



**60-72 AYLIK OKULÖNCESİ EĞİTİMİ
ALAN ÇOCUKLARIN CEBİRSEL
DÜŞÜNME BECERİLERİNİN
İNCELENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Aydan Hajizada

Eskişehir, 2025

**60-72 AYLIK OKULÖNCESİ EĞİTİMİ ALAN ÇOCUKLARIN
CEBİRSEL DÜŞÜNME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ**

Aydan HAJIZADA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

Danışman: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

**Anadolu Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

Eskişehir

Mart, 2025

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Aydan HAJIZADA'nın "60-72 Aylık Okulöncesi Eğitimi Alan Çocukların Cebirsel Düşünme Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı tezi 07 Şubat 2025 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi programında, yüksek lisans tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	<u>Ünvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI	
Üye	: Prof. Dr. Nilüfer KÖSE	
Üye	: Dr.Öğr.Üy. Deniz ÇELİKSOY	

Prof. Dr. Nafiz Öncü CAN

Anadolu Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

60-72 AYLIK OKULÖNCESİ EĞİTİMİ ALAN ÇOCUKLARIN CEBİRSEL DÜŞÜNME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Aydan HAJIZADA

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

Anadolu Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Mart 2025

Danışman: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

Çocukların matematik yapımları için erken olduğu bazı çevrelerde ifade edilse de zihinlerinin matematik için hazır olduğu söylenebilir. Bu düşünceden hareketle araştırmada 60-72 aylık okulöncesi eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme becerilerinin incelenmesi amaçlanmış ve temel nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Araştırmada yer alan katılımcılar Eskişehir ili, sosyoekonomik düzeyi orta-yüksek seviyede olan bir devlet anaokulunda öğrenim gören 60-72 aylık sekiz çocuktan oluşmaktadır. Veriler klinik görüşmeler, çocukların kullandığı eylem ve söylemlerin gözlenebildiği video kayıtları ve çocukların çizim yapımları yardımı ile toplanmıştır. Elde edilen veriler cebirsel düşünmenin Analitik Düşünme, Yapısal Düşünme ve Fonksiyonel Düşünme alt bileşenleri bağlamında analiz edilmiştir. Sonuç olarak, çocukların sayıların farklı kombinasyonlarını oluştururken dört farklı strateji kullandıkları, eşitliği eşdeğerlik ve aynılık olarak anlamlandırdıkları, küçük çocukların fonksiyonel düşünme bağlamında yinelemeli ilişkiyi kullandıkları, bazı çocukların fonksiyonel ilişki kurmada zorlandıkları, akademik düzeyi yüksek olan çocukların ise fonksiyonel ilişki kurabildikleri görülmüştür. Çocukların düşüncelerini sözel ifadeler, somut nesneler ve çizimler kullanarak somutlaştırmaya yöneldikleri görülmüştür. Yapılan araştırmanın sonucunda çocukların matematik düzeylerinin düşünülenenden daha üst seviyede olduğu, ad koymadan kavramları zihninde oluşturabildikleri söylenebilir.

Anahtar Sözcükler: Cebirsel düşünme, analitik düşünme, yapısal düşünme, fonksiyonel düşünme, 60-72 aylık çocuklar

ABSTRACT

INVESTIGATING ALGEBRAIC THINKING IN 60-72 MONTH PRESCHOOLERS

Aydan HAJIZADA

Department of Mathematics Education

Programme in Mathematics Education

Graduate School of Anadolu University, March 2025

Supervisor: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

Although some argue that it is too early for young children to engage in mathematical activities, research suggests that young children's minds are developmentally ready for mathematics. In this context, this research aimed to examine the algebraic thinking skills of 60-72-month-old preschool students. This study aims to examine how 60-72-month-old preschool children develop algebraic thinking skills, conceptualize mathematical ideas, and utilize various strategies in their problem-solving processes. The study included eight children aged 60-72 months studying in a state kindergarten with middle-to-high socioeconomic background located in Eskişehir province. Data were collected using clinical interviews, video recordings of children's actions and discourses, and children's drawing sheets. The data were analyzed in the context of Analytical Thinking, Structural Thinking and Functional Thinking subcomponents of algebraic thinking. As a result, it was observed that children used four different strategies while forming different combinations of numbers, they interpreted equality as equivalence and sameness, in the context of functional thinking young children made iterative relationships, some children had difficulty in making functional relationships, and some children were able to make functional relationships. It was also observed that children use physical objects, drawings and words to explain their thoughts, children's mathematical level was higher than previously thought and that they were able to form concepts in their minds without naming them.

Keywords: Algebraic thinking, Analytical thinking, Structural thinking,
Functional thinking, Children aged 60-72 months

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman bana destek olan, akademik bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, güzel sözleriyle ve sıcak davranışlarıyla beni motive eden ve her zaman en iyisini yapmaya teşvik eden, görüş ve önerileri ile süreç boyunca desteğini esirgemeyen ve katkılarıyla tez çalışmamızı bu seviyeye ulaştıran çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Dilek TANIŞLI'ya,

Tezimi detaylı bir şekilde okuyarak ayrıntılı dönütler ve öneriler vererek tezimin iyileşmesini sağlayan değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Nilüfer KÖSE ve Doç. Dr. Deniz ÇELİKSOY'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyu attığım tüm adımlarımda bana inanan ve güvenen, özellikle eğitim almak için Türkiye'ye gelme kararında maddi ve manevi olarak bana destek olan, duaları ile kalbimi ferahlatan, bana kattıkları değerler ile bugün olduğum kişi olmamı sağlayan anneme ve babama, daim sevgisi, desteği ve varlığı ile bana güç veren canım ikizim Fidan IZATULLAYEVA'ya, her anımda yanımda olan ve bana sevgiyle destek veren, en büyük motivasyon kaynağım olan aileme,

Eskişehir'in bana kazandırdığı, saatlerce konuştuğum, güldüğüm güzel kalpli hayat arkadaşım Feyza YILMAZ'a ve pozitif enerjisi ile beni her zaman motive eden ve zor anılarımda yanımda olan, beni her zaman destekleyen sevgili arkadaşım Sabina GULİYEVA'ya,

Bu uzun ve zorlu yolculukta sabır ve anlayışla yanımda olan, desteğini her zaman hissettiren, sevgisi ile bana güç ve huzur veren, hayatımı güzelleştiren sevgili eşim Zahir HAJIZADA'ya sonsuz teşekkür ederim

Aydan HAJIZADA

10.02.2025

ETİK KURUL BELGESİ BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Aydan HAJIZADA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK KURUL BELGESİ BEYANNAMESİ.....	vi
TABLolar DİZİNİ.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
1 GİRİŞ.....	1
1.1 Problem Durumu	1
1.2 Amaç.....	4
1.3 Önem	4
1.4 Sınırlıklar	5
1.5 KAVRAMSAL ÇERÇEVE	6
1.5.1 Cebirsel Düşünme Nedir?	6
1.5.2 Cebirsel Düşünmenin Alt Bileşenleri	8
1.5.3 Araştırmada Benimsenen Kavramsal Çerçeve	15
2 İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	25
2.1 Yurt Dışı Yapılan Araştırmalar.....	25
2.2 Yurt İçi Yapılan araştırmalar	33
3 YÖNTEM.....	38
3.1 Araştırma Modeli.....	38
3.2 Katılımcılar	38
3.3 Verilerin Toplanması.....	39
3.3.1 Veri Toplama Aracı.....	40

3.3.2	Çizim yaprakları.....	47
3.3.3	Klinik Görüşme ve Video kayıtları	48
3.3.4	Verilerin analizi.....	50
3.3.5	Araştırmanın geçerlik ve güvenirliği	52
3.3.6	Araştırmacının rolü	55
3.3.7	Etik konular.....	56
4	BULGULAR.....	57
4.1	Çocukların Birinci Hikâye Problemine İlişkin Yanıtlarından Elde Edilen Bulgular.....	57
4.2	Çocukların İkinci Probleme İlişkin Yanıtlarından Elde Edilen Bulgular	74
4.3	Çocukların Üçüncü Probleme İlişkin Yanıtlarından Elde Edilen Bulgular	91
5	SONUÇ.....	108
5.1	Küçük Çocukların Cebirsel Düşünme Bağlamında Yapısal Düşünme Becerilerine Yönelik Sonuçlar	108
5.2	Küçük Çocukların Cebirsel Düşünme Bağlamında Analitik Düşünme Becerilerine Yönelik Sonuçlar	110
5.3	Küçük Çocukların Cebirsel Düşünme Bağlamında Fonksiyonel Düşünme Becerilerine Yönelik Sonuçlar	111
5.4	Küçük Çocukların Problem Çözme Sürecinde Genelleme, Doğrulama, Gerekçelendirme ve Temsil Kullanma Becerilerine Yönelik Sonuçlar	112
5.5	Çalışmadan Elde Edilen Genel Sonuçlar	115
6	TARTIŞMA.....	118
7	ÖNERİLER.....	130
	KAYNAKÇA.....	132
	EKLER	
	ÖZ GEÇMİŞ	

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 1.1 Denklem Çözme Yaklaşımları.....	19
Tablo 4.1 Parçalama Stratejilerinin Tasvirleri	59
Tablo 4.2 Sistematik Stratejisi ve Temsil Örnekleri	61
Tablo 4.3 Eşit Odaklı Stratejisi Örnekleri.....	62
Tablo 4.4 Rastgele Stratejisi Örnekleri	66
Tablo 4.5 İki Farklı Parçalama Stratejisi Örnekleri	67
Tablo 4.6 Somut Temsilinde Stratejiler ve Parçalamalar.....	68
Tablo 4.7 Çizim Temsilinde Stratejiler ve Parçalamalar	69
Tablo 4.8 “Birlikte Değişim”, “Eşleme”, “Bir Önceki Terime İki Ekleme” Stratejilerin Görsel Açıklamaları.....	76
Tablo 4.9 Birlikte Değişim Stratejisi Örnekleri	77
Tablo 4.10 Toplamsal İlişki ve Çarpımsal İlişki Stratejileri Örnekleri.....	79
Tablo 4.11 Sanem’in Çiziminin Matematiksel Gösterimi	81
Tablo 4.12 Bir Önceki Terime İki Ekleme Stratejisi Örnekleri	83
Tablo 4.13 Sabit Farkı Algılayamayanların Örnekleri.....	86
Tablo 4.14 Eşleştirme Stratejisi Örnekleri	96
Tablo 4.15 Duru ve Gül’ün örnekleri.....	99
Tablo 4.16 Üzerine Sayma Stratejisi Örnekleri	103
Tablo 4.17 Bilinmeyen algılamayanların örnekleri	104
Tablo 5.1 Problem Çözme Sürecinde Çocukların Eylemleri	113
Tablo 5.2 Çocukların Kullandıkları Temsiller	114

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1 Cebirsel Düşünmenin Çatısı	7
Şekil 1.2 Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları	13
Şekil 1.3 Cebirsel Düşünmenin Alt Boyutları	14
Şekil 1.4 Cebirsel Düşünmenin Bileşenleri	15
Şekil 1.5 $x + y + 2 = x + 2y + 1$ Denkleminin Somut Modeli	18
Şekil 1.6 Ortak Paranteze Alma ve Dağılma Özelliği	22
Şekil 3.1 Köpek Kulübe Hikâyesi Üzerinden Anlatılan Görseller	42
Şekil 3.2 Fiyat Belirleme Probleminin Çalışma Kâğıdı	44
Şekil 3.3 Kutudaki Şekerler Probleminin Somut Materyalleri	47
Şekil 3.4 Görüşme Ortamının Tasviri	49
Şekil 4.1 Birinci Soruya İlişkin Bulgular	58
Şekil 4.2 İkinci Soruya İlişkin Bulgular	75
Şekil 4.3 Sanem'in Kurduğu Fonksiyonel İlişkinin Tasviri	80
Şekil 4.4 Yasemin'in Kurduğu Fonksiyonel İlişkinin Tasviri	83
Şekil 4.5 Üçüncü Soruya İlişkin Bulgular	92
Şekil 4.6 Eşleştirme" Stratejisinin Tasviri	93
Şekil 4.7 İlkokul 1. Sınıf Kaynaklarında "Üzerine Sayma" Stratejisi	94
Şekil 4.8 "Üzerine Sayma" stratejisinin tasviri	94
Şekil 4.9 "Ekleme ve Fazla Olanı Silme" stratejisinin tasviri	95

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı



1 GİRİŞ

1.1 Problem Durumu

Matematikçiler dünyayı farklı bir şekilde görürler. Meraklı zihinleri, olayların özünü anlamaya çalışır ve her durumu eleştirel olarak değerlendirirler. Matematiksel düşünme olarak ifade edebileceğimiz bu özelliklerin matematik yapmanın bir sonucu olduğu söylenebilir. Matematik yalnızca denklem ve formüllerin değil, aynı zamanda yapıların, düzenin ve ilişkilerin bilimidir. Matematiksel düşünme ise, nesnelerin ilişkiler halinde birleştirildiği bir dünya algısıdır. Matematiksel düşünme ile sıradan (gündelik) düşünme arasındaki temel fark, daha derine inme, herhangi bir ifadeyi veya bilgiyi körü körüne kabul etmeme, kavramların özünü bulmak için anlamlar, nedenler arayarak eleştirel bir bakış açısıyla değerlendirme durumudur (Stacey, 2006).

Matematiksel düşünme becerisi doğuştan gelen bir beceri midir? Birçok insan matematiksel düşünmenin geliştirilemeyeceğine, onunla doğmamız gerektiğine inanmaktadır. Ancak matematik öğrenilebilir ve matematiksel düşünme geliştirilebilir (Geist, 2001). İnsan beyni, örneğin bir çukurdan kaçınmak için bir arabanın yörüngesini hesaplarken veya bir voleybol oyunu sırasında topa elleriyle vurmaya çalışırken sürekli olarak karmaşık matematiksel hesaplamalar gerçekleştirir. Sadece kişi bu düşünce sürecinin farkında değildir. Burada çocuğa bilinçli bir matematikçi gibi düşünmeyi, düşüncelerinin farkında olmayı öğretmek ebeveyn ve öğretmenin görevidir.

Gelişmiş matematiksel düşünmenin bir çocuğun, bir öğrencinin ve herhangi bir kişinin matematik problemleriyle kolayca başa çıkmasına yardımcı olduğu açıktır. Aslında matematiksel düşünme, aritmetik, cebir, veri ve geometriyi iyi kavramaktan daha fazlasını yapmamızı sağlar. Matematiksel düşünen kişi, önündeki zorlukları analiz eder ve problemi çözmek için yollar arar, kendi deneyimine dayanarak mevcut durumda neler yapılabileceğini anlamaya çalışır, çözüm sürecini daha iyi yönlendirmek için neleri incelemesi gerektiğini belirler, gerekirse çözümü aşamalara ayırır ve hedefe ulaşmaya yönelik adımlarını yapılandırır. Örneğin, küçük çocuklar doğrudan işlemleri gerçekleştiremeseler, sayıları bilmeseler de günlük hayat tecrübelerinden ve çevreleri ile etkileşimlerinden yola çıkarak bu kavramları yapılandırmak için zemin hazırlamaya başlarlar (Kennedy vd., 1991). Uyarıcı bir çevre ve yetişkinlerin yönlendirmeleri çocukların çok küçük yaşlarda kendileri için matematiksel kavramları oluşturmalarını sağlar (Warren vd., 2009). Diğer yandan “Matematik sadece matematik genleri olan

çocuklar içindir”, “Küçük çocuklara sadece basit sayılar ve şekilleri öğretmek yeterlidir” gibi düşüncelerle sık sık karşılaşılmaktadır. Bu yanlış inanışlar matematiğe karşı hem öğrencilerde hem de öğretmenlerde önyargı oluşturmaktadır. Ancak yapılan araştırmalar çocukların zihninin küçük yaşlardan itibaren matematik için hazır olduğunu vurgulamaktadır. Bu araştırmalarda “küçük çocuklar matematiğe hazır değildir” inanışının aksine erken yaştan itibaren çocukların önemli düzeyde matematiksel gelişim gösterdikleri, kavramları semboller kullanmadan, ad koymadan kendilerine has şekilde ifade edebildikleri vurgulanmaktadır. Önemli olan burada çocuğun kendince oluşturduğu yapıyı fark edebilmek ve çocuğu yönlendirebilmektir. Yetişkinler kendi düşünce kalıplarını çocuklara empoze etmemelidir. Çünkü çocuk farklı bir düşünce tarzına sahip olabilir, babasının, annesinin veya öğretmenin tutumlarını anlamakta zorlanabilir.

Hughes (1986) çocukların okula gelmeden sayılar hakkında çok şey bildiklerini vurgulamaktadır. Üç yaşındaki çocuklara oyun ya da günlük hayat hikâyesi olarak sunulan ve “insani anlam” ifade eden ve küçük sayılardan oluşan basit problemler verildiğinde toplama ve çıkarma işlemlerini gerçekleştirerek çözüme ulaşabilmektedirler. “O zaman eğer çocuklar okula başlamadan önce yeterince matematiksel bilgiye sahiplerse, neden o zaman okul sürecinde matematikte bu kadar zorlanıyorlar?” (Hughes, 1986, s. 36). Bunun nedeni okulda kullanılan matematik dilinin çocuklara yabancı gelmesidir. Diğer yandan kullanılan modeller/temsili biçimi çocukların kavramları anlamlandırmalarını ve oluşturmalarını etkilemektedir. Çocuklar kendi sembollerine ve çizimlerine büyüklük anlam katmakta ve günler sonra da onları yorumlayabilmektedir. Nitekim 3-5 yaşlarında küçük çocukların geleneksel sembollerden ziyade, kendi sembol ve çizimlerini kullanmaya yöneldikleri görülmektedir. Okulöncesinde çocukların matematiksel modelleri somut ve fiziksel, dokunulabilir somut materyallerden oluşmaktadır. Van De Wall vd. (2021) sayılar ve sayma, uzunluk, geometrik şekiller gibi kavramların oluşturulması için küp, prizma, piramit gibi geometrik şekiller, birim küpler, onluk taban blokları, örüntü blokları gibi materyallerin birer matematiksel model olarak kullanılabilirliğini vurgulamaktadır. Olkun ve Toluk (2004)’a göre bu matematiksel modeller, öğrencilerin matematiksel ilişkileri sorgulamalarını ve keşfetmelerini sağlayacak şekilde etkili bir şekilde kullanılmalıdır. Özellikle okulöncesi ve ilkökul düzeyleri için modellerin günlük hayat durumuna göre tasarlanması ve matematiksel olarak oluşturulması oldukça önemlidir (Greer vd., 2007). Bu bağlamda öğretmenlerin anaokuldan itibaren her düzey için çocukların kendi modellerini keşfetmelerini

sağlayacak ortamlar sunmaları gerekmektedir. Öğrenme ortamlarında matematiğin ezberlenmesi gereken bir dizi işlemde çok daha fazlası olduğu unutulmamalı ve matematiğin bir keşif alanı ve matematik yapmak için sosyal bir süreç olduğu dikkate alınmalıdır (Bastable ve Schifter, 2008, s. 182). Böylesi bir ortamda çocuklar varsayımında bulunmayı, fikirler sunmayı, ispatlamayı ve tartışmayı öğrenirler. Böylece matematiksel düşünme gelişimleri sağlanır.

Matematiğin aritmetik, geometri, cebir, olasılık gibi farklı alanlarında kullanılan düşünme biçimlerine göre matematiksel düşünme de şekillenmekte ve alt bileşenlere ayrılmaktadır (Dindyal, 2003). Matematiksel düşünmenin bir alt bileşenlerinden biri de cebirsel düşünmedir. Alanyazında cebirsel düşünmenin farklı tanımları vardır. Cebirsel düşünme öğrencilerin matematiksel fikirleri bir dizi belirli örnekten genelleştirdikleri, bu genellemeleri tartışma yoluyla oluşturdukları ve giderek daha formel ve yaşa uygun yollarla ifade ettikleri bir süreçtir (Kaput, 1999). Cebirsel düşünme öğrencilerin matematiksel durumlarda olan yapıları fark edip, özelleştirip, sonrasında genelleyip formel dil kullanarak ifade etme sürecidir (Blanton ve Kaput, 2005). Cebirsel düşünme, sayı ve hesaplama deneyimlerinden genellemeler oluşturmayı, bu fikirleri anlamlı bir sembol sistemi kullanarak ifade etmeyi ve örüntü ve fonksiyon kavramlarını keşfetmeyi içerir (Van de Walle vd., 2021). Knuth vd. (2016) yaptıkları çalışmalarında cebire girmişten önce erken yaşlarda cebirsel düşünme gelişimine yönelik sağlam bir temel oluşturulması gerektiğini ileri sürmüşlerdir. Lee ve Freiman (2006) ise çocukların örüntüleri kavramada zorlanmadıklarını ve bu tür örüntüsel çalışmaların erken yaşlardan itibaren onların cebirsel düşüncelerini geliştirdiğini vurgulamışlardır.

Cebirsel düşünme, öğrencilerin matematik ve fen bilimlerinde ilerlemelerinde en önemli etkidir (Greenes vd., 2001). Erken bir giriş, tüm öğrencilere daha sonraki matematik sürecinde, formel cebire geçişi desteklemektedir (Kieran, 1992). Erken yaşlarda cebirsel düşünme ilişkileri ve genelleştirilmiş anlayışları keşfetmeyi içerir ve ileri zamandaki formel cebirin inşa edilmesi için zemin hazırlar (Keith, 2006). Çocuklar başlangıçta keşfettikleri genellemeleri kelimelerle ifade eder, ileri zamanda ise matematiksel dilleri geliştikçe bu genellemeleri sembolik dil kullanarak soyutlaştırırlar (Blanton, 2008). Matematikte önceki başarı ile sonraki başarı birbiri ile önemli derecede ilişkilidir (Aunola vd., 2004; Jordan vd., 2009). Hatta okulöncesi döneminden 2-3 yıl daha erken bir zamanda başlamasında da fayda vardır (Ormond, 2012). Lee vd. (2016) diğer

araştırmacılar gibi cebirsel düşünmenin erken yaşlardan gelişmesi üzerine çalışmışlar ve 3-4 yaşlarından itibaren materyaller ve sembollerin ilişkisi, örüntüler gibi konuların temelini atılabildiğini ve cebirsel düşünmeye giriş yapılması gerektiği üzerinde durmuşlardır. Bu bağlamda erken çocukluk dönemindeki bilişsel büyüme, daha sonraki öğrenmeler için kritik bir temel oluşturmakta, erken öğrenme ortamları ise gelişimsel yörüngeleri şekillendirmede önemli bir güce sahip olmaktadır (Nelson, 2000; Shonkoff ve Phillips, 2000). Bu düşüncelerden yola çıkılarak bu araştırmada 60-72 aylık okulöncesi eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

1.2 Amaç

Bu araştırmanın genel amacı 60-72 aylık okulöncesi eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme becerilerinin incelenmesidir. Bu amaç bağlamında aşağıdaki araştırma problemlerine yanıt aranmıştır:

1. 60-72 aylık okulöncesi eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme bağlamında yapısal düşünme becerileri nasıldır?
2. 60-72 aylık okulöncesi eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme bağlamında analitik düşünme becerileri nasıldır?
3. 60-72 aylık okulöncesi eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme bağlamında fonksiyonel düşünme becerileri nasıldır?

1.3 Önem

Çocukların bilişsel gelişim süreci erken yaşlarda hızla şekillenmektedir ve bu dönemde edindikleri matematiksel düşünme becerileri, ileri akademik başarıları için kritik bir temel oluşturmaktadır. Cebirsel düşünme becerisinin erken yaşlardan itibaren geliştirilmesi ile ileride matematiğin devamı olan konu alanlarında çocuğun zorlanması önlenabilmektedir. Bu nedenle öğretmenler öğrencilerin düşüncelerini çok erken yaşlardan itibaren yapılandırabilmeli ve yönlendirebilmeli (Blanton, 2008). Öğretmenlerin küçük çocukları cebirsel düşünmeye teşvik edecek, cebirsel kavramları keşfedebilmelerini ve anlayabilmelerini sağlayacak, cebirsel düşünme becerilerini geliştirecek ortamlar oluşturmaları gerekmektedir (Blanton ve Kaput, 2011; Lee vd., 2016). Araştırmalar, cebirsel düşünmenin erken yaşlardan itibaren geliştirilmesinin, öğrencilerin formel cebire geçiş sürecini desteklediğini ve daha ileri matematik konularında başarılarını artırdığını göstermektedir (Rittle-Johnson vd., 2013; Papic vd.,

2011; Radford, 2014; Blanton ve Kaput, 2005; Blanton, 2008; Stephens vd., 2015; Lee vd., 2016; Warren vd., 2009). Papic vd. (2011) araştırmalarında örüntüler konusunda ek eğitim aldıktan sonra okul öncesi düzeyi çocukların büyüyen örüntüleri açıklayabildiklerini ve genişletebildiklerini, ve eğitim sonucunda daha iyi performans gösterdikleri sonucuna varmışlar. Benzer şekilde Rittle-Johnson vd. (2013) 4 yaşındaki çocukların örüntüleri genişletebildiklerini ve altta yatan kuralı belirleyebildiklerini ve önemli derecede erken cebirsel bilgileri geliştirebildiklerini vurgulamışlardır. Lee vd. (2016) cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesinin 3-4 yaşlarından itibaren başlaması gerektiğini savunmuşlardır. Radford (2014) ilkokulu düzeyindeki çocukların hayal gücü, jestler, sözel ifadeler, fiziksel nesneler kullanarak ilişkiler kurabildiklerini ve bu şekilde cebirsel düşünmelerini geliştirebildiklerini ifade etmiştir. Benzer şekilde, Stephens vd. (2015) çocukların erken yaşlardan eşitlik, aritmetiksel özellikler, nicelikler arası ilişkiler gibi cebirsel kavramları yapılandırabildiklerini ve cebirsel düşünmeye hazır olduklarını vurgulamışlardır. Bu araştırmalar çocukların erken yaşlardan cebirsel düşünmeye başlayabildiklerini, çocukların kendi doğal dillerini kullanarak temel cebirsel kavramları oluşturabildiklerini göstermektedir. Çocukların daha somutlaştırılmış şekilde, erken yaşlardan itibaren kavramları yapılandırmaları ve keşfedebilmeleri ileri sınıflarda daha resmi (formel) cebire geçiş için zemin hazırlamaktadır (Blanton, 2008). Bu nedenle, okul öncesinden başlayarak çocukların cebirsel düşünmelerinin geliştirilmesi oldukça önemlidir.

Bu araştırma ile okulöncesi eğitimi alan çocukların matematiksel problemlerle karşılaştıklarında ne düşündükleri ve kavramları nasıl oluşturdukları, cebirsel düşünme becerilerinin nasıl olduğu incelenerek var olan durumları belirlenecektir. Böylece araştırmadan elde edilecek bulgular ile küçük çocukların eğitim sürecine destek olunacak durumlar ortaya koyulabilir.

1.4 Sınırlıklar

Bu araştırma,

- 2023-2024 eğitim-öğretim yılı bahar dönemi, Millî Eğitim Bakanlığı'na bağlı devlet anaokulu ve bu anaokulunda eğitim alan 60-72 aylık çocuk grubu ve katılımcı olarak seçilen sekiz çocuk ile,
- Araştırmada elde edilen veriler 60-72 aylık çocukların klinik görüşme sürecinde gerçekleştirdikleri davranışlar ve verdikleri cevaplar ile,

- Anaokulu eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme becerilerin incelenmesine yönelik hazırlanmış veri toplama aracında bulunan sorular ile sınırlıdır.

1.5 KAVRAMSAL ÇERÇEVE

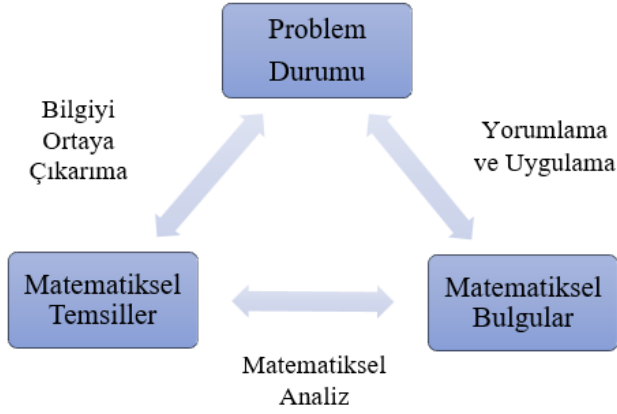
1.5.1 Cebirsel Düşünme Nedir?

Cebir nicelikleri sembollerle ifade eden ve bu sembollerle işlemler yapabilen, sayı özelliklerini ve ilişkilerini içeren bir alandır (Kieran, 1992). Cebir örüntüler, formüller, bilinmeyenler, değişkenler ve onların arasında olan ilişkileri içeren, matematiğin bir dilidir (Usiskin, 1997). Cebir, matematiksel düşünmenin merkezinde yer alan “genelliği ifade etme” ve genelliğin ifade edilmesinde kullanılan bir dildir (Mason vd., 1985). Cebir fonksiyonel ilişkileri keşfetme ve analiz etme, denklemleri çözme ve ilişkileri temsil etmek için sembolleri kullanma ile ilgili bir süreçtir (Lew, 2004). Cebirsel düşünme ise cebirden çok daha geniş bir anlama sahiptir ve tekil değildir. Alanyazında cebirsel düşünmenin birçok tanımı vardır. Cebirsel düşünme öğrencilerin matematiksel durumlarda olan yapıları fark edip, özelleştirip, sonrasında genelleyip formel dil kullanarak ifade etme sürecidir (Blanton ve Kaput, 2005). Cebirsel düşünme tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakeme, orantısal düşünme, örüntüler, fonksiyonlar, değişkenlerin harfi gösterimlerini içeren bir düşünme biçimidir (Greenes ve Findell, 1998). Cebirsel düşünme örüntülerin yapısını görebilme ve analiz etme, örüntülerin temelinde yatan sayısal ilişkileri ifade edebilme ve bu ilişkileri genelleyeabilme becerisi olarak tanımlanabilir (Steele, 2005). Matematiksel ilişkileri genellemek ve inşa etmek, ifade etmek ve ispatlamak cebirsel düşünmenin merkezinde yer alır (Kaput, 2008). Cebirsel düşünme aritmetiği genellemek, algoritma ve özelliklerde var olan ve doğru olan örüntüleri fark etmek, ifadelerin denk olup olmadığı hakkında niceliksel akıl yürütmek ve fikirleri anlamlı bir sembol sistemi kullanarak şekillendirmeyi içerir. Ayrıca sembolleri ve işlemleri anlamlandırarak kullanmayı temel alır (Kieran ve Chalouh, 1993). Kieran (2004) cebirsel düşünmeyi, harf simgesinin kullanılmasına bağlı kalmadan oluşturulan etkinlikler ile geliştirilen problem çözme, genelleme, gerekçelendirme, ispatlama, tahmin etme, nicelikler arasındaki ilişkileri analiz etme, temel yapıyı görebilme, değişimi fark etme gibi düşünme biçimleri olarak da tanımlamıştır. Van de Walle vd. (2021)’e göre cebirsel düşünme örüntüleri genelleme, nicelikler arası değişim ve fonksiyon kavramını içerir. Herbert ve Brown (1997)’a göre cebirsel düşünme, bir problem durumundan özelleştirilen bilgiyi farklı matematiksel temsiller olan semboller,

grafikler, tablolar, diyagramlar, kelimeler ve denklemler yardımıyla ifade etmek ve bu bilgiyi sonraki durumlara göre şekillendirmektir (Bkz. Şek. 1.1).

Şekil 1.1

Cebirsel Düşünmenin Çatısı



Kaynak: Herbert ve Brown, 1997

Erken Cebir (Early Algebra) ise erken yaşlarda başlayan “cebir”e denir. Erken cebir değişkenler için harflerin kullanımını adım adım ele alır, küçük yaşlardan öğrencilerin cebirsel düşüncelerini geliştirir, erken matematikteki konuları (dört işlem vb.) sıkıca birbirine dokur (Carragher vd., 2008b). Erken cebir, işlenecek konulara ek bir konu olarak düşünülmemelidir, öğrencilerin matematiği daha anlamlı öğrenebilmeleri için bir araç olarak ele alınmalıdır. Aritmetikle cebirin ayrı ele alınması yerine ilkokuldan itibaren aritmetiği cebirsel hale getirmek önemlidir (Blanton ve Kaput, 2003; Schifter vd., 2008). Erken cebir aritmetiksel ilişkileri sayılar ve kelimeler kullanarak ifade etmeyi içerir (Britt ve Irwin, 2011). Erken cebirsel düşünme, 5 ve 12 yaş arasındaki çocukların daha sonra ortaokul cebir çalışmalarında karşılaştıkları nesneler ve düşünme biçimleri için anlam oluştururken gerçekleştirdikleri akıl yürütmedir (Kieran, 2022). Carragher ve Schliemann (2007)’a göre erken dönem cebirsel düşünme, sayı veya nicelikler arasındaki ilişkileri, özellikle de fonksiyonel ilişkileri ifade eden temel akıl yürütmedir. Erken cebirsel düşünme aritmetiği bir hesaplama aracı olarak değil, bir yapı olarak gözden geçirmekle ilgilidir (Warren vd., 2009). İlk sınıflarda cebirsel düşünme, harf simgesinin bir araç olarak kullanılabileceği veya harf simgesi hiç kullanılmadan yapılabilecek etkinliklerde nicelikler arasındaki ilişkileri analiz etme, yapıyı fark etme, değişimi inceleme, genelleme

yapma, problem çözüme, gerekçelendirme, kanıtlama ve tahmin etme düşünme biçimlerinin geliştirilmesini içerir (Kieran, 2022).

1.5.2 Cebirsel Düşünmenin Alt Bileşenleri

Cebirsel düşünme alanında birçok araştırma yapılmış ve çeşitli kavramsal çerçeveler oluşturulmuştur. Cebirsel düşünmenin tanımları ve alt bileşenleri bazı araştırmacılara göre farklılık gösterse de genel olarak ortak noktaları çoktur. Örneğin Kaput (2008) cebirsel düşünmenin iki temel yönü olduğunu vurgulamaktadır. Bunlar:

- Sembollerin anlamlarının bilinmesi, genellenmesi ve genellemelerin ifade edilmesidir.
- Geleneksel semboller ile ifade edilen genellemeler üzerine gerçekleşen eylemler ve sözdizimsel olarak şekillenen akıl yürütmelerdir.

Öğrenciler ilk önce sembollerin matematiksel olarak ne anlama geldiğini çözmeye çalışırlar ve sembollerin anlamını yapılandırırlar, sonrasında bu semboller sisteminde ifade edilen genellemeler üzerinde kural temelli eylemler gerçekleştirirler. Bu nedenle ikinci temel yönün birinci yönden sonra geliştiği söylenebilir. Cebirsel düşünmenin bu temel yönleri altında cebirsel düşünme üç bileşene ayrılmaktadır. Bunlar:

- Genelleştirilmiş aritmetik olarak cebir.
- Fonksiyonel düşünme olarak cebir.
- Matematiksel modelleme süreci olarak cebir

Aritmetik sayıların yapısını, sayı ilişkilerini ve dört temel işlemi içerirken, cebir sayılar ve işlemlerin özelliklerini genellemeyi ve bu genellemeleri semboller ve harflerle ifade etmeyi içerir. Bu bağlamda aritmetik ile cebirin ilişkili olduğu ve aritmetiğin cebiri etkilediği söylenebilir. Aritmetik düşünme hesaplamalara ve ürüne odaklanırken, cebirsel düşünme sürece ve aritmetiğini yapısına odaklanır (Malara ve Navarra, 2003). Aritmetiğin merkezinde sayılar yer alırken, cebirin merkezinde aritmetik yer almaktadır (Van Amerom, 2003). Aritmetiksel düşünme işlemleri ve bilinenleri kullanarak bilinmeyen bulmayı kapsarken, cebirsel düşünme bilinmeyenler üzerine işlemler gerçekleştirmeyi, genellemelere ulaşmayı ve değişkenleri kullanarak genellemeleri ifade etmeyi içermektedir (Ünlü, 2019). Cebire geçiş yapmadan önce öğrencilerin matematiğin temeli olan aritmetiğini öğrenmeleri gerekmektedir (Dede vd., 2002). Aritmetikte bilinen

sayılarla işlemler ve hesaplamalar gerçekleştirilirken, cebirde bilinmeyenler ve değişkenler ile çalışılır.

Genelleştirilmiş aritmetik cebirsel düşünmenin temelinde yer alır (Kieran vd., 2016). Genelleştirilmiş aritmetik olarak cebirsel düşünme ise sayı ilişkileri ve işlem özellikleri, sayılarla işlem yapma ile ilgili olan süreçtir (Carpenter vd., 2003). Bu yaklaşımda öğrenciler aritmetiğe cebir bakış açısıyla bakarlar (Blanton, 2008) ve sayılarla yapılan işlemlerde ortak özellikleri fark eder ve bu şekilde aritmetiksel kavramları derinleştirirler (Stephens vd., 2015). Bu yaklaşımı destekleyen erken cebirin en temel amacı da aritmetiksel ilişkilerin ve özelliklerin genellenmesi yoluyla cebire geçişin kolaylaştırılmasıdır (Blanton vd., 2015; Kaput, 2008).

Genelleştirilmiş aritmetik yaklaşımı ilişkiler ve özellikleri keşfetmeyi, eşitliği nicelikler arası bir ilişki olarak keşfetmeyi ve sembolleri değişkenler olarak kullanmayı kapsamaktadır. Öğrenciler sayılarla yapılan işlemlerin sonuçlarına odaklanmak yerine, sayılar ve işlemler ile ilgili özellikleri keşfederler. Genelleştirilmiş aritmetik bağlamında öğrenciler işlemlerin değişme veya dağılma özelliği, tek ve çift sayıların özellikleri, basamak değerlerinin ilişkileri, bir sayı ile sıfırın toplamı veya çarpımı, eşitliğin bir işlem sonucundan ziyade dengeyi ifade etmesi, eşitliği denge olarak kullanarak bilinmeyenleri bulma, eşitliğin her iki tarafına aynı miktar ekleme ve çıkarma üzerine düşünebilirler (Van de Walle vd., 2021). Öğrenciler örneğin sıfırın özellikleri, değişme özelliği, üç ardışık sayının toplamı, 10 veya 100 ile kısa yoldan çarpma işlemi üzerine düşünürken de aritmetiğin ötesine geçerek cebirsel düşünmeye başlarlar. Aritmetiğin genelleştirilmesi ileride kuralların, sembollerin ve harflerin kullanımını kolaylaştırarak cebire yol açar. Özellikle küçük yaşlarda çocuklar, basit ilişkileri ve işlem özelliklerini kalp, ağaç, yuvarlak gibi informal sembolleri kullanarak ifade edebilmektedir (Kaput, 1999). Bu temsilleri kullanan öğrenciler ileride informal semboller yerine harfleri kullanmakta ve değişken kavramını kolayca oluşturabilmektedir.

Fonksiyonel düşünme fonksiyonları, ilişkiler ve örüntüleri genelleştirmeyi içerir. Örneğin, bir fonksiyonun belirli değerleri ne zaman aldığını inceleme, fonksiyonlar için tablo ve grafik temsillerini düzenli olarak kullanma, denklemler oluşturma ve çözme, doğrusallık ve oran hakkında düşünme fonksiyonel düşünme kapsamında ele alınabilir. Fonksiyonel düşünme, Blanton ve Kaput (2004)'un da ifade ettiği gibi, cebirsel düşünmenin önemli bir parçasıdır ve örüntüler ve fonksiyonlar üzerine çalışmayı temel

alır (Van de Walle vd., 2021). Bu bağlamda erken yaşlardan itibaren fonksiyonlar ve örüntüler hakkında akıl yürütmek öğrencilerin ileri düzeyde analiz etmelerine yol açar.

Fonksiyonel düşünme genelleştirilmiş aritmetikten farklı olan becerileri kapsar. Fonksiyonel düşünme olarak cebirsel düşünme, sayı ve şekil örüntülerinin temel yapısını, nicelikler arası ilişkiyi fark etme, anlama ve formel matematiksel dille ifade etme olarak tanımlanmaktadır (Kieran, 2004). Diğer bir deyişle iki sayı kümesi arasındaki ilişkiyi keşfetmeyi ve değişim için örüntüleri incelemeyi ve analiz etmeyi gerektirir (Beatty ve Bruce, 2012). Fonksiyonel düşünen çocuklar sayıların birbirine bağlı olarak nasıl değiştiğini aramayı, değişimi ve genişlemeyi fark ederler. Nicelikler arası fonksiyonel ilişkiyi kural olarak tanımlayabilir ve bu ilişkiyi uygulayarak yeni değerler elde edebilirler (Carragher vd., 2008a). Aynı zamanda bu düşünme biçimi çocukları tablo, grafik, fonksiyon makineleri (girdi-çıkı) gibi temsiller kullanmaya teşvik eder (Blanton, 2008). Warren ve Cooper (2005b) göre erken yaşlarda yapılan etkinliklerde çocukların farklı temsilleri birbiri ile ilişkilendirmeleri ve birbirinden ayırt etmeleri fonksiyonel düşünmenin gelişimini desteklemektedir. Ayrıca çocuklar doğal dil kullanarak da bu ilişkileri açıklayabilir. Örneğin, çocuklar köpek sayısı ile göz sayısı arası ilişkiyi “her köpek gelince iki göz ekleriz” ya da “göz sayısı köpek sayısının iki katıdır” ifadelerini kullanabilmektedir. Diğer yandan fonksiyonel düşünmenin gelişimi için ters işlemleri anlama ve kullanma da oldukça önemlidir (Driscoll, 1999; French, 2002).

Çocukların fonksiyonel düşünme becerilerini geliştirmek için ilk önce, zaman içinde ya da doğal olarak değişebilen bir miktarı saymayı içeren bir aritmetiksel soru geliştirilmelidir. Örneğin, “2 gömlek ve 1 pantolon kaç farklı şekilde kombinlenebilir?”, “3 kişi arasında kaç el sıkışması olur?”, “3 köpeğin kaç gözü olur?” şeklinde sorular geliştirilebilir. Çocuklar bu soruları modelleyerek ve aritmetiksel hesaplamalar kullanarak cevaplayabilirler. Ardından bu soruda değişebilen parametreleri belirlemek ve bu parametrelerin değişebileceğini düşünmek gerekmektedir. Örneğin, “ya 2 gömlek yerine 3 gömlek olsaydı ne olurdu?”, “5 gömlek olsaydı?”, “peki 4 köpeğin kaç gözü olurdu?”, “ya 5 köpeğin?”, “ya 50 köpeğin?” şeklinde sorular sorularak öğrencilerin bir niceliğin değişiminin diğer niceliğin değişimine neden olmasını fark etmeleri sağlanabilir. Bu şekilde öğrencilerin fonksiyonel ilişkiler kurmaları teşvik edilebilir. Burada temel amaç öğrencilerin bir niceliğin değişiminin diğer niceliğin değişimini nasıl etkilediğini kelimelerle açıklamalarıdır (Blanton, 2008).

Fonksiyonel düşünmenin geliştirilmesinin bir diğer yolu örüntüleri genellemedir. Örüntüleri genelleme becerisi belirli örüntüleri analiz etmeyi, tanımlamayı ve soyutlamayı ele alır (Baki, 2008). Bu sürecin amacı öğrencilerin örüntülerin temelinde olan kuralı görebilmeleri, bu kuralı tanımlayabilmeleri ve genelleyerek bir sonraki adımlar için uygulayabilmeleridir. Örüntüleri genelleme cebirsel düşünmenin temelinde yer alır ve aritmetikten cebire geçişi kolaylaştırır (Radford, 2008). Bu nedenle erken yaşlardan itibaren çocukların bu tür etkinlikler üzerine çalışmaları cebirsel düşünmenin gelişiminde önemli rol oynamaktadır. Ayrıca okulöncesi dönemde küçük çocukların düzeyine uygun şekilde, fonksiyonel ilişkileri içeren günlük hayat hikâyelerin ve materyallerin kullanılması oldukça önemlidir. İlköğretim sürecinde örüntüleri genellemeyi içeren etkinlikler düzenlenirken küçük çocukların düzeyine uygun temsil biçimlerinin kullanılmasına özen gösterilmelidir (Kabael ve Tanışlı, 2010). Çocukların erken yaşlardan genelleme yapabilmeleri fonksiyonların öğrenilmesini etkilemekte ve bu şekilde cebirsel düşünme becerilerinin gelişimini sağlamaktadır (Turgut ve Temur, 2017). Okul öncesinde başlayan ve lise düzeyine kadar devam eden süreçte örüntü etkinliklerinin uygulanması cebirsel kavramların anlaşılması ve cebirsel düşünmenin gelişmesi için büyük önem taşımaktadır (Herbert ve Brown, 1997).

Matematiksel modelleme matematiğin dışında veya matematiğin içinde ortaya çıkan durumlarda yapıları ve kuralları genelleştirmeyi ve problem durumunu değişkenlerle ifade etmeyi, harflerin denklemlerde bir bilinmeyen, bir sınıfı temsil eden değişken ya da parametre olarak kullanıldığını belirlemeyi içerir. Matematiksel modelleme gerçek yaşam problemlerini, zihindeki yapıları fiziksel ya da soyut semboller kullanarak matematiksel şeklini oluşturma sürecidir (Lesh ve Doerr, 2003). Matematiksel modelleme özellikle fonksiyonları ve ilişkileri ifade etmeyi içererek fonksiyonel düşünmeyi de ele almaktadır.

Kaput (2000), ayrıca biri üst sınıflarda okulda öğretilen geleneksel kurallar ve prosedürlerden oluşan cebir, diğeri ise erken yaşlardan kullanılan beceriler, matematiksel kavramları birbirine bağlayan bir ağdan oluşan cebir olarak iki farklı şekilde tanımlamaktadır. Kaput (2000), ilkokuldan itibaren cebirsel düşünmenin ve kavramların okul müfredatına entegre edilmesinin öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin geliştirmesini ve matematiğin daha kolay ve derinlemesine anlaşılmasını sağladığını vurgulamaktadır.

Van de Walle vd. (2021) ise Kaput (2008)'un ortaya koyduğu yapıya paralel olarak çalışmalarında cebirsel düşünmeyi üç başlık olarak ele almaktadır:

- Sayıların ve İşlemlerin Özellikleri
- Örüntüler ve Fonksiyonlar
- Sembollerin Anlamı ve Matematiksel Modelleme

Aritmetiğini genellemesi olarak cebir sayı sistemini yapılandırmayı, sayıların ve işlemlerin özelliklerini keşfetmeyi, bu ilişkileri genellemeyi içerir. Cebirsel düşünme anaokulunda sayıları parçalamakla başlar. Cebir aritmetiğin devamı olarak düşünüldüğünde, sayıların yapısını düzgün şekilde oluşturmak cebirsel düşünmenin temelini oluşturmaktadır. İşlemlerin özelliklerini sayısal ifadeler üzerinden fark etmek, ileride öğrencilerin genelleyerek bu özellikleri değişken kullanarak ifade etmelerine yardımcı olmaktadır.

Örüntüyü fark etmek, örüntü kuralını belirlemek, örüntüyü genişletebilmek cebirsel düşünme becerilerinin bir parçasıdır. Renkli bloklar, düğmeler gibi fiziksel materyallerle basit örüntüleri genişletmek ileride sayısal örüntülerin genellenmesi için temel oluşturur. Çocuklar anaokulunda tekrarlayan örüntülerden başlar ve ortaokul yıllarına doğru genişleyen örüntülerle devam ederler. Cebirsel düşünmenin bir alt bileşeni olan fonksiyonel düşünme basit ilişkileri tanımlamakla anaokulundan itibaren başlamaktadır. Küçük yaşlarda sözel olarak ifade edilen fonksiyonel ilişkiler, büyük yaşlarda semboller kullanılarak gösterilmektedir.

Cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesi için öğrencilerin eşitlik, eşitsizlik, değişkenler gibi sembolleri gerçek anlamları ile yapılandırmaları gerekmektedir. Özellikle eşit işareti cebirde kullanılan en önemli sembollerden biridir. Ayrıca eşitliği denge olarak anlamlandırmak denklemlerin çözülmesine yardımcı olacaktır. İlkokul öğrencilerinin erken yaşlardan değişken kavramını yapılandırmaları, üst sınıflarda daha karmaşık problem durumlarını çözmelerini kolaylaştıracaktır.

Matematiksel modelleme öğrenciler için problem durumundaki nicelikleri ve aralarındaki ilişkiyi belirlemeyi, problemi modelleyerek çözüme ulaşmayı kolaylaştırmaktadır. Matematiksel modeller kavramları ve olguları tanımlayabilmek için kullanılmaktadır. Bunların yanı sıra cebirsel düşünme sürecine genelleme, varsayımda bulunma, ispatlama gibi matematiksel araçlar eşlik etmektedir. Öğrencilerin özellikleri ve ilişkileri

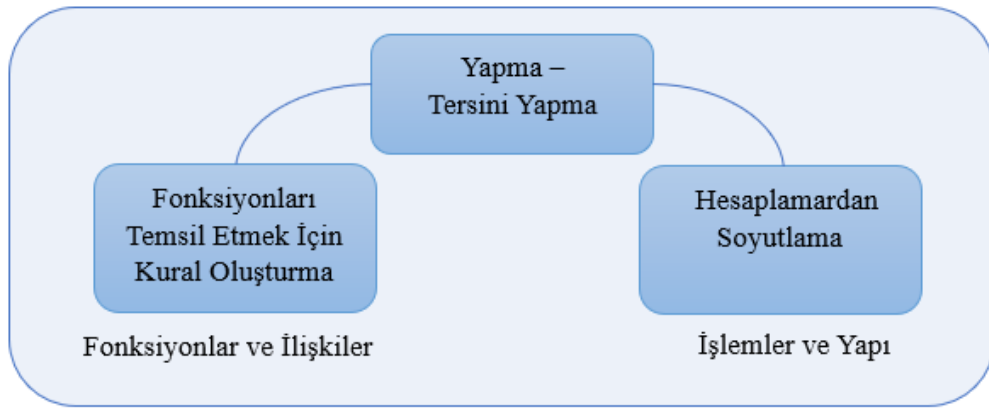
genellemeleri, fikirlerinin doğru olup olmadığını ispatlamaları cebirsel düşünme becerilerinin gelişimini desteklemektedir.

Driscoll (1999) ise cebirsel düşünme gelişiminde zihnin cebirsel alışkanlıkları olarak bir çerçeve ortaya koymuştur. İnsanlar problemleri çözmek, ilişkileri keşfetmek için cebirsel düşünmeye başlarlar. Bu süreçte cebirden önce gelişmeye başlayan zihnin cebirsel alışkanlıkları işe koşulur. Zihnin cebirsel alışkanlıklarının erken yaşlardan kazandırılması öğrencilerin formel cebire geçiş için daha hazır olduklarını ve daha başarılı olduklarını sağlamaktadır. Driscoll (1999) zihnin cebirsel alışkanlıklarını üç başlık altında ele almaktadır (Bkz. Şek 1.2):

- Yapma ve Tersini Yapma
- Fonksiyonları Temsil Etmek İçin Kural Oluşturma
- Hesaplamalardan Soyutlama

Şekil 1.2

Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları



Kaynak: Driscoll, 1999, s. 2.

Yapma-tersini yapma bir sonuca ulaşmanın yanı sıra, matematiksel süreci yeterince anlayarak ve tersinden düşünerek sonuçtan başlangıç noktasına geri gidebilmeyi içermektedir. Ters ilişki kurabilme öğrencilerin sonuca değil, sürece odaklanmalarını sağlamakta ve etkili cebirsel düşünme için önem taşımaktadır.

Fonksiyonları temsil etmek için kural oluşturmayı, girdi ile çıktı arası ilişki kurabilmeyi ve bu ilişkiyi temsil etmeyi, örüntüleri analiz etmeyi ve genellemeyi içermektedir. Ayrıca

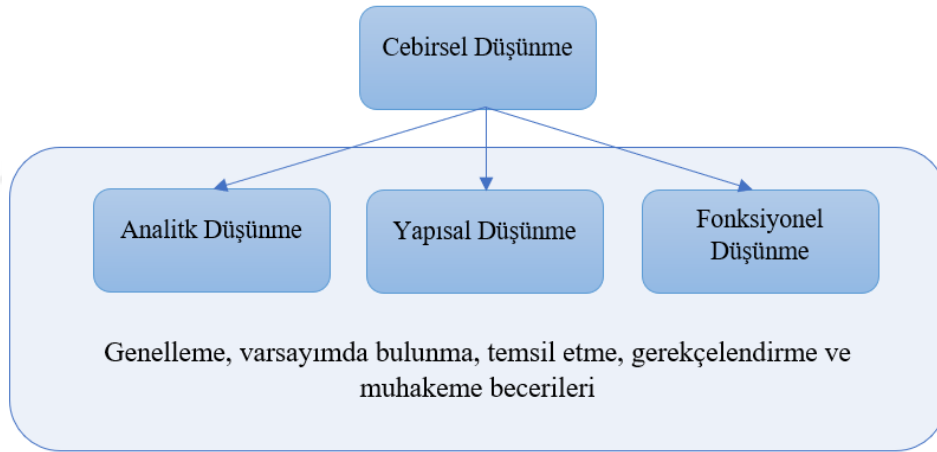
fonksiyonların tersten nasıl çalıştığının anlamlandırılabilmesi, bu alışkanlığın yapma–tersten yapma alışkanlığını tamamladığını göstermektedir.

Hesaplamalardan (işlemlerden) soyutlama işlemleri sayılardan bağımsız olarak inceleyebilmeyi içermektedir. Bu cebirsel alışkanlık öğrencilerin işlemlerin özellikleri hakkında genellemelere ulaşmalarını sağlamaktadır. Örneğin, çocuklar sayılar üzerinde değişme ya da dağılma özelliğini keşfedebilirler. Bu bağlamda işlemleri soyutlama alışkanlığı cebirsel düşünme becerileri için önem taşımaktadır.

