



**T.C.**

**TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ**

**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

**MATEMATİK EĞİTİMİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**7.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ ÖĞRENME  
ALANINDAKİ İSPAT BECERİLERİNİN İNCELENMESİ VE İSPAT  
DERS PLANI UYGULAMALARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hazırlayan**

**Emre DÖNMEZ**

**Danışman**

**Doç. Dr. Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK**

**TOKAT- 2024**

## ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK danışmanlığında hazırlamış olduğum “7.Sınıf Öğrencilerinin Geometri Öğrenme Alanındaki İspat Becerilerinin İncelenmesi ve İspat Ders Planı Uygulamaları” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

19/01/2024

Emre DÖNMEZ



## TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimi ve tez yazım aşamasında desteğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Zülfiye Zeybek Şimşek'e, tezim için yaptıkları değerli önerileri ve katkılarından dolayı Dr. Öğr. Üyesi Ayfer Eker Karakaya ve Doç. Dr. Nurullah Yazıcı'ya, tüm eğitim öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi yanımda olan annem ve babama, çalışmam sırasında yeterince zaman ayıramadığım biricik evlatlarım Aybüke ve Kerem'e, yoğun çalışmalarımnda sabır gösterdiği ve desteklediği için sevgili eşim Nazmiye'ye teşekkür ederim.



## ÖZET

### 7.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ ÖĞRENME ALANINDAKİ İSPAT BECERİLERİNİN İNCELENMESİ VE İSPAT DERS PLANI UYGULAMALARI

Dönmez, Emre

Yüksek Lisans, Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK

Ocak 2024, xi + 99 sayfa

Matematiğin doğal bir bileşeni olan ispat; matematiğin öğrenciler tarafından anlaşılmasında, üst düzey becerilerin kazanılmasında ve matematiksel iletişimin gelişiminde önemli rolleri olan bir araçtır. Bu özellikleri bakımından düşünüldüğünde ispat, matematik sınıflarının vazgeçilmez bir parçasıdır. Bu çalışma ile 7.sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanına ait ispat becerilerinin incelenmesi ve ispat ders planı uygulamalarının öğrencilerin ispat becerilerine olan etkisinin belirlenmesi amaçlanmıştır. 7.Sınıf ders kitabının geometri öğrenme alanına ait bölümü ispat etkinlikleri bakımından incelenmiş ve bu etkinlikler temel alınarak çalışmada uygulanacak ders planları hazırlanmıştır. Öğrencilerin hali hazırda ispat becerilerini ortaya çıkarmak için İspat Beceri Testi-1 (İBT-1) uygulanmıştır. 15 saatlik ispat içerikli ders planları uygulamasının ardından öğrencilere İspat Beceri Testi-2 (İBT-2) uygulanarak ders planı uygulamalarının öğrencilerin ispat becerilerine etkileri incelenmiştir. Akademik başarı durumlarına göre belirlenen altı öğrenci ile hem uygulama öncesi hem de uygulama sonrası ispat beceri testlerine verdikleri yanıtlar için yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Çalışmada elde edilen bulgular, 7.sınıf ders kitabının geometri öğrenme alanında yer alan etkinliklerin sadece %5’lik kısmının ispat yapma kategorisinde yer aldığını göstermiştir. Bu sonuç öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerini geliştirebilmeleri için yeterli görülmemektedir. Çalışmanın İBT-1 sonuçlarına göre; öğrencilerin uygulama öncesi sundukları argümanların 7’sinin dışsal, 7’sinin deneysel ispat şemasında olduğu görülürken sadece 1 argümanın analitik ispat şemasında olduğu belirlenmiştir. Uygulama sonrası yapılan İBT-2 sonuçlarına göre; dışsal 4, deneysel 9 ve analitik ispat şemasına ait 19 öğrenci argümanı görülmüştür. Bu durum öğrencilerin ispat ile zenginleştirilmiş ders planı uygulamaları ile ispat becerilerinin geliştiğini göstermektedir. Aynı zamanda öğrenciler ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelere göre uygulamaya katılan öğrencilerin %75’i ispata yönelik olumlu tutum içerisinde yer almaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Geometri, Matematik Ders Kitabı, Matematik Eğitimi, Muhakeme, İspat

## ABSTRACT

### INVESTIGATING PROVING SKILLS OF 7TH GRADE STUDENTS IN GEOMETRY CONTENT STRAND AND PROOF LESSON PLAN IMPLEMENTATIONS

Dönmez, Emre

Master's Thesis, Department of Mathematics Education

Advisor: Assoc. Prof. Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK

January 2024, xi + 99 pages

As a natural component of mathematics, proof is an essential tool to understand mathematics, to develop higher-order thinking skills and to improve mathematical communication. The importance of proof in mathematics education has been highlighted by research and educational reforms in recent years. This study aims to examine proving abilities of 7th grade students in the field of geometry. It also aims to determine the effects of proof lesson plan implementations on students' proving skills. To do so, the parts that belong to geometry content strand of a 7th grade text book were examined in terms of proving activities and the lesson plans were prepared based on the proving activities in the text book. Proof Skill Test-1 (PST-1) was administered to investigate students' proving skills. After the implementation of 15-hour lesson plans, the effects of the lessons on the students' proving skills were analyzed by administering Proof Skill Test-2 (PST-2). The participants of this study consisted of 14 students who attend at a public middle school. Semi-structured interviews were conducted with 6 students who were chosen according to the results of the Proof Skill Tests both before and after the lesson plan implementations. The findings of this study show that only %5 of the activities in the 7th grade text book were coded as proving activities. This result is not considered sufficient for students to develop their reasoning and proving skills. According to the PST-1 results of the study; It was determined that 7 of the arguments constructed by the students before the lesson plan implementations were coded as external, 7 of them were coded as empirical, while only 1 argument was coded as analytical argument. According to the PST-2 results after the implementation; 4 arguments were coded as external, 9 as empirical and 19 arguments were coded as analytical arguments. These results show that students improve their proving skills by the lesson plans enriched with proving activities. At the same time, according to the semi-structured interviews conducted with the students, %75 of the students who participated in the lesson plan implementations have a positive attitude towards proof.

**Key Words:** Geometry, Mathematics Textbook, Mathematics Education, Reasoning, Proof.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                            | Sayfa     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ETİK SÖZLEŞME .....                                                        | i         |
| JÜRİ KABUL VE ONAY.....                                                    | ii        |
| TEŞEKKÜR .....                                                             | iii       |
| ÖZET .....                                                                 | iv        |
| ABSTRACT.....                                                              | v         |
| İÇİNDEKİLER .....                                                          | vi        |
| TABLolar LİSTESİ .....                                                     | viii      |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....                                                     | ix        |
| KISALTMALAR .....                                                          | xi        |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>                                                      | <b>1</b>  |
| 1.1.Araştırmanın Amacı .....                                               | 2         |
| 1.2.Problem Cümlesi ve Alt Problem Cümleleri .....                         | 3         |
| 1.3.Araştırmanın Önemi .....                                               | 4         |
| 1.4.Sayıtlar .....                                                         | 5         |
| 1.5.Sınırlılıklar .....                                                    | 5         |
| <b>2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE .....</b>                                          | <b>6</b>  |
| 2.1.Matematik ve İspat.....                                                | 6         |
| 2.2.İspat Yöntemleri.....                                                  | 7         |
| 2.3.İspat Şemaları.....                                                    | 10        |
| 2.4.İlgili Araştırmalar .....                                              | 12        |
| 2.4.1. Muhakeme ve İspat Yeteneği.....                                     | 12        |
| 2.4.2. İspat Etkinliklerinin Ders Kitaplarındaki Yeri .....                | 16        |
| 2.4.3. İspatın Matematik Eğitimindeki Rolü .....                           | 19        |
| 2.4.4. İspata Yönelik Tutumlar .....                                       | 20        |
| 2.4.5. Öğrencilerin İspat Yapma Becerileri .....                           | 22        |
| <b>3. YÖNTEM.....</b>                                                      | <b>24</b> |
| 3.1.Araştırma Modeli .....                                                 | 24        |
| 3.2.Veri Toplama Araçları .....                                            | 25        |
| 3.2.1. Çalışma Grubu .....                                                 | 25        |
| 3.2.2. Matematik Ders Kitabı.....                                          | 26        |
| 3.2.3. Ders Planları.....                                                  | 26        |
| 3.2.4. Öğrenme Günlükleri ve Ödevler .....                                 | 28        |
| 3.2.5. İspat Beceri Testi 1 (İBT-1) .....                                  | 28        |
| 3.2.6. İspat Beceri Testi 2 (İBT-2) .....                                  | 29        |
| 3.2.7. Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler.....                                | 29        |
| 3.3.Veri Toplama Süreci .....                                              | 30        |
| 3.4.Veri Analizi .....                                                     | 31        |
| 3.4.1. Ders Kitabının İspat Bağlamında İncelenmesi.....                    | 32        |
| 3.4.2. İBT-1 ve İBT-2 İçin Verilen Öğrenci Cevaplarının Analizi .....      | 34        |
| 3.4.3. İBT-1 ve İBT-2 İçin Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerin Analizi ..... | 35        |
| 3.4.4. Ders Videolarının Analizi .....                                     | 35        |
| 3.4.5. İspata Yönelik Eğilim Sorularının Analizi.....                      | 35        |

|                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5.Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği.....                 | 36        |
| <b>4. BULGULAR.....</b>                                        | <b>37</b> |
| 4.1.Ders Kitabının Geometri Öğrenme Alanına Ait Bulgular ..... | 37        |
| 4.2.Ders Planı Uygulaması Öncesine Ait Bulgular(İBT-1) .....   | 40        |
| 4.3.Ders Planı Aşamasına Ait Bulgular .....                    | 47        |
| 4.4.Ders Planı Uygulaması Sonrasına Ait Bulgular(İBT-2) .....  | 56        |
| 4.5.İspata Yönelik Eğilim Sorularına Ait Bulguar .....         | 64        |
| <b>5. SONUÇ VE TARTIŞMA.....</b>                               | <b>66</b> |
| 5.1.Ders Kitabının İspat Bağlamında İncelenmesi.....           | 66        |
| 5.2.İBT-1'e Ait Öğrenci Cevapları .....                        | 67        |
| 5.3.Ders Planı Uygulaması.....                                 | 68        |
| 5.4.İBT-2'ye Ait Öğrenci Cevapları .....                       | 69        |
| 5.5.Öğrencilerin İspata Yönelik Görüşleri .....                | 72        |
| 5.6.Özet .....                                                 | 72        |
| <b>6. ÖNERİLER .....</b>                                       | <b>75</b> |
| <b>KAYNAKÇA.....</b>                                           | <b>76</b> |
| <b>EKLER .....</b>                                             | <b>88</b> |
| Ek 1.Veli İzin Formu.....                                      | 88        |
| Ek 2.Araştırma İzni .....                                      | 89        |
| Ek 3.Örnek Ders Planı.....                                     | 90        |
| Ek 4.Örnek Öğrenme Günlüğü .....                               | 96        |
| Ek 5.İspat Beceri Testi 1 (İBT-1).....                         | 97        |
| Ek 6.İspat Beceri Testi 2 (İBT-2).....                         | 98        |
| Özgeçmiş .....                                                 | 99        |

## TABLÖLAR LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tablo 1. Öğrencilerin İspat Yapma Davranışları.....                                | 11 |
| Tablo 2. Çalışma Grubu Öğrencilerinin Akademik Başarı Ortalamaları .....           | 26 |
| Tablo 3. Uygulama Kazanım Tablosu .....                                            | 27 |
| Tablo 4. Muhakeme ve İspat Analitik Çerçevesi .....                                | 32 |
| Tablo 5. Çalışmada Kullanılacak Kodlar .....                                       | 34 |
| Tablo 6. Matematik Ders Kitabı Geometri Öğrenme Alanına Ait İncelenen İçerikler .. | 37 |
| Tablo 7. Matematik Ders Kitabı Geometri Öğrenme Alanına Ait İnceleme Sonuçları .   | 38 |
| Tablo 8. İBT-1'in 1.Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları .....        | 41 |
| Tablo 9. İBT-1'in 2.Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları .....        | 42 |
| Tablo 10. İBT-1'in 3.Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları .....       | 43 |
| Tablo 11. İBT-1'in 4.Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları .....       | 45 |
| Tablo 12. Ders Planı Uygulamasında Sunulan Argüman Çeşitleri ve Sayıları .....     | 48 |
| Tablo 13. İBT-2'in 1.Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları.....        | 56 |
| Tablo 14. İBT-2'in 2.Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları .....       | 57 |
| Tablo 15. İBT-2'in 3.Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları .....       | 59 |
| Tablo 16. İBT-2'in 4.Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları .....       | 62 |
| Tablo 17. İspata Yönelik Tutum .....                                               | 64 |
| Tablo 18. İBT-1 ve İBT-2 Kod A Sonuçları .....                                     | 69 |
| Tablo 19. İBT-1 ve İBT-2 Kod B Sonuçları.....                                      | 70 |
| Tablo 20. İBT-1 ve İBT-2 Kod D Sonuçları .....                                     | 70 |
| Tablo 21. İBT-1 ve İBT-2 Kod C Sonuçları .....                                     | 70 |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1. Tümevarım İspat Temsili.....                                             | 7  |
| Şekil 2. Doğrudan İspat Temsili .....                                             | 8  |
| Şekil 3. Aksine Örnek Verme Yöntemi İspat Temsili .....                           | 9  |
| Şekil 4. Çelişki Yoluyla İspat Temsili .....                                      | 9  |
| Şekil 5. Olmayana Ergi Yöntemi Temsili.....                                       | 9  |
| Şekil 6. Kesin Örüntü Temsili .....                                               | 32 |
| Şekil 7. Olası Örüntü Temsili .....                                               | 33 |
| Şekil 8. Çıkarım Yapma Temsili .....                                              | 33 |
| Şekil 9. Genellenebilir Örnek Temsili .....                                       | 34 |
| Şekil 10. Çıkarım Yapma Temsili-1 .....                                           | 38 |
| Şekil 11. Çıkarım Yapma Temsili-2 .....                                           | 38 |
| Şekil 12. Empirik Temsili-1.....                                                  | 39 |
| Şekil 13. Empirik Temsili-2.....                                                  | 40 |
| Şekil 14. İBT-1'in 1.Sorusuna Ait Kod A Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri  | 41 |
| Şekil 15. İBT-1'in 2.Sorusuna Ait Kod D Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili ... | 42 |
| Şekil 16. İBT-1'in 2.Sorusuna Ait Kod A Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili ... | 43 |
| Şekil 17. İBT-1'in 3.Sorusuna Ait Kod D Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri  | 43 |
| Şekil 18. İBT-1'in 3.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili ... | 44 |
| Şekil 19. İBT-1'in 4.Sorusuna Ait Soru İçeriğinde Bulunan Öğrenci Cevapları ..... | 45 |
| Şekil 20. İBT-1'in 4.Sorusuna Ait Kod B Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri  | 46 |
| Şekil 21. İBT-1'in 4.Sorusuna Ait Kod A Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri  | 46 |
| Şekil 22. İBT-1'in 4.Sorusuna Ait Kod A Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili ... | 47 |
| Şekil 23. Ders Planı Uygulamasında Sunulan Argümanların Dağılım Grafikleri.....   | 48 |
| Şekil 24. Kesişen İki Doğrunun Oluşturduğu Ters Açılar .....                      | 49 |
| Şekil 25. Öğrenci Matematiksel Aktivitesi Temsili .....                           | 51 |
| Şekil 26. Çemberde Çevre Açısı Bulmayı Gerektiren Öğrenci Ödevi .....             | 53 |
| Şekil 27. Ödev İçin Öğrenci Argümanı Temsili 1 .....                              | 53 |
| Şekil 28. Ödev İçin Öğrenci Argümanı Temsili 2 .....                              | 54 |
| Şekil 29. Öğrenci Öğrenme Günlüğü Temsili 1 .....                                 | 54 |
| Şekil 30. Öğrenci Öğrenme Günlüğü Temsili 2 .....                                 | 55 |
| Şekil 31. Öğrenci Öğrenme Günlüğü Temsili 3 .....                                 | 55 |
| Şekil 32. İBT-2'in 1.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili.... | 56 |
| Şekil 33. İBT-2'in 1.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri  | 57 |
| Şekil 34. İBT-2'in 2.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili.... | 58 |
| Şekil 35. İBT-2'in 2.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili.... | 58 |
| Şekil 36. İBT-2'in 2.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili.... | 59 |
| Şekil 37. İBT-2'in 3.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili.... | 60 |
| Şekil 38. İBT-2'in 3.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri  | 61 |
| Şekil 39. İBT-2'in 4.Sorusuna Ait Soru İçeriğinde Bulunan Öğrenci Cevapları ..... | 62 |
| Şekil 40. İBT-2'in 4.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili ... | 63 |

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 41. İBT-1 ve İBT-2'ye Ait Kodların Dağılım Grafikleri ..... | 63 |
| Şekil 42. İBT-1 ve İBT-2 Kod C Sonuçlarına Ait Grafik .....       | 71 |



## KISALTMALAR

CCSSI: Common Core State Standards for Mathematics: Ortak Devlet Çekirdek Standartları

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

İBT: İspat Beceri Testi

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics: Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi Ulusal Konseyi

OMDEP: Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı

TDK: Türk Dil Kurumu



## 1. GİRİŞ

Bilimin tüm alanları düşünüldüğünde bilimsel bilgilerin ispatlanma amacının ortak bir gaye olduğu görülmektedir. Her bilim alanının bilimsel bilginin doğruluğunu veya yanlışlığını kanıtlama yöntemi farklılık gösterir. Fen bilimlerinde deney ya da gözlemler ile bilimsel bilgiler doğrulanmaya çalışılırken matematik için deney ve gözlem yeterli olmamaktadır. Matematiksel ifadelerde mantıksal çıkarımlardan yararlanılarak bilimsel bilgilerin doğruluğunun veya yanlışlığının gösterilmesi beklenmektedir. Bu durumun sonucunda ortaya matematiksel ispat kavramı çıkmaktadır. Schonfeld (2009) eğer problem çözmek matematiğin kalbi ise, ispat ruhudur diyerek ispatın matematik için olmazsa olmaz olduğunu belirtmektedir. İspat matematiğin öğrenilmesi, geliştirilmesi ve matematiksel iletişimin güçlendirilmesi için gereklidir (Polya, 1981). Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi [National Council of Teachers of Mathematics-NCTM](2000), matematik öğretiminde ispatın bütün sınıf düzeylerindeki –okul öncesinden itibaren- eğitim programlarında yer verilmesi gerekliliği ve ispatın matematiğin doğal bir bileşeni olduğunu belirtmektedir.

Matematik eğitiminin ayrılmaz bir parçası, doğal bir bileşeni (NCTM, 2000) ve aynı zamanda matematiksel bir araç olan ispat (Knuth, 2002) sadece bir ifadenin doğruluğu ya da yanlışlığını belirtmek değil aynı zamanda bu doğruluk ya da yanlışlığın nedenini de göstermektir (Hanna, 2000). İspatın matematiğin önemli bir parçası olması ve matematik eğitimindeki önemi (Balacheff, 1988; Stylianides, 2007) son yıllarda yapılan eğitim reformlarında da sıkça vurgulanmaktadır (CCSSSI, 2010; NCTM, 2000).

Her ne kadar ispatın tüm sınıf seviyelerinden yer alması gerektiği vurgulansa da, Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı (OMDÖP) incelendiğinde, ispata yapılan vurgunun yetersiz olduğu görülmektedir (Filiz ve Ergan, 2020; Stylianides, 2009; Zeybek, Üstün ve Birol, 2018; Zeybek ve Kılıçoğlu, 2022). Öğretim programında muhakeme yeteneğine sahip bireyler yetiştirmek amaçlanmasına rağmen, bu amacın programın kazanım kısmına ve ders kitaplarına aynı ölçüde aktarılmadığı gözlemlenmektedir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013; Zeybek, Üstün ve Birol, 2018). Matematik programının farklı sınıf seviyelerine göre kazanımları incelendiğinde, ispat ile ilgili kavramlara ilk olarak ortaöğretim düzeyindeki kazanımlarda yer verilmiştir (MEB, 2013, s.5).İspat ile ilgili yapılan araştırmalar incelendiğinde ise öğrencilerin erken sınıf seviyelerinde belli düzeyde ispat yapabildikleri görülmektedir (Ball, Hoyles, Jahnke, Movshovitz-Hadar, 2002; Stylianides, 2007). Bu nedenle yapılan çalışmalar ve güncel eğitim reformları, bireylere anasınıfı düzeyinden itibaren muhakeme ve ispat aktivitelerine yer verilmesi gerektiğini belirtmektedir (CCSSI, 2010; NCTM, 2000; Knuth, Choppin ve Bieda, 2009; Stylianides, 2007a; Zeybek ve Kılıçoğlu, 2022).

İspat ile ilgili ulusal ve uluslar arası alanyazında birçok çalışma yürütülmüştür (Albayrak-Bahtiyari, 2010; Aylar ve Şahiner, 2016; Balacheff, 1991; Doğan, 2019; Dede ve Karakuş, 2014; Karakuş ve Korkutan, 2021; Knuth, Choppin ve Bieda, 2009;

Uğurel ve Moralı, 2010; Stylianides, 2009; Vatandaş, 2022; Zeybek, Üstün ve Birol, 2018; Zeybek ve Üstün, 2019). Yapılan bu çalışmalar incelendiğinde, araştırmacıların daha çok öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerine odaklandığı görülmektedir (Doruk vd. ,2014; Gökkurt vd. ,2014; Gökkurt ve Soylu, 2012; Köğce, 2010; ). Bunun yanında üniversite, lise, ortaokul ve ilkokul öğrencilerinin ispat yapma süreçleri, ispata yönelik görüşleri, ispat seviyeleri ve eğilimleri gibi konularla ilgili araştırmalara da rastlamak mümkündür. Yeşildere ve Türnüklü (2008) yapmış oldukları çalışmada, 8.sınıftan yeni mezun olmuş öğrencilerin istenilen düzeyde muhakeme becerilerini kullanamadıklarını ve ortaöğretime hazır bulunuşluklarının yeterli olmadığını belirtmişlerdir. Gökkurt ve Soylu (2012), üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini inceledikleri çalışmalarında, öğrencilerin birçoğunun ispat yapmaya yönelik görüşlerinin istenilen yönde olmadığı, ispat yapmada ve kendilerine güven konusunda kararsız kaldıklarını belirtmişlerdir. Benzer sonuçlar Özer ve Arıkan (2002); Güven, Çelik ve Karataş (2005) ve Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006) çalışmalarında da görülmektedir.

Matematik eğitiminde ispatın öneminin giderek artması yapılan çalışmaları da nicel olarak arttırmıştır. Alanyazı incelendiğinde çoğu öğrencinin ispat ile çok geç yaşta tanıştığı ve ispatı gereksiz bir ritüel olarak gördüğü (Harel ve Sowder, 2007; Stylianides, 2007), bunun sonucunda da öğrencilerin ispat yapma becerilerinin zayıf olduğu görülmektedir (örn. Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve iletişim becerilerinin gelişmesi için gerekli olan ispat yapma becerisine ne kadar sahip oldukları NCTM'in (2000) raporunda belirttiği gibi her sınıf seviyesinde betimlenmesi gerekmektedir. İspatın matematik için önemi, öğrencilerin ispat yapma becerilerinin zayıf olması gibi durumlar düşünüldüğünde bu çalışma ile alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

### **1.1. Araştırmanın Amacı**

İspat matematiğin doğal bir bileşenidir (NCTM, 2000) ve matematiksel bilgileri anlamlandırmanın yolu ispat ile mümkün olmaktadır. Matematikte ezberin önlenmesi ve kalıcı, anlamlı bir matematiksel bilgi inşa etmek için ispat kritik bir değer taşımaktadır (Aylar, 2016). Matematiğin kendine özgü evrensel bir dili vardır ve bu dili anlamının yolu ispat ve muhakeme becerisi ile gerçekleşir. Matematiksel ispat, matematiksel bilginin inşasında ve etkili bir matematik öğretiminde oldukça önemlidir (Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Knuth (2002) ispatın matematiği öğrenmede önemli bir araç olduğunu belirtmiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalar matematikte ispatın önemini ortaya koymaktadır. NCTM (2000) raporu incelendiğinde ispatın eğitim öğretimin her seviyesinde ele alınması gereken bir kavram olduğu görülmektedir. Yine alanda yürütülen çalışmalara bakıldığında da okul öncesi eğitiminden itibaren, ispat etkinliklerinin erken yaşlarda ele alınabileceğini belirten çalışmalarda artış olduğu görülmektedir (örn. Ball, Hoyle, Jahnke ve Movshovitz-Hadar 2002; Cyr 2011; Hanna, 1995; Stylianides, 2007a; Stylianides, 2007b). OMDÖP incelendiğinde ispat kavramı yerine ispatı çağrıştıran bir takım kelimelere (örüntü bulma, akıl yürütme, ilişkileri fark

etme, vb.) yer verildiği görülmektedir (MEB, 2013). İspatın erken yaşta ele alınabileceği belirtilmesine karşın öğretim programında ispat ile ilişkili kazanımlara yer verilmediği görülmekte, öğrenciler ilk olarak ortaöğretim düzeyinde ispat ile ilişkili kazanımlarla tanıştırılmaktadır (Doğan, 2019; Filiz ve Ergen, 2020; Şengül ve Kırıl, 2023; Şimşek ve Kılıçoğlu, 2022). OMDÖP'ün içeriğine bakıldığında; ispat, muhakeme, teorem gibi anahtar kelimelere ait hiçbir kazanımın olmadığı, lise öğretim programında ise sadece 9.sınıf düzeyinde “ *Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramını açıklar.*” (MEB, 2018; s.18) kazanımının ispat ile ilişkili olduğu görülmektedir

OMDÖP'e göre muhakeme becerileri yüksek bireylerin yetiştirilmesinin amaçlandığı belirtilmektedir (MEB, 2013, 2018). Benzer şekilde matematiksel muhakeme aktivitelerinin anasınıfından lise son sınıfa kadar matematik dersinin ayrılmaz bir parçası olarak öğretilmesi gerektiği de uluslararası raporlarda belirtilmektedir (CCSSI, 2010; NCTM, 2000). Ancak ilgili çalışmalar öğretim programında ispata yönelik kazanımların yeterince verilmediğini göstermektedir (Filiz ve Ergen, 2020). Benzer durum ders kitaplarını ispat bağlamında inceleyen çalışmalarda görülmektedir (Stylianides, 2009; Zeybek, Üstün ve Birol, 2018). İspatın sadece belli sınıf seviyelerinde ele alınmasının bireylerin matematiksel ispat öğrenimi için sakıncalı olacağı belirtilmektedir (Moore, 1994; NCTM, 2000). Bu sakınca doğrultusunda öğrencilerin ortaöğretimde ve üniversitede ispata yönelik görüşlerinin ve muhakeme becerilerinin istenilen düzeyde olmamasının en önemli nedenlerinden birisi; ispat ile çok geç yaşta tanışmaları - ilk kez ortaöğretim düzeyinde - ve matematiğin doğal bir bileşeni değil de ayrı bir konu olarak öğretilmesinden kaynaklanması söylenebilir.

İspatın erken yaşta ele alınmasının kritik bir değer olduğunu belirten birçok çalışma bulunmaktadır (Almedia, 2000; Hanna, 1991; Hanna ve Jahnke, 1996; Knuth, 2002; Mariotti ve Balacheff, 2008; Ross, 1998; Stylianides, 2007). İspat etkinliklerinin erken yaşlardan itibaren sınıf ortamına aktarılmasında ders kitaplarının önemi de yadsınamaz (Doğan, 2019). İspat içeriğine sahip olmayan bir matematik kitabından matematik eğitimi adına öğrencilere faydalı olması beklenilemez. Çünkü ispat matematik öğrenmede kavramlar arası ilişkilerin anlaşılmasını sağlayan bir araçtır (Knuth, 2002; Stylianides, 2010). Bu nedenle bu çalışma, 7. sınıf öğrencilerinin ispat becerilerini incelemenin yanı sıra 7. sınıf ders kitaplarında yer alan etkinliklerin ispat ve muhakeme bağlamında düzeylerini incelemeyi amaçlamaktadır. Bu çalışma ile OMDÖP geometri öğrenme alanı 7.sınıf kazanımlarına uygun olacak şekilde uyarlanan ispat ders planı uygulamalarının öğrencilerin ispat yapma becerilerine ve ispata yönelik görüşlerine etkilerini incelenmesi amaçlanmıştır.

## **1.2. Problem Cümlesi ve Alt Problem Cümleleri**

Bu çalışma kapsamında 7. sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanında ispat ders uygulamaları kapsamındaki ispat yapma becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır ve aşağıdaki araştırma problemlerine yanıt bulunmaya çalışılmıştır.

- 1- “7. Sınıf matematik ders kitabında yer alan geometri etkinliklerinin ispat ve muhakeme bağlamında düzeyleri nelerdir?”
- 2- “İspat ders planı uygulamalarının 7. sınıf öğrencilerinin ispat yapma becerilerine etkileri nelerdir?”
  - 2a- “7.sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanında ispat yapma becerileri hangi seviyededir?”
  - 2b- “Geometri öğrenme alanındaki ispat ders planı uygulamalarının 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik görüşlerine etkileri nelerdir?”

### 1.3. Araştırmanın Önemi

Matematiğin temel taşlarından biri olan ispat; matematiksel bilgilerin doğruluğunu sorgulama, yeni argümanlar üretme ve değerlendirme için vazgeçilmez bir bileşendir. Matematiksel ispat, matematiksel bilginin inşasında ve etkili bir matematik öğretiminde oldukça önemlidir (Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Bu çalışmada 7.sınıf öğrencilerinin matematik dersi geometri öğrenme alanına ait ispat yapma becerilerinin gelişiminin incelenmesi amaçlanmaktadır. Verilen bir ifadenin doğruluğunun veya yanlışlığının nedenini göstermede bir araç olan ispat erken yaşlarda öğrencilerle tanıştırıldığında kritik bir öneme sahiptir (Almedia, 2000; Hanna, 1991; Hanna ve Jahnke, 1996; Knuth, 2002; Mariotti ve Balacheff, 2008; Stylianides, 2007). Bu önem bağlamında öğrencilerin geometri öğrenme alanına ait ispat içerikli ders planları sonrası ispat yapma becerilerinin gelişimini ortaya çıkarmak, ispata yönelik eğilimlerini belirlemek alana katkı açısından önemli görülmektedir.

Bu konu ile ilgili yapılan araştırmalara ait alanyazı incelendiğinde farklı noktalara odaklanılan çalışmalar olduğu görülmektedir. Ders kitaplarında yer alan ispat etkinliklerinin incelendiği (Bieda, Ji, Drwencke ve Picard, 2014; McCrory ve Stylianides, 2014; Zeybek, Üstün ve Birol, 2018); öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin, ispata yönelik görüşlerinin ve becerilerinin incelendiği (Aylar, 2016; Gökkurt ve Soylu, 2012; İskenderoğlu ve Baki, 2011 Kaplan, Doruk, Öztürk ve Duran, 2016; Köğce, 2010; Özdemir, Dikici ve Kültür, 2013; Uğurel ve Moralı, 2010; Stylianides, 2007b) araştırmalar bulunmaktadır. Ders kitaplarının ispat etkinlikleri çerçevesinde incelendiği ve ispat etkinliklerinin sınıf ortamında uygulandığı çalışmalara alanyazında ayrı çalışmalar olarak ulaşılabilirken bu iki durumu aynı anda ele alan bir çalışmaya ulaşılamamıştır. Bu nedenle bu çalışmanın alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. İspatın matematik eğitimdeki yeri ve önemin giderek arttığı göz önünde bulundurulduğunda bu tür çalışmaların ispat alanında yapılan araştırmaların yaygınlaşmasına ve matematik eğitiminin kalitesinin arttırılmasına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

#### **1.4.Sayıtlılar**

Bu çalışmada öğrencilerin ispat- muhakeme becerilerinin ortaya çıkarılması için;

1. Uygulanan testlerin, öğrencilerin gerçek başarı durumlarını gösterdikleri;
2. Öğrencilerin ispat dersi uygulamalarında gerçek performanslarını ortaya koydukları;
3. Yapılan bireysel görüşmelere samimiyetle ve gerçek düşüncelerini yansıtacak şekilde cevap verdikleri varsayılmaktadır.

#### **1.5. Sınırlılıklar**

1. Araştırma, sadece 7.sınıf düzeyi ile sınırlıdır.
2. Araştırma, bir devlet okulundaki 7. Sınıfta öğrenim görmekte olan 14 öğrenci ile sınırlıdır.
3. Araştırma, öğrencilere uygulanacak belli sayıda sorularla sınırlıdır.
4. Araştırma, sadece 7.sınıf matematik ders kitabının geometri öğrenme alanı ile sınırlıdır.

## 2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE

### 2.1. Matematik ve İspat

İspatın kelime anlamı olarak birçok tanımı bulunmaktadır. Türk Dil Kurumu (TDK) (2005) ispatı, “*Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıt*”, ispat etmeyi ise “*kanıtlamak*” ve “*tanıtlamak*” şeklinde tanımlamaktadır (s.984-985). Birçok araştırmacı tarafından ispat kavramının anlamı farklı olarak ele alınmıştır. İspatın tarihsel gelişimi incelendiğinde matematik konu alanı genişledikçe ispatın tanımının da değiştiği ve önem kazandığı görülmektedir (Hersch, 1993). İspatın matematikçiler tarafından önemi düşünüldüğünde matematikçiler tarafından kabul görmüş belirli bir tanımının olmadığı görülmektedir (Cadwallader Olsker, 2011). Matematiksel ispat kavramı için yapılan tanımlamalar incelendiğinde iki kategori üzerinde şekillendiği görülmektedir. Bu kategoriler ispatın formal boyutu ve sosyokültürel boyutudur (Arsac, 2007).

Araştırmacılar tarafından yapılan ispat tanımlamalarına bakıldığında; Selden ve Selden’e (2003) göre ispat, teoremlerin doğruluğunu test etmeye yarayan iddialar iken Polya (1981) ise, belirli bir teoremin doğruluğunu ya da yanlışlığını kesin bir biçimde ortaya çıkarmak olarak tanımlamaktadır. Hanna’ya (2000) göre ispat, bir ifadenin sadece doğruluğunu veya yanlışlığını ortaya çıkarmak değil aynı zamanda doğruluğunun (yanlışlığının) nedenini de gösterme olarak tanımlamıştır. Baki (2008) ve Bell (1976) ispatı bir süreç olarak tanımlarken kendi içlerinde aşamaları olduğunu söylemektedirler. Knuth’a (2002) göre ispat matematik öğrenme sürecinin önemli bir aracı iken NCTM’e (2000) göre sezgilerin geliştirilmesi ve açıklanması için bir yoldur. Harel ve Sowder (2007) ispat için kişinin kendisini ikna etmesinin yeterli olmadığını, başkalarına da açıklamalar yaparak ve kanıt göstererek ikna etmesi gerektiğini belirtirken, Mason, Burton ve Stacey (1982) ispatı; kendini ikna et, bir arkadaşını ikna et ve bir düşmanını ikna et diyerek özetlemiştir. Stylianides’e (2007) göre ise ispat; matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermek için birbirine anlamca bağlı bir dizi iddiadan oluşan, aşağıdaki özelliklere sahip bir argüman olarak tanımlamaktadır:

1. Sınıf toplumu tarafından kabul edilmiş, kanıta ihtiyaç duymayan matematiksel ifadeleri kullanır.
2. Sınıf toplumu tarafından bilinen ve sınıf toplumunun kavramsal erişim sınırları içerisinde bulunan muhakeme biçimlerini kullanır.
3. Sınıf toplumu tarafından bilinen ve sınıf toplumunun yapısına uygun ifade etme biçimlerini kullanır.

Stylianides’in (2007) yapmış olduğu bu tanım ispatın sadece biçimsel yönünün olmadığını sınıf toplumunun özelliklerini de dikkate alınması gerektiğini belirtmektedir. Bu tanım her sınıf seviyesinin kendi özelliklerine ve kavramsal erişimlerine uygun ispat yapabileceklerini belirtmektedir. Diğer yapılan tanımlardan daha kapsamlı bir tanım

olduğu düşünülendiğinden yapılan bu çalışmada ispat tanımı olarak Stylianides (2007) tarafından önerilen tanım kullanılacaktır.

## 2.2. İspat Yöntemleri

İspat; verilen bir ifadenin doğruluğunun ya da yanlışlığının matematiksel kurallar kullanılarak, hiçbir soru işareti bırakmadan ilgili sınıf toplumuna açık anlaşılır bir ifade ile belirtilmiş matematiksel bir araçtır. İspat yapılırken ifadenin özelliklerine göre farklı yöntemler kullanılır. Alanyazı incelendiğinde ispat yöntemlerinin de ispatın tanımlanmasında olduğu gibi farklılıkların olduğu görülmektedir. Bir ifadeyi ispat etmek için sıkça kullanılan yöntemlerin; doğrudan, dolaylı, aşikâr, çelişki yoluyla, tümevarım yoluyla, tümdengelim yoluyla, karşıt tersi ile aksine örnek verme, tüketerek, deneme yoluyla, çift koşullu, oluşturarak ispat yapma olduğu söylenebilir (Gossett, 2003; Irmak, 2008; MEB, 2011; Rossi, 2006). Bu çalışma kapsamında ispat yöntemleri olarak, MEB'in (2013) Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında ispat yöntemleri baz alınmıştır. MEB (2013), ispat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak iki ana sınıfa ayırmış, tümdengelim ise doğrudan ispat yöntemi ve dolaylı ispat yöntemleri olmak üzere iki alt başlık altında incelenmiştir. Dolaylı ispat yöntemi ise; olmayana ergi, çelişki yoluyla ve aksine örnek verme yöntemlerini içerecek şekilde sınıflandırılmıştır (s. 31).

Tümevarım yönteminde ispatlanacak ifadenin öncelikle seçilen bir örnek için (genellikle ispatı yapılacak ifadenin ilk elemanı için) doğru olduğu gösterilir. Daha sonra  $n$  sayısı için doğru olduğu kabul edilerek  $n+1$  için doğru olduğu gösterildiğinde ispat tamamlanmış olur. Kısacası herhangi bir sayı için doğru olan bir ifadenin tüm sayılar içinde doğru olacağı gösterilmiş olur. Şekil 1'de 1'den  $n$ 'e kadar olan sayıların toplamının tümevarım yöntemi ile olan ispatı verilmiştir.

**“ $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ”**

**İspat:**

1.  $1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow$  önerme  $n=1$  için doğru.
2. Varsayalım  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$  eşitliği sağlansın. Bu durumda  $n=k+1$  için önermenin sağlandığını göstermeliyiz.

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1) + 2k + 2}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

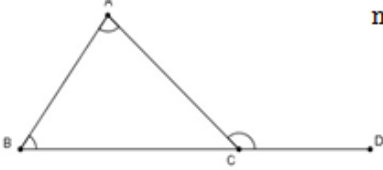
Şekil 1. Tümevarım İspat Temsili  
(Uğurel, 2020, s.234-235)

Tümdengelim yoluyla ispat doğrudan ve dolaylı olmak üzere ikiye ayrılır. Doğrudan ispat yönteminde; doğruluğu gösterilmek istenilen ifadenin daha önce ispatlanmış ifadelerle veya aksiyomlarla matematiksel işlemler kullanılarak doğrudan gösterilmesidir. Doğrudan ispat için örnek olarak üçgenin iki iç açısı ile dış açıları arasındaki bağıntının ispatı Şekil 2’de sunulmuştur.

İfade: “Bir üçgende iki iç açının ölçüleri toplamı kendilerine komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşittir.”

İspat:

ABC bir üçgen olsun. İspatlanması istenilen ifade;  
 $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = m(\widehat{ACD})$  olduğudur.



- İfade;  $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$  ‘dir. (Üçgenin iç açıları toplamı)
- İfade;  $m(\hat{C}) + m(\widehat{ACD}) = 180^\circ$  (Doğru açılarm ölçüsü)

İkinci ifade de;  $m(\hat{C}) = 180^\circ - m(\widehat{ACD})$  yazılabilir.

Birinci ifade de;  $m(\hat{C})$  yerine  $180^\circ - m(\widehat{ACD})$  yazılırsa;

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + 180^\circ - m(\widehat{ACD}) = 180^\circ$  eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafından eşitliğin korunumu ilkesi gereği  $180^\circ$  çıkarılırsa;

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) - m(\widehat{ACD}) = 0$  ifadesi elde edilir ve yine eşitliğin korunumu ilkesi gereği her iki tarafa  $m(\widehat{ACD})$  açısı eklenirse;

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = m(\widehat{ACD})$  elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Şekil 2. Doğrudan İspat Temsili

Dolaylı ispat yöntemi kendi içinde üç farklı yöntemle ayrılmaktadır. Bunlar; olmayana ergi yöntemi, çelişki yoluyla ispat ve aksine örnek vermedir. Aksine örnek verme yöntemi; verilen ifadelerin yanlışlığını göstermede sıkça kullanılan bir yöntemdir. Bir ifadenin tüm durumlar için doğru olduğunu göstermek için tüm doğal sayıların tek tek denenmesi imkânsızdır ama ifadenin yanlışlığını göstermek için bir tane örnek yeterli olacaktır. İşte o örneği vererek ifadenin yanlış olduğu gösterilen ispat yöntemi aksine örnek verme yöntemi olarak adlandırılır. Aksine örnek verme yöntemi için Şekil 3’te temsil sunulmuştur.

İfade; “Çevreleri eşit çokgenlerin alanları da eşittir.”

İspat: Öncelikle çevreleri eşit olacak şekilde 2 dikdörtgen alalım. Birinin kısa kenarı 3 cm, uzun kenarı 7 cm olsun; diğerrinin ise kısa kenarı 4 cm uzun kenarı 6 cm olsun. Her ikisinin de çevreleri 20 cm’dir. Ama alanlarma bakıldığında birinin  $3.7 = 21\text{cm}^2$  ; diğerrinin  $4.6 = 24\text{cm}^2$  olduğu görölmektedir. Dolayısıyla verilen ifadenin yanlış olduğunu görölmektedir.

Şekil 3. Aksine Örnek Verme Yöntemi İspat Temsili

Çelişki yoluyla ispat yönteminde; doğrulanması istenilen ifadenin yanlış olduğu kabul edilerek bir çelişkiye varılır ve başlangıçtaki yanlış kabulün doğru olduğu sonucuna ulaşılır. Bunun için örnek olarak  $\sqrt{2}$  ‘nin irrasyonel olması verilebilir. İspatın amacı  $\sqrt{2}$  ‘nin rasyonel olduğunu kabul ederek bir çelişkiye ulaşmaktır. Şekil 4’te bu ifadenin çelişki yoluyla ispatına yer verilmiştir.

“  $\sqrt{2}$  sayısı irrasyoneldir. ”

**İspat:** Aksini varsayalım yani  $\sqrt{2}$  rasyonel olsun. Bu durumda  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  ve  $q \neq 0$  olacak biçimde en büyük ortak bölenleri 1 olan  $p, q \in \mathbb{Z}$  vardır. Bu durumda,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ çift} \Rightarrow p \text{ çift} \Rightarrow p = 2k \text{ olacak biçimde } k \in \mathbb{Z} \text{ vardır.}$$
$$\Rightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q^2 \text{ çift} \Rightarrow q \text{ çift}$$

$p$  ve  $q$  çift sonucuna ulaşılmıştır ve bu sonuç en büyük ortak bölenlerinin 1 olması varsayımı ile çelişir.

Şekil 4. Çelişki Yoluyla İspat Temsili  
(Uygur Kabael, 2020, s.237).

Olmayana ergi yönteminde; verilen ifadenin karşıt tersi ispatlanmaya çalışılır. Örneğin; “Karesi çift olan bir sayının kendisi de çifttir.” ifadesine bakalım. Şekil 5’te olmayana ergi yöntem kullanılarak bu ifadenin ispatı sunulmuştur.

$$a=2k+1, (\forall k \in \mathbb{Z} \text{ için } 2k \text{ çift, } 2k+1 \text{ ise tek sayıdır})$$
$$\Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$$
$$\Rightarrow a^2=2(2k^2+2k)+1, (\forall k \in \mathbb{Z} \text{ için } 2k^2+2k=t \in \mathbb{Z} \text{ dir})$$
$$\Rightarrow a^2=2t+1 \text{ olur } (t \in \mathbb{Z} \text{ için } 2t \text{ çift, } 2t+1 \text{ ise tek sayıdır})$$
$$\Rightarrow a^2 \text{ bir tek sayıdır.}$$

Şekil 5. Olmayana Ergi Yöntemi Temsili  
(Bayazıt, 2017, s.29).

İfadeyi ispatlamak için bir tek sayının karesinin yine tek sayı olacağı gösterilmiş ve bu sonuca göre karesi çift olan sayıların kendisinin de çift olacağı sonucu doğrulanmıştır.

### 2.3. İspat Şemaları

Matematiksel ispat kavramı için yapılan tanımlar incelendiğinde, formal ve sosyokültürel olmak üzere iki boyutunun ön plana çıktığı görülmektedir (Arsac, 2007). Dede ve Karakuş'a (2014) göre sosyokültürel boyut; yapılan ispatın yöntem, işlem ve süreç durumlarını kapsamaktadır. Harel ve Sowder (1998) formal boyut olarak ispatı; öğrencilerin bilişsel muhakemelerini öne çıkaran, sosyokültürel boyutuna atıfta bulunarak ise toplumsal kuramlar ile birlikte şekil alan bir süreç olarak tanımlamıştır. Bu durum öğrencilerin ispat yaparken nasıl düşündüklerine odaklanıldığı bir süreci ve ardından da ispat şeması kavramını ortaya çıkarmıştır. Alanyazında araştırmacılar tarafından farklı ispat şemaları oluşturduğu görülmektedir.

Van Hiele (1986) ispat şemalarını oluştururken çocukların geometri düşünme biçimlerini somuttan soyuta doğru ele almıştır. Beş düzeyden oluşan bu sınıflandırma Öklid Geometrisi üzerine kuruludur. Düzey 0 temel seviyedir ve bu seviyedeki öğrenciler şekilleri bir bütün olarak görür ve şekillerin görünüşlerini temel alan muhakeme yeteneğine sahiptirler. Düzey 1'de ise şekillerin parçalarına odaklanabilir ve özelliklerini belirtebilirler. Ancak bu düzeyde öğrenciler şekiller arasında hiyerarşik bir ilişkilendirme kuramazlar. Örneğin, karenin özel bir dikdörtgen olduğunu fark edemezler. Düzey 2 ise, farklı geometrik şekiller arasındaki benzerlik ve farklılıklar öğrenilebilir ve şekiller arasında ilişki kurulabilir. Bu düzeyde bulunan öğrencilerin muhakeme yetenekleri ilişkilendirme yapmaya müsait olduğundan öğrenciler basit düzeyde ispatlar yapabilirler. Örneğin, karenin neden özel bir dikdörtgen olduğunu informal olarak kanıtlayabilirler. Düzey 3'te bulunan öğrenciler daha önceki düzeylerde gösterilen muhakeme yeteneklerinin yanı sıra ispat yapabilir veya yapılan bir ispatı anlamlandırabilirler. Geometrinin aksiyomatik yapısı ve farklı geometriler ise ancak Düzey 4'te bulunan öğrenciler tarafından anlamlandırılabilir. (Paksu, 2004; 2016, s.266-275).

Balacheff (1988) ise öğrencilerin ispat seviyelerini pragmatik ispat ve kavramsal ispat olmak üzere iki seviyede ele almıştır. Her bir seviye iki alt başlıktan oluşmaktadır. Pragmatik ispat; saf deneycilik ve kritik deney, kavramsal ispat; genelleştirici örnek ve düşünce deneyidir. Pragmatik ispat zihinsel ispata göre daha alt seviyededir. Pragmatik ispatta öğrenci verilen ifadeyi belli sayı veya sayıları kullanarak doğrulamaya çalışırken, zihinsel ispatta daha ileri beceri gerektiren formülasyonlar ve matematiksel ilişkiler kullanılır.

Simon ve Blume (1996) öğrencilerin ispat becerilerinin gelişimini sınıflandırırken Balacheff 'in (1988) genelleştirici örnekten düşünce deneyine geçiş gibi, tümevarımdan tümdengelimle ilerleme olarak açıklamaktadır. Van Hiele gibi beş düzey belirledikleri seviyelerin ilki verilen ifadeye herhangi bir ikna edici açıklama yapamadıkları Düzey 0'dır. Düzey 1'de öğrenci bir ifadenin kanıtlanmasında bir

otoriteye başvurur. Düzey 2’de ifadeler bir örnek üzerinden doğrulanmaya çalışılır. Düzey 3’te ise Balacheff’in genelleyici örneğinde olduğu gibi özel bir örnek üzerinden ifadeler doğrulanmaya çalışılır. En üst seviye olan Düzey 4’te ise herhangi bir örnekten bağımsız olarak kavramlar arası ilişkiler kullanılarak tümdengelsel gerekçelendirmeler yapılır.

Bell (1976) ispat gelişimini soyutlama, kontrol, ispat ve aksiyomlar olarak dört aşamaya ayırmıştır. Soyutlama aşamasında gözlem ve deneyler sonucu belli bir ilişki fark edilir ama yeterli açıklama yapılamaz. Kontrol aşamasında fark edilen kural veya ilişki için farklı örneklerle rastgele denemeler yapılır. İspat aşamasında ifadenin tüm durumlar için denenemeyeceği fark edilir ve genel sonuçlar oluşturulmaya çalışılır. Aksiyomlar aşaması ise doğruluğu kabul edilen önermelere ihtiyaç olduğu fark edilir.

Harel ve Sowder (1998) tarafından oluşturulan ispat şemaları ise Tablo 1’de gösterilmiştir.

Tablo 1.Öğrencilerin İspat Yapma Davranışları

| İspat Şemaları                                                                                                    |                                                                                               |                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dışsal İ.Ş.                                                                                                       | DeneySEL İ.Ş.                                                                                 | Analitik İ.Ş.                                                                                   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ritüel İ.Ş.</li> <li>• Otoriter İ.Ş.</li> <li>• Sembolik İ.Ş.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tümevarımsal İ.Ş.</li> <li>• Algısal İ.Ş.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dönüşümsel İ.Ş.</li> <li>• Aksiyomatik İ.Ş.</li> </ul> |

\*İ.Ş: İspat Şemaları

Harel ve Sowder (1998) ispat şemalarını sınıflandırırken öğrencinin bilişsel gelişimini dikkate almıştır. İspat şemalarındaki üç kategori öğrencilerin zihinsel becerilerini, matematiksel gelişimlerdeki bir bilişsel aşamaya tekabül etmektedir. Bu üç aşama birbirinden bağımsız olmayıp, iç içe geçmiş bir biçimde bireylerde görülebilir. Bireyler birden fazla ispat şemasına sahip olabilir. Üç aşamada sınıflandırdıkları şemalar; dışsal ikna şeması, deneysel ispat şeması ve analitik ispat şemasıdır. Çalışmada öğrenci cevapları analiz edilirken kullanılacak bu şemalar örneklerle derinlemesine açıklanmaya çalışılmıştır. Dışsal ikna şemasında bulunan bir öğrenci verilen ifadeleri kendi zihinsel düşünme biçiminin dışında bir kaynağa atıfta bulunarak açıklamaya çalışır. Örneğin, üçgenin iç açıları toplamının neden  $180^\circ$  olduğu sorulduğunda öğrenci cevap olarak genellikle ders kitabında yazdığı veya öğretmenlerinin bu şekilde söylediğini belirtebilir. Herhangi ikna edici genelleme veya gerekçelendirme yapılamaz. Deneysel ispat şemasında bulunan öğrenciler ise verilen ifadeleri doğrulamada bir veya birkaç örneği kullanabilirler. “İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.” ifadesinin doğruluğunu/yanlışlığını açıklamaları istenildiğinde, öğrenciler üç ile beş gibi herhangi iki tek sayıyı toplayıp sekiz ettiğini bundan dolayı verilen ifadenin doğru olduğunu ifade edebilirler. Bir ifadenin doğruluğunu kanıtlamak için ifadenin seçilen bir ya da birkaç örnekte denenmesinin yeterli olacağı kanısında bulunabilirler. Analitik ispat şemasında bulunan öğrenciler ise örneklerden bağımsız tümdengelsel süreç içerisinde ifadelerin doğruluğunu gösterirler. Matematiksel sembol ve gerekçelendirmelerle ifadelerin doğruluğunu açıklama içerisinde olurlar. Örneğin, n kenarlı bir çokgenin iç

açıları toplamının neden  $(n-2) \cdot 180^\circ$  ifadesi ile bulunduğunu açıklamaları istenildiğinde; öğrencilerden önceki öğrenmeleri olan üçgenlerin iç açıları ölçüleri toplamını kullanarak çokgeni üçgensel bölgelere ayırmaları,  $n$  kenarlı bir çokgenin  $(n-2)$  üçgensel bölgeye ayrıldığını örüntü yardımı ile bulmaları ve çokgenin iç açıları ölçüleri toplamını bulmak için  $(n-2)$  tane  $180^\circ$ 'nin toplanması gerektiğini belirtmeleri beklenebilir. Yapılan bu çalışmada öğrenci cevapları analiz edilirken Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları kullanılacaktır.

## **2.4. İlgili Araştırmalar**

Bu çalışmada 7. Sınıf matematik ders kitaplarında geometri öğrenme alanında ispat etkinliklerine ne kadar yer verildiğinin belirlenmesi ve öğrencilerin geometri öğrenme alanında ispat ders planı uygulamaları sonucunda, muhakeme ve ispat beceri düzeylerinin ne ölçüde değiştiğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Öğrencilerin ispat yapma becerilerinin ispat dersi uygulamaları öncesi ve sonrasında incelenerek, yapılan bu uygulamanın öğrencilerin ispat becerilerine etkilerinin de araştırılması planlanmıştır. Bu çalışma ile ilgili alanda yapılmış ilgili çalışmalar; Muhakeme ve İspat Yeteneği, İspat Etkinliklerinin Ders Kitaplarındaki Yeri, İspatın Matematik Eğitimindeki Rolü, İspata Yönelik Tutumlar ve Öğrencilerin İspat Yapma Becerileri alt başlıkları halinde incelenecektir.

### **2.4.1. Muhakeme ve İspat Yeteneği**

Altıparmak ve Öziş (2005) yapmış oldukları çalışmada matematiksel ispat ve muhakemenin farklı sınıf seviyelerindeki gelişimini incelemişlerdir. Okulöncesi, ilköğretim ve lise yıllarında ispat becerisinin bireylerde nasıl geliştirilebileceği NCTM (1989) standartları göz önünde bulundurularak açıklanmaya çalışılmıştır. Okulöncesi dönemde somut işlemler döneminde olan bireyler için sınıflama, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma kavramları ispat becerisi için ilk adımları oluşturmaktadır. Bu dönemde formal olarak öğretilmeyen geçişme özelliği informal olarak öğretilabilir. Bireyler ilköğretim yıllarının ilk 5 yılı içerisinde fiziksel materyaller ile ispat yapabilmeleri ve birkaç örneğin varsayımı doğrulamak için yeterli olmadığını ama karşıt örnekler ile varsayımı çürütebilmeyi öğrenmelerinin gerekliliğinden bahsedilmiştir. 6-8. Sınıf öğrencilerinden ise varsayımlar oluşturmaları ve varsayımları tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakeme ile ispat becerilerini geliştirmeleri beklenmekte olduğu ifade edilmiştir. Lise döneminde ise bireylerden artık muhakeme ve ispat standartlarını görebilmeleri, araştırma yapabilmeleri ve mantıklı, makul açıklamalarda bulunabilmeleri gerekliliği ifade edilmiş ve bu yıllarda öğrencilerden doğrudan, dolaylı, çelişki ile, tümevarım ile ve geometri bilgilerini kullanarak ispat yapabilecekleri üzerinde durulmuştur. Yapılan çalışmada sonuç olarak her bir dönem bir sonraki dönem için bireyin muhakeme becerisinin gelişiminin temelini oluşturduğu, bunun içinde okulöncesi, ilköğretim ve lise döneminde öğrencilerin muhakeme becerisini geliştirmeye yönelik etkinliklere yer vermenin öneminden bahsedilmiştir. Aksi takdirde ezbere dayalı ve muhakeme yeteneği yok olmuş bireyler yetiştirileceği belirtilmiştir. Altıparmak ve Öziş (2005), NCTM (2000) raporları ile uyumlu olarak ispat ile erken

yaşıta tanışamayan öğrencilerin ilerde muhakeme ve ispat oluşturmada zorlandıklarını savunmuştur.

Arslan (2007), “İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi” isimli doktora tezi çalışmasında ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme ve ispat düşüncelerinin gelişimini incelemiştir. 679 ilköğretim 6,7 ve 8. sınıf öğrencisi ile yürüttüğü çalışma tarama modelinde düzenlenmiştir. Nitel ve nicel veri toplama araçları kullanan araştırmacı öğrencilerin zihinsel gelişim basamaklarına uygun düşen ispat düzeylerini belirlemek için beş soruluk bir uygulama yapmış ve 36 öğrenci ile bireysel görüşmelerde bulunmuştur. Araştırma sonucunda elde edilen sonuçlar incelendiğinde öğrencilerin muhakeme etme düzeylerinin düşük olduğu ve verilen bir matematiksel ifadeyi ispatlama ve beklenen stratejileri kullanma da yetersiz kaldıkları görülmüştür. Sınıflar arasındaki farklar incelendiğinde 6.sınıftan 8.sınıfa doğru gidildikçe istenilen cebirsel ifadeyi doğru yazabilen öğrenci sayısında artış gözlemlenmiştir. Bu bulguya bakarak araştırmacı sınıf seviyesi ile kullanılan strateji arasında bir ilişki olduğunu belirtmiştir. 6 ve 7. sınıf öğrencileri görsel ve örnek ile açıklama yapma eğiliminde iken 8.sınıf öğrencilerinin daha çok cebirsel ispata eğilimli oldukları saptanmıştır. Öğrencilerin genel olarak; muhakeme etme düzeylerinin istenilen düzeyin altında olduğu, cebir kullanarak genellemelere ulaşamadıkları, birkaç örnek ispat yapmaya çalıştıkları ve denklemleri kullanarak sonuca ulaşma becerilerinin düşük olduğu da tespit edilmiştir. Benzer şekilde Arslan ve Yıldız (2010) 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar adını verdikleri çalışmalarında öğrencilerin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleştirme, varsayımda ve ispatlama aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya koymayı amaçlamışlardır. 24 lise öğrencisi ile yürüttükleri çalışmalarında nitel araştırma yaklaşımını kullanmışlardır. Yukarıda belirtilen aşamaları içeren dokuz soruluk çalışma yapıları uygulanan öğrencilerin en çok özelleştirme aşamasında, en az da ispatlama aşamasında başarılı oldukları görülmüştür. Özelleştirme aşamasında tam bir başarı sağlanmasının nedenini araştırmacılar; ilköğretim ve ortaöğretimde işlemsel becerilerin kazanılmasını ve pekiştirilmesini amaçlayan özel durum sorularına ağırlık verilmesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir. Genelleme aşamasında ise öğrencilerin daha çok sözel ifadeler kullanmayı tercih ettikleri, sayılar ve değişkenler arasındaki ilişkiyi sembolle göstermekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Varsayımda bulunma aşamasında da genelleme aşamasında görüldüğü gibi öğrencilerin sözel ifadelere ağırlık verildiği belirtilmiştir. İspatlama aşamasında da öğrencilerin aritmetik ispat yapma eğiliminde oldukları; geometrik ve cebirsel ispatlarda, aritmetik ispattaki kadar başarılı olamadıkları, öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin özelleştirme aşamasından ispatlama aşamasına doğru gidildikçe başarı seviyelerinin düşmesi de NCTM (2000) raporları ile örtüşmektedir.

Bahtiyari (2010), sekizinci sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığını belirlemek amacıyla 340 öğrenci ile bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada altı bölümden oluşan bir anket kullanılmıştır. Anketin birinci bölümü, öğrencinin matematik becerilerini hangi aşamada gördüğü; ikinci

bölümü, öğrencinin ispat ve muhakeme kavramlarının farkındalığı; üçüncü bölümü, öğrencinin matematik eğitiminde ispatın öneminin farkındalığı; dördüncü bölümü, öğrencinin matematik eğitiminde ispatları kavramada zorlanıp zorlanmadığı; beşinci bölümü, ispatlı matematik eğitiminde kullanılan tekniklerin yeterliliği ve altıncı bölümü ise, öğrencilerin ispatı kullanmada hangi aşamada olduğunu belirlemeye yöneliktir. Bu içeriğe sahip anketi öğrencilere uygulayan araştırmacı; öğrencilerin birçoğunun ispatın önemi ve ne anlama geldiğinden emin olamadıklarını, öğrencilerin ispat ve muhakeme bakımından yeterli deneyimlerinin olmadığı ve öğrencilerin birkaç örnek ile matematiksel bir ifadenin doğru olduğuna inanabileceklerini belirtmiştir. Ayrıca, Bahtiyari (2010) öğrencilerin genellikle Saf Deneycilik (NaiveEmpiricism) seviyesinde ispat yapma eğiliminde olduklarını ve bunun sebebinin ise ispat ile geç yaşta tanışmaları olduğunu söylemiştir. Benzer şekilde; Kılıç, 2012 yılında yapmış olduğu lise öğrencilerinin geometrik düşünme, problem çözme ve ispat becerileri adlı çalışmada dinamik geometri yazılımlarının 10. Sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme ve ispat yapma becerisine etkisini incelemiştir. Çalışma 227 öğrenci katılımı ile gerçekleştirilmiş ancak 49 öğrencinin verileri analiz edilmiştir, Geometrik düşünme, problem çözme ve ispat becerilerini ölçmeye yönelik 3 farklı test uygulanmıştır. Öğrencileri deney grubu ve kontrol grubu olmak üzere iki gruba ayıran araştırmacı, deney grubu ile dinamik geometri yazılımlarını kullanarak 5 etkinlik yapmış ve kontrol grubu ile sonuçları karşılaştırmıştır. Uyguladığı son testte gruplar arasında anlamlı bir fark bulunamayan çalışmada deney grubuna uygulanan bu üç testin ortalamalarında anlamlı bir artış olduğu saptanmıştır. Ayrıca öğrencilerin testler bazında ortalamalarının genel olarak düşük olduğu, temel geometrik kavramları tanımakta zorlandıkları, kavramlar arasında ilişki kuramadıkları ve ispat becerilerinin istenilen düzeyde olmaması öğrencilerin ispat ile ilk olarak ortaöğretim düzeyinde karşılaşmaları gösterilebilir.

Özdemir, Dikici ve Kültür (2013) 7.sınıf öğrencilerinin örüntüleri genelleme süreçlerini inceledikleri çalışmada en başarılı olunan durumun yakın uzaklıktaki terimleri bulma, en başarısız olunan durumun ise kurallar oluşturma olduğunu belirtmişlerdir. 9 öğrenci ile yürüttükleri çalışmada öğrencilerin yakın uzaklıktaki terimleri bulurken yinelemeli ilişki stratejisini, orta uzaklıktaki terimleri ve kuralları bulurken belirgin strateji kullanma eğiliminde olduklarını tespit etmişlerdir. Ayrıca örüntülerin kurallarını bulurken görsel stratejilerden herhangi birini kullanan öğrenciye rastlanmadığı ve yakın uzaklıktaki terimi bulmada %84,4; orta uzaklıktaki terimi bulmada %64,4 ve kural oluşturmada %53,3 başarıya sahip oldukları araştırmanın bir diğer önemli bulgusu arasındadır. Öğrencilerin sorulan sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde görsel ilişkilerden ziyade sayısal ilişkilere odaklandıkları görülmüştür. Yapılan bu çalışmada örüntülerin kuralını bulmada en yüksek başarı oranları tekrarlı, en düşük başarı oranı ise artarak genişleyen örüntü sorularında olduğu saptanmıştır. Örüntüler ispat yapma etkinliklerinin ilk aşaması olarak kabul edilebilir. Ancak öğrencilerin örüntü kuralı bulma ve kuralı cebirsel olarak yazmada zorlanmaları matematiği anlamlandırmada ve muhakeme becerilerini kullanmada zorlandıklarını göstermektedir.

Özer ve Arıkan (2002) lise 2.sınıfta öğrenim gören 110 öğrenci ile yaptıkları çalışmada öğrencilerin ispat yapabilme düzeylerini incelemişlerdir. Miyazaki ve Balacheff'in yapmış olduğu çalışmalardan ve tanımlardan faydalanılarak yürütülen çalışmada öğrencilerin materyal kullanarak ispat yapıp yapamadıkları da ortaya konulmaya çalışılmıştır. Açık uçlu olarak sorulan sorulara öğrenciler tarafından verilen cevaplar puanlandırılıp 3 öğrenci ile bireysel görüşme yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin istenilen düzeyde ve materyal kullanarak ispat yapamadıkları görülmüştür. Öğrencilerin ayrıca ispat yapma yöntem ve tekniklerini kullanamadıkları belirtilen çalışmada öğrencilerin diğer araştırmalarda da olduğu gibi genel ispat yapma alışkanlığı bulunmadığı görülmüştür. Benzer şekilde; Umay ve Kaf (2005), 5-8. öğrencilerinin ne gibi kusurlu akıl yürütmeler yaptıklarını belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmada öğrencilerden, verilen dört problemi çözmelerini istenmişlerdir. 90 öğrenci ile yürütülen çalışmada elde edilen sonuçlara bakıldığında akıl yürütmelerinde kusur bulunan öğrencilerin akıl yürütme sürecini tamamlamadan sona erdirdikleri ya da kavramsal eksikliklerinden dolayı kalıp çözümlere yöneldikleri belirtilmiştir. Öğrencilerin büyük bir kısmının zayıf akıl yürütmeye, çok az bir kısmının ise doğru akıl yürütmeye sahip oldukları saptanmıştır. Yeşildere ve Türnüklü (2007), ilköğretim sekizinci sınıftan mezun olan öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini incelemişlerdir. 262 öğrenci ile yürüttükleri çalışmada nitel ve nicel veri çözümleme teknikleri kullanılmıştır. Öğrencilere sorulan on tane açık uçlu problem ile onların matematiksel muhakeme süreçleri incelenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin problem çözmede matematiksel bilgilerle ilişkilendirme ve mantıksal akıl yürütme konusunda sorunlar yaşadıkları görülmüştür.

Zaimoğlu(2012), yapmış olduğu yüksek lisans tezi çalışmasında sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik ispat ve akıl yürütme süreçlerini, ispat temsil Şekillerine olan eğilimlerini tümevarım ve tümdengelimsel muhakeme doğrultusunda incelemeyi amaçlamıştır. Araştırma toplam 154 öğrenci ile yürütülmüştür. Araştırmada öğrencilere 6 ve 7.sınıf geometri öğrenme alanına ve kazanımlarına uygun olan 8 açık uçlu soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin cevapları ( doğrulama, açıklama ve sistematikleştirme boyutları) dikkate alınarak incelenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin tümevarımsal yöntemi daha çok tercih ettikleri, cebirsel ispatı tercih etmedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Yine öğrenciler geçerli bir ifadenin doğrulamasını yapabilirken, geçersiz bir ifadeyi çürütme yollarını yani ters örnek verme, çelişki bulma yöntemlerini hiç bilmedikleri görülmüştür. İspatın bireylerde gelişimi ve ülkemizdeki öğrencilerin ispat ve muhakeme becerilerinin incelendiği bu araştırmalardan da görüldüğü üzere ispat konusunda NCTM'in (2000) belirttiği durumun şu an için çok uzağındayız. Öğrencilerin daha erken yaşta -okul öncesinden itibaren- ispatsal etkinliklerle tanıştırmalı ve onların muhakeme becerilerini geliştirerek matematiğin ayrılmaz parçası olan ispat ile matematiği daha anlamlı bir hale getirebiliriz. Alan çalışmalarında öğrencilerin kullandıkları ve öğretmenden sonra ikinci kaynak olarak görülen ders kitaplarının ispatsal bağlamda incelendiği çalışmalar ve aynı bulgulara sahip alanyazında birçok araştırma mevcuttur (Arslan ve Yıldız, 2010; Birinci, 2010; Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Uğurel, 2010;).

Bu araştırmalardan çıkarılabilecek ortak sonuçlar; öğrencilere verilebilecek ispat eğitimi ile muhakeme becerileri ortaya çıkmakta ve gelişmektedir, öğrencileri ispat ile tanıştırmak için ortaöğretimi beklemeye gerek yoktur. Çünkü muhakeme yeteneği bireylerin doğuştan getirdiği bir beceridir (Altıparmak ve ziş, 2005). Bundan dolayı yapılan araştırmalar erken yaşta ispat ile tanışacak bireylerin ilerleyen yıllarda muhakeme becerilerini istenilen düzeyde kullanabileceğini göstermektedir. Benzer şekilde muhakeme becerisini arttırıcı etkilere programlarda daha fazla yer verilirse, öğrenciler matematiksel ifadelerin neden doğru veya yanlış olduğunuda iyi anlamlandıracak, matematiği daha zevkli ve anlamlı bir hale getirecektir. Her ne kadar muhakeme becerisi ilköğretim ve ortaöğretim matematik programlarında kazandırılması beklenen temel beceriler arasında olsa da bu beceriyi öğrencilerde ortaya çıkaracak etkinlikler günümüzde sadece ortaöğretim seviyesinde başlamaktadır (MEB, 2013; 2018). Oysaki yapılan araştırmalar öğrencilerin daha alt sınıf seviyelerinde de uygun olacak şekilde ispat yapabildiklerini (Aylar, 2014; Stylianides, 2007; Vatandaş, 2022) ve yapabileceklerini söylemektedir (NCTM, 2000). Bu çalışmalarda ispatı ortaöğretimden bir alt eğitim ğretim seviyesi olan ilköğretime indirilmesi gerekliliğini göstermekte ve önermektedirler. Yapılan alışmalar; öğrencilerin hem ispat ve muhakeme becerilerinin hem de matematik ders kitaplarındaki ispatsal etkinlikleri arttırılması gerekliliğini ve bu tür çalışmalara olan ihtiyaı göstermektedir.

#### **2.4.2. İspat Etkinliklerinin Ders Kitaplarındaki Yeri**

Bieda, Ji, Drwence ve Picard (2014) yapmış oldukları çalışmalarında ABD’de kullanılan 9-11 yaş arası öğrencilerin matematik ders kitaplarını incelemişlerdir. Çalışmanın amacı ders kitaplarındaki etkinliklerin ne kadarının muhakeme ve ispat yapma ile ilgili olduğunu ortaya çıkarmaktır. Toplam yedi ders kitabının muhakeme ve ispat bağlamında incelendiği bu araştırmada İlköğretim Matematik ğretim Programının, matematiksel iddiaları üretmeyi ve değerlendirmeyi öğrenecek anlamlı fırsatlar sağlamak için yeterli olmadığı ve muhakeme ve ispat ile ilgili etkinliklerin yeterli olmadığını göstermişlerdir (%3,7). Bu durum da NCTM (2000) raporu ile örtüşmemektedir.

McCrary ve Stylianides, 2014 yılında yapmış oldukları çalışma da geleceğin öğretmenleri ve eğitimcileri açısından, ders kitaplarının muhakeme ve ispat bakımından neler sağlayabileceğini belirlemeyi amaçlamışlardır. Amerika Birleşik Devletleri’nde güncel olarak kullanılan 16 matematik ders kitabını incelemişlerdir. Ders kitabını, ğrenci öğreniminin bir belirleyicisi değil, bir kaynağı olarak tanımladıkları çalışmalarında ders kitaplarındaki ispat ile ilgili kelimelere odaklanmışlardır. İçindekiler tablosunda, tüm bölümlerin ve bölümlerin başlıklarını (alt bölümler de dahil olmak üzere) incelenmiş ve ders kitaplarında muhakeme ve ispat ile ilişkili terimler aranmıştır. Araştırma sonucunda; incelenen ders kitaplarında muhakeme ve ispatın nadiren ele alındığı ortaya çıkmıştır. Pek çok ders kitabında, muhakme ve ispat ile ilgili içeriğe sahip tek bir bölüm (genellikle açılış bölümü) bulunduğu, mantık-kanıtlayan kavram ve yöntemlere atıflar bu az bulunan bölümlerin dışında çok az olduğu da görülmektedir.

Newton ve Newton tarafından 2007 yılında yapılan çalışmada 7 ile 11 yaş arasındaki öğrencilerin kullanmakta olduğu 18 ders kitabı ispat bağlamında incelenmiştir. İncelenen 18 ders kitabının ispatsal içeriklere çok yer vermediği belirtilmiştir. Stylianides'in 2009 yılında yapmış olduğu çalışmada, Amerika Birleşik Devletlerinde yaygın bir şekilde kullanılmakta olan ders kitaplarını; cebir, sayılar teorisi ve geometri olmak üzere 3 bölümde incelemiştir. İnceleme sonuçlarına göre araştırmacı tarafından, öğretmen için en iyi rehber durumunda olduğu belirtilen ders kitaplarının yeterince muhakeme ve ispat içeriği barındırmadığı belirtilmiştir.

Zeybek, Üstün ve Birol tarafından 2018 yılında yapılan matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri isimli çalışmalarında MEB tarafından ortaokullarda öğretim aracı olarak kullanılan 5, 6, 7 ve 8. sınıf ders kitapları içerik bakımından ispat bağlamında incelenmiştir. Araştırmanın amacı ortaokul matematik ders kitaplarında ispatın hangi sıklıkla bulunduğunu belirlemektir. Materyallerde bulunan 2851 matematiksel aktivitenin sadece 171 (%6)'inin muhakeme ve ispat aktivitesi olma özelliği taşıdığı görülmüştür.

Taştepe 2012 yılında yapmış olduğu tez çalışmasında üniversitede matematik derslerinde kullanılan kitapları doküman analizi yardımıyla incelemiştir. Doküman analizi ile elde ettiği bulgularla matematik öğretmenliğinde okuyan 32 öğretmen adayına bir anket uygulamıştır. Aynı zamanda farklı üniversitelerde çalışan 5 öğretim üyesi ile görüşmeler yaparak veriler toplamıştır. Araştırmada incelenen 5 ders kitabında kullanılan ispatlar ve teoremler bakımından belirgin farklılıklar olduğu ve bu farklılıkların sınıflar arasında farklı yaklaşımlara yol açabileceği belirtilmiştir. Ayrıca incelenen kitaplarda en fazla kullanılan ispat türü olarak entelektüel ispat yani bir kalıba dayalı olarak yapılan ispatların bulunduğu sonucuna varılmıştır. En az kullanılan ispat türü ise en ileri seviye olan ve demonstrasyon ispat olarak adlandırılan olan ispat türleridir. Öğretmen adaylarına uygulanan anket sonuçlarına göre, öğretmen adayları ispat yapmanın öneminin farkında olduklarını ama bazı derslerde ispatları anlamada zorluk yaşadıklarını ve ispat ile ilk defa üniversitede karşılaştıklarını belirtmişlerdir. Öğretim üyeleri ile yapılan görüşmelerde ise, ispat yöntemi olarak genellikle entelektüel ispatı tercih ettikleri ve bunda kullanılan ders kitabının önemli olduğu görüşünde oldukları belirtilmiştir.

Greiner (2000), yaptığı çalışmada öğrencilerin 11-16 yıllık ders kitaplarını ve müfredat programlarını ispatsal bağlamda incelemiştir. Müfredatın amaçları ile kitap içeriği arasında tutarsızlıklar olduğu gözlemlenmiştir. Fransa'da yapılan çalışmada, müfredat yeni ispat yöntemlerini öneriyorken; kitapların daha klasik yöntemler ile düzenlendiği sonucuna varmıştır. Matematik öğretiminde kitapların yeri ve önemi tartışılmaz iken içerikleri ve alan çalışmaları bakımından alanyazında eksikliği çok fazladır. Özellikle, matematik kitaplarındaki ispat yöntemleri, ispat tartışmaları ya da ispat oluşturmaya ait yeterince çalışmanın olmadığı belirtilmiştir (Hanna ve de Bruyn, 1999).

Karakuş ve Korkutan (2021), ortaokul 7 ve 8.sınıf ders kitaplarını geometri ve ölçme konularına yönelik yapılan ispatlar bakımından inceledikleri çalışmalarında; ders kitabında bulunan örnek, etkinlik ve problemleri Stylianides'in(2018) muhakeme ve ispat teorik çatısına göre sınıflandırmışlardır. 2013 ve 2018 yılında değiştirilen öğretim programlarının kitaplarda nasıl bir değişiklik sağladığını belirlemeye çalışmışlar ve 2013 yılında 2018 yılına göre daha fazla örnek, etkinlik ve problemin bulunduğunu yine de ispatsal olarak kitapların öğretim programları ile örtüşmediğini belirtmişlerdir. En belirgin azalış 2013 yılı 8.sınıf ders kitabında 35 genellenebilir örnek bulunurken 2018 yılında bu sayı 2'ye düşmüştür. Bu düşüşün bir kısmı 2018 yılında yapılan matematik kazanım sayısında ki sadeleştirme ile açıklansa da nicel olarak bu azalış kitapların ispat bağlamında yetersiz kaldığını göstermesi açısından önemlidir.

Doğan (2019), 8.sınıf matematik ders kitabını matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları bakımından incelediği çalışmada ders kitabındaki etkinliklerin sadece %7,7 'sinin akıl yürütme ve ispat etkinliği olduğunu belirtmiştir. Konulara göre en çok sayılar ve işlemlerde en az ise cebir konusunda bu tür etkinliklere yer verilmiştir. Çalışmanın sonucu olarak ispat ve muhakeme etkinliklerinin ders kitaplarında yeterince yer almadığı tespit edilmiştir.

Şengül ve Kırıl (2023), MEB tarafından sunulan beşinci ve altıncı sınıf ders kitaplarını matematiksel akıl yürütme ve ispat bağlamında incelemeyi amaçladıkları çalışmalarında, ders kitaplarının yeteri düzeyde ispat içerikli etkinliklere sahip olmadıklarını belirtmişlerdir. İçerik analizi yöntemi ile analizini gerçekleştirdikleri matematik ders kitaplarının, 5.sınıf için incelenen aktivitelerin %21'inin ve 6.sınıf için %13'ünün ispat ve muhakeme içerikli olduğunu belirtmişlerdir. Bu durumun güncel eğitim reformları ve MEB'in temel amaçları ile örtüşmediğini eleştirmişlerdir.

Ders kitapları öğrencilerin öğrenme kaynakları içinde ilk sırada yer almaktadır (Fan, Zhu ve Miao, 2013; Stein, Remillard ve Smith, 2007). Ders kitaplarının içeriğinin de güncel reform ve öğretim programlarının amaçları ile örtüşmesi beklenmektedir. Matematiği anlamlandırma ve matematiksel iletişimi güçlendirmek için bireylerin ispat içerikli aktivitelerle erken yaşlarda karşılaşması beklenmektedir. Bu bağlamda ders kitaplarının öğrencilere ispat yapma olanağı sunması açısından önemli olduğu görülmektedir. Öğrencilerin ispat veya ispatı çağrıştıracak etkinliklerle sıkça karşılaşmaları ilerleyen sınıf seviyelerinde akıl yürütme ve ispat becerilerini geliştirebilecekleri aşîkârdır. Ancak yapılan çalışmaların bulguları incelendiğinde ders kitaplarının ispatsal bağlamda çok yetersiz olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır. Yurt dışında matematik eğitiminde kullanılan ders kitaplarının ispat bağlamında ülkemizdeki ders kitaplarına nazaran daha iyi konumda olmasına rağmen araştırmacılar tarafından bu yeterli görülmemektedir. Bunun nedeni; matematiğin doğal bileşeni olarak isimlendirilen ispatın matematik ders kitaplarında bazı bölümlerde ve öğrencilerin ihtiyacı olandan daha az sayıda olması gösterilebilir. Ders kitaplarının ispat-muhakeme etkinliklerini yeterince sunmaması, bu aktivitelerin öğrenme ortamına taşınmasını da pek mümkün kılmayacaktır.

### 2.4.3. İspatın Matematik Eğitimindeki Rolü

Dede ve Karakuş(2014) yaptıkları matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış adlı çalışmada matematiksel ispatın matematik eğitimindeki rolü ve önemi üzerinde durmuşlardır. Okulöncesi, ilkokul, ortaokul, lise ve üniversite düzeyindeki öğrencilerden beklenen ispat becerisi hakkında bilgiler verilen çalışmada ispatın tanımı, fonksiyonları, rolü ve şemaları örneklerle açıklanmaya çalışılmıştır. Araştırmacılar matematiksel ispatı: “ *Bir varsayımın doğruluğunu, önceden kabul edilmiş önermelerle ilişkilendirerek mantıksal çıkarımlarla gösterilmesi.* ” olarak tanımlamışlardır (s. 67). Ayrıca matematiksel ispatın verilen bir teoremi anlamaya ve doğruluğunu neden doğru olduğunu açıklayarak ikna edici bir fonksiyona sahip olduğu, matematiksel ispatın yapılış amacının öğrencilere gösterilmesi gerekliliği ve matematiksel ispat ile öğrencilere hem eğitimsel hem de matematiksel değerler kazandırılabilceği belirtilmiştir. Farklı sınıf seviyelerinde ispat becerileri, ispatın rolü ve önemi gibi konuların açıklanmaya çalışıldığı bu çalışmanın en önemli sonuçlarından birisi matematiksel ispatların, öğrencilerin muhakeme becerilerinin gelişimi için ve matematiksel bilgi-kavramların oluşumunda olmazsa olmaz bir role sahip olduğudur.

Hanna (2000), ispatın doğrulanmasının yanı sıra doğruluğunun nedenlerine dikkat çekmiştir. Bir ispatın neden doğru olduğunun öğrenci tarafından bilinmesinin, matematiğin anlamlandırılmasını ve yeni buluşlara kapı açmasından dolayı önemli görmektedir. Hanna (2000) ispatın matematik eğitimindeki yeri için; doğrulama, açıklama, sistematikleştirme, keşif, iletişim, teori inşası, inceleme ve birleştirme olarak sekiz kavrama ayırarak ifade etmiştir. Tall (1998) çalışmasında farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilere uygun farklı ispat formlarının olabileceğini belirtmiştir. Bir çok öğrencinin bilişsel ispat yaparken zorlandığını ve formal ispatın sadece bazı öğrenciler için uygun olduğunu bazı fiziksel gösterimlerin ise her öğrenci ve sınıf seviyesi için uygun olabileceğini belirtmiştir.

NCTM (2000) raporları ve yukarda belirtilen çalışmalar ışığında ispat matematiğin ayrılmaz bir parçası olduğunu ve matematiği anlamlandırma temel bir yapı taşı olduğu belirtilebilir. OMDÖP incelendiğinde öğrencilere kazandırılması beklenen özel amaçlar arasında; “*Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir.*” ifadesi yer almaktadır (MEB, 2018, s.9). Bu özel amaç bağlamında ispatın yapısında bulunan kendini ikna etme ve başkasını ikna etme becerisinin öğrenciler tarafından kazanılması beklendiği söylenilebilir. Ayrıca matematiksel ispat aktivitelerin eğitim öğretimin her sınıf seviyesinde ve matematiğin her aşamasına ilintilenmiş bir biçimde bireylere sunulması gerektiği alanda sunulan raporlarla desteklenmektedir (CCSSI, 2010). Öğrencilerin öğrendikleri bilgileri yapılandırmaları matematiksel ispat ile mümkün olmakta ancak geleneksel sınıflarda öğrenciler pasif bilgi alıcısı konumunda bulunmaktadır (Şengül ve Kırıl, 2023). Matematik eğitiminin öğrencilerde üst düzey bilişsel becerilerini geliştirici nitelikte olması gerekmektedir ve bu gerekliliği yerine getirmede kullanılabilecek en önemli araç ise matematiksel ispatlar olacaktır. Yapılacak bu çalışmada da öğrencilerin ispata bakış

açıları, ispat yapabilme becerileri ve kullanılan matematik ders kitaplarındaki ispat potansiyeline sahip etkinlikler belirlenmeye çalışılacaktır.

#### 2.4.4. İspata Yönelik Tutumlar

İspata karşı öğrencilerin görüşlerinin alındığı çalışmalara bakıldığında ise öğrencilerin çoğunluğunun istenilen düzeyde ispat yapamadıkları ve bunun sonucunda ispata karşı genel olarak olumsuz bir tutum sergiledikleri görülmüştür. Gökkurt ve Soylu (2012) üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini inceledikleri çalışmalarını 150'si fen bilgisi, 94'ü matematik öğretmenliğinde olmak üzere toplam 244 birinci sınıf öğrencisi ile yürütmüşlerdir. Çalışmada betimsel yöntem kullanılmış ve veriler toplanırken likert tipi ölçek kullanılmıştır. Öğrencilere uygulanan ölçek sonucunda her iki bölüm öğrencilerinin de ispat yapabilmeye ve kendilerine güvenmeye kararsız kaldıkları belirtilmiştir. Ayrıca ispatın anlamını tam olarak farkında olunmadığı bunun göstergesinin ise çalışmaya katılan öğrencilerin sadece %17,2 'si ispatı bir problem çözme aktivitesi olarak tanımlamaktadır. %63,9 'u ise bir sonucun örnekle gösterilmesinin, o sonucun doğru olduğunu anlamalarına yardımcı olduklarını belirtmeleri gösterilmiştir. Ayrıca öğrencilerin ispat kavramını anlamsız ve gereksiz buldukları yapılan çalışmanın sonuçları arasındadır ki bu bulgu öğrencilerin matematiğin doğal bileşeni olan ispata verdikleri değeri ve matematiği ne kadar anlamlandırdıklarını gözler önüne sermektedir. Benzer şekilde; İskenderoğlu, Baki ve Palancı (2011) yaptıkları çalışma da farklı sınıf seviyelerinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Bunun için 30 soruluk "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" geliştiren araştırmacılar dört faktöre göre öğrenci görüşlerini belirlemiş ve sınıf seviyelerine göre bir fark olup olmadığını ortaya koymuşlardır. Bu dört faktör; zihinsel süreç, güven, öz değerlendirme ve tutum-inanç şeklindedir. İlk faktöre göre katılımcılar ispata dair zihinsel süreçlerini sık sık kullanmaktadır. Güven faktörüne göre katılımcılar ispat konusunda kendilerine bazen güvenmektedirler. Öz değerlendirme faktörüne göre katılımcılar ispat yaparken sık sık kendilerini değerlendirme ve dönüp yaptıklarını gözden geçirme eğiliminde oldukları belirtilmiştir. Son faktör olan inanç-tutum faktörüne göre ise katılımcıların ispat konusundaki tutum ve inançlarının olumlu yönde olduğu belirtilmiştir. Sınıflar arasındaki farklılığa bakıldığında zihinsel süreç faktörüne göre en yüksek ortalama birinci sınıf öğrencileri sahipken en düşük ortalama dördüncü sınıf öğrencilerinde görülmüştür. Bunun nedenini araştırmacılar birinci sınıf öğrencilerinin ispat yapmak için başka yol bilmediklerinden tanım ve teoremlerin kullanılması gerektiğini düşünmelerinden kaynaklandığını belirtmişlerdir. Güven faktöründe de en yüksek ortalama dördüncü sınıflarda iken en düşük puan ikinci sınıflarda tespit edilmiştir. Bunun nedenin de dördüncü sınıf öğrencilerinin aldıkları lisans derslerinden kaynaklanıyor olabileceği belirtilen çalışmada güven faktörüne göre istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunamamıştır. Alınan güven faktörü puanlarının sınıflara göre puan ortalamalarının birbirine çok yakın çıkması bu durumun nedeni olarak belirtilmiştir. Benzer şekilde araştırmada öz değerlendirme ve tutum-inanç faktörlerine göre de sınıf seviyeleri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunamamıştır. Ancak birinci sınıf öğrencilerinin tutum-inanç faktöründen aldıkları puanların ortalaması, dördüncü

sınıfların almış oldukları puanların ortalamasından daha yüksek olduğu da tespit edilen sonuçlar arasındadır. Bunun nedeni de sınıf seviyesinin artmasıyla daha kapsamlı teoremlerin ispatlanmasının istenilmesi ve öğrencilerin zorlanmasından kaynaklı olduğu belirtilmiştir.

Matematik ve matematik eğitimi öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşlerinin düzeyini belirlemek ve öğrenci görüşlerinin bölüme göre farklılık gösterip göstermediğini ortaya koymak için yaptıkları çalışma da Kaplan, Doruk, Öztürk ve Duran (2016) bir devlet üniversitesinin son sınıfında öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmenliği, ortaöğretim matematik öğretmenliği ve matematik bölümü toplam 275 öğrenci ile çalışmışlardır. Çalışmada nicel araştırma yöntemi benimsenmiş ve model olarak karşılaştırmalı araştırma modeli kullanılmıştır. Öğrencilere Doruk ve Güler (2014) tarafından geliştirilen “Matematiksel İspata Yönelik Görüş Ölçeği” uygulanmış ve bölümler arasındaki farklar ortaya konulmaya çalışılmıştır. Araştırmanın en genel sonucu tüm bölümlerdeki öğrencilerin ispata yönelik görüşlerinde kararsız olduklarıdır. Alt boyutlardan ispatın gerekliliğine bakıldığında katılımcıların hepsinin kararsız oldukları, ispatın faydası boyutuna bakıldığında ilköğretim matematik öğretmenliği ve matematik bölümü öğrencilerinin katılıyorum düzeyinde oldukları ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ise kararsızım düzeyinde oldukları araştırmanın sonuçları arasındadır. Bir diğer alt boyut olan katılımcıların ispata yönelik özgüvenlerine bakıldığında; ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü ve matematik bölümü öğrencilerinin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerine göre bir üst seviyede oldukları görülmektedir. Benzer sonuçlar öğrencilerin matematiksel ispata anlam yükleme ve ispat ile problem çözme arasındaki ilişkiye yönelik görüşleri belirleme alt boyutlarında da görülmektedir. Öğrencilerin ispata yükledikleri anlam katılıyorum düzeyinde iken ispatın gerekliliği ve sağladığı faydalar konusunda kararsız kaldıkları görülen çalışma ispat konusunda ciddi eksikliğin bulunduğunu göstermektedir. Benzer şekilde öğrencilerin ispata olan güvenleri de kararsız düzeyde kalmıştır. Araştırmanın bir diğer önemli sonucu da ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispata yönelik görüşlerinin diğer bölümdeki öğrencilere göre daha olumsuz olmasıdır.

Köğce’nin 2014 yılında, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile ilgi görüşlerini ve ispat düzeylerini belirlemeyi amaçladığı çalışma da betimsel yöntem kapsamında özel durum çalışması olarak yürütülmüştür. Çalışmaya 99 birinci sınıf öğretmen adayının katılmış ve adaylara iki açık uçlu soru sorularak verilen cevaplar Miyazaki’nin 2000 yılında yapmış olduğu ispat sınıflandırmasına göre analiz edilmiştir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının büyük bir bölümünün ispatın matematik öğrenmeye katkı sağlayacağına inandıkları çalışmanın önemli bulgularından biridir. Öğretmen adaylarının önemli bir kısmının ispat yapmanın ezber yerine kavramayı veya anlamayı kolaylaştıracağını, doğruyu görmeyi sağlayacağını, matematik öğrenmeye katkı sağlayacağını belirttikleri çalışmada çok az sayıda öğretmen adayın ispat yapmanın gerekli olmadığını ifade etmişlerdir. Verilen ispatın tamamlanması ile ilgili soruya verilen cevaplar incelendiğinde öğretmen

adaylarının büyük bir bölümün İspat A düzeyinde ispat yaptıkları görülmüştür. Araştırmacı bunun nedenini ise öğretmen adaylarının genel matematik dersinde ispatlarla daha yoğun bir şekilde karşılaşmalarından ve öğretim elemanlarının derslerinde ispatlara daha fazla yer verilmesinden kaynaklandığını belirtmiştir. Ayrıca çalışma da öğretmen adaylarının bir kısmının verilen ifadeyi sayısal değerler vererek doğrulamanın bir ifadeyi ispatlamak için yeterli olduğuna inanmalarının dikkat verilmesi gereken bir durum olduğu, öğretmen adaylarının bu inançlarının önüne geçilmesinde öğretim elemanlarının derslerinde ispat ve muhakemeye dayalı etkinliklere daha fazla ağırlık verilmesi gerektiği araştırmacı tarafından önerilmektedir. Benzer şekilde; matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006) tarafından yapılan araştırma 337 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının büyük bir kısmının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin olmadığı ya da yeterli olmadığına ulaşılmıştır. Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış adını verdikleri çalışmada Moralı ve Uğurel (2010) özel bir fen lisesinde öğrenim gören 11 öğrenci ile ispat etkinliği yapılırken kurulan iletişim durumlarını incelemiştir. Öğrencilere araştırmacılar tarafından verilen “İki rasyonel sayının arasında bir irrasyonel sayı vardır.” Teoremi ders öğretmeni eşliğinde ve araştırmacının gözleminde sınıfta tartışılmıştır. Öğretmenin etkinlikte rolü sadece tartışmaları yönlendirmektir. Sınıf içinde yapılan tartışma sonucunda ispat olarak kabul görebilecek veya geçerli bir yaklaşım sergileyebilecek öğrencinin bulunmadığı çalışmanın en önemli sonuçlarından biridir. Öğrencilerin ispat yapmakta zorlanmalarının sebepleri olarak; ispatı sadece sözel ifadelerle açıklamaya çalışmaları ve matematiksel sembolleri yeterince kullanamamaları olduğu belirtilen çalışma da öğretim programlarında muhakeme becerisinin ne kadar arka plana alındığı görülmektedir.

Yukarıda bahsedilen çalışmalara bakıldığında genel olarak öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının NCTM (2000) raporunda belirtilen ispata matematiğin doğal bir bileşeni olduğu ve ayrı bir ders olarak öğrenilmemesi gerekliliği ile çelişmektedir. Bu sorunun en temel faktörünün ise; öğrencilerin ispat, muhakeme, akıl yürütme, genelleme, ilişki kurma gibi kavramlarla ilk olarak ortaöğretim düzeyinde karşılaşmaları gösterilebilir. İnsanların doğuştan gelen merak duygularının ilköğretime başlamaları ile zayıflamasının temel nedeninin sorgulanması gerekliliği günümüzde zorunlu hale gelmiştir. Bu çalışma ile 7.sınıf öğrencilerinin de muhakeme ve ispat becerilerinin incelenmesi ve bu becerilerinin yapılan ispat uygulamaları ile geliştirilmesi amaçlanmıştır.

#### **2.4.5. Öğrencilerin İspat Yapma Becerileri**

Öğrencilerin farklı öğretim seviyesinde ve farklı öğrenme alanında ispat becerilerinin incelendiği çalışmalara bakıldığında genel olarak öğrencilerin ispat yapmakta zorlandıkları görülmektedir. Mariotti (2006), matematiksel ispata öğrencilerin bilgi inşasına katkı sağlayacağını, öğrenilen bilgilerin mantıksal süzgeçten

geçirilerek kontrol edilmesinin amaçlanması gerektiğini belirtmektedir. Öğrencilerin bilgilerin doğruluğunu kendi muhakeme becerileri ile desteklemediklerinde ispat amacı olmayan, anlamsız bir etkinlikten ibaret olacaktır. Öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerini ortaya çıkaran çalışmalara ve çalışmalar ışığında alınacak önlemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Alanyazın incelendiğinde, öğrencilerin merkezde olduğu ve direk ispat yapma becerisinin beklendiği çalışmaların sayısı yakın zamanda arttığı gözlemlenmektedir.

Aylar ve Şahiner (2016) 7.sınıf öğrencilerinin ispat becerilerini ve tercihlerini inceledikleri çalışmada 13 haftalık bir ispat dersi uygulamışlardır. Çalışmaları 48 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmalarında 3 adet veri toplama aracı kullanılmış olup bunlar hazır bulunuşluk testi, ispat testi ve yarı yapılandırılmış derinlemesine görüş formudur. Çalışma sonucunda öğrencilerin ispat becerilerinde artış gözlemlenmiştir. Öğrencilerin ispat tercihlerinde ise ispat yönteminden çok yapılacak ispatın anlaşılır olmasının (öğrenciler için) etkili olduğu tespit edilmiştir.

Zeybek ve Üstün (2019), 7.sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerini inceledikleri çalışmalarında öğrencilerin istenilen seviyede ispat yapamadıklarını belirtmişlerdir. Öğrencilere yöneltilen 3 doğru 1 yanlış ifade için öğrencilerin verdikleri yanıtları Harel ve Sowder'in (1998) öne sürdüğü ispat şemaları bakımından incelemişlerdir. Çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğunun deneysel ispat şemasında oldukları ve sunulan doğru matematiksel ifadeler için uygun matematiksel ispat argümanı oluşturamadıklarını gözlemlemişlerdir. Öğrencilerin belirli örnek ve ölçümlere dayalı gösterimleri daha ikna edici buldukları sonucuna varmışlardır. Yanlış olan ifade için ise öğrencilerin çoğunluğu karşı örnek verebilmiştir. Bu durum da öğrencilerin yanlış bir ifade için karşıt örnek geliştirebilme potansiyellerinin daha iyi olduğu sonucunu göstermektedir.

Hatip ve Demircioğlu (2021), 8.sınıf öğrencilerinin geometrik ispat yazma ve gerekçelendirme becerilerini incelediği çalışmada; öğrencilerden üçgenlerin iç açılarının toplamının  $180^\circ$  olduğunu göstermelerini istemiştir. Öğrencilerin bir kısmı ispat kısmını yazıp gerekçelendirme kısmını yazamadıkları, bir kısmının gerekçelendirme yapabildikleri ama ispat kısmı yapamadıkları görülmüştür. Bu durumda öğrencilerin bilgileri kural olarak aldığı ve nereden geldiği ile ilgili muhakeme yapmadığını göstermiştir.

Vatandaş (2022), üstün yetenekli sekizinci sınıf öğrencilerinin ispat yapma becerilerini, ispat yaparken yaşadıkları güçlükleri ve ispata ilişkin görüşlerini belirlemeyi amaçladığı çalışmada; toplam 10 öğrenci ile klinik görüşmeler gerçekleştirmiştir. Gerçekleştirdiği çalışmada betimsel analiz yöntemini kullanmıştır. Çalışmaya katılan öğrencilerin genel olarak geçerli argümanlar üretebildikleri görülmüştür. Öğrenciler ispat yaparken matematiksel dile uygun bir biçimde ispat yapamadıkları ama ispatın matematik dersi için gerekli olduğu konusunda hemfikir oldukları belirtilmiştir.

### 3. YÖNTEM

#### 3.1. Araştırmanın Modeli

Bu çalışma ortaokul ders kitaplarının ispat bağlamında incelenmesinin yanı sıra geometri öğrenme alanına ait ispat içerikli ders planı uygulamalarının öğrencilerin ispat seviyelerine etkilerini araştırmayı amaçladığından nitel bir araştırma olarak planlanmıştır. Nitel araştırmalar, nitel veri toplama araçlarının kullanıldığı, olayların doğal ortamında gözlemlenerek durumu bütün gerçekliği ile ortaya koyan araştırmalardır (Yıldırım, Şimşek 2013). Yapılan bu çalışma nitel araştırma yöntemlerinden eylem araştırması olarak planlanmıştır.

Köklü (2001) eylem araştırmalarını uygulanan eğitimi anlamak, değiştirmek ve iyileştirmek için yapılan araştırma yöntemleri olarak tanımlarken, Ferrance (2000) ise eylem araştırmasını öğretmen tarafından kontrollü olarak yapılan gelecekteki uygulamaları belirlemeye çalışan bir araştırma modeli olarak tanımlamaktadır. Aynı zamanda eylem araştırması, çalışma yapan kişi veya kişilerin öncülüğünde, çalışmaya katılan herkesin dâhil olduğu ve hali hazırda uygulanmakta olan durumu eleştirel bir biçimde değerlendirerek, var olan durumu daha iyi bir hale getirmek için önerilerde bulunmaya çalışan bir araştırma yöntemidir (Karasar, 2005). Eylem araştırmalarının ders programlarının iyileştirilmesinde de kullanılabileceği belirtilmektedir (Beyhan, 2013). Eylem araştırması McKernan (1991) tarafından farklı yaklaşımlar düşünülerek, “*özgürleştirici/geliştirici/eleştirel eylem araştırması, karşılıklı işbirliği/uygulama/tartışma odaklı eylem araştırması*” ve *teknik/ işbirlikçi/bilimsel eylem araştırması*” (s.16-27) üç grupta açıklamıştır. Karşılıklı işbirliği/uygulama/tartışma odaklı eylem araştırması; uygulayıcı ve araştırmacının uygulamayı geliştirme, uygulamada çıkan sorunları ve bu sorunlara neden olan durumları belirlemek ve önlem almak için bir araya geldikleri eylem araştırması türüdür. Özgürleştirici/geliştirici/eleştirel eylem araştırması; uygulayıcının yaptığı uygulamaya eleştirel bir gözle baktığı ve yeni bilgi, beceri ve deneyimler kazanılmasının amaçlandığı bir eylem araştırması türüdür. Teknik/ işbirlikçi/bilimsel eylem araştırması ise; önceden planlı ve programlı bir çerçeve etrafında uygulamanın değerlendirilmesinin amaçlandığı bir eylem araştırması türüdür. Yaklaşımın amacı uygulama sürecini tanımlamaktır. Uygulayıcı ve alanında uzman bir kişi rehberliğinde çalışma yürütülür. Uygulama sırasında karşılaşılan problemler ve çözüm yolları alanında uzman kişi tarafından uygulayıcıya sunulur ve uygulayıcı bu çözüm yollarını kullanarak uygulamasına devam eder (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s.296). Bu çalışma da alanında uzman bir eğitimci ve uygulamayı yapan bir araştırmacının birlikte yürüttükleri ve daha önceden planlı-programlı bir ders planı uygulamasını içerdiğinden teknik/ işbirlikçi/bilimsel eylem araştırma yöntemi kullanılmıştır.

Bu çalışma 7.sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanına ait ispat yapma becerilerinin incelemeyi ve ispat ders planı uygulamaları ile mevcut durumu daha iyi bir hale getirmeyi amaçlamaktadır. Bu amaç kapsamında verileri ilk elden almak, hem mevcut durumu hem de uygulama sonrası durumu objektif bir biçimde ortaya koymak

için eylem araştırması yöntemi seçilmiştir. Planlanan çalışmanın her aşaması alanında uzman bir eğitimci ve araştırmacı ile birlikte yürütülmüştür. Öncelikle çalışmanın odaklanılacağı öğrenme alanı belirlenmiştir. Öğrenme alanı için 7.sınıf matematik dersi kazanımları incelenmiş ve uzman görüşü alınarak daha fazla ispat yapma potansiyeli barındırdığı için geometri öğrenme alanına ait ders planları oluşturulmasına karar verilmiştir. Daha sonra öğrencilerin hazır bulunuşluklarını belirlemek için geometri öğrenme alanına ait ispat yapma becerisi gerektiren dört soruluk İBT-1 hazırlanmıştır. İBT-1'in ardından geometri öğrenme programına ait kazanımlar (bkz. Tablo 3) düzenlenerek çalışma için yeni bir kazanım programı oluşturulmuştur. Oluşturulan kazanım listesine uygun ispat içerikli on beş ders planı hazırlanmış, uzman görüşü ile son şekli verilmiştir. Öğrencilerde ispat ders planı uygulamasının öğrencilerin ispat yapma becerilerindeki etkisini (gelişimini) ortaya çıkarmak için son olarak İBT-1 ile benzer içeriğe sahip İBT-2 hazırlanmıştır. Gerekli planlamalar ve uzman eğitimci görüşleri ile düzenlenen çalışma son şeklini aldıktan sonra uygulamaya geçilmiştir. Uygulamanın her aşaması yine uzman eğitimci ile paylaşılmış bir sonraki adım araştırmacı ile birlikte planlanarak devam edilmiştir.

### **3.2. Veri Toplama Araçları**

Yapılan bu çalışmada veri toplama aracı olarak; 7.sınıf matematik ders kitabı, ispat içerikli ders planları, ders planlarının uygulama videoları, öğrenme günlükleri, ispat beceri testleri ve yarı yapılandırılmış görüşmelere ait ses kayıtları kullanılmıştır. Çalışmanın yapılacağı sınıf seviyesi olarak 7.sınıf seçilmiştir.

#### **3.2.1. Çalışma Grubu**

Çalışma grubu olarak, 7.sınıf seviyesinin seçilmesi uygun görülmüştür. Bu seviyenin seçilmesindeki en önemli etken; ispat yapma için gerekli ön koşullara sahip olduklarının düşünülmesidir. Bu ön koşullar; öğrencilerin cebirsel ifadeleri yazma ve anlamlandırabilmeleri, örüntüleri genelleştirebilme becerilerinin oluşması gösterilebilir. Aynı zamanda bu seviyedeki öğrencilerin geometri öğrenme alanındaki kazanımları da göz önünde bulundurularak seçim yapılmıştır. Benzer becerilere 8.sınıf seviyesindeki öğrencilerinin de sahip olduğu düşünülmüş ama yılsonunda girecekleri LGS (Liselere Giriş Sınavı)'den dolayı 7.sınıf düzeyi araştırma için çalışma grubu olarak, uzman görüşü de alınarak seçilmiştir. Araştırma yapılacak çalışma grubu MEB'e bağlı bir ortaokulda öğrenim gören 5 Erkek, 9 kız öğrenci olmak üzere toplam 14 öğrenciden oluşmaktadır. Araştırmanın çalışma grubunu oluşturan öğrencilere ait 5. ve 6.sınıf sene sonu akademik başarı puanları ile 7. sınıfın ilk dönemine ait akademik başarılarının ortalamaları (tüm dersler için) Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Çalışma Grubu Öğrencilerinin Akademik Başarı Ortalamaları

| Öğrenci | Akademik Başarı Ortalaması | Cinsiyet |
|---------|----------------------------|----------|
| Ö1      | 68,41                      | E        |
| Ö2      | 60,69                      | E        |
| Ö3      | 81,64                      | K        |
| Ö4      | 76,55                      | K        |
| Ö5      | 67,40                      | K        |
| Ö6      | 81,52                      | K        |
| Ö7      | 71,24                      | K        |
| Ö8      | 96,48                      | K        |
| Ö9      | 87,99                      | E        |
| Ö10     | 71,26                      | E        |
| Ö11     | 61,00                      | K        |
| Ö12     | 86,44                      | E        |
| Ö13     | 76,55                      | K        |
| Ö14     | 58,19                      | K        |

İBT-1 ve İBT-2'den sonra yapılacak olan yarı yapılandırılmış görüşmelerde seçilecek öğrencileri belirlemek amacıyla Tablo 2 oluşturulmuş ve bu tabloya göre akademik başarı ortalaması iyi, orta ve düşük olan ikişer öğrenci seçilmiştir.

### 3.2.2. Matematik Ders Kitabı

Çalışma 7.sınıf seviyesi ile yürütüldüğü için MEB tarafından ülke genelinde kullanılmasına karar verilen 7.sınıf matematik ders kitabı çalışmanın veri toplama araçlarından biri olarak seçilmiştir. Ders kitabı toplam altı üniteden oluşmaktadır. Üniteler öğrenme alanlarına göre; ilk iki ünite sayılar ve işlemler, üçüncü ünite cebir, dördüncü ünite sayılar ve işlemler, beşinci ünite geometri ve son ünite veri işleme olarak karşımıza çıkmaktadır. Her ünitenin giriş sayfasında o üniteye ait başlıklar ve günlük hayattan örneklerin verildiği görülmektedir. Genel olarak kitaptaki her ünitenin öğrencilere sunumu; konu ile ilgili açıklamalar, örnekler, alıştırmalar ve ünite sonu değerlendirmesi biçiminde devam etmektedir. Bu çalışma da ders kitabının sadece geometri öğrenme alanına ait içeriğine odaklanılmıştır.

### 3.2.3. Ders Planları

Çalışmanın uygulama kısmında kullanılmak üzere 15 ispat içerikli ders planı hazırlanmıştır. Ders planları hazırlanırken Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) ortaokul 7. sınıf matematik ders kitapları ve Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programında (OMDÖP) bulunan 7.sınıf kazanımları incelenmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda uzman görüşü alınarak ispat içerikli ders planları oluşturulmuştur. Örnek bir ders planı Ek 3'te sunulmuştur. Ders planları hazırlanırken öğrenci merkezli olması, öğrencilerin üst düzey düşünme becerilerini geliştirmek ve muhakeme becerilerini ortaya çıkarmak için öğrencilerin kendi bilgilerini yine kendilerinin yapılandırabilecekleri bir öğrenme ortamı oluşturulmak amaçlanmıştır. Ders planları giriş, gelişme ve sonuç olmak üzere üç ana başlıkta oluşturulmuştur. Uygulama sürecine ait ders planlarının öğrenciler

tarafından kazanılması beklenen ispat becerileri ve öğretim programına ait kazanımlar Tablo 3’te sunulmuştur.

Tablo 3. Uygulama Kazanım Tablosu

| Araştırmanın Uygulama Kazanımları                                                                                                                                                                       | Öğretim Programı İlgili Kazanımları                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1.Ders:</b> İspat kavramını ve çeşitlerini tanıır.                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>2.Ders:</b> “Ters açılarn ölçöleri birbirine eşittir.” ifadesinin ispatını yapar.                                                                                                                    | <b>M.6.3.1.3.</b> Komşu, tümler, bütünler ve ters açılarn özelliklerini keşfeder; ilgili problemleri çözer.*                                                                                                              |
| <b>3.Ders:</b> İki paralel doğruyun bir kesenle yaptığı açılarn arasındaki ilişkileri ispatlar.                                                                                                         | <b>M.7.3.1.2.</b> İki paralel doğruyla bir kesenin oluşturduğu yöndeş, ters, iç ters, dış ters açılarn belirleyerek özelliklerini inceler; oluşan açılarn eş veya bütünler olanlarını belirler; ilgili problemleri çözer. |
| <b>4.Ders:</b> Üçgenin iç açılarnın toplamının $180^\circ$ olduğunu ispatlar.                                                                                                                           | <b>M.5.2.2.4.</b> Üçgen ve dörtgenlerin iç açılarnın ölçöleri toplamını belirler ve verilmeyen açıyı bulur.*                                                                                                              |
| <b>5. Ders:</b> Bir çokgende bir köşeden çizilen köşegenin, çokgeni $(n-2)$ tane üçgensel bölgeye ayırdığını gösterir.                                                                                  | <b>M.7.3.2.2.</b> Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarnı belirler; iç açılarnın ve dış açılarnın ölçöleri toplamını hesaplar.                                                                                      |
| <b>6. Ders:</b> Bir çokgenin iç açılarnı toplamının $(n-2) \times 180^\circ$ olduğunu kanıtlar.                                                                                                         | <b>M.7.3.2.2.</b> Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarnı belirler; iç açılarnın ve dış açılarnın ölçöleri toplamını hesaplar.                                                                                      |
| <b>7. Ders:</b> Bir çokgenin dış açılarnı toplamının $360^\circ$ olduğunu gösterir.                                                                                                                     | <b>M.7.3.2.2.</b> Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarnı belirler; iç açılarnın ve dış açılarnın ölçöleri toplamını hesaplar.                                                                                      |
| <b>8. Ders:</b> Bir çokgende bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısının $(n-3)$ olduğunu ve bir çokgenin toplam köşegen sayısının $\frac{n \times (n-3)}{2}$ bağlantısı ile bulunabileceğini gösterir. | <b>M.7.3.2.2.</b> Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarnı belirler; iç açılarnın ve dış açılarnın ölçöleri toplamını hesaplar.                                                                                      |
| <b>9. Ders:</b> Düzgün bir çokgenin bir iç açısının $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ ve bir dış açısının $\frac{360^\circ}{n}$ olduğunu gösterir.                                                     | <b>M.7.3.2.2.</b> Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarnı belirler; iç açılarnın ve dış açılarnın ölçöleri toplamını hesaplar.                                                                                      |
| <b>10. Ders:</b> Dörtgenleri sınıflandırarak birbirlerinden farklarını ve benzerliklerini gösterir.                                                                                                     | <b>M.7.3.2.3.</b> Dikdörtgen, paralelkenar, yamuk ve eşkenar dörtgeni tanıır; açılarn özelliklerini belirler.                                                                                                             |
| <b>11.Ders:</b> Dörtgenleri sınıflandırarak birbirlerinden farklarını ve benzerliklerini gösterir.                                                                                                      | <b>M.7.3.2.3.</b> Dikdörtgen, paralelkenar, yamuk ve eşkenar dörtgeni tanıır; açılarn özelliklerini belirler.                                                                                                             |
| <b>12.Ders:</b> Dörtgenleri sınıflandırarak birbirlerinden farklarını ve benzerliklerini gösterir.                                                                                                      | <b>M.7.3.2.3.</b> Dikdörtgen, paralelkenar, yamuk ve eşkenar dörtgeni tanıır; açılarn özelliklerini belirler.                                                                                                             |
| <b>13. Ders:</b> Eşkenar dörtgen ve yamuğun alan bağıntılarını oluşturur.                                                                                                                               | <b>M.7.3.2.4.</b> Eşkenar dörtgen ve yamuğun alan bağıntılarını oluşturur, ilgili problemleri çözer.                                                                                                                      |
| <b>14. Ders:</b> Çemberde merkez açılarn ile gördüğü yayların ölçölerinin eşit olduğunu gösterir.                                                                                                       | <b>M.7.3.3.1.</b> Çemberde merkez açılarn, gördüğü yayları ve açılarn ölçöleri arasındaki ilişkileri belirler.                                                                                                            |
| <b>15.Ders:</b> Çember parçasının uzunluğunu ve daire diliminin alanını hesaplayabileceği birkural geliştirir.                                                                                          | <b>M.7.3.3.2.</b> Çemberin ve çember parçasının uzunluğunu hesaplar.<br><b>M.7.3.3.3.</b> Dairenin ve daire diliminin alanını hesaplar.                                                                                   |

\* 7. Sınıf öğretim programı içerisinde olmayan kazanımlar

Ders planları oluşturulurken her bir kazanım daha sonraki gelen kazanım için ön koşul bilgi ve becerileri barındıracak şekilde oluşturulmuştur. Bu şekilde önceki öğrenmeler üzerine inşa edilen daha kalıcı ve kapsamlı bir öğrenme oluşturulması amaçlanmıştır. Tablo 3'te bulunan M.6.3.1.3 ve M.5.2.2.4 kazanımlar bu kapsamlı öğrenmeyi inşa etmek amacıyla ders planlarına dâhil edilmiştir.

### 3.2.4. Öğrenme Günlükleri ve Ödevler

Günlükler, matematiksel iletişimi geliştirmenin, öğrenilen bilgilerdeki eksikliklerin giderilmesinin ve matematiğe karşı olumlu bakış açısının oluşturulması için kullanılan bir araçtır (Van de Walle, Karp & Bay Williams, 2013, s.85). NCTM (1989); “*Matematik öğrencilere anlamlı gelen ve onlar tarafından iletişim aracı olarak etkin bir şekilde kullanılabilen bir dil olarak düşünülmelidir (s. 233)*” diyerek matematiğin kendine özgü bir dili olduğu ve bu dilin kullanımının öğrenciler tarafından etkin biçimde yapılmasının altını çizmektedir. Öğrenme günlükleri, öğrencilerin matematiksel dili kullanmalarının gelişimine destek olmaktadır (Azzolino, 1990; Chapman, 1996; Dougherty, 1996). Öğrenme günlükleri aynı zamanda öğrencilerin kavram öğrenmelerini, problem çözme ve üst düzey bilişsel becerilerini geliştirdiği görülmektedir (Ayyıldız & Altun, 2013; Bagley & Gallenberger, 1992; Eker & Coşkun, 2012; Meel, 1999; Moon, 2010).

Çalışmanın uygulama aşamasında toplanan veri araçlarından biri de öğrenme günlükleri olmuştur. Öğrenme günlüklerinde; öğrencilere her bir dersten sonra verilen ve o gün öğrendiklerini derse gelmeyen bir arkadaşına anlatır gibi anlatmasının beklendiği kâğıtlardır. Öğrencilerden toplanan öğrenme günlükleri çalışmanın sonu kadar muhafaza edilip analiz aşamasında kullanılmak üzere saklanmıştır. Örnek bir öğrenme günlüğü Ek 4'de sunulmuştur. Öğrenciler için bazı ders kazanımlarından sonra ispat içerikli ödevler verilmiş ve bu ödevlere ait öğrenci argümanları ve öğrenme günlüklerinden bazıları bulgular bölümünde sunulmuştur.

### 3.2.5. İspat Beceri Testi-1 (İBT-1)

İspat beceri testi-1, öğrencilerin ispat dersi uygulaması öncesindeki ispat yapabilme becerilerini ortaya çıkarmak amacıyla dört sorudan oluşmaktadır. İBT-1 soruları, öğretim programına ait kazanımları ve programın öğrencilerden beklentileri bir arada incelenerek uzman görüşü alınarak oluşturulmuştur. İBT-1'de öğrencilere ikisi doğrudan ispat yapma gerektiren, biri aksine örnek vererek ifadenin yanlış olduğunu belirtmeleri beklenen ve birisi de verilen cevaplardan hangisinin ispat olarak kabul edileceği ile ilgili olmak üzere toplam dört soru yöneltilmiştir. Dördüncü soruya ait öğrenci cevapları hazırlanırken Harel ve Sowder'ın (1998) şemalarına uygun olacak şekilde dışsal, deneysel ve analitik ispat şemalarını içerecek biçimde düzenlenmiştir. Cevaplardan birisi de kasıtlı olarak yanlış çözümlü verilerek öğrencilerin hatalı çözümleri de ayırt edebilmeleri beklenmiştir. Sorular oluşturulurken öğrencilerin önceki öğrenmeleri de dikkate alınmıştır. Uzman görüşü alınarak son hali verilen İBT-1 soruları Ek 5'te sunulmuştur.

### 3.2.6. İspat Beceri Testi-2 (İBT-2)

İBT-2'ye ait sorular, ders planı uygulamalarının etkinliğini ölçebilmek amacıyla uzman görüşü alınarak İBT-1'e benzer biçimde oluşturulmuştur. İBT-1'den farklı olarak İBT-2'de dördüncü soru için üç öğrenci cevabı oluşturulmuş, ikisi deneysel ispat şeması biri analitik ispat şeması olarak düşünülmüştür. Hatalı çözüm ve dışsal ispat şeması olarak herhangi bir öğrenci cevabı sunulmamıştır. Oluşturulan bu cevaplar yine Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemalarına uygun olacak biçimde tasarlanmıştır. İBT-2 soruları Ek 6'da sunulmuştur.

### 3.2.7. Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler

Çalışma grubunda bulunan öğrencilerin akademik başarı ortalamaları (bkz. Tablo 2), puan sıralaması yapılarak yüksek başarılı, orta başarılı ve düşük başarılı ikiye öğrenci olacak şekilde toplam altı öğrenci belirlenmiştir. Seçilen öğrenciler ile hem İBT-1 sorularına verdikleri cevaplar hem de İBT-2 sorularına verdikleri cevaplar ses kaydına alınıp, öğrencilerin cevapları derinlemesine incelenmiştir. Öğrencilerle yapılan birebir görüşmeler yorum katılmadan olduğu gibi aktarılmış, öğrenci cevaplarının birebir görüşmeler yardımıyla bilişsel düşünceleri derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmacı için A; öğrenciler için Ö1, Ö2, Ö3 gibi kodlar kullanılmıştır. Öğrencilere İBT-1 uygulandıktan sonra sorulan yarı yapılandırılmış sorular aşağıdaki şekildedir:

Osman'ın cevabını seçenler için:

- Osman'ın yanıtını neden seçtin?
- Sence ders kitaplarında yazan her ifade doğru mudur?
- Peki bir ifadenin yanlışlığı için kitaplarda yazan bir şey bulunabilir mi?

Zeynep'in cevabını seçenler için:

- Zeynep'in yanıtını neden seçtin?
- Sence birkaç örnek ile tüm üçgenler için verilen ifadenin doğruluğu gösterilebilir mi?
- Belki açıları çok daha farklı bir üçgende dış açılar arasında verilen ifade gibi bir ilişki bulunmayacak bundan nasıl emin olabiliriz?

Aybüke'nin cevabını seçenler:

- Aybüke'nin yanıtını neden seçtin?
- Matematikte, harflerin kullanıldığı her ifade seni ikna etmek için yeterli midir?
- Bir ifadenin doğruluğu veya yanlışlığı için sadece matematiksel harf ve semboller kullanmak sence yeterli mi?

Öğrencilere İBT-2 uygulandıktan sonra sorulan yarı yapılandırılmış sorular İBT-1'e benzer biçimde oluşturulmuş olup, ayrıca süreci değerlendirmek adına ve

öğrencilerin ispata yönelik tutumlarını belirlemek için genel sorularda eklenmiştir. İBT-2'ye ait yarı yapılandırılmış görüşme soruları aşağıdaki şekildedir:

Osman'ın cevabını seçenler için:

- Osman'ın yanıtını neden seçtin?
- Matematikte, harflerin kullanıldığı her ifade seni ikna etmek için yeterli midir?

Zeynep'in cevabını seçenler için:

- Zeynep'in yanıtını neden seçtin?
- Bir ifadenin doğruluğunu göstermek için birkaç örnek vermek yeterli midir?
- Altıgen veya da fazla kenara sahip çokgenlerde de ifadenin doğruluğundan nasıl emin olabiliriz?

Aybüke'nin cevabını seçenler:

- Aybüke'nin yanıtını neden seçtin?
- Rastgele seçilecek bir örneğin doğru çıkması ifadeyi de doğrular mı?

İBT-2'ye ait bire bir görüşmeler gerçekleştirilirken daha önceden başarı durumuna göre seçilen 6 öğrenciye ek olarak iki öğrenci ile daha görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu iki öğrencinin verdikleri yanıtlar ön değerlendirme yapılırken dikkat çekici bulunmuş ve araştırmanın daha fazla veriye ulaşması için bu iki öğrenci ile de birebir görüşme gerçekleştirilip kayıt altına alınmıştır.

Uygulamanın son aşamasında belirlenen öğrencilerle İBT-2'ye verdikleri cevaplar yarı yapılandırılmış görüşmelerle ses kaydına alındıktan sonra, uygulamanın öğrenciler tarafından değerlendirilmesi ve öğrencilerin ispata yönelik tutumlarını belirlemek amacıyla kendilerine ek sorular yöneltmiştir.

Ek sorular:

- İspat yapmakta zorlandın mı? En çok nerelerde zorlandın?
- Sayılar yerine sembolleri kullanmak zor mu?
- Sence neden ispat yapıyoruz?
- Matematikte ispat gerekli mi sence?
- Verilen ifadelerin doğruluğunu örnek vererek ispatlayabilir miyiz?
- İspatlanması istenilen her ifade doğru mudur?
- Son olarak ispat yapmaktan keyif aldın mı?

### 3.3. Veri Toplama Süreci

Araştırmanın veri toplama süreci 2022-2023 eğitim öğretim yılının 2.döneminde MEB'e bağlı bir ortaokuldaki 7.sınıf öğrencileri ile ikinci eğitim öğretim dönemi boyunca yürütülmüştür. Uygulamaya katılan öğrencilerin velilerinden veli onam formları alınmış olup gönüllük esasına göre 5 erkek 9 kız öğrenci ile çalışma

gerçekleştirilmiştir. Veli onam formu Ek 1’de yer almaktadır. Veriler araştırmacı tarafından önceden planlandığı gibi toplanmıştır. Uygulama planı olarak ilk ders öğrencilere uygulama hakkında bilgi verildikten sonra ispat içerikli soruların yer aldığı İBT-1 uygulanmıştır. İBT-1 uygulandıktan sonra geçmiş yıllardaki akademik başarı puanlarına göre seçilen ikisi yüksek, ikisi orta düzey ve ikisi düşük düzey akademik başarıya sahip toplam 6 öğrenci ile verdikleri cevaplar üzerine yarı yapılandırılmış birebir görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler analiz edilmek üzere ses kaydı ile kayıt altına alınmıştır. Daha sonra hazırlanan 15 ders planı uygulanmış ve her bir ders video kaydı ile kayıt altına alınmıştır. Her ders sonunda öğrencilere öğrenme günlükleri (bkz. Ek 4) dağıtılmış ve bu günlükler de veri toplama aracı olarak kullanılmak üzere araştırmacı tarafından saklanmıştır. Ders uygulamalarının ardından İBT-1’e benzer sorular içeren İBT-2 öğrencilere uygulanmıştır. İBT-2 için önceden belirlenen 6 öğrenci ve sonradan dahil edilen 2 öğrenci ile verdikleri cevaplar üzerine yarı yapılandırılmış görüşmeler ses kaydına alınarak uygulama sonlandırılmıştır.

Bu çalışmada, veri araçlarının hazırlanması, veri toplama süreci, veri analizi ve raporlama aşamalarının hepsinde araştırmacı etkin rol oynamıştır. Araştırmacı, uygulama yapılan sınıfın matematik öğretmeni olup, uygulama öncesindeki iki eğitim öğretim yılı boyunca öğrencilere matematik dersi vermiştir. Bu nedenle araştırmacı, çalışmaya katılan öğrencileri yakından tanımaktadır. Tüm bunların veri toplama sürecini olumlu etkilediği düşünülmektedir.

### **3.4. Veri Analizi**

Nitel çalışmalarda yapılan nitel analiz, herhangi bir formülü bulunmayan, elde edilen verileri anlamlı bir şekilde dışarı aktarma süreci olarak tanımlanabilir (Patton, 2014, s. 432). Nitel analiz, verileri bulgulara dönüştürerek tablo ve şekil ile gösterilerek tartışılmasıdır (Creswell, 2016). Bu çalışma da nitel analiz yöntemlerinden içerik analizi ve betimsel analiz birlikte kullanılmıştır. İçerik analizi; araştırma sonuçlarını okuyucunun anlayacağı biçimde belli kavram ve çerçeveler ışığında bir araya getirerek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Öğrencilerle yapılan ders planı uygulaması aşamasında ve yarı yapılandırılmış görüşmelerde içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Öğrencilerden elde edilen veriler belli kategoriler haline getirilerek analiz edilmiş ve sonuçlar objektif bir biçimde ortaya koyulmuştur. Öğrenciler tarafından verilen cevaplara ait frekans ve yüzde tablosu oluşturularak matematiksel ispat için genel bir eğilim belirlenmeye çalışılmıştır. Betimsel analiz; araştırmadan elde edilen verilerin özgünlüğünü bozmadan düzenlenerek doğrudan aktararak yapılan yöntemdir. Araştırmanın problemlerine uygun olacak şekilde önceden belirlenen temalar ışığında veriler özetlenerek sunulur. Betimsel analiz de tanımlayıcı bir analiz yöntemidir (Kümbetoğlu, 2005). Ders kitabının ispat bağlamında incelenmesi ve İBT uygulamalarında betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Ders kitapları ve İBT için önceden belirlenen analitik çerçeve(bkz. Tablo 4) ve ispat şemalarına(bkz. Tablo 1) uygun olacak şekilde kategoriler üzerinden analiz edilmiştir. Çalışmaya ait araştırma problemlerine cevap bulabilmek için veri analizi; ders kitabının ispat bağlamında

incelenmesi ve ders planı uygulamasının analizi olmak üzere iki ana aşamada gerçekleştirilmiştir. Ders planı uygulaması ise uygulama öncesi, uygulama aşaması ve uygulama sonrası olacak şekilde üç başlıkta analiz edilmiştir.

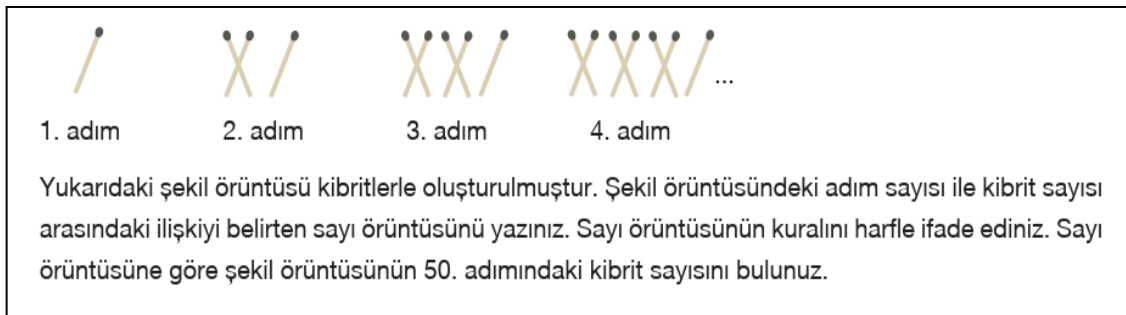
### 3.4.1. Ders Kitabının İspat Bağlamında İncelenmesi

Ders kitabı ispat içeriği bağlamında analiz edilirken Stylianides'in (2008) oluşturduğu Tablo 4'deki analitik çerçeve kullanılmıştır. Ders kitabında bulunan geometri öğrenme alanına ait etkinlikler (örnek, alıştırma, soru vb.) analitik çerçeveye göre incelenmiştir. Etkinlikler incelenirken; örüntü bulma, kural geliştirme, açıklayınız vb. gibi anahtar kelimeler kullanılmıştır. Belirlenen etkinlikler uzman görüşü alınarak analitik çerçeveye uygun biçimde tablolastırılmıştır. Stylianides'e (2008) göre bir etkinlik için; "örüntü bulma", "çıkarım yapma", "ispat yapma" ve "ispat olmayan argüman sunma" olmak üzere dört kategori bulunmaktadır. Analitik çerçevenin daha iyi açıklanabilmesi için bu kategorilerden bazıları örneklerle açıklanacaktır.

Tablo 4. Muhakeme ve İspat Analitik Çerçevesi

| Muhakeme ve İspat |                                                                                      |                                                           |                                                                                          |                                                                                             |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Matematiksel Öge  | Matematiksel Genellemeler Yapma                                                      |                                                           | Matematiksel Çıkarımlara Kanıt Sağlama                                                   |                                                                                             |
|                   | Örüntü Bulma                                                                         | Çıkarım Yapma                                             | İspat yapma                                                                              | İspat Olmayan Argüman Sunma                                                                 |
|                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Olası Örüntü</li> <li>Kesin Örüntü</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Çıkarım</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Genellenebilir Örnek</li> <li>Gösterim</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Empirik Argüman</li> <li>Rasyonel Argüman</li> </ul> |

Stylianides'e (2008) göre örüntü bulma olası örüntü ve kesin örüntü olarak ikiye ayrılır. Kesin örüntünün kuralı tek ve belirli iken olası örüntünün kuralı birden fazladır ve belirli kurallar sunmaz. Şekil 6'da kesin örüntü için örnek verilmiştir.



Şekil 6. Kesin Örüntü Temsili  
(Akbulut, 2018: s.86).

Şekil 6, Stylianides'e (2008) göre kesin örüntü temsili olarak kabul edilir. Kibrit çöplerinden oluşan bu örüntü; 1'den başlayarak her bir adımda ikişer artarak devam etmektedir. Örüntü devam ettirildiğinde n. adımda "2n-1" tane kibrit çöpü bulunacağı

görülmektedir. Şekil 7 incelendiğinde kesin olmayan farklı iki örüntü kuralı çıkarılabilecek olası bir örüntü örneği görülmektedir.

Aşağıdaki tablo iki değişken arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Tablodaki bir örüntüyü bulunuz ve bu örüntüyü boş bırakılan yerleri doldurmak için kullanınız.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| B | 1 | 2 | 4 |   |   |

Şekil 7. Olası Örüntü Temsili  
(Zeybek, Üstün ve Birol, 2018, s.1322).

Şekil 7'deki örüntüye uyan ilk örüntü kuralı  $B = 2^A$  'dır. Bu örüntü kuralına göre boş bırakılan yerlere sırasıyla 8 ve 16 yazılmalıdır. Tabloya göre örüntüye uyan bir diğer kural ise  $B = \frac{1}{2} \cdot A \cdot (A + 1) + 1$  olup bu kurala göre de boş yerlere sırasıyla 7 ve 11 yazılmalıdır.

Analitik çerçevede bulunan matematiksel öğelerden biri olan çıkarım yapma; belirli durumlar üzerinden genellenebilir ifadeler çıkarma durumu olarak açıklanmaktadır. Şekil 8'de belirli bir ABCD yamuğuna ait durumu gözlemleyerek diğer yamuklar içinde geçerli olabilecek genel bir ifade oluşturulması istenilen çıkarım yapma olarak kodlanan argümanın temsili verilmiştir.

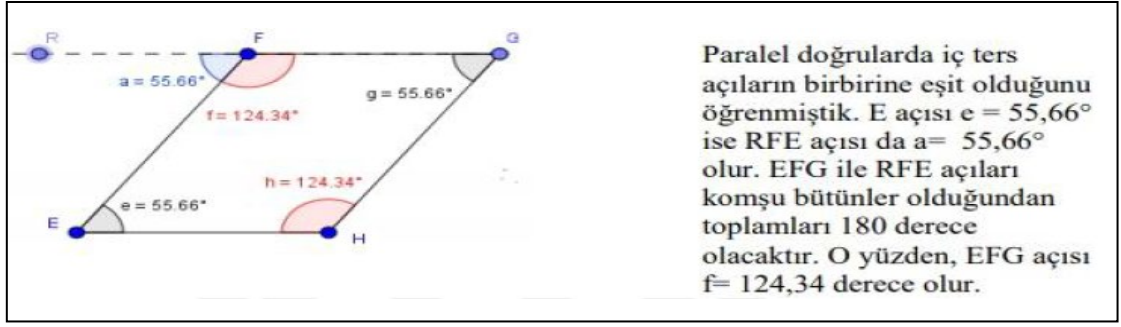
**Etkinlik**

**Araç Gereç:** kareli kâğıt

- Kareli kâğıda, yandaki gibi bir ABCD yamuğu çizelim.
- ABCD yamuğuna eş ve [BC] kenarları çakışık olacak şekilde BKLC yamuğunu, yandaki gibi kareli kâğıda çizelim.
- Olusan AKLD paralelkenarının uzun kenar uzunluğunu ve yüksekliğini belirleyiniz.
- AKLD paralelkenarının alanını bulunuz.
- ABCD yamuğu ile AKLD paralelkenarının alanları arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.
- Belirlediğiniz ilişkiye göre yamuğun alan bağıntısını belirten genel bir ifade yazınız. Yazdığınız ifadeyi arkadaşlarınızla paylaşınız.

Şekil 8. Çıkarım Yapma Temsili  
(Akbulut, 2018, s.175).

Genellenebilir örneklerde, örnekten ziyade ispat ön plana çıkmaktadır (Şimşek ve Üstün, 2019). İspatın daha ön planda olduğu bu öğede örnek ispatın mantıksal açıklamasını yapmak için bir araç olarak kullanılır. Şekil 9'da Şimşek ve Üstün'ün (2019) 7.sınıf öğrencilerinin dörtgenlere ait ispat seviyelerini belirlemeye çalıştıkları çalışmalarında genellenebilir örnek için sundukları argüman verilmiştir.



Şekil 9. Genellenebilir Örnek Temsili  
(Şimşek ve Üstün, 2019 s.216)

### 3.4.2. İBT-1 ve İBT-2 İçin Verilen Öğrenci Cevaplarının Analizi

İBT-1 ve İBT-2 sorularına ait öğrenci cevapları analiz edilirken Harel ve Sowder (1998) tarafından oluşturulan ispat şemaları çerçevesine göre sınıflandırılıp tablolastırılmıştır. Öğrencilerin ispat beceri testine verdikleri cevaplar dört farklı kod oluşturularak kodlanmış ve bu kodlamaya göre analiz edilmiştir. Öğrenci cevaplarına ait kodlar oluşturulurken Harel ve Sowder'ın (1998) üç ana ispat şeması olan; dışsal ispat, deneysel ispat ve analitik ispat ayrı ayrı kodlar halinde, verilen cevapların yanlışlığı, boş bırakılması gibi durumlar içinde farklı bir kod olmak üzere dört kod kullanılmıştır. Öğrenci cevapları incelenirken kullanılan kodlar Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Çalışmada Kullanılacak Kodlar

| Kodlar | Açıklama                                                                                                             | Öğrenci Cevap Temsilleri |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| Kod A  | Bir ifadenin doğrulanması için kendi gerekçelendirmeleri yerine dışsal bir kaynağı kullanma eğiliminde olmak.        |                          |
| Kod B  | Bir ifadenin doğrulanması için mantıksal kanıtlar sağlayamamak, örnekler vererek ifadeyi doğrulama eğiliminde olmak. |                          |
| Kod C  | Aksiyomatik yapı çerçevesinde mantıklı deliller sunmak.                                                              |                          |

|       |                                                             |                                             |
|-------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Kod D | Verilen ifadeyi boş bırakmak, ya da ilgisiz cevaplar vermek | Cevapları eşit gösterilerin altında eşittir |
|-------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|

### 3.4.3. İBT-1 ve İBT-2 İçin Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerin Analizi

Öğrencilerin İBT-1 ve İBT-2 sorularına verdikleri cevapların derinlemesine incelenmesi için uygulama öncesi akademik başarı durumlarına göre seçilen altı öğrenci ile birebir görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Matematiksel ispat, oluşturulan argümanlarla başkalarını ikna etme çabası içerdiğinden, öğrencilere argümanlarını açıklama imkânı sunulmuştur. Öğrencilerin sundukları argümanlar için yaptıkları açıklamalar Tablo 5’te verilen kodlara göre kodlanmıştır. Uygulama öncesi öğrencilerin hali hazırda durumlarını belirlemek amacıyla yapılan İBT-1 ile uygulama sonrası benzer sorulardan oluşan İBT-2 ile çalışmaya ait verilerin doğrudan toplanması amaçlanmıştır. Bulgular bölümünde öğrencilerin İBT-1 ve İBT-2 için verdikleri cevaplar ve bu cevaplar için yaptıkları açıklamalar sunulmuştur.

### 3.4.4. Ders Videolarının Analizi

Uygulama için planlanan 15 saatlik ders planları uygulanırken her bir ders video ile kayıt altına alınmıştır. Alınan bu kayıtlardaki matematiksel aktiviteler uygulama sonrasında çıkarım yapma ve argüman oluşturma olarak iki başlık altında incelenmiş, çalışmaya katkı yapacağı düşünülen ve öğrenci muhakemelerinin ön plana çıktığı bölümler ders ders not edilmiştir. Ders videolarında bulunan bu bölümlerin hangi derse (kazanıma) ait olduğu ve transkripti bulgular bölümünde sunulmuştur.

Öğrencilere her ders planı uygulamasından sonra o gün öğrenilenleri not almalarının istenildiği öğrenme günlükleri verilmiştir. Öğrencilerde öğrenme günlükleri ile hem kalıcı öğrenmenin sağlanması hem de öğrendiklerini başka bir kişiye anlatabilmeleri amaçlanmıştır. Öğrenme günlüklerinde öğrencilerden öğrendiklerini o gün derse gelmeyen bir arkadaşına anlatır gibi anlatmaları istenmiştir. Uygulama da kullanılan öğrenme günlükleri Ek 4’te sunulmuştur.

### 3.4.5. İspata Yönelik Eğilim Sorularının Analizi

Öğrencilerin ispata yönelik algıları onların ispat yapma becerilerine etki edebileceği düşüncesiyle ispata yönelik görüşlerini belirlemeyi amaçlayan çalışmalara alanyazında rastlanılmaktadır (Örn. Bell, 1976; Healy & Hoyles, 2000; Porteous, 1990). Bu çalışmanın son aşamasında öğrencilerle yapılan bire bir görüşmelerde de öğrencilerden uygulamayı değerlendirmeleri ve ispata bakış açılarını belirlemek amacıyla ek sorular sorulmuştur. Öğrencilerin ispat becerileri ortaya çıkarılması amaçlanırken bir diğer önemli bulgu sayılabilecek olan öğrencilerin ispata karşı tutumları da belirlenmek amacıyla ek sorular oluşturulmuştur. Ek soruların analizi için içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Sorulan sorulara ait tablo oluşturulurken genel

başlıklar halinde ele alınmıştır. Bu başlıklar; “İspat yapmakta çok zorlandın mı?”, “İspat yapmak gerekli midir?” ve “İspat yapmaktan keyif aldın mı?” şeklindedir.

### **3.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği**

Bilimsel çalışmaların güvenilir ve geçerli olması, çalışmanın amacı ve yapılacak başka çalışmalar için önemli bir unsurdur. Bu çalışma içinde geçerlilik ve güvenirliliğe özen gösterilmiştir. Nitel çalışmalarda elde edilen veriler tarafsız ve olduğu gibi sunulması anlamına gelmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Yapılan bu çalışmanın her safhasının anlaşılır olması için açıklamalar detaylı bir biçimde sunulmuştur. Çalışmalarda kullanılan ölçme araçlarının güvenirliliği, ölçülmek istenilen durumu ne kadar doğru ölçtüğü ile ilgilidir (Büyüköztürk vd, 2019). Bu çalışmada kullanılan ölçme araçları da alanın uzmanları tarafından görüş alınarak oluşturulmuştur. Aynı zamanda güvenirlilik aynı verilerin toplandığında aynı sonuçların elde edilebilmesidir (Ersoy, 2016). Bundan dolayı çalışmada yapılan kodlamalar araştırmacı dışında yüksek lisans eğitimini tamamlamış bir matematik öğretmeni ve ispat üzerine birçok çalışması bulunan öğretim elemanı tarafından da kodlanmış, bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ortaya çıkan kodlama farklılıkları üzerine tartışılmış ardından da son şekli verilmiştir. Nitel araştırmalarda veriler elde edilirken ses ve görüntü alınması, araştırmacının daha doğru ve güvenilir sonuçlar elde etmesini ve çalışmanın sonuçlarını tarafsız alıntılarla aktarmasını sağlaması güvenirliliği artırıcı bir etkide bulunmaktadır (Büyüköztürk vd, 2019). Çalışmanın doğru ve güvenilir sonuçlara ulaşması için gerekli tüm bölümleri, ses ve görüntü ile kayıt altına alınmıştır. Kayıt altına alınan bu bölümler olabildiğince doğrudan alıntılar ile sunulmaya çalışılmıştır.

## 4. BULGULAR

Bu çalışmada 7.sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanına ait ispat yapma becerileri ve 7.sınıf matematik ders kitabının geometri öğrenme alanına ait etkinliklerin ispat bağlamında incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bölümde çalışmaya ait bulgular araştırmanın veri toplama araçlarından elde edilen verilere göre alt başlıklar halinde sunulmuştur. İspat dersi uygulaması öncesi, ders videolarındaki öğrenci diyalogları, uygulama sonrası ve ders kitabındaki etkinliklere ait bulgular olmak üzere dört alt başlık altına ele alınmıştır. Hem uygulama öncesi hem de uygulama sonrasında yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelere ait ses kayıtlarının bir kısmı ilgili bölümlerde öğrenci cevapları ile birlikte sunulmuştur.

### 4.1. Ders Kitabının Geometri Öğrenme Alanına Ait Bulgular

Çalışmanın yapıldığı yıl matematik dersi için kullanılan MEB'e ait 7.sınıf matematik ders kitabının geometri öğrenme alanına ait etkinlik, örnek ve alıştırmalar Stylianides'in (2008) analitik çerçevesine göre (bkz. Tablo 4) kodlanmıştır. Ders kitabının ilgili bölümüne ait toplam 134 matematiksel aktivite incelenmiştir. Matematiksel aktiviteler etkinlik, alıştırma ve örnek olmak üzere üç bölümde ele alınmış olup hangi bölümde kaç içeriğin incelendiği Tablo 6'da frekans ve yüzde olarak sunulmuştur.

Tablo 6. Matematik Ders Kitabı Geometri Öğrenme Alanına Ait İncelenen İçerikler

| İçerik    | f   | %     |
|-----------|-----|-------|
| Etkinlik  | 7   | 5,22  |
| Örnek     | 59  | 44,02 |
| Alıştırma | 68  | 50,74 |
| Toplam    | 134 | 100   |

Ders kitabında bulunan içeriklerden etkinlik olanlar çözümü verilmemiş, öğrencilerin matematiksel becerilerini kullanarak yapmalarının beklendiği içerikler olduğu görülmüştür. Örnek adı altında bulunan matematiksel aktiviteler ise daha çok sayısal işlem içeren örneğin hemen sonrasında çözümünün de sunulduğu içerikler olarak görülmektedir. Alıştırmalar ise ders kitabında; kazanıma ait etkinlikler, örnekler ve açıklamalardan sonra öğrenci için bireysel çalışma imkânı sunan sayısal işlem içeren içerikler olarak sunulduğu belirlenmiştir. Kitap içeriğinde bulunan ünite değerlendirme soruları da sayısal işlem içerdiği ve öğrencilere bireysel çalışma imkânı sunduğu için ayrı bir başlık altında değerlendirilmeyip, alıştırmalar başlığı altında incelenmiştir. Stylianides'in (2008) analitik çerçevesine uygun matematiksel aktivitelerin tamamının etkinlikler bölümünde olduğu görülmüştür. Diğer bölümlerdeki matematiksel aktivitelerden hiçbirinin çerçeveye uygun olmadığı görülmüştür. Toplam 7 matematiksel aktivite belirlenmiş olup bu aktivitelerin çerçeveye göre hangi kategoride bulunduğu Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7. Matematik Ders Kitabı Geometri Öğrenme Alanına Ait İnceleme Sonuçları

|                      | Örüntü Bulma |              | Çıkarım Yapma | İspat Yapma          |          | İspat Olmayan Argüman Sunma |          | Toplam |
|----------------------|--------------|--------------|---------------|----------------------|----------|-----------------------------|----------|--------|
|                      | Olası Örüntü | Kesin Örüntü |               | Genellenebilir Örnek | Gösterim | Empirik                     | Rasyonel |        |
| 7. Sınıf Ders Kitabı | -            | -            | 5             | -                    | -        | 2                           | -        | 7      |

7.sınıf ders kitabının geometri öğrenme alanına ait içeriklerin incelenmesi sonucu toplam 7 matematiksel aktivitenin muhakeme ve ispat potansiyeline sahip olduğu görülmüştür. Analitik çerçeveye uygun olan bu matematiksel aktivitelerin %71'i çıkarım yapma ve % 29'u empirik olarak kodlanmıştır. Örüntü bulma, ispat yapma öğelerine ait argümana rastlanılamamıştır. Çıkarım yapma ve empirik argümanlara ait temsiller aşağıda sunulmuştur.

Etkinlik

**Araç Gereçler:** cetvel, açıölçer

- Cetvel yardımıyla bir dörtgen çizelim ve dörtgenin her bir köşesine ait bir dış açı belirleyelim.
- Dörtgenin her bir dış açısının ölçüsünü açıölçer yardımıyla bulalım.
- Dörtgenin dış açı ölçülerinin toplamını bulalım ve not edelim.
- Cetvel yardımıyla bir beşgen çizelim ve beşgenin her bir köşesine ait bir dış açı belirleyelim.
- Beşgenin her bir dış açısının ölçüsünü açıölçer yardımıyla bulalım.
- Beşgenin dış açı ölçülerinin toplamını bulalım ve not edelim.
- Etkinlik adımlarını altıgen ve yedigen çizerek tekrarlayalım.
- Not ettiğimiz sayılar arasındaki ilişkiyi belirleyelim.
- Belirlediğimiz ilişkiye göre çokgenlerin dış açıların ölçüleri toplamına yönelik genel bir ifade yazalım. Yazdığımız ifadeyi arkadaşlarımızla paylaşalım.

Şekil 10. Çıkarım Yapma Temsili 1  
(Akbulut, 2018, s.161).

Etkinlik

**Araç Gereç:** kareli kâğıt

- Kareli kâğıda, yandaki gibi bir KLMN dikdörtgeni çizelim.
- Dikdörtgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirerek PRST eşkenar dörtgenini oluşturalım.
- Eşkenar dörtgenin köşegenleri olan [PS] ve [TR]'ni çizelim.

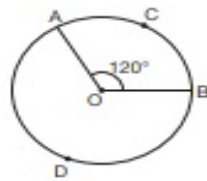
- ➔ Eşkenar dörtgenin içinde oluşan dik üçgenler eş midir?
- ➔ Dikdörtgenin uzun kenarı olan [NM] ile [PS]'nin uzunluklarını karşılaştırınız.
- ➔ Dikdörtgenin kısa kenarı olan [ML] ile [TR]'nin uzunluklarını karşılaştırınız.
- ➔ Dikdörtgenin alanını hesaplayınız.
- ➔ Eşkenar dörtgenin içindeki eş dik üçgenlerin alanlarından yararlanarak ya da içindeki birimkareleri sayarak eşkenar dörtgenin alanını hesaplayınız.
- ➔ Dikdörtgen ile eşkenar dörtgenin alanları arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.
- ➔ Belirlediğiniz ilişkiye göre eşkenar dörtgenin köşegen uzunluklarını kullanarak alanını bulmaya yönelik genel bir ifade yazınız.

Şekil 11. Çıkarım Yapma Temsili 2  
(Akbulut, 2018, s.172).

Şekil 10 ve Şekil 11 incelendiğinde sunulan matematiksel aktivitelerin belirli durumların gözlemlenmesi ile genelleme oluşturulması istenildiği için bu matematiksel aktiviteler çıkarım yapma olarak kodlanmıştır. