

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA TİP-2 KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE
KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZER USTA

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2024

10646133

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA TİP-2 KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE
KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZER USTA

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2024

10646133

BEYAN

"4-Boyutlu Öklid Uzayında Tıp-2 Kuaterniyonik Çatıya Göre Kuaterniyonik Eğrilerin Evolüsyonu" adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR X
Destek alındı ise;	
Destekleyen kurum;	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1-BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2-TÜBİTAK	
Diğer;	
ETİK KURUL onayı var	
ise;	
ETİK KURUL karar tarih/ sayı:	/

Öğrenci Adı ve Soyadı

Hazer USTA

Tarih

.....

İmza

.....

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aşamasını titizlikle değerlendiren, bilgi, tecrübe ve önerileriyle tez çalışmam boyunca yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ'a minnet ve şükranlarımı sunarım. Yüksek lisans çalışmalarım boyunca yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi öğretim elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği ve sabrı gösteren aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

Hazer USTA

2024

ÖZET

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA TİP-2 KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı için ayrılmıştır. İkinci bölümde, Öklid uzayında temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca, reel kuaterniyonlar ve reel kuaterniyonik eğrilere ait temel kavramlar, tanımlar ve kuaterniyonik eğri tanımı verilmiştir. Üçüncü bölümde, $\mathbb{Q}$ da elastik olmayan kuaterniyonik eğri akışı ele alınmıştır. Bu bölümde reel kuaterniyonik eğri için akışı tanımlanmış ve elastik olmama koşulu verilmiştir. Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde reel kuaterniyonik eğri için tip-2 kuaterniyonik çatıya göre akış tanımlanmış ve elastik olmama koşulu ele alınmıştır. Tip-2 kuaterniyonik çatıya göre çatı elemanlarının ve eğriliklerinin evolüsyon denklemleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyon; Elastik Olmayan Eğri Akışı; Evolüsyon; Reel Kuaterniyonik Eğri; Tip-2 Kuaterniyonik Çatı.

ABSTRACT

THE EVOLUTION OF QUATERNIONIC CURVES ACCORDING TO TYPE-2 QUATERNIONIC FRAME IN 4-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

This thesis consists of four chapters. The first section is reserved for the introduction. In the second chapter, basic concepts in Euclidean space are given. Additionally, the basic concepts, definitions and curve definition of real quaternions and real quaternion curves are given. In the third section, inextensible quaternionic curve flow in $\mathbb{Q}$ is discussed. Additionally, in this section, the flow is defined for the real quaternionic curve and the inextensible condition is discussed. The fourth chapter constitutes the original part of this study. In this chapter the flow is defined for the real quaternionic curve according to type 2 quaternionic frame and the inextensible condition is It is discussed.

Keywords: Quaternion; Inextensible Curve Flow; Evolution; Real Quaternionic Curve; Type-2 Quaternionic Frame.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Öklid Uzayı ve Eğriler	3
2.2. Kuaterniyonlar ve Kuaterniyonik Eğriler	4
3. ELASTİK OLMAYAN KUATERNİYONİK EĞRİ AKIŞI	11
4. TİP-2 KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE KUATERNİYONİK EĞRİ AKIŞI ...	13
KAYNAKÇA	20

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: n-Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbf{V}$	: Vektör Uzayı
$\langle, \rangle$	: İç Çarpım Fonksiyonu
$\chi(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ de Vektör Alanların Kümesi
$\mathbf{T}_p(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ in p Noktasındaki Tanjant Uzayı
$\ \quad \ $	: Norm
$\wedge$	: Vektörel Çarpım
$\mathbf{q}$	: Kuaterniyon
$\mathbf{Q}$	: Reel Kuaterniyonlar Kümesi
$\mathbf{S}_q$	: Kuaterniyonun Skaler Kısım
$\mathbf{V}_q$	: Kuaterniyonun Vektörel Kısım
$\check{\mathbf{q}}$	: Kuaterniyonun Eşleniği
$\mathbf{q}_0$	: Birim Kuaterniyon
$\mathbf{h}(\quad)$	: Kuaterniyonik İç Çarpım
$\ \mathbf{q}\ $	: Kuaterniyonun Normu
$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$	: Uzaysal Kuaterniyonik Eğrilerin Frenet Vektörleri
$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$	: Kuaterniyonik Eğrinin Frenet Vektörleri
$\{\kappa, \mathbf{k}, (\mathbf{r} \cdot \kappa)\}$	: Kuaterniyonik Eğrinin Frenet Eğrilikleri
$\frac{\partial \beta}{\partial t}$	: Reel Kuaterniyonik Eğri Akışı
$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$	: Tip-2 Kuaterniyonik Çatının Frenet Vektörleri
$\{\kappa, \mathbf{r}, (\kappa \cdot \mathbf{k})\}$	: Tip-2 Kuaterniyonik Çatının Frenet Eğrilikleri

1. GİRİŞ

Herhangi bir yüzeyin ya da eğrinin evolüsyonu (zamana göre değişimi) yüzeyin ya da eğrinin akışına karşılık gelmektedir. Bu durumda herhangi bir eğrideki değişim, eğrinin akışı göz önünde bulundurularak incelenebilir. Bazı bilim dallarındaki problemleri yani fizikteki, kimyadaki, biyolojideki, mühendislikteki ve mimarlıktaki birçok problemin kaynağı şekillerin dinamik yapıları yardımıyla açıklanmaktadır. Şekillerin dinamik yapısının incelenmesi gerektiğinde ilk olarak ele alınması gereken eğri akışıdır. Şekillerin dinamik yapısını incelerken bazı dış etkenler göz ardı edilmektedir. Eğri akışı, 1-parametrelili herhangi bir eğri ailesinin zamana göre değişimidir (evolüsyonudur). Bir eğrinin zamana göre değişimini (evolüsyonunu) incelemek demek aslında bu eğrinin akışını incelemek demektir.

Bir eğrinin akışını incelememiz gerektiğinde yay uzunluğunun değişime uğrayıp uğramadığına bakmamız gerekir. Eğer bir eğrinin yay uzunluğu değişime uğramıyor korunuyor ise yani hiçbir dış etkenden etkilenmiyorsa bu eğrinin akışının elastik olmasından bahsedilemez yani bu eğrinin akışı elastik değildir. Ayrıca eğri akışının fizik ve mühendislik alanlarında uygulanması ve kullanımı oldukça yaygındır. Elastik olmayan eğri hareketleri bilgisayar animasyonlarında, iki ve üç boyutlu görüntü işlemede ve yapısal mekanikte kullanımına oldukça ihtiyaç duyulmaktadır. Bu uygulamaların tamamı eğrilerin dinamik hareketlerinden oluşturmaktadır. Bu sebeple bu uygulamalar eğrilerin zamana göre değişimlerini (evolüsyonlarını) içerir.

Hamilton ve Gage (Gage, 1984; Gage ve Hamilton, 1986) eğrilerin eğrilik vektör alanlarının inceleyerek, yani eğrinin ivme vektörleri boyunca evolüsyonlarını incelemek için yeni yöntemler bulmuştur. Grayson (Grayson, 1987), kapalı düzlemsel eğrilerin bir çembere dönüşümünü ısı denklemleri kullanarak kanıtlamıştır. Ayrıca, Gage (Gage, 1986), alanı koruyan düzlemsel eğri evolüsyonunu yani değişimini incelemiştir. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayındaki eğrilerin elastik olmayan hareketlerini Kwon (Kwon ve Park, 1999; Kwon vd, 2005) incelemiştir. 3- boyutlu Minkowski uzayında eğrilerin elastik olmayan durumlarını Tandoğan (Tandoğan, 2009) incelemiştir. Körpınar ve Baş, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin elastik olmayan hareketleri üzerinde çalışmışlardır (Körpınar ve Baş, 2016).

1843 yılında matematikçi William Rowan Hamilton tarafından Kuaterniyonlar teorisi keşfedilmiştir. Kompleks sayılardan daha geniş kapsamlı bir sayı sistemi arayışına giren Hamilton, 4- boyutlu bir sayı sistemi olan kuaterniyonları keşfetmiştir. Yani kuaterniyon cebiri kompleks sayı sisteminden hareketle ortaya konulmuş bir sayı sistemidir. İlerleyen yıllarda ku-

aterniyon cebirinin gelişmesine J.J. Sylvester , K. Clifford ve A. Cayley gibi bazı matematikçiler katkıda bulunmuşlardır. Ayrıca Türk matematikçiler olarak R. Kaya ve Ş. Koçak da kuaterniyon cebirine katkıda bulunmuşlardır. Bharathi ve Nagaraj tarafından $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ de kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir (Bharathi ve Nagaraj, 1985). Daha sonra F. Kahraman Aksoyak, $\mathbb{R}^4$ de kuaterniyonik eğriler için tip-2 kuaterniyonik çatıyı tanımlamıştır.

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{Q}$ kuaterniyonlar uzayında, bir eğrinin akışı göz önünde bulundurularak tip-2 kuaterniyonik çatıya göre eğrinin ve eğriliklerin t (zaman) parametresine göre değişim (evolüsyon) denklemleri elde edilmiştir. Tip-2 kuaterniyonik çatıya göre akışın elastik olmama durumuyla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca akışın elastik olmaması durumunda tip-2 kuaterniyonik çatının evolüsyon denklemleri elde edilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayı ve Eğriler

Bu kısımda Öklid uzayı ve bu uzaydaki eğriler ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar ele alınmıştır.

Tanım 2.1.1 . $q \in \mathbb{R}^n$ ve $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere q noktasından, $q + v$ noktasına giden yönlü doğru parçasına, q noktasında v_q tanjant vektörü denir. q noktasındaki bütün tanjant vektörlerin kümesi $T_q(\mathbb{R}^n)$, bir reel vektör uzayıdır ve bu uzaya tanjant uzayı denir (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.1.2 . $\mathbb{R}^n$ in her bir q noktasına, q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren fonksiyona, $\mathbb{R}^n$ üstünde bir vektör alanı denir. $\mathbb{R}^n$ üstündeki bütün düzgün vektör alanlarının kümesi $\chi(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $\chi(\mathbb{R}^n)$ kümesi, $\mathbb{R}^n$ üstünde bir vektör uzayıdır (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.1.3 . $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

şeklinde tanımlı iç çarpım fonksiyonuna Öklid iç çarpımı denir. Bu iç çarpımla beraber $\mathbb{R}^n$ vektör uzayına da Öklid uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 2000: 4).

Tanım 2.1.4 . $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere p vektörünün normu iç çarpım yardımıyla

$$||p|| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.5 . $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında, $p = (p_1, p_2, p_3)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3)$ olmak üzere

$$p \wedge q = (p_2 q_3 - q_2 p_3, p_3 q_1 - q_3 p_1, p_1 q_2 - q_1 p_2)$$

eşitliği ile tanımlı $p \wedge q$ vektörüne, p ile q nun vektörel çarpımı denir (Hacısalıhoğlu 2000: 6).

Tanım 2.1.6 . $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir alt aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü düzgün ise α ya $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.1.7 . $\alpha, \mathbb{R}^n$ de bir eğri olmak üzere $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))$$

eşitliğiyle tanımlı $\alpha'(t)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız (teğet) vektörü denir (Shifrin, 2011: 1).

Tanım 2.1.8 . $\alpha, \mathbb{R}^n$ de bir eğri olmak üzere $\forall t \in I \subseteq \mathbb{R}$ için $\alpha'(t) \neq 0$ oluyorsa α ya regüler eğri denir (Hacısalıhoğlu, 2000: 150).

2.2. Kuaterniyonlar ve Kuaterniyonik Eğriler

Bu bölümde kuaterniyonlar ve kuaterniyonik eğriler ile alakalı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1 . Bir reel kuaterniyon, $+1, e_1, e_2, e_3$ dört birim yardımıyla $q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. e_1, e_2, e_3 birimleri, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının standart taban elemanları, $+1$ ise $\mathbb{R}$ cisminin birim elemanıdır. e_1, e_2, e_3 vektörleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i. $e_i \times e_i = -e_i; 1 \leq i \leq 3$,
- ii. $e_i \times e_j = e_j \times e_i = -e_k; (i, j, k), (123)$ un çift permütasyonudur.

$q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$ kuaterniyonunu, $S_q = d$ skaler ve $V_q = ae_1 + be_2 + ce_3$ vektörel kısmı olmak üzere

$$q = S_q + V_q$$

şeklinde yazılabilir. Reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{Q} = \{q | q = d + ae_1 + be_2 + ce_3; a, b, c, d \in \mathbb{R}; e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3\}$$

biçiminde tanımlıdır. (Hacısalıhoğlu, 1983: 79).

Tanım 2.2.2 . $q_1 = d_1 + a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3 = S_{q_1} + V_{q_1}$ ve $q_2 = d_2 + a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3 = S_{q_2} + V_{q_2}$ olmak üzere $\mathbb{Q}$ üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + V_{q_1 \oplus q_2}$$

biçiminde tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983: 80).

$(\mathbb{Q}, \oplus)$ ikilisi değişmeli gruptur ve bu grubun toplamaya göre birim elemanı $(0, 0, 0, 0)$ kuaterniyonudur.

Tanım 2.2.3 . $\mathbb{Q}$ üzerindeki skalarla çarpma işlemi $\mu \in \mathbb{Q}$ ve $q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$ olmak üzere

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(\mu, q) \rightarrow \mu \odot q = \mu q = \mu S_q + \mu V_q$$

biçiminde tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983: 81).

$\mathbb{Q}$ da skalarla çarpma işlemi

- i. $\mu \odot (q_1 \oplus q_2) = \mu \odot q_1 \oplus \mu \odot q_2, \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q},$
- ii. $(\mu_1 + \mu_2) \odot q = (\mu_1 \odot q) + \mu_2 \odot q, \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \forall q \in \mathbb{Q},$
- iii. $(\mu_1 \cdot \mu_2) \odot q = \mu_1 \odot (\mu_2 \odot q),$
- iv. $1 \odot q = q$

özelliklerini sağlar.

$\mathbb{Q}$, toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.2.4 . $q_1 = d_1 + a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$ ve $q_2 = d_2 + a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$ olmak üzere

$$\times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \times q_2$$

kuaterniyonik çarpma işlemi

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 = & d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)e_1 \\ & + (d_1b_2 + b_1d_2 + c_1d_2 - a_1c_2)e_2 + (d_1c_2 + d_2c_1 + a_1b_2 - b_1a_2)e_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983: 82).

Kuaterniyonik çarpma işlemi $\mathbb{R}^3$ uzayındaki iç çarpım ve vektörel çarpım yardımıyla

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1} + S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \wedge V_{q_2}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Kuaterniyon çarpımında sağ çarpım ve sol çarpım farklı olduğundan değişme özelliğine sahip değildir. Özel olarak iki kuaterniyonun vektörel kısımları bir birinin skaler katıysa veya sadece skaler iseler çarpımları değişmelidir.

Tanım 2.2.5 . $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \quad \text{ve} \quad V_{q_1} = V_{q_2}$$

biçimindedir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.2.6 . $q = S_q + V_q = d + ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere q kuaterniyonunun eşleniği

$$\checkmark: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$q \rightarrow \checkmark q = S_q - V_q = d - ae_1 - be_2 - ce_3$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.2.7 . $\mathbb{Q}$ uzayında, h iç çarpım fonksiyonu

$$h: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow h(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 \times \checkmark q_2 + q_2 \times \checkmark q_1)$$

biçiminde tanımlıdır (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 507).

Tanım 2.2.8 . $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $h(q_1, q_2) = 0$ ise q_1 ve q_2 kuaterniyonlarına h -ortogonal denir (Hacısalıhoğlu, 1983: 84).

Tanım 2.2.9 . $q = S_q + V_q = d + ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere q kuaterniyonunun normu

$$\|q\|^2 = h(q, q) = q \times \checkmark q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983: 86).

Tanım 2.2.10 . $q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $||q_0|| = 1$ ise q_0 a birim kuaterniyon denir (Hacısalıhoğlu, 1983: 86).

q herhangi bir kuaterniyon olmak üzere birim kuaterniyon

$$q_0 = \frac{q}{||q||} = \frac{dae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

şeklinde elde edilir.

q_0 birim kuaterniyonu

$$\sin \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}, \quad \cos \theta = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

olmak üzere

$$q_0 = \cos \theta + S_0 \sin \theta$$

şeklinde yazılabilir. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ için

$$S_0 = \frac{ae_1 + be_2 + ce_3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun eksenini denir (Hacısalıhoğlu, 1983: 87).

Tanım 2.2.11 . $q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $q + \check{q} = 0$ ise q ya uzaysal kuaterniyon denir (Bharathi ve Nagaraj 1987: 510).

Uzaysal kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{Q}_u = \{q \in \mathbb{Q} | q + \check{q} = 0\}$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.2.12 . $s \in I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ için uzaysal kuaterniyonik eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_u$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) e_i; \quad 1 \leq i \leq 3$$

biçiminde tanımlanır (Bharathi ve Nagaraj 1987: 510).

Teorem 2.2.13 . α uzaysal kuaterniyonik eğri ve $s \in I$, α nın yay parametresi olsun. α nın $\alpha(s)$ noktasındaki $\{t(s), n(s), b(s)\}$ Frenet vektörleri, $\|\alpha'(s)\| = v(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} t(s) &= \frac{1}{v(s)} \alpha'(s) \\ n(s) &= b(s) \times t(s) \\ b(s) &= \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s) + v(s)v'(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) + v(s)v'(s)\|} \end{aligned}$$

biçimindedir (Bharathi ve ve Nagaraj, 1987: 510).

Teorem 2.2.14 . α uzaysal kuaterniyonik eğri olsun. α nın Frenet 3-ayaklısı $\{t, n, b\}$ ve eğrilikleri de k, r olmak üzere Frenet türev formülleri,

$$\begin{aligned} t' &= kn, \\ n' &= -kt + rb \\ b' &= -rn \end{aligned}$$

şeklindedir. Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

şeklinde de verilebilir (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 511).

Tanım 2.2.15 . $\mathbb{Q}$ da kuaterniyonik eğri

$$\begin{aligned} \beta : I = [0, 1] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ s &\rightarrow \beta(s) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(s) e_i, \quad (1 \leq i \leq 4), \quad e_4 = 1 \end{aligned}$$

eşitliği yardımıyla tanımlanır (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 511).

Teorem 2.2.16 . α , Frenet elemanları $\{t, n, b, k, r\}$ olan bir uzaysal kuaterniyonik eğri ve β , α ile aynı yay parametresine sahip kuaterniyonik eğrisinin Frenet

vektörleri $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ve eğrilikleri de κ, k ve $(r - \kappa)$ olmak üzere Frenet türev formülleri;

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N_1, & \kappa &= ||T'||, & N_1 &= txT, \\ N_1' &= -\kappa T + kN_2, & N_2 &= nxT, \\ N_2' &= -kN_1 + (r - \kappa)N_3, & N_3 &= bxT, \\ N_3' &= -(r - \kappa)N_2 \end{aligned}$$

şeklindedir (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 511).

Frenet türev formülleri;

$$V = \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, V_s = \begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r - \kappa) \\ 0 & 0 & -(r - \kappa) & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $V_s = Q.V$ şeklinde de ifade edilebilir.

Teorem 2.2.17 . α , Frenet elemanları $\{t, n, b, k, r\}$ olan bir uzaysal kuaterniyonik eğri ve β , α ile aynı yay parametresine sahip kuaterniyonik eğri olsun. β kuaterniyonik eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ve eğrilikleri de κ, k ve $(\kappa - k)$ olmak üzere β eğrisine ait tip-2 kuaterniyonik çatının türev formülleri;

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N_1, & \kappa &= ||T'||, & N_1 &= txT, \\ N_1' &= -\kappa T - rN_2, & N_2 &= nxT, \\ N_2' &= rN_1 + (\kappa - k)N_3, & N_3 &= bxT, \\ N_3' &= -(\kappa - k)N_2 \end{aligned}$$

şeklindedir (Kahraman Aksoyak, 2019: 6).

Ayrıca tip-2 kuaterniyonik çatının türev formülleri

$$V = \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, V_s = \begin{bmatrix} T' \\ N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{bmatrix} \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & -r & 0 \\ 0 & -r & 0 & (\kappa - k) \\ 0 & 0 & -(\kappa - k) & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $V_s = Q.V$ şeklinde ifade edilebilir.

3. ELASTİK OLMAYAN KUATERNİYONİK EĞRİ AKIŞI

$\mathbb{Q}$ da diferansiyellenebilir kuaterniyonik bir eğri β olsun. u , eğrinin parametresi ve t de zaman (evolüsyon) parametresi olmak üzere β nın 1 – parametrelili ailesi

$$\begin{aligned}\beta &: (0, l) \times [0, w) \rightarrow \mathbb{Q} \\ (u, t) &\rightarrow \beta(u, t)\end{aligned}$$

biçiminde verilir. $v = \left\| \frac{\partial \beta}{\partial u} \right\|$ olmak üzere β nın yay uzunluğu

$$s(u, t) = \int_0^u v du$$

biçiminde verilir. Ayrıca s yay-parametresi olmak üzere s ve u parametreleri arasında $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 3.1 . β , $\mathbb{Q}$ da diferansiyellenebilir kuaterniyonik bir eğri ve g_i ler skaler hız fonksiyonu olmak üzere β nın akışı

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = g_1 T + g_2 N + g_3 B_1 + g_4 B_2$$

şeklinde tanımlıdır (Körpınar ve Baş, 2016).

$s(u, t) = \int_0^u v du$, β nın yay uzunluğu varyasyonu olmak üzere β nın herhangi bir değişime sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0, \quad \forall u \in (0, l)$$

gerekli ve yeterlidir.

Tanım 3.2 . $\frac{\partial \beta}{\partial t}$, β diferansiyellenebilir kuaterniyonik eğrisinin akışı olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \beta}{\partial u} \right\| = 0$$

ise akışın zaman göre değişimi sıfırdır, yani $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ elastik değildir denir.

Teorem 3.3 . $\frac{\partial \beta}{\partial t}$, $\beta(u, t)$ nın akışı olsun. $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışının elastik olmaması için $\frac{\partial g_1}{\partial s} = g_2 \kappa$ gerekli ve yeterlidir (Körpınar ve Baş, 2016).

Teorem 3.4 . β , $\mathbb{Q}$ da diferansiyellenebilir bir kuaterniyonik eğri olmak üzere $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik olmasın. β nın Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} - g_3 k \right) N + \left(g_2 k + \frac{\partial g_3}{\partial s} - g_4 (r - \kappa) \right) B_1 \\ &\quad + \left(g_3 (r - \kappa) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) B_2, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= - \left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} - g_3 k \right) T + \eta_1 B_1 + \eta_2 B_2, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= - \left(g_2 k + \frac{\partial g_3}{\partial s} - g_4 (r - \kappa) \right) T - \eta_1 N + \eta_3 B_2, \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} &= - \left(g_3 (r - \kappa) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) T - \eta_2 N - \eta_3 B_1\end{aligned}$$

şeklinde. Burada $\eta_1 = h \left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1 \right)$, $\eta_2 = h \left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2 \right)$, $\eta_3 = h \left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2 \right)$ eşitlikleri mevcuttur (Körpınar ve Baş, 2016).

Teorem 3.5 . $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik değil ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} (g_1 \kappa) + \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} k - g_3 \frac{\partial k}{\partial s} - g_2 k^2 + g_4 k (r - \kappa), \\ \frac{\partial k}{\partial t} &= g_2 \kappa k + \frac{\partial g_3}{\partial s} k - g_4 \kappa (r - \kappa) + \frac{\partial \eta_1}{\partial s} - (r - \kappa) \eta_2, \\ \frac{\partial (r - \kappa)}{\partial t} &= k \eta_2 + \frac{\partial \eta_3}{\partial s}\end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur (Körpınar ve Baş, 2016).

Sonuç 3.6 .

$$\begin{aligned}\kappa \eta_1 &= g_1 \kappa k + 2 \frac{\partial g_2}{\partial s} k - g_3 k^2 + g_2 \frac{\partial k}{\partial s} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial g_4}{\partial s} (r - \kappa) - g_4 \frac{\partial (r - \kappa)}{\partial s} \\ &\quad - g_3 (r - \kappa)^2, \\ \kappa \eta_2 &= g_2 k (r - \kappa) + 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} (r - \kappa) - g_4 (r - \kappa)^2 + g_3 \frac{\partial (r - \kappa)}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_4}{\partial s^2}, \\ (r - \kappa) \eta_1 &= - \frac{\partial \eta_2}{\partial s} - g_3 \kappa (r - \kappa) - \frac{\partial g_4}{\partial s} \kappa + \eta_3 k.\end{aligned}$$

4. TİP-2 KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE KUATERNİYONİK EĞRİ AKIŞI

$\mathbb{Q}$ da diferansiyellenebilir kuaterniyonik bir eğri β olsun. β eğrisinin zaman parametresi t ye bağlı ailesi

$$\begin{aligned}\beta &: (0, l) \times [0, w) \rightarrow \mathbb{Q} \\ (u, t) &\rightarrow \beta(u, t)\end{aligned}$$

biçiminde verilir. $v = \left\| \frac{\partial \beta}{\partial u} \right\|$ olmak üzere β nın yay uzunluğu

$$s(u, t) = \int_0^u v du$$

biçiminde verilir. Ayrıca s yay-parametresi olmak üzere s ve u parametreleri arasında

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.1)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 4.1 . β , $\mathbb{Q}$ da diferansiyellenebilir kuaterniyonik bir eğri ve g_i ler skaler hız fonksiyonu olmak üzere β eğrisinin tip-2 kuaterniyonik çatıya göre akışı

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = g_1 T + g_2 N_1 + g_3 N_2 + g_4 N_3$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 4.2 . $\mathbb{Q}$ da kuaterniyonik bir eğri β ve β nın hızı v olsun. Tip-2 kuaterniyonik çatıya göre v nin evolüsyonu

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial g_1}{\partial u} - v \kappa g_2 \quad (4.2)$$

şeklindedir.

İspat. v diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan dolayı u ve t parametrelerine göre kısmi türevlerin sırası değiştirilebilir. u ve t parametrelerine göre kısmi türevlerin sırasının değiştirilebileceği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
2v \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} h \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial \beta}{\partial u} \right) \\
&= 2h \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right) \right) \\
&= 2h \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \right) \\
&= 2h \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} (g_1 T + g_2 N_1 + g_3 N_2 + g_4 N_3) \right) \\
&= 2v \left(\frac{\partial g_1}{\partial u} - v \kappa g_2 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial g_1}{\partial u} - v \kappa g_2$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3 . $\frac{\partial \beta}{\partial t}, \beta(u, t)$ nın akışı olsun. Tip-2 kuaterniyonik çatıya göre $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışının elastik olmaması için

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} = g_2 \kappa \quad (4.3)$$

olması gerekli ve yeterlidir.

İspat. $\frac{\partial \beta}{\partial u}$ akışının elastik olmadığını kabul edelim. (4.1) denklemi ve (4.2) denklemi göz önünde bulundurulursa

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = \int_0^u \left(\frac{\partial g_1}{\partial u} - v \kappa g_2 \right) du = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağlanabilmesi için

$$\frac{\partial g_1}{\partial u} = g_2 v \kappa$$

olmalıdır. (4.1) eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} = g_2 \kappa$$

dir. Tersine

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} = g_2 \kappa$$

alınırsa akışın elastik olmadığı gösterilebilir. ■

Teorem 4.4 . β , $\mathbb{Q}$ da diferansiyellenebilir bir kuaterniyonik eğri olmak üzere $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik olmasın. β nın $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ tip-2 kuaterniyonik çatısının evolüsyon denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} + g_3 r \right) N_1 + \left(-g_2 r + \frac{\partial g_3}{\partial s} - g_4 (\kappa - k) \right) N_2 \\ &\quad + \left(g_3 (\kappa - k) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) N_3, \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} &= - \left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} + g_3 r \right) T + \eta_1 N_2 + \eta_2 N_3, \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} &= \left(g_2 r - \frac{\partial g_3}{\partial s} + g_4 (\kappa - k) \right) T - \eta_1 N_1 + \eta_3 N_3, \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} &= - \left(g_3 (\kappa - k) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) T - \eta_2 N_1 - \eta_3 N_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde dir. Burada $\eta_1 = h \left(\frac{\partial N_1}{\partial t}, N_2 \right)$, $\eta_2 = h \left(\frac{\partial N_1}{\partial t}, N_3 \right)$, $\eta_3 = h \left(\frac{\partial N_2}{\partial t}, N_3 \right)$ eşitlikleri mevcuttur.

İspat. Kabul edelimki $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik olmasın. T nin zaman parametresine göre kısmi türevi u ve t parametrelerine göre kısmi türevlerin sırasının değiştirilebileceği göz önünde bulundurulursa

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \beta}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (g_1 T + g_2 N_1 + g_3 N_2 + g_4 N_3)$$

şeklinde elde edilir. Tip-2 kuaterniyonik çatının türev denklemleri ve (4.3) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} + g_3 r \right) N_1 + \left(-g_2 r + \frac{\partial g_3}{\partial s} - g_4 (\kappa - k) \right) N_2 \\ &\quad + \left(g_3 (\kappa - k) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) N_3 \end{aligned}$$

elde edilir. $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ tip-2 kuaterniyonik çatısının ortogonal olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(T, N_1) = h\left(\frac{\partial T}{\partial t}, N_1\right) + h\left(T, \frac{\partial N_1}{\partial t}\right) \\
&= \left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} + g_3 r\right) + h\left(T, \frac{\partial N_1}{\partial t}\right), \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(T, N_2) = h\left(\frac{\partial T}{\partial t}, N_2\right) + h\left(T, \frac{\partial N_2}{\partial t}\right) \\
&= \left(-g_2 r + \frac{\partial g_3}{\partial s} - g_4 (\kappa - k)\right) + h\left(T, \frac{\partial N_2}{\partial t}\right), \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(T, N_3) = h\left(\frac{\partial T}{\partial t}, N_3\right) + h\left(T, \frac{\partial N_3}{\partial t}\right) \\
&= \left(g_3 (\kappa - k) + \frac{\partial g_4}{\partial s}\right) + h\left(T, \frac{\partial N_3}{\partial t}\right), \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(N_1, N_2) = h\left(\frac{\partial N_1}{\partial t}, N_2\right) + h\left(N_1, \frac{\partial N_2}{\partial t}\right) \\
&= \eta_1 + h\left(N_1, \frac{\partial N_2}{\partial t}\right), \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(N_1, N_3) = h\left(\frac{\partial N_1}{\partial t}, N_3\right) + h\left(N_1, \frac{\partial N_3}{\partial t}\right) \\
&= \eta_2 + h\left(N_1, \frac{\partial N_3}{\partial t}\right), \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(N_2, N_3) = h\left(\frac{\partial N_2}{\partial t}, N_3\right) + h\left(N_2, \frac{\partial N_3}{\partial t}\right) \\
&= \eta_3 + h\left(N_2, \frac{\partial N_3}{\partial t}\right),
\end{aligned}$$

elde edilir. T nin evolüsyon denkleminde de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial t} &= -\left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} + g_3 r\right) T + \eta_1 N_2 + \eta_2 N_3, \\
\frac{\partial N_2}{\partial t} &= \left(g_2 r - \frac{\partial g_3}{\partial s} + g_4 (\kappa - k)\right) T - \eta_1 N_1 + \eta_3 N_3, \\
\frac{\partial N_3}{\partial t} &= -\left(g_3 (\kappa - k) + \frac{\partial g_4}{\partial s}\right) T - \eta_2 N_1 - \eta_3 N_2
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. ■

Teorem 4.5 . $\beta(u, t)$ reel kuaterniyonik eğrisinin akışı $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik değil ise tip-2 kuaterniyonik çatıya göre

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial g_1}{\partial s} \kappa + g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} r + g_3 \frac{\partial r}{\partial s} - g_2 r^2 - g_4 r (\kappa - k)$$

dır.

İspat. $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$, $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)$ kısmi türevleri tip-2 kuaterniyonik çatının türev formülleri ve (4.4) denklemini göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \left(-g_1 \kappa^2 - \frac{\partial g_2}{\partial s} \kappa - g_3 \kappa r \right) T \\ &+ \left(\frac{\partial g_1}{\partial s} \kappa + g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} r + g_3 \frac{\partial r}{\partial s} - g_2 r^2 - g_4 r (\kappa - k) \right) N_1 \\ &+ \left(-g_1 \kappa r - 2 \frac{\partial g_2}{\partial s} r - g_3 r^2 + g_2 \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial s^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial g_4}{\partial s} (\kappa - k) - g_4 \frac{\partial (\kappa - k)}{\partial s} - g_3 (\kappa - k)^2 \right) N_2 \\ &+ \left(-g_2 r (\kappa - k) + 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} (\kappa - k) - g_4 (\kappa - k)^2 \right. \\ &\quad \left. + g_3 \frac{\partial (\kappa - k)}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_4}{\partial s^2} \right) N_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (\kappa N_1) = \frac{\partial \kappa}{\partial t} N_1 + \kappa \frac{\partial N_1}{\partial t} \\ &= \left(-g_1 \kappa^2 - \frac{\partial g_2}{\partial s} \kappa - g_3 \kappa r \right) T + \frac{\partial \kappa}{\partial t} N_1 + \eta_1 \kappa N_2 + \eta_2 \kappa N_3. \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)$ eşitliğinin N_1 in bileşeninden

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial g_1}{\partial s} \kappa + g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} r + g_3 \frac{\partial r}{\partial s} - g_2 r^2 - g_4 r (\kappa - k)$$

elde edilir. ■

Ayrıca $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)$ eşitliğinden hareketle aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.6 .

$$\begin{aligned} \kappa \eta_1 &= -g_1 \kappa r - 2 \frac{\partial g_2}{\partial s} r - g_3 r^2 + g_2 \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial g_4}{\partial s} (\kappa - k) \\ &\quad - g_4 \frac{\partial (\kappa - k)}{\partial s} - g_3 (\kappa - k)^2, \\ \kappa \eta_2 &= -g_2 r (\kappa - k) + 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} (\kappa - k) - g_4 (\kappa - k)^2 + g_3 \frac{\partial (\kappa - k)}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_4}{\partial s^2}. \end{aligned}$$

Teorem 4.7 . $\beta(u, t)$ reel kuaterniyonik eğrisinin akışı $\left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)$ olsun. $\left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)$ akışı elastik değil

ise tip-2 kuaterniyonik çatıya göre

$$\frac{\partial r}{\partial t} = g_2 \kappa r - \frac{\partial g_3}{\partial s} \kappa + g_4 \kappa (\kappa - k) - \frac{\partial \eta_1}{\partial s} + \eta_2 (\kappa - k)$$

dir.

İspat. Tip-2 kuaterniyonik çatının türev formülleri ve (4.4) denklemini kullanılarak $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \right)$ ve $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N_1}{\partial s} \right)$ kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \right) &= \left(-\frac{\partial g_1}{\partial s} \kappa - g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} + \frac{\partial g_3}{\partial s} r + g_3 \frac{\partial r}{\partial s} \right) T \\ &+ \left(-g_1 \kappa^2 + \frac{\partial g_2}{\partial s} \kappa + g_3 \kappa r + \eta_1 r \right) N_1 \\ &+ \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial s} - \eta_2 (\kappa - k) \right) N_2 \\ &+ \left(\eta_1 (\kappa - k) + \frac{\partial \eta_2}{\partial s} \right) N_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N_1}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (-\kappa T - r N_2) \\ &= \left(-\frac{\partial \kappa}{\partial t} - g_2 r^2 + \frac{\partial g_3}{\partial s} r - g_4 r (\kappa - k) \right) T \\ &+ \left(-g_1 \kappa^2 - \frac{\partial g_2}{\partial s} \kappa - g_3 \kappa r + \eta_1 r \right) N_1 \\ &+ \left(g_2 r \kappa - \frac{\partial g_3}{\partial s} \kappa + g_4 \kappa (\kappa - k) - \frac{\partial r}{\partial t} \right) N_2 \\ &+ \left(-g_3 \kappa (\kappa - k) - \frac{\partial g_4}{\partial s} \kappa - \eta_3 r \right) N_3 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N_1}{\partial s} \right)$ den

$$\frac{\partial r}{\partial t} = g_2 \kappa r - \frac{\partial g_3}{\partial s} \kappa + g_4 \kappa (\kappa - k) - \frac{\partial \eta_1}{\partial s} + \eta_2 (\kappa - k)$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.8 . $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N_1}{\partial s} \right)$, eşitliğinden kalanlar göz önünde bulundurulursa

$$\eta_1 (\kappa - k) = -\frac{\partial \eta_2}{\partial s} - g_3 \kappa (\kappa - k) - \frac{\partial g_4}{\partial s} \kappa - \eta_3 r$$

elde edilir.

Teorem 4.9 . $\beta(u, t)$ reel kuaterniyonik eğrisinin akışı $\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)$ olsun. $\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)$ akışı elastik değil ise tip-2 kuaterniyonik çatıya göre

$$\frac{\partial (\kappa - k)}{\partial t} = -\eta_2 r + \frac{\partial \eta_3}{\partial s}$$

dir.

İspat. $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial N_2}{\partial t} \right)$ ve $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N_2}{\partial s} \right)$ kısmi türevleri tip-2 kuaterniyonik çatının türev formülleri ve (4.4) denklemini göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial N_2}{\partial t} \right) &= \left(\frac{\partial g_2}{\partial s} r + g_2 \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial s^2} + \frac{\partial g_4}{\partial s} (\kappa - k) + g_4 \frac{\partial (\kappa - k)}{\partial s} + \eta_1 \kappa \right) T \\ &\quad + \left(g_2 \kappa r - \frac{\partial g_3}{\partial s} \kappa + g_4 \kappa (\kappa - k) - \frac{\partial \eta_1}{\partial s} \right) N_1 \\ &\quad + (\eta_1 r - \eta_3 (\kappa - k)) N_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial s} \right) N_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N_2}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (r N_1 + (\kappa - k) N_3) \\ &= \left(-g_1 r \kappa - \frac{\partial g_2}{\partial s} r - g_3 r^2 - g_3 (\kappa - k)^2 - \frac{\partial g_4}{\partial s} (\kappa - k) \right) T \\ &\quad + \left(\frac{\partial r}{\partial t} - \eta_2 (\kappa - k) \right) N_1 \\ &\quad + (\eta_1 r - \eta_3 (\kappa - k)) N_2 \\ &\quad + \left(\eta_2 k + \frac{\partial (\kappa - k)}{\partial t} \right) N_3 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial N_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N_2}{\partial s} \right)$ eşitliğinin N_3 bileşeninden

$$\frac{\partial (\kappa - k)}{\partial t} = -\eta_2 r + \frac{\partial \eta_3}{\partial s}$$

elde edilir. ■

KAYNAKÇA

- Gage, M. E.**(1984). Curve shortening makes convex curves circular. *Inventiones mathematicae*, 76(2), 357-364.
- Gage, M., & Hamilton, R. S.** (1986). The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, 23(1), 69-96.
- Grayson, M. A.** (1987). The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Differential geometry*, 26(2), 285-314.
- Kwon, D., Park, F. C., & Chi, D. P.** (2005). Inextensible flows of curves and developable surface. *Applied Mathematics Letters*. 18(10), 1156-1162.
- Kwon, D. Y., & Park, F. C.** (1999). Evolution of inelastic plane curves. *Applied Mathematic Letters*, 12(6), 115-119.
- Tandoğan, F.** (2009). Minkowski uzayında eğriler ve elastik olmayan hareketler. *Y. Lisans Tezi, Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.*
- Körpınar, T., & Bas, S.** (2016). Characterization of quaternionic curves by inextensible flows. *Prespacetime Journal*, 7(12), 1680-1684.
- Bharathi, K., & Nagaraj, M.** (1985). Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formulae. *Indian J. Pure Appl. Math*, 16: 741-756.
- Hacısalıhoğlu, H. H.** (2000). Diferansiyel Geometri I. *Ankara Üniversitesi, Ankara*, 1-270.
- Sabuncuoğlu, A.** (2017). Diferansiyel Geometri. *Nobel Yayınları, Ankara*, 1-522.
- Shifrin, T.** (2011). Differential Geometry: A first course in curves and surfaces, preliminary version, Fall, 125 p. *University of Georgia, Athens, Georgia*, 30602.
- Hacısalıhoğlu, H. H.** (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. *Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara*, 1-335.
- Bharathi, K., & Nagaraj, M.** (1987). Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formula. *Indian J. Pure Appl. Math*, 18(6), 507-511.
- Kahraman Aksoyak, F.** (2019). New type of quaternionic frame in $\mathbb{R}$. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 16(06), 1950084.