Kieran (2022) ise yaptığı bir çalışmada cebirsel düşünme ile ilgili yapılan araştırmaların bir sentezi yaparak cebirsel düşünmenin bileşenlerini analitik, yapısal ve fonksiyonel düşünme olarak üç başlıkta toplamıştır (Bkz. Şek. 1.3).

Şekil 1.3

Cebirsel Düşünmenin Alt Boyutları



Kaynak: Kieran, 2022

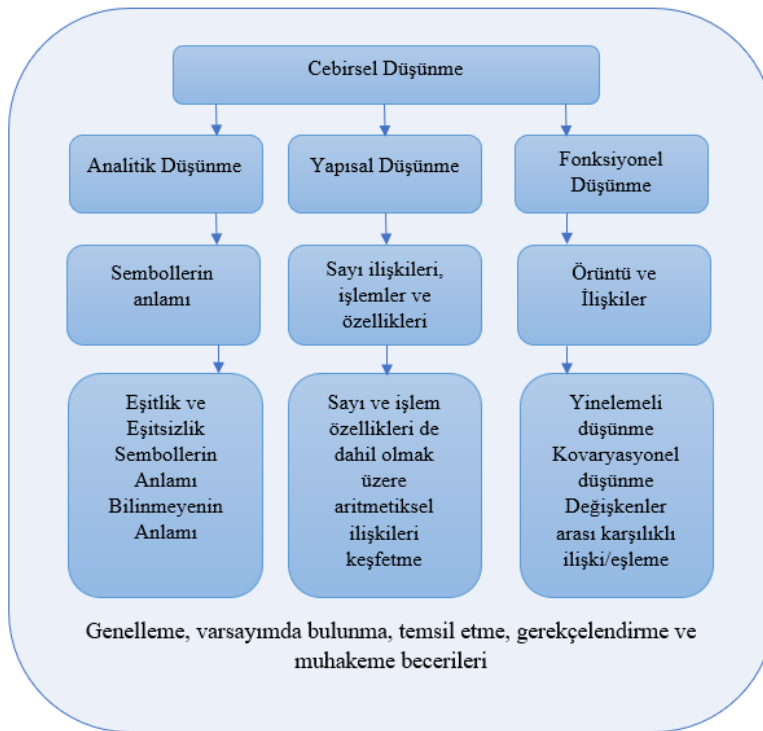
Cebirsel düşünmeye dair Kieran (2022)'ın bu kavramsal çerçevesi araştırmanın kavramsal çerçevesi olarak benimsenmiştir.

1.5.3 Araştırmada Benimsenen Kavramsal Çerçeve

Kieran (2022)'in ortaya koyduğu üç temel bileşen bu araştırma kapsamında ele alınmış ve verilerin analiz sürecinde bu yapı kullanılmıştır. Bu üç başlık altında ele alınan alt bileşenler ve kavramlar Şekil 1.4'de sunulmuştur.

Şekil 1.4

Cebirsel Düşünmenin Bileşenleri



Kaynak: Kieran, 2022

Analitik düşünme sembollerin anlamı, yapısal düşünme sayı ilişkileri, işlemler ve özellikleri, fonksiyonel düşünme ise örüntü ve fonksiyonel ilişkiler üzerine muhakeme yapmayı içermektedir. Analitik ve Yapısal boyutlar cebire ilişkin genelleştirilmiş aritmetik bakış açısıyla, fonksiyonel boyut ise oldukça açık bir şekilde cebire ilişkin matematiksel-fonksiyonel bakış açısıyla ilişkilidir. Analitik ve Yapısal boyutların temelini ilişkisel düşünme oluşturmaktadır ve buradan bu iki bileşen arasında örtüşme ve etkileşim olduğu görülmektedir. Eşitlik ve denklik kavramlarının aynı zamanda erken cebirsel düşünmenin yapısal düşünme boyutunun yönleriyle iç içe geçtiği söylenebilir. Analitik düşünme boyutunun odak noktası eşitlik, dengeyi koruyan eşdeğerlik, denklem

ve denklem çözüme ile ilgili düşünmek; yapısal düşünme boyutunun odak noktası işlemler ve ifadelerin temelinde olan yapı ve özellikleri görmek ve ifade etmektir. Fonksiyonel düşünme boyutunun ise temelini örüntüler, nicelikler arasında ilişkiyi bulma ve genelleme oluşturmaktadır. Aynı zamanda genelleme, varsayımda bulunma, temsil etme, gerekçelendirme ve muhakeme becerileri erken cebirsel düşünmenin analitik, yapısal ve fonksiyonel olmak üzere ana boyutların üçünün içinden geçerek ve bir iplik gibi onları birleştirerek ortak içeriğini oluşturmaktadır. Matematiksel yapı ve ilişkiler erken cebirsel düşünme bağlamında matematiksel ilişkilerle genelleme, temsil etme, gerekçelendirme ve akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesinin temelini oluşturmaktadır (Blanton vd., 2011).

Bu çalışmada küçük çocukların cebirsel düşünme becerilerinin bu üç boyut bağlamında incelenmesi amaçlanmıştır. Bu boyutlar daha ayrıntılı olarak aşağıda açıklanmıştır.

Analitik Düşünme

Analitik düşünme farklı durumlardan özelleştirme yaparak sembolleri anlamlandırmayı, örneğin eşitlik sembolünü anlamlandırmayı, bilinmeyenlerle sanki biliniyormuş gibi işlem yapmayı, eşitliğin dengiyi koruyan eşdeğerlik dönüşümleriyle denklemleri çözmeyi içerir. Radford'a (2014) göre analitiklik, cebirsel düşünmenin merkezinde yer alır. Radford, belirsiz nicelikleri analitik bir şekilde ele aldığında düşünmeyi cebirsel olarak nitelendirir; yani belirsiz nicelikler (bilinmeyenler veya değişkenler) biliniyormuş gibi kabul edilir ve hesaplamaların tündengelimli doğası vurgulanarak bilinen sayılarla yapıldığı gibi onlarla hesaplamalar yapılır. Cebirsel düşünmek için alfanümerik sembolizmin kullanımı ne gerekli ne de yeterlidir. Belirsiz niceliklerin gösterimi, doğal dil, jestler ve alışılmamış işaretler dahil olmak üzere çeşitli temsiller kullanılarak belirtilebilir. Cebirsel düşünmenin analitik boyutu;

- Eşit işareti ve eşdeğerlik hakkında düşünmek,
- “Aynılığı” “Yerine geçmeden” ayırt etmek,
- Denklemlerin harf-sembolik olmayan biçimde çözülmesi,
- Denklemlerin harf-sembolik biçimde çözülmesi

şeklinde alt boyutları içermektedir (Kieran, 2022).

Eşitlik ve eşdeğerlik, aynılık ve dönüşme

Eşit işaretinin anlamı işlemsel ve ilişkisel olarak iki farklı biçimde oluşturulmaktadır. İlişkisel düşünme eşitliği ifadeleri ve nicelikleri karşılaştıran, dengeyi sağlayan işaret olarak ele alırken, işlemsel düşünme eşit işaretini “bir işlem sonucu” veya “bir şey yap sinyali” olarak açıklamaktadır (Jacobs vd., 2007). Eşitliğin ilişkisel anlamı iki ifadenin eşit olup olmadığını hesaplama yapmadan, ifadeleri dönüştürerek belirlemeyi, eşitliğin sol ve sağ taraflarının eşdeğerliğine odaklanarak bilinmeyenleri bulmayı ele alır. Eşitliğin, bir hesaplama sembolü olarak düşünmekten ziyade, ilişkisel anlamı genellemelerin temelinde yer alır (Carpenter ve Franke, 2001). İlişkisel düşünen öğrenciler;

$$56 + 47 = 54 + 49$$

gibi sayısal eşitliklerin doğruluk değerini,

$$56 + 47 = (54 + 2) + 47 = 54 + (2 + 47) = 54 + 49$$

şeklinde açıklamaktadırlar (Carpenter vd., 2003). İşlemsel düşünen öğrenciler;

$$8 + 4 = \square + 5$$

ifadesinde eşitliği bir işlem sonucu olarak algılayarak kutunun içine 12 veya 17 yazılması gerektiğini vurgulamaktadırlar (Falkner vd., 1999). İlişkisel düşünen bir öğrenci ise sol tarafın toplamının 12’i olduğunu düşünerek, sağ tarafın 12’ye tamamlanması için kutunun içine 7 gelmesi gerektiğini düşünürler. Ayrıca ilişkisel düşünen öğrenciler bu eşitliğe bir bütün olarak bakıp, 5’in 4’den bir büyük olduğunu dikkate alarak, kutunun içine gelen sayının 8’den bir küçük olması gerektiğini anlamaktadırlar. Ya da toplama işleminin birleşme özelliğini kullanarak

$$8 + 4 = (7 + 1) + 4 = 7 + (1 + 4) = 7 + 5$$

şeklinde çözüme ulaşabilmektedirler.

İlişkisel olarak aynılık kavramı oluştuktan sonra, eşdeğer ifadelerin birbiri ile dönüştürülebilme anlayışı gelişmektedir. Örneğin, “dönüştürme” becerisi gelişen öğrenciler, $31 + 67$ ifadesinde $31 = 30 + 1$ ifadesinden yararlanarak 31’in yerine $30 + 1$ ’i kullanarak $31 + 67 = 30 + 1 + 67$ şeklinde dönüştürme gerçekleştirmekteler (Jones vd., 2013).

Denklemlerin çözümlenmesi

Denklemler harf-sembolik biçimde ya da formel sembolleri içermeden tasarlanabilmektedir. Eşitlik iki niceliğin aynı değere sahip olduğunu göstermek için kullanıldığında eşdeğerliğin hesaplamalı biçimini, iki matematiksel ifadenin aynı şeyi temsil ettiğini ifade ettiğinde ise eşdeğerliğin yapısal biçimini kapsar. Bu bağlamda denklem çözmenin de hem hesaplamalı hem de yapısal yönü belirlenmektedir. Bu ifadelerin özellikleri yapısal düşünmenin içinde, eşitlik ve denklem kavramlarını anlamlandırılması ise analitik düşünmenin içinde yer almaktadır.

Lenz (2022) tarafından yapılan bir çalışmada denklem problemini tasarlamak için bilyeler, renkli kutular, denklemin her iki tarafını gösteren iki çocuğun resimleri kullanılmıştır (ayrıca bkz. Cooper ve Warren, 2011; Stephens vd., 2022). İlkokul ve anaokulu eğitimi alan çocuklara aynı renkteki kutularda her zaman aynı sayıda bilye bulunduğu ve her çocuğun toplam aynı bilye sayısına sahip olduğu söylenmiştir (Bkz. Şekil 1.5). Burada çocuklar sol tarafta ve sağ tarafta bulunan kırmızı kutuyu, sol tarafta ve sağ tarafta bulunan yeşil kutuyu, sol ve sağ tarafta bulunan birer bilyeleri eşleştirerek sağ tarafta kalan yeşil kutunun sol tarafta kalan tek bilye ile eşleştirilmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Çocuklar somut nesnelerle tasarlanan iki bilinmeyenli denklemleri ilişkisel yaklaşımla çözebilmektedir. Bunun tersine, bir tarafta sadece bilyelerin, diğer tarafta tek bir bilinmeyen (kutunun) olduğu durumlarda çocuklar karşılaştırma yaparak soruya aritmetiksel olarak yaklaşmaktadır.

Şekil 1.5

$x + y + 2 = x + 2y + 1$ Denkleminin Somut Modeli



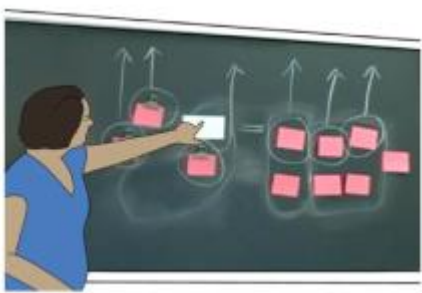
Kaynak: Lenz, 2022

Radford (2022) ise çalışmasında denklem problemini tasarlamak için karton kartlar ve her birinde aynı sayıda kart olan kâğıt zarfları kullanmıştır. İlkokul 3. sınıf öğrencileri ile problem durumu (*Saranın içinde kartlar olan zarfı ve 3 tane daha kartı, Christina'nın ise 7 kartı vardır*) sınıf tahtasında tasarlandıktan sonra, öğrencilere her zarfta aynı sayıda kart

olduğu ve her çocuğunun toplam aynı kart sayısına sahip olduğu söylenmiştir (Bkz. Tablo 1.1).

Tablo 1.1

Denklem Çözme Yaklaşımları

$x + 3 = 7$ Denklemine Somut Modeli	
	
Eşleştirme	Her iki taraftan çıkarma

Kaynak: Radford , 2022

Bu tür denklemlerde öğrenciler eşitliğin eşdeğerlik anlamını kullanarak ve eşleştirme yaparak bilinmeyeni bulabilmektedir. Aynı zamanda denklemin her iki tarafından aynı miktar çıkartılarak da bilinmeyen bulunabilmiştir.

Öğretmenin öğrencilere denklemin her iki tarafında bilinmeyen bulunan durumları sunarak, yalnızca eşit sayıda kartların her iki taraftan çıkarılabileceğini değil, aynı zamanda içinde bilinmeyen sayıda kart bulunan eşit sayıda zarfın da çıkarılabileceğini vurgulaması oldukça önemlidir. Bu şekilde bilinenler üzerine geliştirilen stratejiler, bilinmeyenler üzerinde uygulanarak geliştirilmektedir.

Harf ve sembollerin kullanıldığı denklemlerde ise öğrenciler ilişkisel olarak bilinmeyeni bulmakta zorlanmakta ve ters işlem kullanarak bilinmeyeni bulmaya çalışmaktadırlar. Örneğin, bilinmeyen parantezlerle gösterildiği $1 + () = 3$ ifadesinde çocuklar bilinmeyeni, yani parantez içinde olması gereken sayıyı bulmak için $3 - 1 = 2$ şeklinde çıkarma işlemini kurmaktadırlar (Xie ve Cai, 2022). Ters işlem stratejisinin kullanımı, ileride öğrencilerin harflerin kullanıldığı denklemlerde bilinmeyeni bulmakta zorlanmalarına neden olmaktadır.

Yapısal düşünme

Yapısal düşünme sayı ve işlem özellikleri de dahil olmak üzere aritmetiksel ilişkileri keşfetme bu ilişkileri çeşitli şekillerde temsil etme (örneğin, sözel, sembolik ya da görsel/resim temsili kullanma) ve genelleme, bu genellemeleri de gerekçelendirme ve muhakeme yapmayı içerir. Kaput (2008) da yapısal düşünmeyi cebirin genelleştirilmiş aritmetik kolunun, aritmetik işlemlerin ve bunların özelliklerinin genelleştirilmesini ve aritmetiğin yapısından daha genel ilişkiler hakkında akıl yürütmeyi içeren bir yönü olarak tanımlamıştır. Carpenter vd. (2005)'e göre yapısal düşünme, yalnızca önceden belirlenmiş bir prosedür dizisini takip ederek bir cevabı hesaplamak yerine, matematiksel ifadeleri dönüştürmek için sayı ve işlemlerin temel özelliklerini kullanmayı içerir. Kieran (2018) cebirsel ifadelerin dönüştürülmesinde yapı ve özelliklere daha geniş bir bakış açısıyla yaklaşmanın faydalı olacağını savunmaktadır. Mason vd. (2009) ise yapısal düşünmeyi şu şekilde tanımlamıştır:

İki veya daha fazla nesne arasındaki ilişkiyi tanımak, kendi başına yapısal veya ilişkisel düşünme değildir. Özelliklerin kullanımına ilişkin farkındalık yapısal düşünmenin temelinde yatmaktadır. Yapısal düşünme kişinin matematiksel düşüncesinde bu özellikleri kullanma, açıklama ve ilişkilendirme eğilimi olarak tanımlanabilir (Mason vd., 2009, s. 10).

Cebirsel düşünmenin yapısal boyutu aşağıda belirtilen

- Sayı ve sayısal ifadeler içindeki yapıyı görmek,
- Sayısal işlemlerin yapısını temsil etmek,
- Yapısal boyutu doğal sayılar alanının ötesine genişletmek,
- Yapısal boyutu sayının ötesine genişletmek

alt boyutlarını içermektedir (Kieran, 2022).

Sayıların ve sayısal işlemlerin yapısı

Sayı sisteminin ve işlemlerin yapısının oluşturulması cebirsel düşünmenin temelinde yer almaktadır. Çocuklar hem sayı hem de işlemlerin yapısını oluşturduktan sonra aritmetiksel ifadelere yapısal bir bakış açısıyla bakabilmektedirler (Molina ve Ambrose, 2008). Sayıların yapısı sayıların farklı kombinasyonlarını oluşturmakla geliştirilebilir (Van de Walle vd., 2021). Ayrıca sayıların parçalı yapıları basamak değerinin geliştirilmesinde de önemli rol oynamaktadır. Çocukların sayıların farklı kombinasyonlarını oluşturarak sayı parçaları arasındaki ilişkiyi keşfetmeleri ileride çeşitli toplama çıkarma stratejileri kullanmalarına yol açmaktadır. Ayrıca erken dönemden tek

ve çift sayı kavramları birim küpler kullanarak oluşturulabilir ve çift sayıların sadece “çift küplerden oluştuğu”, tek sayıların ise “her zaman bir tane tek küpü olduğu” keşfedilebilir. Örneğin, sayı yapısını gören öğrenci $5+6$ ifadesini kolay yoldan toplamak için 5 'i $5+1$ şeklinde parçalara ayırarak, $5+5+1$ şeklinde ifade etmektedir (Malara ve Navarra, 2018). Ya da $49+18$ şeklinde ifadenin değerini kolay şekilde bulmak için 18 'den bir alıp 50 'ye vererek, bu ifadeye eşdeğer olan $50+17$ şeklinde düzenleyebilirler (Van de Walle vd., 2021).

Sayı yapısını kavrayan çocuklar onluk ve birlik arası ilişki de kurabilmektedir. Çocuklar, bir sayıya onluk sayı eklendiğinde, başlangıçta olan sayının birler basamağının değişmediğini, sadece onlar basamağının arttığını keşfedebilmektedir. Bu bağlamda öğrencilerden sayısal ifadelerde bir toplamdan 1 çıkarılıp diğerine eklendiğinde toplamın değişmediği (Schifter, 2018), bir sayı sıfırdan farklı bir sayıyla çarpıldığında ve sonrasında aynı sayıya bölüldüğünde başlangıçtaki sayının elde edilmesi gibi (Carpenter vd., 2003) özellikleri keşfetmeleri istenebilir.

İşlem özelliklerinin keşfedilmesi için ilk önce çocukların işlemlerin kendisini güzel bir şekilde yapılandırmaları gerekmektedir. İşlemlerin anlamı hikâye problemleri ve matematiksel modeller ile anlatılabilir. Öğrenciler sayısal ifadeler veya tasarlanmış matematiksel modeller üzerinden toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özelliği, dağılma özelliği, toplama ve çarpma işleminin etkisiz ve ters elemanı, toplama ve çıkarma işlemlerinin ilişkisi, çarpma ve bölme işlemlerinin ilişkisi gibi özellikleri keşfedebilir. Örneğin, çocuklar $3+7=7+3$ ifadesinin doğru olduğunu her iki tarafın da 10 olduğunu hesaplayarak ya da “içinde 7 ve 3 havuç olan iki tabağın yeri değişirse, havuç sayısı değişmez” şeklinde ilişkişel düşünerek değişme özelliğini ifade edebilirler (Van de Walle vd., 2021). Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini bir dikdörtgenin alanı üzerinden ya da farklı matematiksel modeller üzerinden keşfedilebilir. Tek ve çift sayıların yapıları oluşturulduktan, tek ve çift sayılarla işlemlerin özellikleri keşfedilebilir ve genellenebilir.

Yapısal boyutu doğal sayıların ötesine ve sayıların ötesine genişletme

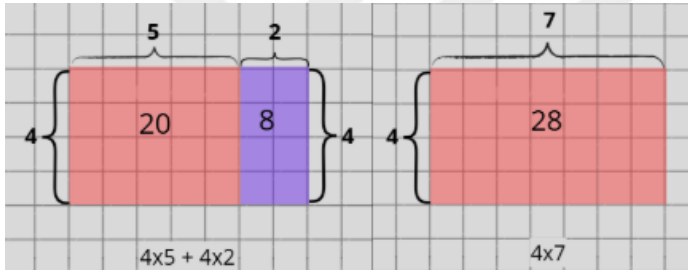
Öğrenciler işlem özelliklerini doğal sayılar üzerinden keşfettikten sonra bu özellikleri tam sayılar, kesirler için genellemler yapabilirler. Örneğin, 3×7 ve 6×7 ifadelerini ilişkilendirip, 6 'nın 3 'ün iki katı olduğundan dolayı çarpımın da iki kata çıkacağını açıklayabildikten sonra, öğrenciden $\frac{1}{2} \times 12$, $\frac{1}{4} \times 12$, $\frac{1}{8} \times 12$ ifadelerini ilişkilendirmesi istenerek bu özelliği

kesirler üzerine genellemesi sağlanabilir. Aynı şekilde toplama ve çarpma işlemlerinin değişme, birleşme ve dağılma özellikle bu şekilde genellenebilir. Bu tür genellemelere işlemlerin yapısal boyutunu doğal sayıların ötesine genişletmesi denir.

Öğrencilerin sayıları kullanmadan, geometrik şekiller ve modeller kullanarak genellemelere ulaşmaları yapısal boyutun sayıların ötesine genişletmesi olarak tanımlanmaktadır. İki ifadenin eşdeğer olması, iki ifadenin aynı şekli tanımlaması şeklinde kanıtlanabilir. Örneğin, dağılma özelliği veya ortak paranteze alma özelliği ($4 \times 5 + 4 \times 2 = 4 \times 7$) (Bkz. Şekil 1.6), çarpanlardan birinin ikiye bölünmesi, diğerinin ise iki kata çıkarılması durumunda (burada herhangi sayıya bölünüp çarpılabilir) çarpımın değişmediği ($12 \times 5 = 6 \times 10$) dikdörtgenin alanı kullanılarak ispatlanabilir.

Şekil 1.6

Ortak Paranteze Alma ve Dağılma Özelliği



Fonksiyonel düşünme

Fonksiyonel düşünme genellenenin diğer bir şeklidir. Cebirsel düşünmenin bir bileşeni olan fonksiyonel düşünmenin temelini örüntüler oluşturmaktadır. Bu bağlamda cebirsel düşünme örüntü arama, örüntüyü anlama ve tanımlama, örüntüyü genelleme olarak üç aşamadan oluşmaktadır. Bu süreç, bir problem durumunda olan örüntü yapısını belirleme, bu yapıyı analiz etme ve sonrasında sözel ifadeler, tablolar, grafikler, semboller ve denklemler kullanarak açıklama, varsayımda bulunma ve ispatlama, son olarak da fonksiyonel ilişkiyi ifade etme ve bir sonraki adımlara uygulama şeklinde ilerlemektedir (Herbert ve Brown, 1997). Öğrencilerin örüntüleri genişletmeleri için örüntülerin birbiri ile bağlantılı olan uzamsal yapısını ve sayısal yapısını fark etmeleri gerekmektedir (Radford, 2011). Uzamsal yapı örüntü figürlerinin konumunu kapsarken, sayısal yapı örüntü figürlerinin sayısal çokluğunu kapsamaktadır. Çocuklar fonksiyonel düşünmeye erken yaşlarda tekrarlanan basit örüntüler üzerinde çalışmakla başlarlar. Tekrarlanan örüntüler tekrarlanan desenlere sahip olan örüntülerdir. Figürler ve

desenlerden oluşan örüntülerle çalışmak, daha sonra sayısal örüntüleri analiz etmek ve genellemek için temel oluşturmaktadır (Van de Walle vd., 2021).

Fonksiyonel düşünme, aynı zamanda değişen nicelikler arasındaki ilişkilerin genelleştirilmesini ifade eder; sayı ve şekil örüntüleri fonksiyonlar ve cebirsel ifadeler olarak ifade etme becerisiyle ilgilidir. Bu bağlamda örüntüleri genelleme fonksiyonel düşünmenin gelişimi için önemlidir. Blanton vd. (2011)'e göre fonksiyonel düşünme birlikte değişen nicelikler arasındaki ilişkileri genelleştirmeyi, bu ilişkileri sözcüklerle, sembollerle, tablolarla veya grafiklerle ifade etmeyi ve bu ilişkiler hakkında akıl yürütmeyi içerir. Fonksiyonel düşünme boyutunun odak noktası olan örüntüleri genellenmenin üç düşünme biçiminden söz edilebilir (Smith, 2008):

- Tek varyasyonel ya da yinelemeli düşünme (Recursive thinking)
- Kovaryasyonel düşünme ya da birlikte değişim (covariational thinking)
- Değişkenler arası karşılıklı ilişkiyi tanımlamaya dayanan düşünme (correspondence thinking)

Yinelemeli düşünme, bir örüntüde ardışık terimler arası ilişkiyi görebilme, yani tek bir değerler dizisi içindeki çeşitliliği bulabilme olarak açıklanabilir. Örneğin, 4,8,12,16,... şeklinde sayısal örüntüde terimler arası “4 artış” ilişkisini farkederek ardışık terimleri bulabilmek, fakat $y=4x$ ilişkisini ifade edememek. Kovaryasyonel düşünme (birlikte değişim), iki niceliğin aynı anda nasıl değiştiğini analiz edebilme, eş zamanlı değişimleri arasında ilişki kurabilme şeklinde tanımlanabilir. Örneğin, x bir birim artarken, y üç birim artmaktadır. Değişkenler arası karşılıklı ilişkiyi tanımlamaya (eşleme) dayanan düşünme ise, biri diğerine bağlı olarak değişen iki ya da daha fazla nicelik arasındaki fonksiyonel ilişkiyi görebilme şeklinde tanımlanır. Örneğin, x her zaman y 'nin üç katıdır.

Fonksiyonel durumların genellenmesi, özellikle cebirsel düşünme sürecinde, temsil biçiminden etkilenmektedir. Fonksiyonel ilişkileri genellemeyi içeren problemler çeşitli şekillerde sunulabilir. Yapılan araştırmalar, fonksiyon problemlerinin dizinin ilk adımlarını içeren görseller eşliğinde ve hikâyeleştirilerek sunulması öğrencilerin düşünmelerini ve çözümlerini olumlu etkilediğini göstermektedir (Rivera, 2010; Mason vd., 2009; Carraher vd., 2008b). Fonksiyonel ilişkileri genellemelerinin geliştirilmesinde hikâyeler, somut materyaller, çizimler, sayılar gibi diğer temsillerle birlikte değer tabloların kullanılması oldukça önemlidir (Blanton ve Kaput, 2011; Carraher vd., 2008b; Brizuela vd., 2015). Öğrenciler, özellikle küçük çocuklar, fonksiyonel ilişkileri

tanımlamak için doğal dil kullanmaya üstünlük vermekteler ve sembolleri kullanmakta zorlanmaktadırlar.



2 İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu çalışmada 60-72 aylık anaokulu çocukların cebirsel düşünme becerileri ele alındığı için cebirsel düşünme sürecine ve becerilere ilişkin yapılan yurt dışı ve yurt içi araştırmalar sunulmuştur.

2.1 Yurt Dışı Yapılan Araştırmalar

Cebirsel düşünme alanında küçük çocuklarla ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır (Blanton ve Kaput, 2005; Blanton vd., 2011; Cai ve Knuth, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Radford, 2006).

Blanton ve Kaput (2004) araştırmalarında anaokulu öncesi (3-5 yaş), anaokulu (5-6 yaş) ve ilkokul (1-5 sınıf) öğrencilerinin fonksiyonları nasıl geliştirdiklerini ve ifade ettiklerini incelenmeyi amaçlamışlardır. Bu bağlamda tüm düzeylere uygun olması amacıyla “Gözler ve Kuyruklar” görevi veri toplama aracı olarak seçilmiştir. Çocukların, köpek sayısı ve köpeklerin toplam göz ve kuyruk sayısı arasında olan ilişkiyi nasıl ifade ettiklerini incelemek için öğretmen görüşleri ve çocukların çalışma yaprakları toplanmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin kullandıkları temsil türleri, verileri nasıl izledikleri ve düzenledikleri, matematiksel dil ve matematiksel işlemleri (örneğin, toplama ve çarpma) nasıl kullandıkları ve nicelikler arasındaki değişimi ve fonksiyonel ilişkileri nasıl ifade ettikleri sınıf düzeylerine göre analiz edilmiştir. Araştırma sonunda öğrencilerin düşünüldenden daha erken sınıflarda fonksiyonel düşünme yeteneğine sahip olduğu görülmüştür. Anaokulu öncesi öğrencilerinin hiçbir tahminde bulunmadan ve ilişki kurmadan, köpek resimleri kullanarak ve nesneleri sayarak soruları cevapladıkları tespit edilmiştir. Anaokulu öğrencilerinin her bir göz için bir nokta ve her bir kuyruk için uzun bir işaret koyarak verileri kaydettikleri, sayısal ifadeler yazarak toplam göz ve kuyruk sayısını buldukları, bazı öğrencilerin köpek sayısı ve toplam göz-kuyruk sayısı arası fonksiyonel ilişkiyi doğal dil kullanarak (ne zaman bir tane daha köpek gelirse iki göz daha eklenir) ve çizimleri ile sembolize ederek ifade ettikleri görülmüştür. İlkokul 1. sınıf öğrencilerin de aynı şekilde fonksiyonel ilişkileri resimler ve kelimeler kullanarak, hem toplama ilişkileri (“3’er 3’er sayıyoruz”) hem de çarpma ilişkileri (“iki kat” ve “üç kat”) kurarak tanımladıkları tespit edilmiştir. İlkokul 1. sınıfa kadar öğrencilerin t-tablosunu öğretmen yardımı ile, 2. ve 3. sınıflarda ise bu temsil aracını akıcı bir şekilde kullandıkları görülmüştür. 2. ve 3. sınıf öğrencilerinin tanımladıkları fonksiyonel ilişkiyi kullanarak büyük sayılara kadar genellemeye ulaştıkları, 3. sınıftan itibaren öğrencilerin

harfleri kullanarak fonksiyonel ilişkiyi ifade ettikleri ve ileri düzeyde bazı öğrencilerin grafikler oluşturdıkları görülmüştür. Araştırmanın bulguları özellikle öğrencilerin anaokulu gibi erken bir dönemde kovaryasyonel düşünmeye başlayabildiklerini ve 1. sınıf gibi erken bir dönemde niceliklerin nasıl karşılık geldiğini tanımlayabildiklerini göstermektedir. Blanton ve Kaput (2004) çocukların erken yaşlardan itibaren fonksiyonel düşünme kapasitesine sahip oldukları ve ilköğretim matematiğinin fonksiyonel düşünmeyi de içerecek şekilde genişletilmesi gerektiği sonucuna varmışlardır.

Blanton vd. (2018) anaokulu öğrencilerinin eşitlik anlayışı hakkındaki düşüncelerini araştırmışlar. Bu bağlamda çalışmada anaokulu öğrencilerinin erken yaşlarda eşitlik kavramını nasıl anlamlandırdıklarının incelenmesi amaçlanmıştır. Amerika Birleşik Devletleri'ndeki iki anaokulundan katılımcı seçilmiş ve iki ayrı sınıflar oluşturulmuştur. Her bir sınıfta 20 çocuk olarak toplam 40 öğrenci çalışmaya katılmıştır. Araştırmacılar, eşitlik sembolü hakkında ilişkisel düşünmeyi geliştirmeyi hedefleyen ve eşitliği daha sağlam bir şekilde oluşturulmasını sağlayan toplam 14 dersten oluşan 8 haftalık bir öğretim programı tasarlamışlardır. Araştırmada araştırmacılar öğretmen rolünü almışlardır. Çocukların eğitimden önce eşitlik kavramı hakkında sahip oldukları anlayışları ve bu anlayışların eğitim boyunca nasıl değiştiğini incelemek için nitel yöntemler kullanmışlardır. Tüm katılımcılar arasından, düşük, orta ve yüksek akademik başarı düzeyini temsil eden toplam 8 öğrenci ile 5 kere klinik görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerin öğretim öncesi ve sonrası eşit işarete ilişkin bilgilerini değerlendirmek için ön ve son görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın sonuçları, küçük çocukların formel eğitimden önce ve eğitim boyunca devam edebilecek eşit işarete ilişkin işlemsel bir görüşe sahip olduklarını göstermektedir. Bu çalışma bağlamında araştırmacılar öğrencilerin eşit işarete ilişkin anlayışlarının gelişiminin bundan daha incelikli olabileceğini, bu sembole ilişkin işlemsel bir görüşün muhtemelen öğrencilerin resmi okul deneyimleri başlamadan çok önce oluşmakta olduğunu, çocuklarda eşit işarete karşı erken ve kalıcı işlemsel bakış açısı oluştuğunu ve öğrencileri eşit işarete ilişkin ilişkisel bir anlayışa yönlendirecek matematiksel deneyimlerin tasarlanmasına kritik ihtiyaç olduğunu vurgulamışlardır.

Benzer sonuçları ortaya koyan, Jacobs vd. (2007) 1-5 sınıf öğrencilerinin eşit işarete ilişkin düşüncelerini incelemişler ve öğrencilerin yorumlarını işlemsel düşünme ve ilişkisel düşünme açısından analiz etmişler. İşlemsel düşünmeye sahip öğrenciler eşit

işaretini “bir şey yap sinyali” olarak yorumlamışlar. İşlemsel düşünmeye sahip öğrenciler ise eşit işaretini ifadeleri ve denklemleri karşılaştıran bir işaret olarak gördüklerini ifade etmişler.

Lenz (2022) yaptığı çalışmada anaokulu ve ilkokul çocuklarının denklemler üzerine ilişkisel düşünme biçimlerini, çocuklarının gerçek materyallerle temsil edilen birden fazla değişken arasında nasıl ilişki kurduklarını incelemeyi amaçlamıştır. Çocukların düşünceleri ve sorulara ilişkin yanıtları yarı yapılandırılmış görüşmeler ile toplanmıştır. Denklem kavramına ilişkin ilişkisel düşünme ve kavramsallaştırmanın değişen yaş düzeylerinde farklılıklarını ve benzerliklerini belirlemek için üç eşit aralıklı yaş grubu ile çalışmaya karar verilmiştir. Katılımcı seçimi için büyük bir Alman kentinden iki okul belirlenmiştir. Araştırmada 5-6 yaş arası 25 anaokulu öğrencisi, 7-8 yaş arası 29 2. sınıf öğrencisi ve 9-10 yaş arası 26 4. sınıf öğrencisi olmak üzere toplam 80 öğrenci ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmacının kendisinin yürüttüğü görüşmeler videoya kaydedilmiş ve daha sonra kayıtlar yazıya dökülmüştür. Çalışmada sembolik olmayan temsiller kullanarak çocukların ilişkisel düşünme biçimleri incelenmiştir. Bu bağlamda bilinmeyen (kutu) ve bilinenleri (misket) temsil etmek için somut nesneler (bilyeler, renkli kutular, eşitliğin her iki tarafını gösteren iki çocuğun resimleri) kullanılmıştır. Veri toplama aracı olarak 8 problem tasarlanmıştır. Problemlerden biri bu şekilde sorulmuştur:

- Bir çocuğun içinde bilyeler olan bir yeşil, bir kırmızı kutusu ve iki bilyesi var. Diğer çocuğun içinde bilyeler olan iki yeşil, bir kırmızı kutusu ve bir bilyesi daha var. İki çocuğun aynı sayıda ve aynı renk kutuların içinde aynı sayıda bilyelerin olduğuna göre yeşil kutuda kaç bilye var?

Öğrencilere yeşil kutuda saklanan bilyelerin sayısını nasıl belirleyecekleri sorulmuştur. Daha önce bu tür görevlerle ilgili herhangi bir deneyimi olmayan öğrencilere, aynı renkteki kutularda her zaman aynı sayıda bilye bulunduğu ve her çocuğun aynı toplam bilye sayısına sahip olduğu söylenmiştir. Her üç sınıf seviyesindeki öğrenciler de bunu zor bir görev olarak görmüşlerdir (anaokulu öğrencileri, 2. sınıflar ve 4. sınıflar için başarı oranları sırasıyla %10, %30 ve %50). Denklem çözümünde sayı odaklı ve yapı odaklı yaklaşımlar olmak üzere iki yaklaşım ayırt edilebilmiştir. Lenz, belirlenmesi gerekmeyen bilinmeyen niceliklerin varlığının (iki bilinmeyenli denklemler), başarılı olan öğrencileri "denklem"e yapısal açıdan yaklaşmaya ve dolayısıyla çözmeye teşvik ettiğini belirtmektedir. Bunun tersine, araştırmanın sonuçları bir tarafında tek bir kutunun ve bir miktar bilyelerin (denklemin bir tarafında tek bir bilinmeyen olan denklemler),

diğer tarafında ise bir sayıda bilyelerin olduğu görevlere öğrencilerin aritmetik olarak karşılaştırma yoluyla yaklaştığını ve kolay şekilde çözüme ulaştığını göstermektedir. Lenz, anaokulu ve ilkokul öğrencilerinin belirlenebilen bilinmeyen nicelikler tarafından ilişkisel düşünmeye teşvik edilmesi gerektiğini vurgulamıştır.

Sayıların farklı kombinasyonlarını oluşturma etkinlikleri çocukların oluşturdıkları sayı yapısını geliştirmektedir. Bu da genelleştirilmiş aritmetik olarak cebirsel düşünme için oldukça önemlidir. Tsamir vd. (2015) yaptıkları çalışmalarında çocukların sayıları parçalama ve parçaları birleştirme stratejilerini incelemişlerdir. Bu bağlamda çalışmaya, bir sonraki dönem birinci sınıfa başlaması planlanan 5-6 yaşlarındaki 20 anaokulu çocuğu katılmıştır. Çocukların hepsi sayma ilkeleri uygun şekilde en az 15'e kadar sayabilmektedir. Veri toplama aracı, aynı matematiksel yapıya sahip, fakat sayıları parçalama ve sayıları birleştirme olarak farklı bağlamlar ve araçlar içeren iki etkinlik şeklinde hazırlanmıştır. Birinci etkinlikte her birinin üzerinde çeşitli miktarlarda aynı elma resimleri olan ve bazıları tamamen boş olan (sıfır elma) 16 kart kullanılmıştır. Bu etkinlikte araştırmacı bir elinde kart tutarak, toplam 7 elma olması gerektiğini vurgulamış ve çocuklardan diğer elinde hangi kartın olması gerektiğini sormuştur. İkinci soruda araştırmacının bir elinde bir sayıda fiziksel somut nesneler şeklinde elmalar gösterilmiş ve toplam yedi elma olması gerektiği vurgulanarak diğer kapalı elinde kaç tane elma saklandığı sorulmuştur. Birinci soruda cevapların kartlar içinden seçilmesinden farklı olarak ikinci soruda çocukların soruyu zihninden çözmeleri gerekiyordu. İlk görevde çocuklar sayma bilgilerini kullanarak, ilk karttaki elmaları saymış, uygun bir ikinci kart seçebilmiş ve her iki karttaki elmaları birlikte saymışlardır. Ancak, resimlerin hareket ettirilemez olduğunda bazı çocuklar bir karttaki elmaları sayarken bir elmayı kaçırmış veya nereden başladıklarını unutup bir elmayı tekrar saymışlardır. Araştırmacılar, ikinci görevde bir sayı için fiziksel nesnelere sahip olmanın çocukları ikinci sayıyı parmaklarıyla modellemeye teşvik edebileceğini varsaymışlardır. Fakat birinci soruya kıyasla ikinci soruda daha az çocuk doğru cevabı bulabilmiştir. Ayrıca çocukların doğru cevaplama verileri verilen parçanın değerine göre değişmektedir. Birinci görev (kartlar arasından seçim) için verilen sayı parçası 3 ve 5 iken verilen doğru cevapların yüzdesi %70 ve %75 olmuştur. İkinci görev (zihinden cevap bulma) için verilen sayı parçası 3 ve 5 iken verilen doğru cevapların yüzdesi 35% ve 55%'e düşmüştür. Bunun nedeni çocuklar için zihinden yapmanın saymadan daha zor olması olarak düşünülmüştür. Bunun tersine, verilen parça 7 olduğunda birinci görevde doğru cevap yüzdesi 50% iken,

ikinci görevde doğru cevap yüzdesi %95'e çıkmıştır. Çocukların ilk görev için daha çok sayma stratejilerini, ikinci görev için ise daha çok sayı duyusunu kullandıkları ortaya çıkmıştır. Araştırmacılar, birinci görev toplamı bulmak için toplananları birleştirmeyi içeren bir problem iken, ikinci görevin çocukları daha etkili stratejiler kullanmaya, tahmin etmeye ve soruya yapısal bakmaya teşvik ettiğini vurgulamışlardır. Sonuç olarak bu çalışmada çocukların eldeki sayısal verileri eleştirel bir şekilde değerlendirdikleri ve çıkarımlarda bulundukları (örneğin, tüm öğeler buradaysa, o zaman kapalı el boştur), stratejilerini değiştirdikleri (örneğin, tahmine güvenmeyip öğeleri gerçekten saydıkları) ve kararlarını haklı çıkardıkları (örneğin, daha önce bir elmam fazlaydı, bu yüzden şimdi bir elma eksik olan bir kart seçmeliyim) görülmüştür.

Cheeseman vd. (2020) yaptıkları çalışmalarında eşit grup yapılarının görselleştirilmesi ve bileşik birimlerin (grupların) sayılması olarak çocukların çarpımsal düşünme becerilerini incelemeyi amaçlamışlardır. Bu bağlamda ilkökul 1. sınıfa yeni başlayan, ortalama 5 yaş 6 aylık 18 çocuktan oluşan çalışma grubu belirlenmiştir. Sınıf öğretmenin (yardımcı araştırmacı) görüşleri dikkate alınarak, araştırmacılar tarafından 5-6 yaşındaki çocukların eşit grupları tanımaları ve oluşturmaları ve bu grupları nicilemelerini teşvik eden, 5 dersten oluşan bir ders programı tasarlanmıştır. Dersler araştırmacılarından biri olan, çocukların kendi öğretmeni tarafından verilmiştir. Veriler video kayıtlar, gözlemler ve çocukları çizimleri yardımıyla toplanmıştır. Araştırma sorusu olarak hikâye şeklinde problemle başlanmış ve çocuklardan 12 yavru ördeği eşit gruplara ayırmaları istenmiştir. 12 ördek problemi çocukları eşit gruplar oluşturma farklı yollarını görselleştirmeye ve çizmeye teşvik etmiştir. Araştırmanın sonucu olarak on beş çocuğun (%83) eşit grupları belirleyip yaratabildiği, ayrıca bu çocuklardan sekizinin (%44) oluşturdukları grup sayısını da belirleyebildikleri görülmüştür. Bu bulgular, bazı küçük çocukların erken çarpımsal fikirleri anladığını, eşit grup durumlarını görselleştirebildiğini ve bunları çizimleri ve konuşmaları yoluyla iletebildiğini göstermektedir. Çalışma, erken yaşlardan itibaren matematiksel görselleştirmeyi teşvik etmenin, çocukların düşüncelerini ortaya çıkaracak şekilde problemler tasarlanmanın ve çizimi bir matematiksel iletişim biçimi olarak teşvik etmenin değerini vurgulamaktadır.

Papic vd. (2011) örüntüleri genelleme ve genişletme stratejilerinin gelişimini incelemeyi amaçlamışlar. Araştırma, Avustralya'nın Sidney kentinin iki özel okulöncesi eğitim kurumunda yürütülmüştür. Bir anaokulu deney grubu olarak, diğeri ise kontrol grubu

olarak belirlenmiştir. Deney grubu için tekrarlayan ve genişleyen örüntüler üzerine 6 aylık öğretim programı tasarlanmış ve uygulanmıştır. Bu araştırma için 3 yaş 9 aydan 5 yaşa kadar 53 çocuk katılımcı olarak seçilmiştir. Fakat üçüncü değerlendirmeye katılmak için 32 çocuk müsait durumda olmuştur. Ölçek olarak Erken Matematiksel Örüntü Değerlendirmesi (EMPA) geliştirilmiş, öğretimden önce-sonra ve anasınıfı sonunda tekrar uygulanmıştır. Veriler yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler ve video kayıtlar ile toplanmıştır. Öğretim programının uygulanma sürecinde araştırmacı haftada bir gün ziyarette bulunmuş, çocukların davranışlarını gözlemlemiş ve program değerlendirme verilerini toplamıştır. Ayrıca veriler öğretmenin gözlem notlarını ve dijital kayıtları da içermektedir. Araştırmanın sonunda deney grubunun, 1. sınıf sonunda ve takip değerlendirmelerinde çok çeşitli örüntü görevlerinde kontrol grubundan daha iyi performans gösterdiği sonucu ortaya çıkmıştır. Deney grubundaki çocuklar, örüntülerde tekrarlama birimi ve genişleyen örüntüleri yapılandırma konusunda daha fazla başarı göstermiş ve çoğu, bir yıl sonra büyüyen desenleri genişletebilmiş ve açıklayabilmiştir. Buna karşılık, kontrol grubunun çoğu, tekrarlayan desenleri dönüşümlü öğeler olarak ele almış ve nadiren basit geometrik desenleri tanımlayabilmiştir.

Strachota vd. (2024), çalışmalarında çocukların çift ve tek sayılar hakkında akıl yürütmelerini desteklemede araçların rolünü araştırmışlardır. Bu bağlamda Amerika Birleşik Devletleri'ndeki iki anaokulu belirlenmiş ve 5-8 yaş arası anaokulu 1. sınıf ve 2. sınıf öğrencileri katılımcı olarak seçilmiştir. Katılımcılar altısı anaokulundan, beşi ilkokul 1. sınıf ve beşi ilkokul 2. sınıftan olmak üzere toplam 16 öğrenciden oluşmuştur. Öğrenciler matematiksel yapı ve ilişkilerle genelleme yapmaları, temsil etmeleri, gerekçelendirmeleri ve akıl yürütmeleri istenen bir erken cebir uygulamasına katılmışlardır. Öğretim dersleri önceden ilkokul öğretmeni olan araştırmacılardan biri tarafından verilmiştir. Öğretim programı bir okul yılı boyunca uygulanan, her sınıf düzeyi için 18 dersten oluşmaktadır. Öğretim dersleri matematiksel eşdeğerlik, değişken, birlikte değişen niceliklerin anlamı ve kullanımı, sayı ve işlemlerin özellikleri ve genelleştirilmiş aritmetik ilişkiler dahil olmak üzere çeşitli erken cebirsel kavramları ele alınmıştır. Bu çalışmada ise özellikle çift ve tek sayılarla işlemler hakkındaki anlayışlarına odaklanılmıştır. Öğrencilerin çift ve tek sayılarla genelleme, temsil etme, gerekçelendirme ve akıl yürütme ile meşgul olduğu derslerde, sayıları bir artık veya hiç artık olmadan çiftler halinde düzenleyebilmeleri için araç olarak küpler ve nokta kartları kullanılmıştır. Bu yaklaşım çocukların çift sayıda nesne eşleştirildiğinde artık olmazken,

tek sayıda nesne eşleştirildiğinde bir artık kaldığını fark etmelerini sağlamak için benimsenmiştir. Öğrencilerle, yıl boyunca süren müdahaleden önce, müdahale sırasında ve müdahaleden sonra, araçların bu uygulamalara katılımlarını nasıl etkilediğini keşfetmek için görüşmeler yapılmıştır. Verileri toplamak için görüşmelerin video kayıtları alınmış ve analiz edilmesi için yazıya dökülmüştür. Araştırmada çocuklar, küplerden çiftler oluşturarak, ya da nokta kartlarında ikili noktaları çizgiyle birleştirerek, “çiftler ve artıklar” stratejisini kullanmış ve sayıların tek veya çift olduklarını açıklamışlardır. Bunun yanı sıra, bazı çocuklar tek ve çift sayıları tanımlarken, nesneleri iki eşit gruba bölerek “bölme stratejisi” kullanmış ve “eşit olarak bölebildiği sayıların” çift sayı olduğunu, artık kalan olursa tek sayı olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca bir birinci sınıf öğrencisi, bölme stratejisini kullanırken küpleri iki eşit büyüklükte kuleye düzenlemiş ve kuleler aynı yükseklikteyse toplam küp sayısının çift olduğunu, ancak kuleler bir küp kadar farklıysa toplamın tek olduğunu belirtmiştir. Kendisi de buna “iki küle stratejisi” adını vermiştir. Ayrıca bazı çocuklar iki tek sayının artık kalan noktalarını birleştirerek, iki tek sayının nasıl bir çift sayı oluşturabileceğini göstermişlerdir. Görüşmeler sırasında öğrencilerin küpler ve "nokta kartlarına" ek olarak parmaklarını ve ellerini de araç olarak kullandıkları görülmüştür. Örneğin, bir öğrenci her elinde iki parmağını kaldırarak ve ardından bir elindeki iki parmağını diğer elindeki aynı parmaklarla eşleştirerek, daha sonra bir baş parmağını uzatarak onun kalan olduğunu göstererek 5'in tek olduğunu açıklamıştır. Araştırma sonuçları, genç öğrencilerin uygun görev ve araçlarla cebirsel düşünmeye başladıklarını ve genelleştirilebilir stratejiler uygulayabileceklerini göstermektedir. Araştırma, öğrencilerin çift ve tek sayılarla ilgili kavramları oluşturmalarında ve bu matematiksel bağlamda genellemeleri keşfetmelerinde araçların önemli rol aldığını ortaya koymaktadır. Son olarak da, bu araştırma cebirsel düşünmenin merkezinde yer alan matematiksel ilişkileri genelleştirmenin ve gerekçelendirmenin erken yaşlardan itibaren geliştirilmesinin önemini ortaya koymaktadır.

Isler vd. (2013) 3. sınıf öğrencilerinin tek ve çift sayıların özellikleri ve işlemler hakkında ne düşündüklerini incelemişlerdir. Bu bağlamda güneydoğu Massachusetts'teki iki ilkokuldan 170 üçüncü sınıf öğrencisini katılımcı olarak belirlenmiştir. Öğrencilerle ilk önce ön test yapılmıştır. Öğrencilerden “üç tek sayının toplamı her zaman tek olur”, “iki çift sayının toplamı çift olur” gibi ifadeleri doğrulamaları istenmiştir. Ön test sonuçları, öğrencilerin %21'inin varsayımı doğrulamak için örneklere (örneğin, $3+7+9= 19$)

güvendiği, %4'ünün yanlış örnek verdiği, %3'ünün varsayım cümlesini tekrar ettiği (“3 tek sayının toplamı tek olur çünkü tektir”), %2'inin doğru ama eksik (örneğin, “iki tek sayıyı toplarsan çift olur”) açıklama verdiği, %34'ü “cevap yok” ve %31'i “diğer” olarak kodlanarak öğrencilerin başarısız olduğunu, ve sadece %5'inin genelleme yaparak doğru olduğunu ispatladıklarını, birçok öğrencinin bu sorulara yanıt veremediğini ve bu tür sorular üzerine muhakeme yapmak için bilişsel becerilere hakim olmadığını göstermiştir. Öğrencilerin tek ve çift sayıları yapılandırmaları ve bu sayıların özellikleri üzerine yapısal düşüncelerini geliştirmek için öğrencilerle ders programı tasarlanmış ve uygulanmıştır. Birinci derste öğrencilerden önlerinde olan tek ve çift sayıda küpleri ikişer dizerek keşfetmeleri ve keşsettikleri sayılar için "oluşturulan çift sayısını" ve "kalan küp sayısını" gösteren bir tabloyu tamamlamaları istenmiştir. Öğretmen-araştırmacı bu etkinlik boyunca öğrencilere “6 sayısında kaç çift küp vardır?”, “Tabloda neleri fark ettiniz?”, “Hangi sayıların hiç küpü kalmamıştır?” gibi sorular sorarak rehberlik etmiştir. Amaç öğrencilerin tüm çiftler yapıldıktan sonra çift sayılarda hiç küp kalmadığını, tek sayılarda ise bir küp kaldığını anlamalarını sağlamaktır. Ardından öğretmen-araştırmacı çocuklardan iki çift sayının toplamı üzerine düşüncelerini istemiştir. Öğrenciler iki çift sayının çift olduğunu söylediklerinde öğretmen-araştırmacı çocukların bunu genellemeleri için neden böyle olduğunu ve her zaman mı böyle olacağını sorarak açıklamalarını istemiştir. Bazı öğrenciler küpleri kullanarak genellemelere ulaşabilmişlerdir. Örneğin, bir öğrenci iki çift sayının toplamını "çift sayıları topladığımızda hiçbir zaman kalan küp olmuyor. Herkesin bir çifti var, böylece onları bir araya getirebiliriz ve herkesin her zaman bir çifti olur” şeklinde açıklamıştır. Sınıf, bir sonraki derste iki tek sayının toplamını ve bir çift ve bir tek sayının toplamını, üç tek sayının toplamını keşfetmeye devam etmiştir. Örneğin, bir öğrenci üç tek sayının toplamını "Bu her zaman doğrudur çünkü iki tek sayıyı topladığınızda çift sayı olur, ancak üçüncüyü eklerseniz tek olur" şeklinde açıklamıştır. Araştırmanın sonucu, bu tür yaklaşımın öğrencilerin belirli sayılara odaklanmak yerine sayılarına yapısına odaklanarak tüm sayılar için genelleme yapmalarına yardımcı olduğunu göstermektedir. Araştırmanın bulguları üçüncü sınıf öğrencilerinin, uygun talimatlar verildiğinde ve uygun araçlar kullanıldığında, varsayımlar geliştirmede, nedenlerini araştırmada ve genelleme yapmada başarılı olabileceklerini ortaya koymuştur. Bu tür yaklaşım daha erken düzeylerden küçük çocukların tek ve çift sayı kavramlarını oluşturabileceklerini göstermektedir.

Bunların yanı sıra, yapılan diğer araştırmalar da (Kieran, 1992; Kieran, 2004; Blanton ve Kaput, 2005; Radford, 2006; Kaput, 2008; Cai ve Knuth, 2011; Blanton vd., 2011) cebirsel düşünmenin erken yaşlarda ve erken sınıflarda geliştirilmeye başlanılmasının önemini vurgulamakta ve 4-12 yaş aralığının erken dönem cebirsel düşünme için kritik süreç olduğunu göstermektedir. Öğrenciler ilkokul ve daha önceden cebirin kavramlarını oluşturmaya başlamaz, yeterli derecede hazır bulunamazlarsa ortaokul döneminde cebirsel düşünmede somuttan soyuta geçiş yapmakta zorlanırlar. Bu bağlamda çocukların öğrenmeye açık oldukları 3-4 yaşlardan itibaren somut şekilde cebirsel düşünmeye giriş yapılmasında büyük bir fayda vardır.

2.2 Yurt İçi Yapılan araştırmalar

Türkmen ve Tanışlı (2019) yaptıkları çalışmada cebir öncesi dönemdeki öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeylerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Bu bağlamda orta sosyo-ekonomik düzeyde olan bir okuldan 45 üçüncü sınıf, 36 dördüncü sınıf ve 35 beşinci sınıf öğrencisi olarak toplam 116 öğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir. Özellikle cebir öncesi dönemde olmaları gerektiği için üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıflardan katılımcılar seçilmiştir. Bu araştırmada temel nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Veri toplama aracı olarak araştırmanın amacını kapsayan açık uçlu sorular kullanılmıştır. Veriler tematik analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Bu yöntem bağlamında alanyazın incelenmiş ve daha önceden belirlenen fonksiyonel düşünme düzeyleri göz önünde bulundurarak, bazı düzeyler bu çalışma kapsamında kullanılmış ve alt düzeyler oluşturulmuştur. Araştırmanın sonuçlarına göre, genel olarak tüm sınıf düzeylerinin fonksiyonel düşünmenin göstergelerinin birçoğuna sahip olduğunu ancak bazı öğrencilerin $y=mx+n$ kurallı ilişkileri genellemede ve temsil etmede daha çok zorlandıkları görülmüştür. Bu sonuç öğrencilerin cebir öncesi dönemde fonksiyonel düşünme becerilerinin geliştirilebilir olduğunu göstermektedir. Buradan yola çıkarak fonksiyonel düşünme becerilerinin daha erken yaşlarda geliştirecek etkinliklerin tasarlanması ve eğitim programlarında ve ders kitaplarında verilmesi gerektiği ortaya çıkmaktadır.

Dede ve Argün (2003) yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin cebirde zorlanma nedenlerini incelemişlerdir. Araştırmacılar öğrencilerin, cebirin yapısından, öğrencilerin hazırbulunuşluk düzeylerinden ve öğretimdeki eksikliklerden dolayı cebiri anlamlandırmakta zorlandıklarını vurgulamışlardır. Yapılan araştırma cebir öğrenme

sürecinde öğrencilerin eşitlik ve değişken kavramlarını anlama ve kavramsallaştırmada, cebirin dil ve içeriğinde, cebirde kullanılan ilişkiler ve stratejilerde zorlandıklarını göstermektedir. Araştırmacılar öğrencilerin zorlanma nedenlerinden birinin de aritmetiksel bilgi yetersizliği olduğunu vurgulamışlardır. Sonuç olarak, öğrencilerin soyut cebirsel kavramları anlamalarını sağlamak ve cebirsel düşünme becerilerini geliştirmek için öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel kavramları daha anlaşılabilir ve somut bir şekilde öğrenmelerini sağlayacak etkinlikler tasarlamaları gerekmektedir.

Akkan vd. (2011) literatür tabanlı inceleme yapmışlar ve aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar ile cebir öncesi dönemin önemini araştırmışlardır. Aritmetikte sayıların kullanımı, eşitliğin bir işlem sonucu ifade etmesi, cebirde ise harflerin, sembollerin, cebirsel ifadelerin kullanımı ve eşitliğin dengeyi ifade etmesi, problem çözme yöntemleri bu farklılıkları oluşturmaktadır. Bu farklılıklar öğrencilerin cebire geçişte zorlandıklarına neden olmaktadır. Araştırmacılar, öğretmenlerin cebirden önce temel kavramlara değinmeleri gerektiğini ve öğrencilerin daha önceden bu kavramları yapılandırmaları gerektiğini vurgulamışlardır. Bu bağlamda, araştırmacılar öğretmenler için öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte yaşadıkları zorlukları kapsayan seminerlerin hazırlanmasını, temel cebirsel kavramların yapılandırmasında sanal manipülatiflerin ve öğrenme nesnelerin kullanılmasını önermektedirler.

Kaya ve Keşan (2014) yaptıkları çalışmalarında ilköğretim düzeyindeki öğrencilerinin cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerilerinin önemini yapılan araştırmalar kapsamında tartışmışlardır. Cebirsel düşünme ve muhakeme becerisi okulda matematik derslerinde kullandıkları zihinsel aktivitelerin yanı sıra, öğrencilerin gerçek yaşamlarında karşılaştıkları problemler üzerinde düşünmeyi, yorum yapmayı ve çözüme ulaşmayı da içermektedir. Yapılan araştırmalar ise öğrencilerin günlük yaşam problemleri ve matematiksel bilgileri ilişkilendirmede zorlandıklarını göstermektedir. Araştırmacılar, bu zorlanmaların aradan kaldırılması için her öğrencinin anaokulu düzeyinden başlayarak lisenin sonuna kadar gereken cebirsel kavram ve anlayışları yapılandırması, öğrendiklerini uygulayabilmesi, kavramları kendi aralarında ilişkilendirebilmesi ve çoklu temsil kullanabilmesi gerektiğini vurgulamışlardır.

Genelleştirilmiş aritmetik olarak cebir için sayı ve işlemlerin sağlam şekilde oluşturulması temel önem taşımaktadır. Bu bağlamda Şirin (2011)'in yüksek lisans tez çalışmasında anaokulunda eğitim gören 5 yaş grubu çocukların sayı ve işlem kavramlarını

oluşturmada oyun yönteminin etkisini incelenmiştir. Araştırmada, Bursa ilinde bulunan Millî Eğitim Bakanlığına bağlı bağımsız bir anaokulundan seçkisiz örnekleme yöntemi ile 15 kız ve 15 erkek olmak üzere toplam 30 çocuk katılımcı olarak belirlenmiş ve aynı yöntemle deney ve kontrol grupları oluşturulmuştur. Veri toplama aracı olarak “48-86 Ay Çocuklar İçin Sayı ve İşlem Kavramları Testi” katılımcıların düzeyine göre düzenlenerek kullanılmıştır. Deney ve kontrol grupları ile ön test yapıldıktan sonra araştırmacı tarafından hazırlanan ve sayı ve işlem kavramlarını oyunlarla kazandırmayı amaçlayan “Oyun Temelli Sayı ve İşlem Kavramları Programı” deney grubu üzerinde uygulanmıştır. Kontrol grubu ise okul programına devam etmiştir. Uygulama sonunda deney ve kontrol gruplarına veri toplama aracı olarak belirlenen “Sayı ve İşlem Kavramları Testi” uygulanmıştır. Elde edilen veriler nicel yöntemler ile analiz edilmiştir. Araştırmada deney grubundaki çocukların kontrol grubuna göre sayı ve işlem kavramları yapılandırma anlamı derecede farklılık gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç oyun yaklaşımının çocukların sayı ve işlem kavramlarını oluşturmalarını önemli derecede etkilediğini göstermektedir.

Turgut ve Temur (2017) gerçekleştirdikleri çalışmalarında ilkökul dördüncü sınıf öğrencilerinin akademik başarı düzeylerine erken cebir bağlamında tasarlanan etkinliklerin etkisini belirlemeyi amaçlamışlardır. Bu bağlamda 4. Sınıf Erken Cebir Başarı Testinin geliştirilmesi için ilkökul dördüncü sınıf öğrencilerinden 108 kişi ve erken cebir öğretim etkinliklerinin uygulanması için ilkökul dördüncü sınıf öğrencilerinden 20 kişi katılımcı olarak seçilmiş ve her aşama için iki farklı çalışma grubu belirlenmiştir. Katılımcılar uygun örnekleme yöntemleri kullanarak belirlenmiştir. Verilerin analizi için gözlem ve tek grup öntest-sontest modeli kullanılmıştır. Araştırmacılar erken cebir kapsamında 15 ders saatinden oluşan öğretim programı tasarlamıştır. Sınıf öğretmeni, erken cebir bağlamında araştırmacılar tarafında yeterince bilgilendirildikten sonra, tasarlanan öğretim programını kendi sınıfında uygulamıştır. Erken cebir kapsamında hazırlanan etkinliklerin öğrencilerin akademik başarı düzeyine etkisini incelemek için öğrencilere öntest ve sontest uygulanmıştır. Öntest ve sontest olarak araştırmacıların geliştirdiği 4. Sınıf Erken Cebir Başarı Testi kullanılmıştır. Yapılan analiz sonucu öğrencilerin ön test ortalamaları ve son test ortalamaları arasında anlamlı bir fark olduğunu tespit edilmiştir. Bu da erken cebir etkinliklerinin öğrencilerin akademik başarı düzeylerini olumlu şekilde etkilediğini göstermektedir. Bu bağlamda, erken cebir etkinliklerinin okul müfredatında yer almasının önemi ortaya çıkmaktadır.

Yüce ve Şen (2022) erken cebir öğretim programı uygulayarak dördüncü sınıf öğrencilerinin genelleme ve gerekçelendirme becerilerini geliştirmeyi amaçlamışlardır. Araştırmada nitel araştırma yöntemleri benimsenmiş ve öğretim deneyi modeli uygulanmıştır. Öğretim programı genişleyen, sayı ve şekil örüntülerini içeren 14 oturumluk etkinliklerden oluşturulmuştur. Bu bağlamda amaçlı örnekleme yöntemi ile 6 dördüncü sınıf öğrencisi katılımcı olarak belirlenmiştir. Çalışmanın verileri odak grup görüşmeleri, gözlem, görüşmelerin video ve ses kayıtları ve öğrencilerin çalışma yapıları yardımıyla toplanmıştır. Elde edilen veriler nitel araştırma yöntemlerinden betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Bu çalışmada örüntüyü sürdürme, genişletme, eksik yapıyı tamamlama ve örüntü kuralını tanımlamaya ilişkin etkinlikler kullanılmıştır. Örüntü etkinliklerinin gerçekleştirildiğinde öğrencilerin sözel, yazılı, görsel ve matematiksel temsil biçimlerini kullandıkları gözlemlenmiştir. Araştırmanın bulguları, öğretim deneyi sürecinde öğrencilerin sayma, modelleme, bütün nesne, yinelemeli, doğrusal ve bağlamsal stratejilerini kullanarak genellemelere ulaştıklarını göstermektedir. Bununla yanı sıra öğrencilerin ulaştıkları genellemeleri doğrulamak için açıklama, sayısal, şekilsel ve cebirsel stratejiler kullandıkları da gözlemlenmiştir. Bu sonuçlar, ilkökul dördüncü sınıf öğrencileri üzerinde uygulanan erken cebir öğretim deneyinin, o öğrencilerin örüntüleri genelleme ve gerekçelendirme becerilerinin geliştirilmesinde olumlu şekilde etkili olduğunu göstermiştir. Öğrencilerin erken cebir kapsamında fonksiyonel düşünme becerileri incelendiğinde ise yinelemeli, ortak değişkenli ve kovaryasyonel düşünme biçimlerinin etkili olduğu belirlenmiştir. Bu sonuçlar ışığında erken cebir öğretim deneyinin, fonksiyonel düşünmenin çeşitli düşünme biçimleri kapsamında etkili olduğu görülmektedir.

Kesebir (2024) doktora tez çalışmasında çocukların cebirsel düşünme becerilerinin nasıl geliştiğini incelemeyi amaçlamıştır. Bu çalışmada cebirsel düşünmenin Genelleştirilmiş Aritmetik, Eşitlik, Değişken, İşlevsel Düşünme alt boyutları ele alınmış ve bu bileşenler bağlamında inceleme yapılmıştır. Çalışma grubu amaçlı ve çok aşamalı örnekleme yöntemleri kullanarak birkaç aşamada belirlenmiştir. İlk aşamada tipik durum örnekleme yöntemiyle devlet ilkokulları belirlenmiştir. İkinci aşamada rastgele örnekleme yöntemiyle bir devlet ilkokulu seçilmiş ve o okulun içinde yer alan 6 dördüncü sınıf öğrencisi katılımcı olarak seçilmiştir. Katılımcılar, kendini ifade edebilecek ve akademik başarı düzeyleri farklılık gösterecek şekilde, amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Süreçte üç öğrenci çalışmadan ayrılmış ve nihai çalışma üç öğrenci ile tamamlanmıştır.

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi modeli benimsenmiştir. Öğretim deneyi ön klinik görüşme, öğretim görüşmeleri ve son klinik görüşme süreçlerinden oluşmuş ve veriler 3 aşamada, toplam 8 haftada toplanmıştır. Görüşmeler okulda bulunan boş bir sınıf ortamında gerçekleştirilmiştir. Öğretim görüşmeleri bireysel şekilde, haftanın dört günü olarak, 60 dakika sürmüş ve toplam 3haftada tamamlanmıştır. Katılımcılarla klinik görüşmeler gerçekleştirilmiş ve gözlem yapılmıştır. Veriler görüşmelerin video kayıtları ve araştırmacının gözlem notları yardımı ile toplanmıştır. Elde edilen veriler nitel içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Sonrasında nitel veriler nicel verilere dönüştürülmüş ve veriler kapsamlı bir şekilde çözümlenmiştir. Sonuç olarak, öğretim deneyinden önce, ön klinik görüşmelerinde çocukların işlemsel becerileri ile cebirsel düşünme becerileri arasında fark gözlemlenmişken, son klinik görüşmelerinde bu farkın ortadan kalktığı tespit edilmiştir. Ön klinik görüşmelerinde çocuklar daha çok işlemsel düşünerek ve aritmetiksel hesaplamalar yaparak, az sayıda soruları doğru şekilde cevaplayabilmişlerdir. Çalışmanın sonunda ise öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin önemli derecede geliştiği, problem çözme sürecinde öğrencilerin işlemsel düşünmenin yanı sıra cebirsel düşünme becerilerini de sergiledikleri görülmüştür. Bulgular ışığında, cebirsel düşünme becerisinin "Genelleştirilmiş Aritmetik", "Eşitlik", "Değişken" ve "Fonksiyonel Düşünme" olarak dört alt boyuttan oluştuğu belirlenmiştir. Bu çalışmada, çocukların genelleştirilmiş aritmetik kapsamında sayı yapısı ve işlem özelliklerini genellemeleri, eşitlik kavramı kapsamında eşitliğin ilişkisel yapısını oluşturmaları, değişken kavramı kapsamında değişkenin bilinmeyen ve değişebilen nicelik olarak yapılandırılmaları ve uygulamaları, fonksiyonel düşünme kapsamında fonksiyonel ilişkileri belirlemeleri, tanımlamaları, kural oluşturmaları ve genellemeleri sağlanarak, cebirsel düşünme becerilerinin önemli derecede geliştiği sonucuna ulaşılmıştır.

Sonuç olarak Türkiye’de yapılan ilgili alanyazın incelendiğinde küçük çocukların cebirsel düşünmelerinin incelenmesi hakkında çalışmalara rastlanmamıştır. Bu bağlamda bu alanda yapılacak olan çalışma öncü niteliği taşımaktadır. Bu boşluktan faydalanarak bu araştırmada 60-72 aylık anaokulu öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerini incelemek hedeflenmiştir.

3 YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, katılımcılar, veri toplama aracı, verilerin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanması, araştırmacının rolü ile ilgili bilgiler açıklanmıştır.

3.1 Araştırma Modeli

60-72 aylık okulöncesi eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme becerilerinin nasıl olduğunu ve çalışmalarında kavramları nasıl oluşturduklarını, neler düşündüklerini ve problem çözme süreçlerinde hangi stratejileri kullandıklarını belirlemenin amaçlandığı bu çalışmada temel nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Temel nitel araştırma yöntemi, sosyal olguların anlamını anlamaya ve açıklamaya yardımcı olan; insanların düşünceleri, duyguları, davranışları ve dünyayı nasıl anlamlandırdıkları ile ilgilenen bir araştırma yöntemidir (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Ayrıca bu yöntemde görüşme, gözlem ve doküman incelemelerinde kullanılan sorular, belirlenen odak noktaları ve kurulan ilişkiler araştırmanın kuramsal çerçevesine bağlı olarak gerçekleştirilmektedir (Merriam, 2009; Merriam, 1998). Bu bağlamda temel nitel araştırma yöntemi ile 60-72 aylık okulöncesi eğitimi alan çocukların kavramsal çerçeve doğrultusunda cebirsel düşünme becerilerinin derinlemesine incelenmesi sonucu ortaya çıkan anlayışları, stratejileri, yaşadıkları sorunlar detaylı bir şekilde ortaya koyulmuştur.

3.2 Katılımcılar

Araştırmanın pilot ve ana çalışmasında yer alacak katılımcılar Eskişehir ili Odunpazarı ilçesinde yerleşen, sosyoekonomik düzeyi orta-yüksek seviyede olan bir devlet anaokulunda öğrenim gören 60-72 aylık çocuklardan oluşmaktadır. Anaokulu seçiminde okul müdürünün çalışmaya yumuşak bakması ve gönüllü olarak katılmak istemesi dikkate alınmıştır. Diğer yandan cebirsel düşünme anaokulundan itibaren başlaması gereken bir düşünme biçimi olduğundan ve Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Matematik Dersi Öğretim Programlarında da cebirsel düşünme teması ön plana çıkarıldığından özellikle anaokulunda öğrenim gören 60-72 aylık çocukların ilkökul öncesi cebirsel düşünme becerilerinin nasıl olduğu, somut şekilde, ad koymadan kavramları nasıl oluşturdukları incelenmek istendiğinden bu yaş grubu araştırma kapsamına alınmıştır.

Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemleri olgu ve olayların derinlemesine incelenmesini amaçlayarak daha zengin verilere sahip olduğu varsayılan durumlar

üzerine çalışmaktadır (Patton, 1987). Bu yöntemde araştırmacı yaptığı çalışmanın amaçları doğrultusunda, araştırma konusuna en uygun olan bireyleri seçerek çalışma grubunu oluşturmaktadır. Bu durumda elde edilen sonuçların araştırma konusu ve seçilen çalışma grubu bağlamında yorumlanması oldukça önemlidir (Şimşek, 2018). Ölçüt örnekleme yöntemi araştırma başlamadan araştırmacı tarafından önceden belirlenmiş olan ölçütler karşılanarak çalışılan bir yöntemdir (Yıldırım ve Şimşek, 2021).

Bu çalışmada araştırmacı tarafından çocukların kendilerini rahat bir şekilde ifade edebilmeleri ve resim çizmeyi sevmeleri ölçüt olarak belirlenmiştir. Katılımcıların seçilmesinde belirlenen anaokulundaki 60-72 ay grubu çocuklara öğretim yapan iki öğretmen yardımcı olmuş ve katılımcılar bu öğretmenlerin sınıfından seçilmiştir. Çocukların bakış açılarının ve deneyimlerinin farklılığını göz önünde bulundurarak araştırmanın çalışma grubu oluşturulmuştur. Çocukların cebirsel düşünme becerileri, problem çözme sürecinde yapacakları resimler ve açıklamalar üzerinden inceleneceği için, öğretmenlerden resim çizmeyi seven, kendini rahat bir şekilde ifade edebilen, düşüncelerini çekinmeden anlatabilen, dışadönük çocukları katılımcı olarak belirlemeleri istenmiştir.

Aynı zamanda öğretmenler çocukların öğrenme sürecindeki gelişimlerini her gün gözlemleyip değerlendirmektedirler. Sürec içinde bu değerlendirmelerden (öğretmen günlüğü) yola çıkarak akademik başarı düzeyi yüksek olan çocuklar A sınıfında, akademik başarı düzeyi daha düşük olan çocuklar ise B sınıfında eğitim almaktadır. Bu nedenle akademik başarı düzeylerinin farklılık göstermesi ve farklı öğretmenlerden eğitim almaları dikkate alınarak her iki sınıftan katılımcı seçilmiştir. Öncelikle öğretmenler bir sınıftan (A sınıfı) altı, diğer sınıftan (B sınıfı) dört çocuk belirlemiştir. Çocuklar belirlendikten sonra seçilen çocukların velileri ile tek tek görüşülmüş ve çalışma hakkında açıklamalar yapılmıştır. Bu görüşmeler sonrası gönüllü şekilde katılmak üzere A grubundan beş kişi (Kaan, Sanem, Yasemin, Duru, Gül), B grubundan ise üç kişi (Taha, Melisa, Efe) seçilerek çalışma grubunun son hali oluşturulmuştur. Seçilen katılımcılar sınıf içinde çok aktif, her şeye dikkat eden ve düşüncelerini paylaşan çocuklardır.

3.3 Verilerin Toplanması

Araştırma için gerekli olan veriler çocukların davranışlarını, düşüncelerini derinlemesine incelemeye imkân sunan klinik görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Bu süreçte video kayıtları alınmış ayrıca çocukların kendi çizim yaptıkları çalışma yaprakları da verilerin

toplanmasında kullanılmıştır. Çocuklara araştırmacı tarafından hazırlanan ve geliştirilen hikâye problemleri sunulmuştur. Bu problemler sorulurken araştırmacı tarafından çocuklara somut materyaller, kâğıt ve renkli kalemler verilmiş ne düşündüklerini çizerek göstermeleri de istenmiştir. Bu bağlamda problem çözme sürecinde çocuklar ya somut nesneler kullanarak ya da çizim yaparak çözüme ulaşmaya çalışmışlardır. Bu süreçte çocuklardan yaptıkları çizimler ve somut çözümler hakkında açıklama yapmaları istenerek, “ne düşünüyorsun?”, “bunu neden yaptın?”, “aklına ne geliyor?”, “nasıl yaptın?”, “nasıl anladın?”, “bir şey fark ediyor musun burada?”, “nasıl değişiyor?”, “nasıl bir ilişki var burada?”, “bu çizdiğin ne anlama geliyor?”, “neden bunu böyle çizdin?” şeklinde sonda sorular sorularak yaptıkları çizimleri ve söyledikleri cevapları daha açık şekilde anlatmaları istenmiştir.

Araştırma kapsamında her çocukla gerçekleşen klinik görüşmelerde katılımcıların kullandığı eylem ve söylemlerin gözlenebildiği video kayıtları ve çizim yaprakları da veri toplama sürecinde kullanıldığı için araştırmada veri çeşitlemesine gidildiği söylenebilir.

3.3.1 Veri Toplama Aracı

Görüşmelerde kullanılacak veri toplama aracı araştırmacı tarafından geliştirilerek, aynı zamanda farklı araştırmacılar tarafından (Neagoy, 2012, Akt. Van de Walle vd., 2021; Gifford, 1992; Killworth vd., 1992; Blanton ve Kaput, 2004; Carraher vd., 2008b; Radford, 2022; Lenz, 2022) geliştirilen problemler/sorular gereken düzeye göre yeniden düzenlenerek hazırlanmış ve matematik eğitiminde bir uzmanın görüşüne sunulmuştur. Çocukların problem bağlamlarını zihinlerinde daha iyi canlandırmaları için yaş düzeyine uygun hikâye tarzında problemler yazılmıştır. Hikâye problemlerindeki karakterler ve nesneler resmedilmeye teşvik edecek şekilde seçilmiştir. Küçük çocuklar okumayı bilmedikleri için hikâye problemleri doğrudan araştırmacı tarafından okunmuş ve hazırlanan resimler üzerinden anlatılmıştır. Veri toplama aracında kullanılan problemler araştırmanın incelemeye amaçladığı becerileri ortaya çıkaracak nitelikte hazırlanmıştır. Klinik görüşmede kullanılacak görüşme soruları analitik düşünme, yapısal düşünme ve fonksiyonel düşünme olarak üç boyutta ele alınmıştır.

Pilot çalışmada veri toplama aracı beş sorudan oluşmuştur:

1. “Köpekler ve Kulübe” problemi
2. “Fiyat Belirleme” problemi
3. “Barınakta Köpek ve Gözleri” problemi
4. “Bir tane daha verirsem” sorusu
5. “Şeker Kutusu” problemi

Pilot Çalışma

Klinik görüşme için hazırlanan veri toplama aracının pilot çalışması sekiz çocuktan oluşan bir grup anaokulu öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmasının yapılması veri toplama aracının değişmeksizin diğer öğrenciler tarafından da tekrarlanabilir olması açısından önemlidir (Goldin, 2000). Bu bağlamda pilot çalışma ana çalışma ile aynı şekilde tasarlanmış ve çocuklarla aynı ortamda bire bir görüşmeler yapılmıştır. İlk aşamada hazırlanan veri toplama aracı “Köpekler ve Kulübe” problemi, “Fiyat Belirleme” problemi, “Barınakta Köpek ve Gözleri” problemi, “Bir tane daha verirsem” sorusu ve “Şeker Kutusu” problemi olacak şekilde beş problemten oluşmuştur. Problemlerin içeriği ve hedefleri aşağıda açıklanmıştır. Pilot çalışması yapıldıktan sonra bazı problemlerin çocuklar için kolay olduğu ve kayda değer sonuçlar vermediği, özellikle de görüşmelerin beklenen süreden daha uzun olması nedeniyle çocukların çalışmaya daha hevesli olduğu ve geçiştirici cevaplar verdiği görülmüştür. Bu bağlamda “Fiyat Belirleme” problemi ve “Bir tane daha verirsem” problemi hem anaokulu öğretmenleri hem de alan uzmanının görüşü alınarak veri toplama aracı listesinden çıkarılmıştır.

Birinci hikâye problemi “Köpekler ve Kulübe”

Birinci problem olan köpek ve kulübe problemi eşitlik kavramını ve eşit gruplamayı içererek analitik düşünmeyi; yanı sıra sayıyı parçalama, karşılaştırma yapma, toplama, çıkarma, gruplama ve teklik çiftlik kavramlarını ele alarak da yapısal düşünmeyi gerektiren bileşenleri kapsamaktadır. Köpek kulübe probleminin temel hedefi çocukların sayıları parçalara ayırmalarını teşvik etmektir.

Köpek ve kulübe problemi aşağıdaki hikâye ile anlatılmıştır:

“Sabah çok güzel güneşli bir günde uyandın ve dışarı çıkıp gezmeyi karar verdin. Dışarı çıktığında yavru köpekler gördün. 6 tane yavru köpek de senin gibi gezmeye çıkmış. Ancak birdenbire yağmur yağmaya başladı ve yavru köpekler de senin gibi yağmura yakalandı. Onların bulunduğu yerde iki tane kulübe olduğunu gördün. Köpekler ıslanırlarsa hastalanabilirler. Onlara yardım etmemiz gerek. Köpeklerin ıslanmaması için iki kulübeye yerleştirmek istersen nasıl yerleştirirsin?”

Hikâye problemi anlatılırken Şekil 3.1’de sunulduğu gibi araştırmacı tarafından hazırlanan görseller kullanılmıştır.

Şekil 3.1

Köpek Kulübe Hikâyesi Üzerinden Anlatılan Görseller



Çocuklardan farklı şekilde parçalama yapmaları ve bu farklı yerleştirmelerde azalma ve çoğalma ilişkisini fark etmeleri istendiği için aşağıdaki gibi klinik görüşme soruları hazırlanmıştır. Bu süreçte öğrencilerden gelebilecek olası sorulara ilişkin sonda sorularda belirlenmiştir.

- Köpekleri iki kulübeye farklı şekilde nasıl yerleştirirsin?
- Köpeklerin yer değişmesi ile ilgili bir şey fark ediyor musun?
- Her iki kulübedeki köpek sayısı ile ilgili bir şey fark ediyor musun?

Ardından teklik çiftlik kavramlarını incelemek için aşağıda sunulan sorular hazırlanmıştır:

- Altı tane yavru köpeği eşit şekilde kulübelere nasıl yerleştirirsin?
- Beş tane yavru köpeğin olursa, onları eşit şekilde kulübelere nasıl yerleştirirsin?

Köpek ve kulübe hikâye problemi “Arka bahçenize, bazıları bahçenize, bazıları da yemliğinize olmak üzere, yedi kuş kondu. Kaç kuş ağaçta, kaç kuş yemlikte olabilir?” (Neagoy, 2012; Akt. Van de Walle vd., 2021, s. 300) ve “bazıları kabın içinde ve bazıları dışında olan altı tane fındıkların tüm olası kombinasyonları gösterme” (Gifford, 1992, s.65) problemlerinden esinlenerek hazırlanmıştır. Van de Walle vd. (2021) ise

çalışmasında benzer bir problemi genelleştirilmiş aritmetik bağlamında ele almış ve küçük çocukların genelleme yapmalarında sayıları parçalamalara ayırmanın, ileride toplama ve çıkarma stratejileri kullanmalarındaki önemini vurgulamıştır. İki problemin de temelinde olan sayıları parçalama işlemini dikkate alarak benzer bir problem hazırlanmıştır. İlk başta sayıları parçalamayı temel alarak problemde altı yavru köpeğin iki kulübeye farklı şekilde yerleştirilmesi istenmiştir. Ardından sayıları parçalamadan ilave olarak yapısal düşünme bağlamında teklik ve çiftlik kavramını ele almak için çift (altı) ve tek (beş) sayıda köpeklerin eşit şekilde paylaştırılması sorusu eklenmiştir. Bu şekilde düzenlemeler yapıldıktan sonra uzman görüşleri alınmış (matematik eğitimi uzmanı ve öğretmenler) ve pilot çalışmanın ardından birinci araştırma sorusu son halini almıştır.

Hikâye problemi okunduktan sonra çocuklar ister somut materyallerle, isterse de çizim yaparak problemi çözmeye başlamıştır. Somut materyal olarak çocuklara kâğıttan kesilmiş küçük yavru köpekler ve üzerinde iki tane kulübe şekli olan çalışma kâğıdı verilmiştir.

İkinci hikâye problemi “Fiyat Belirleme”

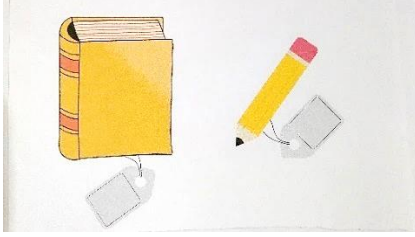
İkinci hikâye problemi olan fiyat belirleme probleminde küçük çocukların analitik düşünme bağlamında karşılaştırma yapmaları ve kendilerine göre küçük ve büyük olanı belirtmeleri temel alınmıştır. Anaokulunda 3-5 yaş sınıfı öğretmeni küçük çocukların bir bebek dükkânı açmalarını ve orada satacakları ürünlere kendilerine göre fiyat belirlemelerini istemiştir (Killworth vd., 1992, s.62). Çocuklar kendilerine göre semboller, sayılar ve çizimler kullanarak fiyat belirlemiş ve yazdıkları etiketleri açıklamışlardır. Bu oyundan esinlenerek fiyat belirleme problemi aşağıdaki şekilde hazırlanmıştır:

“Senin bir dükkânın olduğunu ve orada satış yaptığını düşünmeni istiyorum. Satmak istediğin ürünlerden biri de kitap ve kalemdir. Kitap ve kalemi satışa çıkarıyorsun. Bunlar için fiyat belirlemen lazım. Kitap kalemde daha pahalıdır. Bunu dikkate alarak satış yaptığın kitap ve kalemin üzerindeki etikette fiyatını nasıl gösterebilirsin?”

Bu problem sorulurken Şekil 3.2’de görüldüğü gibi çocuklara araştırmacı tarafından çalışma kâğıdı verilmiştir. Çocukların kitabın daha pahalı olduğunu etiket üzerinde göstermeleri gerekmektedir.

Şekil 3.2

Fiyat Belirleme Probleminin Çalışma Kâğıdı



Yapılan pilot çalışmadan elde edilen veriler incelendiğinde kayda değer sonuçların olmadığı, çocukların herhangi özel davranış göstermeden doğrudan sayıları kullanarak fiyat belirlediği ve problemin çocuklar için kolay olduğu görülmüştür. Aynı zamanda çocuklarla olan görüşmelerin beklenenden daha uzun sürmesi de dikkate alınarak uzmanların onayı ile problem veri toplama problemleri listesinden çıkarılmıştır.

Üçüncü hikâye problemi “Barınakta Köpek ve Gözleri”

Üçüncü hikâye probleminin temelini fonksiyonel düşünme becerisi bağlamında barınakta bulunan köpekler ve göz sayıları arasındaki ilişkinin bulunması ve bu ilişkinin genellenmesi oluşturmuştur. Bunun yanı sıra problem köpeklerin göz sayısını bulmak için toplama işlemini, göz sayısına göre köpek sayısını belirlemek için gruplama yapmayı veya bölme işlemini gerektirdiğinden cebirsel düşünmenin analitik düşünme bileşenini de kapsamıştır. Bu problem Blanton ve Kaput (2004)’un 3-5 yaşında küçük çocukların fonksiyonel düşünme becerilerini inceledikleri bir çalışmadan alınmıştır. Bu çalışmada küçük çocuklardan köpek sayıları ile göz sayıları ve köpek sayıları ile göz ve kuyruk sayıları arasındaki ilişkiyi tanımlamaları istenmiştir. Blanton ve Kaput (2004, s.136) problemi aşağıdaki şekilde sunmuştur:

“Diyelim ki bir köpek barınağındasın ve gördüğün tüm köpeklerin gözlerini saymak istedin. Eğer bir köpek olsaydı, kaç tane gözü olurdu? Ya iki köpek olsaydı? Üç köpek? 100 köpek? Köpek sayısı ile toplam göz sayısı arasında bir ilişki görüyor musunuz? Bu ilişkiyi nasıl tanımlarsın? Bunun işe yaradığını nereden biliyorsun? Diyelim ki toplamda kaç tane göz ve kuyruk olduğunu bulmak istedin. Bir köpek için kaç göz ve kuyruk vardır? İki köpek? Üç köpek? 100 köpek? Köpek sayısı ile toplam göz ve kuyruk sayısı arasındaki ilişkiyi nasıl tanımlarsın? Bunun işe yaradığını nereden biliyorsun?”

Pilot çalışmada küçük çocuklar köpek, göz ve kuyruk olan üç niceliği algılamakta yani kuyruk sayısını dikkate almakta ve toplama yapmakta zorlandıkları için bu problem sadece göz sayısının sorulması ile kolaylaştırılmıştır. Uzman görüşleri alındıktan sonra problem son halini almıştır.

Bu problem sorulduğunda çocuklara somut nesneler sunulmadan doğrudan resim çizerek çözmeleri istenmiştir. Araştırmacı tarafından çocuklara renkli kalemler ve çalışma kâğıdı verilmiştir. Aynı zamanda soruda zorlanan çocuklar Şekil 3.1’de gösterilen köpekler üzerinden problemi çözmeye çalışmıştır.

Dördüncü soru “Bir Tane Daha Verirsem”

Dördüncü problem olan “Bir tane daha verirsem” sorusu yapısal düşünme bağlamında birer artma ve ardışık sayma yapısını kapsamaktadır. Bu problem çocukların sayma sırasını bilmelerini, birebir eşleme yaparak saymalarını ve kardinalite ilkesini anlamalarını incelemeyi amaçlamıştır. Kardinalite ilkesi çocuğunun tüm nesneleri sayarak en son söylediği nesnenin sayı sözcüğünün nesne sayısını belirlediğini bilmesidir. Bu problem araştırmacı tarafından hazırlanmıştır ve listeye eklenmiştir. Problem aşağıdaki şekilde tasarlanmıştır:

“Senin 2 tane şekerin var. Bir tane daha verirsem kaç tane olur? Bir tane daha verirsem kaç tane olur? Bir tane daha verince kaç tane olur? Bunu nasıl yaparsın? Ne düşünüyorsun?”

Problem sorulurken araştırmacı tarafından çocuklara somut nesne olarak küçük toplar verilmiştir. Ancak çocuklar somut nesneleri kullanmadan doğrudan zihinlerinden sayarak şekerlerin birer arttığını ve şeker sayısının saydıkları için bu şekilde değiştiğini dile getirmiştir. Bu problem çocuklara kolay geldiği ve değişik sonuçlar ortaya çıkarmadığı için zamandan tasarruf etmek amaçlı alanda uzman kişilerden de onay alınarak problem listesinden çıkarılmıştır.

Beşinci hikâye problemi “Şeker Kutusu”

Beşinci hikâye problemi olan şeker kutusu problemi analitik düşünme bağlamında bilinmeyen kavramının yapısını ele almıştır. Bu problem küçük çocukların bilinmeyeni bulma yollarını araştırmayı amaçlamıştır. Öğrencilerin değişkenler ve bu bağlamda bilinmeyeni bulmaları bağlamında birçok araştırma yapılmıştır. Örneğin, Carraher vd. (2008b, s.238) yaptıkları çalışmalarında 8 yaşlarında öğrencilerinin değişken kavramını nasıl anladıklarını incelemek için onlara şeker kutularıyla ilgili aşağıdaki problem sorulmuştur:

“Sol elimdeki John’un kutusu var ve John’un tüm şekerleri o kutudadır. Sağ elimdeki kutu Mary’nindir ve Mary’nin tüm şekerleri bu kutunun içinde olanlar ile kutunun üstünde duran üç şekerden ibarettir. Her kutunun içinde tam olarak aynı sayıda şeker bulunmaktadır.

Carraher vd. (2008b) öğrencilerin kendilerine göre cebirsel olarak temsil ettiğimizde John'un x şekeri olduğunda, Mary'nin $x+3$ olduğunu nasıl ifade edebileceklerini incelemiştir. Bu çalışmada küçük çocuklar için değişken kavramını anlamlandırmanın zor olduğunu düşünerek bilinmeyi bulma üzerine odaklanılmıştır. Radford (2022) ve Lenz (2022) ise bir çalışma yapmışlardır. 8-9 yaş grubu öğrencileriyle yapılan çalışmada (Radford, 2022, s.1155) öğretmen tüm sınıfla birlikte bir hikâye problemini tartışmıştır:

“Sara adında bir çocuğun elinde hokey kartları olan bir zarf vardır. Zarf mühürlüdür. İçinde kaç tane hokey kartı olduğunu bilmiyoruz. Sara'nın ayrıca 3 hokey kartı daha vardır. Sara'nın arkadaşı Christina'nın 7 hokey kartı vardır.”

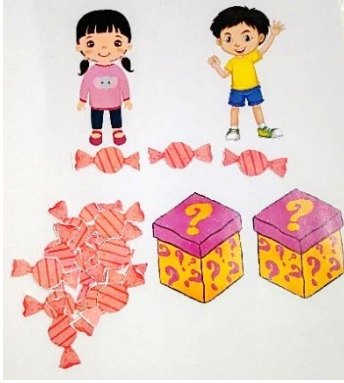
Bunları anlatırken öğretmen zarf ve kartları tahtaya yapıştırarak cebirsel temsil olarak $x+3=7$ şeklinde ifade edeceğimiz denklemi modellemiştir. Öğrencilerden zarfın içinde olan kart sayılarını bulmalarını istemiştir. Benzer şekilde Lenz (2022, s. 1184)'de 5-10 yaş çocukları için dört zorluk düzeyinde bilinmeyi bulma soruları hazırlamıştır. Bu sorularda iki tane karakter ve onların kutuları ve misketleri vardır. Örneğin erkek çocuğun bir tane kırmızı kutusu, bir tane yeşil kutusu ve iki tane misketi; kız çocuğunun ise bir tane kırmızı kutusu, iki tane yeşil kutusu ve bir tane misketi vardır. İki çocuğunda eşit sayıda misketleri olduğu söylenerek küçük çocukların kutunun içinde olan misketleri bulmaları istenmiştir. Bu problem cebirsel olarak $x+y+2=x+2y+1$ denklemini ifade etmektedir. Aynı renkte olan kutuların içinde aynı sayıda misketler vardır. Farklı değişkenler farklı renkte kutularla temsil edilmiştir. Bu problemler farklı zorluk düzeylerinde $x+4=7$, $x+y=x+3$, $4=2x$ ve başka denklemler üzerinden tasarlanmıştır. “Şeker kutusu” hikâye problemi ise bu çalışmalardan (Radford, 2022; Lenz, 2022) esinlenerek ve 60-72 aylık çocukların düzeyine uygun olarak düzenlenmiştir. Aynı zamanda bu problemde denklemin iki tarafının eşdeğer olmasından yola çıkarak eşitlik kavramı da ele almıştır. Bu hikâye problemi araştırmacının hazırladığı resimler ve somut nesneler üzerinden ana karakterlerinin anlatımıyla başlamış ve hikâye tarzında sorulmuştur.

Problem sorulduğunda çocuklara çalışma kâğıdı ve renkli kalemler verilmiştir. Araştırmacı soruyu okurken anlatılan durumu ve problemi yapılandırmak için çocuklarla birlikte durumu tasarlayarak somut nesneler kullanmıştır. Bu somut nesneleri hikâyenin her adımında ekleyerek çocukların problemi anlamalarını kolaylaştırmıştır. Araştırmacı “Mate'nin altı tane şekeri varmış” dedikten sonra çocuklardan Mate'ye altı tane şeker vermesini istemiştir. Ardından “Mate'nin bir kutu şekeri varmış” dediğinde öğrencilerden

Mete'nin yanına bir kutu koymasını istemiştir. "Annesi iki tane daha şeker verdi" dediğinde Mete'ye iki tane daha şeker ekleyerek problemi yapılandırmıştır. Hikâye problemi okunduktan sonra çocuklar ister somut nesnelerle, isterse de çizim yaparak problemi çözmeye başlamıştır. Genel olarak çocuklar bu problemi çizim yaparak çözmeye çalışmıştır. Problemi cevaplamakta zorlanan çocuklar somut nesneler kullanarak problemi çözmeye çalışmışlardır. Şekil 3.3.'de görüldüğü gibi somut materyal olarak kâğıttan kesilmiş şekerler, şeker kutuları ve ana karakterlerin resimleri kullanılmıştır.

Şekil 3.3

Kutudaki Şekerler Probleminin Somut Materyalleri



Pilot çalışması yapıldıktan sonra problemlerin yeterli nitelikte değerlendirme yapmaya imkân vermemesi ve klinik görüşmelerin uzun sürmesi nedeni ile alan uzmanı ve öğretmenlerden onay alınmış ve ikinci ve dördüncü sorular veri toplama aracı listesinden çıkarılmıştır. Daha sonra üç problem tekrar düzenlenerek veri toplama aracının son hali oluşturulmuştur. Veri toplama aracı EK 1'de sunulmuştur.

3.3.2 Çizim yapıları

Araştırmada görüşme sırasında problemler araştırmacı tarafından seslendirilmiş ve çocuklara somut materyaller, çalışma kâğıdı ve renkli kalem vermiştir. Araştırmada sadece somut materyal verilip, sorular sorarak ne düşündükleri incelenmemiştir. Bunun nedeni küçük çocukların kendi somut matematik anlayışları vardır. Çocuklar bu anlayışları ve yapıları kendilerine has bir dilde ifade etmektedir. Bunun için de kendini ifade etmenin en uygun yollarından biri de resim çizerek düşündüklerini göstermeleridir. Diğer bir deyişle somut nesneler olmadığında çocukların problemde olan nicelikleri

zihninde oluşturabilmekte ve çözüm bulmaya çalışabilmektedir. Bu da daha üst düzey beceri gerektirdiği ve doğrudan çocukların zihninde olanları aktardığı için araştırma kapsamında küçük çocukların farklı temsil kullanımlarına özellikle de resimlerinin analizine yer verilmiştir. Bu bağlamda problemi çözmeye çalışırken çocukların yaptığı resimler yani çizim yaprakları ve çizdikleri resimlere dair yorumları temel veri olarak kullanılmıştır.

3.3.3 Klinik Görüşme ve Video kayıtları

Nitel araştırma yöntemlerin sunduğu en büyük avantajlarından biri katılımcıların duygu ve düşüncelerini derinlemesine incelemeyi sağlamasıdır. Nitel çalışmalarda çok çeşitli veri toplama yöntemi vardır. Araştırmacı veri toplamak için yüz yüze görüşmeler, kendi günlükleri, görseller, video ve ses kayıtları, belgeler kullanabilir. Nitel araştırmalarda katılımcıların konu ile ilgili düşüncelerine doğrudan kendi ifadeleriyle ulaşmak büyük önem taşımaktadır. Katılımcıların duygu ve düşüncelerini yansıtan verilerin kendi doğal ortamlarında görüşmeler ve gözlem yoluyla elde edilmesi onlar hakkında elde edilen bilgi açısından oldukça önemlidir (Creswell ve Poth, 2016). Verilerin doğal ortamlarda toplanması katılımcıların konu ile ilgili gerçek görüşler ve düşüncelerinin ortaya çıkmasını sağlamaktadır (Merriam, 2009). Bu bağlamda detaylı şekilde veri elde etmek ve katılımcıların gerçek davranışlarını ve algılarını incelemek için en uygun seçim onlarla konuşmak, yani nitel görüşme yöntemini kullanmaktır (Seidman, 2006).

Bu araştırmanın verilerinin toplanmasında matematik eğitiminde sıklıkla kullanılan bire bir klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Çocukların kendi dünyalarını nasıl oluşturduklarını, kavramları nasıl yapılandırdıklarını, katılımcıların doğru sonuca ulaşmasından ziyade çözüm üretirken nasıl düşündüklerini ve bilişsel süreçlerde zihinlerini nasıl çalıştırdıklarını derinlemesine incelemek amacıyla klinik görüşme tekniği seçilmiştir. Hazırlanan klinik görüşme görevindeki sorulara bağlı kalmadan, çocukların verdiği yanıtlara ve anlatmak istediklerine göre sonda sorular sorulmuştur.

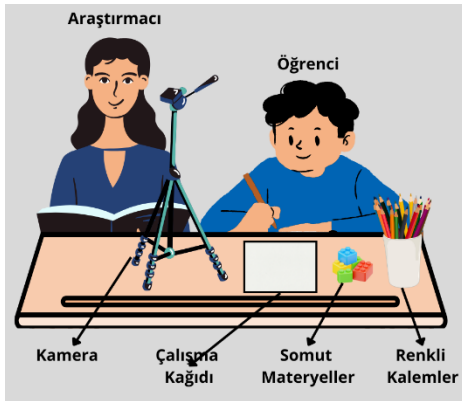
Çocukların yaş düzeyleri dikkate alınarak 20-30 dakikalık kısa görüşmeler yapılmıştır. Küçük çocukların kendilerini rahat hissettikleri ve onların bildiği bir ortamın olmasını sağlamak için araştırma yapılan okulda yerleşen oyunlarla boş bir sınıf (oyun odası ve rehber odası) görüşme sınıfı olarak seçilmiştir. Çocuklarla ders saatleri dışında görüşme sınıfında ve bire bir görüşmeler şeklinde gerçekleştirilmiştir. Küçük çocukların endişelenmemesi için kendi öğretmenleri onları önceden haberdar etmiş ve

araştırmacının onlarla sohbet edeceğini, resim çizdireceğini ve bazı sorular soracağını söylemiştir. Görüşmeye başlamadan önce çocuğun araştırmacıya alışması adına araştırmacı görüşme yapacağı çocukla tanışmış ve onunla kendisi hakkında, anaokulu hakkında, neler yapmayı sevdiği, hangi dersleri veya hangi hayvanları sevdiği hakkında sohbet etmiştir. Araştırmacı çocukların kendilerinin değerlendirilme sürecinde olduklarını düşünmemeleri için onlara doğru veya yanlış cevapların olmadığını, bu nedenle soruları cevaplamaya korkmamaları gerektiğini ve sadece onların ne düşündüklerini merak ettiğini açıklamıştır.

Yapılan araştırmanın uygulama süreci 2023-2024 öğretim yılının güz döneminde gerçekleşmiştir. Çocukların uygunluk durumuna göre haftada iki gün görüşmeler yapılabilirdi için veri toplama süreci 4 haftada tamamlanmıştır. Her çocuk ile birer kez görüşülmüştür. Çocuklarla sadece araştırmacının ve çocuğun bulunduğu ortamda birebir görüşülmüştür. Görüşme sürecinde araştırmacı çocukların yanında aynı masada oturmuş ve onların davranışlarını yakından gözlemlemiştir. Bu süreçte çocukların yüzü gözükmeden video kayıtlarda sadece çizimleri ve hareketleri gözükcek şekilde masanın üstüne kamera yerleştirilmiştir. Çalışmada gerçekleşen klinik görüşme ortamının bir tasviri Şekil 3.4’te verilmiştir.

Şekil 3.4

Görüşme Ortamının Tasviri



Görüşme sırasında araştırmacının gözünden kaçan noktaları ortaya çıkarma açısından güvenilirlik sağlamak ve veri analizi sürecinde tekrar izleyerek veri elde etmek için çocuklarla yapılan tüm görüşmelerin video kayıtları alınmıştır. Görüşme sırasında araştırmacının gözünden kaçan noktaları ortaya çıkarmak için video kayıtları en etkili ve güvenilir çözümdür. Aynı zamanda bazı durumlarda çocukların yazılı ya da sözlü olarak

değil, beden dili kullanarak ifade ettiği verileri de elde etmemizi sağlayacaktır. Klinik görüşmelerin video kayıtları alındığında çocukların kendilerinden ziyade sadece çalışma kâğıtlarının ve yaptıkların eylemlerin kayıt edilmesine özen gösterilmiştir. Bu konuda velilerle görüşülmüş ve çocuklarının video kayıt alınmasına izin alınmıştır. Her çocukla birer görüşme yapılarak pilot ve ana çalışmada toplam 16 video kaydı arşivlenmiştir.

3.3.4 Verilerin analizi

Toplanan verilerin analizinde çocukların cebirsel düşünme bağlamında problem çözme süreçlerini modellemek için içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi herhangi bir metnin içeriğini veya iletişimin herhangi biçimini ele alan, verilerin daha iyi anlaşılmasını sağlayan veri analizi yöntemidir (Cavanagh, 1997). İçerik analizi herhangi bir metnin içinde olan sözleri, kavramları, deyimleri, temaları veya karakterleri belirleyerek onları yorumlamayı amaçlar. Metin dediğimizde herhangi bir kitaplar veya kitabın bir bölümü, gazete, haberler, belgeler, televizyon programları, sinemalar, reklamlar, posterler, fotoğraflar, resimler, konuşmalar, diyaloglar ve başka herhangi bir iletişim biçimi kastedilmektedir (Kızıltepe, 2015). Metin şeklinde olmayan iletişim araçları, örneğin, görüşmeler, haberler, televizyon programları, konuşmalar ilk önce yazıya dökülür ve sonrasında analiz edilebilmektedir.

İçerik analizi tümdengelsel ve tümevarımsal olarak iki farklı biçimde kullanılabilir. Tümevarımsal içerik analizi özelden genele gidilen, yani veri içinde var olan temaların, kavramların, kategorilerin ve örüntülerin ortaya çıkarılarak keşfedilmesi şeklinde olan analiz biçimidir (Lauri ve Kyngas, 2005; Patton, 2014). Tümdengelsel içerik analizi ise genelde özele gidilen, mevcut bulunan kavramsal çerçevelere ve bilgilere dayanarak araştırılan konu bağlamında bu kuramı sınamak için yapılan analiz biçimidir (Kyngas ve Vanhanen, 1999). Bu çalışmada bulgular Kieran (2022)'nın cebirsel düşünmeyi yapısal düşünme, analitik düşünme ve fonksiyonel düşünme olarak üç ana boyuta ayırarak geliştirdiği kavramsal çerçeveye dayanarak yorumlanmıştır. İlk aşamada verilerin önceden belirlenmiş kavramsal çerçeve bağlamında analiz edildiğinden dolayı bu çalışmada tümdengelsel analiz biçimi benimsenmiştir. İkinci aşamada ise bulgulara dayanarak oluşturulan çerçeveden ortaya çıkan yeni kavramların, örüntülerin ve anlayışların keşfedilmesi ile tümevarımsal analiz biçimine geçiş yapılmıştır.

Görüşme yoluyla elde edilen video ve ses kayıtları, çocukların çizim yaprakları ile toplanan tüm veriler yedi aşamada analiz edilmiştir. Bu süreçte matematik eğitiminde

uzman bir araştırmacı ile görüşülmüş ve önerileri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır:

1. İlk olarak yapılan görüşmeler ile elde edilen video kayıtlar hiçbir değişiklik yapılmadan olduğu gibi yazı haline getirilmiş ve çocukların çizim yaprakları arşivlenmiştir.
2. Bu yazılan veri dökümleri araştırmacı tarafından tekrar okunulmuş, problem bazında incelenerek önemli cümleler kaydedilmiş ve cebirsel düşünme çerçevesine göre temalar belirlenmiştir.
3. Belirlenen temalara göre veriler tekrar incelenerek alt kategoriler ortaya çıkmıştır.
4. Uzman görüşünden yararlanarak bu temalar yeniden düzenlenmiş ve araştırmanın temaları belirlenmiştir.
5. Durumu en iyi şekilde açıklayan analizler yapıldıktan sonra soru bazında tüm temaları ve kategorileri içeren diyagramlar hazırlanmıştır.
6. Her problem bağlamında kavramsal çerçeveye dayanarak bulgular sunulmuştur.
7. Araştırmanın alt problemleri bağlamında bulgular tanımlanmış ve yorumlanmıştır.

Verilerin analizi sonucunda çocukların çizimlerinin görselleri, video kayıtlardan elde edilen görüntüler ve doğrudan alıntılarla desteklenerek bulgular ayrıntılı şekilde açıklanmıştır. Bu şekilde verilerin gerçek sonuçlara yol açması sağlanmıştır. Örneğin, birinci hikâye problemine ilişkin veriler döküm haline getirildikten sonra analitik düşünme ve yapısal düşünme bağlamında bu veriler incelenmiştir. Çocukların problemin temel amacı olan sayıyı parçalama eylemleri incelenmiş ve farklı stratejiler kullandıkları ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda “Sayılar ve İlişkiler”in altında “Parçalama” teması belirtilmiş ve bu stratejiler bu tema altında toplanmıştır. Düzenli şekilde parçalama yapanlar “Sistematik”, her defasında rastgele bir şekilde tekrar parçalama yapanlar “Rastgele”, parçalama yaparken eşit parçalamaya odaklananlar “Eşit Odaklı”, kulübe sayısını görmezden gelerek ikiden farklı gruba parçalayanlar ise “İkiden Farklı Parçalama” şeklinde kodlanmış. Bununla yanı sıra çocukların söylem ve eylemlerinden yola çıkarak karşılaştırma, kardinal sayma, toplama, çıkarma, bölme yaptıkları,

teklik/çiftlik, bütün/yarım, eşitlik kavramlarına dair açıklamalar verdikleri görülmüş ve buradan yola çıkarak analitik düşünme ve yapısal düşünme bağlamında alt temalar belirlenmiştir. Sonrasında bu alt temalara bağlı veriler tekrar incelenmiştir.

Küçük çocukların iki farklı şekilde karşılaştırma yaptıkları görülmüştür. Sayıları bire bir eşleme yaparak karşılaştırma yapan çocuklar “bire bir eşleme”, sayıları eşlemeden sadece görsel olarak karşılaştıran çocuklar ise “azlık/çokluk” şeklinde kodlanmıştır. Bölme işlemi yapan çocukların eylemleri incelendiğinde “biri sana, biri sana” birer paylaşırma yaparak ve doğrudan iki parçaya ayırarak iki farklı biçimde bölme yaptıkları tespit edilmiştir. Bu bağlamda “Bölme” temasının “Paylaşırma” ve “Gruplama” alt temaları belirlenmiştir. Aynı şekilde süreç içinde çocuklar eşitlik kavramına dair farklı açıklamalar vermişlerdir. Bu açıklamalar “burda da üç, burda da üç”, “hep üç görünüyor”, “üçer üçer”, “aynı sayıda” ve “üç artı üç altı eder”, “iki artı bir eşittir üç” şeklinde kodlanmış ve “eşitlik” teması altında sırasıyla “aynılık” ve “bir işlemin sonucu” alt temaları belirlenmiştir. Ayrıca tüm süreçte çocuklar doğrudan resim ya da yuvarlak, üçgen, çizgi çizerek, yazdıkları matematiksel ifadelerde sayı ve semboller kullanarak çeşitli temsil biçimlerini kullanmışlardır. Bu bağlamda “Temsil” teması altında “Somut”, “İmge”, “Resim”, “Sayı”, “Sembol” alt temaları belirlenmiştir. Veri analizinin örneği EK 2’de sunulmuştur.

Veriler raporlaştırılırken çalışmaya katılan tüm çocuklar için takma isimler seçilmiş ve bulguları içeren diyagramlarda katılımcıların baş harfleri kullanılmıştır.

3.3.5 Araştırmanın geçerlik ve güvenirliği

Nitel araştırmalarda geçerlik araştırılan olgunun veya durumun yansız bir şekilde gözlemlenmesi ve olduğu biçimde aktarılması anlamına gelmektedir (Kirk ve Miller, 1986). Nitel araştırmalarda geçerlik iç ve dış geçerlik şeklinde iki farklı biçimde ele alınabilir. İç geçerlik araştırmacının araştırmaya eleştirel bakış açısıyla yaklaşması ve elde ettiği sonuçların olduğu gibi, kendi yorumu olmaksızın yansıtılması ve açık anlaşılır halde açıklanmasıdır. Dış geçerlilik araştırmadan elde edilen sonuçların benzer durumlara ve olgulara genellenebiliyor olmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Nitel araştırmalarda güvenirlik zamana bağlı (dış güvenirlik) ve gözleme bağlı güvenirlik (iç güvenirlik) olarak iki biçimde incelenir (Kirk ve Miller, 1986). Zamana bağlı güvenirlik araştırılan olgunun ilerleyen süreç içinde aynı biçimde araştırılabilmesi anlamına gelir. Gözleme bağlı güvenirlik ise aynı zaman diliminde bir olgunun ya da durumun farklı araştırmacılar

tarafından aynı biçimde ölçülmesi şeklinde açıklanabilir. Erlandson vd. (1993) nitel araştırmaların doğasına daha uygun olarak dış geçerliliği “aktarılabirlik”, iç geçerliliği “inandırıcılık”, dış güvenilirliği “teyit edilebilirlik” ve iç güvenilirliği “tutarlık” şeklinde ele almış ve araştırmaların bilimsel değerini güçlendirmek için çeşitli stratejiler önermiştir. Bu çalışmada aktarılabirlik, inandırıcılık, teyit edilebilirlik ve tutarlık ölçütleri bağlamında kullanılan yöntemler aşağıda açıklanmıştır.

Aktarılabirlik ölçütü için kullanılan yöntemler (Erlandson vd., 1993):

- *Ayrıntılı Betimleme*

Bu araştırmada elde edilen veriler araştırmanın dayandığı kavramsal çerçeve bağlamında düzenlenmiş ve araştırmacının yorumları katılmadan olduğu haliyle betimlenmiştir. Okuyucunun ortamı ve süreci zihninde canlandırabilmesi ve kendi sonuçlarına göre yorumlayabilmesini sağlamak için doğrudan alıntılar, çocukların çizimleri ve görüşme sırasında alınan video kayıtlarından görüntüler kullanarak veriler ayrıntılı şekilde sunulmuştur.

- *Amaçlı Örnekleme*

Bu araştırmada aktarılabirliği artırmak amacıyla katılımcıların seçilmesinde amaçlı örnekleme yöntemi benimsenmiştir. Bu bağlamda araştırmaya katılacak çocukların farklılık göstermesi adına matematik düzeyi düşük ve yüksek olacak şekilde iki farklı sınıftan katılımcı seçilmiş ve iki farklı öğretmenden yardım istenmiştir.

İnandırıcılık ölçütü için kullanılan yöntemler (Erlandson vd., 1993):

- *Derinlik Odaklı Veri Toplama*

Bu araştırmada veriler araştırma soruları bağlamında derinlemesine incelenmiş ve birbiri ile ilişkilendirilmiştir. Araştırmacı verilere eleştirel bakış açısı ile bakarak sonuçları karşılaştırmış, yorumlamış ve var olan örüntüleri ortaya çıkarmıştır. Gereken durumlarda çocukların düşüncelerini daha derinlemesine incelemek için ek sorular sorularak veriler zenginleştirilmiştir.

- *Çeşitleme*

Çeşitleme ölçütü farklı yöntemler, farklı özelliklere ve becerilere sahip katılımcılar, çeşitli veri kaynakları seçilerek sağlanabilir. Bu araştırmada araştırılan duruma ilişkin farklı bakış açıları ve düşünceleri ortaya çıkarmak amacıyla katılımcılar iki farklı öğretmenden eğitim alan çocuklar arasından

seçilmiştir. Ayrıca daha derinlemesine ve geniş inceleme yapılması için matematik düzeyi düşük ve yüksek olacak şekilde katılımcılar belirlenmiştir. Bununla yanı sıra çocukların çizim yaprakları, video kayıtlarından alınan eylemlerin görüntüleri ve söylemsel ifadeleri veri kaynaklarının çeşitlenmesi sağlanmıştır.

- *Uzman İncelemesi*

Araştırmanın farklı boyutlardan incelenerek inandırıcılığının sağlanması amaçlanarak bu süreçte araştırma konusuna dair genel bilgiye sahip, alanda uzman olan iki kişi ile görüşülmüştür. Veri toplama aracının hazırlanması, verilerin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanması sürecinde uzman önerileri alınarak gereken düzenlemeler yapılmıştır.

Teyit edilebilirlik ölçütü için kullanılan yöntemler (Miles ve Huberman, 1994):

- Araştırmacı yaptığı araştırmanın adımlarını ve yöntemlerini ayrıntılı ve aydın şekilde açıklamıştır.
- Verilerin toplanması, dökümü, analiz edilmesi, yorumlanması ve sonuçların ortaya çıkma süreci tüm aşamalarıyla açıklanmıştır.
- Örnekleme yöntemi, araştırma ortamı, araştırmacının rolü, klinik görüşme süreci ayrıntılı şekilde açıklanmıştır
- Araştırma sürecinde kullanılan veri toplama aracı, çocuklar çizim yaprakları örnekleri ve çocuklarla gerçekleşen diyalogdan doğrudan alıntılar sunulmuştur.
- Bulgular araştırma sorularına ilişkin yorumlanmış ve sonuçlar elde edilen verilerle ilişkilendirilmiştir.
- Farklı görüşlerin ortaya çıkmasını sağlamak için katılımcıların farklı özelliklere ve bakış açısına sahip olmalarına dikkat edilmiştir.

Tutarlık ölçütü için kullanılan yöntemler (Miles ve Huberman, 1994):

- Araştırmacı klinik görüşme yoluyla elde edilen verileri betimsel yaklaşımla araştırmacı yorumu katılmadan sunulmuştur. Bu şekilde elde edilen verilerle sonuçlar arası tutarlık sağlanmıştır.
- Araştırma soruları açık şekilde belirtilmiş ve veriler bu sorular bağlamında incelenmiştir. Bu şekilde elde edilen sonuçlarla araştırma soruları arasında tutarlık sağlanmıştır.

- Veri toplama sürecinde tüm veriler aynı yol izlenerek toplanmış ve bu şekilde verilerin elde edilmesi sürecinde tutarlık sağlanmıştır.
- Araştırmanın dayandığı kavramsal çerçeve detaylı şekilde açıklanmıştır. Elde edilen verilerin her biri aynı biçimde analiz edilmiş ve tek kavramsal çerçeve bağlamında incelenmiştir. Bu şekilde verilerin analizi konusunda tutarlık sağlanmıştır.

3.3.6 Araştırmacının rolü

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemi benimsendiği için araştırmacı bu çalışmada aktif rol almıştır. Nitel araştırma yöntemleri araştırmacının araştırma yaptığı alanla olan ilişkisini, araştırmacının öznelliğini, yaptığı gözlemlerle ilgili izlenimlerini, duygu ve düşüncelerini araştırmanın bir parçası olarak kabul eder (Potter, 2013). Çalışma sürecinde araştırmacı katılımcıları tarafsız şekilde belirler, doğrudan katılımcılarla ilişki kurar, onları gözlemler ve bunun sonucunda onların düşünme biçimini incelemeye çalışır. Bu inceleme sonucu araştırmacı katılımcıların yaşantılarını deneyimler ve bu deneyimleri yansıtarak elde edilen verileri analiz eder (Yıldırım ve Şimşek, 2021).

Nitel araştırmalarda araştırmacı ve katılımcıların aynı ortamda bulunmaları ve iletişim halinde olmalarında dolayı birbirinin üzerinde etkisi vardır. Bu etkileşimin sonuçlara yansımaları göz önünde bulundurarak bu araştırmada araştırmacı çocukların problem çözme süreçlerinde herhangi bir şekilde müdahale etmemeye özen göstermiştir. Araştırmacı özel kurumda 5-6 yaş çocuklar, ilkökul birinci ve ikinci sınıf öğrencilerine matematik öğretmenliği yapmış ve bu alanda üç senelik tecrübeye sahip olmuştur. Bu bağlamda, araştırmacı küçük çocuklarla kolay bir şekilde, hiçbir baskı yapmadan iletişime geçmiş ve dikkatli ve uygun bir şekilde inceleme yapabilmıştır. Araştırmacı elde ettiği verileri iyi bir şekilde anlamlandırmak ve doğrulamak için araştırmanın problem çözme sürecinde çocukların ne düşündüklerini ve herhangi bir eylemi neden yaptıklarını sorarak açıklamalarını istemiştir. Çocukların rahatsız olmaması ve dikkatlerinin kamerada kalmaması için, araştırmacı çocuklara kameranın sadece masayı çektiğini ve onların videoya düşmediklerini söylemiştir. Görüşme anında araştırmacı sürece müdahale etmemiş, çocuklara ipucu vermemiş ve hiçbir yorum katmadan çocukların kendi düşüncelerini ifade etmelerine izin vermiştir. Çocukların açıklamalarına ve çizimlerine yönelik düşüncelerini derinlemesine incelemek için araştırmacı çocuklara ek sorular

sormuştur. Araştırmacı çocukları yansız bir şekilde gözlemlemiş ve bulguları olduğu şekilde aktarmıştır. Araştırmacı klinik görüşme yoluyla elde edilen verileri kendi yorumunu katmadan betimlemiştir.

3.3.7 Etik konular

Araştırmaya başlamadan önce Anadolu Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etik Kurulundan olumlu onayı alınmıştır (EK-3). Ardından araştırmanın Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir anaokulunda yapılacağı için MEB Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik izni de alınmıştır (EK-4). Araştırma öncesinde velilere araştırma konusu açıklanmış ve araştırma süreci hakkında gereken bilgiler verilmiştir. Katılımcıların çalışmaya gönüllü olmaları üzere tüm katılımcı ve velilerine Araştırma Gönüllü Katılım Formu imzalatılmıştır (EK-5). Katılımcıların küçük yaşta oldukları için ayrıca velilere Veli Onay Formu imzalatılmıştır (EK-6). Araştırma sürecinde elde edilen verilerin yalnızca bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacağı ve gerekmesi halinde velinin izni olmadan başkalarıyla paylaşılmayacağı sözü verilmiştir. Çalışmaya katılan tüm çocukların gerçek isimleri gizli tutulmuş ve raporlaştırmada isimleri değiştirilmiştir. Görüşmelerde alınan video kayıtlarında çocukların sadece çizim yapraklarının ve eylemlerinin görünmesine, yüzlerinin görünmemesine zen gösterilmiştir. Araştırma bittiğinde elde edilen sonuçlar katılımcı çocuklar ve aileleri ile paylaşılmıştır. Araştırmanın raporlaştırılması sürecinde kullanılan kaynaklara düzgün şekilde atıfta bulunmuş ve kaynakça kısmında bu kaynaklar belirtilmiştir. Araştırma raporu, enstitü tarafından intihal belirleme programında taratılmış ve benzerlik oranı %4 olarak belirlenmiştir.

4 BULGULAR

Araştırmanın bu bölümünde katılımcılardan elde edilen bulgular her hikâye problemi için ayrı başlıkta ele alınmış ve çocukların problemlerin çözümlerine ilişkin açıklamalarından ve kullandıkları temsil biçimlerinden doğrudan alıntılarla desteklenmiştir.

4.1 Çocukların Birinci Hikâye Problemine İlişkin Yanıtlarından Elde Edilen Bulgular

Birinci hikâye probleminde cebirsel düşünme bağlamında çocukların yapısal ve analitik düşünme becerileri incelenmek istenmiş, bu amaçla sayıları parçalama, karşılaştırma, eşit şekilde parçalama, teklik ve çiftlik kavramlarına yönelik problem sunulmuştur. Birinci hikâye probleminde çocuklara “6 tane köpek gezmeye çıkmışlar, biraz yürüdükten sonra birden yağmura yakalanmışlardır. Yağmurdan korunmak için etraflarına bakarken bulundukları yerde iki tane kulübe görmüşlerdir. Köpekler ıslanmamak için bu kulübelere yerleşmek istemişlerdir. Hadi köpeklere sen yardımcı ol.

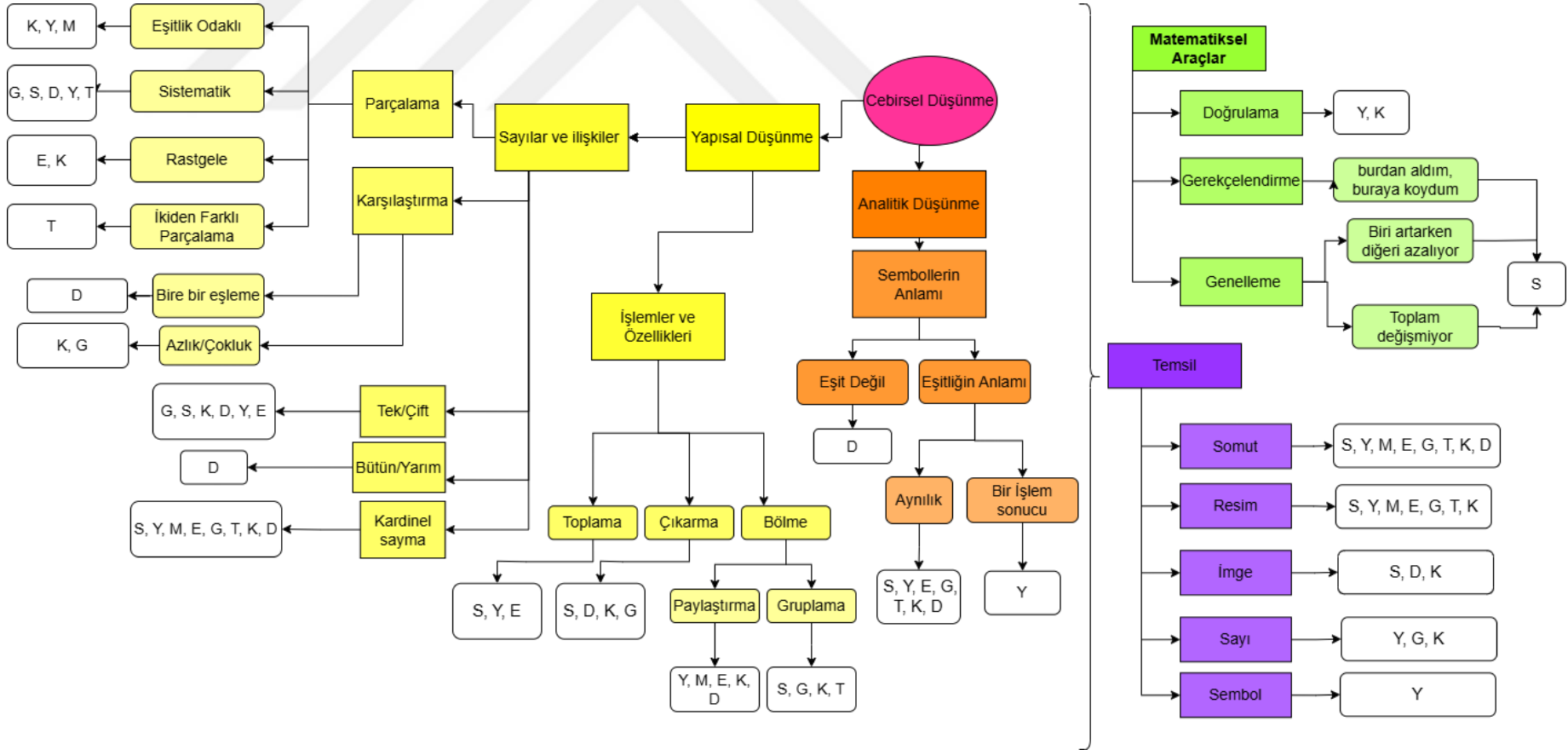
- a) Onları kulübelere farklı şekillerde nasıl yerleştirirsin?
- b) İki kulübe arasında farklı şekillerde yer değiştiren köpek sayıları ile ilgili bir şey fark edebiliyor musun?
- c) Her iki kulübedeki toplam köpek sayısı ile ilgili bir şey fark edebiliyor musun?
- d) Beş tane yavru köpeği eşit şekilde kulübelere yerleştirebilir misin?

şeklinde sorular yöneltilmiştir.

Çocukların bu probleme verdikleri yanıtlar ve çizimler incelenmiş ve bulgular Şekil 4.1’de sunulmuştur.

Şekil 4.1

Birinci Soruya İlişkin Bulgular



Şekil 4.1’de görüldüğü gibi, “Yapısal Düşünme” boyutunda “Sayılar ve İlişkiler” ve “İşlemler ve Özellikleri”, “Analitik Düşünme” boyutunda ise “Sembollerin Anlamı” alt başlıkları ele alınmıştır.

Yapısal Düşünmenin bir alt boyutu olan “Sayılar ve İlişkiler” kapsamında çocuklar “Parçalama”, “Karşılaştırma”, “Teklik ve Çiftlik”, “Kardinal Sayma”, “Bütün ve Yarımlar” eylemlerinde bulunmuşlardır. Parçalama eylemi ile çocukların bir sayıyı örneğin 6-0, 5-1, 4-2, 3-3, 2-4, 1-5, 0-6 şeklinde sayı çiftlerine ayırması ifade edilmektedir. Bu bağlamda çocuklardan altı tane köpeği farklı şekillerde iki kulübeye yerleştirmeleri istendiğinde çocuklar parçalama yaparken “SistematiK”, “Eşitlik Odaklı”, “Rastgele” ve “İkiden Farklı Parçalama” şeklinde dört farklı strateji kullanmışlardır. “SistematiK” stratejisi parçalama yaparken sistematik bir şekilde toplananlardan birinin birer azaltılıp, diğer toplananın birer artırılması şeklinde açıklanabilir. “Rastgele” stratejisi her seferinde yapılan parçalamanın bozularak, hiçbir düzen olmadan rastgele bir şekilde tekrar parçalama yapılmasıdır. “Eşitlik Odaklı” strateji, bir sayının farklı parçalanışlarını dikkate almadan her seferinde eşit bir parçalama yapılması, “İkiden Farklı Parçalama” stratejisi ise sayının ikiden farklı sayıdaki parçaları üzerinde çalışma yapılması şeklinde açıklanabilir. Bu stratejilerin problem bağlamında tasvirleri Tablo 4.1’de sunulmuştur.

Tablo 4.1

Parçalama Stratejilerinin Tasvirleri

“SistematiK” stratejisi	“Rastgele” stratejisi
“Eşit Odaklı” stratejisi	“İkiden Farklı Parçalama”

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi verilen problemin çözümünde altı sayını parçalarken Kaan, Yasemin ve Melisa “Eşitlik Odaklı” stratejiyi, Gül, Sanem, Duru, Yasemin ve Taha “Sistematiik” stratejisini, Efe ve Kaan “Rastgele” stratejisini, Taha ise “İkiden Farklı Parçalama” stratejisini kullanmışlardır.

Bazı çocukların birden fazla stratejiyi kullandıkları görölmektedir. En fazla kullanılan strateji “Sistematiik” stratejisi olmuştur. Bu stratejiyi kullanan çocuklar sistematik olarak her seferinde bir kulübeden birer köpek azaltarak, diğerk kulübeye birer köpek artırarak parçalama yapmışlardır. Ancak bu stratejiyi sadece somut nesne kullanırken işleyen Yasemin ve Taha yaptıklarını ve düşündüklerini çizerek anlatmaya başladıklarında bu sistematikliğı koruyamamış ve farklı şekilde parçalama yapmışlardır. Diğerk yandan Duru, Sanem ve Gül sistematik stratejisini kullanırken somut temsiliin yanı sıra Duru imge, Sanem, imge ve resim, Gül ise resim ve sayı temsillerini kullanmışlardır.

Çocuklar her bir hikâye problemine yanıt verirken çeşitli stratejilerin yanı sıra resim, imge, sayı, sembol ve somut şekilde beş farklı temsil biçimi de kullanmışlardır. Somut temsil öğretmenin vermiş olduğı fiziksel materyallerden oluşurken, imge hikâye probleminin karakteristik özelliklerini yansıtan çizimlerdir. Sayı temsili doğrudan sayının yazıldığı temsil biçimidir. Resim temsili ise hikâyede geçen niceliklerin doğrudan resminin çizilmesidir. Çocukların kullandığı stratejiler ve temsil biçimleri soru bazında incelenmiş ve her soruya ilişkin elde edilen bulgularla birlikte sunulmuştur.

Tablo 4.2’de sistematik stratejisini ve bu süreçte imge, resim ve sayı temsillerini kullanan Duru, Sanem ve Gül’ün örnekleri sunulmuştur.

Tablo 4.2

Sistematik Stratejisi ve Temsil Örnekleri

Sistematik		
Duru	Sanem	Gül
İmge Temsili	İmge ve Resim temsili	Resim ve Sayı Temsili
Yasemin	Taha	
Somut Temsil	Somut Temsil	

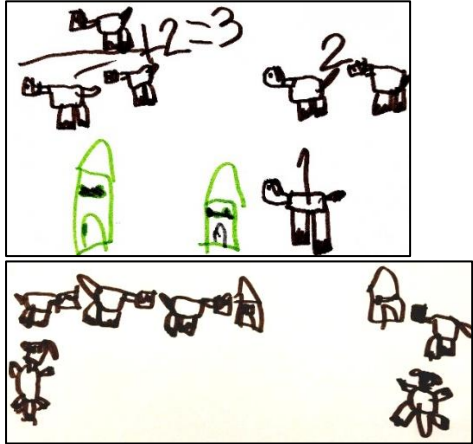
Tablo 4.2’de Duru’nun çizimleri incelendiğinde düzenli bir şekilde ilk önce 3-3, ardından 2-4, sonrasında da 1-5 şeklinde parçalama yaptığı görülmektedir. Duru kulübeler için üçgen, köpekler için ise yuvarlak çizerek imge olan temsil biçimini kullanmıştır. Sanem’in çizimleri incelendiğinde ilk bakışta sistematiklik görülmemektedir. Sanem ilk önce eşit paylaşırma yapmış, ardından resim temsilini kullanarak iki tane kulübe ve imge

temsilini kullanarak da sol tarafta altı tane köpeği temsilen yuvarlak çizmiştir. Sonrasında bu köpekleri yerleştirmeye başlamıştır. Köpekleri 3-3 şeklinde paylaştırdıktan sonra “*bunu aldım buraya koydum*” diyerek bir kulübede bir tane köpeği karalamış ve diğer kulübeye bir tane köpek ekleyerek 4-2 şeklinde parçalama yapmıştır. Ardından “*Bir tanesini tekrar alıp koyarsam 5 tane olur burada*” diyerek tekrar aynı kulübede bir tane köpeği karalamış ve diğer kulübeye köpek ekleyerek 5-1 şeklinde parçalama yapmıştır. Son olarak da “*Buradan çıkarttım, sonra da hepsini buraya koydum burası boş kaldı*” diyerek 6-0 şeklinde parçalama yapmıştır. Tablo 4.2’de verilen çizimde Gül ise parçalama yaparken ilk önce iki tane kulübe çizmiş ve her kulübeye sayı temsilini kullanarak üçer köpek yerleştirmiştir. Ardından tekrar iki kulübe çizmiş ve sayıları kullanarak 4-2 şeklinde parçalama yapmıştır. Sonrasında tekrar kulübe çizmiş ve köpekleri temsil etmek için bu sefer yüz çizerek resim temsilini kullanmıştır. Ancak parçalama yaparken hata yapmış ve köpekleri 5-3 şeklinde parçalamıştır. Hatasını fark edince de “*5 tane burada, bir tanesi de orada, fazla olanları karalayabilirim*” diyerek hatasını düzeltmiştir. Son olarak da 6-0 şeklinde parçalama yapmıştır.

“Eşit Odaklı Strateji”yi kullanan çocukların örnekleri ile imge, resim ve sayı temsilleri Tablo 4.3’te sunulmuştur.

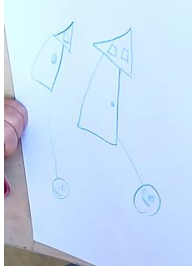
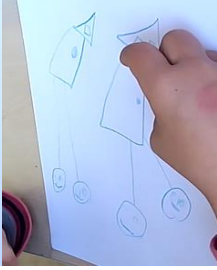
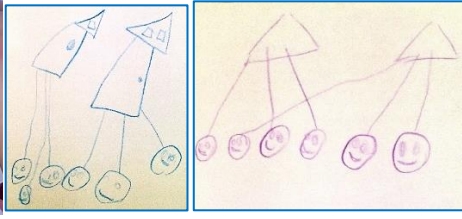
Tablo 4.3

Eşit Odaklı Stratejisi Örnekleri

Eşit Odaklı	
Kaan	Yasemin
	
İmge, Sayı ve Somut Temsilleri	Resim, Sayı ve Sembol Temsilleri

Tablo 4.3 (Devam)

Eşit Odaklı Stratejisi Örnekleri

Melisa		
		
1-1	2-2	3-3
Resim Temsili		
Melisa		
		
1-1	2-2	3-3
Somut Temsil		

Somut temsil kullanarak sistematik stratejisini uygulayan Yasemin ve Taha daha sonra çizerek parçalama yaptıklarında Yasemin “Eşit Odaklı” stratejiyi, Taha ise “Birden Farklı Parçalama” stratejisini kullanmıştır. “Eşit Odaklı” stratejiyi aynı zamanda Kaan ve Melisa kullanmıştır. Bu strateji bağlamında çocuklar önce köpek sayılarını 2-2, 3-3 ve 4-4 şeklinde eşit parçaladıktan sonra kulübelerdeki köpek sayıları arasındaki değişimi eksik veya fazla olacak şekilde düzenleme yapmışlardır.

Tablo 4.3’te görüldüğü gibi, Kaan ilk önce sözel olarak her köpeği bir kulübeyle yerleştireceğini söylemiş ve bire bir parçalama yapmak istemiştir. Ancak iki tane kulübe olduğunu hatırlayınca somut nesnelerle 3-3 şeklinde parçalama yapmış ve “*ama kulübe bu kadar olduğu için köpekleri bu şekilde dizmem gerekiyor çünkü böyle olmazsa birkaç köpekler dışarıda kalabilir*” şeklinde açıklama yapmıştır. Ardından farklı şekilde

parçalama yapmak istediğinde tüm köpekleri kenara çekmiş ve tekrar parçalama yapmaya başlamıştır. Bu süreçte Kaan köpek sayılarını 2-2 şeklinde ayırmış ve elinde kalan iki köpeği diğer kulübeye yerleştirerek 2-4 şeklinde parçalama yapmıştır. Ardından tekrar yaptığı parçalamayı bozmuş ve 3-3 şeklinde eşit parçalama yapmıştır.

Şekil 4.1 incelendiğinde Kaan'ın aynı zamanda rastgele stratejisini kullandığı da görülmektedir. Bu süreçte Tablo 4.3'te gösterilen çizime başladığında Kaan *“onları nokta nokta gösteriyim. Bu bir tane köpek olsun, burda da bir tane, burda da bir tane”* demiş ve köpek yerine nokta kullanarak 4-4 şeklinde eşit parçalama yapmıştır. Eşit olması zorunluluğunun olmadığını öğrenince altıya kadar saymış ve fazla olanları karalayarak 4-2 şeklinde parçalama yapmıştır. İlk başta eşit odaklı parçalama yapmış olsa da yanlışını düzelterek rastgele bir şekilde parçalama yapmaya devam etmiştir. Yaptığı yeni parçalamayı bir önceki parçalamadan ayırmak için turuncu çizgi kullanarak altı sayısını 3-3 şeklinde ayırmıştır. Sonrasında tekrar pembe çizgi kullanarak köpek sayılarını 4-2 şeklinde parçalamıştır. Burada köpek yerine nokta ve çizgi çizmesi imge temsilinin kullandığını göstermektedir. Sonrasında Kaan kulübelere bakmış:

Kaan: ...aaaaa bir dakika bunlar komşu yaaa, onun için burda köpekler sıkıştı düşünürte o biri eve geçebilir, mesela böyle geçtiler, şurda sıkıldılar şöyle geçerler...

ifadesini kullanarak evler arası yeşil bir ok çizmiş ve konuşmaya devam etmiştir:

Kaan: ...köpeklerle komşu olmayı öğretirim. Ondan sonra da köpekler burdan sıkıldığında buraya geçebilir. Diyelim ki burda bir tane köpek kaldı (*yukarı kulübenin yanına 1 yazdı*), burda bir sürü köpek var. Böylede olabilir ya da buradaki köpekler buraya taşınabilir.... o zaman beş tane köpek şurda olmalı (*aşağıdaki kulübenin yanına 5 yazdı*).

Kaan sayı temsilini kullanarak 1-5 şeklinde parçalama yapmış ve daha yeni sayılarla tanıştığı için beş sayısını ters şekilde yazmıştır. Kaan köpeklerin kulübeler arası geçebildiklerini fiziksel olarak ifade etse de kulübelerdeki köpeklerin ilişkili olarak azalıp çoğalmalarını fark edememiş, yani durumun matematiksel yönünü görememiştir.

Yasemin Tablo 4.2'de görüldüğü gibi somut nesneler kullanarak parçalama yaptığında bir kulübeden diğer kulübeye birer köpek kaydırarak sistematik bir şekilde parçalama yapmıştır. Yasemin resim temsili kullanarak çizime başladığında ise ilk önce 3-3 şeklinde eşit parçalama yapacağını söylemiştir. Tablo 4.3'te gördüğümüz çizimde Yasemin ilk önce bir tane köpek çizmiş ve bir tane olduğunu belirtmek için üzerine 1 yazmıştır. Ardından iki tane köpek daha çizmiş ve iki tane olduğunu belirtmek için üzerine 2 yazıp,

“*üç tane köpek olmuş*” diyerek köpek sayısını üçe tamamlamıştır. Bu parçalamanın ardından farklı bir şekilde parçalama yapması söylendiğinde Yasemin tekrar 3-3 şeklinde parçalama yapacağını söylemiş ve biraz düşündükten sonra “*6 tane köpeği farklı yapabilirim. Farklı şekilde 4 buraya 4 de buraya*” demiş ve sayarak parçalama yapmaya başlamıştır. Aşağıda Yasemin’in diyalogundan bir örnek sunulmuştur:

Yasemin: ...İkincisi, üçüncüsü, dört. Dört tanesi bu kulübede. Şimdi burda dört burda bir. Şimdi bir tane daha çizicem. Bir, iki, üç, dört, beş, altı. Oldu...

Açıklamadan da görüldüğü gibi Yasemin sadece 3-3 ve 4-2 şeklinde parçalama yapabilmiştir. Melisa ise parçalama yaparken hem somut nesnelerle hem de çizim yaparken eşit odaklı stratejisini kullanmıştır. Somut nesnelerle parçalama yaparken her kulübeye birer köpek yerleştirmiştir. Tablo 4.3’te görüldüğü gibi Melisa elinde kalan köpekleri de yerleştirmesi gerektiği söylenince birer paylaşırma yaparak önce 2-2, ardından da 3-3 şeklinde eşit paylaşırma yapmıştır. Farklı şekilde yerleştirmesi gerektiğinde 4-4 şeklinde yerleştireceğini söylemiş ancak köpekleri yetmediği için 4-2 şeklinde parçalama yapmıştır. Resim temsili kullanarak çizime başladığında ise ilk başta sadece iki tane köpek çizip her kulübeye birer tane köpek yerleştirmiş ve durmuştur. Altı tane köpek olduğu söylendikten sonra her kulübeye birer köpek eklemiştir. Köpekleri sayınca dört tane köpek olduğunu gördükten sonra tekrar her kulübeye birer köpek eklemiş ve 3-3 yerleştirdiğini söylemiştir (Tablo 4.3). Bu parçalamayı yaparken her seferinde köpekleri çizgi çizerek kulübelerle birleştirmiştir. Melisa’ya farklı şekilde nasıl parçalama yapacağı sorulduğunda ise diyalogda verildiği şekilde cevaplamıştır:

Araştırmacı (A): Bu köpekleri farklı şekilde nasıl yerleştirebilirsin?

M: İki iki yerleştirebiliriz, dört dört yerleştirebiliriz. (*6 tane köpek çiziyor*) bir iki üç dört beş altı, altı

A: Nasıl yerleştirirsin bunları şimdi?

M: Tek tek yerleştiririm. Yolunu göstererek

A: Tamam göster yolunu

M: Bunun yolu burda, bunu buraya soktum, bunuda buraya soktum, bunuda buraya soktum, bunuda buraya soktum, bunuda buraya soktum.

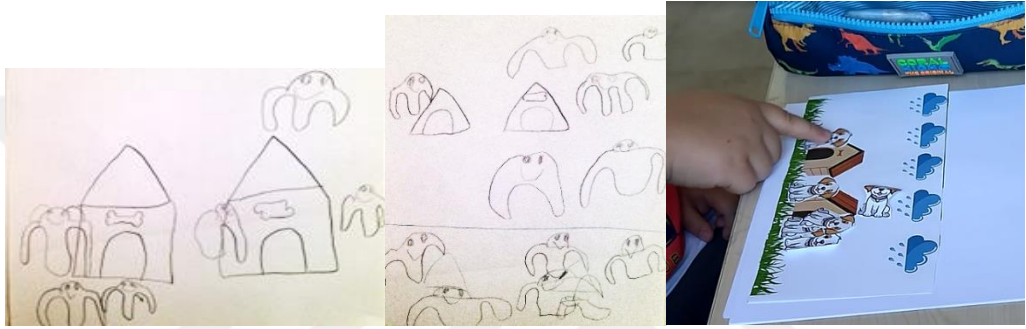
Melisa üç kere parçalama yapmış ve her seferinde kulübelere bir bir paylaşırma yaparak 3-3 şeklinde eşit paylaşırma yapmıştır. Her seferinde bir bir paylaşırma yaparak eşitliğe odaklanmış ve eşit olmayan parçalamayı algılayamamıştır.

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi rastgele stratejisini Efe ve Kaan kullanmıştır. Kaan soruya ilk önce eşit odaklı yaklaşmış ve sonrasında rastgele parçalama yapmaya devam etmiştir.

Kaan'ın resim temsili kullanarak çizimleri Tablo 4.2'de verilmiş ve o tablonun altından yaptıkları incelenmişti. Efe'nin ise resim temsili kullandığı çizimleri Tablo 4.4'de verilmiştir.

Tablo 4.4

Rastgele Stratejisi Örnekleri

Rastgele	
Efe	
	
Resim Temsili ve Somut Temsil	

Efe önce somut nesneler kullanarak her seferinde yaptığı parçalamayı bozarak tekrardan parçalama yapmış ve Tablo 4.4'de görüldüğü gibi rastgele stratejisini kullanmıştır. Çizmeye başladığında ise Efe ilk önce bire bir paylaşırma yaparak 3-3 şeklinde eşit paylaşırma yapmıştır. Ardından rastgele 1-5 şeklinde parçalama yapmıştır. Sonrasında 2-3 şeklinde parçalama yapmış ve köpekleri sayarak beş tane olduğunu görünce bir tane daha eklemiş ve 2-4 şeklinde parçalama yapmıştır. Efe'nin açıklamaları aşağıdaki diyalogda örnek olarak sunulmuştur:

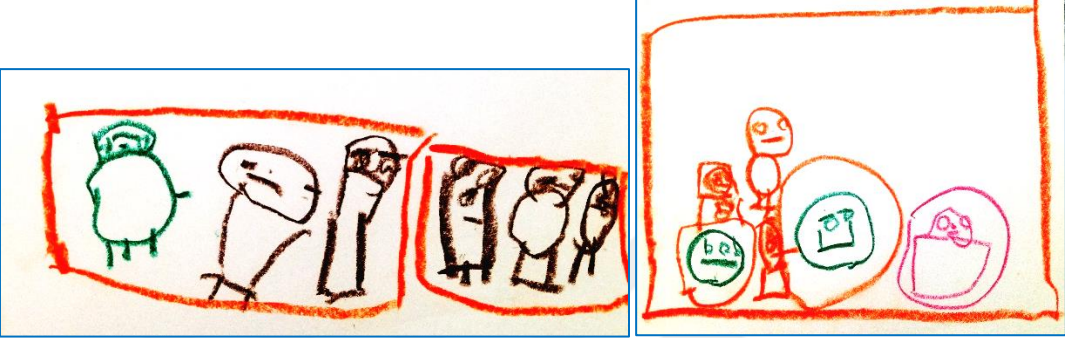
A: Yaptığın parçalamalarda bir şey fark ediyor musun?

E: Ama ilk saymam geyekiyo. Buyda altı, buyda biy iki üç döyt beş altı, buyda biy iki üç döyt beş altı. Hepsinde altı. Şimdi buyda üç, buyda döyt, buyda iki, buyda üç, buyda beş, buyda biy (kulübelerdeki köpekleri gösteriyor).

“Birden Farklı Parçalama” stratejisini sadece Taha kullanmıştır. Taha’nın bu stratejiye ilişkin örnekleri Tablo 4.5’de sunulmuştur.

Tablo 4.5

İkiden Farklı Parçalama Stratejisi Örnekleri

İkiden Farklı Parçalama	
Taha	
	
Resim Temsili	

Tablo 4.5’de görüldüğü gibi Taha resim temsili kullanarak iki tane olan kulübe sayısını dikkate almadan fazladan kulübe olduğunu varsayarak ikiden fazla parçalama yapmıştır. Bu süreçte Taha ilk önce Tablo 4.2’de verilen somut nesneleri kullanarak her seferinde bir kulübeden diğer kulübeye birer köpek kaydırarak sistematik bir şekilde paylaşırma yapmıştır. Bu bağlamda köpekleri eşit şekilde 3-3 şeklinde yerleştirmiş ve ikisi de aynı sayıda olduğu için eşit olduğunu belirtmiştir. Sonrasında her seferinde birer köpek kaydırarak 2-4, 1-5 ve 0-6 şeklinde parçalamalar yapmıştır. Sistematik bir şekilde parçalama yapabilmesine rağmen Taha köpeklerin yer değişimi ve kulübeler arası olan ilişkiyle ilgili hiçbir şey fark etmemiştir. Bu nedenle yaptığı parçalamaya bilinçli bir açıklama verememiştir. Taha çizime başladığında ilk önce iki tane kulübe çizmiş ve birinci kulübeye üç tane köpek çizmiştir. Ardından ikinci kulübeye birer köpek ekleyerek her seferinde toplam kaç köpek olduğunu saymış ve toplam altı köpek olana kadar bu şekilde devam etmiştir. Farklı şekilde parçalama yaparken Taha birer kulübe çizip içerisine birer köpek yerleştirmiş ve bu işlemi altı olana kadar sayarak kontrol etmiştir. Kaç tane kulübe olduğu sorulduğunda iki tane kulübe olduğunu hatırlasa da, kulübe sayısını görmezden gelerek her köpek için ayrı kulübe çizmiş ve o şekilde “İkiden Farklı Parçalama” yapmıştır. Burada Taha 1-1-1-1-1-1 şeklinde parçalama yapmıştır. Aynı şekilde parçalamayı Kaan da yapmak istemiş fakat iki tane kulübe olduğunu hatırlayınca

fikrinden dönmüştür. İkisi de bire bir parçalama yapmak istediği için bu stratejiye “Bire Bir Parçalama” stratejisi de denilebilir.

Bu problemde bazı çocukların kullandığı stratejiler temsil biçimine göre farklılık göstermiştir. Diğer bir değişle somut temsil kullandıklarındaki stratejiler ile resim ve imge temsillerinde yaptıkları çizim sürecinde kullandıkları stratejiler değişmiştir.

Çocukların somut temsil kullandıklarındaki stratejiler ve yaptıkları parçalamalar Tablo 4.6’da verilmiştir.

Tablo 4.6

Somut Temsilinde Stratejiler ve Parçalamalar

Somut Temsil		
Katılımcı	Strateji	Yaptığı Parçalamalar
Duru	Sistematik	3-3, 4-2, 5-1
Sanem	Sistematik	3-3, 4-2, 5-1, 6-0
Gül	Sistematik	3-3, 4-2, 5-1, 6-0
Kaan	Rastgele	3-3, 2-4
Yasemin	Sistematik	3-3, 4-2, 5-1
Melisa	Eşit Odaklı	1-1, 3-3, 4-4 (4-2)
Efe	Rastgele	3-3, 2-4, 5-1, 6-0
Taha	Sistematik	3-3, 4-2, 5-1, 6-0

Çocukların imge ve resim temsillerinde yaptıkları çizimlerinde kullandıkları stratejiler ve yaptıkları parçalamalar Tablo 4.7’de verilmiştir.

Tablo 4.7

Çizim Temsilinde Stratejiler ve Parçalamalar

Çizim Temsili		
Katılımcı	Strateji	Yaptığı Parçalamalar
Duru	Sistematik	3-3, 4-2, 5-1
Sanem	Sistematik	3-3, 4-2, 5-1, 6-0
Gül	Sistematik	3-3, 4-2, 5-1, 6-0
Kaan	Eşit Odaklı ve Rastgele	3-3, 4-4, 4-2, 1-5
Yasemin	Eşit Odaklı	3-3, 4-4, 4-2
Melisa	Eşit Odaklı	1-1, 2-2, 3-3
Efe	Rastgele	3-3, 1-5, 2-3, 2-4
Taha	İkiden Farklı Parçalama	3-3, 1-1-1-1-1-1

Tablo 4.6 ve 4.7 incelendiğinde Yasemin somut temsil kullanarak parçalama yaptığında sistematik stratejisini, ancak çizime başladığında eşit odaklı stratejiyi kullanmış, Kaan somut nesnelerle parçalama yaptığında rastgele stratejisini, çizime başladığında ise eşit odaklı stratejiyi kullanmış ancak hatasını fark edince tekrar rastgele stratejisine dönmüştür. Taha somut temsil kullanarak parçalama yaptığında sistematik stratejisini, çizime başladığında ise ikiden farklı parçalama stratejisini kullanmıştır.

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi, bu süreçte “Yapısal düşünme”nin bir diğer alt bileşeni olan “İşlemler ve Özellikleri” bağlamında “Toplama”, “Çıkarma” ve “Bölme” şeklinde üç eylemde bulunmuşlar.

Toplama ve çıkarma işlemlerine baktığımızda ise bu problem bağlamında çocuklar genelde bunun bilincinde olmadan köpek sayısı fazla olduğunda fazla olanları karalayarak çıkarma (Gül, Kaan), köpek sayısı eksik olduğunda ise gereken sayıda ekleme yaparak toplama (Efe) işlemi yapmışlar. Diğer yandan Duru, Sanem, Efe ve Yasemin’in diğer çocuklardan işlemlere dair bilgileri farklılık göstermiştir. Örneğin

Sanem çıkarma ve toplama işlemlerini “*azalma, çoğalma ve zıt anlam*” şeklinde anlamlandırmış ve aşağıda verilen diyalogda görüldüğü gibi açıklama yapmıştır.

A: Buradaki köpek sayılarına ne oluyor?

S: Burada çıkartma oluyor, burada da toplama oluyor.

A: Çıkartma olunca ne oluyor?

S: Çıkarma olunca azalıyor. Burası da topluyor. Zıt anlamlı gibi. Azalıyor, çoğalıyor. Burası azalınca burası çoğalıyor. Burdaki köpekleri azaltınca buraya gelecek. Burdan çıkarttık burası çoğaldı.

Aynı zamanda Sanem köpek sayısını 4-2 şeklinde parçalarken “*Bir tanesini tekrar alıp koyarsam 5 tane olur burada*” şeklinde 4 ile 1’in toplamını, 4-2 parçalamasından 6-0 parçalamasına geçerken “*Burdan çıkarttım, sonra da hepsini buraya koydum burası boş kaldı*” şeklinde 2’den 2’yi çıkarmayı açıklamıştır. Efe ise 3-3 şeklinde parçalama yaparken “*İşte üçer üçer köpek altı oluyor*” şeklinde 3 ile 3’ün toplamını açıklamıştır. Yasemin’de yaptığı çizimde yarı sembolik olarak matematiksel bir ifade yazarak Tablo 4.3’te sunulduğu gibi toplama işlemi yapmıştır. Yasemin ilk önce bir tane köpek çizip ardından iki tane daha köpek çizmiştir. Köpek sayısını üçe tamamladığını göstermek için resimlerle sayıları bir arada kullanarak “*iki yapıcım aynı bu iki tane köpek gibi*” demiş ve bir “*3 köpek +2=3*” matematiksel ifadesini yazmıştır. Bu matematiksel ifade $3+2=3$ şeklinde anlaşılrsa da Yasemin bir tane köpeği çizgi ile ayırmış ve şu şekilde açıklama yapmıştır:

Yasemin: ...Şimdi burada üç tane köpek var. İki tanesini yapmış gibi hayal edelim.. İki üç kaç ediyor? Yani Artı iki eşittir üç. İki tanesini yapmış gibi hayal edelim. Öyle...

Yasemin’in burada kullandığı matematiksel ifade “*bir köpek varken iki tane daha çizersem üç olur*” anlamına gelmektedir. Duru 3-3 ve 2-4 şeklinde parçalama yaparken “*burda daha az (3), burda daha çok (4), yani burada fazlaydı, şimdide azaldı, çünkü birisini aldık oradan*” şeklinde 4 ile 1’in çıkarımını açıklamıştır.

Melisa, Efe, Yasemin, Duru ve Kaan parçalama yaparken farkında olmadan köpekleri iki kulübeye bir bir paylaştırarak altı sayısını ikiye bölme işlemini gerçekleştirmiştir. Sanem, Taha ve Gül ise doğrudan 3-3 şeklinde gruplama yaparak bölme işlemini gerçekleştirmiştir. Kaan Tablo 4.3’te sunulduğu gibi 3-3 şeklinde parçalama yaparken “*üç bölünce altı köpeği böyle oldu, hemde ortadan*” şeklinde 6 sayısını 3’er grupladığını

açıklamıştır. Aynı şekilde Sanem da “*çünkü ben toplamayı biliyorum, onun için üçer üçer böldüm*” ifadesini kullanarak altı sayısını üçerli olarak ikiye böldüğünü açıklamıştır.

Yapısal düşünme bağlamında değişme özelliğinin anlamı da ele alınabilirdi. Değişme özelliği problem bağlamında grup sayısı (2 grup) değişmeden gruptaki köpek sayılarının yerlerinin değişmesi şeklinde açıklanabilir. Örneğin değişme özelliğinin göstergesi 4-2 şeklinde yapılmış bir parçalamadan farklı olarak 2-4 şeklinde parçalama yapılması ve toplam köpek sayısının altı olmasıdır. Bu süreçte çocukların bu özelliğin farkında olup olmadıkları merak edilmiş ancak hiçbir çocuk toplananların yerleri değişince toplam köpek sayısının değişmediğini fark edememiş, gruplar arası yer değiştirme de yapamamıştır.

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi “Yapısal Düşünme”nin alt bileşeni olan “Sayılar ve İlişkiler” bileşeninin bir alt başlığı da “Karşılaştırma”dır. Bu süreçte çocuklar “*burada daha az köpek var, burada daha çok var*”, “*burası fazla*”, “*burada çok var, burada hiç yok*” ifadelerini kullanarak kulübelerdeki köpek sayıları arasında karşılaştırma yapmışlardır. Bu durum çocukların karşılaştırma yapabildiklerini, azlık ve çokluk kavramlarını zihinlerinde oluşturduklarını göstermektedir. Karşılaştırma yaparken çocuklar bire bir eşleme yaparak ya da nesne sayısının görsel olarak az-çok olduğunu fark ederek fazla olanı iki farklı şekilde belirlemiştir. Örneğin Kaan altı sayısını 1-5 şeklinde parçalarken sayıları görsel olarak karşılaştırmış ve 5’in 1’den büyük olduğunu ifade ederken “*Diyelim ki burda bir tane köpek kaldı (yukarı kulübenin yanına 1 yazdı), burda bir sürü köpek var*” şeklinde açıklama yapmıştır. Duru ise bire bir eşleme yaparak bir tane köpeğin fazla olduğunu fark ederek “*Burda daha az, burda daha çok (3 köpekle 4 köpeği karşılaştırıyor)*” şeklinde 3 ile 4 sayılarının büyüklüklerini karşılaştırmıştır. Gül 5-1 parçalaması ile 6-0 parçalamasını karşılaştırarak “*Burada altı tane var, burada hiç yok yaa, öncesinde burada çok vardı, burada çok az vardı*” şeklinde açıklama yapmıştır. Taha “*burda burası bomboş, burda bütün köpekler var*”, Sanem ise “*burdan çıkarttım, sonra da hepsini buraya koydum burası boş kaldı*” ifadelerini kullanarak 6-0 parçalamasında bütünle sıfırı karşılaştırmışlar. Bu da çocukların “bütün” kavramına aşina olduklarını göstermektedir.

“Sayılar ve İlişkiler”in bir diğer bileşeni de “Teklik ve Çiftlik”dir. Çocuklarının gözünden teklik ve çiftlik kavramlarını incelemek için çocuklardan bu sefer çift sayıda köpekleri daha sonra tek sayıda köpekleri iki kulübeye paylaştırmaları istenmiştir. Yani

çocuklardan altı tane köpeği kulübelere eşit şekilde paylaştırdıktan sonra beş köpeği iki kulübeye eşit şekilde paylaştırmaları istenmiştir. Çocuklar çift sayıda köpekleri, kimileri bire bir paylaşırma, kimileri ise doğrudan ikiye bölme yaparak eşit şekilde gruplamıştır. Tek sayıda köpekleri ise eşit şekilde paylaşmak gerektiğinde yapamamışlar ve Gül “*çünkü burada üç olucak, burada iki olucak*”, “*Bir tane daha köpek olursa eşit olucak*”; Sanem “*Yerleştirmek için bir tane daha köpek gerekli*”, “*bunu çıkartabilirim (tek kalanı)*”; Kaan “*bir tane köpek dışarıda kalması gerekiyor çünkü eşit şekilde olamaz*”, “*dört köpek lazım*”, “*bir tane daha köpek olsaydı eşit olabilirdi*”; Duru “*eşleştiremiyorum, çünkü ikişer ikişer birisini koyuyorsam üç, iki kalır*”, “*bir tane daha köpek gerek*”; Yasemin “*beş tane (ikişer ikişer yerleştirdi) iki tane burda, ama bir tanesi kalacak iki tane iki tane yerleştirirsem*”, “*çünkü 5 olduğu için, dört tane olsaydı iki tane iki tane yerleştirebilirdim, beş olduğu için bir tane burda kaldı*”, “*6 köpek lazım, yani bir tane daha köpek lazım*”; Efe “*Ama şimdi buna bunu (tek kalan köpeği) koyarsam bu üç olur. Buna da bunu koyarsam bu üç olur*”, “*eşit olması için iki tane köpek almamız gerekiyor bu kâğıttan*”, “*buralara iki köpek koymamız gerekiyor, üç oluyor ikisi de*” şeklinde ifadeler kullanarak Melisa ve Taha dışında tüm çocuklar kendi dillerinde ad koymadan teklik kavramını açıklamışlardır.

Bu süreçte çocuklar kardinalite ilkesine uygun sayma yapmışlardır. “Kardinal Sayma” eylemi çocukların nesne sayısını belirlerken tüm nesneleri saydıklarında en son söylediği nesnenin sayı sözcüğünün nesne sayısını belirlediğini bilmesidir. Bu süreçte tüm çocuklar nesne sayısını belirlemek için kardinal sayma yapmışlar. Ayrıca 3 üzerinde olan kümelerin nesne sayısını sayarak, 3,2 ve 1 nesneden oluşan kümelerin nesne sayısını ise sezgisel olarak söylemişler.

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi cebirsel düşünmenin diğer alt bileşeni olan “Analitik Düşünme” yer almaktadır. Analitik düşünme bağlamında bir alt bileşen “Sembollerin Anlamı”dır. Bu problem bağlamında eşitlik sembolünün anlamı ele alınmıştır. Bu süreçte çocuklar karşılaştırma yaptıklarında eşitliği iki gruptaki nesne sayısının aynı olması şeklinde açıklamışlardır. Çocuklara köpeklerin eşit sayıda olduğunu nasıl anladıkları sorulmuş ve Melisa dışında tüm çocuklar bu soruyu kendine göre cevaplamıştır. Melisa ise eşit sayıda olmanın ne olduğunu açıklayamamıştır. Diğer çocuklardan Gül ve Taha nesnelerin “*aynı sayıda*” olduğunu, Sanem ve Kaan “*üçer üçer*” yaptığını, Duru “*hep üç görünüyorda ondan*”, Yasemin ve Efe “*burda da üç, burda da üç*” ifadelerini kullanarak

eşitliği açıklamışlardır. Burada çocuklar eşitliği “Aynılık” anlamında kullanmışlardır. Diğer yandan Duru diğer çocuklardan farklı olarak “(3-3) eşit, (2-4) eşitin yarımı, (1-5) hiç de eşit değil. Böyle sıra sıra gidiyor. Yani eşit, orta eşit, hiç eşit” şeklinde eşit ve eşit değil kavramlarına vurgu yapmıştır. Aynı zamanda Duru “eşitin yarımı” ifadesini kullanarak 2’nin 4’ün yarısı olduğunu vurgulamış ve yarım-bütün ilişkisini kurmuştur. Yasemin’in ise problemi çözerken eşitliğin anlamını “Bir İşlemin Sonucu” olarak algıladığı da söylenebilir.

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi “Genelleme Yapma” ve “Temsil Etme” cebirsel düşünmenin analitik düşünme, yapısal düşünme alt bileşenlerinin hepsini bir bütün olarak birleştirir. Her çocuğun farklı bir algısı vardır ve çizim onların düşüncelerinin somutlaştırılmasını ve kişisel özelliklerinin belirlenmesini sağlayan bir araçtır. Küçük çocuklar hikâye problemi ile ilgili düşüncelerini parçalama eyleminde sunulan tablolarda da sunulduğu gibi çizimleriyle temsil etmişler, bu süreçte de çizimlerinde resim, imge, sayı temsil biçimlerini kullanmışlardır. Ayrıca somut temsilleri kullanarak da hikâye problemini çözmeye çalışmışlardır. Çocukların hangi temsilleri kullandıkları Tablo 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 altında örnekleri ile birlikte açıklanmış ve Şekil 4.1’de sunulmuştur.

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi hikâye problemi bağlamında çocuklara iki kulübeye yerleşen köpek sayıları ile ilgili “*ne fark ediyorsun?*” sorusu ile onların genellenebilecek özellikleri görmeleri beklenmiştir. Bu süreçte çocuklardan bazıları toplamın her zaman değişmediği, yani köpek sayısının her zaman altı olduğunu ve toplanandan biri azalırken diğer toplananın arttığını, diğer bir değişle bir kulübede köpek sayısı azalırken diğer kulübede köpek sayısının arttığı genellemesini yapabilmiştir. Örneğin Duru fark ettiği genellemeyi aşağıda sunulan diyalogda açıklamıştır.

A: Peki burdaki köpek sayılarıyla ilgili bir şey fark ediyor musun?

D: Evet, “bir, iki, üç, burası düz doğru gidiyor; beş, dört, üç, burası geriye doğru gidiyor.

A: Nasıl bir değişim oldu burada?

D: yani burada fazlaydı, şimdide azaldı, çünkü birisini aldık ordan

Diyalogda görüldüğü gibi, Duru köpek sayılarının ilişkili bir şekilde değiştiğini tam olarak algılayamasa da kulübelerdeki köpek sayılarının çoğaldığını ve azaldığını fark etmiştir. Sanem ise fark ettiği ilişkiyi;

Sanem: Burası azalınca burası çoğalıyor, burdaki köpekleri azaltınca buraya gelecek, burdan çıkarttık burası çoğaldı.

Sanem: 6 oldukları değişmiyor, sadece farklı yerlere gidiyorlar,

ifadelerini kullanarak iki şekilde genelleme yapabilmiştir. Sanem sayı parçalarının ilişkili olarak azalıp çoğaldığını “buradan aldım, buraya koydum” ifadesi ile gerekçelendirmiştir.

Efe’ye “Bir şey fark ediyor musun?” diye sorulduğunda çizimlerindeki köpekleri sayarak hepsinin altı olduğunu fark etmiş fakat bunun her zaman böyle olacağını söyleyememiştir. Sadece kendi resimlerine odaklanarak böyle bir çıkarımda bulunmuştur.

Yasemin, Taha, Melisa ve Gül ise köpeklerin yer değişimine ya da toplamına ilişkin bir ilişkiyi fark edememişlerdir. Örneğin Gül’e köpeklerin yer değişimleriyle ilgili bir şey fark edip etmediği sorulduğunda “burda 3 tane var, burada 4 ve 2 tane var, burada 1 ve 5 var köpek. Hepsi farklı, hepsi sayısı farklı köpekler. Bir tek bunu fark ettim, başka hiçbir şey fark etmedim” cevabını vermiştir. Kaan ise köpeklerin kulübeler arası geçebildiklerini fiziksel olarak ifade etse de kulübelerdeki köpeklerin ilişkili olarak azalıp çoğalmalarını fark edememiştir. Genellemenin yanı sıra Kaan ve Yasemin yaptıkları parçalamaların altı olduğunu tekrar sayarak kontrol etmişler ve doğrulamışlardır.

4.2 Çocukların İkinci Probleme İlişkin Yanıtlarından Elde Edilen Bulgular

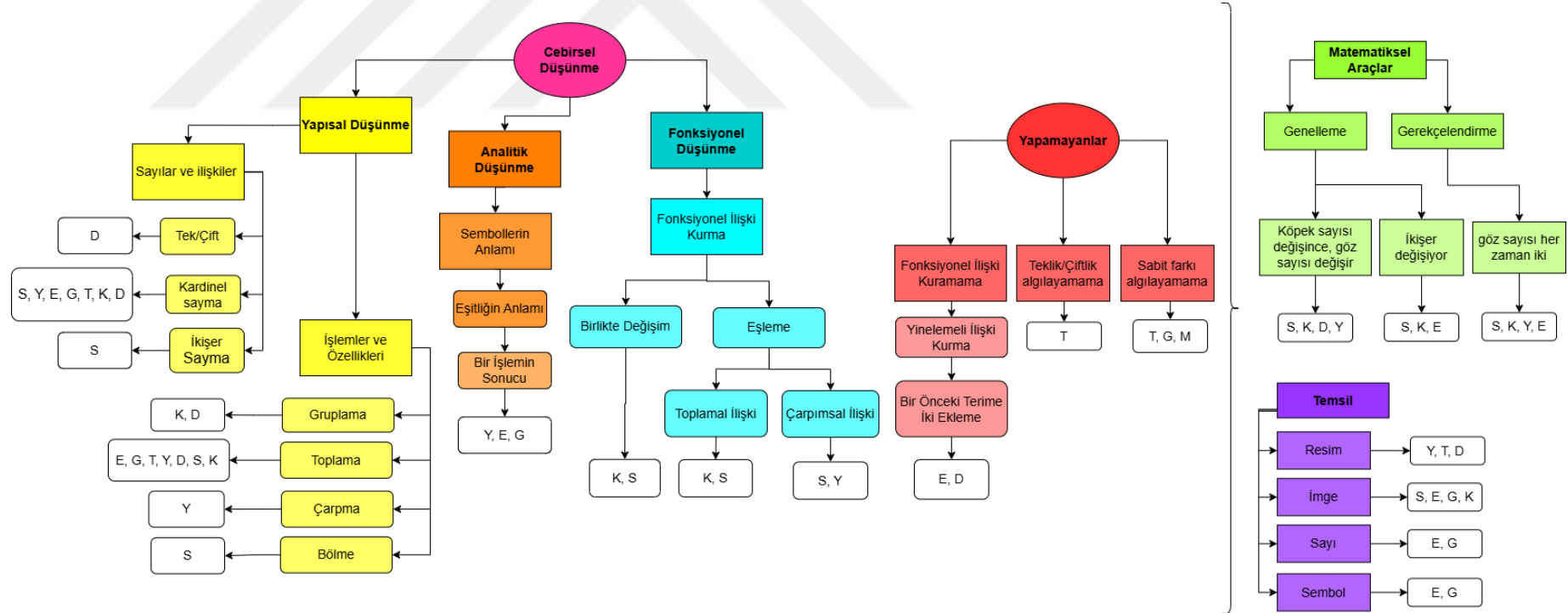
İkinci hikâye probleminde cebirsel düşünme bağlamında çocukların fonksiyonel düşünme becerileri incelenmek istenmiş, bu amaçla köpek ve köpeklerin göz sayılarının keşfine yönelik bir örüntü problemi sunulmuştur. Problemde çocuklara “Diyelim ki bir köpek barınağındasın ve gördüğün tüm köpeklerin gözlerini saymak istiyorsun;

- a) Barınakta bir köpek olsaydı kaç tane gözü olurdu? Ya iki köpek olsaydı? Üç köpek olsaydı?
- b) Bir köpek daha olsa ne olur?
- c) Köpek sayısı ile toplam göz sayısı arasında bir ilişki görüyor musun?
- d) Bu ilişkiyi nasıl açıklarsın?

şeklinde sorular yöneltilmiştir. Bu problem bağlamında çocukların “Fonksiyonel Düşünme” becerilerinin yanı sıra “Yapısal Düşünme” ve “Analitik Düşünme” becerilerine yönelik bulgulara elde edilmiştir. Çocukların verdikleri yanıtlar ve çizimler sonucunda elde edilen bulgular Şekil 4.2’de sunulmuştur.

Şekil 4.2

İkinci Soruya İlişkin Bulgular



Şekil 4.2’de görüldüğü gibi, cebirsel düşünmenin “Yapısal Düşünme” bileşeni bağlamında “Sayılar ve İlişkiler” ile “İşlemler ve Özellikleri”, “Fonksiyonel Düşünme” bileşeni bağlamında ise “Fonksiyonel İlişki Kurma” alt başlıkları ele alınmıştır.

Fonksiyonel ilişki kurma köpek sayıları ve göz sayıları arasındaki ilişki belirlemeye dayanmaktadır. Bu ilişki bağlamında “Birlikte Değişim” ve “Eşleme” stratejisi kullanılmıştır. Birlikte değişim stratejisi iki niceliğin aynı anda nasıl değiştiğini belirleme, yani eş zamanlı değişimi fark etme ve vurgulama şeklinde açıklanabilir. Bu soru bağlamında köpek sayısı birer artarken, köpeklerin göz sayısının ikişer artması şeklinde iki niceliğin aynı anda değişimi birlikte değişim olarak tanımlanabilir. “Eşleme” stratejisi ise nicelikler arası karşılıklı bir ilişki kurma şeklinde açıklanabilir. Eşleme stratejisine bir niceliğe bağlı olarak diğer niceliğin nasıl değiştiğini belirleme ve ilişki kurma da denilebilir. Yinelemeli ilişki bir örüntüde ardışık terimler arası ilişkiyi görebilme ve belirleme şeklinde açıklanabilir. Araştırmada kullanılan hikâye problemine uygun çocuklar her seferinde köpek gözü sayısına iki ekleyerek yinelemeli ilişki kurmuş, ancak iki nicelik arası fonksiyonel ilişki kuramamışlardır. Bu stratejiye “Bir Önceki Terime İki Ekleme” stratejisi isimlendirilmesi yapılmıştır. Bu stratejilerin görsel açıklamaları Tablo 4.8’de sunulmuştur.

Tablo 4.8

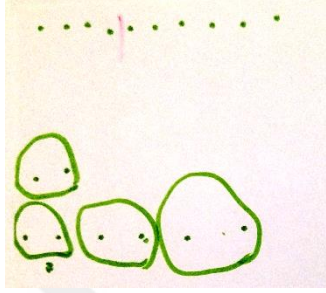
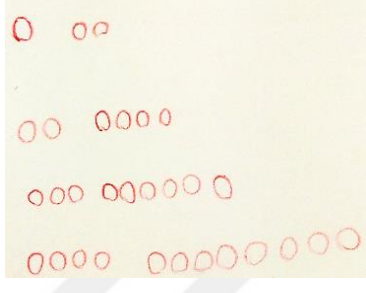
“Birlikte Değişim”, “Eşleme”, “Bir Önceki Terime İki Ekleme” Stratejilerin Görsel Açıklamaları

“Birlikte Değişim”		“Eşleme”		“Bir Önceki Terime İki Ekleme”	
Köpek sayısı	Göz sayısı	Köpek sayısı	Göz sayısı	Köpek sayısı	Göz sayısı
$\begin{array}{c} 1 \\ +1 \curvearrowright 2 \\ +1 \curvearrowright 3 \end{array}$	$\begin{array}{c} 2 \\ \curvearrowright +2 4 \\ \curvearrowright +2 6 \end{array}$	$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \\ 3 \xleftarrow{: 2} 6 \end{array}$	$\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{c} 2 \\ \curvearrowright +2 4 \\ \curvearrowright +2 6 \\ ? \end{array}$

Kaynak: Blanton, 2008, ss.34-35.

Şekil 4.2’de görüldüğü gibi, köpek sayıları ve göz sayıları arasındaki fonksiyonel ilişkiyi kurabilen çocuklar Kaan, Sanem ve Yasemin’dir. Kaan ve Sanem “Birlikte Değişim” stratejisini kullanmışlardır. Bu çocukların kullandığı stratejiye ve temsillere ilişkin örnekleri Tablo 4.9’da sunulmuştur.

Tablo 4.9*Birlikte Değişim Stratejisi Örnekleri*

Birlikte Değişim	
Kaan	Sanem
	
İmge Temsili	

Bu süreçte Kaan “Birlikte Değişim” ve toplamsal ilişki kurarak “Eşleme” stratejisini kullanmıştır. Tablo 4.9’da görüldüğü gibi, Kaan ilk önce barınakta bir köpeğin olduğunu bildiği için imge temsili kullanarak iki nokta koymuş ve iki gözü olduğunu ifade etmiştir. Ardından iki köpeğin olduğu söylenince iki göz daha çizmiş ve dört göz olduğunu açıklamıştır. Daha sonra bir köpeğin daha geldiğini ve üç köpek olduğunu duyunca var olan dört gözün yanına iki göz eklemek yerine tekrar sayarak altı göz çizmiştir. Böylece Tablo 4.9’da görüldüğü gibi toplam on tane nokta çizmiştir. Kaan “Üç köpeğin kaç gözü var?” sorusuna en son eklediği altı noktayı “bir-iki, üç-dört, beş-altı” şeklinde sayarak altı cevabını verebilmiştir. Ancak dört köpek olursa kaç göz olacağı sorulduğunda kafası karışmış ve “burada vaaar” diyerek parmağı ile çizdiği dört noktayı göstermiştir. Sorulan şey “dört göz” değil “dört köpeğin kaç gözü” olduğu vurgulandığında, Kaan tekrar çizmeye başlamış, altı tane nokta çizerek “burada iki tane var, burada iki tane var, burada da iki tane var” diyerek iki parmağını birleştirerek kontrol etmiştir. Ancak köpek ve göz sayıları arasında ilişkilendirme yapamamış ve burada kaç tane köpek var sorusuna altı diye cevap vermiştir.

Kaan’a çizdiği noktaların ne olduğu sorulunca düşünmüş ve köpekleri göstermek için ikişer grupta yaparak gözleri yuvarlak içine almıştır. Bunu yaptıktan sonra orada üç tane köpek olduğunu söyleyebilmiştir. Sonrasında dört köpeğin gözlerini göstermek için iki göz daha eklemiş, onları yuvarlak içine almış ve sekiz göz olduğunu söylemiştir.

Ardından köpekler ve göz sayıları arasında bir ilişki fark edip etmediği sorulduğunda araştırmacıyla Kaan arasında aşağıda verilen diyalog gerçekleşmiştir:

A: Köpeklerle gözler arası nasıl bir ilişki var sence?

K: Aynı olan bir şey mi diyorsun yoksa?

A: Ne fark ediyorsun burada?

K: Bir şey fark ettiim. Burda dört tane köpek olur, hemde dört tane göz eeee...

Diyalogda görüldüğü gibi, Kaan köpek sayıları ile göz sayılarının eşit olacak şekilde ifade etmiştir. Ancak sonrasında kullandığı imgenin göz niceliğini gösterdiğini anladığında köpekleri temsil etmek için yuvarlak imgesini kullanmıştır.

K: Bir şeyiini fark ettim eee ... Bir tane köpek olduğunda bir tane göz olmadığını fark ettim ... Mesela bir tane köpek var onun iki tane gözü var, iki tane köpeğin tam tamına dört gözü var. Üç köpeğin altı.

A: Dört köpeğin?

K: Sekiz

A: Köpekler gelince gözler nasıl değişiyor?

K: İki tane daha çoğalınca (*sayıyor, parmaklarıyla iki tane ekliyor gözlerin yanına*) on. İki tane köpeği daha ıı bir tane köpeği öbürkülerin yanına koyarsak tam tamına on tane göz ediyor. İki tane daha koyarsak on iki tane göz olur, iki tane daha bunların yanına eklersek on iki olduğunu herkes bilir.

A: Peki kaç köpek olur?

K: (*İkişer gruplama yaparak sayıyor*) altı

A: Nasıl bir ilişki var burada? Köpek sayısı ve göz sayısı nasıl değişiyor?

K: Köpekler daha çoğalınca, gözler de daha çoğalıyor, daha da artıyor. Ama tek farkı ... çünkü köpek daha çoğalınca gözler iki tane daha çoğalır. Çünkü obür köpeklerle aynı ya, bir tane daha koyunca o da çoğalıyor... Çünkü hepsi aynı olduğundan. İnsanın gözü olmasaydı çoğalmazdı ama gözü olduğu için çoğalıyor.

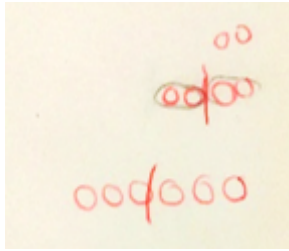
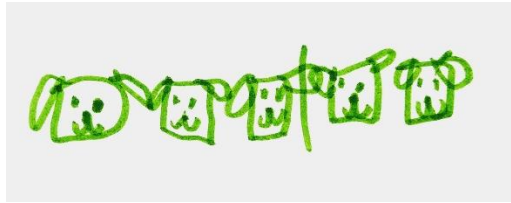
Diyalogda görüldüğü gibi, Kaan'ın başlangıçta kafası karışsa da daha sonra köpek ve göz sayıları arasında "...Köpekler daha çoğalınca, gözler de daha çoğalıyor daha da artıyor. Ama tek farkı ... çünkü köpek daha çoğalınca gözler iki tane daha çoğalır..." açıklaması ile iki nicelik arasındaki eş zamanlı değişimi açıklamış ve bu şekilde "Birlikte Değişim" stratejisini kullanmıştır. Kaan "*İnsanın gözü olmasaydı çoğalmazdı ama gözü olduğu için çoğalıyor*" diyerek kurduğu ilişkiyi gerekçelendirmiştir. Diğer yandan diyalogda da

görüldüğü gibi “...Mesela bir tane köpek var onun iki tane gözü var, iki tane köpeğin tam tamına dört gözü var. Üç köpeğin altı...dört köpekte sekiz” açıklamasıyla da köpek ve göz sayıları arasında karşılıklı eşleme yaparak fonksiyonel ilişkiyi ifade etmiştir. Bu süreçte Kaan toplamsal ilişki kurmuştur.

Kaan gibi Sanem’de fonksiyonel ilişkiyi kurarken hem “Birlikte Değişim” hem de “Eşleme” stratejilerini, Yasemin ise sadece “Eşleme” stratejisini kullanmışlardır. Şekil 4.2’de görüldüğü gibi, “Toplamsal İlişki” ve “Çarpımsal İlişki” stratejileri “Eşleme”nin alt bileşenleri olarak ele alınmıştır. Köpek ve göz sayıları arasındaki fonksiyonel ilişkiyi Yasemin çarpımsal, Sanem ise hem toplamsal hem de çarpımsal olarak ifade etmiştir. Çocukların toplamsal ve çarpımsal ilişki stratejilerine ilişkin örnekler Tablo 4.10’da sunulmuştur. Sanem ilişkileri açıklarken göz yerine yuvarlak çizerek imge, Yasemin ise doğrudan köpek çizerek resim temsilini kullanmıştır.

Tablo 4.10

Toplamsal İlişki ve Çarpımsal İlişki Stratejileri Örnekleri

Eşleme	
Toplamsal ve Çarpımsal İlişki	Çarpımsal İlişki
Sanem	Yasemin
	
İmge Temsili	Resim Temsili

Şekil 4.2’ye baktığımızda Sanem’in fonksiyonel ilişki bağlamında “Birlikte Değişim” ve “Eşleme” stratejileri altında hem “Toplamsal İlişki” hem de “Çarpımsal İlişki” kurduğu görülmektedir. Sanem ilk başta çizim yapmadan sözel olarak parmaklarını kullanarak soruları cevaplamıştır. Her seferinde köpek sayısı arttıkça iki parmağını açarak toplama yapmış ve göz sayısını bulmuştur.

A: Bir tane daha köpek gelirse kaç göz olur?

S: On

A: Nasıl yapıyorsun bunu? Nasıl saydın?

S: Parmaklarımla. İkişer ikişer saydım.

A: Köpek sayısı değişince göz sayısı nasıl değişiyor?

S: Köpekler bir tane, gözler iki tane olduğu için değişiyor.

A: Bir tane köpek gelince göz sayısı nasıl değişiyor?

S: İki tane değişiyor. Yani ondan iki değişiyor. Gözlerden yine iki tane olduğu için topluyorum ikişer ikişer.

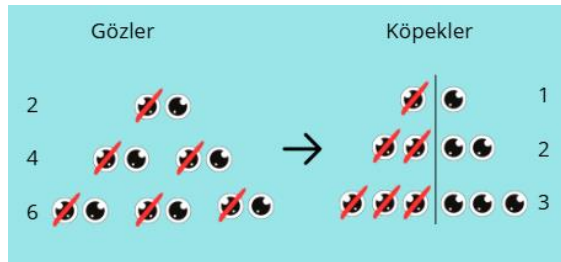
Diyalogda görüldüğü gibi, Sanem burada köpek sayısı birer artarken gözlerin ikişer arttığını, köpek ve göz sayılarının eş zamanlı değiştiğini ifade ederek “Birlikte Değişim” stratejisini kullanmıştır. Sonrasında Sanem Tablo 4.10’da görüldüğü gibi verilen resmi çizmeye başlamıştır. İlk başta bir köpek olduğunu varsayıp iki tane göz çizmiştir. Sonra iki tane köpek için dört ve üç tane köpek için altı tane göz çizmiştir. Kaç tane köpek olduğunu göstermek için çizdiği göz sayısını çizgiyle ikiye bölmüş ve şu şekilde açıklama yapmıştır:

Sanem: İki köpek olduğunu gözlerden bir tane olmadığı için anladım. Burada dört köpek gözü var, iki tane köpek olması lazım. Gözleri silerek anlayabilirim. Burada altı tane köpek gözü var, üç tane köpek olduğunu üç gözü silerek anlayabilirim.

Sanem’in “gözlerden bir tane olmadığı için” ifadesi ikiye bölme işlemini açıklamaktadır. Sanem önce göz sayısını belirlemekte, daha sonra da bu sayıyı ikiye bölmektedir. Örneğin, göz sayısı iki, dört ve altı iken her birini iki gruba ayırarak sırasıyla bir, iki ve üç köpek olduğunu ters ilişki kurarak ifade etmiştir. Bu işlemden dolayı Sanem’in köpek ve göz sayıları arasında “Çarpımsal İlişki” kurduğu görülmektedir. Sanem’in kurduğu fonksiyonel ilişkini tasviri Şekil 4.3’te verilmiştir.

Şekil 4.3

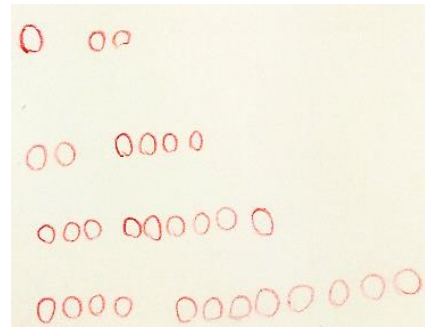
Sanem’in Kurduğu Fonksiyonel İlişkinin Tasviri



Sanem tekrardan çizimini açıklarken ortadan çizgi çizdiğinde çiziminin sol tarafının köpek sayısını, sağ tarafının göz sayısını gösterdiğini söylemiştir. Tablo 4.10’da sunulan çizimine uzun uzun baktıktan sonra sağ tarafta olan göz sayısının eksik olduğunu söylemiş ve çarpımsal ilişki stratejisini fazla devam ettirmeden yanlış yaptığını düşünerek tekrardan Tablo 4.9’da verilen çizimini çizmeye başlamıştır. Bu sefer daha sistematik bir şekilde iki nicelik arasında eş zamanlı ilişkiyi ve aralarında olan fonksiyonel ilişkiyi vurgulayarak çizimine devam etmiştir. Sanem sol tarafta köpekleri ve sağ tarafta, köpeklerin tam karşısında gözleri çizmiş; birinci gelen yuvarlakların köpek olduğunu ve “bir, iki, üç, dört” şeklinde değiştiğini, ikinci gelen yuvarlakların göz olduğunu ve “ikişer ikişer” değiştiğini açıklamıştır. Sanem parmaklarını kullanarak ikişer sayma yapmış, köpek sayısına göre göz sayısını bulmuş ve “İki köpeğin dört gözü var”, “Şimdi üç köpek varyaa, üç köpeğin gözü ... iki, dört, aaa altı, evet altı, altı olması lazım”, “Dört köpek. Bir iki, birinin gözünü yaptım, dört, beş altı, sekiz” şeklinde “Toplamsal İlişki” kurarak da fonksiyonel ilişkiyi açıklamıştır. Aynı zamanda bu ifadeleri söylerken Tablo 4.9’da verilen resmi imge temsilini kullanarak çizmiştir. Sanem’in yaptığı bu çizim matematiksel olarak Tablo 4.11’de sunulan $f(x)=2x$ fonksiyonunun tablo temsilini hatırlatmaktadır. Sanem Tablo 4.9 ve 4.10’da görüldüğü gibi çizimlerinde köpek ve göz sayılarını yuvarlaklarla göstererek imge temsilini kullanmıştır.

Tablo 4.11

Sanem’in Çiziminin Matematiksel Gösterimi

Tablo Temsili		Sanem'in Çizimi
$f(x)=2x$		
x	y	
1	2	
2	4	
3	6	
4	8	

“Eşleme” stratejisini kullanan Yasemin ise hikâye problemini ilk başta yanlış anlamış ve tüm köpeklerin her zaman iki gözü olacağını belirtmiştir. Ardından “heee toplama diyosun sen” ifadesini kullanarak toplam göz sayısının sorulduğunu anlamış ve köpek ve göz sayılarını hesaplarken tekrarlı toplama yapmıştır. Yasemin köpek sayısını iki kere

toplayarak göz sayısını bulmuştur. Burada Yasemin köpek sayısına göre göz sayısını bulmak için toplama işlemini yapsa da köpek sayısının iki katını aldığı için aslında çarpımsal ilişki kurmuştur. Yasemin ve araştırmacı arasında geçen diyalog örnek olarak sunulmuştur.

A: Şimdi iki tane köpek var.

Y: İki iki daahaa, dört

A: Üç tane köpeğin kaç gözü var?

Y: Üç topladım şimdi burda, üç tane daha ... altı.

A: Dört tane köpeğin kaç gözü var?

Y: Dört tane köpeğin hepsinin iki gözü var, topluyorum ... dört dört daha ...burda şimdi bir iki üç dört beş altı yedi sekiz .. sekiz.

A: Beş köpeğin kaç olacak?

Y: On

A: Nasıl anladın?

Y: Çünkü beş beş daha on ediyor

A: Altı köpeğin kaç olur o zaman?

Y: Altı altı daha on iki

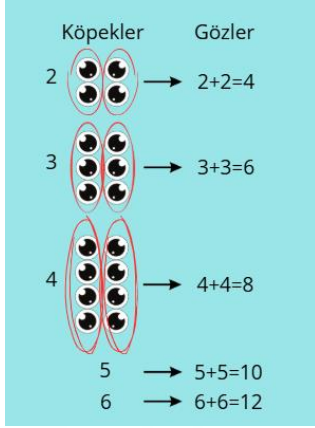
A: Nasıl bir ilişki var burada? Köpek sayısı ile göz sayısı nasıl değişiyor?

Y: Çünkü tek tek geliyorlar. Göz sayısı değişmiyor, dünyada öyle. Biz topladığımız için değişiyor.

Diyalogda görüldüğü gibi, Yasemin tüm köpeklerin her zaman iki gözü olacağını, toplam göz sayısını bulması için tekrarlı toplama yani köpek sayısını iki ile çarpma yapması gerektiğini ve toplama yaptığımız için toplam göz sayısının değiştiğini söylemiş, yanı sıra tekrarlı toplama yaparak çarpımsal ilişki kurmuştur. Bu süreçte Yasemin doğrudan köpek resmi çizerek resim temsilini kullanmıştır. Yasemin'in kurduğu fonksiyonel ilişkinin tasviri Şekil 4.4'te verilmiştir.

Şekil 4.4

Yasemin'in Kurduğu Fonksiyonel İlişkinin Tasviri



Şekil 4.2’de görüldüğü gibi köpek sayıları ve göz sayıları arasında “Yinelemeli İlişki” kuran çocuklarda olmuştur. Bu stratejiyi kullanan Efe ve Duru’nun örnekleri Tablo 4.12’de sunulmuştur.

Tablo 4.12

Bir Önceki Terime İki Ekleme Stratejisi Örnekleri

Bir Önceki Terime İki Ekleme	
Efe	Duru
İmge, Sayı ve Sembol Temsilleri	Resim Temsili

Tablo 4.12’de görüldüğü gibi, Efe başlangıçta toplama işlemi yaparak toplam göz sayısını saymış ve düşündüklerini sayıları kullanarak kağıdına yazmıştır. İki köpeğin dört gözü olduğunu “*çünkü iki aytı iki döyt oluyo*” ifadesiyle açıklamış ve sayı ve sembol temsili kullanarak “*2+2 4*” matematiksel ifadesini yazmıştır. Efe söylediği ifadede eşittir kelimesini kullanmadığı gibi yazdığı matematiksel ifadede de eşittir sembolünü kullanmamıştır. Ardından üç köpeğin toplam göz sayısının altı olduğunu “*biy-iki, üç-döyt, beş-altı*” şeklinde ikişerli ritmik sayma yaparak söylemiş ve “*3+3+3 6*”

matematiksel ifadesini yazmıştır. Efe yazdığı matematiksel ifadeyi “*üç aytı üç aytı üç altı edey, şimdi bak buyda biy üç vay, yani üç tane köpek. Buyda üç tane üç vay. İşte üç tane köpeğin altı gözü oluyov*” şeklinde açıklamıştır. Yazdığı üç rakamının ne anlama geldiği tekrar sorulduğunda Efe bir köpeğin iki gözü olduğunu ve orada üç tane köpek olduğunu vurgulamıştır. Ardından Tablo 4.12’de görüldüğü gibi nokta kullanarak üç tane köpeğin altı gözü olduğunu göstermiştir. Bir tane daha köpek gelince göz sayısının nasıl değiştiği sorulduğunda Efe çizmeden “*buyda üç tane köpek vay, altı tane göz vay, biy tane daha köpek geliyse sekiz oluy çünkü altıdan sonya yedi geliy, sonya sekiz*” şeklinde cevap vermiş ve iki tane daha nokta eklemiştir. Sonrasında bir tane daha köpek gelirse on tane göz olacağını söylemiş ve iki tane nokta daha eklemiştir. Çizdiği noktaları parmakları ile ikili ikili göstererek onların birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci köpek olduğunu göstermiştir. Efe’ye köpek ve göz sayısı arası nasıl bir ilişki olduğu ve onların nasıl değiştiği sorulduğunda şu şekilde cevaplamıştır:

E: İlk önce biy tane köpek olunca sonya yine köpek gelince döyt oluyov. Sonya yine köpek gelince altı oluyov. Yine köpek gelince sekiz, yine köpek gelince on.

A: Köpekler gelince göz sayısı nasıl değişiyor?

E: Sekizden sonya 9 oluy, ama iki tane gelince 10 oluy.

A: 9 olmaz mı ?

E: Hayıy

A: Neden 9 olmaz?

E: Ama, bak böyle. İki tane gelince 10 oluy. 8 de biy tane gelince 9 oluy.

A: Bir tane daha köpek gelince göz sayısı 9 olmaz mı?

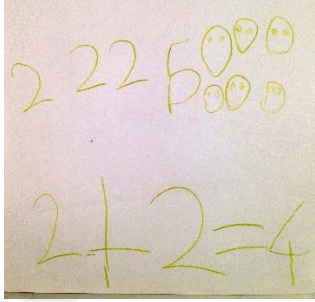
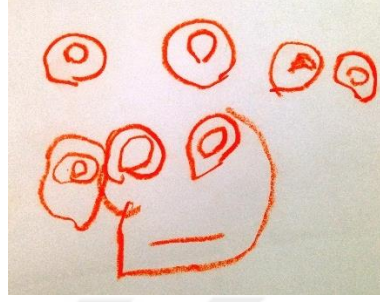
E: On oluy, çünkü iki gözü vay.

Diyalogda görüldüğü gibi, Efe gözlerin ikişer değiştiğini anlamış ve her defa bir önceki terime iki ekleyerek göz sayısını bulmuştur. Efe “*çünkü iki gözü vay*” ifadesiyle gözlerin ikişer artmasını gerekçelendirmiştir. Köpeklerin iki gözü olduğu için ikişer arttığını belirtmiş ancak köpeklerin de sayısının aynı zamanda birer arttığını vurgulamamıştır. Bu süreçte Efe köpek sayısının değişmesini dikkate almamış ve sadece bir niceliğin yani göz sayısının değişimine odaklanmıştır. Tablo 4.12’de görüldüğü gibi Efe bu süreçte köpek gözleri için nokta kullanarak imge temsilini ve bununla yanı sıra sayı ve sembol temsilini kullanmıştır.

Duru ise köpeklerle göz sayıları arasındaki ilişkide zorlanmıştır. Başlangıçta bir köpek olduğunu bilerek resim temsilini kullanarak iki tane göz çizmiş ve ardından bir köpek daha gelince iki köpek olduğunu düşünerek iki göz daha eklemiştir. Üç köpeğin göz sayısının kaç olacağı sorulduğunda ise köpek sayısı ile göz sayısını ayırt edememiş ve önceden çizmiş olduğu dört gözün yanına üç tane daha göz çizerek toplam yedi göz çizmiştir. Ancak çizdiklerine dikkat etmeden zihninden ikişer sayma yapmış ve üç köpeğin altı gözü olduğunu sözel olarak ifade etmiştir. Duru üç köpek olana kadar sözel olarak göz sayısını zihninden toplayarak bulabilmiş ama dört köpeğin toplam kaç gözü olduğunu çizmeden bulamamış ve on üç olacağını tahmin etmiştir. Ardından önceden çizdiği toplam yedi göze iki tane daha göz eklemiştir. Orada kaç tane köpek olduğu sorulduğunda ise Duru ikişer gruplama yaparak köpekleri göstermiş ve tek kalan gözü görünce eksik olan gözü eklemiştir. Duru'nun tekli olan grupta eksik olan gözü tamamlaması teklik çiftlik kavramlarını yapılandırıldığının bir göstergesidir. Aynı zamanda birinci soruda da tek sayının çift olması için *“bir tane daha köpek gerek”* ifadesini kullanmıştır. Gruplama yaptıktan sonra Duru gözlerin her seferinde ikişer arttığını fark etmiş ve dört köpeğin sekiz gözü olacağını söylemiştir. “Köpek sayısı değişince göz sayısı nasıl değişiyor?” sorusuna Duru *“on, sonra on bir-on iki, sonra on üç-on dört”* şeklinde cevap vermiştir. Ardından köpekler çoğalınca böyle olduğunu ve köpekler artınca göz sayısının çoğaldığını ifade etmiştir. Duru yinelemeli ilişki kullanarak göz sayısının çoğaldığını söylese de fonksiyonel ilişkiyi kuramamış ve göz sayısının nasıl çoğaldığını ifade edememiş ve *“onunla hiçbir fikrim yok”* şeklinde açıklamıştır. Duru Tablo 4.12’de sunulan çiziminde görüldüğü gibi gözleri göstermek için doğrudan göz çizerek resim temsilini kullanmıştır.

Şekil 4.2’de görüldüğü gibi Taha, Gül ve Melisa bu problemi çözememiştir. Çocukların bu süreçte “Sabit Farkı Algılayamama” ve “Teklik/Çiftlik Algılayamama” sebepleri bu problemi çözememelerinin bir göstergesi olarak düşünülmüştür. Gül ve Taha’nın örnekleri Tablo 4.13’te sunulmuştur.

Tablo 4.13*Sabit Farkı Algılayamayanların Örnekleri*

Sabit Farkı Algılayamama	
Gül	Taha
	
Resim, Sayı ve Sembol Temsilleri	Resim Temsili

Tablo 4.13'te görüldüğü gibi, Gül de Efe gibi sayı ve sembol temsili kullanarak göz sayısını hesaplamaya çalışmıştır. Ayrıca köpeklerin gözlerini göstermek için köpeklerin yüzlerini çizerek resim temsilini kullanmıştır. İki tane köpek olduğu söylendiğinde Gül iki elinde iki parmağını açarak yan yana getirmiş, “*ikisini de birleştirirsek dört çünkü iki artı iki dört ettiği için dört oluyor*” ifadesini söylemiş ve “ $2+2=4$ ” matematiksel ifadeyi yazmıştır. Ardından üç tane köpek olduğunu varsayarak “2 2 2 5” yazmıştır. Bu ifadede üç tane ikinin olması üç köpek olduğunu ve 2 rakamı her köpeğin iki gözü olduğunu ifade etmektedir. Bu ifadeyi yazmasına rağmen Gül toplama yaparken iki köpeğin dört göz olduğunu ve bir köpek daha gelince dördü bir arttırarak beş göz olduğunu sözel olarak ifade etmiştir. Burada Gül bu iki niceliğin yani köpek ve göz sayılarının birbirinden ayrı olduğunu algılayamamış ve nicelikler arası ilişki kuramamıştır. Ardından üç tane köpek çizerek gözlerini saymış, altı göz olduğunu söylemiş ve 5’i 6’ya çevirerek yaptığı yanlış düzeltmiştir. Bir tane daha köpeğin geleceği söylendiğinde ise bir tane daha köpek çizerek sekiz göz olduğunu, tekrar bir tane daha köpek geldiğinde yine köpek ekleyerek toplam göz sayısının on olacağını söylemiştir. Bu sefer çizim yapmadan cevap vermesi istendiğinde ise köpek sayısı arttıkça göz sayısını birer arttırarak soruları cevaplamıştır. Görüldüğü gibi Gül soruyu sözel olarak cevaplayamamıştır. Ayrıca çizerek göz sayısını bulmaya çalıştığında ikişer toplama yapmadan doğrudan çizdiği gözleri sayarak soruyu cevaplamıştır. Bu durum Gül’ün göz sayıları arasındaki sabit terimin farkında olmadığını ve aynı zamanda nicelikler arası fonksiyonel ilişkiyi kuramadığını göstermektedir. Gül’e köpekler ve gözlerin nasıl değiştiği sorulduğunda “*çünkü onlarında gözü var, onlarınkini*

de birleştirtince onların gözünü de saydığımız için onlarla birlikte onlarda onların gözüyle birleşiyor” ifadesini kullanmıştır. Ardından Gül üç köpeğin altı ve dört köpeğin sekiz gözü olacağını söylemiş ancak nasıl yaptığını açıklamayı istendiğinde tekrarladığı için aklında kaldığı ve aklına başka da bir şey gelmediğini söylemiştir. Bu süreçte ilk başta Gül göz sayısını bir önceki terime iki ekleyerek buluyor gibi gözükse de sonda sabit farkı algılayamadığı ortaya çıkmıştır.

Taha ilk başta problemi Yasemin’le benzer şekilde cevaplamıştır. Başlangıçta ister bir tane ister iki tane ister üç tane köpek olsun köpeklerin her zaman iki tane gözü olacağını söylemiştir. Toplam köpek sayısının kaç tane gözü olacağı sorulduğunda ise Taha soruyu anlayarak önce bir köpeğin iki gözü olduğunu ifade etmiştir. Tablo 4.13’te görüldüğü gibi daha sonra resim temsilini kullanmış ve iki tane göz çizmiştir. Ardından “*Bir köpek daha gelirse kaç gözü olur?*” sorusuna önce “*üç*” yanıtını sözel olarak vermiş, ardından iki göz daha çizip sayarak dört olduğunu söylemiştir. Taha çizmeden devam ederek soruları sözel olarak cevapladığında ise bir köpek daha gelirse göz sayısının beş olduğunu ifade etmiştir. Aynı soru tekrarlanınca bu sefer göz sayısının altı olduğunu açıklamıştır. Görüldüğü gibi burada Taha her köpeğin iki tane gözü olduğunu ifade etse de soruyu sözel olarak cevapladığında göz sayılarını birer birer artırmıştır. Bu durum Taha’nın göz sayıları arasındaki sabit terimin farkında olmadığını ve aynı zamanda nicelikler arası fonksiyonel ilişkiyi kuramadığını göstermektedir. Sonrasında Taha probleme resim temsili kullanarak devam etmiştir. Üç köpek olursa göz sayısının kaç olacağı sorulduğunda aynı Duru’nun yaptığı gibi köpek sayısı ile göz sayısını ayırt edememiş ve önceden çizmiş olduğu dört gözün yanına üç tane daha göz çizerek üç köpeğin yedi tane gözü olacağını söylemiştir. Duru’dan farklı olarak Taha çizdiği gözlerden köpek sayısını bulmak için grupta yapamamış ve kaç tane köpek olduğunu bulamamıştır. Duru fazladan çizdiği tek kalan gözü fark ettiğinde yanına eksik olan gözü çizerek yanlısını düzeltmiştir. Taha ise Tablo 4.13’te gördüğümüz gibi sadece iki tane gözü ve tek gözü yuvarlak içine almış, düzenleme yapmamış ve yanlısını düzeltememiştir. Eksik çizdiği gözü tamamlamaması Taha’nın teklik çiftlik kavramlarını henüz yapılandırmamasının göstergesidir. Ayrıca Taha birinci soruda da tek ve çift sayı kavramını açıklayamamıştır. Burada Taha eksik olan grubu tamamlayamadığı için hikâye problemini çözememiştir.

Şekil 4.2’de görüldüğü gibi Melisa bu problemde çizim yapmamış ve iki köpeğin bile toplam göz sayısını bulamamıştır. Bir köpeğin iki gözü olduğunu ve iki köpeğin üç gözü

olduğunu söylemiştir. Somut nesne olarak kendisine verilen köpek resmine bakarak da iki köpeğin göz sayısını toplayamamıştır. Hatta araştırmacı gerçek örnek olarak kendisinin Melisa ile birlikte kaç gözü olduğunu sorduğunda üç cevabını almıştır. Melisa köpek resimleri üzerinden sayım yaparken önce iki tane gözü saymış ve ardından köpekleri saymaya başlamıştır. Melisa köpek ve göz sayılarını iki farklı nicelik olarak algılayamamış ve problemi çözmemiştir.

Şekil 4.2’de görüldüğü gibi, bu problem bağlamında “Yapısal Düşünme”nin alt boyutu olan “İşlemler ve Özellikleri” bileşeninin “Gruplama” ve “Sayılar ve İlişkiler” bağlamında “Tek/Çift” kavramlarına ilişkin birbiriyle ilişkili bulgular da elde edilmiştir. Gruplama yaparak fonksiyonel ilişki kurmaya çalışan çocukların aynı zamanda teklik çiftlik kavramlarına sahip oldukları söylenebilir. Gruplama stratejisini Kaan ve Duru kullanmıştır. Çocuklar bu problemi çözerken göz sayısı bilindiğinde köpek sayısını belirlemek için ikili gruplama yapmışlardır. Kaan gruplama yapmadan önce çizdiği noktaların göz sayısını mı yoksa köpek sayısını mı ifade ettiğini karıştırmıştır. Gruplama yaptıktan sonra *“Bir tane köpek olduğunda bir tane göz olmadığını fark ettim ... Mesela bir tane köpek var onun iki tane gözü var, iki tane köpeğin tam tamına dört gözü var, üç köpeğin altı”* ifadesini kullanarak iki farklı nicelik olduğunu belirtmiş, köpek ve göz sayıları arasında ayırım yapabilmiştir. Duru da benzer şekilde gruplama yapmadan önce nicelikler arası ilişki kurmakta zorlanmış ve köpekler birer arttıkça gözlerin ikişer arttığını algılayamamıştır. Ancak gruplama yaptıktan sonra yaptığı hatayı düzeltmiş ve köpek sayısı ile göz sayısını birbirinden ayırt edebilmiştir. Kaan ve Duru birinci araştırma sorusunda tek ve çift sayı kavramlarını kendilerine göre açıklamıştır. Bu da gruplama yapan çocukların teklik çiftlik kavramlarına sahip olduklarını göstermektedir. Ayrıca Taha tek çift sayıları yapılandırmaması sebebinden bu problemi çözmemiştir.

Bu süreçte çocukların analitik düşünme bağlamında köpek ve göz sayısını nasıl saydıkları da incelenmiştir. Bu süreçte birinci problem durumunda olduğu gibi Sanem, Kaan, Yasemin, Efe, Duru, Gül ve Taha köpek ve göz sayısını belirlemek için kardinal sayma yapmışlar. Ancak Sanem diğer çocuklardan farklı olarak köpek gözlerini saydığına doğrudan “iki, dört, altı, sekiz” şeklinde ikişer sayma da yapmıştır. Melisa sayma yaparken köpekler ile gözleri karıştırmış ve doğru şekilde sayma yapamamıştır.

Yapısal düşünmenin alt bileşeni olan “İşlemler ve Özellikleri”nin bu soru bağlamında “Toplama”, “Çarpma”, “Bölme” işleminin anlamı incelenmiştir (Bkz. Şekil 4.2). Bu

hikâye problemini çözerken çocuklar toplam göz sayısını bulmak için toplama işlemini yapmışlardır. Toplama yaparken Kaan “*ikisini de birleştirirsek dört*”, Duru “*birleştirirsek dört göz oluyor*”, Taha “*birleştirirsek mi?*” ifadelerini kullanmışlardır. Kaan, Duru ve Taha toplama işlemini “*birleştirme*” olarak ifade etmişlerdir. Sanem “*iki gözünün iki tane olup topladım*”, Yasemin ise “*heee toplama diyosun sen, iki iki daahaa dört, topluyorum*” ifadelerini kullanarak doğrudan toplama işlemi yaptıklarını ifade etmişlerdir. Yasemin toplama yaparken dört ile dördü, beş ile beşi parmaklarını açarak rahat bir şekilde toplamıştır. Ancak altı ile altıyı toplamak istediğinde parmakları yetmediği için zorlanmış ve araştırmacı tarafından fazladan iki parmak açılarak yardım edilmiştir. Efe ve Gül ise sayı ve sembol temsilini kullanarak toplama işlemine ait matematiksel ifadeleri yazmışlardır. Efe “*2+2 4*” ve “*3+3+3 6*” ifadelerinin de eşitlik sembolünü kullanmasa da “*2+2 4*” ifadesini yazıldığı gibi “*iki artı iki dört eder*”, “*3+3+3 6*” ifadesini ise “*üç köpeğin altı gözü var*” anlamında kullanmıştır. Efe düşündüklerini kendine has bir şekilde ifade etmiş ve açıklamıştır. Gül de düşündüklerini “*2+2=4*” ve “*2 2 2 6*” matematiksel ifadelerini kullanarak göstermiştir. “*2 2 2 6*” ifadesini “*iki artı iki artı iki altı olur*” anlamında kullanmıştır. Bu süreçte küçük çocukların toplamı 10’a kadar olan sayılarla toplama işlemi yapabildikleri görülmüştür. Ayrıca tüm çocuklar toplama yaparken toplananları bir araya getirip hepsini sayarak bu işlemi gerçekleştirmişlerdir. Bu şekilde “hepsini sayma” stratejisini kullanmışlardır. Aynı zamanda Yasemin göz sayısının köpek sayısının iki katı olduğunu düşünerek fonksiyonel ilişki kurmuş ve tekrarlı toplama yaparak “*2*n*” çarpma işlemini bilincinde olmadan yapmıştır. Ayrıca Sanem de tersten giderek göz sayısını ikiye bölerek köpek sayısını bulmuş ve fonksiyonel ilişkiyi bölme işlemi yaparak açıklamıştır.

“Analitik Düşünme” bağlamında “Eşitlik” sembolünün anlamını incelediğimizde bu süreçte bazı çocukların eşitliği bir işlem sonucu olarak algıladıkları görülmektedir. Yasemin, Efe ve Gül yaptıkları toplama işlemlerini sözel olarak açıkladıklarında eşitliği bir işlemin sonucu olarak ifade ettikleri söylenebilir. Örneğin, Gül doğrudan “*2+2=4*” ifadesinde eşitlik sembolünü kullanmış ve “*iki artı iki dört ettiği için*” şeklinde eşitliği bir işlem sonucu olarak açıklamıştır. Yasemin ve Efe ise doğrudan eşitlik sembolünü kullanmasalar da Yasemin’in “*beş, beş daha on ediyor*”, Efe’nin “*iki ayı iki döyt oluyov*” şeklinde açıklamalarıyla eşitliği bir işlem sonucu olarak algıladıkları söylenebilir.

Şekil 4.2’de görüldüğü gibi, “Gerekçelendirme”, “Genelleme Yapma” ve “Temsil Etme” cebirsel düşünmenin analitik düşünme, yapısal düşünme ve fonksiyonel düşünme alt bileşenlerinin hepsini bir bütün olarak birleştirmektedir. Bu problemde de küçük çocuklar hikâye problemi ile ilgili düşüncelerini çizimleriyle ifade etmişlerdir. Bu süreçte çizimlerinde resim, imge, sayı temsil biçimlerini kullanmışlardır. Çocukların hangi temsilleri kullandıkları Tablo 4.9, 4.10, 4.12, 4.13 altında örnekleri ile birlikte açıklanmış ve Şekil 4.2’de sunulmuştur.

Problem bağlamında çocuklar göz sayısının değişmediği yani her zaman bir köpeğin iki gözü olduğunu gerekçelendirmiş, göz sayısının ikişer değiştiği ve köpek sayısı değiştikçe göz sayısının da değiştiği şeklinde genellemeler yapmışlardır. Örneğin Sanem “*gözler iki tane olduğu için*” şeklinde göz sayısının her zaman iki olduğu gerekçesini sunmuş, göz sayısının ikişer değiştiğini ve köpek sayısının birer değiştiğinde gözlerin ikişer değiştiğini, yani ikisinin de birbirine bağlı olarak değiştiğini söyleyerek genelleme yapmıştır. Kaan “*Köpekler daha çoğalınca, gözler de daha çoğalıyor, daha da artıyor. Ama tek farkı ... çünkü köpek daha çoğalınca gözler iki tane daha çoğalır*” şeklinde açıklamasıyla, köpekler çoğalınca gözlerin de çoğaldığını ve köpeklerin bir tane çoğaldığında gözlerin iki tane çoğaldığını yani ikişer arttığını söyleyerek genellemeye ulaşmıştır. Kaan köpeklerinin hepsinin iki gözü olduğu “*gözü olmasaydı çoğalmazdı ama gözü olduğu için çoğalıyor*” şeklinde gerekçelendirerek genelleme yapmıştır. Yasemin ise “*Çünkü tek tek geliyorlar. Göz sayısı değişmiyor*” ifadesiyle her köpeğin göz sayısının değişmediğini ve dünyada öyle olduğunu gerekçelendirmiş, bizim toplama yaptığımız için toplam göz sayısının değiştiğini genelleyerek vurgulamıştır. Efe toplam göz sayısının kelime olarak “*ikişer*” değiştiğini söylememiş olsa da her seferinde köpek sayısı arttıkça toplam göz sayısını iki arttırmıştır. Köpeklerin iki gözü olduğu için toplam göz sayısının bu şekilde arttırdığını gerekçelendirmiştir. Efe her seferinde bilinçli şekilde toplam göz sayısını ikişer arttırdığı için bunu “*ikişer değişiyor*” şeklinde sözel olarak ifade etmese de yaptıkları işlemleriyle genelleme yaptığını göstermiştir. Duru ise “*köpekler geldikçe gözlerin çoğaldığını*” ifade etmiş ve ikisinin de birbirine bağlı olarak çoğaldığını genellemiştir. Aynı zamanda Duru gruptan yaptıktan sonra ikişer sayma yaparak toplam göz sayısını doğru şekilde belirleyebilmiştir. Ancak bu yaptıklarına hiçbir gerekçe sunmadığı için toplam göz sayısının ikişer değiştiğine yönelik bir genellemeye ulaşamamıştır. Herhangi bir genellemeye ulaşamayan çocuklar da (Melisa, Gül, Taha) olmuştur. Örneğin, Taha köpeklerin hep iki gözü olduğunu söylemiş ancak bunu gerekçe

olarak kullanamamış, sabit farkı algılayamadığı için bunu kullanarak toplam göz sayısını bulamamıştır.

4.3 Çocukların Üçüncü Probleme İlişkin Yanıtlarından Elde Edilen Bulgular

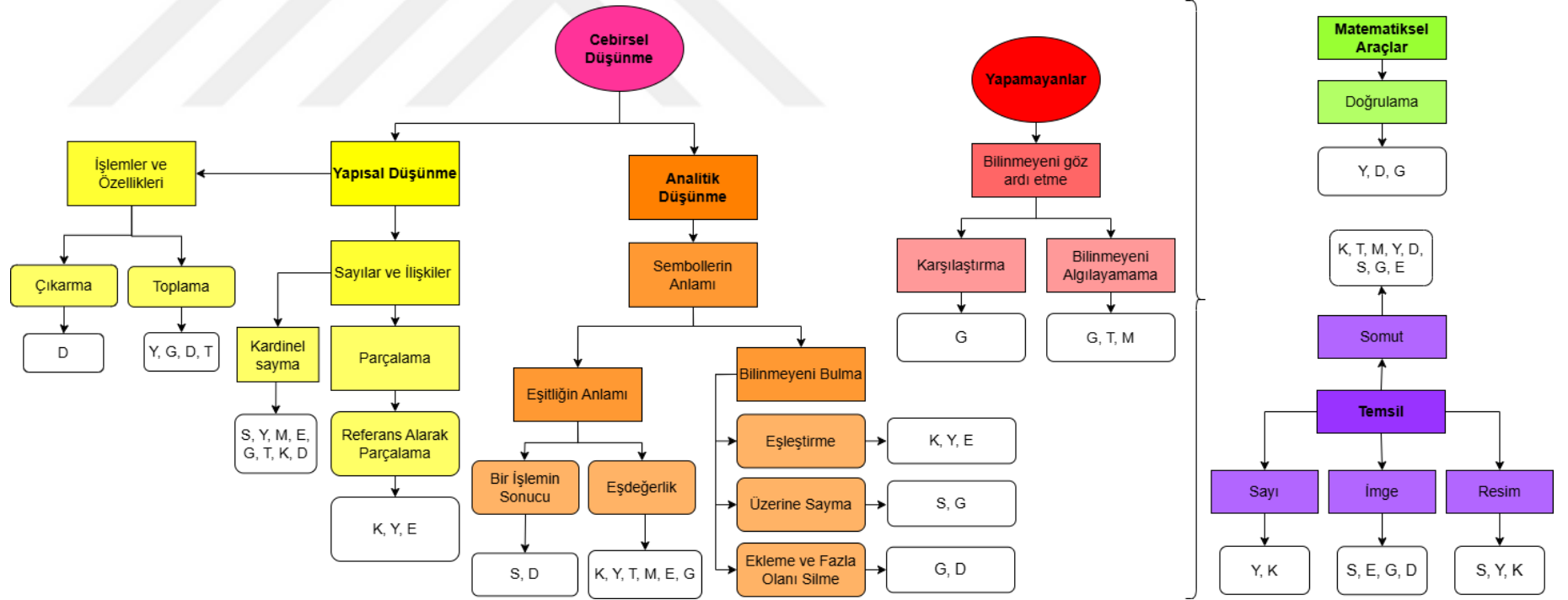
Üçüncü hikâye probleminde “Resimde iki tane çocuk görüyoruz. Bu pembe kazaklı, siyah saçlı kız Sude’dir. Sarı tişörtlü, siyah saçlı erkek ise Mete’dir. Sude ve Mete yakın arkadaşlardır. Onlar şeker yemeyi çok seviyorlar. Sude’nin 6 tane şekeri varmış. Mete’nin ise bir kutu şekeri varmış. Annesi Mete’ye 2 tane daha şeker vermiş. Artık Sude ile Mete’nin aynı sayıda şekerleri olmuş. Buna göre;

- a) Mete’nin şeker kutusunda kaç tane şekeri vardır?
- b) Kutudaki şekerlerin sayısını nasıl buldun?
- c) Böyle olduğunu nasıl anladın?

sorularına katılımcıların verdiği yanıtlar ve çizimler incelenmiştir ve bulgular Şekil 4.5’de sunulmuştur. Bu süreçte ilk önce araştırmacı tarafından aşama aşama problem okunurken çocuklarla birlikte somut temsiller kullanılarak problem yapılandırılmıştır. İlk önce problemin ana karakteri hakkında konuşulmuştur. Ardından araştırmacı problemi okudukça çocuklar somut nesnelerle durumu yapılandırmıştır. Örneğin, araştırmacı Mete’nin altı tane şekeri olduğunu söylediğinde çocuklar Sude’ye altı tane şeker vermiştir. Ardından çocuklara araştırmacı tarafından Mete’nin bir kutu şekeri olduğu söylenince kutu; sonra annesinin ona iki tane daha şeker verdiği söylenince iki tane şeker daha Mete’nin resmi altına yerleştirmiştir. Çocuklar sözel olarak problemi çözmüş ve nasıl yaptıklarını ve ne düşündüklerini çizim yapraklarında resim, imge, sayı ve sembol temsillerini kullanarak açıklamıştır. Çocuklar son soruda sürecin nasıl ilerlediğini artık bildikleri için düşündüklerini anlatmak için çizmeye başlamıştır. Bu problemi çözmede zorlanan çocuklar ise çizim yapmak istememiş ve sadece somut nesneler kullanarak soruyu çözmeye çalışmıştır.

Şekil 4.5

Üçüncü Soruya İlişkin Bulgular



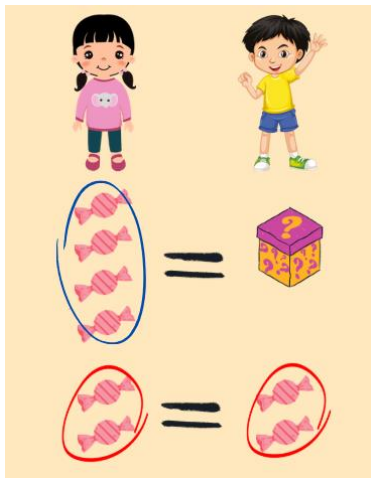
Bu problemle küçük çocukların cebirsel düşünmenin alt bileşeni olan “Yapısal Düşünme” ve “Analitik Düşünme” bileşenlerini incelemek amaçlanmıştır. Problem bağlamında Şekil 4.5’de görüldüğü gibi yapısal düşünme “Sayılar ve İlişkiler”, analitik düşünme ise “Eşitliğin Anlamı” ve “Bilinmeyen Bulma” alt başlıkları altında ele alınmıştır.

Bu hikâye problemi cebirsel olarak “ $x+2=6$ ” şeklinde ifade edilebilir ve çocuklardan bu denklemin çözümünde x bilinmeyenini bulmaları beklenmektedir. Şekil 4.5’de görüldüğü gibi bilinmeyen bulmaya çalışırken çocuklar “Eşleştirme”, “Üzerine Sayma”, “Ekleme ve Fazla Olanı Silme” şeklinde üç strateji kullanmışlardır.

Eşleştirme stratejisi çocukların denklemin sol tarafıyla sağ tarafını eşleştirerek bilinmeyen bulmaları şeklinde açıklanabilir. Yani “ $x+2=6$ ” ifadesini “ $x+2=4+2$ ” şeklinde düzenleyerek x ’le 4’ü ve 2 ile 2’yi eşleştirip bilinmeyen bulmaları şeklinde açıklanabilir. Burada çocukların eşleştirme yapmadan önce “ $x+2$ ” ifadesinde olan 2’yi referans alarak altı tane şekeri iki ve dört olacak şekilde parçalamaları gerekmektedir. Bu yüzden eşleştirme stratejisini kullanan çocuklar aynı zamanda yapısal düşünmenin parçalama yapma eyleminin alt bileşeni olan “Referans Alarak Parçalama” stratejisini kullanmış olmaktadır. Diğer yandan analitik düşünmenin bir alt boyutu da “Eşitliğin Anlamı”dır. Eşleştirme stratejisini kullanan çocukların aynı zamanda eşitliğin “Eşdeğer” anlamının da farkında oldukları dikkate alınmıştır. Eşleştirme” stratejisinin tasviri Şekil 4.6’da verilmiştir.

Şekil 4.6

“Eşleştirme” Stratejisinin Tasviri



“Üzerine Sayma” stratejisi bilinen “toplanan”ın üzerine belli olan “toplam”a ulaşana kadar sayarak kaç sayma yapıldığına bakılarak bilinmeyen “toplanan”ı bulma şeklinde

açıklanabilir. Bu soru bağlamında üzerine sayma stratejisi çocukların bilinmeyenin 4 olduğunu 2'nin üzerine 6'ya ulaşana kadar 3, 4, 5, 6 olacak şekilde dört sayma yaparak bulmaları şeklinde açıklanabilir. “Üzerine Sayma” stratejisi ilkökul 1. sınıf öğrencilerine öğretilen yollardan biridir. Şekil 4.7’de ders kitabından bu stratejiye ilişkin bir örnek sunulmuştur.

Şekil 4.7

İlkokul 1. Sınıf Kaynaklarında “Üzerine Sayma” Stratejisi

MATEMATİK

VERİLMEYEN TOPLANANI BULMA

$3 + \square = 12 \rightarrow 3'e \text{ kaç eklersek } 12 \text{ eder?}$

3'ün üzerine 12 sayısına kadar birer sayalım.

3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12

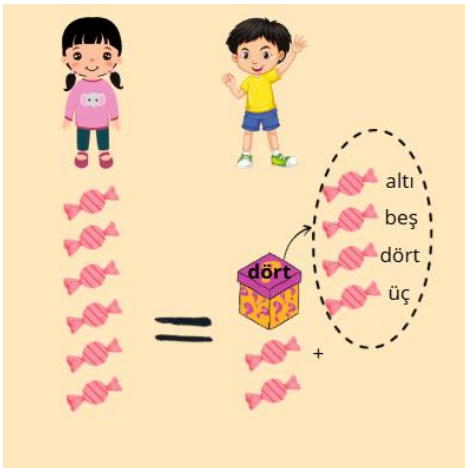
12'ye ulaşmak için 9 sayı söyledik. $\rightarrow 3 + 9 = 12$

ÖNEMLİ BİLGİ

Küçük çocuklar henüz öğrenmeseler bile mantıksal akıl yürüterek bu stratejiyi kullanabilmişlerdir. Şekil 4.8’de “Üzerine Sayma” stratejisinin bu soru bağlamında tasviri sunulmuştur.

Şekil 4.8

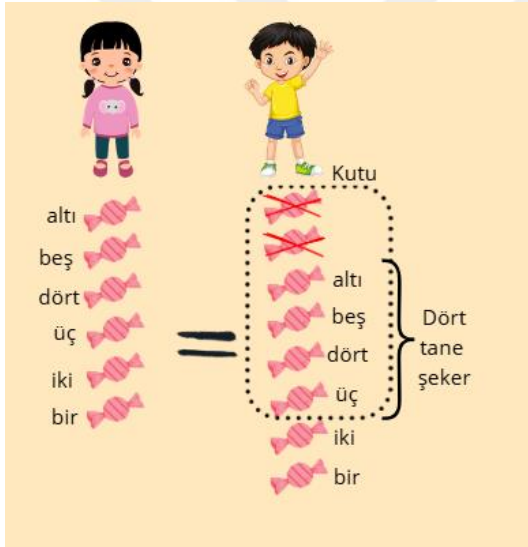
“Üzerine Sayma” stratejisinin tasviri



“Ekleme ve Fazla Olanı Silme” stratejisi bilinmeyeni önce tahmin etme ve sonrasında düzenleme yaparak bulma şeklinde açıklanabilir. Bu stratejiyi kullanan çocukların aslında deneme-yanılma yoluyla bilinmeyeni bulmaya çalıştıkları da söylenebilir. Problem bağlamında çocuklar kutuda olan şeker sayısını tahmin edebilmiş ve toplam şeker sayısını eşitlemek için fazla olan şekerleri çıkartmışlardır. Bu düşünce cebirsel olarak şu şekilde ifade edilebilir: Varsayalım ki $x+2 = 6$ cebirsel ifadesinde $x = 5$ olsun. Bu durumda $5 + 2 = 6$ eşitliği yazılır. Toplama işlemi sonucunda $7 = 6$ eşitliğinde sol taraf sağ taraftan $6+1 = 6$ bir fazla olduğu için tahmin edilen sayı bir eksiltir. Buradan $x = 4$ bulunur. “Ekleme ve Fazla Olanı Silme” stratejisinin tasviri Şekil 4.9’da sunulmuştur.

Şekil 4.9

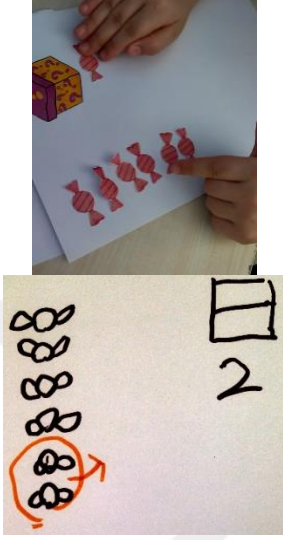
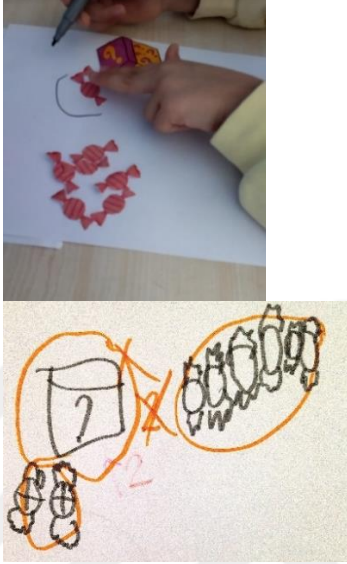
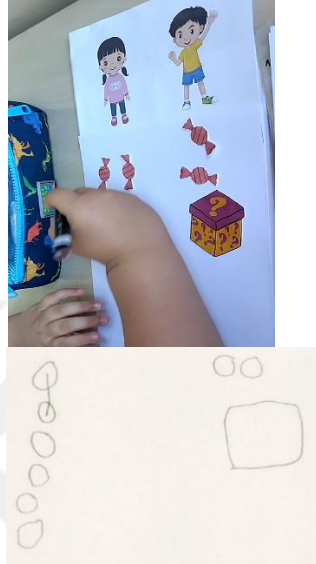
“Ekleme ve Fazla Olanı Silme” stratejisinin tasviri



Eşleştirme stratejisini kullanan Kaan, Yasemin ve Efe’nin örnekleri Tablo 4.14’de sunulmuştur.

Kaan problemi somut nesnelerle yapılandırdıktan sonra Tablo 4.14’de görüldüğü gibi her iki tarafta olan iki şekerini eşdeğer tutmuştur. Kaan Mete’nin iki şekerini referans alarak altı şekerden ikisini eliyle ayırmış ve kutunun içinde dört tane şeker olduğunu söylemiştir. Nasıl yaptığı anlatmak için resim ve sayı temsili kullanarak çizmeye başlamıştır. İlk önce altı tane şeker çizmiş, ardından bir kutu çizmiş ve kutu dışında olan iki şekerini sayı ile göstermiştir. Mete’nin iki tane şeker olduğu için Sude’nin altı tane şekerinden ikisini aynı şekilde eliyle kapatmış ve geri kalan dört tane şekerini sayarak ikisinin de eşit sayıda şeker olması için kutunun içinde dört tane şeker olması gerektiğini ifade etmiştir.

Tablo 4.14*Eşleştirme Stratejisi Örnekleri*

Eşleştirme		
Kaan	Yasemin	Efe
		
Resim, Sayı ve Somut Temsil	Resim, Sayı ve Somut Temsil	İmge ve Somut Temsil

Kaan Mete'nin kutu dışında iki tane şeker olduğu için Sude'nin iki tane şekerini yok saydığını vurgulamıştır. Mete'nin altı tane şekerini Sude'nin iki şekerini referans alarak altıyı 2-4 şeklinde parçalamıştır. Ardından Sude'nin iki şekerleriyle Mete'nin iki şekerini eşleştirerek, Sude'nin kalan dört şekerleriyle de Mete'nin kutusunu eşdeğer tutmuştur. Buradan yola çıkarak kutunun içinde dört tane şeker olduğunu söylemiştir. Kaan düşündükleri aşağıdaki diyalogda örnek olarak sunulmuştur:

K: Burda iki tane var (6 tane şekerin ikisini eliyle kapattı, geri kalanları saydı) bir iki üç dört, kutunun içinde tam tamına dört tane şeker olması gerekiyor. Çünkü burada (Mete'de) iki tane var, bunları (altı şekerden ikisini) yok saydım. Çünkü bunu bunla eşit koydum (ikişer şekerleri gösteriyor) Bunlar kutunun... bunları da saydım... eşit emmm.. bunları da sayınca, onun içinde gibi düşündüm (kutuyu gösteriyor), oyle yapınca da aynı gibi oldu.

A: Nasıl yaptığını gösterebilir misin?

K: Bu ikisini (yuvarlak içine aldı ve ok çizdi) bunları da sayınca (6 tane şeker) iki tane çıkartıyorum. Bununla bunun (sol ve sağda olan iki şeker) eşit olmasını istedim. Ve bunu da (4 tane şeker) bunun içine koyunca eşit oluyor çünkü bunlarla eşit olması gerekiyor. Çünkü bunu bunla eşit koydum (ikili şekerleri). Bunlar (kalan dört şeker) kutunun içindekiler...

Diyalogda görüldüğü gibi Kaan'ın "...bunun (sol ve sağda olan iki şeker) eşit olmasını istedim. Ve bunu da (4 tane şeker) bunun içine koyunca eşit oluyor çünkü bunlarla eşit olması gerekiyor..." şeklindeki açıklamaları eşitliğin anlamını "Eşdeğerlik" olarak yorumladığının bir göstergesidir. Kaan kutunun içinde dört şeker olduğunu "*sayınca iki tane çıkartıyorum*" şeklinde denklemin her tarafından iki şekerini eksilterek bulmuştur. Kaan Tablo 4.14'de görüldüğü gibi düşüncelerini açıklarken çizimlerinde doğrudan şeker çizerek resim temsilini ve sayı temsilini kullanmıştır. Mete'nin iki tane şekerini yuvarlak içine alıp ok çizmiş ve Sude'nin 2 rakamı ile gösterilen iki şeker ile eşdeğer olduğunu vurgulamıştır. Kaan'ın çizimleri referans alarak parçalama yaptığını ve eşleştirme stratejisi kullandığını yansıtmaktadır.

Yasemin de Kaan gibi soruyu yapılandırdıktan sonra soruyu sözel olarak "*iki tane şekerini kullanmazsam, bu kutunun içinde dört tane şeker olur*" şeklinde cevaplamıştır. Tablo 4.14'de görüldüğü gibi Mete'nin kâğıttan olan iki şekerini kalemiyle yuvarlak içine alarak bu iki tane şeker referans aldığını göstermiştir. Ardından Yasemin resim ve sayı temsilini kullanarak çizime başlamıştır. Problem durumunu çizdikten sonra neden kutunun içinde dört şeker olduğunu ve bunu nasıl anladığını çizimi üzerinden anlatmaya başlamıştır. Yasemin Sude'nin altı şekerinden iki tanesini geçerek saymaya başlamış ve kalan şekerleri sayarak kutuda dört şeker olduğunu söylemiştir. Mete'nin iki tane şeker olduğu için Sude'nin de iki tane şekerini kullanmadığını ve iki şekerle kutudaki şekerleri toplayınca altı şeker olduğunu vurgulamıştır. Yasemin Sude'nin altı tane şekerini Mete'nin iki şekerini referans alarak 2-4 şeklinde parçalamış ve ikili şekerlerin aynı olduğunu dikkate alarak Sude'nin kalan dört şekerleriyle Mete'nin kutusunun eşdeğer olduğunu anlamıştır. Sonrasında kutunun içinde dört şeker olduğunu düşünerek toplam şeker sayısını bulmuş ve ikisinin de altı olduğunu kontrol ederek cevabını doğrulamıştır. Yani Yasemin $x=4$ cevabını $x+2=6$ denkleminde uygulayarak $2+4=6$, $6=6$ şeklinde doğrulama yapmıştır. Yasemin'in düşünceleri aşağıdaki diyalogda örnek olarak sunulmuştur:

Y: Bu kutunun içinde dört tane şeker var.

A: Nasıl yaptın? Ne düşündüğünü anlatabilir misin?

Y: Evet, İki tane Mete'de var, iki tanee ... iki taneyi geçiyorum. Şimdi iki taneyi kullanmıyorum.
Bir iki üç dört. Dört.

A: Neden iki taneyi kullanmıyorsun?

Y: İki tane almıyorum çünkü burada (Mete'de) iki tane olduğu için burada da iki tane var (Sude'de). Şimdi iki tane şeker bunu da ekliyoruz, kutuyu, oluyor altı sonra da eşit olmuş oluyor.

Diyalogda görüldüğü gibi Yasemin'de eşitliği eşdeğerlik fikri ile açıklamaktadır. Ayrıca *“iki tane şeker bunu da ekliyoruz, kutuyu, oluyor altı”* ifadesi aynı zamanda eşitliği bir işlemin sonucu olarak algıladığını da göstermektedir. Yasemin'in üç problemin üçünde de bu fikre sahip olduğu Şekil 4.1, 4.2, 4.3'te görülmektedir. Ardından Yasemin Mete'nin kutusunda dört tane şeker olduğunu, iki tane şeker kutuya sığmadığı için onları elinde tuttuğunu söylemiş ve iki rakamını yazıp üzerini çizmiştir. Bunu iki tane şekerin kutuya sığmadığını göstermek için yazdığını açıklamıştır. Yasemin Tablo 4.14'de verilen çiziminde şeker çizerek resim ve sayı temsili kullanmıştır.

Efe problemi somut nesnelerle yapılandırdıktan sonra *“şimdi Mete'nin iki tane var”* diyerek Sude'nin altı şekerinden ikisini eliyle ayırmış ve geri kalan dört şeker sayarak kutuda dört tane şeker olduğunu söylemiştir. Ardından nasıl yaptığını anlatmak için çizmeye başlamış ve verilenleri çizdikten sonra altı tane şekerin içinde de iki olduğunu söylemiş ve iki tane şekerin üstünü çizerek geride kalan dört şeker sayarak kutuda dört tane şeker olduğunu ifade etmiştir. Efe altı şeker 2-4 şeklinde parçalamış ve eşdeğerliği dikkate alarak bilinmeyi bulmuştur. Efe düşündüklerini şu şekilde açıklamıştır:

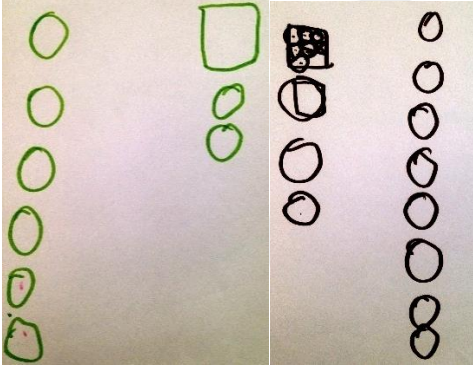
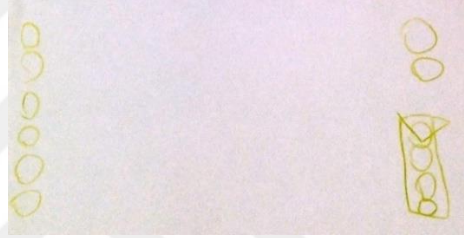
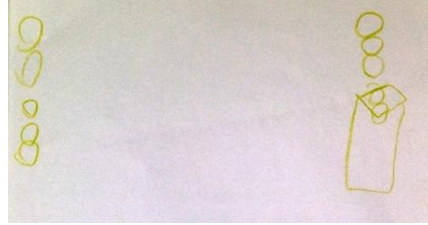
Efe: Ama ilk bunu saymam gerekiyor (6 tane şeker gösteriyor). Bunda iki (Mete'nin iki şekerini gösteriyor). Bunun başlamı da iki (6 tane şekerin en üst iki şekerini gösteriyor ve geri kalanları sayıyor). O yüzden dört olması gerekli. Çünkü buraları saydım, dört bu. Bunun içinde de dört.

Diyalogda görüldüğü gibi Efe ikiyi referans olarak parçalama yaptığını *“bunun başlamı (6 şekerin ikisini gösteriyor) da iki”* cümlesiyle ifade etmiştir. Efe çizimlerinde yuvarlak ve dörtgen çizerek imge temsili kullanmıştır (Tablo 4.14).

Şekil 4.5'te görüldüğü gibi, bilinmeyi bulma sürecinde Duru “Ekleme ve Fazla Olanı Silme” stratejisini, Gül ise “Üzerine Sayma”, “Ekleme ve Fazla Olanı Silme”, “Karşılaştırma” stratejilerini kullanılmıştır. Duru ve Gül'ün bu stratejilere ilişkin örnekleri Tablo 4.15'te sunulmuştur.

Tablo 4.15

Duru ve Gül'ün örnekleri

Ortak strateji: Ekleme ve Fazla Olanı Silme	
Duru	Gül
	
	“Karşılaştırma”
	
“Ekleme ve Fazla Olanı Silme”	“Ekleme ve Fazla Olanı Silme”
	
	“Üzerine Sayma”

İmge ve Somut Temsil

Tablo 4.15’te görüldüğü gibi, Duru problemi yapılandırdıktan sonra her taraftan iki şekeri eliyle kapatmış ve geri kalan dört şekeri sayarak kutunun içinde dört şeker olması gerektiğini söylemiştir. İlk bakışta Duru’nun “*bunları yok saydım*” ifadesinden referans alarak parçalama yaptığı düşünülse de neden iki tane şekeri yok saydığı sorulduğunda bu bağlamda gereken açıklamaları verememiştir. Nasıl anladığı sorulduğunda Duru aşağıda sunulan diyalogdaki gibi açıklama yapmıştır:

D: Dört

A: Nasıl anladım?

D: Bunları yok saydım (*eliyle 6 tane şekerin ikisini kapatıyor*) ve bunları sayınca o kadar oldu.

A: Neden yok saydın?

D: Çünkü o zaman hepsini sayınca bir iki üç dört beş altı, altı tane şekeri olmuş oluyor.

A: Neden üç tane değil de, iki tane yok saydın?

D: Eğer üç tane olsaydı (altı şekerden üçünü ayırdı ve geri kalan üç şekeri saydı), üç tane vermiş olup da (şekerin içinde üç olduğunu varsaydı) bir iki üç dört beş, Mete'nin beş tane olmuş olurdu.

Diyalogda görüldüğü gibi Duru'ya neden iki tane şekeri yok saydığı sorulduğunda eşdeğerlikten bahsetmemiştir. Duru neden üç tane şeker değil de iki tane şekeri yok saydığını açıklamak için Sude'nin altı şekerinden üçünü eliyle ayırmıştır. Ardından geri kalan üç şekerin kutuda olduğunu varsaymış ve zihninden toplayarak kutunun içinde toplam beş şeker olacağını söylemiş ve bu şekilde cevabını doğrulamıştır. Ardından Tablo 4.15'te görüldüğü gibi problem durumunu yuvarlak ve dörtgen imgelerini kullanarak çizerek anlatmaya başlamıştır. Duru problemde verilenleri çizdikten sonra çizimine bakıp kutunun içinde dört tane şeker olduğunu söylemiştir. Duru *“bunları şimdide kafamda yok saydım ve dört tane olmasını diledim, şunun ikisini yok saydım (altı şekerden ikisini pembe kalemle işaretledi)”* şeklinde açıklama yaparak Sude'nin altı şekerinden ikisini pembe kalemle işaretlemiş ve geri kalan dört şekeri sayarak kutunun içinde dört şeker olduğunu ifade etmiştir. Nasıl anladığını açıklamak için de kutunun içinde dört şeker olduğunu düşünerek toplam altı şeker olduğunu söylemiş ve bulduğu cevabı doğrulamıştır. Duru kutuda dört tane şeker olduğunu varsaymış ve bu tahmini doğrulamıştır. Duru'nun nasıl düşündüğünü daha iyi anlayabilmek için problem farklı sayılar kullanılarak tekrar sorulmuştur. Bu sefer Duru'dan $x + 3 = 8$ denkleminde x bilinmeyenini bulması istenmiştir. Duru'nun yeni soruyu bir önceki problemle karıştırmaması için farklı isimler kullanılmıştır. Problem “Nilay'ın 8 tane şekeri vardır. Murat'ın ise bir kutu şekeri vardır. Annesi Murat'a 3 tane daha şeker vermiştir. Artık Murat ile Nilay'ın aynı sayıda şekerleri olmuştur. Sence kutunun içince kaç şeker vardır?” şeklinde düzenlenmiştir. Duru verilenleri çizdikten sonra kutunun içerisine yedi tane şeker çizmiştir (Tablo 4.15). Ardından toplam şeker sayısını kutunun dışında olan şekerlerden başlayarak saymaya başlamış ve sekize ulaştığında saymayı durdurmuştur. Fazla olan iki şekeri karalamış ve kutuda beş tane şeker olduğunu deneme-yanılma yolu ile bulmuştur. Duru yaptıklarını şu şekilde açıklamıştır:

Duru: Burda (Nilay'da) sekiz tane vardı. (Kutunun içine yedi tane şeker çizdi) Bir iki üç dört beş altı yedi sekiz, bunları yok sayalım çünkü çok fazla oldu (fazla olanları karaladı), bir iki üç dört beş altı yedi sekiz. Kutunun içinde bir iki üç dört beş.

Duru'nun problemleri çözerken eşitliğin anlamını “Bir İşlemin Sonucu” olarak algıladığı söylenebilir. Tablo 4.15’de görüldüğü gibi Duru problemleri çözüm sürecinde yaptığı çizimlerde şekerleri yuvarlaklarla ve kutuyu dörtgenle göstererek imge temsilini kullanmıştır.

Şekil 4.5’de görüldüğü gibi, Gül ilk başta somut nesneleri kullanarak bilinmeyi algılayamamış ve hatalı olan “Karşılaştırma” stratejisini kullanmış, ardından çizimlerinde “Ekleme ve Fazla Olanı Silme” ve “Üzerine sayma” stratejilerini kullanmıştır. Gül başlangıçta problemi çözmekte zorlanmış, bilinmeyi algılayamamıştır. Hatalı bir strateji olan bu strateji bilinmeyen algılanamadığı, $x + 2 = 6$ denkleminde doğrudan $x = 6$ olduğunun düşünülmesi şeklinde açıklanabilir. Bu strateji çocukların Mete ve Sude’nin eşit sayıda şeker olduğundan yola çıkarak Mete’nin iki tane şekerini görmezden gelerek kutudaki şeker sayısını altı ile eşleştirmeleridir. Somut nesnelerle problemi yapılandırdıktan sonra Gül de bu düşünceyle Mete ve Sude’nin şekerler sayıları eşit olduğu için kutunun içinde de altı şeker olduğunu söylemiştir. Gül somut temsil kullanarak problemi çözmeye başlamış ve aşağıda sunulan diyalogdaki soruları cevaplamıştır:

A: Bu kutunun içinde kaç tane şeker var?

G: Altı. Çünkü bunda altı var, bunda da altı olursa olur.

A: Burda altı olursa Mete’nin kaç şeker olur?

G: Altı

A: Bunlarda var ama, onları da dikkate almamız lazım (2 tane şeker) bunun içinde 6 tane varsa, birde burda iki tane var. Kaç şeker olur?

Gül: Altı

Ardından biraz daha düşünerek “Karşılaştırma” stratejisini kullanarak problemi çözmeye çalışmıştır (Tablo 4.15). Gül Sude’nin somut şekerinden birini Mete’ye vermiştir. Sude’nin beş, Mete’nin ise üç şeker olmuştur. Sonrasında tekrar Sude’nin şekerlerinden birini Mete’ye vermiş ve ikisinin de dört şeker olmuştur. Gül yaptıklarını aşağıdaki gibi açıklamıştır:

Gül: Bunda 5 oldu, bunda 3 oldu. Bir tane daha koydum bunda 4 oldu, bunda da 4 oldu. Bir iki üç dört, bir iki üç dört. İkisi de eşit oldu.

Açıklamasında da görüldüğü gibi, Gül somut nesneleri kullandığında bilinmeyi görmezden gelerek karşılaştırma yapmış ve problemi doğru cevaplayamamıştır. Daha

sonra şekerlerin yerlerini değiştirmemesi gerektiği söylendiğinde ise Gül çizerek tekrar problemi çözmeye başlamış, verilenleri çizdikten sonra deneme yanılma yoluyla bilinmeyi bulmaya çalışmıştır. Gül ilk başta kutunun içinde üç tane olduğunu tahmin etmiş ve kutunun içine üç şeker çizmiştir. Ardından şekerleri toplamış ve eksik olduğunu görünce bir tane daha şeker eklemiştir. Gül düşündüklerini şu şekilde açıklamıştır:

Gül: Şimdi burada üç tane var. Burdada iki artı üç heee bir tane daha olucak altı olucak. Bir iki üç dört beş altı, bir iki üç dört beş altı ... oldu.

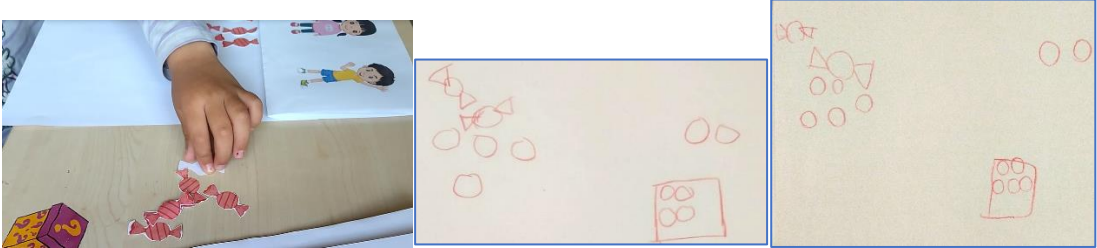
İlk başta bilinmeyi göz ardı ettiği için bir daha yapabileceğinden emin olmak için aynı problem “Gül’ün 5 tane şekeridir. Murat’ın ise bir kutu şekeridir. Annesi Murat’a 3 tane daha şeker vermiştir. Artık Murat ile Gül’ün aynı sayıda şekerleri vardır. Sence kutunun içinde kaç şeker vardır” şeklinde düzenlenerek Gül’e tekrar sorulmuştur. Bu sefer de Gül Tablo 4.15’te verilen çiziminde “Üzerine Sayma” stratejisi kullanmıştır. Gül Murat’ın üç şekerini geçerek 3’ün üzerine 5’e ulaşana kadar “dört, beş” şeklinde sayma yapmış ve kutunun içine iki tane şeker eklemiştir. Ardından ikisinin de beş olduğunu saymış ve cevabını doğrulamıştır. Gül ilk başta somut nesnelerle problemi çözerken bilinmeyi göz ardı ederek karşılaştırma yapmış ve bilinmeyi algılayamadan doğrudan kutunun içinde altı şeker olduğunu söylemiştir. Sonrasında çizerek problemi çözdüğünde yanlışını düzelterek deneme yanılma yoluyla bilinmeyi bulmaya çalışmış ve “Ekleme ve Fazla Olanı Silme” stratejisini kullanmıştır. Son olarak da “Üzerine Sayma” stratejisini kullanarak bilinmeyi bulmuştur. Problem çözümleri incelendiğinde Gül’ün eşitliği altı eşit altı gibi “Eşdeğerlik” fikri ile anlamlandırdığı görülmektedir. Gül kullandığı stratejiler ile problemleri çözme sürecinde hem somut temsil hem de çizimlerinde yuvarlak ve dörtgen çizerek imge temsili kullanmıştır.

Şekil 4.5’te görüldüğü gibi “Üzerine Sayma” stratejisini Sanem ve Gül kullanmıştır. Gül’ün yaptıkları Tablo 4.15’te sunulmuş ve tablonun altından incelenmiştir.

“Üzerine Sayma Stratejisini” kullanan Sanem’in örnekleri Tablo 4.16’da sunulmuştur.

Tablo 4.16

Üzerine Sayma Stratejisi Örnekleri

Üzerine Sayma	
Sanem	
	
Resim, İmge ve Somut Temsil	

Sanem problem durumunu “ $2 + \square = 6$ ” şeklinde düşünerek bilinmeyeni bulmak için üzerine sayma stratejisini kullanmıştır. Somut nesnelerle problemi yapılandırdıktan sonra Sanem biraz düşünüp zihninden sayarak “*altı, iki...(düşünüyor) dört tane*” ifadesiyle kutunun içinde dört tane şeker olduğunu söylemiştir. Ardından dört şeker olduğunu nasıl anladığını “*altı, iki... sayarak, burda 6 tane olduğu için, eşit olması için saydım*” şeklinde açıklamış ve çizmeye başlamıştır. Problemi çizdikten sonra Sanem Mete’nin iki şekeri üzerine saymaya başlamış ve her sayım yaptığında parmaklarını kullanmıştır. Altıya ulaşana kadar “*üç, dört, beş, altı*” şeklinde dört sayma yapmış ve dört parmağını açmıştır. Sonrasında kutunun içine dört tane şeker çizmiş ve kullandığı stratejiyi de aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

Sanem: İki (Mete’nin şekerlerini gösteriyor ve parmaklarını açarak 2’nin üzerine sayıyor ve 4 parmak açıyor) üç, dört, beş, altı. Böyle saydım. 4 parmak açtım. Burada 6 tane olduğu için, burada da iki tane olduğu için yaptım. (*Kutunun üstüne göstererek*) üç, dört, beş, altı. Dört tane

Sanem birinci problemde parçalama eyleminde başarılı olduğu için problemin çözümünde eşleştirme stratejisini kullanacağı beklenmiştir. Bu nedenle daha derinlemesine inceleme yapmak için yeni bir problem bağlamı oluşturulmuş ve problem “Ela’nın 7 tane şekeri vardır. Murat’ın ise bir kutu şekeri vardır. Annesi Murat’a 2 tane daha şeker vermiştir. Artık Ela ile Murat’ın aynı sayıda şekerleri vardır. Sence kutunun içinde kaç tane şeker vardır?” şeklinde düzenlenmiştir. Sanem’in yeni problemi bir önceki problemle karıştırmaması için farklı isimler kullanılmıştır. Sanem problemi çizdikten

sonra yediye ulaşana kadar ikinin üzerine sayma yapmış ve “*üç, dört, beş, altı, yedi. 5 tane olucak*” şeklinde cevaplamıştır. Sanem bu problemi de üzerine sayma stratejini kullanarak çözmüştür. Her iki problem durumunda Sanem’in de Duru gibi eşitliğin anlamını “Bir İşlemin Sonucu” olarak algıladığı görülmektedir. Tablo 4.16’de görüldüğü gibi Sanem çiziminde doğrudan şeker çizerek resim ve yuvarlak ve dörtgen çizerek imge temsillerini kullanmıştır.

Gül ilk başta somut nesneler kullandığında bilinmeyi göz ardı ederek karşılaştırma stratejisini kullanmış ancak problemi çözememiştir. Şekil 4.5’de görüldüğü gibi, Melisa ve Taha da problemi çözmekte zorlanmış ve çözüme ulaşamamışlardır. Bu süreçte Taha ve Melisa sadece somut nesneleri kullanarak soruyu çözmeye çalışmışlardır (Bkz. Tablo 4.17).

Tablo 4.17

Bilinmeyi algılamayanların örnekleri

Bilinmeyi algılayamama	
Melisa	Taha
	
Somut Temsil	

Çocuklar aynen Gül’de olduğu gibi bilinmeyi algılayamamış, Mete ve Sude’nin şeker sayılarının eşit olduğu düşüncesinden hareketle ikisi de kutunun içinde altı şeker olduğunu vurgulamışlar. Melisa soruyu yapılandırırken de zorlanmıştır. İlk başta Melisa Sude’ye altı tane şeker vermiş, Mete’ye de bir kutu şeker vermiş ve iki şeker yerine üç şeker vermiştir. Ardından araştırmacı annesinin Mete’ye iki şeker verdiğini tekrar vurgulasa da Melisa tepki vermemiştir. Araştırmacı Mete’nin kaç tane şekeri olduğunu sorduğunda ise Melisa üç cevabını vermiş ve ardından araştırmacı iki şeker olması gerektiğini vurgulayarak bunun için ne yapması gerektiğini sormuştur. Melisa

“yedirmemiz gerekiyor” şeklinde cevap vermiş ve kâğıttan kesilmiş şekerleri Mete’nin ağzına doğru yaklaştırmıştır. Ardından araştırmacı fazla olan şekeri alabileceğini söylediğinde Melisa fazla olan şekeri almıştır. Soruyu yapılandırdıktan sonra Melisa Sude’nin kaç tane şekeri olduğunu unutarak dört tane şeker olduğunu söylemiştir. Ardından tekrar Sude’nin şekerlerini saymış ve altı tane olduğunu söylemiştir. Melisa ile araştırmacı arasında gerçekleşen diyalogun bir parçası aşağıda sunulmuştur:

A: say bakalım kaç şekeri var Sude’nin?

M: bir iki üç dört beş altı, altı tane

A: altı tane şekeri var evet, peki Mete’nin?

M: iki

A: iki tane var, birde bunun (kutunun) içinde var. Ama kaç tane var bilmiyoruz. Şimdi Sude’nin de, Mete’nin de aynı sayıda şekeri olması gerekiyor. Yani Sude’nin altı şekeri, Mete’nin de altı şekeri olmalı. Bu kutunun içinde kaç tane şeker olması gerekiyor sence?

M: altı

A: diyelim ki bunun içinde altı tane şeker var. O zaman Mete’nin kaç şekeri olur?

M: eemmm, altı

A: altı burada (kutuda) iki tane de burada. Kaç olur?

Me: ıııııııı (18 saniye düşünüyor uzun uzun)... bunun buyla ıııııııı ... şimdi altı tane oldu

Melisa ikinci problemde toplama işlemini yapamadığı gibi, bu soruda da iki şekerle altı şekeri toplaması gerektiğini de algılayamamıştır. Ayrıca birinci problemde parçalama yaparken soruya eşit odaklı yaklaşmış, ikinci problemde ise toplam göz sayısını bulamamıştır. Melisa kutunun dışında olan iki şekeri görmezden gelerek kutunun içinde altı tane şekerin olduğunu söylemiştir.

Taha da Melisa gibi soruyu yapılandırırken hata yapmıştır. Araştırmacı tarafından Sude’nin altı şekeri olduğu söylenince Taha Sude’ye beş tane şeker vermiş ve sayarak Sude’nin beş şekeri olduğunu söylemiştir. Ardından araştırmacı Taha’ya Sude’ye altı tane şeker vermesi gerektiğini tekrar vurgulayınca Taha Sude’ye bir tane daha şeker vermiş ve sayarak altı olduğunu ifade etmiştir. Ardından Taha ile araştırmacı arasında aşağıda sunulan diyalog gerçekleşmiştir:

A: Şimdi Sude ile Mete’nin aynı sayıda şekeri var. Sude’nin altı tane şekeri var. Mete’nin kaç tane şekeri var?

T: iki

A: Ama kaç olması gerekiyor?

T: altı

A: o zaman kutunun içinde kaç tane şeker var?

T: altı

A: nasıl anladın altı olduğunu? Ne düşündün?

T: Kutunun boyundan anladım

A: şimdi Sude'nin kaç şeker var?

T: altı

A: Mete'nin?

T: onun da altı

A: nerede?

T: (kutunun içine gösteriyor)

A: bunun içinde altı tane var, birde burda iki tane var. O zaman kaç şeker oluyor Mete'nin?

T: altı

Diyalogdan görüldüğü gibi Taha da Melisa gibi kutunun dışında olan iki şeker görmezden gelmiştir. “Sude'nin altı tane şeker varsa Mete'nin de altı tane şeker olması gerek çünkü ikisinin eşit sayıda şeker var” şeklinde anlamışlardır. Diğer bir değişle, “*Mete'nin altı tane şeker var*” ile “*Kutuda altı tane şeker var*” fikirlerini birbirinden ayıramamışlardır. Taha ve Melisa problem bağlamında bilinmeyi bulamamışlar da altı eşit altı fikrine dayanarak eşitliğin “Eşdeğerlik” anlamına sahip oldukları görülmektedir. Taha ve Melisa somut temsil dışında başka temsil kullanmamışlardır.

Bu problem bağlamında analitik düşünmenin alt bileşeni olan “Sembollerin anlamı” altında eşitlik sembolünün anlamı incelenmiştir. Birinci problem bağlamında çocukların eşitliği aynılık ve Yasemin'in aynı zamanda bir işlemin sonucu anlamında, ikinci problem bağlamında da sadece bir işlemin sonucu anlamında yapılandırıdıkları görülmüştü. Üçüncü problemde ise çocuklar bilinmeyi bulmaya çalışırken eşitliği eşdeğerlilik ve bir işlemin sonucu olarak yapılandırıdıkları görülmektedir. Bu süreçte Melisa, Taha, Kaan, Efe ve Gül eşitliği eşdeğerlik olarak, Sanem, Duru işlem sonucu olarak, Yasemin ise her iki anlamda yapılandırmıştır.

Bu problem bağlamında toplama ve çıkarma işlemlerine baktığımızda birinci soruda olduğu gibi çocuklar genelde bunun bilincinde olmadan şeker sayısı eksik olduğunda gerek sayıda ekleme yaparak toplama, şeker sayısı fazla olduğunda ise fazla olanları karalayarak çıkarma işlemini yapmışlar. Örneğin, Duru “*bunları yok sayalım çünkü çok fazla oldu*” şeklinde yedi şekerden fazla olan iki şeker karalayarak çıkarma işlemini, Gül ise “*bir tane daha olacak altı olacak*” şeklinde altı olması için beş şeker birini ekleyerek

toplama işlemini gerçekleştirmiştir. Taha ise Sude'nin altı tane şekeri olması gerektiğini bildiğinde şekerleri saymış, beş şeker olduğunu görünce de Sude'ye bir tane daha şeker vererek artık altı tane şekeri olduğunu söylemiştir. Burada Taha beş şekerle bir şekeri toplamıştır. Bundan farklı olarak Duru ve Yasemin kutunun içinde olan şekerleri zihninde canlandırarak toplama işlemi gerçekleştirmiştir. Duru kutunun içinde üç tane şeker olduğunu zihninde canlandırarak *“üç tane vermiş olupda, bir iki üç dört beş”* iki şekerle üç şekeri zihninden toplamıştır. Yasemin ise kutunun içinde dört tane şeker olduğunu gözünde canlandırarak *“iki tane şekere bunu da ekliyoruz, kutuyu, oluyor altı”* şeklinde iki şekerle dört şekeri zihninden toplamıştır. Melisa ve Taha ise kutunun içinde altı şeker olduğunu söyleseler de kutunun içindeki altı şekeri zihinlerinde canlandırarak dışarıda duran iki şeker ile toplayamamışlardır. Ayrıca Melisa bir tane şekerin fazla olduğunda bunu fark etse de tepkisiz kalmış, yalnız araştırmacı fazla olanı alabildiğini ifade ettikten sonra fazla olan şekeri almıştır. Melisa birinci problemde toplama, çıkarma işlemlerine dair hiçbir açıklamada bulunmamış, ikinci problemde de toplam göz sayısını bulamamıştır. Taha ise birinci problemde bu işlemlere dair hiçbir ifade söylemese de ikinci problemde iki köpeğin göz sayısını toplayarak bulmuştur.

Birinci ve ikinci problemde olduğu gibi, bu problem durumunda da tüm çocuklar şekerlerin sayısını kardinal sayma yaparak bulmuşlardır.

Bu problem sürecinde çocuklar tarafından genelleme yapılmamış ancak Yasemin, Duru ve Gül bilinmeyişi bulduktan sonra doğrulama yaparak cevaplarının doğru olduğunu kanıtlamışlardır. Yani kutunun içinde dört tane şeker olduğunu söyledikten sonra toplam şeker sayısının altı olduğunu kontrol ederek verdikleri cevapları doğrulamışlardır. Problemin çözüm sürecinde çocuklar hikâye problemi ile ilgili düşüncelerini çoğunlukla çizimleriyle ifade etmişler ve çizimlerinde resim, imge, sayı temsillerini yanı sıra somut temsili de kullanmışlardır. Çocukların hangi temsilleri kullandıkları Tablo 4.14, 4.15, 4.16, 4.17'nin altında örnekleri ile birlikte açıklanmış ve Şekil 4.5'te sunulmuştur.

5 SONUÇ

Elde edilen bulgular bağlamında sonuçlar araştırma sorularını yanıtlayacak şekilde küçük çocukların cebirsel düşünme bağlamında yapısal düşünme becerilerine yönelik sonuçlar, küçük çocukların cebirsel düşünme bağlamında analitik düşünme becerilerine yönelik sonuçlar, küçük çocukların cebirsel düşünme bağlamında fonksiyonel düşünme becerilerine yönelik sonuçlar olarak üç ayrı başlıkta sunulmuştur.

5.1 Küçük Çocukların Cebirsel Düşünme Bağlamında Yapısal Düşünme

Becerilerine Yönelik Sonuçlar

Çalışma boyunca problem çözme sürecinde küçük çocukların cebirsel düşünmenin alt bileşeni olan yapısal düşünme bağlamında sayılar ve ilişkiler, işlemler ve özelliklerine yönelik farklı stratejiler kullandıkları ve kavramları kendilerine has bir şekilde oluşturdukları ortaya çıkmıştır.

Verilen bir sayıyı farklı şekillerde parçalarken çocukların “Sistematik”, “Rastgele”, “Eşit Odaklı”, “İkiden Farklı Parçalama” şeklinde dört farklı strateji kullandıkları belirlenmiştir. Bu süreçte somut nesneler kullandıklarında çeşitli şekillerde sayıyı parçalara ayırdıkları görülmüştür. Çocuklar için somut olarak var olan nesne sayısına dikkat etmeden doğrudan ayırmanın, zihninde sayıyı canlandırarak ve her seferinde toplam sayıyı göz önünde bulundurarak parçalama yapmaktan daha kolay olması bu durumun bir nedeni olarak yorumlanmıştır. Bu süreçte çocuklardan sayıyı parçalarken bir taraf azalırken, diğer tarafın çoğalması şeklinde bir genelleme yapmaları ve sayının parçaları arasındaki ilişkiyi fark etmeleri beklenilmiş ancak bu beklentiyi sadece Sanem karşılamıştır. Ayrıca beklenildiğinin tersine hiçbir çocuk parçalama yaparken değişme özelliğini kullanmamıştır. Tüm çocukların sayıyı parçalama sürecinde ilk önce eşit parçalamaya odaklandıkları, ancak araştırmacı eşit olma zorunluluğunun olmadığını söyleyince farklı şekilde parçalama yaptıkları belirlenmiştir. Parçalama yapan bazı çocukların örneğin şeker kutusu problemini çözerken parçalama eylemini bilinmeyi bulmada kullandıkları görülmüştür.

Tüm çocukların kardinalite ilkesine uygun şekilde sayarak nesne sayısını belirledikleri, ayrıca grupta yaparak sayma yapabildikleri belirlenmiştir. Örneğin köpeklerin göz sayısını belirlerken “bir-iki, üç-dört, beş-altı, yedi-sekiz” şeklinde ikili gruplayarak sayarken, Sanem doğrudan “iki, dört, altı” şeklinde ikişerli ritmik sayma yapmıştır. Ayrıca bazı çocukların teklik çiftlik kavramını isim koymadan zihinlerinde

yapılandırdıkları görülmüştür. Çocuklar (6 çocuk) bu durumu tek sayının çift olması, yani ikiye bölünebilmesi için ikili gruplarda eksik kalan bir tane nesneye daha ihtiyacımız var şeklinde açıklamışlardır. Diğer yandan teklik çiftlik kavramlarını açıklayamayan çocukların (2 çocuk) ise ikili gruplama yapmakta ve göz sayısı ile köpek sayısı arası ilişkiyi bulmakta başarısız olduğu da görülmüştür. Diğer yandan, sayının farklı kombinasyonları arasındaki ilişkiyi açıklamaya çalışırken bazı çocuklar sayının parçalarını karşılaştırmıştır. Bu bağlamda çocukların iki farklı şekilde karşılaştırma yaptıkları belirlenmiştir. Bazı çocuklar birebir eşleme yaparak (1 çocuk) karşılaştırma yaparken, bazıları (2 çocuk) birbirine uzak olan nesne sayısının görsel olarak azlık çokluk durumunu belirlemiştir. Ayrıca Duru'nun 2 ile 4'ü karşılaştırırken bütün ve yarım kavramlarına hâkim olduğu da ortaya çıkmıştır.

Hikâye problemlerini çözerken çocukların matematiksel olarak ifade etmeden ve aslında bunun bilincinde olmadan toplama, çıkarma, bölme ve çarpma işlemlerini kullandıkları saptanmıştır. Küçük çocukların toplama işlemini birleştirme olarak algıladıkları ve var olan sayının üzerine sayarak bu işlemi gerçekleştirdikleri görülmüştür. Bu süreçte Yasemin, Gül ve Efe matematiksel ifadeler yazarak doğrudan toplama işlemi gerçekleştirirken, diğer çocuklar bunun bilincinde olmadan toplama işlemini üzerine sayma yaparak ve eksik olan nesne sayısını ekleyerek yapabilmıştır. Ayrıca matematiksel dil, yani sayı ve sembolleri kullanmaya özen gösteren çocukların problem çözmede daha başarılı olduklarına yönelik bir sonuca da ulaşamamıştır. Çocuklar çıkarma işlemini fazla olanı karalayarak gerçekleştirseler de kalan sayıyı geriye sayma yapmaktan ziyade, tekrardan sayma yaparak belirledikleri görülmüştür. Örneğin, Duru on tane şeker çizdikten sonra sekiz tane olması gerektiğini bildiği için 1'den 8'e kadar kardinal sayma yaparak fazla kalan iki şekeri karalamıştır. Fakat burada geriye sayma yapmamış ve tekrar sekiz olduğunu sayarak kontrol etmiştir. Eşit şekilde parçalama yaparken küçük çocukların iki farklı şekilde ikiye bölme işlemini gerçekleştirdiği görülmüştür. Dört çocuk "biri sana, biri sana" şeklinde paylaşırma yaparak, üç çocuk doğrudan gruplayarak, Kaan ise her iki şekilde bölme işlemini, Yasemin ise ad koymadan her seferinde tekrarlı toplama yaparak çarpma işlemini gerçekleştirmiştir.

Sonuç olarak akademik başarı düzeyi yüksek olan 60-72 aylık çocukların yapısal düşünme bağlamında ad koymadan teklik çiftlik kavramlarını yapılandırabildikleri, sayıların farklı kombinasyonlarını oluşturabildikleri, bilincinde olmadan bölme işlemini

paylaştırma, toplama işlemini birleştirme olarak algıladıkları sonucu görülmektedir. Akademik başarı düzeyi düşük olan çocukların ise bu süreçte daha zayıf tepkiler verdikleri ve zorlandıkları belirlenmiştir.

5.2 Küçük Çocukların Cebirsel Düşünme Bağlamında Analitik Düşünme

Becerilerine Yönelik Sonuçlar

Cebirsel düşünmenin alt bilişeni olan analitik düşünme bağlamında eşitlik kavramının anlamı ve bilinmeyi bulma stratejileri incelenmiştir. Bu süreçte çocukların eşitliği aynılık, bir işlem sonucu ve eşdeğerlik (terazi mantığı) olmak üzere üç anlamda oluşturdukları görülmüştür. Çoğunlukla çocukların eşitliği nesne sayısının aynı olduğu durumda aynılık olarak ve terazinin kefeleri mantığı ile eşdeğerlik olarak anlamlandırdığı belirlenmiştir. Ayrıca Yasemin ve Gül'ün doğrudan eşitlik sembolünü kullanarak, Sanem, Duru ve Efe'nin ise sözel ifade ederek eşitliği bir işlem sonucu olarak açıkladıkları da ortaya çıkmıştır.

Çocukların bilinmeyi bulma üzerine oluşturulan hikâye problemini çözerken eşleştirme, üzerine sayma, ekleme ve fazla olanı silme olarak üç farklı strateji kullandığı belirlenmiştir. Eşitliği eşdeğerlik olarak algılayan Kaan, Yasemin ve Efe $x+2=6$ denkleminin her tarafından iki çıkartarak bilinmeyi bulmuştur. Yapısal düşünme bağlamında çeşitli şekilde parçalamalar yapan Kaan, Yasemin ve Efe'nin bilinmeyi bulurken de referans alarak parçalama yaptıkları görülmüştür. Eşitliği bir işlem sonucu olarak algılayan Sanem ve Gül'den de parçalama yaparak bilinmeyi bulmaları beklense de onlar üzerine sayma stratejisini kullanarak bilinmeyi bulmuşlardır. Ayrıca Gül ilk başta somut nesnelerle bilinmeyi bulmakta zorlanmış olsa da çizerek soruyu çözerken üzerine sayma ve ekleme, fazla olanı silme stratejilerini kullanarak bilinmeyi elde etmiştir. Gül eşitliği eşdeğerlik olarak algılasa da eşleştirme stratejisini kullanmamıştır. Duru yapısal düşünme bağlamında sistematik şekilde parçalama yapmış ve Gül gibi deneme yanılma yoluyla bilinmeyi bulmaya çalışmıştır. Problem çözme sürecinde eşitliği eşdeğerlik olarak algılayan Taha ve Melisa bilinmeyi algılayamamış ve doğrudan $x+2=6$ denkleminin iki tarafını eşleştirerek bilinmeyi $x=6$ şeklinde düşünmüşlerdir. Ayrıca analitik düşünmenin incelendiği görevlerde Taha ve Melisa yapısal düşünme bağlamında teklik çiftlik kavramlarını açıklayamamış ve nesne sayılarını karşılaştırırken zorlanmışlardır. Melisa ise parçalama yaparken sadece eşit odaklı davranmış, toplama çıkarma işlemi gerçekleştirmemiştir.

Sonuç olarak analitik düşünme bağlamında çocukların sembol kullanmadan eşitliği eşdeğerlik ve aynılık olarak algıladıkları görülmektedir. Akademik başarı düzeyi yüksek olan çocukların basit denklemlerde eşdeğerliği kullanarak, üzerine sayarak ya da tahminde bulunarak farklı stratejilerle bilinmeyeni bulmaya çalıştıkları ortaya çıkmıştır. Akademik başarı düzeyi düşük olan çocukların ise bilinmeyeni bulmakta zorlandıkları görülmüştür.

5.3 Küçük Çocukların Cebirsel Düşünme Bağlamında Fonksiyonel Düşünme

Becerilerine Yönelik Sonuçlar

Cebirsel düşünmenin alt bileşeni olan fonksiyonel düşünme bağlamında küçük çocukların fonksiyonel ilişkiyi ve değişimleri belirlemeleri incelenmiştir. Bu süreçte çocuklardan Kaan, Yasemin ve Sanem'in nicelikler arası fonksiyonel ilişki kurmada başarılı oldukları görülmüştür. Sanem niceliklerin eş zamanlı değişimini fark etmiş, aynı zamanda eşleme yaparak hem toplamsal ilişki hem de çarpımsal ilişki kurarak fonksiyonel ilişkiyi belirlemiştir. Sanem diğer çocuklardan farklı olarak tersten düşünerek ilişki kurmuş ve köpek sayısının göz sayısının yarısı olduğunu vurgulamıştır. Kaan iki değişkenin aynı zamanda değiştiğini fark etmiş ve toplamsal ilişki kurmuş, Yasemin ise göz sayısının her zaman köpek sayısının iki katı olacak şekilde çarpımsal ilişki kurarak fonksiyonel ilişkiyi belirlemiştir. Efe ve Duru nicelikler arası fonksiyonel ilişki kuramamış, sadece göz sayısına odaklanmış yani göz sayısını tek değişken olarak algılamış ve yinelemeli ilişki kurarak örüntüyü devam ettirmişlerdir. Ayrıca Duru ilk başta köpek ve göz niceliklerini ayırmakta zorlanmış olsa da sonrasında grupta yaparak doğru çözüme ulaşmış ve tek olan grubu çifte tamamlayarak hatasını düzeltmiştir. Bu da Duru'nun teklik çiftlik kavramlarını oluşturduğunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Duru'dan farklı olarak Taha grupta yapmaya çalışsa da teklik çiftlik kavramlarını daha oluşturmadığı için köpek sayısı ve göz sayısı arasında ilişki kurmada başarısız olmuştur. Taha tek kalan grubu çift olacak hale tamamlayamamış ve göz sayıları arasındaki sabit farkı algılayamamıştır. Gül de göz sayılarının ikişer değiştiğini fark edememiş, sadece görsel olarak gözleri toplama yapmadan kardinal olarak saymıştır. Melisa ise köpek ve göz sayılarını iki farklı nicelik olduğunu anlayamamıştır.

Sonuç olarak akademik başarı düzeyi yüksek olan çocukların fonksiyonel ilişki kurabildikleri, fonksiyonel ilişki kurmada zorlanan çocukların yinelemeli ilişki

kurdukları ve akademik başarı düzeyi düşük olan çocukların ise fonksiyonel ilişki kuramadıkları ve sabit farkı algılayamadıkları tespit edilmiştir.

5.4 Küçük Çocukların Problem Çözme Sürecinde Genelleme, Doğrulama, Gerekçelendirme ve Temsil Kullanma Becerilerine Yönelik Sonuçlar

Genelleme, varsayımda bulunma, düşünme araçları cebirsel düşünme sürecinin üç bileşeni olan analitik, yapısal ve fonksiyonel düşünme bileşenlerini kapsamakta ve bu sürecin temelini oluşturmaktadır. Bu bağlamda, küçük çocukların hikâye problemlerini çözüm süreçlerinde matematiksel düşünme araçlarını kullanma durumları incelenmiştir. Bu bağlamda problem çözme sürecinde bazı çocukların yaptıkları çözümü gerekçelendirdiği ve bu gerekçelendirmelerden yola çıkarak da genellemeye (5 çocuk) ulaştıkları görülmüştür. Örneğin, Sanem ve Kaan çözümlerini gerekçelendirerek köpeklerin her zaman iki gözü olacağını vurgulamış ve buradan yola çıkarak göz sayısının ikişer değiştiği ve köpek sayısı çoğalınca göz sayısının da çoğalacağı genellemelerine ulaşmışlardır. Yasemin de aynı gerekçeyi sunarak köpek sayısı değişince toplam göz sayısının da değiştiğini vurgulamıştır. Ayrıca Yasemin problem çözme sürecini matematiksel araçlarla zenginleştirmiş hem genelleme hem gerekçelendirme hem de doğrulama yapabilmıştır. Efe ise köpeklerin her zaman iki gözü olduğundan göz sayısının her zaman ikişer değiştiğini genelleyebilmiştir. Duru ise köpek sayısı çoğaldığı için göz sayısının da çoğaldığını hiçbir gerekçe sunmadan açıklamıştır. Ayrıca Sanem verilen sayıyı parçalamada genellemeye ulaşan tek çocuktur. Sanem sayının parçalarının ilişkili bir şekilde biri azalınca diğerinin çoğaldığını ve ne kadar farklı şekillerde parçalamalar yapsa da sayının değişmediğini genelleyebilmiştir. Denklem çözerken Kaan, Yasemin, Duru ve Gül bilinmeyen bulduktan sonra buldukları değeri denkleme uygulayarak kontrol etmiş ve cevaplarını doğrulamışlardır.

Tablo 5.1’de çocukların problem çözme sürecinde kullandıkları eylem ve kavramlar özet olarak sunulmuştur.

Tablo 5.1*Problem Çözme Sürecinde Çocukların Eylemleri*

Problem Çözme Sürecinde Çocukların Eylemleri								
	Akademik başarı düzeyi yüksek					Akademik başarı düzeyi düşük		
	Sanem	Kaan	Yasemin	Duru	Gül	Efe	Melisa	Taha
Sayıyı Parçalama	+	+	+	+	+	+		
Fonksiyonel İlişki Kurma	+	+	+					
Bilinmeyen Bulma	+	+	+	+	+	+		
Genelleme	+	+	+	+		+		
Gerekçelendirme	+	+	+			+		
Doğrulama		+	+	+	+			
Kardinal Sayma	+	+	+	+	+	+	+	+
Teklik Çiftlik	+	+	+	+	+	+		
Bütün/Yarım				+				
Toplama	+	+	+	+	+	+		+
Çıkarma	+	+		+	+			
Çarpma			+					
Bölme	+	+	+	+	+	+	+	+
Karşılaştırma		+		+	+			
Eşitlik	+	+	+	+	+	+	+	+

Tablo 5.1’de görüldüğü gibi sayıyı parçalama eylemi birinci problemin çözümünü, fonksiyonel ilişki kurma ikinci problemin çözümünü, bilinmeyen bulma üçüncü problemin çözümünü kapsamaktadır. Tablo 5.1’de problem çözme sürecinde çocukların kullandıkları eylemlere baktığımızda matematik düzeyi daha yüksek olan A sınıfı öğrencilerinin (Sanem, Kaan, Yasemin, Duru, Gül) daha başarılı oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Bu süreçte Sanem, Kaan ve Yasemin üç problemin üçünü de çözerek yüksek başarı göstermişlerdir. Duru, Gül ve Efe ise ikinci problemde köpek sayısı ve göz sayısı arasında fonksiyonel ilişkiyi kuramamış ve sadece ilk iki problemi çözerek orta düzeyde başarı göstermişlerdir. Efe B sınıfında olmasına rağmen gerekçelendirme ve genelleme

yapabilmiş, iki problemin çözümüne ulaşmış, köpek ve göz sayısı arası fonksiyonel ilişki kuramasa da göz sayısının ikişer değiştiğini vurgulamıştır. Ayrıca teklik çiftlik kavramlarını açıklamış ve genel olarak problem çözme sürecinde orta derecede başarılı olmuştur. Efe çözüme ulaşmak için sözel ifadeler, somut nesneler, resim, imge, sayı ve sembol olarak çeşitli temsil biçimlerini kullanmıştır. Diğer yandan matematik düzeyi daha düşük olan B sınıfı öğrencilerinden (Efe, Taha, Melisa) Melisa ve Taha'nın daha az matematiksel araçlar kullandıkları ve daha az başarı gösterdikleri ortaya çıkmıştır. Taha üç problemde göz problemi ve şeker kutusu problemini cevaplayamamış, köpekler probleminde ise somut nesneler kullanarak sistematik bir şekilde her seferinde birer köpek kaydırarak çeşitli parçalamalar yapmış olsa da çizerek sayının farklı parçalamalarını elde edememiştir. Melisa ise hiçbir problem için çözüme ulaşamamıştır. Ayrıca Melisa ve Taha teklik çiftlik kavramını da açıklayamamış, hiçbir genelleme, gerekçelendirme ve doğrulama yapamamışlardır. Melisa ve Taha'nın problem çözme sürecinde sözlü ifadeler, somut nesneler ve resim temsilini kullandıkları soyut matematiksel dile hiç geçiş etmediklerini göstermektedir.

Hikâye problemlerini çözme sürecinde çocukların kullandıkları temsillerin bir özeti de Tablo 5.2'de sunulmuştur.

Tablo 5.2

Çocukların Kullandıkları Temsiller

Temsil Kullanımı									
		Akademik başarı düzeyi yüksek					Akademik başarı düzeyi düşük		
		Sanem	Kaan	Yasemin	Duru	Gül	Efe	Melisa	Taha
Somut	Sözlü ifadeler	+	+	+	+	+	+	+	+
	Somut Nesne	+	+	+	+	+	+	+	+
	Resim	+	+	+	+	+	+	+	+
Soyut	İmge	+	+		+	+	+		
	Sayı		+	+		+	+		
	Sembol			+		+	+		

Çocukların kullandıkları sözel ifadeler, somut nesneler ve problemde geçen ana karakterlerin ve yapıların doğrudan resimleri çocukların kavramları ve algıları somutlaştırdığını, problem durumunu anlatmak için kullanılan yuvarlak, çizgi ve nokta gibi imgeler, sayılar ve farklı semboller çocukların artık kavram ve algıları soyutlaştırdığını göstermektedir. Problemi çözerken çocuklar kâğıttan kesilmiş problemin ana karakter ve yapılarının figürleri, sözlü açıklamalardan oluşan dilsel temsil, resim, imge, sayı ve sembol temsillerini kullanmıştır. Tablo 5.2'den küçük çocukların kendini ifade etmek için doğrudan resim, somut nesneler ve sözel ifadeler kullanmaya yönelmesinden henüz somut dünya dilinden soyut olan matematiksel diline geçiş yapmadıkları görülmektedir.

Bu süreçte bazı çocukların (Kaan, Yasemin, Gül, Efe) sayı ve sembollerini kullanmaya özendikleri görülmüştür. Fakat bu her zaman onların matematiksel olarak başarılı oldukları anlamına gelmemektedir. Örneğin, Efe köpeklerin göz sayısını bulmaya çalışırken sayı ve sembol temsillerini kullanmış olsa da köpek sayısı ve göz sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi kuramamıştır. Aynı şekilde Gül de sayı ve sembol temsili kullanmış olsa da göz sayısı örüntüsünde sabit farkı algılayamamış ve köpek sayısı ile göz sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi belirleyememiştir. Efe Gül'den farklı olarak göz sayısının ikişer değiştiğini vurgulamıştır. Bundan farklı olarak ise Sanem, Kaan ve Yasemin köpek sayısı ve göz sayısını ilişkilendirmeye çalışırken sayı ve sembol temsillerini, yani soyut matematiksel dili kullanmamış olsalar da köpek sayısı ve göz sayısı arasında fonksiyonel ilişki kurabilmişlerdir. Ayrıca bu süreçte Sanem, Kaan, Duru, Gül ve Efe'nin problemde geçen ana nesneleri soyutlayarak imge temsili kullandıkları da görülmüştür.

5.5 Çalışmadan Elde Edilen Genel Sonuçlar

Bu çalışma kapsamında genel olarak aşağıda sunulan sonuçlara ulaşılmıştır:

- Yapılan çalışmanın sonucunda küçük çocukların matematik düzeylerinin düşünülenenden daha üst seviyede olduğu, ad koymadan kavramları zihninde oluşturabildikleri görülmüştür.
- Küçük çocukların toplama, çıkarma, bölme ve çarpma işlemlerini bilinçsiz olarak ve ad koymadan gerçekleştirebildikleri ancak işlem özelliklerini fark edemedikleri ortaya çıkmıştır.

- Toplama işlemini birleştirme olarak algıladıkları ve toplananları birleştirerek “hepsini sayma” stratejisini kullandıkları, yanı sıra paylaşırma ve gruplama olarak iki farklı şekilde bölme işlemini gerçekleştirdikleri görülmüştür.
- Bazı çocukların karşılaştırma yaparken birebir eşleme yaparak ve sezgisel olarak görsel karşılaştırma yaparak iki farklı yol izledikleri belirlenmiştir.
- Bir çocuğun karşılaştırma yaparken bütün-yarım ilişkisi kurduğu görülmüştür.
- Kardinal sayma ilkelerine uygun olarak nesne sayısını belirledikleri görülmüştür. Bu süreçte sayı sözcüklerini bire bir nesne ile ilişkilendirdikleri belirlenmiştir.
- Küçük çocukların fonksiyonel düşünme bağlamında yinelemeli ilişki kurdukları, bazı çocukların fonksiyonel ilişki kurmada zorlandıkları ve fonksiyonel ilişkiyi belirleyemedikleri görülmüştür. Matematik düzeyi yüksek olan çocukların ise fonksiyonel ilişkiyi belirleyebildikleri, bu süreçte birlikte değişim ve eşleme stratejilerini kullandıkları saptanmıştır. Ancak bu çocukların fonksiyonel ilişkiyi birbirine yakın adımlarda kurabilirken bu ilişkiyi daha büyük sayılara genelleylemedikleri belirlenmiştir.
- Problem çözme sürecinde bazı çocukların sözel olarak gerekçelendirme, genelleme, doğrulama yapabildikleri görülmüştür.
- Küçük çocukların genel olarak eşitlik kavramını aynılık ve eşdeğerlik olarak, bazı çocukların ise eşitliği işlem sonucu olarak da algıladıkları belirlenmiştir.
- Eşitliği eşdeğerlik olarak algılayan çocukların, kendi düzeylerine uygun basit denklemleri çözebildikleri ve denklemin her iki tarafını sadeleştirerek ve ilişkilendirerek bilinmeyi buldukları görülmüştür. Bu çocukların soruya cebirsel olarak yaklaştıklarını göstermektedir. Bazı çocukların ise işlemsel ilişki kurarak bilinmeyi buldukları belirlenmiştir. Ayrıca matematik düzeyi düşük olan çocukların bilinmeyen kavramını algılamakta zorlandıkları da görülmüştür.
- Çocukların sayıları parçalarken “Sistematik”, “Rastgele”, “Eşit Odaklı” ve “İkiden Farklı Parçalama” olarak dört farklı strateji kullandıkları ortaya çıkmıştır. Küçük çocukların, özellikle somut materyallerle, sistematik ve düzenli parçalama yaptıkları, aynı zamanda çocukların (bir çocuk dışında) bu parçalamaları bilinçsiz şekilde yaptıkları ve sayı parçaları arasında ilişki kuramadıkları ortaya çıkmıştır.

Tüm çocukların ilk adım olarak eşit parçalama yaparak eşitliğe odaklandıkları görülmüştür. Bazı çocuklar eşit şekilde parçalamanın dışında çeşitli parçalamaları düşünmekte zorlanmıştır. Çocukların yarısı sayının kendisi ve sıfır şeklinde parçalama yapmıştır.

- Çocukların, çift sayıların ikiye eşit şekilde bölündüğünü, tek sayılarda ise bir tane artık kaldığını ifade ederek kendilerine has bir dilde, teklik çiftlik kavramlarını açıkladıkları görülmüştür. Matematik düzeyi düşük olan çocukların ise teklik çiftlik kavramını açıklayamadıkları görülmüştür.
- Çocukların problem çözme sürecinde düşüncelerini açıklamak için sözel ifadelerden oluşan dilsel temsil, somut nesneler ve problemde geçen ana karakter ve yapıları doğrudan çizerek resim temsili kullanarak düşüncelerini somutlaştırmaya yöneldikleri görülmüştür. Ayrıca matematik düzeyi yüksek olan çocukların imge temsili, ara sıra sayı ve sembol temsili kullanarak düşüncelerini soyutlaştırmaya doğru geçişte oldukları da belirlenmiştir. Diğer yandan bir sayının çeşitli parçalamalarını gösterirken çocukların somut nesne temsillerini zihninde canlandırma ve çizim yapmaya göre daha kolay kullandıkları saptanmıştır.
- Cebirsel düşünmenin alt boyutları olan analitik düşünme ve yapısal düşünme becerileri birbiri ile ilişkili olduğundan, analitik düşünme becerileri gelişmiş olan çocukların, aynı zamanda yapısal düşünme becerilerinin de gelişmiş olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

6 TARTIŞMA

Bu araştırma Eskişehir ilinde yer alan bir anaokulunda eğitim alan 60-72 aylık sekiz çocuk ile yapılmıştır. Veri toplama aracı olarak üç görev (hikâye problemi) hazırlanmış ve çocuklarla klinik görüşmeler yapılmıştır. Çalışmada elde edilen bulgular ve sonuçlar bu sınırlılıklar göz önünde bulundurularak değerlendirilmelidir. Çalışmanın daha fazla sayıda öğrenci ve daha uzun zaman içinde yapılmasına ihtiyaç vardır.

Erken Cebir

Erken cebir çalışmalarının anaokulundan itibaren başlaması pek çok araştırmacının da vurguladığı gibi (Blanton ve Kaput, 2005; Carraher vd., 2006; Warren vd., 2009; Cai ve Knuth 2011; Lee vd., 2016; Cai ve Moyer 2008; Radford 2014) çocukların cebirsel düşünme gelişiminde önemli rol oynamakta, gerekçelendirme, genelleme ve doğrulama becerilerini olumlu şekilde etkilemektedir (Yüce ve Şen, 2022). Bu çalışma kapsamında her ne kadar küçük çocuklara yönelik nasıl bir öğretim yapıldığı incelenmese de özellikle başarı düzeyi yüksek olan 60-72 aylık çocukların daha ileri sınıflarda kazandırılması beklenen kavramları ad vermeden anlamlandırabilmeleri ulaşılan önemli sonuçlardandır. Nitekim yapılan çalışmalar da anaokulu dönemindeki çocukların cebirsel kavramlarla tanışmaları durumunda bu kavramları oluşturabildiklerini göstermektedir (Blanton ve Kaput, 2011, Blanton vd., 2015). Ayrıca Olkun vd. (2014b) ilkökul öğrencileri ile yaptıkları araştırmalarında, okul öncesi eğitim alan öğrencilerin problem çözme sürecinde daha başarılı olduğunu tespit etmişlerdir. Passolunghi vd. (2015) de küçük çocukların ileri düzey yeteneklerinin anaokulu döneminde erken matematik öğrenimiyle ilişkili olduğu sonucuna varmışlardır.

Eşitlik, Eşdeğerlik, Bilinmeyen

Erken yaşlarda cebirsel düşünme bağlamında eşitliğin ilişkisel bir sembol olarak anlamlandırılması ve bir eşitliğin her iki tarafının eşdeğer olduğu fikrinin yapılandırılması formel cebire geçişte oldukça önemlidir (Blanton vd., 2018). Yapılan çalışmalar küçük çocukların sözlü ifadeler, somut modeller veya semboller kullanarak eşdeğer durumları tanıyabildiklerini ve eşitliği “eşittir”, “aynıdır”, “eşit değildir”, “farklıdır” ifadelerini kullanarak, her iki tarafın neden aynı veya neden farklı olduğunu açıklayabildiklerini göstermektedir (Warren vd., 2009). Bazı çalışmalarda da her yaş düzeyinde eşitliğin sadece bir işlemin sonucu olarak anlamlandırıldığı ifade edilmektedir (Carpenter vd., 2003; Kieran, 1992). Bu çalışma kapsamında da araştırmalara paralel olarak 60-72 aylık

küçük çocukların eşitlik kavramını aynılık ve eşdeğerlik olarak, bazı durumlarda ise bir işlemin sonucu olarak algıladıkları tespit edilmiştir. Problem çözme sürecinde doğrulama yapan çocuklar, “burda da altı, burda da altı, eşit oldu” şeklinde ifadeler kullanarak eşdeğerliği açıklamışlardır. Buna paralel olarak Blanton vd. (2018)’nin çalışmasında da, bazı çocuklar $a=a$ şeklinde sayısal ifadelerinde eşitliğin “denge sembolü” olduğunu, ve sayıların aynı olduğu için bu ifadenin doğru olduğunu vurgulamışlardır. Ayrıca çalışma kapsamında Blanton vd. (2011) ile Carpenter vd. (2003)’nin araştırmalarında olduğu gibi eşitliği eşdeğerlik olarak algılayan çocukların, denge stratejisini kullanarak basit denklemleri çözebildikleri görülmüştür. Warren ve Cooper (2005a)’ın eşdeğerliği ve denge modelini kullanmanın erken yaşlarda çocukların bilinmeyi bulmak için çözüm üretmelerini kolaylaştırdığı yönündeki düşünceleri de bu sonucu desteklemektedir.

Bazı çocuklar ise işlemsel düşünüp bilinen üzerine sayarak bilinmeyi bulabilmiştir. Ancak bu çocuklar denge stratejisini kullanarak çözüm üretmekte zorlanmışlardır. Öksüz (2007)’ün de vurguladığı gibi çocukların işlemsel düşünerek denklemin her iki tarafının aynı miktarda azalması ya da çoğalması gerektiğini algılayamamaları bu sonucun nedeni olarak açıklanabilir. Çocuklar hesaplama yaparak doğru cevaba ulaşmış olsalar da, Carpenter vd. (2003)’nin ifade ettiği gibi bu durum cebirsel düşünmenin gelişimini etkilemekte ve formel cebire geçişte zorlanmalarına neden olabilmektedir.

Bazı çocuklar ise tahminde bulunarak ve sonrasında tahmini kontrol ederek bilinmeyi bulabilmiştir. Benzer bir sonuca Carraher vd. (2008b)’nin araştırmalarında da rastlanılmıştır. Araştırmada çocukların %63,4’ünün bilinmeyi görmezden gelerek tahminde bulunduğu, %36,5’inin de bilinmeyi bilinen sayıdan az ya da fazla olduğunu açıklayarak karşılaştırmalı ifadeler kullandıkları belirlenmiştir.

Radford (2022) sembolik temsillerden oluşan soyut alfanumerik denklemler (örneğin, $5n+6=21$) içeren problemler yerine, hikâye problemleri kullanarak ve görsel modeller oluşturarak öğrencilerin bilinmeyen kavramını ilişkisel olarak anlamlandırmalarının ve denklemleri matematiksel işlemlerle bağdaştırarak çözmelerini sağlamanın cebirsel düşünme konusunda oldukça önemli olduğunu ifade etmektedir. Benzer şekilde Steinweg vd. (2018) de öğrencilerin potansiyelini ortaya çıkaracak şekilde görevlerin tasarlanmasının, 5 yaşından itibaren çocukların cebirsel düşünmenin temel kavramlarından biri olan değişkenlerle başa çıkmalarına ve ilişki kurmalarına yol açtığını vurgulamaktadır. Nitekim bu çalışmada da hikâye problemlerinin kullanılması ve bu

hikâyelerin görsel modellerinin hazırlanmasının (hareket ettirebildikleri köpek vb. resim modellerinden oluşan fiziksel materyaller) denklem çözümlerini kolaylaştırdığı söylenebilir.

Karşılaştırma, Kardinal Sayma, Gruplama

Erken yaşlarda çocukların sayı sistemi hakkında yeterli bilgi edinmesi ve sayı özelliklerini fark etmesi cebirsel düşünme becerileri için güçlü bir zemin hazırlamaktadır (Blanton, 2008; Kaput, 2008). Araştırmacılar dört yaşında çocukların iki nicelikten hangisinin daha fazla veya daha az olduğunu söyleyebildiklerini (Griffin, 2004), saymaktan ziyade sezgisel olarak görsel algılarıyla karşılaştırma yapabildiklerini (Xu ve Spelke, 2000) ve iki kümedeki nesne sayısını bire bir eşleme yaparak karşılaştırdıklarını (Sperry-Smith, 2016) ifade etmektedir. Bu çalışmada görsel algılardan yola çıkarak sezgisel olarak karşılaştırma yapan çocuklar olmuştur. Bununla yanı sıra çocuklardan biri iki grup nesneyi birebir eşleme yaparak karşılaştırmıştır. Aynı çocuk 4 ile 2'yi karşılaştırırken 2'nin 4'ün yarısı olduğunu ifade ederek bütün-yarım kavramlarına hakim olduğunu göstermiştir.

Bu çalışma kapsamında 60-72 aylık çocukların kardinal ilkesine uygun olarak sayma yapabildikleri görülmüştür. Ayrıca 1, 2 ve 3 nesne sayısının kaç tane olduğunu saymadan görebilmiş, 4 ve üzerinde nesne sayılarını ise sayarak kaç tane olduğunu belirleyebilmişlerdir. Olkun vd. (2013)'nin yaptıkları çalışmalarında, anaokulu öğrencilerinin kardinalite ilkesine uygun saymaları ve sayısal strateji kullanmak yerine, görsel strateji kullanarak karşılaştırma yaptıkları sonucu bu araştırmanın sonuçlarına paralellik göstermektedir. Sayma becerisi küçük çocukların problem çözmeleri için gerekli bir beceridir, ancak yeterli değildir. Bu çalışmada tüm çocukların saymayı doğru şekilde yapmaları, problem çözme sürecinde yeterli olmamıştır. Olkun vd. (2014a) de araştırmalarında ilkökul öğrencilerinin neredeyse hepsinin sayma ilkelerine uygun ve hatasız sayma yaptıklarını, ancak bu becerilerini problem çözme sürecinde kullanamadıklarını tespit etmişlerdir.

Charlesworth ve Lind (2009)'in vurguladığı gibi, bu çalışmada da birebir eşlemenin yanı sıra çocukların gruplama (sınıflandırma) yapabildikleri de görülmüştür. Bu çalışmada tüm çocuklar bölme işlemini gerçekleştirirken altı köpeği iki eşit gruba ayırabilmiştir. Buna paralel olarak Cheeseman vd. (2020) 60-72 aylık anaokulu öğrencilerinin %83'nün eşit gruplar oluşturmada başarılı olduklarını tespit etmişlerdir. Ayrıca bazı çocuklar

köpek sayısı ve göz sayısı arasında fonksiyonel ilişki kurarken ikili gruplama yapabilmışlerdir. Bu araştırmada çocukların karşılaştırma ve gruplama becerilerini kullanarak problemleri çözebildikleri görülmüştür. Bu bağlamda, Clements vd. (2003)'nin da vurguladığı gibi, karşılaştırma, gruplama ve sayma becerilerinin erken yaşlardan geliştirilmesinin çocukların matematiksel başarılarının yüksek olmasını sağladığı söylenebilir.

Sayıların farklı kombinasyonları (Sayıları parçalama);

Van De Walle vd. (2021) çocukların, sayıların farklı kombinasyonlarını düşünebilme (sayıyı parçalama) becerisinin sayı hissinin geliştirilmesini etkilediğini vurgulamışlardır. Araştırmacılar, erken yaşlarda sayıları parçalamaya yönelik etkinliklere odaklanmanın, özellikle çok basamaklı sayılarla, gerekli hesaplama becerilerinin gelişimi için faydalı olduğunu (Laski vd., 2014); çocukların, yaşı ilerledikçe ve deneyimleri arttıkça, sayıları parçalamaya yönelik daha ileri düzey stratejiler kullandıklarını (Torbeys vd., 2017) tespit etmişlerdir. Bu araştırmada sayıların yapısı üzerinde önemi dikkate alınarak çocuklardan sayıların farklı kombinasyonları üzerine düşünmeleri istenmiştir. Bu bağlamda Sarama ve Clements (2009)'in çalışmalarında da olduğu gibi, çocukların sayıları parçalarken “Sistematik”, “Rastgele”, “Eşit Odaklı” ve “İkiden Farklı Parçalama” olarak dört farklı strateji kullandıkları tespit edilmiştir. Benzer şekilde Tsamir vd. (2015)'nin çalışmalarına paralel, bu çalışmada da çocuklar sayının parçalarından biri belli iken üzerine sayma yaparak ya da tahminde bulunarak diğer parçayı bulmuş, tüm öğelerin bir tarafta olduğu durumda ise diğer tarafta hiç öğe olmaması gerektiğini vurgulamışlardır.

Van De Walle vd. (2021) sayıların sıfır ve kendisi şeklinde parçalamaların sıfır değerinin bilinçli bir şekilde oluşturulması adına önemini vurgulamışlardır. Bu çalışmada ise çocukların yarısının sıfır değerini kullanarak parçalama yaptığı görülmüştür. Ayrıca, çocukların sayıları parçalarken tahminde bulunduklarında tüm öğeleri sayarak doğrulama yaptıkları da belirlenmiştir.

Bazı çocukların somut nesneler kullanarak daha sistematik şekilde parçalama yaptıkları görülmüştür. Çocuklar için somut olarak var olan nesne sayısına dikkat etmeden doğrudan ayırmanın, zihninde sayıyı canlandırarak ve her seferinde toplam sayıyı göz önünde bulundurarak parçalama yapmaktan daha kolay olması bu durumun bir nedeni olarak yorumlanmıştır. Tsamir vd. (2015)'nin de yaptığı çalışmada çocukların kartlar

kullanarak soruyu çözebilmelerinden farklı olarak, zihinden cevap bulmaları gerektiğinde zorlanmaları sonucu bu araştırmanın sonuçlarını desteklemektedir. Ayrıca, Billings (2017) de somut nesne ve onluk kartların kullanımının çocukların genellemelere ulaşmalarına yardımcı olduğunu vurgulamaktadır.

Billings (2017) anaokulu öğrencileri ile yaptığı çalışmada, çocukların sayıların farklı parçalamalarını modelleyerek değişme özelliğini ve parça-bütün ilişkilerini keşfedebildiklerini tespit etmiştir. Van De Walle vd. (2021) ise çocukların ileri sınıflarda durumu genelleyip, değişken kullanarak parça-bütün ilişkilerini tanımlayabilmeleri adına, sayıların parçaları arasındaki ilişkiyi fark etmelerinin önemini vurgulamışlardır. Bu bağlamda, bu çalışmada da çocukların değişme özelliğini ve parçalar arası ilişkiyi fark etmeleri beklenmiştir. Fakat çocukların sayıların farklı kombinasyonlarını oluşturmalarına rağmen, bu farklı parçalamalar arası ilişkiyi ve örüntüyü fark etmekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Schifter vd. (2008), ilkokul 2. sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin değişme özelliğini ifade eden, örneğin $15+21=21+15$ şeklinde, sayısal ifadelerde eşitliğin iki tarafının aynı toplam olduğunu bildikleri halde eşitliğin yanlış olduğunu düşündüklerini tespit etmişlerdir. Bunun nedeni çocukların eşitlik sembolünü solda yazılan işlemin cevabını yazmak için kullanılan bir simge olarak algılamalarıdır (Carpenter vd., 2003; Kieran, 1992). Bu çalışmada ise çocuklar eşitliği aynılık ve eşdeğerlik olarak algılasalar da soruya işlemsel olarak yaklaştırmışlar ve değişme özelliğini keşfedememiş ve kullanamamışlardır. Bunun nedeni sadece bir bağlam üzerine çalışılmaması, aynı anda ve kısa sürede birkaç kavram üzerine odaklanılması olarak düşünülebilir. Araştırmacılar (Kaput, 1999; Carpenter vd. 2003; Knuth vd., 2005; Gürbüz ve Akkan, 2008) araştırmalarında çocukların aritmetik problemleri çözerken işlem özelliklerini uygulamadan, soruya işlemsel olarak yaklaştıklarını ortaya çıkararak bu araştırmanın sonucunu desteklemektedirler.

Sophian (1994)'ın çalışmasında, 5 yaşındaki anaokulu öğrencilerinin sayı parçaları hakkında sınırlı bilgiye sahip olmalarına rağmen, toplama ve çıkarma problemlerinde doğru yanıtı ulaşmak için gereken sayıyı parçaladıkları tespit edilmiştir. Bu çalışmada da üç çocuğun sayıları parçalayarak, üçünün ise sayarak bilinmeyi buldukları görülmüştür. Sayıları parçalayarak çözüme ulaşan üç çocuktan ikisinin akademik başarı düzeyi yüksek, birinin ise akademik başarı düzeyi düşüktür. Sayarak bulanların ise akademik başarı düzeyi yüksektir. Bu bağlamda, Ulusoy vd. (2023)'nin ulaştıkları

sonuçların tersine, sayılarla ilgili problemlerin çözümünde parça-bütün ilişkisi kurarak çözüme ulaşan çocukların, sayma kullanarak çözüme ulaşanlardan daha iyi performans gösterdikleri söylenemez.

Bu çalışmada araştırmacı tarafından eşit olması gerektiği vurgulanmadığı durumda tüm çocukların ilk adım olarak eşit parçalama yaptıkları, bazı çocukların ise eşit şekilde parçalamanın dışında çeşitli parçalamaları düşünmekte zorlandıkları, eşitliğe odaklandıkları görülmüştür. Bu çocukların eşit paylaşırma üzerine odaklandıklarını ve onlar için eşit kombinasyonlar oluşturmaın daha kolay olduğunu göstermektedir. Cowan (2013)'ın eşit kombinasyonların çocuklar için en kolay kombinasyonlar olduğunu vurgulaması, Stokes (2014)'ın yaptığı çalışmasında, tek bir parçalama yapma şansı olduğunda çocukların %65'nin eşit parçalama yaptıkları sonucuna ulaşması bu çalışmanın sonuçlarını desteklemektedir.

Tek/Çift Sayı Kavramı;

Gruplama becerisi teklik çiftlik kavramlarının oluşturulmasında önemli bir rol oynadığı söylenebilir. Nitekim çalışma kapsamında 60-72 aylık küçük çocukların ad koymadan tek ve çift sayıları keşfedebildikleri ve kavramsallaştırebildikleri belirlenmiştir. Çocuklar çift sayıların tek sayılardan farklı olarak iki gruba eşit şekilde paylaştırılabildiğini vurgulamıştır. Çocuklar, çift sayıda nesnelerin ikiye eşit şekilde bölündüğünü, tek sayıda nesnenin ise ikiye bölünmesi için bir tane daha nesne olması gerektiğini veya bir tane artık kaldığını ifade ederek kendilerine has bir dilde açıklayabilmiştir. Buna karşın akademik başarı düzeyi düşük olan iki çocuğun ise teklik çiftlik kavramını açıklayamadıkları görülmüştür. Bu çocukların ikili gruplama yapmakta zorlanmaları bu durumun bir nedeni olarak yorumlanabilir.

Diğer yandan araştırmada örneğin köpeklerin iki kulübeye eşit şekilde yerleştirilmesi probleminde olduğu gibi hikâye probleminin ve bu problem için kullanılan fiziksel materyallerin (kâğıttan kesilmiş objeler) çocukların tek ve çift sayıları daha kolay keşfetmelerini sağladığı ve açıklamalarına yön verdiği de söylenebilir. Benzer şekilde örneğin, Hendry (1988)'nin araştırmasında çocuklara sadece çifti olan kardan adamların kar topu oyununa katılabilecekleri vurgulanarak kaç tane kardan adamın oyuna katılabileceği ve katılamayacağı sorulmuş, çocukların tek ve çift sayı kavramlarını keşfedebildikleri görülmüştür. Benzer şekilde, Isler (2013)'ın çalışmasında 3. Sınıf öğrencilerinin farklı sayıda küpleri çiftlere ayırmaları istenerek öğrencilerin tüm çiftler

yapıldıktan sonra çift sayılarda hiç küp kalmadığını, tek sayılarda ise bir küp kaldığını fark etmeleri sağlanmıştır. Darnis ve Dodd (2021)'un çalışmalarında anaokulu eğitimi alan çocukların farklı sayıda bilyeler ve çubuk kullanarak 1'den 10'a kadar çift ve tek sayıları ayırt edebildikleri; bir bilyenin eşsiz kaldığı durumun tek sayıları, tüm bilyelerin eşi olduğu durumun ise çift sayıları temsil ettiğini ifade ettikleri görülmüştür. Strachota vd. (2024) yaptıkları araştırmanın sonucunda çocukların teklik çiftlik kavramlarını oluşturabildiklerini ve küplerin, nokta kartların ve parmakların kullanımının çocukların çift ve tek sayıların özelliklerine ilişkin akıl yürütmelerini desteklediğini vurgulamışlardır. Bu araştırmalar (Hendry, 1988; Isler, 2013; Darnis ve Dodd, 2021; Strachota vd., 2024) çocukların teklik çiftlik kavramlarını yapılandırabildikleri sonucuna ulaşarak bu araştırmanın sonuçlarını desteklemektedir. Bu çalışmada çocuklar tek ve çift sayılar hakkında genelleme yapmamış olsalar da teklik ve çiftlik kavramlarını erken yaşlardan yapılandırmaları ileri sınıflarda onların bu konuda genellemelere ulaşmalarına yardımcı olacak ve bu süreci kolaylaştıracaktır. Benzer şekilde Keith (2006) da teklik çiftlik kavramlarına ilişkin bu tür yapılandırıcı yaklaşımın çocukların tek ve çift sayılarla yapılan işlemler hakkında da genelleme yapmalarına yardımcı olduğunu vurgulamıştır.

İşlemler ve özellikleri;

Erken yaşlarda çocuklardan somut materyaller kullanarak basit toplama, çıkarma ve bölme işlemlerini gerçekleştirmeleri beklenmektedir (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013). Polater (2024) çocukların toplama işlemini nesne artışı ve çoğalma, çıkarma işlemini ise nesneyi alma ve eksilme olarak anlamlandırmaları gerektiğini vurgulamıştır. Çocukların işlemleri isimlendirmeden önce, bu işlemlerin yapısını benimsemeleri gerekmektedir. Aksi durumda, çocuklar problem çözerken hangi işlem yapmaları gerektiğini belirlemede zorlanmaktadırlar (Bastable ve Schifter, 2008). Bu bağlamda, Polater (2024)'ın da ifade ettiği gibi, bu çalışmada bazı çocuklar fazla olanı silerek çıkarma, eksik olanı ekleyerek de toplama işlemini gerçekleştirmişler. Çocuklar toplama işlemini birleştirme olarak algılamış ve toplama yaparken toplananları birleştirip baştan saymaya başlayarak “hepsini sayma” stratejisini kullanmışlardır. Ayrıca Cheng (2012)'in araştırmasında olduğu gibi, bu çalışmada da bazı çocukların basit toplamalarda, örneğin $2+2=4$, hiçbir hesaplama yapmadan cevabı hatırlayarak buldukları görülmüştür.

Bu çalışmada tüm çocukların birebir paylaşırma yaparak veya nesneleri ortadan çizgiyle ya da elleriyle bölerek, doğrudan eşit gruplar oluşturarak sayıyı iki eşit parçaya bölmeleri;

çoğunlukla da paylaşırma yaparak bölme işlemini gerçekleştirdikleri görülmüştür. Çocuklar günlük hayatlarında “paylaşırma” eylemini sık sık kullandıkları için, aslında bilinçsiz şekilde bölme işlemini gerçekleştirmektedirler. Bölme işleminin çocuklara “doğal” geldiği söylenebilir. Bu araştırmada tüm çocuklar zorlanmadan “eşit” bölme işlemini yapabilmişlerdir. Bu nedenle, sayıların farklı kombinasyonlarını oluştururken çocuklar ilk adım olarak eşit parçalamalar yapmışlardır. Bu sonuçlara paralel olarak, Cheeseman vd. (2020)’nin çalışmalarında da çocuklar eşit gruplar oluşturarak bilinçsiz şekilde bölme işlemini gerçekleştirebilmişlerdir. Bu araştırmada bölmenin yanı sıra, göz sayısını bulmak için bazı çocuklar tekrarlı toplama yaparak bilinçsiz şekilde çarpma işlemini gerçekleştirmişlerdir. Mulligan ve Mitchelmore (1997) çalışmalarında ilkökul öğrencilerinin problemleri çözerken doğrudan sayma, tekrarlı toplama ve çarpma olarak üç farklı çarpma stratejilerini, paylaşırma ve tekrarlı çıkarma olarak da bölme stratejilerini kullandıklarını; Zaranis ve Alexandraki (2021) de çalışmalarında geleneksel öğretimden farklı olarak, 4-6 yaşında çocukların gerçek hayat durumları içeren etkinlikler ve bilgisayar oyunları ile çarpma ve bölme kavramlarını oluşturabildiklerini tespit etmiştir. Carpenter vd. (1993) ve Mulligan (1992)’in araştırmalarında olduğu gibi, bu çalışmada da bazı çocukların toplam göz sayısını veya göz sayısına göre köpek sayısını belirlemek için modelleme, gruplama ve sayma yaparak, bilinçsiz şekilde çarpma ve bölme işlemlerini gerçekleştirerek çözüme ulaştıkları görülmüştür.

Van De Walle vd. (2021) aritmetiğin genellemesi olarak cebirsel düşünmenin anaokulundan itibaren, çocukların parmakları, nesneleri, çizimleri, imgeleri veya sözel ifadeleri kullanarak işlemleri gerçekleştirmeleri ile başladığını vurgulamışlardır. Van De Walle vd. (2021)’nin vurguladıkları gibi, bu araştırmada çocuklar işlemleri gerçekleştirirken sözel ifadeleri, somut nesneleri, parmaklar, çizimler ve imgeleri kullanmışlardır.

Temsil biçimi;

Çocukların düşüncelerini resim çizerek ve farklı temsiller kullanarak ifade etmesi çocuğun zihinsel sürecini yansıtarak derinlemesine inceleme fırsatı sunmaktadır (Duval, 2008). Dede ve Argün (2003) çocukların eşitlik, değişken, örüntüler, fonksiyonel ilişki gibi cebirin temel kavramlarını anlamalarını sağlamak için çocuklara soyut kavramları daha somut ve anlaşılabilir bir şekilde anlatılması gerektiğini vurgulamışlardır. Bu

bağlamda, bu araştırmada çocuklardan düşüncelerini resim çizerek açıklamaları istenmiş ve problem durumu kâğıttan kesilmiş objeler ile somutlaştırılarak tasarlanmıştır.

Çocuklara herhangi bir durumla ilgili matematiksel fikirlerini ve düşüncelerini kendilerine has bir şekilde ifade etmelerine fırsat verilmesi de oldukça önemlidir. Bu çalışmada çocukların problem çözme sürecinde düşüncelerini açıklamak için sözel ifadelerden oluşan dilsel temsil, somut nesneler ve problemde geçen ana karakter ve yapıları doğrudan çizerek resim temsili kullanarak düşüncelerini somutlaştırmaya yöneldikleri görülmüştür. Matematik düzeyi yüksek olan çocukların ise imge temsilini, ara sıra sayı ve sembol temsilini kullanarak düşüncelerini soyutlaştırmaya doğru geçişte oldukları da tespit edilmiştir. Ancak matematiksel dil, yani sayı ve sembolleri kullanmaya özen gösteren çocukların problem çözmede daha başarılı oldukları da söylenemez. Bu çalışmada çocukların çizimlerini matematiksel iletişim aracı olarak kullandıkları söylenebilir. Buna paralel olarak, Cheeseman vd. (2020)'nin çalışmalarında da küçük çocukların kavramlara ilişkin düşüncelerini görselleştirebildiği ve bunları çizimleri ve konuşmaları yoluyla iletebildiği görülmektedir.

Bu çalışmada çocukların somut nesneler kullanarak daha iyi performans gösterdikleri, hatta somut nesne kullanımından çizime geçerken strateji değiştirdikleri görülmüştür. Tsamir vd. (2015)'nin yaptığı çalışmalarında çocukların sayıların farklı kombinasyonları üzerine problemleri çözerken dokunulabilir ve hareket ettirilebilir fiziksel nesnelerle daha başarılı olmaları ve daha etkili stratejiler kullanmaları bu araştırmanın sonuçlarını desteklemektedir. Fakat, bu sonuçlar yalnızca somut, hareket ettirilebilir nesnelerinin kullanılması gerektiği anlamına da gelmemelidir. Çeşitli araçlar kullanarak çocukların matematiksel anlayışları gelişebilmektedir. Bastable ve Schifter (2008)'in, çalışmalarında küçük çocukların formel sembolik gösterimlerden ziyade sözel ifadeler kullanarak genellemelere ulaştıkları gibi, bu araştırmada da fiziksel nesnelerin ve çizimlerin yanı sıra, çocukların sözel ifadeler kullanarak düşüncelerini açıkladıkları ve ilişkileri ifade ettikleri belirlenmiştir.

Fonksiyonel ilişki;

Küçük çocukların erken yaşlarda basit örüntüler ve ilişkiler üzerine düşünerek fonksiyonel ilişki becerilerini geliştirmeleri cebirsel düşünme bağlamında çok önemlidir. Araştırmacılar tarafından (Moss ve London-McNab, 2011; Blanton ve Kaput, 2011; Blanton vd., 2015; Brizuela vd., 2015; Blanton ve Kaput, 2004; Warren ve Cooper,

2005b) çocukların erken yaşlarda fonksiyonel düşünme becerilerine sahip oldukları vurgulanmakta ve bu becerilerin incelenmesinin ve geliştirilmesinin daha sonraki sınıflarda matematik başarılarını etkileyebileceği ifade edilmektedir. Bu çalışmada ise bazı çocukların fonksiyonel düşünme bağlamında yinelemeli ilişki kurdukları (2 çocuk), akademik başarı düzeyi düşük olan çocukların fonksiyonel ilişki kurmada zorlandıkları ve fonksiyonel ilişkiyi belirleyemedikleri (3 çocuk) görülmüştür. Bu çocukların fonksiyonel ilişki kurmakta zorlanmalarının nedeni iki farklı değişkeni birbirinden ayırt edememeleri, sadece bir değişkene odaklanarak yinelemeli ilişki kurmaları olduğu söylenebilir. Diğer yandan yinelemeli ilişki kuran çocuklar niceliklerin eş zamanlı değişimini ve aralarındaki karşılıklı ilişkiyi ifade etmeseler de, bir değişkene odaklanarak ve örüntünün sabit farkını algılayarak örüntüyü yakın bir adıma devam edebilmişlerdir.

Matematik düzeyi yüksek olan çocukların ise fonksiyonel ilişkiyi belirleyebildikleri (3 çocuk), bu süreçte birlikte değişim ve eşleme stratejilerini kullandıkları saptanmıştır. Nitekim çocukların köpek sayısının birer değiştiğinde, gözlerin ikişer değişmesini ifade etmesi, iki değişkenin eş zamanlı değişimini fark ettiklerini göstermektedir. Ayrıca değişkenlerin eş zamanlı değişimini fark eden çocuklar aynı zamanda eşleme yaparak fonksiyonel ilişki kurabilmişlerdir. Ayrıca çocuklar problemi sadece sözel olarak cevapladıklarında nicelikler arası geçiş yapmakta zorlansalar da problem durumunu çizime aktardıklarında daha kolay şekilde nicelikleri birbirinden ayırt edebilmişlerdir. Blanton ve Kaput (2004)'un çalışmasında, benzer şekilde bazı anaokulu öğrencilerinin nicelikler arası fonksiyonel ilişkileri sözel ifadelerle (örneğin, ne zaman bir tane daha köpek gelirse iki göz daha eklenir) açıklayabilmeleri, çizim, imge ve semboller kullanarak verileri kaydetmeleri ve bu ilişkileri sembolize etmeleri çocukların düşünüldenden daha erken yaşlarda fonksiyonel düşünme becerilerine sahip olduğunu göstermekte ve bu araştırmanın sonuçlarını da desteklemektedir. Benzer şekilde, Warren vd. (2006) anaokulu öğrencilerinin nicelikleri ve nicelikler arası ilişkileri tanımlayabildiklerini ve fonksiyonel düşünme becerilerinin geliştirilmesinin okulöncesinden itibaren başlaması gerektiğini vurgulamaları da çalışmanın sonuçlarını destekler niteliktedir.

Diğer yandan araştırmada çocukların, fonksiyonel ilişkiyi birbirine yakın adımlarda kurabilirken bu ilişkiyi daha büyük sayılara genelleymedikleri de görülmüştür. Çocuklar ardışık şekilde örüntüyü kolayca devam ettirebilmiş, rastgele bir şekilde bir terim

sorulduğunda ise zorlanarak tekrar baştan başlayarak istenilen terimi belirlemişlerdir. Benzer şekilde, Carraher vd. (2008b)'nin de çalışmalarında öğrencilerin sıralı bir örüntüyü bir yere kadar devam edebildiklerini, fakat sözel ya da matematiksel olarak genellemeye ulaşmakta ve kural belirlemede zorlandıklarını tespit etmişlerdir. Bu araştırmada olduğu gibi yapılan bazı araştırmalarda (A. Orton ve J. Orton, 1999; Bourke ve Stacey, 1988; Hargreaves vd., 1999) çocukların sıralı şekilde bir sonraki değişkeni bulmada güçlük çekmediklerini, fakat rastgele bir değişkenin değerini bulmada zorlandıkları sonucuna vararak bu araştırmanın sonuçlarını desteklemektedir.

Genelleme, gerekçelendirme, doğrulama;

Genellemelere ulaşmak ve gerekçeler sunarak bunu doğrulamaya çalışmak cebirsel düşünmenin temelini oluşturmaktadır (Carpenter vd., 2003; Schifter vd., 2008). Bu çalışmada bazı çocukların problem durumu ile ilgili gereken gerekçeleri sunarak genelleme yaptıkları, çözümlerini kontrol etmek için de doğrulama yaptıkları görülmüştür. Böylece 4 çocuk gerekçelendirme sunarak genelleme yapabilirken, bir çocuk gerekçelendirmeden genelleme yapabilmıştır. Akademik başarı düzeyi yüksek olan bu çocukların genelleme, gerekçelendirme ve doğrulama matematiksel araçlarından en az birini kullandıkları görülmüştür. Akademik başarıları düşük olan iki çocuk ise bu süreçte ne genelleme, ne gerekçelendirme, ne de doğrulama yapabilmıştır.

Van De Walle vd. (2021)'nin vurguladıkları gibi, çalışmada çocuklara “burada ne fark ediyorsun?”, “neden böyle düşünüyorsun?”, “dediklerin ne zaman doğru olur?” gibi sorular sorulmasının ve tartışılmasının problem durumu ile ilgili genelleme yapmalarına yol açtığı izlenimi edinilmiştir. Dolayısıyla çalışmada olduğu gibi uygun ortamların ve soruların tasarlanmasıyla küçük çocukların erken yaşlarda genelleme, gerekçelendirme ve doğrulama yapabildikleri ve bu şekilde cebirsel düşünme becerilerine sahip oldukları söylenebilir. Buna paralel olarak, Blanton (2008) çocukların analiz etme, varsayım, genelleme, gerekçelendirme, ispatlama ve temsil etme aracılığıyla aritmetiğin ötesine geçerek cebirsel düşünmeye başlayabileceklerini vurgulamıştır. Benzer şekilde, Tzekaki ve Papadopoulou (2019) çalışmalarında, genelleştirilmiş fikirleri ifade etmeyi teşvik eden öğretim programı uygulandıktan sonra 5-6 yaş çocukların çoğunun sayı ilişkilerini ifade ettikleri ve genelleştirebildikleri görülmüştür. Bu çalışmada genelleme yapan çocuklar problem durumu üzerine düşünerek, kendilerine göre sözel ifadeler kullanarak bir çıkarımda bulunmuşlardır. Bu nedenle çocuklara herhangi bir durumla ilgili matematiksel

fikirlerini ve düşüncelerini, kendilerine has bir şekilde ifade etme ve paylaşma fırsatı verilmesi oldukça önemlidir. Brizuela vd. (2015), Blanton vd. (2015) ve Kaput (2008)'un çocukların erken yaşlarda doğal dil kullanarak varsayımda bulunmaları, genellemeleri, ispatlamalarının ileride onların soyut cebire geçişlerini kolaylaştırdığını ifade etmektedir.



7 ÖNERİLER

Araştırmadan elde edilen sonuçlar bağlamında aşağıdaki öneriler sunulmuştur.

Araştırmacılara yönelik öneriler:

- Türkiye’de okul öncesi düzeyinde birçok araştırmalar yapılmış olsa da, cebirsel düşünme bağlamında küçük çocuklarla yapılan araştırmalara rastlanmamıştır. Burdan yola çıkarak küçük çocukların cebirsel düşünme becerilerinin incelenmesi hakkında araştırmaların yapılması önerilir.
- Küçük çocukların cebirsel düşünme becerilerini daha derinlemesine incelemek amacıyla öğretim düzenlenebilir, 3-6 ay sürecinde çocukların değişimi izlenebilir ve kontrol grubu belirlenerek deney grubu karşılaştırılabilir.
- Çalışmanın sonuçlarının genellenebilirliğine katkı sunmak amacıyla programlar geliştirilebilir ve geniş katılımcı kitlesi ile çalışmalar gerçekleştirilebilir.
- Anaokulu eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme becerilerinin zaman içinde olan gelişimini incelemek için uzun soluklu çalışmalar gerçekleştirilebilir ve anaokul ve ilkokul eğitimi alan çocukların cebirsel düşünme biçimleri karşılaştırılabilir.
- Küçük çocukların cebirsel düşünme becerileri yaş, sosyo-ekonomik düzey, ebeveynlerin öğrenim düzeyi, anaokuluna devam etme süreci gibi değişkenler bağlamında araştırılabilir.
- Çocukların cebirsel düşünme gelişimlerine yönelik yapılabilecek etkinlikler hakkında okul öncesi öğretmenlerine ve ebeveynlere bilgi verme amaçlı seminerler düzenlenebilir.
- Erken yaştan itibaren çocukların cebirsel düşünme becerilerinin gelişimi kapsamında projeler hazırlanabilir.

Öğretmenlere yönelik öneriler:

- Öğretmenlere ve ebeveynlere çocukların kendi matematik anlayışları, kendi informel dili ve okul matematiği arasında bağlantı kurmalarına yardımcı olmaları önerilir.

- Çocuklar okul bilgisini önceden anaokulunda geliştirmiş beceriler üzerine inşa etmektedirler. Bu nedenle erken yaşlardan çocuklarda matematiksel farkındalık, genelleme, doğrulama, ispatlama gibi becerilerin geliştirilmesi önerilir.
- Öğretmenlerin çocuklara kendi düşüncelerini ve varsayımlarını tartışmalarına fırsat tanıyarak, çocukların fikirlerini utanmadan paylaşmalarını ve bu şekilde matematiksel fikirlerinin ortaya çıkmasını sağlaması önerilir.
- Öğretmenlerin, çocuklara kendi iformel dil ve icat ettikleri sembolizmi, kendi yöntemlerini kullanmalarına, çocukların düşüncelerini kendileri için anlamlı olan bağlamlarda açıklamalarına izin verilmesi önerilir.
- Öğretmenlerin çocukları bireysel olarak değerlendirip, güçlü yanlarını bilerek bu yeteneklerini geliştirmelerine yardımcı olmaları önerilir.
- Aynı şekilde çocukları bireysel olarak değerlendirip, zayıf yanlarını bilerek bunu aradan kaldırmalarına yardımcı olmaları önerilir.
- Özellikle küçük çocuklar ezbere sembolleri kullanmaya zorlanırlar, yeni bilgileri anlamakta güçlük yaşayabilirler. Bu nedenle daha somut şekilde kavramların ve ilişkilerin keşfedilebileceği ortamların tasarlanması önerilir.
- Cebirsel kavram ve anlayışları çocukların anlayacağı, gerçek hayat durumları bağlamında, hikâye şeklinde tasarlayarak öğretilmesi önerilir.
- Öğretmenlerin okulöncesi öğretim sürecinde sayıların yapısı (farklı kombinasyonları), işlemlerin özellikleri, basit denklemler, eşitliğin anlamı, basit fonksiyonel ilişkiler hakkında düşünmelerini ve keşfetmelerini sağlayan etkinliklerle zenginleştirmeleri önerilir.

KAYNAKÇA

- Akkan, Y., Baki, A. ve Çakıroğlu, Ü. (2011). Differences between arithmetic and algebra: Importance of prealgebra. *Elementary Education Online*, 10(3), 812-823.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K. and Nurimi, J. E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699-713. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.4.699>
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Bastable, V. and Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. J. Kaput, D.W. Carraher and M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (1st ed., pp. 165-184). Routledge.
- Beatty, R. and Bruce, C. (2012). *From patterns to algebra: Lessons for exploring linear relationships*. Nelson Education.
- Billings, E. M. H. (2017). SMP that help foster algebraic thinking. *Teaching Children Mathematics*, 23(8), 476-483. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.23.8.0476>
- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann Educational Books.
- Blanton, M. L. and Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching children mathematics*, 10(2), 70-77.
- Blanton, M. L. and Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *International Group For The Psychology Of Mathematics Education*. (Vol. 2) 135- 142. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00457-x>
- Blanton, M. and Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. <https://doi.org/10.2307/30034944>
- Blanton, M. L. and Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5 – 23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

- Blanton, M., Levi, L., Crites, T. W., Dougherty, B. J. and Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. series in essential understandings*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A. and Kim, Y. (2018). Exploring kindergarten students' early understandings of the equal sign. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(3), 167-201.
<https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1474534>
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. and Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.1.0039>
- Bourke, S. and Stacey, K. (1988). Assessing problem solving in mathematics: Some variables related to student performance. *The Australian Educational Researcher*, 15(1), 73-83.
<https://doi.org/10.1007/BF03219402>
- Britt, M. S. and Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 137–159). Springer.
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. and Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34–63.
<https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939>
- Cai, J. and Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer.
- Cai, J. and Moyer, J. C. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. In C. E. Greene and R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (s. 169–182). National Council of Teachers of Mathematics.
- Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. and Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes.

- Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 428-441.
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.24.5.0428>
- Carpenter, T. P. and Franke M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Vol. 1, pp. 155–162). Program Committee of ICMI-12 Study.
- Carpenter, T. P., Franke, M. and Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.
- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. and Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM Mathematics Education*, 37(1), 53–59.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V. and Schliemann, A. D. (2008a). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.
<https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carraher, D. W. and Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Information Age.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. and Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 37(2), 87-115. <https://doi.org/10.2307/30034843>
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D. and Schwartz, J. L. (2008b). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher and M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Routledge.
- Cavanagh, S. (1997). Content analysis: Concepts, methods and applications. *Nurse Researcher*, 4(3), 5-16.
- Charlesworth, R. and Lind, K. K. (2009). *Math and science for young children*. New York: Delmar.
- Cheeseman, J., Downton, A., Roche, A. and Ferguson, S. (2020). Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 little ducks problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 60, 100817. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100817>

- Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 29–47. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.002>
- Clements, D. H., Sarama, J. and DiBiase, A. M. (2003). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Routledge.
- Cooper, T. J. and Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations, and theory for teaching and learning. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187–214). Springer.
- Cowan, R. (2013). Does it all add up? Changes in children's knowledge of addition combinations, strategies, and principles. In *The development of arithmetic concepts and skills* (1st ed., pp. 35-74). Routledge.
- Creswell, J. W. and Poth, C. N. (2016). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Sage publications.
- Darnis, S. and Dodd, J. (2021). Increasing the learning result of early mathematics odd and even numbers through Montessori "Cards and Counters" activity: A quasi-experimental study. *Al-Athfal: Jurnal Pendidikan Anak*, 7(2), 99-110.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(24), 180-185.
- Dede, Y., Yalın, H. İ. ve Argün, Z. (2002, Eylül). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanılgıları [Sözlü sunum]. V. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, ODTÜ, Ankara.
- Dindyal, J. (2003). *Algebraic thinking in geometry at high school level* (UMI Number: 3087865) [Doctoral dissertation, Illinois State University]. ProQuest.
- Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for teachers grades 6-10*. Heinmann.
- Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education*, 39-61. Sense Publishers.
- Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. and Allen, S. T. (1993). *Doing naturalistic inquiry: A guide to methods*. Sage.

- Falkner, K. P., Levi, L. and Carpenter, T. P., (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232-236.
<https://doi.org/10.5951/TCM.6.4.0232>
- French, D. (2002). *Teaching and learning algebra*. Bloomsbury Publishing.
- Geist, E. (2001). Children are born mathematicians: Promoting the construction of early mathematical concepts in children under five. *Young children*, 56(4), 12-19.
- Gifford, S. (1992). Young children's representations of number operations. In S. Atkinson (Ed.), *Mathematics with reason: the emergent approach to primary maths* (pp. 63-74). Great Britain Hodder and Stoughton Educational.
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly and R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Greenes, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C. and Small, M. (2001). Navigating through algebra in prekindergarten – grade 2. (No title).
- Greenes, C. and Findell, C. (1998). *Groundworks: Algebra puzzles and problems (Grades 4, 5, 6 and 7)*. Creative Publications.
- Greer, B., Verschaffel, L. and Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, 89-98.
- Griffin, S. (2004). Building number sense with number worlds: A mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly*, 19, 173 – 180.
- Gürbüz, R. ve Akkan, Y. (2008). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş düzeylerinin karşılaştırılması: Denklem örneği. *Eğitim ve Bilim*, 33(148), 64-76.
- Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. and Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (s. 67–83). Continuum.
- Hendry, A. (1988). *Snowman math. The Constructivist*, 3(2), 3-4.

- Herbert, K. and Brown, R. (1997). Patterns as Tools for Algebraic Reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 340-344. <https://doi.org/10.5951/TCM.3.6.0340>
- Hughes, M. (1986). *Children and Number: Difficulties in Learning Mathematics*. Oxford: Basil Blackwel.
- Isler, I., Stephens, A., Gardiner, A. M., Knuth, E. and Blanton, M. (2013). Third graders' generalizations about even numbers and odd numbers: The impact of an early algebra intervention. In *Proceedings of the 35th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 140-143).
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. and Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 258–288.
- Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C. and Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equal sign. *Research in Mathematics Education*, 15(1), 34–49.
- Jordan, N.C., Kaplan, D., Ramineni, C. and Locuniak, M. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, 45, 850-867.
- Kabael, T. U. ve Tanışlı, D. (2010). Teaching from patterns to functions in algebraic thinking process. *Elementary Education Online*, 9(1), 213-228.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra 1. In E. Fennema ve T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Routledge.
- Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher and M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Routledge.
- Kaya, D. ve Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education (IJTASE)*, 3(2), 38-48.

- Keith, A. (2006). Mathematical argument in a second grand class: generating and justifying generalized statements about odd and even numbers. *Teachers Engaged in Research: inquiry into mathematics classrooms, grades prek-2. Education Review, Arizona*, 35-68.
- Kennedy, L. M., Tipps, S. and Johnson, A. (1991). *Guiding children's learning of mathematics*. Belmont, Calif.: Wadsworth.
- Kesebir, G. (2024). *Çocukların cebirsel düşünme gelişimi* (Yayın Numarası: 880047) [Doktora tezi, Marmara Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Şahin, Ş. (2022). Otizm spektrum bozukluğu olan çocukların problem davranışlarının azaltılmasında yapılabirliği yüksek istekte bulunmanın etkileri (Yayın Numarası: 722714) [Doktora tezi, Anadolu Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Kızıltepe, Z. (2015). İçerik Analizi. İçinde F. N. Seggie ve Y. Bayyurt (Ed.), *Nitel Araştırma Yöntem, Teknik, Analiz ve Yaklaşımları* (1. Baskı, ss. 253-266). Anı Yayıncılık.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Macmillan.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 79–105). Springer.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131–1150.
- Kieran, C. and Chalouh, L. (1993). The transition from arithmetic to algebra. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 179-198). Macmillan.
- Killworth, S., Neilson, L. and Atkinson, S. (1992). Nursery children explore maths. In S. Atkinson (Ed.), *Mathematics with reason: the emergent approach to primary maths* (pp. 56-62). Great Britain Hodder and Stoughton Educational.

- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. and Ng, S. F. (2016). *Early Algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer.
- Kirk, J. and Miller, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research* (Vol. 1). Sage.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. and Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable. *ZDM Mathematics Education*, 37(1), 68-76. <https://doi.org/10.1007/BF02655899>
- Knuth, E. J., Stephens, A., Blanton, M. and Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, 97(6), 65-68.
- Kyngas, H. and Vanhanen, L. (1999). Content analysis. *Hoitotiede*, 11, 3-12.
- Laski, E. V., Ermakova, A. and Vasilyeva, M. (2014). Early use of decomposition for addition and its relation to base-10 knowledge. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 35(5), 444-454. doi: <https://doi.org/10.1016/j.appdev.2014.07.002>
- Lauri, S. and Kyngas, H. (2005). *Developing nursing theories*. Dark Oy, Vantaa: Werner Söderstrom.
- Lee, J., Collins, D. and Melton, J. (2016). What does algebra look likes in early childhood?. *Childhood Education*, 92(4), 305-310. <https://doi.org/10.1080/00094056.2016.1208009>
- Lee, L. and Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(9), 428-433.
- Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: an interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM–Mathematics Education*, 54(6), 1181-1197. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6>
- Lesh, R. and Doerr, H. (Eds.). (2003). *Beyond problem solving: Models and modeling perspectives on mathematical problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lew, H. C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator*, 8(1), 88-106.
- Malara, N. and Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*. Pitagora Editrice.

- Malara, N. A. and Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: Sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 51–77). Springer.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. and Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. The Open University.
- Mason, J., Stephens, M. and Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10–32.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Okul öncesi eğitim programı*. MEB Yayınları.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education (2nd ed.)*, Jossey-Bass Publishers.
- Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation. Revised and expanded from qualitative research and case study applications in education*. Jossey-Bass Publishers.
- Miles, M. B. and Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (Vol. 2), Sage Publications.
- Molina, M. and Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61.
- Moss, J. and London-McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Springer.
- Mulligan, J. (1992). Children's solutions to partition problems. In B. Southwell, R. Perry and K. Owens (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 410-420). MERGA.
- Mulligan, J. T. and Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for research in Mathematics Education*, 28(3), 309-330.

- Neagoy, M. (2012). *Planting the Seeds of Algebra, PreK 2: Explorations for the Early Grades*. Corwin Press.
- Nelson, C. A. (2000). Neural plasticity and human development: The role of early experience in sculpting memory systems. *Developmental Science*, 3(2), 115–136.
- Olkun, S., Çelik, E., Sönmez, M. ve Can, D. (2014a). İlköğretim birinci sınıf Türk öğrencilerinde sayma ilkelerinin gelişimi. *Başkent University Journal of Education*, 1(2), 115-125.
- Olkun, S., Fidan, E. ve Özer, A. B. (2013). 5-7 yaş aralığındaki çocuklarda sayı kavramının gelişimi ve saymanın problem çözmede kullanımı. *Eğitim ve Bilim*, 38(169), 236-248.
- Olkun, S. ve Toluk, Z. (2004). Teacher Questioning with an Appropriate Manipulative May Make a Big Difference. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 2, 1-10.
- Olkun, S., Yeşilpınar, M. ve Kışla, S. (2014b). Birinci Sınıf Öğrencilerinde Kardinalite ve İlişkili Kavramların Problem Durumlarında Kullanımı. *Ilkogretim Online*, 13(1).
- Ormond, C. (2012). Developing algebraic thinking two key ways to establish some early algebraic ideas in primary classrooms. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(4), 13-21.
- Orton, A. and Orton J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104–120). Cassell.
- Öksüz, C. (2007). Children's understanding of equality and the equal symbol. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 8, 1-19.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T. and Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268.
- Passolunghi, M. C., Lanfranchi, S., Altoè, G. and Sollazzo, N. (2015). Early numerical abilities and cognitive skills in kindergarten children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 135, 25-42.
- Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Sage Publications.
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (Çev. Ed. Mesut Bütün, Selçuk Beşir Demir). Pegem Akademi.

- Polater, C. (2024). Erken Çocuklukta Matematik Eğitimi. İçinde F. Erdoğan (Ed.), *Matematik ve Fen Bilimleri Eğitiminde Yeni Yaklaşımlar 2024-I*, 55.
- Potter, W. J. (2013). *An analysis of thinking and research about qualitative methods*. Routledge.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz and A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2–21). PME-NA.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40(1), 83-96. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0>
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17–24). PME.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277. Springer. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM Mathematics Education*, 54(6), 1151-1167. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x>
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. and McEllood, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376-396.
- Rivera, F. D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. In P. Brosnan, D. B. Erchick and L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 261–269). PME-NA.
- Sarama, J. and Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children*. Routledge.
- Schifter, D. (2018). Early algebra as analysis of structure: A focus on operations. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 309–328). Springer.

- Schifter, D., Monk, G. S., Russell, S. J. and Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? In J. J. Kaput, D. W. Carraher and M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 413-447). Routledge.
- Seidman, I. (2006). *Interviewing as qualitative research: A guide for researchers in education and the social sciences*. Teachers College Press.
- Shonkoff, J. P. and Phillips, D. (2000). *From neurons to neighborhoods: The science of early childhood development*. The National Academies Press.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher and M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). Routledge.
- Sophian, C. and McGorray, P. (1994). Part-whole knowledge and early arithmetic problem solving. *Cognition and Instruction*, 12(1), 3-33.
- Sperry-Smith S. (2016). *Erken çocuklukta matematik*. (S. Erdoğan, Çev.; 5. Basım). Ankara: Eğiten Kitap.
- Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important. *Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking*. 39-48.
- Steele, D. (2005). Using writing to access students' schemata knowledge for algebraic thinking. *School Science and Mathematics*, 105(3), 142-154.
- Steinweg, A. S., Akinwunmi, K. and Lenz, D. (2018). Making implicit algebraic thinking explicit: Exploiting national characteristics of German approaches. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, (pp. 283-307, e-book). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5>
- Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. and Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra!. *Teaching Children Mathematics*, 22(2), 92–101. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092>

- Stephens, A., Sung, Y., Strachota, S., Torres, R. V., Morton, K., Gardiner, A. M., Blanton, M., Knuth, E. and Stroud, R. (2022). The role of balance scales in supporting productive thinking about equations among diverse learners. *Mathematical Thinking and Learning*, 24(1), 1–18.
- Stokes, P. D. (2014). Using a creativity model to solve the place-value problem in kindergarten. *The International Journal of Creativity and Problem Solving*, 24(2), 101-122.
- Strachota, S., Stephens, A., Morton, K., Veltri-Torres, R., Blanton, M., Gardiner, A. M., Sung, Y., Stroud, R. and Knuth, E. (2024). How tools mediate elementary students' algebraic reasoning about evens and odds. *Mathematics Education Research Journal*, 36(2), 493-518.
- Şimşek, A. (2018). Evren ve Örneklem. İçinde A. Şimşek (Ed.), *Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri* (E-kitap. ss.108-133). T.C. Anadolu Üniversitesi Yayını No: 2653 Açıköğretim Fakültesi Yayını No: 1619.
- Şirin, S. (2011). *Anaokuluna devam eden beş yaş grubu çocuklara sayı ve işlem kavramlarını kazandırmada oyun yönteminin etkisi* (Yayın Numarası: 277422) [Yüksek Lisans tezi, Uludağ Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Torbeyns, J., Hickendorff, M. and Verschaffel, L. (2017). The use of number-based versus digitbased strategies on multi-digit subtraction: 9–12-year-olds' strategy use profiles and task performance. *Learning and Individual Differences*, 58, 64-74.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Tabach, M. and Barkai, R. (2015). Analyzing number composition and decomposition activities in kindergarten from a numeracy perspective. *ZDM Mathematics Education*, 47, 639-651.
- Turgut, S. ve Temur, Ö. D. (2017). Erken Cebir Öğretim Etkinliklerinin İlkokul Dördüncü Sınıf Öğrencilerinin Akademik Başarılarına Etkisi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 6(1), 1-31.
- Türkmen, H. ve Tanışlı, D. (2019). Cebir öncesi: 3. 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeyleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research Education*, 7(1), 344-372.

- Tzekaki, M. and Papadopoulou, E. (2019, February). Generalization in early arithmetic. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)* (No. 27). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.
- Ulusoy, Ç. A., Altay, M. K., Özer, A. ve Umay, A. (2023). Investigating Kindergarten Children's Performance and Strategies Used in Tasks Regarding Part-Whole Relations of Numbers. *Eğitim ve Bilim*, 48(214), 1-15.
- Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. *Teaching children mathematics*, 3(6), 346-356.
- Ünlü, M. (2019). Cebirsel düşünme ve cebirsel düşünmenin matematik eğitimindeki yeri. İçinde S. G. Aktaş (Ed.), *Uygulama örnekleriyle cebirsel düşünme ve öğretimi* (3.baskı). Pegem Akademi.
- Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63-75. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.00000005237.72281.bf>
- Van De Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2021). *İlkokul ve ortaokul matematiği: gelişimsel yaklaşımla öğretim* (S. Durmuş, Çev.;10. Basım). (Nobel Akademik Yayıncılık. (Orijinal yayın tarihi 2019).
- Warren, E. and Cooper T. (2005a). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal*, 17(1), 58-72.
- Warren, E. and Cooper, T. (2005b). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162. <https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5>
- Warren, E. A., Cooper, T. J. and Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 208-223.
- Warren, E., Mollinson, A. and Oestrich, K. (2009). Equivalence and equations in early years classrooms. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 14(1), 10-15. <https://eric.ed.gov/?id=EJ855964>
- Xie, S. and Cai, J. (2022). Fifth graders' learning to solve equations: the impact of early arithmetic strategies. *ZDM Mathematics Education*, 54(6), 1169-1179.

- Xu, F. and Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74(1), B1 – B11.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2021). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. 12. Baskı. Seçkin Yayıncılık.
- Yüce, S. ve Şen, C. (2022). An Early Algebra Teaching Experiment Aiming at the Improvement of Fourth-Grade Students' Generalization and Justification Strategies. *Journal of Hasan Ali Yücel Faculty of Education/Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi Dergisi (HAYEF)*, 19(3). <https://doi.org/10.5152/hayef.2022.24>
- Zaranis, N. and Alexandraki, F. (2021). Game-Based Learning for Teaching Multiplication and Division to Kindergarten Students. In L. Daniela (Ed.), *Smart Pedagogy of Game-based Learning*, 85-101.

EKLER

EK-1. Veri Toplama Aracı

Veri Toplama Aracı

1. “Köpekler ve Kulübe” problemi

6 tane köpek gezmeye çıkmışlar, biraz yürüdükten sonra birden yağmura yakalanmışlardır. Yağmurdan korunmak için etraflarına bakarken bulundukları yerde iki tane kulübe görmüşlerdir. Köpekler ıslanmamak için bu kulübelere yerleşmek istemişlerdir. Hadi köpeklere sen yardımcı ol.

- Onları kulübelere farklı şekillerde nasıl yerleştirirsin?
- İki kulübe arasında farklı şekillerde yer değiştiren köpek sayıları ile ilgili bir şey fark edebiliyor musun?
- Her iki kulübedeki toplam köpek sayısı ile ilgili bir şey fark edebiliyor musun?
- Beş tane yavru köpeği eşit şekilde kulübelere yerleştirebilir misin?



2. “Barınakta Köpek ve Gözleri” problemi

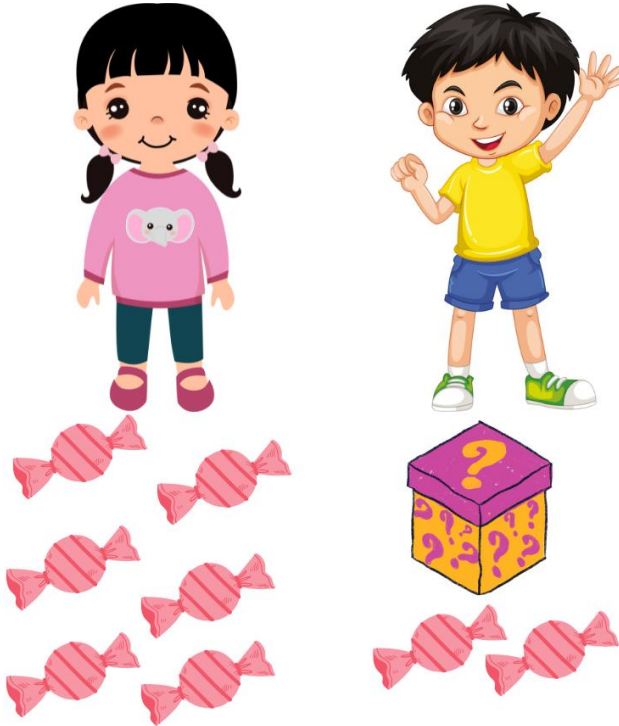
Diyelim ki bir köpek barınağındasın ve gördüğün tüm köpeklerin gözlerini saymak istiyorsun;

- a) Barınakta bir köpek olsaydı kaç tane gözü olurdu? Ya iki köpek olsaydı? Üç köpek olsaydı?
- b) Bir köpek daha olsa ne olur?
- c) Köpek sayısı ile toplam göz sayısı arasında bir ilişki görüyor musun?
- d) Bu ilişkiyi nasıl açıklarsın?

3. “Şeker Kutusu” problemi

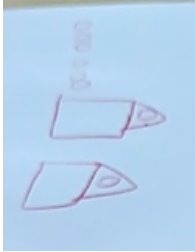
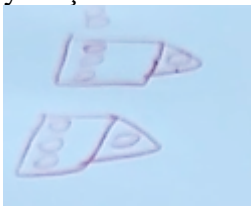
Bu resimde iki tane çocuk görüyoruz. Bu pembe kazaklı, siyah saçlı kız Sude’dir. Sarı tişörtlü, siyah saçlı erkek ise Mete’dir. Sude ve Mete yakın arkadaşlardır. Onlar şeker yemeyi çok seviyorlar. Sude’nin 6 tane şekeri varmış. Mete’nin ise bir kutu şekeri varmış. Annesi Mete’ye 2 tane daha şeker vermiş. Artık Sude ile Mete’nin aynı sayıda şekerleri olmuş. Buna göre;

- a) Mete’nin şeker kutusunda kaç tane şekeri vardır?
- b) Kutudaki şekerlerin sayısını nasıl buldun?
- c) Böyle olduğunu nasıl anladın?



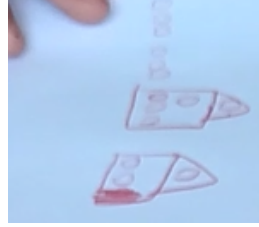
EK-2. Analiz Örnekleri

1. Araştırma sorusu: Köpekler ve Kulübeler		
Öğrenci	Döküm	Betimleme
Sanem	A: “Sabah çok güzel güneşli bir günde uyanmışsın ve dışarı çıkıp gezmeyi karar vermişsin. Dışarı çıktığında yavru köpekler görmüşsün. Yavru köpekler de senin gibi gezmeye çıkmış. Ancak birdenbire yağmur yağmaya başlamış ve yavru köpekler de senin gibi yağmura yakalanmış. Onların bulunduğu yerde iki tane kulübe varmış. Köpekler ıslanırlarsa hastalanabilirler. Onlara yardım etmemiz gerek. Sanemcim, bak bakalım kaç tane köpeğimiz var bizim? S: (sayıyor) altı A: Köpeklere yardımcı olur musun? S: evet A: Köpeklerin ıslanmaması için onları iki kulübeye yerleştirmek istersen nasıl yerleştirirsin? S: hepsinde altı tane olduğu için üçer üçer yerleştirdim A: eşit mi? S: evet, aynı sayıda A: nasıl anladın ? S: çünkü ben toplamayı biliyorum, onun için üçer üçer (her elinde üçer parmak açıyor) böldüm.  A: peki farklı şekilde nasıl yerleştirirdin? Aynı olması gerekmiyor S: bu sefer bir yerde dört, bir yerde iki yaptım (bir tane köpeği kaydırarak 2-4 parçalamasını yaptı ve bir elinde iki parmak, diğer elinde dört parmak açtı)  A: Peki bundan farklı bir şekilde yerleştirebilir misin?	Analitik Düşünme → Eşitliğin anlamı: Aynılık Yapısal Düşünme → Sayılar ve İlişkiler: Parçalama: İlk eşit parçalama yapılmış Somut nesnelerle sistematik şekilde, her seferinde birer köpek kaydırarak - Sistematiiklik Çizerek sistematik şekilde her seferinde birer köpeği bir kulübeden diğerine geçirderek - Sistematiiklik Kardinal sayma Genelleme → Biri azalırken, diğeri çoğalıyor Toplam değişmiyor Parçalar arası ilişki- burdan aldım, buraya koydum diye ifade ediyor

	S: altı tane köpek olduğu için bir yere beş bir yere bir yaptım (bir tane daha kaydırdı ve yine bir elinde beş, bir elinde bir parmak açtı)  A: peki bundan da farklı şekilde yapabilir misin? S: daha farklı şekilde, ıııı tamam (beş köpeğin hepsini diğere kulübeye çekti, 0-6 yaptı) en farklı şekil bu. A: şimdi nasıl oldu? S: şimdi hepsini koydum, bu sefer altısını da aynı kulübeye koydum, burada hiç köpek olmıcak (hepsini sag kulubeye çekti) A: bu yaptıklarınla ilgili bir şey farkediyor musun? S: bunları çıkarttım topladım ... (düşünüyor, susuyor) A: Bak önce 3-3 şeklinde yerleştirdin,sonra 2-4 yaptın, sonra 1-5 oldu , ne fark ediyorsun burada ? S: (bakıyor ve düşünüyor) ımmmm.... A: ne düşündüğü çizerek gösterir misin ? S: Tamam A: kendin anlayabilecek şekilde çizebilirsin. İstedğin şekilde çizebilirsin. Ne düşündüklerini gösterebilir misin? Bizim iki kulübemiz var, 6 tane köpeği bu kulübelere yerleştirmemiz lazım. S: (iki tane kulübe çiziyor ve ardından altı tane yuvarlak yapıyor) şimdi burada altı köpek var, burda da kulübeler var.  S: şimdi (her kulübeye üçer köpek çizdi) yerleştirdim 	Temsil Kullanma → İmge Resim Somut materyaller Parmaklarını kullanıyor
--	---	---

A: tamam, peki farklı şekilde nasıl yerleştire bilirsin?

S: şöyle (bir kulübeden köpeğin birini karalıyor ve diğer kulübeye bir köpek ekliyor)



A: tamam, 3-3 yapmıştın, şimdi ne yaptın?

S: şimdi bunu çıkartıp buraya koydum

S: Burada altı tane köpek var. İki tanesini buraya, dört tanesini buraya. **Bunu aldım buraya koydum** (karaladığı köpeği gösteriyor).



(-bunu aldım -buraya koydum)

A: Şimdi Sanem, buradan birini silip buraya çiziyorsun. Neden yapıyorsun bunu? Ne düşünüyorsun? Burdan silsem buraya çizmesem ama ne olur?

S: çizmesem burda iki tane kalır, burda da üç tane kalır diye düşünüyorum.

A: Peki bundan farklı şekilde yerleştirmek istersen?

S: Bir tanesini tekrar alıp koyarsam 5 tane olur burada. Bundan da buda gider. **Buda böyle gider (birinin üzerine çizdi) sonrada buda böyle buraya gelir (diğer kulübeye bir köpek daha ekledi).**

A: peki bu yaptıklarından farklı bir şekilde yapabilir misin? Daha da farklı şekilde geliyor mu aklına?

S: farklı şekilde... şimdi bu seferde böyle. İlk önce bunlardan en baştaki köpeklere yaptığımız gibi yaptım. Burdan çıkarttım, sonra da hepsini buraya koydum burası boş kaldı (tekrardan çizerek 6-0 yaptı ve ardından tekrar 3-3 şeklinde parçalama çizdi), daha da farklı şekilde böyle geliyor. Bunların hepsini farklı farklı yaptım.

A: Şimdi Sanemcim, buradan birini alıyorsun buraya çiziyorsun ya, ne değişiyor orada?

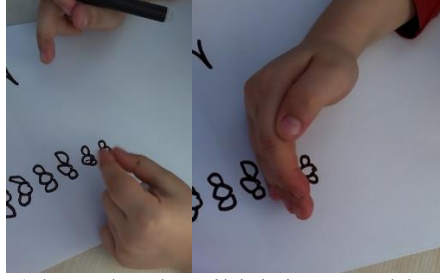
S: fark sayısı değişiyor.

	A: fark sayısı ne demek? S: sayılar değişir. A:buradaki köpek sayılarına ne oluyor sen buradan alınca? S: burada çıkartma oluyor, burada da toplama oluyor. A: ıkartma olunca ne oluyor? S: ıkarma olunca azalıyor. Burası da topluyor. Zıt anlamlı gibi. Azalıyor, oğalıyor. Burası azalınca burası çoğalıyor. Burdaki köpekleri azaltınca buraya gelecek. Burdan çıkarttık burası çoğaldı. A: Peki köpek sayısı değişiyor mu? S: 6 oldukları değişmiyor. Sadece farklı yerlere gidiyorlar.	
--	---	--

3. Araştırma sorusu: Şeker kutusu

Öğrenci	Döküm	Betimleme
Kaan	A: Şimdi Kaancım seninle birlikte bu malzemelerle bir hikâyeyi tasarlıcaz. Bu resimde iki tane çocuk görüyoruz. Bu pembe kazaklı, siyah saçlı kız Sude'dir. Sarı tişörtlü, siyah saçlı erkek ise Mete'dir. Sude ve Mete yakın arkadaşlardır. Onlar şeker yemeyi çok seviyorlar. Sude'nin 6 tane şekeri varmış. K: (Sudeye 6 şeker veriyor) A: Mete'nin ise bir kutu şekeri varmış K: (kutuyu Metenin altına yerleştiriyor) A: Annesi Mete'ye 2 tane daha şeker vermiş K: (Meteye iki tane daha şeker veriyor) A: Artık Sude ile Mete'nin aynı sayıda şekerleri olmuş. Mete'nin şeker kutusunda kaç tane şekeri vardır? K: (uzun bakıyor ve düşünüyor) dört tane A: Nasıl yaptığını anlatabilir misin? Neden dört tane şeker var kutuda?  K: Burda iki tane var (Metenin iki şekerini, yani sol tarafta olan iki şekeri eliyle kapattı, ardından 6 tane şekerin ikisini eliyle ayırdı. Sonra geri kalan dört şekeri saydı.) bir iki üç dört (dört şekeri eliyle gösterdi ve ardından elini kutunun üzerine çekti) kutunun içinde tam tamına dört tane şeker olması gerekiyor. A: Neden? K: Çünkü burada (Mete'de) iki tane var, bunları (altı şekerden ikisini) yok saydım. Çünkü bunu bunla eşit koydum (ikişer şekerleri gösteriyor) Bunlar kutunun... bunları da saydım... eşit emmm.. bunları da sayınca , onun içinde gibi düşündüm (kutuyu gösteriyor), oyle yapınca da aynı gibi oldu. A: Nasıl yaptığını gösterebilir misin? K: (çizmeye başlıyor. İlk önce kutu çiziyor ve yanına iki yazıyor) Ben iki yaptım. Altı tane de şeker yapıcaz. Buraya altı tane şeker yapıcım. Yuvarlak	Analitik Düşünme → Bilinmeyi Bulma: Eşleştirme stratejisi Eşitliğin anlamı: Eşdeğerlik Yapısal Düşünme → Sayılar ve İlişkiler: Kardinal sayma Referans olarak parçalama Temsil Kullanma → Sayı Resim Somut materyaller

yapıp şekere benzeticem (altı tane yuvarlak yapıyor ve ardından şekere benzetiyor).

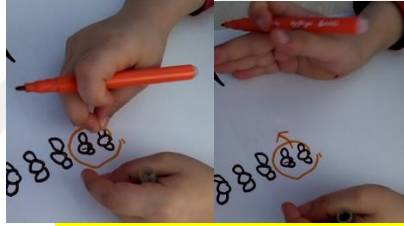


(altı şekerden ikisini parmaklarıyla birleştiriyor).
Bu ikisini çıkartıyorum.

A: Neden çıkartıyorsun?



K: Bu ikisini (yuvarlak içine aldı ve ok çizdi)
bunlar da sayınca (6 tane şekeri) iki tane
çıkartıyorum.



K: Bununla bunun (sol ve sağda olan iki şekeri
gösteriyor) eşit olmasını istedim. Ve bunu da (4 tane
şekeri gösteriyor) bunun içine koyunca eşit oluyor
çünkü bunlarla eşit olması gerekiyor. Çünkü bunu
bununla eşit koydum (ikili şekerleri). Bunlar (kalan
dört şeker) kutunun içindekiler. Buda bununla eşit
(dört şekerle kutuyu gösteriyor) ama iki tane daha
var, burda yok ama (Metenin iki tane şekerini
gösteriyor)

A: Evet, kutunun içinde dört tane şeker var. Güzel
açıkladın. Teşekkür ederim.

EK-3. Etik Kurul Onayı

Evrak Kayıt Tarihi: 15.11.2023

Protokol No: 649829

Tarih: 04.12.2023



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Yüksek Lisans Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	60-72 Aylık Okulöncesi Eğitimi Alan Çocukların Cebirsel Düşünme Becerilerinin İncelenmesi
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Prof. Dr. Dilek TANIŞLI
TEZ YAZARI:	Aydan İZATULLAYEVA
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu
Prof. Dr. Saim ÖNCE (Başkan-İkt. ve İdari Bil. Fak.)	
Prof. Dr. M. Erkan ÜYÜMEZ (Başkan Yardımcısı -İkt. ve İdari Bil. Fak.)	Prof. Dr. Fatime GÜNEŞ (Edebiyat Fak.)
Prof. Dr. Yıldız UZUNER (Eğitim Fak.)	Prof. Dr. Erkan YÜKSEL (İletişim Bil. Fak.)
Prof. Dr. Handan DEVECİ (Eğitim Fak.)	Prof. Dr. Kamil ÇEKEROL (Açıköğretim Fak.)

EK-4. MEB Araştırma İzin ve Onayı

Gelen Evrak Tarih ve Sayısı: 05.02.2024-690669



T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü



Sayı : E-88074293-605.01-95681630
Konu : Aydan İZATULLAYEVA'nın Araştırma İzni

01.02.2024

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Genel Sekreterlik Yazı İşleri Müdürlüğü)

İlgi : a) Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 21.01.2020 tarihli ve 1563890 (2020/2) sayılı "Araştırma Uygulama İzinleri" Genelgesi.
b) 17.01.2024 tarihli ve 682811 sayılı yazınız.
c) Valilik Makamının 01.02.2024 tarihli ve 95613282 sayılı oluru.

Üniversiteniz Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı öğrencisi Aydan İZATULLAYEVA'nın, Prof. Dr. Dilek TANIŞLI danışmanlığında hazırladığı "60-72 Aylık Okul Öncesi Eğitimi Alan Çocukların Cebirsel Düşünme Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı tez çalışmasına ilişkin ilgi (b) yazınız ve ekleri ile istenilen müdürlüğümüze bağlı okul ve kurumlarda anket yapma izni talebine ilişkin valilik makamından alınan ilgi (c) olur ekte gönderilmiş olup Bakanlığımızın ilgi (a) Genelgesinin 25 inci maddesi gereği çalışmada ekteki imzalı ve mühürlü ölçme araçlarının kullanılması hususunda;

Bilgilerini ve gereğini arz ederim.

Muhammet BÜYÜK
İl Millî Eğitim Müdür V.

Ek:

- 1-İlgi (c) Valilik Oluru (1 Sayfa)
- 2-Araştırma ve Değerlendirme Formu (2 Sayfa)
- 3-Ölçme Araçları (1 Sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Büyükdere Mah. Atatürk Bulvarı No:247 Odunpazarı/ESKİŞEHİR

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Telefon No : 0 (222) 280 27 07

E-Posta: strateji26@meb.gov.tr

Keş Adresi : meb@hs01.kep.tr

Bilgi için: Cem Murat ERSOY

Unvan : Bilgisayar İşletmeni

İnternet Adresi: eskisehir@meb.gov.tr

Faks: 2222802728

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden **ad13-8544-3a15-9788-4a96** kodu ile teyit edilebilir.

Gelen Evrak Tarih ve Sayısı: 05.02.2024-690669



ESKİŞEHİR
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

ARAŞTIRMA DEĞERLENDİRME FORMU

ARAŞTIRMA SAHİBİNİN

Adı Soyadı	Aydan İZATULLAYEVA
Kurumu / Üniversitesi	Anadolu Üniversitesi
Araştırma Yapılacak Eğitim Kurumu ve Kademesi	Adnan Menderes Anaokulu Esra Akkaya Anaokulu Cemal Ererdi Anaokulu Messeret İnel Anaokulu
Araştırmanın Konusu	60-72 Aylık Okulöncesi Eğitimi Alan Çocukların Cebirsel Düşünme Becerilerinin İncelenmesi
Üniversite / Kurum Onayı	Var
Araştırma / Proje / Ödev / Tez Önerisi	Yüksek Lisans Tez Önerisi
Veri Toplama Araçları	1. Görüşme Soruları (1 Sayfa)
Görüş İstenecek Birimler	-

KOMİSYON GÖRÜŞÜ

İlgi: Milli Eğitim Bakanlığının 21.01.2020 tarih ve 81576613 sayılı 2020/2 Nolu Genelge Kapsamında Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri Genelgesi.
Genelgenin ilgili maddeleri gereğince yapılan incelemede 2023-2024 öğretim yılını aksatmayacak şekilde uygulanmasında sakınca yoktur.

Komisyon Kararı	KABUL (oy birliği ile)
(Varsa) Muhalif Üyenin Adı ve Soyadı	Gerekçesi :

KOMİSYON

29/01/2024

Dr. Funda ÇİRAY ÖZKARA
Öğretmen

Muhammet Rıdvan ESER
Öğretmen

Ebru SÖĞÜT
Öğretmen

Yaylıkdere Mah. Atatürk Blv. No:247 ESKİŞEHİR
Elektronik Ağı: www.eskisehir.meb.gov.tr
E-posta: strateji26@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: C. Murat ERSOY
Tel : (0 222) 280 27 07
Faks: (0 222) 280 27 28

Gelen Evrak Tarih ve Sayısı: 05.02.2024-690669

ANKET VE ARAŞTIRMA İZİN KOMİSYONU ARAŞTIRMA ÖN İNCELEME FORMU

Adı Soyadı : Aydan İZATULLAYEVA

Kurumu : Anadolu Üniversitesi

Konu : 60-72 Aylık Okul Öncesi Eğitimi Alan Çocukların Cebirsel Düşünme Becerilerinin İncelenmesi

Tarih : 29.01.2024

MEB 21.01.2020 tarih ve 81576613 sayılı 2020/2 Nolu Genelge Kapsamında Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinlerinde Dikkat Edilecek Hususlar	Uygun	Uygun Değil	Açıklama
Anayasa, Millî Eğitim Temel Kanunu ve Türk Millî Eğitiminin Genel Amaçlarına uygunluğu,	X		
Millî ve manevî değerlere uygunluğu,	X		
Kişilik haklarına uygunluğu (kişisel bilgiler istenilmemeli, ad-soyad vb.),	X		
Cinsiyet, din, dil ve ırk gibi farklılıkları istismar etmeme durumu,	X		
İnsan Hakları Evrensel Beyanname ve uluslararası bağlayıcılığı olan diğer belgelerce suç kabul edilen hususları içermemesi,	X		
Kişisel ve ailevi mahremiyetini ifşa eden sorular, ifadeler, resimler ve simgeler yer almaması,	X		
Veri toplama araçlarında kişi, kurum ve kuruluşlara yönelik reklâm veya tanıtım gibi ifade ve öğeler yer almaması,	X		
Araştırma önerisi ile veri toplama araçlarının tamamının idareye sunulması,	X		
Araştırma, veri toplama araçlarının okul ve kurumlarda uygulanması, eğitim-öğretim faaliyetini aksatmaması için ilk ve ikinci yarıyıl bitimine en az üç hafta kalıncaya kadar yapılması,	X		
Uygulamanın sadece Eskişehir ilinde yapılmasıdır.	X		

Komisyon Üyeleri	Uygun	Uygun Değil	İmza
Dr. Funda ÇIRAY ÖZKARA	X		
Muhammet Rıdvan ESER	X		
Ebru SÖĞÜT	X		

EK 3: Veri Toplama Aracı

Sorular	Ele Aldığı kavramlar ve yapılar	Ölçtüğü cebirsel düşünme boyutu
6 tane köpek gezmeye çıkmış ve birden yağmura yakalanmışlar. Onların bulunduğu yerde iki tane köpek evi varmış. Köpekleri bu evlere farklı şekilde nasıl yerleştirirsin? Çizerek gösterir misin? Hangi evde daha çok köpek var?(yaptığı parçalamada) Her evde eşit sayıda köpek olması için ne yapabilirsin? 5 tane köpek olsaydı nasıl yaparsın? 6 tane köpeği eşit gruplara nasıl ayırırsın?	Sayı Parçalama Karşılaştırma Eşitlik Tek/Çift sayı kavramı Eşit Gruplama	Yapısal Düşünme Analitik Düşünme
Kitap ve kalemini satışa çıkarıyorsun. Kitap kaleminden daha pahalı. Satış yaptığın kitap ve kalemin üzerindeki etikette fiyatını nasıl gösterebilirsin?	Karşılaştırma	Analitik Düşünme
Metenin 4 tane şekeri vardı. Sudenin ise bir kutu şekeri vardı. Annesi Sudeye bir tane şeker daha verdi. Artık Mete ile Sudenin aynı sayıda şekerleri var. Buna göre Sudenin şeker kutusunda kaç tane şekeri var?	Bilinmeyen	Analitik Düşünme
Senin 2 tane şekerin vardı. Bir tane daha veririm olur? 3 oldu. Bir tane daha veririm kaç olur? 4 oldu. Bir tane daha verince ne oluyor? Bunu nasıl anlıyorsun, ne düşünüyorsun?	Birer artma ve ardışık sayma yapısı	Yapısal Düşünme
Diyelim ki bir kedi barınağındasın ve gördüğün tüm köpek gözlerini saymak istiyorsun. Bir kedi olsaydı kaç tane gözü olurdu? Ya iki kedi olsaydı? Üç kedi? Kedi sayısı ile toplam göz sayısı arasında bir ilişki görüyor musun? Bu ilişkiyi nasıl tanımlarsın? Çizerek gösterir misin?	Sayı örüntüsü	Fonksiyonel Düşünme
Sorular araştırmacı tarafından seslendirilmiştir. Soruları cevaplamak için çocuklara somut materyaller ve çizim yapmaları için kağıt ve renkli kalem verilecektir.		

Araştırmacı adı: Aydan İZATULLAYEVA

Gelen Evrak Tarih ve Sayısı: 05.02.2024-690669



T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü



Sayı : E-88074293-605.01-95613282
Konu : Aydan IZATULLAYEVA'nın
Araştırma İzni Talebi

01/02/2024

VALİLİK MAKAMINA

- İlgi : a) Milli Eğitim Bakanlığı'nın 21.01.2020 tarihli ve 81576613 (2020/2) sayılı "Araştırma Uygulama İzinleri" Genelgesi.
b) Anadolu Üniversitesi Rektörlüğü Genel Sekreterlik Yazı İşleri Müdürlüğü'nün 17.01.2024 tarihli ve 682811 sayılı yazısı.

Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı öğrencisi Aydan IZATULLAYEVA'nın, Prof. Dr. Dilek TANIŞLI danışmanlığında hazırladığı "60-72 Aylık Okul Öncesi Eğitimi Alan Çocukların Cebirsel Düşünme Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı tez çalışmasına veri sağlamak amacıyla müdürlüğümüze bağlı okul ve kurumlarda anket yapma izin talebi Araştırma ve Sosyal Etkinlik İzinleri İnceleme Komisyonu tarafından değerlendirilmiş ve uygulanmasında sakınca görülmediği bildirilmiştir.

Müdürlüğümüzce de uygun görülmüş olan söz konusu araştırma çalışmasının, 2023-2024 eğitim öğretim yılı içerisinde eğitim öğretimi aksatmamak kaydıyla, gönüllülük esasına göre, ilgi (a) Genelge doğrultusunda Odunpazarı ilçesi Adnan Menderes Anaokulu, Esra Akkaya Anaokulu ve Meserret İnel Anaokulu ileTepebaşı ilçesi Cemal Ererdı Anaokulunda uygulanmasını olurlarınıza arz ederim.

Muhammet BÜYÜK
İl Milli Eğitim Müdür V.

O L U R
Salih ALTUN
Vali a.
Vali Yardımcısı

Ek:

- 1-Araştırma ve Değerlendirme Formu (2 Sayfa)
2-Ölçme Araçları (1 Sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Büyükdere Mah. Atatürk Bulvarı No:247 Odunpazarı/ESKİŞEHİR

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Telefon No : 0 (222) 280 27 07

Bilgi için: Cem Murat ERSOY

E-Posta: strateji26@meb.gov.tr

Unvan : Bilgisayar İşletmeni

Keş Adresi : meb@is01.kep.tr

İnternet Adresi: eskisehir@meb.gov.tr

Faks:2222802728

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden b78b-0172-3766-a49e-f21f kodu ile teyit edilebilir.

Ek-5. Araştırma Gönüllü Katılım Formu

ARAŞTIRMA GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Bu çalışma, “60-72 Aylık Okulöncesi Eğitimi Alan Çocukların Cebirsel Düşünme Becerilerinin İncelenmesi ” başlıklı yüksek lisans tez çalışmasıdır. Bu çalışma ile okulöncesi eğitimi alan 60-72 aylık öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışma, Aydan IZATULLAYEVA tarafından yürütülmekte ve sonuçları ile erken cebir anlayışının yaygınlaştırılması ve ortaya çıkarılan çerçeve modelinin ülkemizde kullanılması düşünülmektedir.

- Bu çalışmaya katılımınız gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Araştırma verileri sizden; çalışmanın amacı doğrultusunda video kayıtları ve klinik görüşme formu ile toplanacaktır.
- İsminizi yazmak ya da kimliğinizi açığa çıkaracak bir bilgi vermek zorunda değilsiniz/araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde sizden toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Sizden toplanan veriler elektronik ortamda korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek veya imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde size rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de katılımınız sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabilirsiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'na yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı: Aydan IZATULLAYEVA

Adres:

Cep Tel:

Bu çalışmaya tamamen kendi rızamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimi bilerek verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

(Lütfen bu formu doldurup imzaladıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Katılımcı Ad ve Soyadı:

İmza:

Tarih:

EK-6. Veli İzin Formu

VELİ İZİN FORMU

Sayın Veli,

Bu araştırmanın genel amacı, cebir öncesi dönemde anaokulu öğrencilerinin “sayı hissi” oluşmasının, işlemleri kendi dilinde farklı sembollerle temsil etmesinin, çarpımsal düşünme ve muhakeme becerilerinin incelenmesidir.

Velisi bulunduğunuz öğrencinin araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Küçük çocukların sıkılabileceğini dikkate alarak kısa görüşmeler yapılacaktır. Araştırmamın geçerlik ve güvenilirliğini sağlamak, ayrıca görüşmeler sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri video kamera ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu veriler, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Sizin isteğiniz doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size teslim edilecektir.

İzniniz olmadığı takdirde, çocuğunuzun ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilir. Çocuğunuz istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilir. Bu durumda yaptığımız kayıtlar ve yazılan raporlar size teslim edilecektir.

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya velisi bulunduğunuz öğrencinin gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim size verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyorum.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederim.

Öğrencinin Velisi:

Araştırmacı: Aydan İzatullayeva

Anadolu Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı

ÖZ GEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aydan HAJIZADA

Yabancı Dil : Rusça

Eğitim Bilgileri:

2016-2020 Bakü Devlet Üniversitesi Mekanik-Matematik Fakültesi Matematik bölümü

2021-2025 Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı

Mesleki Deneyim:

2020-2021 Özel kurumda 5-6 yaş çocuklara matematik öğretmenliği

2022-2024 Özel kurumda ilkokul ve ortaokul matematik öğretmenliği

Not: 2024 yılında araştırmacının soyadı IZATULLAYEVA'dan, HAJIZADA olarak değişmiştir.