frac{dm_1}{ds} - m_2 k_1 \right) \vec{T} + \left( m_1 k_1 + \frac{dm_2}{ds} - m_3 k_2 \right) \vec{N} \\ &\quad + \left( m_2 k_2 + \frac{dm_3}{ds} - k_3 m_4 \right) \vec{B} + \left( m_3 k_3 + \frac{dm_4}{ds} \right) \vec{E}\end{aligned}$$

elde edilir. (C) nin karşıt noktalarında  $\vec{T} = -\vec{T}^*$  olduğundan

$$\begin{cases} 1 + \frac{dm_1}{ds} - m_2 k_1 = -\frac{ds^*}{ds}, \\ m_1 k_1 + \frac{dm_2}{ds} - m_3 k_2 = 0, \\ m_2 k_2 + \frac{dm_3}{ds} - m_4 k_3 = 0, \\ m_3 k_3 + \frac{dm_4}{ds} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

bulunur. (C) nin 1.eğriliğinin  $\lim(\Delta\varphi/\Delta s) = (d\varphi/ds) = k_1(s)$  olduğu iyi bilinir. Burada

$\varphi = \int_0^s k_1(s)ds$ , (C) eğrisinin teğeti ve  $\vec{\alpha}(s)$  noktasında verilen sabit bir doğrultu arasındaki

açıdır. Burada (2.2) denklemlerinden aşağıdaki sistem yazılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{dm_1}{d\varphi} &= m_1' = m_2 - f(\varphi), & \frac{dm_2}{d\varphi} &= m_2' = m_3 \rho k_2 - m_1, \\ \frac{dm_3}{d\varphi} &= m_3' = m_4 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, & \frac{dm_4}{d\varphi} &= m_4' = -m_3 \rho k_3\end{aligned} \quad (2.3)$$

dir. Burada  $\varphi$  ye göre türevi göstermek için  $(\cdot)$  kullanacağız. Burada  $f(\varphi) = \rho + \rho^*$  dır,

$\rho = \frac{1}{k_1}$  ve  $\rho^* = \frac{1}{k_1^*}$ , sırasıyla  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  noktalarındaki eğriliklerin yarıçaplarıdır. (2.3) den

yararlanarak  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  yok edilerek türevleri alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$m_1' = m_2 - f(\varphi) \Rightarrow m_2 = m_1' + f(\varphi)$$

$$m_2' = (m_1' + f(\varphi))' = m_1'' + f'(\varphi) = \rho k_2 m_3 - m_1$$

bulunur. Buradan

$$m_3 = \frac{1}{\rho k_2} [m_1'' + m_1 + f']$$

elde edilir.  $\varphi$  ye göre türev alınırsa

$$m_3' = \left[ \frac{1}{\rho k_2} (m_1'' + m_1 + f') \right]' = \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' (m_1'' + m_1 + f') + \frac{1}{\rho k_2} (m_1''' + m_1' + f'') \quad (2.4)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$m_3' = \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2$$

olduğundan

$$m_4 = \frac{1}{\rho k_3} \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' [m_1'' + m_1 + f'] + \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} (m_1''' + m_1' + f'') + \frac{k_2}{k_3} (m_1' + f) \quad (2.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$m_4' = -\rho k_3 m_3 = -\rho k_3 \left[ \frac{1}{\rho k_2} (m_1'' + m_1 + f') \right] \quad (2.6)$$

dır.

(2.5) in türevi alınıp (2.6) denklemi ile birbirlerine eşitlenirse  $m_1$ ,  $f$  ve türevleri cinsinden aşağıdaki kapalı denklem bulunur.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_3} \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_2} \left( \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 \right) \right] + \frac{k_2}{k_3} \frac{dm_1}{d\varphi} \right] + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 \right) \\ & + \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho k_2} \frac{df}{d\varphi} \right) + \frac{k_2}{k_3} f \right] + \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{d\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 2.1.1.**  $E^4$  de sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem (2.7) ile verilir.

Şimdi tekrar (2.3) denklemini ele alırsak eğrinin  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  karşıt noktaları arasındaki  $d$  uzaklığı eğrinin genişliğidir ve sabittir. Yani,

$$d^2 = \|\vec{d}\|^2 = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = sbt \quad (2.8)$$

dir. Ayrıca  $d$  vektörü  $(C)$  sabit genişlikli eğrinin çift normalidir. Buradan  $f(\varphi) = \rho + \rho^*$  dır ve

$\rho = \frac{1}{k_1}$  ve  $\rho^* = \frac{1}{k_1^*}$ , sırasıyla  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  noktalarındaki eğrilik yarıçapları olmak üzere (2.8)

denkleminin türevi alındığında  $m_1 = 0$  veya  $f(\varphi) = 0$  durumları gelecektir. (2.3) denklemleri tekrar düzenlendiği taktirde ;

$$m_2 = f(\varphi), \quad m_2' = m_3 \rho k_2, \quad m_3' = m_4 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3, \quad m_1 = 0 \quad (2.9)$$

ya da

$$m_1' = m_2, \quad m_2' = -m_1 + m_3 \rho k_2, \quad m_3' = m_4 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3 \quad (2.10)$$

eşitlikleri (2.1) eğrisini tarif eden sistemlerdir. Burada  $(')$ ,  $\varphi$ 'e göre diferansiyeli gösterir.

Şimdi ilk olarak  $f(\varphi) = 0$  olma durumunu inceleyelim. (2.10) denkleminde  $m_1 = sbt$  kabul edildiği durumunda  $m_2 = 0$  olacaktır. (2.10) denkleminde  $m_2 = 0$  yazarsak

$$m_1 = m_3 \rho k_2, \quad m_3' = m_4 \rho k_3, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3$$

elde edilir ve buradan  $m_3$  denklemlerden çekilip gerekli işlemler yapılırsa

$$m_3 = -\frac{m_4'}{\rho k_3} = -\left(\frac{m_3'}{\rho k_3}\right)' = \frac{-m_3''(\rho k_3) + m_3'(\rho k_3)'}{(\rho k_3)^3} \quad (2.11)$$

(2.11) denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$(\rho k_3)^3 m_3 - (\rho k_3)' m_3' + (\rho k_3) m_3'' = 0 \quad (2.12)$$

bulunur. Aynı şekilde  $m_4$  cinsinden yazarsak

$$m_3' = \rho k_3 m_4, \quad m_4' = -(\rho k_3) m_3 \Rightarrow m_3 = -\frac{m_4}{\rho k_3}$$

$$m_3' = -\frac{m_4''(\rho k_3) - m_4'(\rho k_3)'}{(\rho k_3)^2} = \rho k_3 m_4 \quad (2.13)$$

(2.13) ifadesi düzenlenirse

$$(\rho k_3)^3 m_4 - (\rho k_3)' m_4' + (\rho k_3) m_4'' = 0 \quad (2.14)$$

elde edilir.

(2.12) ve (2.14) birlikte yazılırsa

$$\begin{cases} (\rho k_3) m_4'' - (\rho k_3)' m_4' + (\rho k_3)^3 m_4 = 0, & \rho k_3 \neq 0, \\ (\rho k_3) m_3'' - (\rho k_3)' m_3' + (\rho k_3)^3 m_3 = 0, & \rho k_3 \neq 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

ile verilen ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\xi = \int_0^{\varphi} \rho(t) k_3(t) dt$$

formunda  $\varphi$  değişken değiştirmesi yapılarak, bu denklemler düzenlenirse;

$$m_3' = \frac{dm_3}{d\varphi} = \frac{dm_3}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} = \dot{m}_3 \rho k_3$$

$$m_3'' = \frac{d^2 m_3}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dm_3}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \dot{m}_3 \rho k_3 \right)$$

$$= \left( \frac{d}{d\varphi} \dot{m}_3 \right) \rho k_3 + \dot{m}_3 \frac{d}{d\varphi} (\rho k_3)$$

$$= \ddot{m}_3 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_3 (\rho k_3)'$$

bulunur. Burada  $\dot{m}_3 = \frac{dm_3}{d\zeta}$  dir. Bu değerler (2.12) de yerine yazılırsa;

$$\rho k_2 \left( \ddot{m}_2 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_2 (\rho k_3)' \right) + (\rho k_3)^3 m_3 - (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 = 0$$

$$(\rho k_3)^3 \ddot{m}_3 + (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 + (\rho k_3)^3 m_3 - (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 = 0$$

$$(\rho k_3)^3 \ddot{m}_3 + (\rho k_3)^3 m_3 = 0$$

$$\ddot{m}_3 + m_3 = 0 \tag{2.16}$$

bulunmuş olur.

Aynı şekilde değişken değiştirmeyi (2.14) denkleminde de uygularsak

$$m_4' = \frac{dm_4}{d\varphi} = \frac{dm_4}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} = \dot{m}_4 \rho k_3$$

$$m_4'' = \frac{d^2 m_4}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} m_4' = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dm_4}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \dot{m}_4 \rho k_3 \right)$$

$$m_4'' = \left( \frac{d}{d\varphi} \dot{m}_4 \right) \rho k_3 + \dot{m}_4 \frac{d}{d\varphi} \rho k_3 = \ddot{m}_4 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_4 (\rho k_3)'$$

elde edilir . Bu değerler (2.14) de yerine konursa;

$$(\rho k_3) \left[ \ddot{m}_4 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_4 (\rho k_3)' \right] - (\rho k_3)' \dot{m}_4 \rho k_3 + (\rho k_3)^3 m_4 = 0$$

$$(\rho k_3)^3 \ddot{m}_4 + \dot{m}_4 (\rho k_3)' (\rho k_3) - (\rho k_3)' \dot{m}_4 \rho k_3 + (\rho k_3)^3 m_4 = 0$$

$$(\rho k_3)^3 \ddot{m}_4 + (\rho k_3)^3 m_4 = 0$$

$$\ddot{m}_4 + m_4 = 0 \quad (2.17)$$

bulunur. (2.16) ve (2.17) denklemleri açık şekilde yazılırsa sabit katsayılı

$$\frac{d^2 m_4}{d\xi^2} + m_4 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 m_3}{d\xi^2} + m_3 = 0, \quad (2.18)$$

olan ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu iki denklemler ayrı ayrı çözümlürse[5,19]

$$m_3 = A \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \quad (2.19)$$

ve

$$m_4 = C \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \quad (2.20)$$

bulunur[13] .Burada  $A, B, C, D$  sabitlerdir. Buradan (2.15) ile verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümleri sırasıyla

$$\begin{cases} m_3 = A \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right), \\ m_4 = C \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \end{cases} \quad (2.21)$$

olur. (2.21) sistemi (2.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$m_3' = -\rho k_3 \left( A \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \right) = \rho k_3 \left( C \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \right)$$

bulunur. Ayrıca  $A = -D$ ,  $B = C$  elde edilir. Buradan (2.10) sisteminin çözüm kümesi

$$\begin{cases} m_1 = c = sbt., & m_2 = 0, \\ m_3 = A \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \\ m_4 = B \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \end{cases} \quad (2.22)$$

formunda elde edilir. Böylece (2.1) ile verilen sabit genişlikli eğrisi açık olarak belirlenmiş olur.

Denklem (2.1) de ifade edilen eşitlikte yerine konulursa  $d^2 = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = sbt.$  olduğu görülür.

Yani

$$\vec{\alpha}^* = \vec{\alpha} + c\vec{T} + \left( A \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right) \vec{B} + \left( B \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \vec{E}$$

ve

$$\|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = k^2$$

olduğundan yerine yerleştirecek

$$\begin{aligned} c^2 + \left[ A \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right]^2 + \left[ B \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right]^2 = \\ c^2 + A^2 \left[ \cos^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \sin^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right] + B^2 \left[ \sin^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \cos^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right] \\ + 2AB \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - 2AB \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt = k^2 \end{aligned}$$

ifadesinden  $k^2 = c^2 + A^2 + B^2$  sabit genişlikli eğri olarak bulmuş oluruz

Şimdi  $m_1 \neq c \neq sbt.$  durumunda  $m_1$  türevleri cinsinden yazarsak

$$m_2 = m_1' \Rightarrow m_2' = m_1'' = \rho k_2 m_3 - m_1$$

elde edilir. Aynı şekilde  $m_3$  de  $m_1$  in türevleri cinsinden yazılırsa

$$m_3 = \frac{1}{\rho k_2} (m_1'' + m_1)$$

$$m_3' = \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' (m_1'' + m_1) + \frac{1}{\rho k_2} (m_1''' + m_1')$$

elde edilir. Ayrıca  $m_3' = \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_1'$  olduğundan her iki denkleme eşitlersek

$$m_4 = \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' m_1 + \left( \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} + \frac{k_2}{k_3} \right) m_1' + \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' m_1'' + \left( \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} \right) m_1'''$$

olur. Ayrıca  $m_4$  ün türevi alınır

$$m_4' = -\rho k_3 m_3 = -\rho k_3 \frac{1}{\rho k_2} (m_1'' + m_1) = -\frac{k_3}{k_2} (m_1'' + m_1)$$

olduğundan her iki eşitlikten

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)'' + \left( \frac{1}{\rho k_3} \right)' \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' + \frac{k_3}{k_2} \right] m_1 + \left[ \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' + \left( \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} \right)' + \left( \frac{k_2}{k_3} \right)' \right] m_1' \\ & + \left[ \left( \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} \right) + \frac{k_2}{k_3} + \frac{k_3}{k_2} + \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)'' + \left( \frac{1}{\rho k_3} \right)' \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' \right] m_1'' \\ & + \left[ \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' + \left( \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} \right)' \right] m_1''' + \left( \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} \right) m_1^{(iv)} = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Yani (2.7) denkleminde  $f(\varphi) = 0$  yazılırsa

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{\rho k_3} \left[ \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_2} \left( \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 \right) \right] + \frac{k_2}{k_3} \frac{dm_1}{d\varphi} \right] + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 \right) = 0 \quad (2.23)$$

bulunur.

Şimdi (2.9) sistemine dönelim. Bu denklemde  $m_2, m_3$  ve türevleri yok edilerek  $f(\varphi) \neq 0$

olduğu durumlarda  $\varphi$  değişken değiştirme metoduyla ve  $u = \int_0^\varphi \mu(t) dt, \mu = \rho k_3$  alırsak

$$\begin{aligned} \frac{dm_3}{d\varphi} &= \frac{dm_3}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2 \\ \frac{dm_3}{du} \cdot \rho k_3 &= \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2 \\ \frac{dm_3}{du} &= m_4 - \frac{\rho k_2}{\rho k_3} m_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{dm_4}{d\varphi} &= \frac{dm_4}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\rho k_3 m_3 \\ \frac{dm_4}{du} \cdot \rho k_3 &= -\rho k_3 m_3 \Rightarrow \frac{dm_4}{du} = -m_3 \end{aligned}$$

dir. İkinci türevleri alınırsa

$$\frac{d^2 m_3}{du^2} = \frac{d}{du} \left( m_4 - \frac{\rho k_2}{\rho k_3} m_2 \right) = \frac{dm_4}{du} - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right)$$

ise  $\frac{dm_4}{du} = -m_3$  olduğundan

$$\frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = -\frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) \quad (2.24)$$

denklemini elde edilir.  $\frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = 0$  çözümü ise özel olarak aşağıdaki şekilde bulunur.[5,19]

$$F_1(\varphi) = A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt$$

olarak alınırsa çözüm

$$m_3 = F_1(\varphi) - \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \quad (2.25)$$

şeklinde olur.(2.25) in türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dm_3}{du} = & -A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ & - \cos[u(\varphi) - u(\varphi)] \rho(t) k_2 f(t) \frac{d\varphi}{du} + \cos[u(\varphi) - u(0)] \rho(t) k_2 f(0) \frac{d0}{du} \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{dm_3}{du} = -A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt - \frac{\rho k_2}{\rho k_3} f(t)$$

bulunur. İkinci türev alındığında

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m_3}{du^2} = & -A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ & - \sin[u(\varphi) - u(\varphi)] \rho \cdot k_2 \cdot f \frac{d\varphi}{du} + \sin[u(\varphi) - u(0)] \rho \cdot k_2 \cdot f \frac{d0}{du} - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. (2.24) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = & -A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ & - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) + A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki (2.24) eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece

$$\frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = -\frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right)$$

ifadesi bulunur. Benzer yollarla  $m_4$  ve  $m_2$  cinsinden yazarsak

$$\frac{dm_3}{d\varphi} = \frac{dm_3}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2$$

$$\frac{dm_3}{du} \cdot \rho k_3 = \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2$$

$$\frac{dm_3}{du} = m_4 - \frac{k_2}{k_3} m_2$$

ve

$$\frac{dm_4}{d\varphi} = \frac{dm_4}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\rho k_3 m_3$$

$$\frac{dm_4}{du} \cdot \rho k_3 = -\rho k_3 m_3 \Rightarrow \frac{dm_4}{du} = -m_3$$

$$\frac{dm_4}{d\varphi} = -m_3$$

ise denklemler düzenlendiği takdirde

$$\frac{dm_3}{du} = -\frac{d^2 m_4}{du^2} = m_4 - \frac{k_2}{k_3} m_2$$

$$m_4 + \frac{d^2 m_4}{du^2} = \frac{k_2}{k_3} m_2 \quad (2.26)$$

bulunur. Benzer yolla

$$m_4 = -A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \sin [u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \quad (2.27)$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.24) ve (2.26) denklemlerinin çözümleri

$$\begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 = f(\varphi), \\ m_3 = A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt, \\ m_4 = B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt, \end{cases} \quad (2.28)$$

formunda elde edilir[13].  $A_1$ ,  $B_1$  reel sabitleri gösterir.

Bundan başka  $m_1 = 0$  olma durumunda (2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_3} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho k_2} \frac{df}{d\varphi} \right) + \frac{k_2}{k_3} f \right] + \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{d\varphi} = 0 \quad (2.29)$$

(2.29) formunda  $\varphi$  değişken değiştirme ile  $w = \int_0^\varphi \rho k_2 d\varphi$  yapılırsa

$$\frac{d}{dw} \left[ \frac{k_2}{k_3} \left( \frac{d^2 f}{dw^2} + f \right) \right] + \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{dw} = 0 \quad (2.30)$$

ifadesi (2.1) deki denklemde sabit genişliği gösterir.

Şimdiye kadar karşılıklı paralel zıt yönlü paralel teğetlere sahip uzay eğrileri ele alındı. Şimdi ise  $P$  den başka bir tek  $Q$  noktasına karşılık gelen eğride her  $P$  noktasında aynı düzlemde olması için  $E^4$  de  $(C)$  nin birim hızlı basit kapalı eğri olduğunu düşünelim. Sonra  $E^4$  de sabit genişlikli uzay eğrisi ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem.2.1.2.**  $(C)$ , eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan  $C^5$  sınıfından birim hızlı bir eğri olsun.  $(C)$  eğrisinin  $P$  ve  $Q$  karşıt noktalarındaki  $\vec{T}$  ve  $\vec{T}^*$  teğetleri paralel ve zıt yönlü olsun. Eğer  $(C)$  nin bu noktalarını birleştiren kiriş bir çift normal ise, bu taktirde  $(C)$  sabit genişliğe sahiptir. Tersine eğer  $(C)$  sabit genişlikli bir eğri ise, bu takdirde  $(C)$  nin her normali çift-normaldir[12,13].

**İspat:**  $(C)$  nin yay uzunluk parametresine sahip  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  ve  $m_4$  fonksiyonları ifade edilen  $\vec{d} = \vec{\alpha}^* - \vec{\alpha} = m_1 \vec{T} + m_2 \vec{N} + m_3 \vec{B} + m_4 \vec{E}$  vektörü bir çift-normal olsun.

$\langle \vec{d}, \vec{T}^* \rangle = -\langle \vec{d}, \vec{T} \rangle = m_1 = 0$  ile verilebilir. (2.2) denkleminde yararlanarak

$$m_2 \frac{dm_2}{ds} + m_3 \frac{dm_3}{ds} + m_4 \frac{dm_4}{ds} = 0.$$

Böylece  $m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = \text{sabit}$  olduğu ortaya çıkar ve  $(C)$  sabit genişliktir.

Aksine olarak  $\|\vec{d}\|^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = \text{sabit}$  ise  $m_1 = 0$  gösterir.  $\vec{d}$  de  $\vec{T}$  ve  $\vec{T}^*$  dik olduğu anlamına gelir. Yani  $\vec{d}, (C)$  de bir çift -normaldir.

Zıt noktalarda zıt yönlerde paralel teğetlere sahip basit kapalı eğri (2.28) sistemi tarafından verilmiştir. Bu durumda  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  arasında eğrinin bir çift karşılıklı noktaları  $(\vec{\alpha}^*(\varphi), \vec{\alpha}(\varphi))$  dir. Böylece (2.28) sisteminden

$$\vec{\alpha}^*(0) = \vec{\alpha}^*(2\pi) \text{ ise } f \text{ fonksiyonu } f(\varphi) = \rho + \rho^* \text{ ise } f(0) = f(2\pi)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}^*(0) &= \vec{\alpha}(0) + f(0)\vec{N} + f_1(0)\vec{B} + f_2(0)\vec{E} \\ &= \vec{\alpha}(0) + f(0)\vec{N} + A_1\vec{B} + B_1\vec{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(2\pi) &= \vec{\alpha}(2\pi) + f(2\pi).\vec{N} + \left[ f_1(2\pi) - \int_0^{2\pi} \cos[u(\varphi) - u(t)]\rho k_2 f(t) dt \right] \vec{B} \\ &\quad + \left[ f_2(2\pi) + \int_0^{2\pi} \sin[u(\varphi) - u(t)]\rho k_2 f(t) dt \right] \vec{E} \end{aligned}$$

$$A_1 \cos \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt - \int_0^{2\pi} \cos[u(\varphi) - u(t)]\rho k_2 f(t) dt = A_1$$

$$B_1 \cos \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt - A_1 \sin \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt + \int_0^{2\pi} \sin[u(\varphi) - u(t)]\rho k_2 f(t) dt = B_1$$

denklemlerinden aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar.

$$\cos \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 0$$

ayrıca

$$\int_0^{2\pi} \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = 0 \text{ ve } \int_0^{2\pi} \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = 0$$

dir. Sonuç olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.31)$$

$ds = \rho dt$  eşitliğini kullanarak  $\int_C k_3 ds = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$  formülü verilebilir. Bu  $(C)$  de üçüncü

eğriliğin sıfır olduğu anlamına gelir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

**Sonuç.2.1.1.** Sabit genişlikli  $(C)$  basit kapalı eğrinin toplam üçüncü eğriliği

$2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$  dir. Ayrıca  $\frac{k_2}{k_3} = a = \text{sabit}$  alırsak (2.30) denklemden

$$\frac{d}{dw} \left[ \frac{k_2}{k_3} \left( \frac{d^2 f}{dw^2} + f \right) \right] + \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{dw} = 0 \text{ denkleminde } \frac{k_2}{k_3} = a = \text{sabit} \text{ ise}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ a \left( \frac{d^2 f}{dw^2} + f \right) \right] + \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

$$a \frac{d}{dw} \left[ \left( \frac{d^2 f}{dw^2} + f \right) \right] + \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

$$a \frac{d^3 f}{dw^3} + a \frac{df}{dw} + \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

$$\frac{d^3 f}{dw^3} + \frac{df}{dw} + \frac{1}{a^2} \frac{df}{dw} = 0$$

$$\frac{d^3 f}{dw^3} + \left( 1 + \frac{1}{a^2} \right) \frac{df}{dw} = 0$$

$$\frac{d^3 f}{dw^3} + K \frac{df}{dw} = 0, \quad (2.32)$$

Burada  $K = 1 + \frac{1}{a^2}$  dir.  $K \neq \pm 1$  olduğunu varsayalım. (2.32) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$f = A_2 \sin \int_0^\varphi K \rho k_2 dt + B_2 \cos \int_0^\varphi K \rho k_2 dt + C_1 \quad (2.33)$$

Burada  $A_2$ ,  $B_2$  ve  $C_1$  reel sabitlerdir. (C) basit kapalı eğri yani  $\alpha^*(0) = \alpha^*(2\pi)$

$$f(0) = f(2\pi)$$

$$f(2\pi) = A_2 \sin \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt + B_2 \cos \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt + C_1$$

$$f(0) = B_2 \cos 0 + C_1 = B_2 + C_1$$

$$\sin \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt = 0 \quad \cos \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt = 1$$

$ds = \rho d\varphi$  eşitliği kullanarak  $\int_C k_2 ds = 2 \frac{n}{K} \pi$ , ( $K, n \in \mathbb{Z}$ ) formülü olarak verilebilir. (C) nin

ikinci eğrilik integrali  $2 \frac{n}{K} \pi$ , ( $K, n \in \mathbb{Z}$ ) olduğu söylenebilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç. 2.1.2.**  $a = k_2 / k_3 = \text{sabit}$  olan sabit genişliğe sahip basit kapalı (C) eğrisinin toplam

ikinci eğriliği  $n \in \mathbb{Z}$  ve  $K = 1 + \frac{1}{a^2}$  de  $2 \frac{n}{K} \pi$  dir.

## 2.2. $E^4$ Öklid 4-Uzayında Sabit Genişlikli Eğrilerin Periyodik Olması Kriteri

Farz edelim ki  $E^4$  de (C) sabit genişlikli bir eğri ve  $\vec{\alpha}(s)$  genel bir noktanın konum vektörünü gösterebilir. (C) kapalı bir eğri ise  $\vec{\alpha}(s)$  konum vektörü  $\omega = 2\pi$  periyotlu bir periyodik fonksiyondur. Burada  $\omega$ , (C) eğrisinin toplam uzunluğudur. Bu takdirde  $k_1(s)$  eğrilikleri  $k_2(s)$  ve  $k_3(s)$  aynı periyotta periyodiktir. Ancak  $k_1(s)$  ve  $k_2(s)$ ,  $k_3(s)$  nin periyodik olması ve eğrinin kapalılığı bir eğrinin sabit genişlikli olması için yeterli değildir. Yani eğer bir eğri kapalı

(periyodik) ise, sabit genişlikli bir eğri ya da sabit genişlikli olmayan bir eğri olabilir. Bu yüzden bir eğrinin sabit genişlikli olması durumunu belirlemek için [6] da verilen benzer yollar takip edilerek (2.10) sistemi kullanılabilir.

Bunun için, ilk önce  $(C)$  eğrisi üzerindeki genel bir noktada

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k_1\vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -k_1\vec{T} + k_2\vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -k_2\vec{N} + k_3\vec{E}, \quad \frac{d\vec{E}}{ds} = -k_3\vec{B}. \quad (2.34)$$

Frenet formüllerini düşünelim.  $\varphi$  ve  $\frac{d\varphi}{ds} = k_1 = \frac{1}{\rho}$  kullanılarak (2.34) formülleri

$$\frac{d\vec{T}}{d\varphi} = \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{d\varphi} = -\vec{T} + \rho k_2\vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{d\varphi} = -\rho k_2\vec{N} + \rho k_3\vec{E}, \quad \frac{d\vec{E}}{d\varphi} = -\rho k_3\vec{B}$$

formunda yazılabilir. Ayrıca  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}$  vektörleri koordinat formunda

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^4 t_i \vec{e}_i, \quad \vec{N} = \sum_{i=1}^4 n_i \vec{e}_i, \quad \vec{B} = \sum_{i=1}^4 b_i \vec{e}_i, \quad \vec{E} = \sum_{i=0}^4 \varepsilon_i \vec{e}_i \quad (2.35)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  vektörleri  $E^4$  uzayının ortonormal bazı olduğundan (2.35)

ve türevleri (2.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{llll} \frac{dt_1}{d\varphi} = n_1, & \frac{dt_2}{d\varphi} = n_2, & \frac{dt_3}{d\varphi} = n_3, & \frac{dt_4}{d\varphi} = n_4 \\ \frac{dn_1}{d\varphi} = -t_1 + \rho k_2 b_1, & \frac{dn_2}{d\varphi} = -t_2 + \rho k_2 b_2, & \frac{dn_3}{d\varphi} = -t_3 + \rho k_2 b_3, & \frac{dn_4}{d\varphi} = -t_4 + \rho k_2 b_4 \\ \frac{db_1}{d\varphi} = \rho k_3 \varepsilon_1 - \rho k_2 n_1, & \frac{db_2}{d\varphi} = \rho k_3 \varepsilon_2 - \rho k_2 n_2, & \frac{db_3}{d\varphi} = \rho k_3 \varepsilon_3 - \rho k_2 n_3, & \frac{db_4}{d\varphi} = \rho k_3 \varepsilon_4 - \rho k_2 n_4 \\ \frac{d\varepsilon_1}{d\varphi} = -\rho k_3 b_1, & \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} = -\rho k_3 b_2, & \frac{d\varepsilon_3}{d\varphi} = -\rho k_3 b_3, & \frac{d\varepsilon_4}{d\varphi} = -\rho k_3 b_4 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

lineer diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (2.36) denklemlerinden

$\{t_1, n_1, b_1, \varepsilon_1\}, \{t_2, n_2, b_2, \varepsilon_2\}, \{t_3, n_3, b_3, \varepsilon_3\}, \{t_4, n_4, b_4, \varepsilon_4\}$  cümleleri

$$\frac{d\psi_1}{d\varphi} = \psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{d\varphi} = -\psi_1 + \rho k_2 \psi_3, \quad \frac{d\psi_3}{d\varphi} = \rho k_3 \psi_4 - \rho k_2 \psi_2, \quad \frac{d\psi_4}{d\varphi} = -\rho k_3 \psi_3 \quad (2.37)$$

Eğer  $(C)$  eğrisi sabit genişlikli bir eğri ise, (2.37) ve (2.10) sistemleri aynı olmalıdır. Bu yüzden,

$\psi_1 = m_1, \psi_2 = m_2, \psi_3 = m_3, \psi_4 = m_4$  tür. Kısaca (2.10) ya da (2.37) denklem sistemi

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = A(\varphi)\psi, \quad (2.38)$$

formunda ifade edilir. Burada

$$\psi = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}, \quad A(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & -\rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & -\rho k_3 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Açık olarak, (2.38) denklemini,  $a_{ij}(t)$   $\omega$  periyotlu sürekli kabul edilmek üzere

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi, \\ \varphi = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (n \geq 4) \end{cases} \quad (2.39)$$

genel lineer diferansiyel denkleminin özel bir durumudur [6,14].

$\psi_i(0) = x_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  başlangıç koşulu olsun.

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

ve

$$\psi(t, x) = [m_1(t, x) m_2(t, x) \dots m_n(t, x)]^T.$$

denklemlerini ele alalım. Bu takdirde (2.39) denklemi [6] dan iyi bilinir ki  $\frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi$ ,

$\psi(0) = x$  formunda yazılabilir. Eğer

$$\int_0^{\omega} A(\xi)\psi(\xi, x) d\xi = 0$$

ve

$$\begin{cases} \psi(t, x) = \{E + M(t)\}x, (E = \text{birim matris}), \\ M(t) = IA(t) + I^{(2)}A(t) + \dots + I^{(n)}A(t) + \dots, \\ (IA)(t) \equiv I^{(1)}A(t) = \int_0^t A(\xi) d\xi \\ (I^{(n)}A)(t) = \int_0^t A(\xi) (I^{(n-1)}A)(\xi) d\xi, n > 1. \end{cases} \quad (2.40)$$

ise, bu denklemin  $\psi(t, x)$  çözümü  $\omega$  periyodunda periyodiktir.

Şimdi teorem 1.2.1. ifadesini (2.18) sistemine uygulayalım. Eğer  $M(\omega) = 0$  ise,  $\omega$  periyotlu  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}$  birim vektör fonksiyonları vardır, öyle ki  $\{t_i, n_i, b_i, \varepsilon_i\}$ ,  $(i = 1, 2, 3, 4)$  fonksiyonlarının her bir kümesi  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  başlangıç koşuluna karşılık gelen (2.38) denkleminin bir çözümünü oluşturur.  $(C)$  eğrisi

$$\vec{\alpha}(s) = \int_0^s \vec{T}(s) ds \quad \text{ya da} \quad \vec{\alpha}(\varphi) = \int_0^{\omega} \rho(\varphi) \vec{T}(\varphi) d\varphi$$

denklemleriyle tanımlanabilir. Burada  $\vec{T}$ , (2.40) denklemleri tarafından belirlenen

$$\begin{bmatrix} t_i \\ n_i \\ b_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} = \{E + M(\varphi)\} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix}, (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.41)$$

denklemini kullanarak bulunabilir.  $(A_1, A_2, A_3, A_4), (B_1, B_2, B_3, B_4), (C_1, C_2, C_3, C_4)$  ve  $(D_1, D_2, D_3, D_4)$  bir orta normal çatı oluşturmak üzere, başlangıç koşulu  $t_i(0) = A_i, n_i(0) = B_i, b_i(0) = C_i, \varepsilon_i = D_i, (i = 1, 2, 3, 4)$  olarak alınırsa, bu takdirde (2.41) den

$$t_i = (1 + m_{11}) A_i + m_{12} B_i + m_{13} C_i + m_{14} D_i; \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.42)$$

bulunur.  $(C)$  eğrisi sabit genişlikli aynı zamanda  $\omega$  periyotlu periyodik bir eğri olduğunda

$$\int_0^\omega \rho t_i d\varphi = 0 \quad (2.43)$$

dır. Buradan (2.42) ve (2.43) dan

$$A_i \int_0^\omega \rho (1 + m_{11}) d\varphi + B_i \int_0^\omega \rho m_{12} d\varphi + C_i \int_0^\omega \rho m_{13} d\varphi + D_i \int_0^\omega \rho m_{14} d\varphi = 0; \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

elde edilir. Bu sistemde katsayılar determinantı  $\Delta \neq 0$  olduğundan, bir eğri için sabit genişlikli olma koşulunu sağlayan

$$\int_0^\omega \rho (1 + m_{11}) d\varphi = 0 = \int_0^\omega \rho m_{12} d\varphi = \int_0^\omega \rho m_{13} d\varphi = \int_0^\omega \rho m_{14} d\varphi \quad (2.44)$$

denklemleri elde edilir. Burada  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  olduğundan  $\omega = 2\pi$  periyodu alınabilir. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 2.2.1.**  $\rho(\varphi) > 0$  ve  $k_2(\varphi)$  ve  $k_3(\varphi)$   $\omega$  periyotlu sürekli periyodik fonksiyonlar,  $(C)$ ,  $E^4$  de bir eğri olsun. Bu takdirde  $(C)$  sabit genişlikli aynı zamanda  $\omega$  periyotlu periyodik bir eğridir ancak ve ancak

$$M(\omega) = 0, \quad \int_0^\omega \rho (1 + m_{11}) d\varphi = 0 = \int_0^\omega \rho m_{12} d\varphi = \int_0^\omega \rho m_{13} d\varphi = \int_0^\omega \rho m_{14} d\varphi, \quad (2.45)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada

$$\begin{cases} M(t) = IA(t) + I^{(2)}A(t) + \dots + I^{(n)}A(t) + \dots, \\ A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & -\rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & -\rho k_3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.46)$$

ve  $m_{ij}(t)$ ,  $M(t)$  matrisinin elemanlarıdır.

(2.42) eşitliğinde

$$IA(t) = \begin{bmatrix} 0 & \int_0^s dt & 0 & 0 \\ -\int_0^s dt & 0 & \int_0^s \rho k_2 dt & 0 \\ 0 & -\int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \int_0^s \rho k_3 dt \\ 0 & 0 & -\int_0^s \rho k_3 dt & 0 \end{bmatrix}$$

$$I^2 A(s) = \int_0^s A(t) IA(t) dt$$

olur. Ayrıca

$$A(s) IA(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & -\rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & -\rho k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \int_0^s dt & 0 & 0 \\ -\int_0^s dt & 0 & \int_0^s \rho k_2 dt & 0 \\ 0 & -\int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \int_0^s \rho k_3 dt \\ 0 & 0 & -\int_0^s \rho k_3 dt & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\int_0^s dt & 0 & \int_0^s \rho k_2 dt & 0 \\ 0 & -\int_0^s dt - \rho k_2 \int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \rho k_2 \int_0^s \rho k_3 dt \\ \rho k_2 \int_0^s dt & 0 & -\rho k_2 \int_0^s \rho k_2 dt - \rho k_3 \int_0^s \rho k_3 dt & 0 \\ 0 & \rho k_3 \int_0^s \rho k_2 dt & 0 & -\rho k_3 \int_0^s \rho k_3 dt \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$I^2 A(r) = \int_0^r A(t) I A(t) dt$$

eşitliğinden

$$I^2 A(r) = \begin{bmatrix} -\int_0^r \int_0^s dt & 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_2 dt ds & 0 \\ 0 & -\int_0^r \int_0^s (1 + \rho k_2 \rho k_2) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_2 \rho k_3 dt ds \\ \int_0^r \int_0^s \rho k_2 dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s (\rho k_2 \rho k_2 + \rho k_3 \rho k_3) dt ds & 0 \\ 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_3 \rho k_2 dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s \rho k_3 \rho k_3 dt ds \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer olarak algoritmaya devam edilirse  $\lambda(\xi) = \rho(\xi) k_2(\xi), \mu(\xi) = \rho(\xi) k_3(\xi)$ ,

$$A(s) \cdot I^2 A(r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda(s) & 0 \\ 0 & -\lambda(s) & 0 & \mu(s) \\ 0 & 0 & -\mu(s) & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -\int_0^r \int_0^s dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda(t) dt ds & 0 \\ 0 & -\int_0^r \int_0^s (1 + \lambda(t) \lambda(s)) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda(s) \mu(t) dt ds \\ \int_0^r \int_0^s \lambda(s) dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s [\lambda(t) \lambda(s) + \mu(t) \mu(s)] dt ds & 0 \\ 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda(t) \mu(s) dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s \mu(t) \mu(s) dt ds \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\int_0^r \int_0^s (1 + \lambda.\lambda) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda.\mu dt ds \\ \int_0^\omega \int_0^s dt ds + \lambda \int_0^\omega \int_0^s \lambda dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s \lambda dt ds - \lambda \int_0^r \int_0^s (\lambda.\lambda + \mu.\mu) dt ds & 0 \\ 0 & \lambda \int_0^r \int_0^s (1 + \lambda.\lambda) dt ds + \mu \int_0^r \int_0^s \lambda.\mu dt ds & 0 & -\lambda \int_0^r \int_0^s \lambda.\mu dt ds - \mu \int_0^r \int_0^s \mu.\mu dt ds \\ -\mu \int_0^\omega \int_0^s \lambda dt ds & 0 & \mu \int_0^r \int_0^s (\lambda.\lambda + \mu.\mu) dt ds & 0 \end{bmatrix}$$

$$I^3 A(\omega) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\int_0^p \int_0^r \int_0^s (1 + \lambda.\lambda) dt ds dr & 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s \lambda.\mu dt ds \\ \int_0^p \int_0^r \int_0^s (1 + \lambda.\lambda) dt ds dr & 0 & -\int_0^p \int_0^r \int_0^s [\lambda + \lambda(\lambda.\lambda + \mu.\mu)] dt ds dr & 0 \\ 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s (\lambda.(1 + \lambda.\lambda) + \mu.\lambda.\mu) dt ds dr & 0 & -\int_0^p \int_0^r \int_0^s (\lambda.\mu.\lambda + \mu.\mu.\mu) dt ds dr \\ -\int_0^p \int_0^r \int_0^s \mu.\lambda dt ds dr & 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s \mu(\lambda.\lambda + \mu.\mu) dt ds dr & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer olarak algoritmaya devam edilirse

$$I^4 A(\phi) = \int_0^\phi A(t) I^3 A(t) dt \quad \text{ise} \quad I^3 A(p) = R_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$A(s) \cdot I^3 A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda(s) & 0 \\ 0 & -\lambda(s) & 0 & \mu(s) \\ 0 & 0 & -\mu(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

$$I^4 A(\phi) = \begin{bmatrix} \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s (1 - \lambda.\lambda) dt ds dr dp & 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\lambda - \lambda(\lambda\lambda + \mu.\mu)] dt ds dr dp & 0 \\ 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [(1 - \lambda.\lambda - \lambda.\lambda)[1 - \lambda.\lambda] + \mu.\lambda.\mu] dt ds dr dp & 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\mu.\lambda - \lambda(\lambda.\mu\lambda + \mu\mu\mu)] dt ds dr dp \\ -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\lambda(1 - \lambda.\lambda) + \mu.\mu.\lambda] dt ds dr dp & 0 & -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [(\lambda.\lambda - \lambda + \mu.\mu)(\lambda.\lambda + \mu\mu)] dt ds dr dp & 0 \\ 0 & -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \mu[\lambda(1 - \lambda.\lambda) + \mu.\lambda.\mu] dt ds dr dp & 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\mu.(\lambda.\mu\lambda + \mu\mu\mu)] dt ds dr dp \end{bmatrix}$$

olur. Bu şekilde işlemlere devam edildiğinde; (2.40) ve (2.46) denklemlerinden  $M(t)$  matrisi elde edilebilir ve her  $m_{ij}$  sonsuz birçok integrasyonu içerir. Bu nedenle (2.45) koşulu

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\omega \rho(\varphi) d\varphi - \int_0^\omega \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) ds dt d\varphi + \int_0^\omega \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) [1 + \lambda(p)\lambda(s)] dt ds dr dp d\varphi - \dots = 0 \\ \int_0^\omega \int_0^s \rho(\varphi) dt d\varphi - \int_0^\omega \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) [1 + \lambda(t)\lambda(s)] dt ds dr d\varphi + \dots = 0 \\ \int_0^\omega \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(t) dt ds d\varphi \\ \quad - \int_0^\omega \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) [\lambda(t) + \lambda(p) \{ \lambda(t)\lambda(s) + \mu(t)\mu(s) \}] dt ds dr dp d\varphi + \dots = 0 \\ \int_0^\omega \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(s) \mu(t) dt ds dr d\varphi \\ \quad - \int_0^\omega \int_0^q \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(p) \mu(t) [1 + \lambda(t)\lambda(s) + \mu(t)\mu(s)] dt ds dp d\phi d\varphi q + \dots = 0 \end{array} \right. \quad (2.47)$$

formundadır. Burada  $\lambda(\xi) = \rho(\xi)k_2(\xi)$ ,  $\mu(\xi) = \rho(\xi)k_3(\xi)$  dir. Şimdi önceki bölümde bahsettiğimiz  $\rho k_2 = \text{sabit}$   $\rho k_3 = \text{sabit}$  olması durumunu aşağıdaki örnekte inceleyelim.

**Örnek 2.2.1.**  $\rho k_2 = \rho k_3 = \text{sabit}$  olmak üzere  $\rho = \text{sabit}$  ve  $k_2 = k_3 = \text{sabit}$  özel durumlarını düşünelim. Bu durumda (2.45) formu

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega - \frac{\omega^3}{3!} + (1 + \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^5}{5!} - \varepsilon (1 + \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^7}{7!} \dots = 0 \\ \frac{\omega^2}{2!} - (1 + \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^4}{4!} + (1 + \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^6}{6!} - \dots = 0 \\ k_2 \left[ \frac{\omega^3}{3!} - (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2) \frac{\omega^5}{5!} + (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^2 \frac{\omega^7}{7!} - \dots = 0 \right] \\ k_2 k_3 \left[ \frac{\omega^4}{4!} - (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2) \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \end{array} \right. \quad (2.48)$$

ya da yukarıdaki denklemler sırasıyla düzenlenirse birinci denklemde eşitliği  $(1 + \rho^2 k_2^2)^{3/2}$

ile çarparsak

$$\begin{aligned} (1 + \rho^2 k_2^2)^{1/2} (1 + \rho^2 k_2^2) \omega - (1 + \rho^2 k_2^2)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} + (1 + \rho^2 k_2^2)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} - (1 + \rho^2 k_2^2)^{7/2} \frac{\omega^7}{7!} \dots &= 0 \\ (\rho^2 k_2^2) (1 + \rho^2 k_2^2)^{1/2} \omega + (1 + \rho^2 k_2^2)^{1/2} \omega - (1 + \rho^2 k_2^2)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} + (1 + \rho^2 k_2^2)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} - \dots &= 0 \\ (\rho^2 k_2^2) \sqrt{1 + \rho^2 k_2^2} \omega + \sin \sqrt{1 + \rho^2 k_2^2} \omega &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. İkinci denklemde  $(1 + \rho^2 k_2^2)$  ile genişletirsek

$$\begin{aligned} (1 + \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^2}{2!} - (1 + \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^4}{4!} + (1 + \rho^2 k_2^2)^3 \frac{\omega^6}{6!} - \dots &= 0 \\ -1 + 1 + (1 + \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^2}{2!} - (1 + \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^4}{4!} + (1 + \rho^2 k_2^2)^3 \frac{\omega^6}{6!} - \dots &= 0 \\ -1 + \cos(1 + \rho^2 k_2^2) \omega &= 0 \\ \cos(1 + \rho^2 k_2^2) \omega = 1 \quad \text{ve} \quad (1 + \rho^2 k_2^2) \omega = 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

bulunur. Üçüncü denklemde  $(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{3/2}$  ile çarparsak

$$k_2 \left[ (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} - (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} + (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{7/2} \frac{\omega^7}{7!} - \dots = 0 \right]$$

$(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)$  terimini ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned} k_2 \left[ (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{1/2} - (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{1/2} + (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} - \dots = 0 \right] \\ k_2 \left[ (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{1/2} \omega - \sin(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{1/2} \omega \right] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dördüncü denklemde  $(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^2$  ile çarparsak

$$\begin{aligned}
& k_2 k_3 \left[ \left(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2\right)^2 \frac{\omega^4}{4!} - \left(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2\right)^3 \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \\
& k_2 k_3 \left[ -1 + 1 + \left(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2\right)^2 \frac{\omega^4}{4!} - \left(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2\right)^3 \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \\
& k_2 k_3 \left[ -1 + \left(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2\right) \frac{\omega^2}{2!} + 1 - \left(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2\right) \frac{\omega^2}{2!} + \left(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2\right)^2 \frac{\omega^4}{4!} - \dots = 0 \right]
\end{aligned}$$

ifadesi düzenlenirse

$$k_2 k_3 \left[ (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2) \frac{\omega^2}{4} - \sin^2 \frac{(1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{1/2}}{2} \right] = 0$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeler düzenlendiği takdirde

$$\begin{cases}
\rho^2 k_2^2 (1 + \rho^2 k_2^2)^{\frac{1}{2}} \omega + \sin \left[ (1 + \rho^2 k_2^2)^{\frac{1}{2}} \omega \right] = 0, \\
\cos \left[ (1 + \rho^2 k_2^2)^{\frac{1}{2}} \omega \right] = 1 \quad \text{or} \quad (1 + \rho^2 k_2^2)^{\frac{1}{2}} \omega = 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}), \\
k_2 \left[ (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{\frac{1}{2}} \omega - \sin \left[ (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{\frac{1}{2}} \omega \right] \right] = 0, \\
k_2 k_3 \left[ -1 + (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2) \frac{\omega^2}{2} + \cos \left[ (1 + \rho^2 k_2^2 + \rho^2 k_3^2)^{\frac{1}{2}} \omega \right] \right] = 0,
\end{cases} \quad (2.49)$$

olur. Burada  $\omega = 2k\pi$  dir.  $\rho k_2 = 0$ ,  $\rho k_3 = 0$  olduğunda görülür ki (2.34) ya da (2.35) denklemlerinin hepsi sağlanır. Böylece  $\rho = \text{sabit} > 0$  ve  $k_2, k_3 = \text{sabit}$  ile eğrilerinin sadece  $\rho = \text{sabit} > 0$  ve  $k_2, k_3 = 0$  olması durumunda bu sabit genişlikli eğriler  $E^4$  de çember olur. Şimdi bu çemberlerin karakterizasyonlarını verelim.  $\rho k_2, \rho k_3 = 0$  olduğunda (2.10) sistemi aşağıdaki gibi incelenebilir:

$$m_1' = m_2, \quad m_2' = -m_1, \quad m_3' = 0, \quad m_4' = 0 \quad (2.50)$$

(2.50) ifadesindeki  $m_1, m_2, m_3$  ve  $m_4$  ile verilen bilinmeyen denklemler aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$m_1'' + m_1 = 0, \quad m_2'' + m_2 = 0, \quad m_3' = 0, \quad m_4' = 0 \quad (2.51)$$

(2.51) ifadesinin genel çözümü

$$\begin{cases} m_1 = A_3 \cos \varphi + B_3 \sin \varphi, \\ m_2 = C_2 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi, \\ m_3 = L_1, \\ m_4 = L_2, \end{cases} \quad (2.52)$$

dir. Burada  $A_3, B_3, C_2, D_1, L_1$  ve  $L_2$  keyfi sabitlerdir. (2.53) ifadesi (2.52) de yerine yazılırsa

$A_3 = -D_1$ ,  $B_3 = C_2$  ve böylece çözüm kümesi

$$\{m_1 = A_3 \cos \varphi + B_3 \sin \varphi, m_2 = B_3 \cos \varphi - A_3 \sin \varphi, m_3 = L_1, m_4 = L_2\} \quad (2.53)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Sonuç olarak (2.53) denklemi (2.1) de yazılırsa; yarıçapı

$$d = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\| = \left( A_3^2 + B_3^2 + L_1^2 + L_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ olan}$$

$$\vec{\alpha}^*(\varphi) = \vec{\alpha}(\varphi) + (A_3 \cos \varphi + B_3 \sin \varphi) \vec{T} + (B_3 \cos \varphi - A_3 \sin \varphi) \vec{N} + L_1 \vec{B} + L_2 \vec{E},$$

çemberi bulunur. Eğrinin karşı noktaları  $(\vec{\alpha}^*(\varphi), \vec{\alpha}(\varphi))$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  dir.

### III. BÖLÜM

#### $E_1^4$ MINKOWSKI (LORENTZ) UZAYI

##### 3.1. $E_1^4$ Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında verilen temel tanım ve kavramların Minkowski 4-uzayındaki karşılıklarını vereceğiz.

###### **Tanım 3.1.1.(Skaler Çarpım Uzayı)**

$V$  vektör uzayı olsun.  $V$  üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise  $g$  ye  $V$  üzerinde bir skaler çarpım, bu durumda da  $V$  vektör uzayına bir skaler çarpım uzayı denir[15]

###### **Tanım 3.1.2.(Simetrik Bilineer Formun İndeksi)**

$V$  bir skaler çarpım uzayı,  $W$  da üzerindeki skaler çarpım negatif tanımlı olacak şekilde  $V$  nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda  $W$  nin boyutuna  $g$  skaler çarpımının indeksi denir.

$g$  skaler çarpımın indeksi  $v$  ise  $0 \leq v \leq \text{boy}V$  dir. Ayrıca  $V$  skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı  $g$  skaler çarpımının indeksi olarak tanımlanır[15].

###### **Tanım 3.1.3.(Lorentz Uzayı)**

$V$  skaler çarpım uzayı olsun.  $V$  nin indeksi  $v$  olmak üzere  $v=1$  ve  $\text{boy}V \geq 2$  ise  $V$  skaler çarpım uzayına bir *Lorentz Uzayı*(*Minkowski Uzayı*) denir[15].

###### **Tanım 3.1.4. $\mathbb{R}^4$ standart reel vektör uzayı üzerinde**

$$g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow g(\vec{a}, \vec{b}) = -a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \quad (3.1)$$

Lorentz iç çarpımı alınır(burada  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ),  $\mathbb{R}^4$  Afin uzayı, *Minkowski 4-uzayı* (Lorentz 4-Uzayı) olarak adlandırılır ve  $E_1^4$  ile gösterilir[15, 16].

**Tanım 3.1.5.**  $E_1^4$  uzayında herhangi bir vektör  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  olmak üzere;

- i.  $g(\vec{a}, \vec{a}) > 0$  veya  $\vec{a} = 0$  ise  $\vec{a}$  ya *spacelike* vektör,
- ii.  $g(\vec{a}, \vec{a}) < 0$  ise  $\vec{a}$  ya *timelike* vektör,
- iii.  $g(\vec{a}, \vec{a}) = 0$  ve  $\vec{a} \neq 0$  ise  $\vec{a}$  ya *lightlike* (veya *null*) vektör

denir[15,16].

**Tanım 3.1.6.**  $E_1^4$  uzayında herhangi bir vektör  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  olmak üzere;

- i.  $g(\vec{a}, \vec{a}) = 1$  ise  $\vec{a}$  ya *birim hızlı spacelike* vektör,
- ii.  $g(\vec{a}, \vec{a}) = -1$  ise  $\vec{a}$  ya *birim hızlı timelike* vektör

denir[15,16].

**Tanım 3.1.7.** Minkowski 4-uzayında  $\vec{\alpha}(s)$  eğrisi boyunca hareketli Frenet çatısı  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  ile gösterilir.

$E_1^4$  uzayında keyfi bir  $\vec{\alpha}(s)$  spacelike eğrisi için

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \\ \vec{E}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \\ \vec{E} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Frenet formülleri verilir ve burada

$$\begin{aligned}
g(\vec{T}, \vec{T}) &= 1, \quad g(\vec{N}, \vec{N}) = \varepsilon_1, \quad g(\vec{E}, \vec{E}) = \varepsilon_2, \quad g(\vec{B}, \vec{B}) = -\varepsilon_1 \varepsilon_2, \\
g(\vec{T}, \vec{N}) &= g(\vec{T}, \vec{B}) = g(\vec{T}, \vec{E}) = g(\vec{N}, \vec{B}) = 0 \\
\varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \mp 1
\end{aligned}$$

dır ve  $k_1, k_2, k_3$  sırasıyla  $\vec{\alpha}(s)$  spacelike eğrisinin 1, 2, 3. eğrilikleridir. Burada  $\varepsilon_1$  ve  $\varepsilon_2$  işaretleri arasındaki kural aşağıdaki gibi verilir[26].

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= +1 \text{ ise } \varepsilon_2 = +1 \text{ veya } -1 \\
\varepsilon_1 &= -1 \text{ ise } \varepsilon_2 = +1
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= +1 \text{ ise } \varepsilon_1 = +1 \text{ veya } -1 \\
\varepsilon_2 &= -1 \text{ ise } \varepsilon_1 = +1
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Ayrıca,  $E_1^4$  uzayında bir  $\vec{\alpha}(s)$  timelike eğrisi için

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \\ \vec{E}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \\ \vec{E} \end{bmatrix}$$

Frenet formülleri verilir. Burada,

$$g(\vec{T}, \vec{T}) = -1, \quad g(\vec{N}, \vec{N}) = g(\vec{B}, \vec{B}) = 1, \quad g(\vec{T}, \vec{N}) = g(\vec{T}, \vec{B}) = g(\vec{N}, \vec{B}) = 0$$

dır ve  $k_1, k_2, k_3$  sırasıyla  $\vec{\alpha}(s)$  timelike eğrisinin 1., 2., 3. eğrilikleridir[26].

### Tanım 3.1.8.(Norm)

Bir  $a \in E_1^4$  vektörünün normu

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{|g(\vec{a}, \vec{a})|}$$

eşitliği ile tanımlanan negatif olmayan reel sayıdır.  $g(\vec{a}, \vec{a}) = 1$  ise  $a$  vektörüne *spacelike birim vektör*,  $g(\vec{a}, \vec{a}) = -1$  ise  $a$  vektörüne *timelike birim vektör* denir.[26]

**Tanım 3.1.9.(Uzaklık)**

4-boyutlu bir Lorentz iç çarpım uzayı  $V$  ile birleşen bir Lorentz uzayı  $E_1^4$  olsun. Bir

$$d : E_1^4 \times E_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

Fonksiyonu  $\forall x, y \in \mathbb{R}_1^4$  için,  $V$  deki iç çarpım  $;$   $\| \cdot \|$  olmak üzere,

$$d(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\|$$

Şeklinde tanımlanır.  $\mathbb{R}_1^4$  in  $X$  ile  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık denir.[26]

**Tanım 3.1.10. (Işık konisi).**

$E_1^4$  uzayında

$$\Lambda = \{\vec{a} \in E_1^4 : g(\vec{a}, \vec{a}) = 0, \vec{a} \neq 0\}$$

cümlesine *Işık konisi* adı verilir[26].

$E_1^4$  uzayındaki timelike vektörler  $\Lambda$  nın içinde, lightlike (veya null) vektörler  $\Lambda$  nın üzerinde ve spacelike vektörlerde  $\Lambda$  nın dışında bulunurlar.

**Tanım 3.1.11.**  $E_1^4$  uzayındaki Lorentz ve hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^3 = \{\vec{a} \in E_1^4 \mid g(\vec{a}, \vec{a}) = 1\}$$

ve

$$H_0^3 = \{\vec{a} \in E_1^4 \mid g(\vec{a}, \vec{a}) = -1\}$$

biçiminde tanımlanır[26].

**Tanım 3.1.12.(Hiperbolik Açı)**

$\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  Lorentz uzayında iki future pointing (veya past pointing) timelike vektör olsun. Bu taktirde

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = -\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. Bu  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  vektörleri arasındaki *hiperbolik açı* denir[24,25].

**Tanım 3.1.13.(Merkez Açı)**

Lorentz uzayının bir timelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  olsun. Bu taktirde,

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. Bu  $\theta \geq 0$  reel sayısına,  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  vektörleri arasındaki *merkez açı* denir[24,25].

**Tanım 3.1.14.(Spacelike Açı)**

Lorentz uzayının bir spacelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  olsun. Bu taktirde,

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos \theta$$

olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. Bu  $0 \leq \theta < 2\pi$  reel sayısına,  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  vektörleri arasındaki *spacelike açı* denir[24,25].

**Tanım 3.1.15.(Lorentziyen Timelike Açı)**

Lorentz uzayında  $\vec{x}$  bir spacelike vektör ve  $\vec{y}$  bir timelike vektör olsun. Bu taktirde,

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\sinh \theta$$

olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. Bu  $\theta \geq 0$  reel sayısına,  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  vektörleri arasındaki *Lorentziyen timelike açı* denir[24,25].

#### IV. BÖLÜM

##### $E_1^4$ MINKOWSKI 4-UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ SPACELIKE EĞRİLER

###### 4.1.Minkowski 4-uzayında Sabit Genişlikli Spacelike Eğrilerin Karakterizasyonları

Bu kısımda, Minkowski 4-uzayında sabit genişlikli spacelike eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemler çalışılmıştır.

$(C)$ , eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan  $C^5$  sınıfından birim hızlı bir spacelike eğri olsun.  $(C)$  eğrisinin,  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  karşıt noktalarında zıt yönlü paralel  $\vec{T}$  ve  $\vec{T}^*$  teğetlere sahip olduğunu farz edelim[9]. Burada  $\vec{\alpha}(s)$  ve  $\vec{\alpha}^*(s^*)$  konum vektörlerinin yay uzunluk parametreleri sırasıyla  $s$  ve  $s^*$  dir. Karşıt noktalarda zıt yönlü paralel teğetlere sahip sabit genişlikli kapalı basit bir spacelike  $(C)$  eğrisi

$$\vec{\alpha}^*(s) = \vec{\alpha}(s) + m_1(s)\vec{T}(s) + m_2(s)\vec{N}(s) + m_3(s)\vec{B}(s) + m_4(s)\vec{E}(s) \quad (4.1)$$

ile verilebilir, burada  $m_i(s)$ ,  $(1 \leq i \leq 4)$ ,  $(C)$  nin yay uzunluğu olan  $s$  'in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Bu denklem  $s$  'ye göre diferansiyeli alınır ve spacelike eğriler için Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds} &= \vec{T} + \frac{dm_1}{ds}\vec{T} + k_1 m_1 \vec{N} + \frac{dm_2}{ds}\vec{N} + [-\varepsilon_1 k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}] m_2 \\ &+ \frac{dm_3}{ds}\vec{B} + m_3 (\varepsilon_2 k_2 \vec{N} + k_3 \vec{E}) + \frac{dm_4}{ds}\vec{E} + \varepsilon_1 k_3 m_4 \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \vec{T} \left( 1 + \frac{dm_1}{ds} - \varepsilon_1 k_1 m_2 \right) + \vec{N} \left( k_1 m_1 + \frac{dm_2}{ds} + \varepsilon_2 k_2 m_3 \right) \\ &+ \vec{B} \left( k_2 m_2 + \frac{dm_3}{ds} + \varepsilon_1 k_3 m_4 \right) + \vec{E} \left( m_3 k_3 + \frac{dm_4}{ds} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\alpha}^*}{ds} &= \vec{T}^* \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \frac{dm_1}{ds} - \varepsilon_1 m_2 k_1\right) \vec{T} + \left(m_1 k_1 + \frac{dm_2}{ds} + \varepsilon_2 m_3 k_2\right) \vec{N} \\ &\quad + \left(m_2 k_2 + \frac{dm_3}{ds} + \varepsilon_1 m_4 k_3\right) \vec{B} + \left(m_3 k_3 + \frac{dm_4}{ds}\right) \vec{C}\end{aligned}$$

elde edilir. (C) nin karşıt noktalarında  $\vec{T} = -\vec{T}^*$  olduğundan

$$\begin{cases} 1 + \frac{dm_1}{ds} - \varepsilon_1 m_2 k_1 = -\frac{ds^*}{ds}, \\ m_1 k_1 + \frac{dm_2}{ds} + \varepsilon_2 m_3 k_2 = 0, \\ m_2 k_2 + \frac{dm_3}{ds} + \varepsilon_1 m_4 k_3 = 0 \\ m_3 k_3 + \frac{dm_4}{ds} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

bulunur. (C) nin eğriliğinin  $\lim(\Delta\varphi/\Delta s) = (d\varphi/ds) = k_1(s)$  olduğu iyi bilinir. Burada

$\varphi = \int_0^s k_1(s)ds$ , (C) eğrisinin teğeti ve  $\vec{\alpha}(s)$  noktasında verilen sabit bir doğrultu arasındaki açıdır.(4.2) den aşağıdaki sistem yazılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{dm_1}{d\varphi} &= m_1' = \varepsilon_1 m_2 - f(\varphi), \quad \frac{dm_2}{d\varphi} = m_2' = -m_3 \varepsilon_2 \rho k_2 - m_1, \\ \frac{dm_3}{d\varphi} &= m_3' = -m_4 \varepsilon_1 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, \quad \frac{dm_4}{d\varphi} = m_4' = -m_3 \rho k_3\end{aligned} \quad (4.3)$$

dir. Burada  $\varphi$  ye göre türevi göstermek için (') kullanacağız. Buradan  $f(\varphi) = \rho + \rho^*$  dır ve

$\rho = \frac{1}{k_1}$  ve  $\rho^* = \frac{1}{k_1^*}$ , sırasıyla  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  noktalarındaki eğrilik yarıçaplarıdır.(4.3) den

yararlanarak  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  yok edilerek ve türevleri alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}m_1' &= \varepsilon_1 m_2 - f(\varphi) \Rightarrow m_2 = \frac{m_1' + f(\varphi)}{\varepsilon_1} \\ m_2' &= \left( \frac{m_1' + f(\varphi)}{\varepsilon_1} \right)' = \frac{(m_1'' + f'(\varphi))\varepsilon_1 + (m_1' + f(\varphi))\varepsilon_1'}{\varepsilon_1^2} = -\varepsilon_2 \rho k_2 m_3 - m_1\end{aligned}$$

ise eşitlikten

$$m_3 = \frac{-1}{\varepsilon_2 \rho k_2} \left[ \varepsilon_1 m_1'' + m_1 + \varepsilon_1 f' \right]$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin türevi alınır

$$\begin{aligned} m_3' &= \left[ \frac{-1}{\varepsilon_2 \rho k_2} \left( \varepsilon_1 m_1'' + m_1 + \varepsilon_1 f' \right) \right]' \\ &= \left( \frac{-1}{\varepsilon_2 \rho k_2} \right)' \left( \varepsilon_1 m_1'' + m_1 + \varepsilon_1 f' \right) + \frac{-1}{\varepsilon_2 \rho k_2} \left( \varepsilon_1 m_1''' + m_1' + \varepsilon_1 f'' \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

olur ve (4.3) deki  $m_3'$  ifadesi

$$m_3' = -\varepsilon_1 \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2$$

dir. (4.4) ve yukarıdaki denklemleri eşitlersek

$$m_4 = \frac{\varepsilon_2}{\rho k_3} \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' \left[ m_1'' + \varepsilon_1 m_1 + f' \right] + \frac{\varepsilon_2}{\rho^2 k_2 k_3} \left( m_1''' + \varepsilon_1 m_1' + f'' \right) - \frac{k_2}{k_3} \left( m_1' + f \right) \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.3) deki  $m_4'$  düzenlenerek

$$m_4' = -\rho k_3 m_3 = k_3 \frac{1}{\varepsilon_2 k_2} \left[ \varepsilon_1 m_1'' + m_1 + \varepsilon_1 f' \right] \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) ın türevi alınıp (4.7) denklemi ile eşitlenirse  $m_1$ ,  $f$  ve türevleri cinsinden kapalı denklem aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{\varepsilon_2}{\rho k_3} \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_2} \left( \varepsilon_1 \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 \right) \right] - \frac{k_2}{k_3} \frac{dm_1}{d\varphi} \right] - \varepsilon_2 \frac{k_3}{k_2} \left( \varepsilon_1 \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 \right) \\ &+ \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{\varepsilon_2}{\rho k_3} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho k_2} \varepsilon_1 \frac{df}{d\varphi} \right) - \frac{k_2}{k_3} f \right] - \varepsilon_2 \frac{k_3}{k_2} \varepsilon_1 \frac{df}{d\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.1.1.** Sabit genişlikli spacelike eğrileri karakterize eden genel denklem (4.7) denklemi ile verilir.

Şimdi tekrar (4.3) denklemini ele alırsak eğrinin  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  karşı noktaları arasındaki  $d$  uzaklığı eğrinin genişliğidir ve sabittir. Yani,

$$d^2 = \|\vec{d}\|^2 = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_3^2 + \varepsilon_2 m_4^2 = sbt. \quad (4.8)$$

dir. Ayrıca  $d$  vektörü  $(C)$  sabit genişlikli spacelike eğrinin çift normalidir. Buradan

$$f(\varphi) = \rho + \rho^* \text{ dir ve } \rho = \frac{1}{k_1} \text{ ve } \rho^* = \frac{1}{k_1^*}, \text{ sırasıyla } \alpha \text{ ve } \alpha^* \text{ noktalarındaki eğrilik}$$

yarıçapları olmak üzere (4.8) in türevi alınırsa  $f(\varphi) = 0$  ve  $m_1 = 0$  olma durumlarından aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$f(\varphi) = \varepsilon_1 m_2, \quad m_2' = -m_3 \varepsilon_2 \rho k_2, \quad m_3' = -\varepsilon_1 m_4 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3, \quad m_1 = 0 \quad (4.9)$$

ya da

$$m_1' = \varepsilon_1 m_2, \quad m_2' = -m_1 - m_3 \varepsilon_2 \rho k_2, \quad m_3' = -m_4 \varepsilon_1 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3 \quad (4.10)$$

eşitlikleri (4.1) eğrisini tarif eden sistemlerdir. Burada  $(\cdot)$ ,  $\varphi$  e göre diferansiyeli gösterir.

Şimdi ilk olarak  $f(\varphi) = 0$  olma durumunu inceleyelim. (4.10) denkleminde  $m_1 = sbt$  kabul edildiği durumda  $m_2 = 0$  olacaktır.

$$m_1 = -m_3 \varepsilon_2 \rho k_2, \quad m_3' = -m_4 \varepsilon_1 \rho k_3, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3 \quad (4.11)$$

(4.11) denklemlerinden  $m_3$  çekilirse

$$m_3 = -\frac{m_4'}{\rho k_3} = \frac{\left(\frac{m_3'}{\varepsilon_1 \rho k_3}\right)'}{\rho k_3} = \frac{m_3''(\varepsilon_1 \rho k_3) - m_3'(\varepsilon_1 \rho k_3)'}{(\rho k_3)^3}$$

denklemini düzenlenirse

$$\varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_3 + (\rho k_3)' m_3' - (\rho k_3) m_3'' = 0 \quad (4.12)$$

bulunur. Aynı şekilde  $m_3$  türevini alıp  $m_4$  cinsinden bulunursa

$$m_3' = -\varepsilon_1 \rho k_3 m_4, \quad m_4' = -(\rho k_3) m_3 \Rightarrow m_3 = -\frac{m_4}{\rho k_3}$$

elde edilir. Türevi alınırsa

$$m_3' = -\frac{m_4'' (\rho k_3) - m_4' (\rho k_3)'}{(\rho k_3)^2} = -\varepsilon_1 \rho k_3 m_4 \quad (4.13)$$

elde edilir.(4.13) ifadesi düzenlenirse

$$(\rho k_3)^3 \varepsilon_1 m_4 + (\rho k_3)' m_4' - (\rho k_3) m_4'' = 0 \quad (4.14)$$

bulunur. (4.12) ve (4.14) birlikte yazılırsa

$$\begin{cases} (\rho k_3) m_4'' - (\rho k_3)' m_4' - \varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_4 = 0, & \rho k_3 \neq 0, \\ (\rho k_3) m_3'' - (\rho k_3)' m_3' - \varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_3 = 0, & \rho k_3 \neq 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

ile verilen ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\xi = \int_0^{\varphi} \rho(t) k_3(t) dt$$

formunda  $\varphi$  değişken değiştirmesi yapılarak bu denklemler düzenlenirse;

$$m_3' = \frac{dm_3}{d\varphi} = \frac{dm_3}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} = \dot{m}_3 \rho k_3$$

$$m_3'' = \frac{d^2 m_3}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dm_3}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \dot{m}_3 \rho k_3 \right)$$

$$= \left( \frac{d}{d\varphi} \dot{m}_3 \right) \rho k_3 + \dot{m}_3 \frac{d}{d\varphi} (\rho k_3)$$

$$= \ddot{m}_3 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_3 (\rho k_3)'$$

bulunur. Burada  $\dot{m}_3 = \frac{dm_3}{d\zeta}$  dir. Bu değerler (4.12) de yerine yazılırsa;

$$\rho k_2 \left( \ddot{m}_3 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_3 (\rho k_3)' \right) - \varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_3 - (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 = 0$$

$$(\rho k_3)^3 \ddot{m}_3 + (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 - \varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_3 - (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 = 0$$

$$(\rho k_3)^3 \ddot{m}_3 - \varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_3 = 0$$

$$\ddot{m}_3 - \varepsilon_1 m_3 = 0 \tag{4.16}$$

bulunmuş olur.

Aynı şekilde (4.14) denkleminde de

$$m_4' = \frac{dm_4}{d\varphi} = \frac{dm_4}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} = \dot{m}_4 \rho k_3$$

$$m_4'' = \frac{d^2 m_4}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} m_4' = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dm_4}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \dot{m}_4 \rho k_3 \right)$$

$$m_4'' = \left( \frac{d}{d\varphi} \dot{m}_4 \right) \rho k_3 + \dot{m}_4 \frac{d}{d\varphi} \rho k_3 = \ddot{m}_4 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_4 (\rho k_3)'$$

elde edilir . Bu değerler (4.14) de yerine konursa;

$$\begin{aligned}
(\rho k_3) \left[ \ddot{m}_4 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_4 (\rho k_3)' \right] - (\rho k_3)' \dot{m}_4 \rho k_3 - \varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_4 &= 0 \\
(\rho k_3)^3 \ddot{m}_4 + \dot{m}_4 (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_4 - (\rho k_3)' \dot{m}_4 \rho k_3 - \varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_4 &= 0 \\
(\rho k_3)^3 \ddot{m}_4 - \varepsilon_1 (\rho k_3)^3 m_4 &= 0 \\
\ddot{m}_4 - \varepsilon_1 m_4 &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur. (4.16) ve (4.17) denklemleri açık şekilde yazılırsa sabit katsayılı

$$\frac{d^2 m_4}{d\xi^2} - \varepsilon_1 m_4 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 m_3}{d\xi^2} - \varepsilon_1 m_3 = 0, \tag{4.18}$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemleri elde edilir. Özel olarak  $\varepsilon_1 = 1$  alınır ve bu iki denklem ayrı ayrı çözülürse

$$m_3 = A \cosh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sinh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \tag{4.19}$$

ve

$$m_4 = C \cosh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sinh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \tag{4.20}$$

bulunur[5,19]. Burada  $A, B, C, D$  sabitlerdir. Buradan (4.15) ile verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümü

$$\begin{cases} m_3 = A \cosh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sinh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right), \\ m_4 = C \cosh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sinh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \end{cases} \tag{4.21}$$

olur. (4.21) sistemi (4.10) denkleminde yerine yazılırsa yani  $m_3' = -m_4 \varepsilon_1 \rho k_3$  ise

$$\begin{aligned} m_3' &= \left( A \cosh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sinh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \right)' \\ &= -\rho k_3 \left( C \cosh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sinh \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \right) \end{aligned}$$

bulunur.  $A = -D$ ,  $B = -C$  elde edilir. Buradan (4.10) sisteminin çözüm kümesi

$$\begin{cases} m_1 = c = sbt., \quad m_2 = 0, \\ m_3 = A \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \\ m_4 = -B \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt \end{cases} \quad (4.22)$$

formunda elde edilir. Böylece (4.1) ile verilen sabit genişlikli spacelike eğrisi açık olarak belirlenmiş olur. Burada  $T, N$  spacelike  $B$  ve  $E$  den birinin timelike olduğu durumdur..

Denklem (4.1) de ifade edilen eşitlikte yerine konulursa  $d^2 = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = sbt.$  olduğu görülür.

$$\vec{\alpha}^* = \vec{\alpha} + c\vec{T} + \left( A \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right) \vec{B} + \left( -B \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \vec{E}$$

ve

$$d^2 = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_3^2 + \varepsilon_2 m_4^2 = k^2$$

ise yerine yerleştirirsek

$$\begin{aligned}
& c^2 - \varepsilon_2 \left[ A \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right]^2 + \varepsilon_2 \left[ -B \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right]^2 = \\
& c^2 + A^2 \left[ -\varepsilon_2 \cosh^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \varepsilon_2 \sinh^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right] + B^2 \left[ -\varepsilon_2 \sinh^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \varepsilon_2 \cosh^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right] \\
& - \varepsilon_2 2AB \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \varepsilon_2 2AB \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt = k^2
\end{aligned}$$

ifadesinden  $k^2 = c^2 - \varepsilon_2 A^2 + \varepsilon_2 B^2$  sabit genişlikli spacelike eğri olmuş olur. Burada  $\varepsilon_2 = \mp 1$  dir.

Şimdi de  $\varepsilon_1 = -1$  alınırsa (4.18) genel çözümü

$$m_3 = A \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \quad (4.23)$$

ve

$$m_4 = C \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \quad (4.24)$$

bulunur[5, 19]. Burada  $A, B, C, D$  sabitlerdir. Buradan  $\varepsilon = -1$  olduğunda (4.15) ile verilen denklemlerin genel çözümler

$$\begin{cases} m_3 = A \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right), \\ m_4 = C \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \end{cases} \quad (4.25)$$

olur.

(4.25) sistemi (4.10) denklemindeki  $m_3' = -m_4 \varepsilon_1 \rho k_3$  ifadesinin yerine yazılırsa ve  $\varepsilon = -1$  alındığında

$$m_3' = \left( A \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \right)' = \rho k_3 \left( C \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \right)$$

bulunur. (4.10) denklemi (4.15) denkleminde yerine yazılırsa  $A = -D$ ,  $B = C$  elde edilir.

Buradan (4.10) sisteminin çözümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{cases} m_1 = c = s b t., \quad m_2 = 0, \\ m_3 = A \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \\ m_4 = B \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \end{cases} \quad (4.26)$$

formunda elde edilir. Böylece (4.1) ile verilen sabit genişlikli spacelike eğrisi belirlenmiş olur.

Denklem (4.1) de ifade edilen eşitlikte (4.26) yerine konulursa  $d^2 = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = s b t.$  olduğu görülür.

$$\vec{\alpha}^* = \vec{\alpha} + c \vec{T} + \left( A \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right) \vec{B} + \left( B \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \vec{E}$$

$$\|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_3^2 + \varepsilon_2 m_4^2 = k^2$$

İfadesini yerine yerleştirirsek

$$c^2 + \varepsilon_2 \left[ A \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right]^2 + \varepsilon_2 \left[ B \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right]^2 =$$

$$c^2 + A^2 \left[ \varepsilon_2 \cos^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \varepsilon_2 \sin^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right] + B^2 \left[ \varepsilon_2 \sin^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \varepsilon_2 \cos^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right]$$

$$+ \varepsilon_2 2AB \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \varepsilon_2 2AB \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt = k^2$$

ifadesinden  $k^2 = c^2 + \varepsilon_2 A^2 + \varepsilon_2 B^2$  sabit genişlikli spacelike eğri olmuş olur. Burada  $\varepsilon_2 = +1$  dir. Yani  $k^2 = c^2 + A^2 + B^2$  dir.  $N$  nin timelike diğerlerinin spacelike olduğu durumdur.

Şimdi  $m_1 \neq c \neq s$  bt. durumunda  $m_1$  türevleri cinsinden yazarsak (4.10) denklemini düzenlersek

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 m_2 &= m_1' \Rightarrow m_2' = \varepsilon_1 m_1'' = -\varepsilon_2 \rho k_2 m_3 - m_1 \\ m_3 &= \frac{-\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\rho k_2} (m_1'' + m_1) \\ m_3' &= \left( \frac{-\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\rho k_2} \right)' (m_1'' + m_1) + \frac{-\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\rho k_2} (m_1''' + m_1')\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $m_3' = -\varepsilon_1 \rho k_3 m_4 - \varepsilon_1 \rho k_2 m_1'$  olduğundan her iki denklemi eşitlersek

$$m_4 = \left( \frac{\varepsilon_2}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' m_1 + \left( \frac{\varepsilon_2}{\rho^2 k_2 k_3} - \frac{k_2}{k_3} \right) m_1' + \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right) m_1'' + \left( \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\rho^2 k_2 k_3} \right) m_1'''$$

bulunur. Ayrıca  $m_4$  türevi alınırsa

$$m_4' = -\rho k_3 m_3 = \rho k_3 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\rho k_2} (m_1'' + m_1) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{k_3}{k_2} (m_1'' + m_1)$$

oluşur Bulduğumuz eşitliklerden aşağıdaki genel denklem elde edilir. Ayrıca (4.7) denkleminde  $f(\varphi) = 0$  yazılırsa

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{\rho k_3} \left[ \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{\varepsilon_2}{\rho k_2} \left( \varepsilon_1 \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 \right) \right] - \frac{k_2}{k_3} \frac{dm_1}{d\varphi} \right] - \varepsilon_2 \frac{k_3}{k_2} \left( \varepsilon_1 \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 \right) = 0$$

olur.

Şimdi (4.9) sistemine dönelim. Bu denklemde  $m_2, m_3$  ve türevleri yok edilerek  $f(\varphi) \neq 0$  olduğu durumlarda  $\varphi$  değişken değiştirme metoduyla ve

$$u = \int_0^\varphi \mu(t) dt, \mu = \rho k_3 \text{ alırsak}$$

$$\frac{dm_3}{d\varphi} = \frac{dm_3}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\varepsilon_1 \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2$$

$$\frac{dm_3}{du} \cdot \rho k_3 = -\varepsilon_1 \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2$$

$$\frac{dm_3}{du} = -\varepsilon_1 m_4 - \frac{\rho k_2}{\rho k_3} m_2$$

bulunur. Aynı şekilde

$$\frac{dm_4}{d\varphi} = \frac{dm_4}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\rho k_3 m_3$$

$$\frac{dm_4}{du} \cdot \rho k_3 = -\rho k_3 m_3 \Rightarrow \frac{dm_4}{du} = -m_3$$

elde ederiz.

$$\frac{d^2 m_3}{du^2} = \frac{d}{du} \left( -\varepsilon_1 m_4 - \frac{\rho k_2}{\rho k_3} m_2 \right) = -\varepsilon_1 \frac{dm_4}{du} - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right)$$

ise  $\frac{dm_4}{du} = -m_3$  yerine yazılıp düzenlendiği takdirde

$$\frac{d^2 m_3}{du^2} - \varepsilon_1 m_3 = -\frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) \quad (4.27)$$

denklemini elde edilir.  $\frac{d^2 m_3}{du^2} - \varepsilon_1 m_3 = 0$  çözümü ise  $\varepsilon_1 = 1$  alınırsa  $T, N$  spacelike  $E$  ve  $B$

den biri timelike olduğu özel bir durum aşağıdaki şekilde bulunur:

$$F_1(\varphi) = A_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt$$

olarak alınırsa çözüm

$$m_3 = F_1(\varphi) - \int_0^\varphi \cosh[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}\frac{dm_3}{du} &= A_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \sinh[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ &\quad - \cosh[u(\varphi) - u(\varphi)] \rho(t) k_2 f(t) \frac{d\varphi}{du} + \cosh[u(\varphi) - u(0)] \rho(t) k_2 f(0) \frac{d0}{du}\end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{dm_3}{du} = A_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \sinh[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt - \frac{\rho k_2}{\rho k_3} f(t)$$

bulunur. İkinci türev alındığında

$$\begin{aligned}\frac{d^2 m_3}{du^2} &= A_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \cosh[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ &\quad - \sinh[u(\varphi) - u(\varphi)] \rho \cdot k_2 \cdot f \frac{d\varphi}{du} + \sinh[u(\varphi) - u(0)] \rho \cdot k_2 \cdot f \frac{d0}{du} - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right)\end{aligned}$$

bulunur. (4.27) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^2 m_3}{du^2} - m_3 &= A_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \cosh[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) \\ &\quad - A_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - B_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \cosh[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt\end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki (4.27) eşitliğinin sağlandığı görülür:

(4.17) denkleminde  $\varepsilon_1 = -1$  yazılırsa  $\varepsilon_2 = +1$  olur.  $N$  timelike diğerlerinin spacelike olduğu

durumdur  $\frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = 0$  nin özel çözümü

$$F_2(\varphi) = A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt$$

olarak alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$m_3 = F_2(\varphi) + \int_0^{\varphi} \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \quad (4.29)$$

(4.29) ifadesinin sağladığını göstermek için aşağıdaki işlemleri yaparak yerine yerleştirelim.

$$\begin{aligned} \frac{dm_3}{du} = & -A_1 \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt - \int_0^{\varphi} \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ & + \cos[u(\varphi) - u(\varphi)] \rho(t) k_2 f(t) \frac{d\varphi}{du} - \cos[u(\varphi) - u(0)] \rho(t) k_2 f(0) \frac{d0}{du} \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılsa

$$\frac{dm_3}{du} = -A_1 \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt - \int_0^{\varphi} \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt + \frac{\rho k_2}{\rho k_3} f(t)$$

bulunur. İkinci türev alındığında

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m_3}{du^2} = & -A_1 \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt - B_1 \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt - \int_0^{\varphi} \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ & - \sin[u(\varphi) - u(\varphi)] \rho k_2 \cdot f \frac{d\varphi}{du} + \sin[u(\varphi) - u(0)] \rho k_2 \cdot f \frac{d0}{du} - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. (4.27) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = & -A_1 \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt - B_1 \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt - \int_0^{\varphi} \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) \\ & + A_1 \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt + \int_0^{\varphi} \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılsa aşağıdaki (4.27) eşitliğinin sağlandığı görülür.

$$\frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = -\frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right)$$

Benzer yollarla  $m_4$  ve  $m_2$  cinsinden yazarsak

$$\frac{dm_3}{d\varphi} = \frac{dm_3}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\varepsilon_1 \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2$$

$$\frac{dm_3}{du} \cdot \rho k_3 = -\varepsilon_1 \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2$$

$$\frac{dm_3}{du} = -\varepsilon_1 m_4 - \frac{k_2}{k_3} m_2$$

ve

$$\frac{dm_4}{d\varphi} = \frac{dm_4}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\rho k_3 m_3$$

$$\frac{dm_4}{du} \cdot \rho k_3 = -\rho k_3 m_3 \Rightarrow \frac{dm_4}{du} = -m_3$$

$$\frac{dm_4}{d\varphi} = -m_3$$

ise denklemler düzenlenirse

$$\frac{dm_3}{du} = -\frac{d^2 m_4}{du^2} = -\varepsilon_1 m_4 - \frac{k_2}{k_3} m_2$$

ve düzenlenerek

$$\frac{d^2 m_4}{du^2} - \varepsilon_1 m_4 = \frac{k_2}{k_3} m_2 \quad (4.29)$$

bulunur. Aynı şekilde  $\varepsilon_1 = 1$  aldığımız takdirde

$$m_4 = -A_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - B_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \sinh [u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \quad (4.30)$$

bulunur. Aynı şekilde  $\varepsilon_1 = -1$  alınırsa

$$m_4 = -A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \sin [u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt$$

Sonuç olarak (4.27) ve (4.29) denklemlerinin çözümleri

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0, \\ m_2 = \varepsilon_1 f(\varphi), (\varepsilon_1 = \mp 1) \\ m_3 = A_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \cosh[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt, (\varepsilon_1 = 1) \\ m_3 = A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt, (\varepsilon_1 = -1) \\ m_4 = -B_1 \cosh \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A_1 \sinh \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \sinh[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt, (\varepsilon_1 = 1) \\ m_4 = B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt, (\varepsilon_1 = -1), \end{array} \right. \quad (4.31)$$

formunda genel çözüm elde edilir.  $A_1$ ,  $B_1$  reel sabitleri gösterir.

Bundan başka  $m_1 = 0$  olma durumunda (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{\varepsilon_2}{\rho k_3} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho k_2} \frac{df}{d\varphi} \right) - \frac{k_2}{k_3} f \right] - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{d\varphi} = 0 \quad (4.32)$$

(4.32) formunda  $\varphi$  değişken değiştirme ile  $w = \int_0^\varphi \rho k_2 d\varphi$  yapılırsa

$$\frac{d}{dw} \left[ \frac{k_2}{k_3} \varepsilon_1 \left( \frac{d^2 f}{dw^2} - \varepsilon_2 f \right) \right] - \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{dw} = 0 \quad (4.33)$$

ifadesi (4.1) deki denklemde sabit genişlikli spacelike eğrileri gösterir.

Şimdiye kadar karşılıklı paralel zıt yönlü paralel teğetlere sahip uzay eğrileri ele alındı. Şimdi ise  $P$  den başka bir tek  $Q$  noktasına karşılık gelen eğride her  $P$  noktasında aynı düzlemde olması için  $E_1^4$  de  $(C)$  birim hızlı basit kapalı eğri düşünelim. Sonra  $E_1^4$  de sabit genişlikli uzay eğrisi ile ilgili aşağıdaki teoremi düşünelim.

**Teorem.4.1.2.** .  $(C)$ , eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan  $C^5$  sınıfından birim hızlı bir spacelike eğri olsun.  $(C)$  eğrisinin  $P$  ve  $Q$  karşıt noktalarındaki  $\vec{T}$  ve  $\vec{T}^*$  teğetleri paralel ve zıt yönlü olsun. Eğer  $(C)$  nin bu noktalarını birleştiren kiriş bir çift normal ise, bu takdirde  $(C)$

sabit genişliğe sahiptir. Tersine eğer (C) sabit genişlikli spacelike bir eğri ise, bu takdirde (C) nin her normali çift-normaldir.

**İspat:** (C) nin s yay uzunluk parametresine sahip  $m_1, m_2, m_3$  ve  $m_4$  fonksiyonları ifade edilen

$\vec{d} = \vec{\alpha}^* - \vec{\alpha} = m_1\vec{T} + m_2\vec{N} + m_3\vec{B} + m_4\vec{E}$  vektörü bir çift-normal olsun. Sonra

$$\langle \vec{d}, \vec{T}^* \rangle = -\langle \vec{d}, \vec{T} \rangle = m_1 = 0$$

ile verilebilir .(4.2) denkleminde yararlanarak

$$m_2 \frac{dm_2}{ds} + m_3 \frac{dm_3}{ds} + m_4 \frac{dm_4}{ds} = 0$$

bulunur.

Böylece  $\varepsilon_1 m_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_3^2 + \varepsilon_2 m_4^2 = sbt$  olduğu ortaya çıkar ve (C) sabit genişlikli spacelike eğridir.

Aksine olarak  $\|\vec{d}\|^2 = m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_3^2 + \varepsilon_2 m_4^2 = sbt$  ise  $m_1 = 0$  olduğunu gösterir.  $\vec{d}$  de  $\vec{T}$  ve  $\vec{T}^*$  dik olduğu anlamına gelir. Yani  $\vec{d}, (C)$  de bir çift -normaldir.

Zıt noktalarda zıt yönlerde paralel teğetlere sahip basit kapalı spacelike eğri (4.28) sistemi tarafından verilmiştir. Bu durumda  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  arasında eğrinin bir çift karşılıklı noktaları  $(\alpha^*(\varphi), \alpha(\varphi))$  dir. Böylece (4.31) sisteminden

$\alpha^*(0) = \alpha^*(2\pi)$  ise  $f$  fonksiyonu  $f(\varphi) = \rho + \rho^*$  ise  $f(0) = f(2\pi)$  dir. Böylece  $\varepsilon_1 = 1$  ise

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}^*(0) &= \vec{\alpha}(0) + f(0)\vec{N} + f_1(0)\vec{B} + f_2(0)\vec{E} \\ &= \vec{\alpha}(0) + f(0)\vec{N} + A_1\vec{B} - B_1\vec{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(2\pi) &= \vec{\alpha}(2\pi) + f(2\pi).\vec{N} + \left[ f_1(2\pi) - \int_0^{2\pi} \cosh[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt \right] \vec{B} \\ &\quad + \left[ f_2(2\pi) + \int_0^{2\pi} \sinh[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt \right] \vec{E} \end{aligned}$$

$$A_1 \cosh \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt + B_1 \sinh \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt - \int_0^{2\pi} \cosh [u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = A_1$$

$$-B_1 \cosh \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt - A_1 \sinh \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt + \int_0^{2\pi} \sinh [u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = -B_1$$

denklemlerinden aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

$$\cosh \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 0$$

ayrıca

$$\int_0^{2\pi} \cosh [u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = 0 \text{ ve } \int_0^{2\pi} \sinh [u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = 0$$

dır

Sonuç olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (4.34)$$

$ds = \rho d\varphi$  eşitliğini kullanarak  $\int_C k_3 ds = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$  formülü verilebilir.  $\varepsilon_1 = -1$  alındığında

da aynı eşitlikler gelir. Bu  $(C)$  de üçüncü eğriliğin sıfır olduğu anlamına gelir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 4.1.1.** Sabit genişlikli spacelike  $(C)$  basit kapalı eğrinin toplam üçüncü eğriliği

$2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$  dir. Ayrıca  $\frac{k_2}{k_3} = a = \text{sabit}$  alırsak (4.33) denkleminde

$$\frac{d}{dw} \left[ \frac{k_2}{k_3} \varepsilon_1 \left( \frac{d^2 f}{dw^2} - \varepsilon_2 f \right) \right] - \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{dw} = 0 \text{ denkleminde } \frac{k_2}{k_3} = a = \text{sabit} \text{ ise}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ \varepsilon_1 a \left( \frac{d^2 f}{dw^2} - \varepsilon_2 f \right) \right] - \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

$$a \frac{d}{dw} \left[ \varepsilon_1 \left( \frac{d^2 f}{dw^2} - \varepsilon_2 f \right) \right] - \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

$$a \varepsilon_1 \frac{d^3 f}{dw^3} - a \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{df}{dw} - \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

$$\varepsilon_1 \frac{d^3 f}{dw^3} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{df}{dw} - \frac{1}{a^2} \frac{df}{dw} = 0$$

$$\frac{d^3 f}{dw^3} - \left( \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_1 a^2} \right) \frac{df}{dw} = 0$$

$$\frac{d^3 f}{dw^3} - K \frac{df}{dw} = 0, \quad (4.35)$$

Burada  $K = \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_1 a^2}$  dır.  $K \neq \pm 1$  olduğunu varsayalım (4.35) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$f = A_2 \sinh \int_0^\varphi K \rho k_2 dt + B_2 \cosh \int_0^\varphi K \rho k_2 dt + C_1 \quad (4.36)$$

Burada  $A_2$ ,  $B_2$  ve  $C_1$  reel sabitlerdir. (C) basit kapalı eğri yani  $\alpha^*(0) = \alpha^*(2\pi)$

$$f(0) = f(2\pi)$$

$$f(2\pi) = A_2 \sinh \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt + B_2 \cosh \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt + C_1$$

$$f(0) = B_2 \cos 0 + C_1 = B_2 + C_1$$

$$\sinh \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt = 0 \quad \cosh \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt = 1$$

$ds = \rho dt$  eşitliği kullanarak  $\int_C k_2 ds = 2 \frac{n}{K} \pi$ , ( $K, n \in \mathbb{Z}$ ) formülü olarak verilebilir. (C) nin

ikinci eğrilik integrali  $2 \frac{n}{K} \pi$ , ( $K, n \in \mathbb{Z}$ ) olduğu söylenebilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 4.1.2.**  $a = k_2 / k_3 = \text{sabit}$  olan sabit genişliğe sahip basit kapalı  $(C)$  eğrisinin toplam ikinci eğriliği  $n \in \mathbb{Z}$  ve  $K = \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_1 a^2}$  de  $2 \frac{n}{K} \pi$  dir.

#### 4.2. $E_1^4$ Minkowski 4-Uzayında Sabit Genişlikli Spacelike Eğrilerin Periyodik

##### Olması Kriteri

Farz edelim ki  $(C)$  sabit genişlikli bir spacelike eğri ve  $\vec{\alpha}(s)$  genel bir noktanın konum vektörünü göstere.  $(C)$  kapalı bir eğri ise  $\vec{\alpha}(s)$  konum vektörü  $\omega = 2\pi$  periyotlu bir periyodik fonksiyondur. Burada  $\omega$ ,  $(C)$  eğrisinin toplam uzunluğudur. Bu takdirde  $k_1(s)$  eğriliği ve  $k_2(s)$  ve  $k_3(s)$  burulması aynı periyotta periyodiktir. Ancak  $k_1(s)$  ve  $k_2(s)$  ve  $k_3(s)$  nin periyodik olması ve eğrinin kapalılığı bir spacelike eğrinin sabit genişlikli olması için yeterli değildir. Yani eğer bir spacelike eğri kapalı (periyodik) ise, sabit genişlikli bir eğri ya da sabit genişlikli olmayan bir eğri olabilir. Bu yüzden bir spacelike eğrinin sabit genişlikli olması durumunu belirlemek için [6] da verilen benzer yollar takip edilerek (4.10) sistemi kullanılabilir.

Bunun için, ilk önce  $(C)$  spacelike eğrisi üzerindeki genel bir noktada

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k_1 \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\varepsilon_1 k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \varepsilon_2 k_2 \vec{N} + k_3 \vec{E}, \quad \frac{d\vec{E}}{ds} = k_3 \varepsilon_1 \vec{B}. \quad (4.37)$$

Frenet formüllerini düşünelim.  $\varphi$  ve  $\frac{d\varphi}{ds} = k_1 = \frac{1}{\rho}$  kullanılarak (4.37) formülleri

$$\frac{d\vec{T}}{d\varphi} = \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{d\varphi} = -\varepsilon_1 \vec{T} + \rho k_2 \vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{d\varphi} = \varepsilon_2 \rho k_2 \vec{N} + \rho k_3 \vec{E}, \quad \frac{d\vec{E}}{d\varphi} = \rho k_3 \vec{B}$$

formunda yazılabilir. Ayrıca  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}$  vektörleri koordinat formunda

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^4 t_i \vec{e}_i, \quad \vec{N} = \sum_{i=1}^4 n_i \vec{e}_i, \quad \vec{B} = \sum_{i=1}^4 b_i \vec{e}_i, \quad \vec{E} = \sum_{i=0}^4 \hat{e}_i \vec{e}_i \quad (4.38)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  vektörleri  $E_1^4$  uzayının ortonormal bazı olduğundan (4.38) ve türevleri (4.37) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{llll} \frac{dt_1}{d\varphi} = n_1, & \frac{dt_2}{d\varphi} = n_2, & \frac{dt_3}{d\varphi} = n_3, & \frac{dt_4}{d\varphi} = n_4 \\ \frac{dn_1}{d\varphi} = -\varepsilon_1 t_1 + \rho k_2 b_1, & \frac{dn_2}{d\varphi} = -\varepsilon_1 t_2 + \rho k_2 b_2, & \frac{dn_3}{d\varphi} = -\varepsilon_1 t_3 + \rho k_2 b_3, & \frac{dn_4}{d\varphi} = -\varepsilon_1 t_4 + \rho k_2 b_4 \\ \frac{db_1}{d\varphi} = \rho k_3 \hat{e}_1 + \varepsilon_2 \rho k_2 n_1, & \frac{db_2}{d\varphi} = \rho k_3 \hat{e}_2 + \varepsilon_2 \rho k_2 n_2, & \frac{db_3}{d\varphi} = \rho k_3 \hat{e}_3 + \varepsilon_2 \rho k_2 n_3, & \frac{db_4}{d\varphi} = \rho k_3 \hat{e}_4 + \varepsilon_2 \rho k_2 n_4 \\ \frac{d\varepsilon_1}{d\varphi} = \rho k_3 b_1, & \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} = \rho k_3 b_2, & \frac{d\varepsilon_3}{d\varphi} = \rho k_3 b_3, & \frac{d\varepsilon_4}{d\varphi} = \rho k_3 b_4 \end{array} \right. \quad (4.39)$$

lineer diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (4.39) denklemlerinden

$\{t_1, n_1, b_1, \hat{e}_1\}, \{t_2, n_2, b_2, \hat{e}_2\}, \{t_3, n_3, b_3, \hat{e}_3\}, \{t_4, n_4, b_4, \hat{e}_4\}$  cümleleri

$$\frac{d\psi_1}{d\varphi} = \psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{d\varphi} = -\psi_1 + \rho k_2 \psi_3, \quad \frac{d\psi_3}{d\varphi} = \rho k_3 \psi_4 - \rho k_2 \psi_2, \quad \frac{d\psi_4}{d\varphi} = \rho k_3 \psi_3 \quad (4.40)$$

Eğer  $(C)$  eğrisi sabit genişlikli bir eğri ise, (4.40) ve (4.10) sistemleri aynı olmalıdır. Bu yüzden,

$\psi_1 = m_1, \psi_2 = m_2, \psi_3 = m_3, \psi_4 = m_4$  tür. Kısaca (4.10) ya da (4.40) denklem sistemi

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = A(\varphi)\psi, \quad (4.41)$$

formunda ifade edilir. Burada

$$\psi = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}, \quad A(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \rho k_3 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Açık olarak, (4.41) denklemi,  $a_{ij}(t)$   $\omega$  periyotlu sürekli kabul edilmek üzere

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi, \\ \varphi = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (n \geq 4) \end{cases} \quad (4.42)$$

genel lineer diferansiyel denkleminin özel bir durumudur [6,14].  $\psi_i(0) = x_i, (i=1,2,\dots,n)$  başlangıç koşulu olsun.

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

ve

$$\psi(t, x) = [m_1(t, x) m_2(t, x) \dots m_n(t, x)]^T.$$

denklemlerini ele alalım. Bu takdirde (4.42) denklemi [6] dan iyi bilinir ki  $\frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi$ ,

$\psi(0) = x$  formunda yazılabilir. Eğer

$$\int_0^{\omega} A(\xi) \psi(\xi, x) d\xi = 0$$

ve

$$\begin{cases} \psi(t, x) = \{E + M(t)\} x, \quad (E = \text{birim matris}), \\ M(t) = IA(t) + I^{(2)}A(t) + \cdots + I^{(n)}A(t) + \cdots, \\ (IA)(t) \equiv I^{(1)}A(t) = \int_0^t A(\xi) d\xi \\ (I^{(n)}A)(t) = \int_0^t A(\xi) (I^{(n-1)}A)(\xi) d\xi, \quad n > 1. \end{cases} \quad (4.43)$$

ise, bu denklemin  $\psi(t, x)$  çözümü  $\omega$  periyodunda periyodiktir.

Şimdi Teorem.1.2.1 i (4.18) sistemine uygulayalım. Eğer  $M(\omega)=0$  ise,  $\omega$  periyotlu  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}$  birim vektör fonksiyonları vardır, öyle ki  $\{t_i, n_i, b_i, \varepsilon_i\}$ ,  $(i=1,2,3,4)$  fonksiyonlarının her bir kümesi  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  başlangıç koşuluna karşılık gelen (4.39) denkleminin bir çözümünü oluşturur.  $(C)$  eğrisi

$$\vec{\alpha}(s) = \int_0^s \vec{T}(s) ds \quad ya \quad da \quad \vec{\alpha}(\varphi) = \int_0^\omega \rho(\varphi) \vec{T}(\varphi) d\varphi$$

denklemleriyle tanımlanabilir. Burada  $\vec{T}$ , (4.42) denklemleri tarafından belirlenen

$$\begin{bmatrix} t_i \\ n_i \\ b_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} = \{E + M(\varphi)\} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix}, \quad (i=1,2,3,4) \quad (4.44)$$

denklemleri kullanılarak bulunabilir.  $(A_1, A_2, A_3, A_4), (B_1, B_2, B_3, B_4), (C_1, C_2, C_3, C_4)$  ve  $(D_1, D_2, D_3, D_4)$  bir orta normal çatı oluşturmak üzere, başlangıç koşulu  $t_i(0) = A_i, n_i(0) = B_i, b_i(0) = C_i, \varepsilon_i = D_i, (i=1,2,3,4)$  olarak alınırsa, bu takdirde (4.44) den

$$t_i = (1 + m_{11}) A_i + m_{12} B_i + m_{13} C_i + m_{14} D_i; \quad (i=1,2,3,4) \quad (4.45)$$

bulunur.  $(C)$  eğrisi sabit genişlikli aynı zamanda  $\omega$  periyotlu periyodik bir eğri olduğunda

$$\int_0^\omega \rho t_i d\varphi = 0 \quad (4.46)$$

dır. Buradan (4.45) ve (4.46) dan

$$A_i \int_0^\omega \rho (1 + m_{11}) d\varphi + B_i \int_0^\omega \rho m_{12} d\varphi + C_i \int_0^\omega \rho m_{13} d\varphi + D_i \int_0^\omega \rho m_{14} d\varphi = 0; \quad (i=1,2,3,4)$$

elde edilir. Bu sistemde katsayılar determinantı  $\Delta \neq 0$  olduğundan, bir eğri için sabit genişlikli spacelike eğri olma koşulunu sağlayan

$$\int_0^{\omega} \rho(1+m_{11}) d\varphi = 0 = \int_0^{\omega} \rho m_{12} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{13} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{14} d\varphi \quad (4.47)$$

denklemleri elde edilir. Burada  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  olduğundan  $\omega = 2\pi$  periyodu alınabilir. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 4.2.1.**  $\rho(\varphi) > 0$  ve  $k_2(\varphi)$  ve  $k_3(\varphi)$   $\omega$  periyotlu sürekli periyodik fonksiyonlar,  $(C)$ ,  $E_1^4$  de bir eğri olsun. Bu takdirde  $(C)$  sabit genişlikli spacelike eğri aynı zamanda  $\omega$  periyotlu periyodik bir eğridir ancak ve ancak

$$M(\omega) = 0, \int_0^{\omega} \rho(1+m_{11}) d\varphi = 0 = \int_0^{\omega} \rho m_{12} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{13} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{14} d\varphi, \quad (4.48)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada

$$\begin{cases} M(t) = IA(t) + I^{(2)}A(t) + \dots + I^{(n)}A(t) + \dots, \\ A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \rho k_3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.49)$$

ve  $m_{ij}(t)$ ,  $M(t)$  matrisinin elemanlarıdır. (4.45) eşitliğinde

$$IA(t) = \begin{bmatrix} 0 & \int_0^s dt & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 \int_0^s dt & 0 & \int_0^s \rho k_2 dt & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \int_0^s \rho k_3 dt \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \int_0^s \rho k_3 dt & 0 \end{bmatrix}$$

$$I^2 A(s) = \int_0^s A(t) IA(t) dt$$

olur. Ayrıca

$$A(s)IA(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \rho k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \int_0^s dt & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 \int_0^s dt & 0 & \int_0^s \rho k_2 dt & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \int_0^s \rho k_3 dt \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \int_0^s \rho k_3 dt & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \int_0^s dt & 0 & \int_0^s \rho k_2 dt & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \int_0^s dt + \rho k_2 \varepsilon_2 \int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \rho k_2 \int_0^s \rho k_3 dt \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho k_2 \int_0^s dt & 0 & \varepsilon_2 \rho k_2 \int_0^s \rho k_2 dt + \rho k_3 \varepsilon_1 \int_0^s \rho k_3 dt & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho k_3 \int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \varepsilon_1 \rho k_3 \int_0^s \rho k_3 dt \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$I^2 A(r) = \int_0^r A(t) IA(t) dt$$

eşitliğinden

$$I^2 A(r) = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \int_0^r \int_0^s dt & 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_2 dt ds & 0 \\ 0 & -\int_0^r \int_0^s (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \rho k_2 \rho k_2) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_2 \rho k_3 dt ds \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^r \int_0^s \rho k_2 dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s (\varepsilon_2 \rho k_2 \rho k_2 + \varepsilon_1 \rho k_3 \rho k_3) dt ds & 0 \\ 0 & \int_0^r \int_0^s \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho k_3 \rho k_2 dt ds & 0 & \varepsilon_1 \int_0^r \int_0^s \rho k_3 \rho k_3 dt ds \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer olarak algoritmaya devam edilirse

$$\lambda(\xi) = \rho(\xi) k_2(\xi), \mu(\xi) = \rho(\xi) k_3(\xi),$$

$$A(s) \cdot I^2 A(r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \rho k_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \int_0^r \int_0^s dt & 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_2 dt ds & 0 \\ 0 & -\int_0^r \int_0^s (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho k_2 \rho k_2) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_2 \rho k_3 dt ds \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^r \int_0^s \rho k_2 dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s (\varepsilon_2 \rho k_2 \rho k_2 + \varepsilon_1 \rho k_3 \rho k_3) dt ds & 0 \\ 0 & \int_0^r \int_0^s \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho k_3 \rho k_2 dt ds & 0 & \varepsilon_1 \int_0^r \int_0^s \rho k_3 \rho k_3 dt ds \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\int_0^r \int_0^s (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \lambda \lambda) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda \mu dt ds \\ \int_0^r \int_0^s dt ds - \lambda \int_0^r \int_0^s \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda dt ds & 0 & -\varepsilon_1 \int_0^r \int_0^s \lambda dt ds + \lambda \int_0^r \int_0^s (\varepsilon_2 \lambda \lambda + \varepsilon_1 \mu \mu) dt ds & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \lambda \int_0^r \int_0^s (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \lambda \lambda) dt ds + \mu \int_0^r \int_0^s \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \mu dt ds & 0 & \varepsilon_2 \lambda \int_0^r \int_0^s \lambda \mu dt ds + \mu \int_0^r \int_0^s \varepsilon_1 \mu \mu dt ds \\ -\mu \int_0^r \int_0^s \varepsilon_2 \lambda dt ds & 0 & \mu \varepsilon_1 \int_0^r \int_0^s (\varepsilon_2 \lambda \lambda + \varepsilon_1 \mu \mu) dt ds & 0 \end{bmatrix}$$

$$I^3 A(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\int_0^p \int_0^r \int_0^s (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \lambda \lambda) dt ds dr & 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s \lambda \mu dt ds dr \\ \int_0^p \int_0^r \int_0^s (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \lambda) dt ds dr & 0 & -\int_0^p \int_0^r \int_0^s [\varepsilon_1 \lambda - \lambda(\varepsilon_2 \lambda \lambda + \varepsilon_1 \mu \mu)] dt ds dr & 0 \\ 0 & -\int_0^p \int_0^r \int_0^s (\lambda(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \lambda \lambda) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \mu) dt ds dr & 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s (\varepsilon_2 \lambda \mu \lambda + \varepsilon_1 \mu \mu \mu) dt ds dr \\ -\int_0^p \int_0^r \int_0^s \varepsilon_2 \mu \lambda dt ds dr & 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s \mu(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \lambda + \mu \mu \mu) dt ds dr & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer olarak algoritmaya devam edilirse

$$I^4 A(\phi) = \int_0^\phi A(t) I^3 A(t) dt \quad \text{ise} \quad I^3 A(p) = R_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$A(s) \cdot I^3 A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \rho k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

$$I^4 A(\phi) =$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \lambda) dt ds dr dp & 0 & -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\varepsilon_1 \lambda - \lambda(\varepsilon_2 \lambda \lambda + \varepsilon_1 \mu \mu)] dt ds dr dp & 0 \\ 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \lambda)[1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \lambda] + \lambda \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \lambda \mu] dt ds dr dp & 0 & -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\varepsilon_1 \mu \lambda - \lambda(\varepsilon_2 \lambda \mu \lambda + \varepsilon_1 \mu \mu \mu)] dt ds dr dp \\ -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\varepsilon_2 \lambda (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \lambda) + \varepsilon_2 \mu \mu \lambda] dt ds dr dp & 0 & -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + \lambda \lambda - \mu \mu) - \mu \mu (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \lambda + \mu \mu)] dt ds dr dp & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \mu [\lambda(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \lambda \lambda) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \lambda \mu] dt ds dr dp & 0 & \varepsilon_1 \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\mu (\varepsilon_2 \lambda \mu \lambda + \varepsilon_1 \mu \mu \mu)] dt ds dr dp \end{bmatrix}$$

olur. Bu şekilde işlemlere devam edildiğinde; (4.43) ve (4.49) denklemlerinden  $M(t)$  matrisi elde edilebilir ve her  $m_{ij}$  sonsuz birçok integrasyonu içerir. Bu nedenle (4.48) koşulu

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^\omega \rho(\varphi) d\varphi - \int_0^\omega \int_0^r \int_0^s \varepsilon_1 \rho(\varphi) ds dt d\varphi + \int_0^\omega \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \varepsilon_1 [\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \lambda(p) \lambda(s)] dt ds dr dp d\varphi - \dots = 0 \\ & \int_0^\omega \int_0^s \rho(\varphi) dt d\varphi - \int_0^\omega \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) [\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \lambda(t) \lambda(s)] dt ds dr d\varphi + \dots = 0 \\ & \int_0^\omega \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(t) dt ds d\varphi \\ & \quad - \int_0^\omega \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) [\varepsilon_1 \lambda(t) - \varepsilon_2 \lambda(p) \{ \lambda(t) \lambda(s) + \varepsilon_1 \mu(t) \mu(s) \}] dt ds dr dp d\varphi + \dots = 0 \\ & \int_0^\omega \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(s) \mu(t) dt ds dr d\varphi \\ & \quad - \int_0^\omega \int_0^q \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(p) \mu(t) [\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \lambda(t) \lambda(s) - \varepsilon_1 \mu(t) \mu(s)] dt ds dp d\phi d\varphi dq + \dots = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.50)$$

formundadır. Burada  $\lambda(\xi) = \rho(\xi) k_2(\xi)$ ,  $\mu(\xi) = \rho(\xi) k_3(\xi)$  .dır. Şimdi önceki bölümde bahsettiğimiz  $\rho k_2 = \text{sabit}$   $\rho k_3 = \text{sabit}$  olması durumunu aşağıdaki örnekte inceleyelim.

**Örnek 4.2.1.**  $\rho k_2 = \rho k_3 = \text{sabit}$  olmak üzere  $\rho = \text{sabit}$  ve  $k_2 = k_3 = \text{sabit}$  özel durumlarını düşünelim. Bu durumda (4.48) formu

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega - \varepsilon_1 \frac{\omega^3}{3!} + \varepsilon_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^5}{5!} - \varepsilon_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^7}{7!} \dots = 0 \\ & \frac{\omega^2}{2!} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^4}{4!} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^6}{6!} - \dots = 0 \\ & k_2 \left[ \frac{\omega^3}{3!} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2) \frac{\omega^5}{5!} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2)^2 \frac{\omega^7}{7!} - \dots = 0 \right] \\ & k_2 k_3 \left[ \frac{\omega^4}{4!} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2) \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \end{aligned} \right. \quad (4.51)$$

ya da yukarıdaki denklemler sırasıyla düzenlenir, birinci denklemde eşitliği  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2)^{3/2}$  ile çarparsak

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_1 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^{1/2} \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right) \omega - \varepsilon_1 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} \\
& + \varepsilon_1 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} - \varepsilon_1 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^{7/2} \frac{\omega^7}{7!} \dots = 0 \\
& - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( \rho^2 k_2^2 \right) \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^{1/2} \omega + \varepsilon_1 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^{1/2} \omega \\
& - \varepsilon_1 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} + \varepsilon_1 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} - \dots = 0 \\
& \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( \rho^2 k_2^2 \right) \sqrt{\left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)} \omega - \sin \varepsilon_1 \sqrt{\left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)} \omega = 0
\end{aligned}$$

bulunur.  $\left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)$  ile ikinci denklemi genişletelim

$$\begin{aligned}
& \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right) \frac{\omega^2}{2!} - \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^2 \frac{\omega^4}{4!} + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^3 \frac{\omega^6}{6!} - \dots = 0 \\
& -1 + 1 + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right) \frac{\omega^2}{2!} - \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^2 \frac{\omega^4}{4!} + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 \right)^3 \frac{\omega^6}{6!} - \dots = 0 \\
& -1 + \cos \left( \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2} \right) \omega = 0 \\
& \cos \left( \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2} \right) \omega = 1 \quad \text{ve} \quad \left( \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2} \right) \omega = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

elde edilir. Üçüncü denklemide  $\left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{3/2}$  ile çarpalım

$$k_2 \left[ \begin{aligned} & \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} - \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} \\ & + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^2 \frac{\omega^7}{7!} - \dots = 0 \end{aligned} \right]$$

Ayrıca  $\left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)$  terimini ekleyip çıkaralım

$$k_2 \left[ \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{1/2} - \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} - \dots = 0 \right] \\ k_2 \left[ \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{1/2} \omega - \sin \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{1/2} \omega \right] = 0$$

bulunur. Dördüncü denklemde  $\left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^2$  ile çarpıldığı takdirde

$$k_2 k_3 \left[ \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^2 \frac{\omega^4}{4!} - \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^3 \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \\ k_2 k_3 \left[ -1 + 1 + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^2 \frac{\omega^4}{4!} - \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^3 \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \\ k_2 k_3 \left[ -1 + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right) \frac{\omega^2}{2!} + 1 - \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right) \frac{\omega^2}{2!} \right. \\ \left. + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^2 \frac{\omega^4}{4!} - \dots = 0 \right]$$

olur ve ifadesi düzenlenirse

$$k_2 k_3 \left[ -1 + \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right) \frac{\omega^2}{2} + \cos \left[ \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{1/2} \omega \right] \right] = 0, \\ k_2 k_3 \left[ \left[ \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{1/2} \right]^2 \frac{\omega^2}{2} - \sin^2 \left[ \left( \frac{\left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2 \right)^{1/2} \omega}{2} \right) \right] \right]$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeler düzenlenirse

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2)^{\frac{1}{2}} \omega + \sin \left[ (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2)^{\frac{1}{2}} \omega \right] = 0, \\ \cos \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2)^{\frac{1}{2}} \omega \right] = 1 \quad \text{or} \quad (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2)^{\frac{1}{2}} \omega = 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ k_2 \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2)^{\frac{1}{2}} \omega - \sin \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2)^{\frac{1}{2}} \omega \right] \right] = 0, \\ k_2 k_3 \left[ \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \frac{\omega^2}{2} - \sin^2 \left[ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rho^2 k_2^2 - \varepsilon_1 \rho^2 k_3^2)^{\frac{1}{2}} \omega}{2} \right] \right] \end{array} \right. \quad (4.52)$$

olur. Burada  $\varepsilon_1 = 1$  ise  $\omega = 2k\pi$  ve  $\varepsilon_1 = -1$  ise  $\omega = -2k\pi i$  dir.  $\rho k_2 = 0$ ,  $\rho k_3 = 0$  olduğunda olduğu görülür ki (4.51) ya da (4.52) denklemlerinin hepsi sağlanır. Böylece  $\rho = \text{sabit} > 0$  ve  $k_2, k_3 = \text{sabit}$  ile eğrilerinin sadece  $\rho = \text{sabit} > 0$  ve  $k_2 = 0$  veya  $k_3 = 0$  olması durumunda bu sabit genişlikli eğriler  $E_1^4$  de spacelike çember olur. Şimdi bu çemberlerin karakterizasyonlarını verelim.  $\rho k_2, \rho k_3 = 0$  olduğunda (4.10) sistemi iki durumda incelenebilir:

**1)** Eğer  $\rho k_2 = 0$ ,  $\rho k_3 = 0$   $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \mp 1$  ise, bu özel denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned} m_1' &= m_2, & m_2' &= -m_1, & m_3' &= 0, & m_4' &= 0 \\ m_2' &= m_1'' = -m_1 \\ m_1'' &+ m_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemlerin genel çözümü

$$\begin{aligned} m_1 &= A \cos \varphi + B \sin \varphi \\ m_2 &= C \cos \varphi + D \sin \varphi \\ m_3 &= E \\ m_4 &= F \end{aligned} \quad (4.54)$$

dir. (4.53) de yerine yerleştirirsek  $A = -D, B = C$  bulunur. Bu durumda denklemin çözüm kümesi

$$\begin{aligned}
m_1 &= A \cos \varphi + B \sin \varphi \\
m_2 &= B \cos \varphi - A \sin \varphi \\
m_3 &= K \\
m_4 &= L
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Sonuç olarak (4.55) denklemini (4.8) de yazılırsa

$$d = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\| = \left( A^2 + B^2 \pm K^2 \mp L^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

uzaklıkta

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}^*(\varphi) &= \vec{\alpha}(\varphi) + (A \cos \varphi + B \sin \varphi) \vec{T} + (-A \sin \varphi + B \cos \varphi) \vec{N} \\
&\quad + K \vec{B} + L \vec{E},
\end{aligned}$$

spacelike çemberi bulunur. Bu durumda, eğrinin karşı noktalarının bir ikilisi  $(\vec{\alpha}^*(\varphi), \vec{\alpha}(\varphi))$

olup,  $\varphi$  için,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  aralığındadır.

**2)** Eğer  $\rho k_2 = 0$ ,  $\rho k_3 = 0$   $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = +1$  ise, bu özel denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned}
m_1' &= -m_2, \quad m_2' = -m_1, \quad m_3' = 0, \quad m_4' = 0 \\
m_2' &= -m_1'' = -m_1 \\
m_1'' - m_1 &= 0
\end{aligned} \tag{4.56}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemlerin genel çözümü

$$\begin{aligned}
m_1 &= A \cosh \varphi + B \sinh \varphi \\
m_2 &= C \cosh \varphi + D \sinh \varphi \\
m_3 &= K \\
m_4 &= L
\end{aligned} \tag{4.57}$$

dir. (4.56) de yerine yerleştirirsek  $A = -D, B = -C$  bulunur. Bu durumda denklemin çözüm kümesi

$$\begin{aligned}
m_1 &= A \cosh \varphi + B \sinh \varphi \\
m_2 &= -B \cosh \varphi - A \sinh \varphi \\
m_3 &= K \\
m_4 &= L
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Sonuç olarak (4.58) denklemi (4.8) de yazılırsa

$$d = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\| = \left( A^2 - B^2 + K^2 + L^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

uzaklıkta

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}^*(\varphi) &= \vec{\alpha}(\varphi) + (A \cosh \varphi + B \sinh \varphi) \vec{T} + (-A \sinh \varphi - B \cosh \varphi) \vec{N} \\
&\quad + K \vec{B} + L \vec{E},
\end{aligned}$$

spacelike çemberi bulunur. Bu durumda, eğrinin karşı noktalarının bir ikilisi  $(\vec{\alpha}^*(\varphi), \vec{\alpha}(\varphi))$

olup,  $\varphi$  için,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  aralığındadır.

## V. BÖLÜM

### $E_1^4$ DE SABİT GENİŞLİKLİ TIMELIKE EĞRİLER

#### 5.1. Minkowski 4-uzayında Sabit Genişlikli Timelike Eğrilerin Karakterizasyonları

Bu kısımda, Minkowski 4-uzayında sabit genişlikli timelike eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemler çalışılmıştır.

(C), eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan  $C^5$  sınıfından birim hızlı bir timelike eğri olsun.

(C) eğrisinin,  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  karşıt noktalarında zıt yönlü paralel  $\vec{T}$  ve  $\vec{T}^*$  teğetlere sahip olduğunu farz edelim[9]. Karşıt noktalarda zıt yönlü paralel teğetlere sahip sabit genişlikli kapalı basit bir timelike (C) eğrisi

$$\vec{\alpha}^*(s) = \vec{\alpha}(s) + m_1(s)\vec{T}(s) + m_2(s)\vec{N}(s) + m_3(s)\vec{B}(s) + m_4(s)\vec{E}(s) \quad (5.1)$$

ile verilebilir, burada  $m_i(s)$ ,  $(1 \leq i \leq 4)$ , (C) nin yay uzunluğu s olan diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Bu denklem s 'ye göre diferansiyellenebilir ve timelike eğrinin Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds} = & \vec{T} + \frac{dm_1}{ds}\vec{T} + k_1m_1\vec{N} + \frac{dm_2}{ds}\vec{N} + \left[k_1\vec{T} + k_2\vec{B}\right]m_2 \\ & + \frac{dm_3}{ds}\vec{B} + m_3\left(-k_2\vec{N} + k_3\vec{E}\right) + \frac{dm_4}{ds}\vec{E} - k_3m_4\vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = & \vec{T} \left(1 + \frac{dm_1}{ds} + k_1m_2\right) + \vec{N} \left(k_1m_1 + \frac{dm_2}{ds} - k_2m_3\right) \\ & + \vec{B} \left(k_2m_2 + \frac{dm_3}{ds} - k_3m_4\right) + \vec{E} \left(m_3k_3 + \frac{dm_4}{ds}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\alpha}^*}{ds} &= \vec{T}^* \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \frac{dm_1}{ds} + m_2 k_1\right) \vec{T} + \left(m_1 k_1 + \frac{dm_2}{ds} - m_3 k_2\right) \vec{N} \\ &\quad + \left(m_2 k_2 + \frac{dm_3}{ds} - m_4 k_3\right) \vec{B} + \left(m_3 k_3 + \frac{dm_4}{ds}\right) \vec{C}\end{aligned}$$

elde edilir. (C) nin karşıt noktalarında  $\vec{T} = -\vec{T}^*$  olduğundan

$$\begin{cases} 1 + \frac{dm_1}{ds} + m_2 k_1 = -\frac{ds^*}{ds}, \\ m_1 k_1 + \frac{dm_2}{ds} - m_3 k_2 = 0, \\ m_2 k_2 + \frac{dm_3}{ds} - m_4 k_3 = 0 \\ m_3 k_3 + \frac{dm_4}{ds} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

bulunur. (C) nin eğriliğinin  $\lim(\Delta\varphi/\Delta s) = (d\varphi/ds) = k_1(s)$  olduğundan burada  $\varphi = \int_0^s k_1(s)ds$ , (C) eğrisinin teğeti ve  $\vec{\alpha}(s)$  noktasında verilen sabit bir doğrultu arasındaki açıdır. Aşağıdaki sistemi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\frac{dm_1}{d\varphi} &= m_1' = -m_2 - f(\varphi), \quad \frac{dm_2}{d\varphi} = m_2' = m_3 \rho k_2 - m_1, \\ \frac{dm_3}{d\varphi} &= m_3' = m_4 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, \quad \frac{dm_4}{d\varphi} = m_4' = -m_3 \rho k_3\end{aligned} \quad (5.3)$$

dir. Burada  $\varphi$  ye göre türevi göstermek için (') kullanacağız.(5.3) Buradan  $f(\varphi) = \rho + \rho^*$  dır

ve  $\rho = \frac{1}{k_1}$  ve  $\rho^* = \frac{1}{k_1^*}$ , sırasıyla  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  noktalarındaki eğrilik yarıçaplarıdır.(5.3) den

yararlanarak  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  yok edilerek türevleri alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}m_1' &= -m_2 - f(\varphi) \Rightarrow m_2 = -m_1' - f(\varphi) \\ m_2' &= \left(-m_1' - f(\varphi)\right)' = -m_1'' - f'(\varphi) = \rho k_2 m_3 - m_1\end{aligned}$$

ise eşitlikten

$$\begin{aligned}
m_3 &= \frac{1}{\rho k_2} \left[ -m_1'' + m_1 - f' \right] \\
m_3' &= \left[ \frac{1}{\rho k_2} \left( -m_1'' + m_1 - f' \right) \right]' = \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' \left( -m_1'' + m_1 - f' \right) + \frac{1}{\rho k_2} \left( -m_1''' + m_1' - f'' \right) \quad (5.4) \\
m_3' &= \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2
\end{aligned}$$

(5.4) denklemlerini eşitlersek buradan

$$m_4 = \frac{1}{\rho k_3} \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' \left[ -m_1'' + m_1 - f' \right] + \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} \left( -m_1''' + m_1' - f'' \right) + \frac{k_2}{k_3} \left( m_1' + f \right) \quad (5.5)$$

$$m_4' = -\rho k_3 m_3 = -\rho k_3 \left[ \frac{1}{\rho k_2} \left( -m_1'' + m_1' - f' \right) \right] \quad (5.6)$$

(5.5) türevi alınıp (5.6) denklemi ile birbirlerine eşitlenirse  $m_1$ ,  $f$  ve türevleri cinsinden kapalı denklem aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_3} \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_2} \left( \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} - m_1 \right) \right] - \frac{k_2}{k_3} \frac{dm_1}{d\varphi} \right] + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} - m_1 \right) \\
&+ \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho k_2} \frac{df}{d\varphi} \right) - \frac{k_2}{k_3} f \right] + \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{d\varphi} = 0
\end{aligned} \quad (5.7)$$

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem.5.1.1.** Sabit genişlikli timelike eğrileri karakterize eden denklem (5.7) denklemi ile verilir.

Şimdi tekrar (5.3) denklemini ele alırsak eğrinin  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  karşıt noktaları arasındaki  $d$  uzaklığı eğrinin genişliğidir ve sabittir. Yani,

$$d^2 = \|\vec{d}\|^2 = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = -m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = sbt. \quad (5.8)$$

dir. Ayrıca  $d$  vektörü  $(C)$  sabit genişlikli eğrinin çift normalidir. Buradan  $f(\varphi) = \rho + \rho^*$  dır ve

$\rho = \frac{1}{k_1}$  ve  $\rho^* = \frac{1}{k_1^*}$ , sırasıyla  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  noktalarındaki eğrilik yarıçapları olmak üzere

$$m_2 = -f(\varphi), \quad m_2' = m_3 \rho k_2, \quad m_3' = m_4 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3, \quad m_1 = 0 \quad (5.9)$$

ya da

$$m_1' = -m_2, \quad m_2' = -m_1 + m_3 \rho k_2, \quad m_3' = m_4 \rho k_3 - m_2 \rho k_2, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3 \quad (5.10)$$

eşitlikleri (5.1) eğrisini tarif eden sistemlerdir. Burada  $(\cdot)$ ,  $\varphi$  e göre diferansiyeli gösterir.

Şimdi ilk olarak  $f(\varphi) = 0$  olma durumunu inceleyelim. (5.10) denkleminde  $m_1 = s b t$  kabul edildiği durumda  $m_2 = 0$  olacaktır. Denklemden  $m_2 = 0$  yazılırsa

$$m_1 = m_3 \rho k_2, \quad m_3' = m_4 \rho k_3, \quad m_4' = -m_3 \rho k_3$$

olur.

$$m_3 = -\frac{m_4'}{\rho k_3} = -\frac{\left(\frac{m_3'}{\rho k_3}\right)'}{\rho k_3} = \frac{-m_3''(\rho k_3) + m_3'(\rho k_3)'}{(\rho k_3)^3} \quad (5.11)$$

(5.11) denklemini düzenlenirse

$$(\rho k_3)^3 m_3 - (\rho k_3)' m_3' + (\rho k_3) m_3'' = 0 \quad (5.12)$$

bulunur. Aynı şekilde  $m_3$  türevini alıp  $m_4$  cinsinden bulunursa

$$m_3' = \rho k_3 m_4, \quad m_4' = -(\rho k_3) m_3 \Rightarrow m_3 = -\frac{m_4}{\rho k_3}$$

$$m_3' = -\frac{m_4''(\rho k_3) - m_4'(\rho k_3)'}{(\rho k_3)^2} = \rho k_3 m_4 \quad (5.13)$$

(5.13) ifadesi düzenlenirse

$$(\rho k_3)^3 m_4 - (\rho k_3)' m_4' + (\rho k_3) m_4'' = 0 \quad (5.14)$$

bulunur.(5.12) ve (5.14) birlikte yazılırsa

$$\begin{cases} (\rho k_3) m_4'' - (\rho k_3)' m_4' + (\rho k_3)^3 m_4 = 0, & \rho k_3 \neq 0, \\ (\rho k_3) m_3'' - (\rho k_3)' m_3 + (\rho k_3)^3 m_3 = 0, & \rho k_3 \neq 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

ile verilen ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\xi = \int_0^{\varphi} \rho(t) k_2(t) dt$$

formunda  $\varphi$  değişken değiştirmesi yapılarak bu denklemler düzenlenirse;

$$\begin{aligned} m_3' &= \frac{dm_3}{d\varphi} = \frac{dm_3}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} = \dot{m}_3 \rho k_3 \\ m_3'' &= \frac{d^2 m_3}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dm_3}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \dot{m}_3 \rho k_3 \right) \\ &= \left( \frac{d}{d\varphi} \dot{m}_3 \right) \rho k_3 + \dot{m}_3 \frac{d}{d\varphi} (\rho k_3) \\ &= \ddot{m}_3 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_3 (\rho k_3)' \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\dot{m}_3 = \frac{dm_3}{d\zeta}$  dir. Bu değerler (5.12) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \rho k_2 \left( \ddot{m}_3 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_3 (\rho k_3)' \right) + (\rho k_3)^3 m_3 - (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 &= 0 \\ (\rho k_3)^3 \ddot{m}_3 + (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 + (\rho k_3)^3 m_3 - (\rho k_3)' (\rho k_3) \dot{m}_3 &= 0 \\ (\rho k_3)^3 \ddot{m}_3 + (\rho k_3)^3 m_3 &= 0 \\ \ddot{m}_3 + m_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

bulunmuş olur.

Aynı şekilde (5.14) denkleminde de

$$\begin{aligned}
m_4' &= \frac{dm_4}{d\varphi} = \frac{dm_4}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} = \dot{m}_4 \rho k_3 \\
m_4'' &= \frac{d^2 m_4}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} m_4' = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dm_4}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\varphi} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \dot{m}_4 \rho k_3 \right) \\
m_4'' &= \left( \frac{d}{d\varphi} \dot{m}_4 \right) \rho k_3 + \dot{m}_4 \frac{d}{d\varphi} \rho k_3 = \ddot{m}_4 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_4 (\rho k_3)'
\end{aligned}$$

elde edilir . Bu değerler (5.14) de yerine konursa;

$$\begin{aligned}
(\rho k_3) \left[ \ddot{m}_4 (\rho k_3)^2 + \dot{m}_4 (\rho k_3)' \right] - (\rho k_3)' \dot{m}_4 \rho k_3 + (\rho k_3)^3 m_4 &= 0 \\
(\rho k_3)^3 \ddot{m}_4 + \dot{m}_3 (\rho k_3)' (\rho k_3) - (\rho k_3)' \dot{m}_4 \rho k_3 + (\rho k_3)^3 m_4 &= 0 \\
(\rho k_3)^3 \ddot{m}_4 + (\rho k_3)^3 m_4 &= 0 \\
\ddot{m}_4 + m_4 &= 0
\end{aligned} \tag{5.17}$$

bulunur. (5.16) ve (5.17) denklemleri açık şekilde yazılırsa sabit katsayılı

$$\frac{d^2 m_4}{d\zeta^2} + m_4 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 m_3}{d\zeta^2} + m_3 = 0, \tag{5.18}$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu iki denklem ayrı ayrı çözümlürse

$$m_3 = A \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + B \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \tag{5.19}$$

ve

$$m_4 = C \cos \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) + D \sin \left( \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right) \tag{5.20}$$

bulunur[5, 19]. Burada  $A, B, C, D$  sabitlerdir. Buradan (5.15) ile verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümleri sırasıyla

$$\begin{cases} m_3 = A \cos \left( \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right) + B \sin \left( \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right), \\ m_4 = C \cos \left( \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right) + D \sin \left( \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right) \end{cases} \quad (5.21)$$

olur. (5.21) sistemi (5.10) denkleminde yerine yazılırsa  $m_3' = m_4 \rho k_3$  ise

$$m_3' = -\rho k_3 \left( A \sinh \left( \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right) + B \cosh \left( \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right) \right) = \rho k_3 \left( C \cosh \left( \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right) + D \sinh \left( \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right) \right)$$

bulunur. (5.10) denklemi (5.15) denkleminde yerine yazılırsa  $A = -D$ ,  $B = C$  elde edilir.

Buradan (5.10) sisteminin çözüm kümesi

$$\begin{cases} m_1 = c = sbt., \quad m_2 = 0, \\ m_3 = A \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt + B \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt, \\ m_4 = B \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt - A \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \end{cases} \quad (5.22)$$

formunda elde edilir. Böylece (5.1) ile verilen sabit genişlikli eğrisi açık olarak belirlenmiş olur.

Denklem (5.1) de ifade edilen eşitlikte yerine konulursa  $d^2 = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 = sbt.$  olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}^* &= \vec{\alpha} + c \vec{T} + \left( A \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt + B \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt, \right) \vec{B} + \left( B \cos \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt - A \sin \int_0^{\varphi} \rho k_3 dt \right) \vec{E} \\ \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\|^2 &= -m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = k^2 \end{aligned}$$

ise düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& -c^2 + \left[ A \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right]^2 + \left[ B \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right]^2 = \\
& -c^2 + A^2 \left[ \cos^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \sin^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt, \right] + B^2 \left[ \sin^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \cos^2 \int_0^\varphi \rho k_3 dt \right] \\
& + 2AB \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - 2AB \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt = k^2
\end{aligned}$$

ifadesinden  $k^2 = -c^2 + A^2 + B^2$  sabit genişlikli timelike eğri olmuş olur.

Şimdi  $m_1 \neq c \neq s$ bt. durumunda  $m_1$  türevleri cinsinden yazarsak

$$m_2 = -m_1' \Rightarrow m_2' = -m_1'' = \rho k_2 m_3 - m_1$$

$$m_3 = \frac{1}{\rho k_2} (-m_1'' + m_1)$$

$$m_3' = \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' (-m_1'' + m_1) + \frac{1}{\rho k_2} (-m_1''' + m_1')$$

elde edilir. Ayrıca  $m_3' = \rho k_3 m_4 + \rho k_2 m_1'$  olduğundan her iki denklemi eşitlersek

$$m_4 = \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' m_1 + \left( \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} - \frac{k_2}{k_3} \right) m_1' - \left( \frac{1}{\rho k_3} \right) \left( \frac{1}{\rho k_2} \right)' m_1'' - \left( \frac{1}{\rho^2 k_2 k_3} \right) m_1'''$$

ayrıca  $m_4$  'ün türevi alınır ve

$$m_4' = -\rho k_3 m_3 = -\rho k_3 \frac{1}{\rho k_2} (-m_1'' + m_1) = -\frac{k_3}{k_2} (-m_1'' + m_1)$$

olduğundan her iki eşitlikten

$$\begin{aligned}
& \left[ -\left(\frac{1}{\rho k_3}\right)\left(\frac{1}{\rho k_2}\right)'' + \left(\frac{1}{\rho k_3}\right)' \left(\frac{1}{\rho k_2}\right)' + \frac{k_3}{k_2} \right] m_1 + \left[ \left(\frac{1}{\rho k_3}\right)\left(\frac{1}{\rho k_2}\right)' - \left(\frac{1}{\rho^2 k_2 k_3}\right)' + \left(\frac{k_2}{k_3}\right)' \right] m_1' \\
& + \left[ \left(\frac{1}{\rho^2 k_2 k_3}\right) - \frac{k_2}{k_3} + \frac{k_3}{k_2} - \left(\frac{1}{\rho k_3}\right)\left(\frac{1}{\rho k_2}\right)'' + \left(\frac{1}{\rho k_3}\right)' \left(\frac{1}{\rho k_2}\right)' \right] m_1'' \\
& + \left[ \left(\frac{1}{\rho k_3}\right)\left(\frac{1}{\rho k_2}\right)' + \left(\frac{1}{\rho^2 k_2 k_3}\right)' \right] m_1''' + \left(\frac{1}{\rho^2 k_2 k_3}\right) m_1^{(iv)} = 0
\end{aligned}
\tag{5.23}$$

denklemini elde ederiz.(5.7) denkleminde  $f(\varphi) = 0$  yazılırsa

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{\rho k_3} \left[ \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_2} \left( \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} - m_1 \right) \right] - \frac{k_2}{k_3} \frac{dm_1}{d\varphi} \right] + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} - m_1 \right) = 0$$

elde edilir. Şimdi (5.9) sistemine dönelim. Bu denklemde  $m_2, m_3$  ve türevleri yok edilerek  $f(\varphi) \neq 0$  olduğu durumlarda  $\varphi$  değişken değiştirme metoduyla ve

$$u = \int_0^\varphi \mu(t) dt, \mu = \rho k_3$$

alırsak

$$\begin{aligned}
\frac{dm_3}{d\varphi} &= \frac{dm_3}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2 \\
\frac{dm_3}{du} \cdot \rho k_3 &= \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2 \\
\frac{dm_3}{du} &= m_4 - \frac{\rho k_2}{\rho k_3} m_2
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{dm_4}{d\varphi} = \frac{dm_4}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\rho k_3 m_3$$

$$\frac{dm_4}{du} \cdot \rho k_3 = -\rho k_3 m_3 \Rightarrow \frac{dm_4}{du} = -m_3$$

olur.

$$\frac{d^2 m_3}{du^2} = \frac{d}{du} \left( m_4 - \frac{\rho k_2}{\rho k_3} m_2 \right) = \frac{dm_4}{du} - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right)$$

$\frac{dm_4}{du} = -m_3$  olduğundan ifadeler düzenlenirse

$$\frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = -\frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) \quad (5.24)$$

denklemini elde edilir.  $\frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = 0$  çözümü ise özel olarak aşağıdaki şekilde bulunur.[5, 19]

$$F_1(\varphi) = A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt$$

olarak alalım.Bu taktirde

$$m_3 = F_1(\varphi) + \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \quad (5.25)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{dm_3}{du} = & -A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ & + \cos[u(\varphi) - u(\varphi)] \rho(t) k_2 f(t) \frac{d\varphi}{du} - \cos[u(\varphi) - u(0)] \rho(t) k_2 f(0) \frac{d0}{du} \end{aligned}$$

ifadesi düzenlenirse

$$\frac{dm_3}{du} = -A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt + \frac{\rho k_2}{\rho k_3} f(t)$$

bulunur. İkinci türev alındığında

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m_3}{du^2} = & -A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ & - \sin[u(\varphi) - u(\varphi)] \rho \cdot k_2 \cdot f \frac{d\varphi}{du} + \sin[u(\varphi) - u(0)] \rho \cdot k_2 \cdot f \frac{d0}{du} - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. (5.24) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m_3}{du^2} + m_3 = & -A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \\ & - \frac{d}{du} \left( \frac{k_2}{k_3} m_2 \right) + A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki (5.24) eşitliğinin sağlandığı görülür.

Benzer yollarla  $m_4$  ve  $m_2$  cinsinden yazarsak

$$\begin{aligned} \frac{dm_3}{d\varphi} = \frac{dm_3}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} &= \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2 \\ \frac{dm_3}{du} \cdot \rho k_3 &= \rho k_3 m_4 - \rho k_2 m_2 \\ \frac{dm_3}{du} &= m_4 - \frac{k_2}{k_3} m_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{dm_4}{d\varphi} = \frac{dm_4}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} &= -\rho k_3 m_3 \\ \frac{dm_4}{du} \cdot \rho k_3 &= -\rho k_3 m_3 \Rightarrow \frac{dm_4}{du} = -m_3 \end{aligned}$$

ise her iki denklem düzenlendiği takdirde

$$\frac{dm_3}{du} = -\frac{d^2 m_4}{du^2} = m_4 - \frac{k_2}{k_3} m_2$$

$$m_4 + \frac{d^2 m_4}{du^2} = \frac{k_2}{k_3} m_2 \quad (5.26)$$

bulunur. [5, 19] Benzer yolla

$$m_4 = -A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \sin [u(\varphi) - u(t)] \rho(t) k_2 f(t) dt \quad (5.27)$$

Sonuç olarak (5.24) ve (5.26) denklemlerinin çözümleri

$$\begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 = -f(\varphi), \\ m_3 = A_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt + \int_0^\varphi \cos [u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt, \\ m_4 = B_1 \cos \int_0^\varphi \rho k_3 dt - A_1 \sin \int_0^\varphi \rho k_3 dt - \int_0^\varphi \sin [u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt, \end{cases} \quad (5.28)$$

formunda elde edilir.  $A_1, B_1$  reel sabitleri (5.1) denkleminde sabit genişlikli timelike eğrileri gösterir.

Bundan başka  $m_1 = 0$  olma durumunda (5.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho k_3} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho k_2} \frac{df}{d\varphi} \right) - \frac{k_2}{k_3} f \right] + \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{d\varphi} = 0 \quad (5.29)$$

(5.29) formunda  $\varphi$  değişken değiştirme ile  $w = \int_0^\varphi \rho k_2 d\varphi$  yapılırsa

$$\frac{d}{dw} \left[ \frac{k_2}{k_3} \left( \frac{d^2 f}{dw^2} - f \right) \right] + \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{dw} = 0 \quad (5.30)$$

ifadesi (5.1) deki denkleminde sabit genişlikli timelike eğriyi gösterir.

Şimdiye kadar karşılıklı paralel zıt yönlü paralel teğetlere sahip uzay eğrileri ele alındı. Şimdi ise  $P$  den başka bir tek  $Q$  noktasına karşılık gelen timelike eğride her  $P$  noktasında aynı düzlemde olması için  $E_1^4$  de  $(C)$  birim hızlı basit kapalı timelike bir eğri düşünelim. Sonra  $E_1^4$  de sabit genişlikli uzay eğrisi ile ilgili aşağıdaki teoremi düşünelim.

**Teorem.5.1.2.**  $(C)$ , eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan  $C^5$  sınıfından birim hızlı timelike bir eğri olsun.  $(C)$  eğrisinin  $P$  ve  $Q$  karşıt noktalarındaki  $\vec{T}$  ve  $\vec{T}^*$  teğetleri paralel ve zıt yönlü olsun. Eğer  $(C)$  nin bu noktalarını birleştiren kiriş bir çift normal ise, bu takdirde  $(C)$  sabit genişliğe sahiptir. Tersine eğer  $(C)$  sabit genişlikli bir eğri ise, bu takdirde  $(C)$  nin her normali çift-normaldir.

**İspat:**  $(C)$  nin s yay uzunluk parametresine sahip  $m_1, m_2, m_3$  ve  $m_4$  fonksiyonları ifade edilen

$$\vec{d} = \vec{\alpha}^* - \vec{\alpha} = m_1 \vec{T} + m_2 \vec{N} + m_3 \vec{B} + m_4 \vec{E}$$

vektörü bir çift-normal olsun. Bu

$$\langle \vec{d}, \vec{T}^* \rangle = -\langle \vec{d}, \vec{T} \rangle = m_1 = 0$$

ile verilebilir. (5.4) denkleminde yararlanarak

$$m_2 \frac{dm_2}{ds} + m_3 \frac{dm_3}{ds} + m_4 \frac{dm_4}{ds} = 0$$

elde edilir. Böylece  $m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = \text{sabit}$  olduğu ortaya çıkar ve  $(C)$  sabit genişlikli timelike bir eğridir. Aksine olarak  $\|\vec{d}\|^2 = -m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = \text{sabit}$  ise  $m_1 = 0$  gösterir.  $\vec{d}$  de  $\vec{T}$  ve  $\vec{T}^*$  dik olduğu anlamına gelir. Yani  $\vec{d}, (C)$  de bir çift -normaldir.

Zıt noktalarda zıt yönlerde paralel teğetlere sahip basit kapalı timelike eğri (5.28) sistemi tarafından verilmiştir. Bu durumda  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  arasında eğrinin bir çift karşılıklı noktaları  $(\alpha^*(\varphi), \alpha(\varphi))$  dir. Böylece (5.28) sisteminden

$\alpha^*(0) = \alpha^*(2\pi)$  ise  $f$  fonksiyonu  $f(\varphi) = \rho + \rho^*$  dir. Ve  $f(0) = f(2\pi)$  olur. Böylece

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}^*(0) &= \vec{\alpha}(0) + f(0) \vec{N} + f_1(0) \vec{B} + f_2(0) \vec{E} \\ &= \vec{\alpha}(0) + f(0) \vec{N} + A_1 \vec{B} + B_1 \vec{E} \end{aligned}$$

ile

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(2\pi) = \vec{\alpha}(2\pi) + f(2\pi) \cdot \vec{N} + \left[ f_1(2\pi) - \int_0^{2\pi} \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt \right] \vec{B} \\ + \left[ f_2(2\pi) + \int_0^{2\pi} \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt \right] \vec{E}\end{aligned}$$

dir. Burada

$$A_1 \cos \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt + B_1 \sin \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt - \int_0^{2\pi} \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = A_1$$

$$B_1 \cos \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt - A_1 \sin \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt + \int_0^{2\pi} \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = B_1$$

denklemlerinden aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

$$\cos \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 0 ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = 0 \text{ ve } \int_0^{2\pi} \sin[u(\varphi) - u(t)] \rho k_2 f(t) dt = 0 .$$

Sonuç olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\int_0^{2\pi} \rho k_3 dt = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (5.31)$$

$ds = \rho dt$  eşitliğini kullanarak  $\int_C k_3 ds = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$  formülü verilebilir. Bu  $(C)$  de üçüncü eğriliğin sıfır olduğu anlamına gelir.

**Sonuç.5.1.1.** Sabit genişlikli timelike  $(C)$  basit kapalı timelike eğrinin toplam üçüncü eğriliği

$2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$  dir. Ayrıca  $\frac{k_2}{k_3} = a = \text{sabit}$  alırsak (5.30) denkleminde

$$\frac{d}{dw} \left[ \frac{k_2}{k_3} \left( \frac{d^2 f}{dw^2} - f \right) \right] + \frac{k_3}{k_2} \frac{df}{dw} = 0$$

denkleminde  $\frac{k_2}{k_3} = a = \text{sabit}$  ise yerine yazıldığı takdirde

$$\frac{d}{dw} \left[ a \left( \frac{d^2 f}{dw^2} - f \right) \right] + \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

$$a \frac{d}{dw} \left[ \left( \frac{d^2 f}{dw^2} - f \right) \right] + \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

olur. Düzenlersek

$$a \frac{d^3 f}{dw^3} - a \frac{df}{dw} + \frac{1}{a} \frac{df}{dw} = 0$$

$$\frac{d^3 f}{dw^3} - \frac{df}{dw} + \frac{1}{a^2} \frac{df}{dw} = 0$$

$$\frac{d^3 f}{dw^3} + \left( -1 + \frac{1}{a^2} \right) \frac{df}{dw} = 0$$

bulunur. Yani

$$\frac{d^3 f}{dw^3} + K \frac{df}{dw} = 0, \quad (5.32)$$

Burada  $K = -1 + \frac{1}{a^2}$  dır.  $K \neq \pm 1$  olduğunu varsayalım .(5.32) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$f = A_2 \sin \int_0^\varphi K \rho k_2 dt + B_2 \cos \int_0^\varphi K \rho k_2 dt + C_1 \quad (5.33)$$

Burada  $A_2$ ,  $B_2$  ve  $C_1$  reel sabitlerdir. (C) basit kapalı eğri yani  $\alpha^*(0) = \alpha^*(2\pi)$

$$f(0) = f(2\pi)$$

$$f(2\pi) = A_2 \sin \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt + B_2 \cos \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt + C_1$$

$$f(0) = B_2 \cos 0 + C_1 = B_2 + C_1$$

$$\sin \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt = 0 \quad \cos \int_0^{2\pi} K \rho k_2 dt = 1$$

$ds = \rho dt$  eşitliği kullanarak  $\int_C k_2 ds = 2 \frac{n}{K} \pi$ ,  $(K, n \in \mathbb{Z})$  formülü verilebilir.  $(C)$  nin ikinci

eğrilik integrali  $2 \frac{n}{K} \pi$ ,  $(K, n \in \mathbb{Z})$  olduğu söylenebilir. Böylece aşağıdaki sonuç verebiliriz.

**Sonuç 5.1.2.**  $a = k_2 / k_3 = \text{sabit}$  olan sabit genişliğe sahip basit kapalı timelike  $(C)$  eğrisinin toplam ikinci eğriligi  $n \in \mathbb{Z}$  ve  $K = -1 + \frac{1}{a^2}$  de  $2 \frac{n}{K} \pi$  dir.

## 5.2. $E_1^4$ Minkowski 4-Uzayında Sabit Genişlikli Timelike Eğrilerin Periyodik Olması Kriteri

Farz edelim ki  $E_1^4$  de  $(C)$  sabit genişlikli timelike bir eğri ve  $\vec{\alpha}(s)$  genel bir noktanın konum vektörünü göstere.  $(C)$  kapalı bir eğri ise  $\vec{\alpha}(s)$  konum vektörü  $\omega = 2\pi$  periyotlu bir periyodik fonksiyondur. Burada  $\omega$ ,  $(C)$  eğrisinin toplam uzunluğudur. Bu takdirde  $k_1(s)$  eğrilikleri  $k_2(s)$  ve  $k_3(s)$  aynı periyotta periyodiktir. Ancak  $k_1(s)$  ve  $k_2(s)$ ,  $k_3(s)$  nin periyodik olması ve eğrinin kapalılığı bir eğrinin sabit genişlikli timelike eğri olması için yeterli değildir. Yani eğer bir eğri kapalı (periyodik) ise, sabit genişlikli timelike bir eğri ya da sabit genişlikli olmayan bir timelike eğri olabilir. Bu yüzden timelike bir eğrinin sabit genişlikli olması durumunu belirlemek için [6] da verilen benzer yollar takip edilerek (5.10) sistemi kullanılabilir.

Bunun için, ilk önce  $(C)$  eğrisi üzerindeki genel bir noktada timelike Frenet formülleri

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k_1 \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -k_2 \vec{N} + k_3 \vec{E}, \quad \frac{d\vec{E}}{ds} = -k_3 \vec{B}. \quad (5.34)$$

ile verilen formüllerini düşünelim.  $\varphi$  ve  $\frac{d\varphi}{ds} = k_1 = \frac{1}{\rho}$  kullanılarak (5.34) formülleri

$$\frac{d\vec{T}}{d\varphi} = \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{d\varphi} = \vec{T} + \rho k_2 \vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{d\varphi} = -\rho k_2 \vec{N} + \rho k_3 \vec{E}, \quad \frac{d\vec{E}}{d\varphi} = -\rho k_3 \vec{B}$$

formunda yazılabilir. Ayrıca  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}$  vektörleri koordinat formunda

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^4 t_i \vec{e}_i, \quad \vec{N} = \sum_{i=1}^4 n_i \vec{e}_i, \quad \vec{B} = \sum_{i=1}^4 b_i \vec{e}_i, \quad \vec{E} = \sum_{i=0}^4 \varepsilon_i \vec{e}_i \quad (5.35)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}\}$  vektörleri  $E_1^4$  uzayının ortonormal bazı olduğundan (5.35) ve türevleri (5.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{llll} \frac{dt_1}{d\varphi} = n_1, & \frac{dt_2}{d\varphi} = n_2, & \frac{dt_3}{d\varphi} = n_3, & \frac{dt_4}{d\varphi} = n_4 \\ \frac{dn_1}{d\varphi} = t_1 + \rho k_2 b_1, & \frac{dn_2}{d\varphi} = t_2 + \rho k_2 b_2, & \frac{dn_3}{d\varphi} = t_3 + \rho k_2 b_3, & \frac{dn_4}{d\varphi} = t_4 + \rho k_2 b_4 \\ \frac{db_1}{d\varphi} = \rho k_3 \varepsilon_1 - \rho k_2 n_1, & \frac{db_2}{d\varphi} = \rho k_3 \varepsilon_2 - \rho k_2 n_2, & \frac{db_3}{d\varphi} = \rho k_3 \varepsilon_3 - \rho k_2 n_3, & \frac{db_4}{d\varphi} = \rho k_3 \varepsilon_4 - \rho k_2 n_4 \\ \frac{d\varepsilon_1}{d\varphi} = -\rho k_3 b_1, & \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} = -\rho k_3 b_2, & \frac{d\varepsilon_3}{d\varphi} = -\rho k_3 b_3, & \frac{d\varepsilon_4}{d\varphi} = -\rho k_3 b_4 \end{array} \right. \quad (5.36)$$

lineer diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (5.36) denklemlerinden  $\{t_1, n_1, b_1, \varepsilon_1\}, \{t_2, n_2, b_2, \varepsilon_2\}, \{t_3, n_3, b_3, \varepsilon_3\}, \{t_4, n_4, b_4, \varepsilon_4\}$  cümleleri

$$\frac{d\psi_1}{d\varphi} = \psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{d\varphi} = \psi_1 + \rho k_2 \psi_3, \quad \frac{d\psi_3}{d\varphi} = \rho k_3 \psi_4 - \rho k_2 \psi_2, \quad \frac{d\psi_4}{d\varphi} = -\rho k_3 \psi_3 \quad (5.37)$$

dir. Eğer  $(C)$  eğrisi sabit genişlikli timelike bir eğri ise, (5.37) ve (5.10) sistemleri aynı olmalıdır.

Bu yüzden,  $\psi_1 = m_1, \psi_2 = m_2, \psi_3 = m_3, \psi_4 = m_4$  tür. Kısaca (5.10) ya da (5.37) denklem sistemi

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = A(\varphi)\psi, \quad (5.38)$$

formunda ifade edilir. Burada

$$\psi = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}, \quad A(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & -\rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & -\rho k_3 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Açık olarak, (5.40) denklemi,  $a_{ij}(t)$   $\omega$  periyotlu sürekli kabul edilmek üzere

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi, \\ \varphi = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (n \geq 4) \end{cases} \quad (5.39)$$

genel lineer diferansiyel denkleminin özel bir durumudur [6,14].  $\psi_i(0) = x_i, (i=1,2,\dots,n)$  başlangıç koşulu olsun.

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

ve

$$\psi(t, x) = [m_1(t, x) m_2(t, x) \dots m_n(t, x)]^T.$$

denklemlerini ele alalım. Bu takdirde (5.39) denklemi [6] dan iyi bilinir ki  $\frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi$ ,

$\psi(0) = x$  formunda yazılabilir. Eğer

$$\int_0^\omega A(\xi) \psi(\xi, x) d\xi = 0$$

ve

$$\begin{cases} \psi(t, x) = \{E + M(t)\}x, \quad (E = \text{birim matris}), \\ M(t) = IA(t) + I^{(2)}A(t) + \dots + I^{(n)}A(t) + \dots, \\ (IA)(t) \equiv I^{(1)}A(t) = \int_0^t A(\xi) d\xi \\ (I^{(n)}A)(t) = \int_0^t A(\xi) (I^{(n-1)}A)(\xi) d\xi, \quad n > 1. \end{cases} \quad (5.40)$$

ise, bu denklemin  $\psi(t, x)$  çözümü  $\omega$  periyodunda periyodiktir.

Şimdi Teorem 1.2.1. ifadesini (5.18) sistemine uygulayalım. Eğer  $M(\omega) = 0$  ise,  $\omega$  periyotlu  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}$  birim vektör fonksiyonları vardır, öyle ki  $\{t_i, n_i, b_i, \varepsilon_i\}$ ,  $(i = 1, 2, 3, 4)$  fonksiyonlarının her bir kümesi  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  başlangıç koşuluna karşılık gelen (5.38) denkleminin bir çözümünü oluşturur.  $(C)$  eğrisi

$$\vec{\alpha}(s) = \int_0^s \vec{T}(s) ds \quad ya \quad da \quad \vec{\alpha}(\varphi) = \int_0^\omega \rho(\varphi) \vec{T}(\varphi) d\varphi$$

denklemleriyle tanımlanabilir. Burada  $\vec{T}$ , (5.40) denklemleriyle ifade edilen çözüm

$$\begin{bmatrix} t_i \\ n_i \\ b_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} = \{E + M(\varphi)\} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.41)$$

denklemini kullanılarak bulunabilir.  $(A_1, A_2, A_3, A_4), (B_1, B_2, B_3, B_4), (C_1, C_2, C_3, C_4)$  ve  $(D_1, D_2, D_3, D_4)$  bir orta normal çatı oluşturmak üzere, başlangıç koşulu  $t_i(0) = A_i, n_i(0) = B_i, b_i(0) = C_i, \varepsilon_i = D_i, (i = 1, 2, 3, 4)$  olarak alınırsa, bu takdirde (5.41) den

$$t_i = (1 + m_{11})A_i + m_{12}B_i + m_{13}C_i + m_{14}D_i; \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.42)$$

bulunur.  $(C)$  eğrisi sabit genişlikli timelike aynı zamanda  $\omega$  periyotlu periyodik bir eğri olduğunda

$$\int_0^{\omega} \rho t_i d\varphi = 0 \quad (5.43)$$

dır. Buradan (5.42) ve (5.43) dan

$$A_i \int_0^{\omega} \rho (1 + m_{11}) d\varphi + B_i \int_0^{\omega} \rho m_{12} d\varphi + C_i \int_0^{\omega} \rho m_{13} d\varphi + D_i \int_0^{\omega} \rho m_{14} d\varphi = 0; \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

elde edilir. Bu sistemde katsayılar determinantı  $\Delta \neq 0$  olduğundan, bir eğri için sabit genişlikli timelike eğri olma koşulunu sağlayan

$$\int_0^{\omega} \rho (1 + m_{11}) d\varphi = 0 = \int_0^{\omega} \rho m_{12} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{13} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{14} d\varphi \quad (5.44)$$

denklemleri elde edilir. Burada  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  olduğundan  $\omega = 2\pi$  periyodu alınabilir. Buradan da aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 5.2.1.**  $\rho(\varphi) > 0$  ve  $k_2(\varphi)$  ve  $k_3(\varphi)$   $\omega$  periyotlu sürekli periyodik fonksiyonlar,  $(C)$ ,  $E_1^4$  de timelike bir eğri olsun. Bu takdirde  $(C)$  sabit genişlikli aynı zamanda  $\omega$  periyotlu periyodik bir eğridir ancak ve ancak

$$M(\omega) = 0, \quad \int_0^{\omega} \rho (1 + m_{11}) d\varphi = 0 = \int_0^{\omega} \rho m_{12} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{13} d\varphi = \int_0^{\omega} \rho m_{14} d\varphi, \quad (5.45)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada

$$\begin{cases} M(t) = IA(t) + I^{(2)}A(t) + \dots + I^{(n)}A(t) + \dots, \\ A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \rho k_2 & 0 \\ 0 & -\rho k_2 & 0 & \rho k_3 \\ 0 & 0 & -\rho k_3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.46)$$

ve  $m_{ij}(t)$ ,  $M(t)$  matrisinin elemanlarıdır. (5.42) eşitliğinde

$$IA(t) = \begin{bmatrix} 0 & \int_0^s dt & 0 & 0 \\ \int_0^s dt & 0 & \int_0^s \rho k_2 dt & 0 \\ 0 & -\int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \int_0^s \rho k_3 dt \\ 0 & 0 & -\int_0^s \rho k_3 dt & 0 \end{bmatrix}$$

$$I^2 A(s) = \int_0^s A(t) IA(t) dt$$

olur. Buradan da

$$= \begin{bmatrix} \int_0^s dt & 0 & \int_0^s \rho k_2 dt & 0 \\ 0 & \int_0^s dt - \rho k_2 \int_0^s \rho k_2 dt & 0 & \rho k_2 \int_0^s \rho k_3 dt \\ -\rho k_2 \int_0^s dt & 0 & -\rho k_2 \int_0^s \rho k_2 dt - \rho k_3 \int_0^s \rho k_3 dt & 0 \\ 0 & \rho k_3 \int_0^s \rho k_2 dt & 0 & -\rho k_3 \int_0^s \rho k_3 dt \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$I^2 A(r) = \int_0^r A(t) IA(t) dt$$

eşitliğinden

$$I^2 A(r) = \begin{bmatrix} \int_0^r \int_0^s dt & 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_2 dt ds & 0 \\ 0 & \int_0^r \int_0^s (1 - \rho k_2 \rho k_2) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_2 \rho k_3 dt ds \\ -\int_0^r \int_0^s \rho k_2 dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s (\rho k_2 \rho k_2 + \rho k_3 \rho k_3) dt ds & 0 \\ 0 & \int_0^r \int_0^s \rho k_3 \rho k_2 dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s \rho k_3 \rho k_3 dt ds \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer olarak algoritmaya devam edilirse  $\lambda(\xi) = \rho(\xi)k_2(\xi), \mu(\xi) = \rho(\xi)k_3(\xi)$ ,

$$A(s) \cdot I^2 A(r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda(s) & 0 \\ 0 & -\lambda(s) & 0 & \mu(s) \\ 0 & 0 & -\mu(s) & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^r \int_0^s dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda(t) dt ds & 0 \\ 0 & \int_0^r \int_0^s (1 - \lambda(t) \lambda(s)) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda(s) \mu(t) dt ds \\ -\int_0^r \int_0^s \lambda(s) dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s [\lambda(t) \lambda(s) + \mu(t) \mu(s)] dt ds & 0 \\ 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda(t) \mu(s) dt ds & 0 & -\int_0^r \int_0^s \mu(t) \mu(s) dt ds \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \int_0^r \int_0^s (1 - \lambda.\lambda) dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda.\mu dt ds \\ \int_0^\omega \int_0^s dt ds - \lambda \int_0^\omega \int_0^s \lambda dt ds & 0 & \int_0^r \int_0^s \lambda dt ds - \lambda \int_0^r \int_0^s (\lambda\lambda + \mu.\mu) dt ds & 0 \\ 0 & \lambda \int_0^r \int_0^s (1 - \lambda.\lambda) dt ds + \mu \int_0^r \int_0^s \lambda.\mu dt ds & 0 & -\lambda \int_0^r \int_0^s \lambda.\mu dt ds - \mu \int_0^r \int_0^s \mu.\mu dt ds \\ \mu \int_0^\omega \int_0^s \lambda dt ds & 0 & -\mu \int_0^r \int_0^s (\lambda\lambda + \mu.\mu) dt ds & 0 \end{bmatrix}$$

$$I^3 A(\omega) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s (1 - \lambda.\lambda) dt ds dr & 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s \lambda.\mu dt ds \\ \int_0^p \int_0^r \int_0^s (1 - \lambda.\lambda) dt ds dr & 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\lambda - \lambda(\lambda\lambda + \mu.\mu)] dt ds dr & 0 \\ 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s (\lambda.(1 - \lambda.\lambda) + \mu\lambda\mu) dt ds dr & 0 & -\int_0^p \int_0^r \int_0^s (\lambda.\mu\lambda + \mu\mu\mu) dt ds dr \\ \int_0^p \int_0^r \int_0^s \mu\lambda dt ds dr & 0 & \int_0^p \int_0^r \int_0^s \mu(\lambda\lambda + \mu.\mu) dt ds dr & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer olarak algoritmaya devam edilirse

$$I^4 A(\phi) = \int_0^\phi A(t) I^3 A(t) dt \quad \text{ise} \quad I^3 A(p) = R_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$A(s) \cdot I^3 A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda(s) & 0 \\ 0 & -\lambda(s) & 0 & \mu(s) \\ 0 & 0 & -\mu(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

$$I^4 A(\phi) =$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s (1 - \lambda.\lambda) dt ds dr dp & 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\lambda - \lambda(\lambda\lambda + \mu.\mu)] dt ds dr dp & 0 \\ 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [(1 - \lambda.\lambda - \lambda.\lambda)[1 - \lambda.\lambda] + \mu.\lambda.\mu] dt ds dr dp & 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\mu.\lambda - \lambda(\lambda.\mu\lambda + \mu\mu\mu)] dt ds dr dp \\ -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\lambda(1 - \lambda.\lambda) + \mu.\mu.\lambda] dt ds dr dp & 0 & -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [(\lambda.\lambda - \lambda + \mu.\mu)(\lambda.\lambda + \mu\mu)] dt ds dr dp & 0 \\ 0 & -\int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s \mu[\lambda(1 - \lambda.\lambda) + \mu.\lambda.\mu] dt ds dr dp & 0 & \int_0^\phi \int_0^p \int_0^r \int_0^s [\mu.(\lambda.\mu\lambda + \mu\mu\mu)] dt ds dr dp \end{bmatrix}$$

olur. Bu şekilde işlemlere devam edildiği takdirde (5.40) ve (5.46) denklemlerinden  $M(t)$  matrisi elde edilebilir ve her  $m_{ij}$  sonsuz birçok integrasyonu içerir. Bu nedenle (5.45) koşulu

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\omega} \rho(\varphi) d\varphi + \int_0^{\omega} \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) ds dt d\varphi + \int_0^{\omega} \int_0^{\phi} \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) [1 - \lambda(p) \lambda(s)] dt ds dr dp d\varphi - \dots = 0 \\ & \int_0^{\omega} \int_0^s \rho(\varphi) dt d\varphi + \int_0^{\omega} \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) [1 - \lambda(t) \lambda(s)] dt ds dr d\varphi + \dots = 0 \\ & \int_0^{\omega} \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(t) dt ds d\varphi \\ & \quad + \int_0^{\omega} \int_0^{\phi} \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) [\lambda(t) - \lambda(p) \{ \lambda(t) \lambda(s) + \mu(t) \mu(s) \}] dt ds dr dp d\varphi + \dots = 0 \\ & \int_0^{\omega} \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(s) \mu(t) dt ds dr d\varphi \\ & \quad + \int_0^{\omega} \int_0^q \int_0^{\phi} \int_0^p \int_0^r \int_0^s \rho(\varphi) \lambda(p) \mu(t) [1 - \lambda(t) \lambda(s) - \mu(t) \mu(s)] dt ds dp d\phi d\varphi dq + \dots = 0 \end{aligned} \right. \quad (5.47)$$

formundadır. Burada  $\lambda(\xi) = \rho(\xi) k_2(\xi)$ ,  $\mu(\xi) = \rho(\xi) k_3(\xi)$  dir. Şimdi önceki bölümde bahsettiğimiz  $\rho k_2 = \text{sabit}$   $\rho k_3 = \text{sabit}$  olması durumunu aşağıdaki örnekte inceleyelim.

**Örnek 5.2.1.**  $\rho k_2 = \rho k_3 = \text{sabit}$  olmak üzere  $\rho = \text{sabit}$  ve  $k_2 = k_3 = \text{sabit}$  olma özel durumlarını düşünelim. Bu durumda (5.45) formu

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega + \frac{\omega^3}{3!} + (1 - \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^5}{5!} + (1 - \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^7}{7!} - \dots = 0 \\ & \frac{\omega^2}{2!} + (1 - \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^4}{4!} + (1 - \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^6}{6!} - \dots = 0 \\ & k_2 \left[ \frac{\omega^3}{3!} + (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2) \frac{\omega^5}{5!} + (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)^2 \frac{\omega^7}{7!} - \dots = 0 \right] \\ & k_2 k_3 \left[ \frac{\omega^4}{4!} + (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2) \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \end{aligned} \right. \quad (5.48)$$

ya da yukarıdaki denklemler sırasıyla düzenlenir ve birinci denklemde eşitliği  $(1 - \rho^2 k_2^2)^{3/2}$  ile çarparsak

$$(1 - \rho^2 k_2^2)^{1/2} (1 - \rho^2 k_2^2) \omega + (1 - \rho^2 k_2^2)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} + (1 - \rho^2 k_2^2)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} + (1 - \rho^2 k_2^2)^{7/2} \frac{\omega^7}{7!} \dots = 0$$

$$(\rho^2 k_2^2) (1 - \rho^2 k_2^2)^{1/2} \omega + (1 - \rho^2 k_2^2)^{1/2} \omega + (1 - \rho^2 k_2^2)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} + (1 - \rho^2 k_2^2)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} - \dots = 0$$

yani

$$(\rho^2 k_2^2) \sqrt{1 - \rho^2 k_2^2} \omega - \sinh \sqrt{1 - \rho^2 k_2^2} \omega = 0$$

bulunur.

İkinci denklemde  $(1 - \rho^2 k_2^2)$  ile genişletirsek

$$(1 - \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^2}{2!} + (1 - \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^4}{4!} + (1 - \rho^2 k_2^2)^3 \frac{\omega^6}{6!} - \dots = 0$$

$$-1 + 1 + (1 - \rho^2 k_2^2) \frac{\omega^2}{2!} - (1 - \rho^2 k_2^2)^2 \frac{\omega^4}{4!} + (1 - \rho^2 k_2^2)^3 \frac{\omega^6}{6!} - \dots = 0$$

$$-1 + \cos(1 + \rho^2 k_2^2) \omega = 0$$

yani

$$\cosh(1 - \rho^2 k_2^2) \omega = 1 \quad \text{ve} \quad (1 - \rho^2 k_2^2) \omega = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

elde edilir.

Üçüncü denklemde  $(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)^{3/2}$  ile çarpalım

$$k_2 \left[ (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} + (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)^{5/2} \frac{\omega^5}{5!} + (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)^{7/2} \frac{\omega^7}{7!} - \dots = 0 \right]$$

olur. Ayrıca  $(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)$  terimini ekleyip çıkartırsak

$$k_2 \left[ (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)^{1/2} - (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)^{1/2} + (1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2)^{3/2} \frac{\omega^3}{3!} - \dots = 0 \right]$$

bulunur. Yani

$$k_2 \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \omega - \sinh \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \omega \right] = 0$$

bulunur.

Dördüncü denklemi de  $\left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^2$  ile çarparsak

$$\begin{aligned} k_2 k_3 \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^2 \frac{\omega^4}{4!} + \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^3 \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \\ k_2 k_3 \left[ -1 + 1 + \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^2 \frac{\omega^4}{4!} + \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^3 \frac{\omega^6}{6!} + \dots = 0 \right] \\ k_2 k_3 \left[ -1 + \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right) \frac{\omega^2}{2!} + 1 + \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right) \frac{\omega^2}{2!} + \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^2 \frac{\omega^4}{4!} - \dots = 0 \right] \end{aligned}$$

olur. İfadesini düzenlersek

$$k_2 k_3 \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right) \frac{\omega^2}{4} - \sinh^2 \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeler düzenlendiği takdirde

$$\begin{cases} \rho^2 k_2^2 \left(1 - \rho^2 k_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \omega - \sinh \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \omega \right] = 0, \\ \cosh \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \omega \right] = 1 \quad \text{veya} \quad \left(1 - \rho^2 k_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \omega = 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ k_2 \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \omega - \sinh \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \omega \right] \right] = 0, \\ k_2 k_3 \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right) \frac{\omega^2}{4} - \sinh^2 \left[ \left(1 - \rho^2 k_2^2 - \rho^2 k_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega}{2} \right] \right] = 0, \end{cases} \quad (5.49)$$

ifadesi ortaya çıkar.. Burada  $\omega = 2k\pi$  dir.  $\rho k_2 = 0$ ,  $\rho k_3 = 0$  olduğunda görülür ki (5.48) ya da

(5.49) denklemlerinin hepsi sağlanır. Böylece  $\rho = \text{sabit} > 0$  ve  $k_2, k_3 = \text{sabit}$  ile eğrilerinin

sadece  $\rho = \text{sabit} > 0$  ve  $k_2, k_3 = 0$  olması durumunda bu sabit genişlikli timelike eğriler  $E_1^4$

de Lorentziyen çember olur. Şimdi bu çemberlerin karakterizasyonlarını verelim.  $\rho k_2, \rho k_3 = 0$

olduğunda (5.10) sistemi iki durumda incelenebilir:

1)  $\rho k_2 = 1, \rho k_3 = 0$  durumunda

$$m_1' = -m_2, \quad m_2' = m_3 - m_1, \quad m_3' = -m_2, \quad m_4' = 0 \quad (5.50)$$

bulunur.

(5.50) ifadesindeki  $m_1, m_2, m_3$  ve  $m_4$  ile verilen bilinmeyen denklemler aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$m_1''' = 0, \quad m_4' = 0 \quad (5.51)$$

(5.51) ifadesinin genel çözümü

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{c_1}{2} \varphi^2 + c_2 \varphi + c_3 \\ m_2 &= -c_1 \varphi - c_2 \\ m_3 &= \frac{c_1}{2} \varphi^2 + c_2 \varphi + c_3 - c_1 \\ m_4 &= c_4 \end{aligned} \quad (5.52)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Sonuç olarak (5.53) denklemi (5.1) de yazılırsa; yarıçapı

$$d = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\| = (c_1^2 + c_2^2 + c_4^2 - 2c_1c_3)^{\frac{1}{2}} \text{ olan}$$

$$\vec{\alpha}^*(\varphi) = \vec{\alpha}(\varphi) + \left( \frac{c_1}{2} \varphi^2 + c_2 \varphi + c_3 \right) \vec{T} + (-c_1 \varphi - c_2) \vec{N} + \left( \frac{c_1}{2} \varphi^2 + c_2 \varphi + c_3 - c_1 \right) \vec{B} + c_4 \vec{E}, \quad (5.53)$$

Lorentziyen çemberi bulunur. Eğrinin karşı noktaları  $(\vec{\alpha}^*(\varphi), \vec{\alpha}(\varphi))$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  dir.

2)  $\rho k_2, \rho k_3 = 0$  olma durumunda

$$m_1' = -m_2, \quad m_2' = -m_1, \quad m_3' = 0, \quad m_4' = 0 \quad (5.53)$$

bulunur.

(5.53) ifadesindeki  $m_1, m_2, m_3$  ve  $m_4$  ile verilen bilinmeyen denklemler aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned} m_2' &= -m_1'' = -m_1 \\ m_1'' - m_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.54)$$

(5.54) ifadesinin genel çözümü

$$\begin{aligned} m_1 &= A \cosh \varphi + B \sinh \varphi \\ m_2 &= C \cosh \varphi + D \sinh \varphi \\ m_3 &= K \\ m_4 &= L \end{aligned} \quad (5.55)$$

dir. (5.53) de yerine yerleştirirsek  $A = -D, B = -C$  bulunur. Bu durumda denklemin çözüm kümesi

$$\begin{aligned} m_1 &= A \cosh \varphi + B \sinh \varphi \\ m_2 &= -B \cosh \varphi - A \sinh \varphi \\ m_3 &= K \\ m_4 &= L \end{aligned} \quad (5.56)$$

Sonuç olarak (5.56) denklemini (5.8) de yazılırsa

$$d = \|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\| = \left( -A^2 + B^2 + K^2 + L^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

uzaklıkta

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}^*(\varphi) &= \vec{\alpha}(\varphi) + (A \cosh \varphi + B \sinh \varphi) \vec{T} + (-A \sinh \varphi - B \cosh \varphi) \vec{N} \\ &\quad + K \vec{B} + L \vec{E}, \end{aligned}$$

lorentziyen çemberi bulunur. Bu durumda, eğrinin karşı noktalarının bir ikilisi  $(\vec{\alpha}^*(\varphi), \vec{\alpha}(\varphi))$  olup,  $\varphi$  için,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  aralığındadır.

## KAYNAKLAR

- [1] Ball, N. H., *On Ovals*, American Mathematical Monthly, **27** (1930), 348-353.
- [2] Barbier, E. J. de Math., **2** (1860), no. 5, 272-286.
- [3] Blaschke, W., *Konvexe bereichee gegebener konstanter breite und kleinsten inhalt*, Math. Annalen, B. **76** (1915), 504-513.
- [4] Blaschke, W., *Leibziger Berichte*, **67** (1917), 290.
- [5] Breuer, S., and Gottlieb, D., *The Reduction of Linear Ordinary Differential Equations to Equations with Constant Coefficients*, J. Math. Anal. Appl., **32** (1970), no. 1, 62-76.
- [6] Chung, H.C., *A Differential-Geometric Criterion for a Space Curve to be Closed*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 2, 357-361.
- [7] Euler, L., *De Curvis Triangularibus*, Acta Acad. Prtropol., (1778), (1780), 3-30.
- [8] Ferrandez, A., Lucas, P., *On surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski Space* Pasific J. of Math. Vol.152, No.1, (1992).
- [9] Fujiwara, M. *On space curves of constant breadth*, Tohoku Math., J., **5** (1914), 179-784,.
- [10] Hacısalihoğlu H.H.H. *Diferansiyel Geometri*, (1998), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.
- [11] Kazaz, M., Önder, M., Kocayiğit H., *Spacelike curves of constant breadth in Minkowski 4-space*, Int. Journal of Math. Analysis, **2** (2008), no. 22, 1061 – 1068.
- [12] Köse, Ö., *On space curves of constant breadth*, DOĞA Tr. J. Math., **10** (1986), no. 1, 11-14.
- [13] Mağden A., Köse, Ö., *On the curves of constant breadth in  $E^4$  space*, Turkish J. Math., **21** (1997), no. 3, 277-284.
- [14] Mellish, A. P., *Notes on Differential Geometry*, Annals of Math. J., **5** (1914), 179-184.
- [15] O'Neil, B. *Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).
- [16] O'Neill, B., *Elemantery Differential Geometry* Academic Press Inc. New York, 1966.

- [17] Önder, M., Kocayiğit, H., Candan, E., *Differential Equations Characterizing Timelike and Spacelike Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-space* J. Korean Math. So c. 48 (2011), No. 4, pp. 849-866.
- [18] Reuleaux, F., *The Kinematics of Machinery*, Trans. By A.B.W. Kennedy, Dover, Pub. Nex York, (1963).
- [19] Ross, S.L., *Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1974), 440-468.
- [20] Sezer, M., *Differential equations characterizing space curves of constant breadth and a criterion for these curves*, Turkish, J. of Math. **13** (1989), no. 2, 70-78.
- [21] Smakal, S., *Curves of constant breadth*, Czechoslovak Mathematical Journal, **23** (1973), no. 1, 86–94.
- [22] Struik, D. J., *Differential Geometry in the Large*, Bulletin Amer. Mathem. Soc., **37** (1931), 49-62.
- [23] Tanaka, H., *Kinematics Design of Com Follower Systems*, Doctoral Thesis, Columbia Univ., (1976).
- [24] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., *Timelike regle yüzey üzerindeki bir timelike eğrinin Frenet ve Darboux vektörleri* I. Spil Fen Bilimleri Kongresi, 04-05 Eylül, 1995, Manisa.
- [25] Uğurlu, H. H. *On the geometry of timelike surfaces*, Communications, Faculty of Sciences, Univercity of Ankara, All Series, Vol. 46, (1997).
- [26] Valrawe. J. *Curves and Surfaces in Minkowski Space*, Doctoral Thesis, K.U. Leuven, Faculty of Sciences, Leuven, 1995

## **ÖZGEÇMİŞ**

**Adı** : Zennure

**Soyadı** : ÇİÇEK

**Doğum Yeri ve Tarihi:** İzmir-26/06/1977

İlköğrenimimi Hatice Hanım İlköğretim Okulu'nda ve lise öğrenimimi Atatürk Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde tamamladım. 1994 yılında kazandığım Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 1999 yılında bitirdim. 1999 yılından itibaren özel bir dershanede öğretmenliğe başladım. 2010 yılının şubat ayında Pamukkale Üniversitesinde yüksek lisans eğitimime başladım ve ders aşamasını bitirdim. 2012 Şubat ayında Celal Bayar Üniversitesine yatay geçiş yaptım. Halen 2012 yılında Celal Bayar Üniversitesinde başlamış olduğum yüksek lisans öğrenimime ve dershanedeki öğretmenliğime devam etmekteyim. Evli ve bir çocuk sahibiyim.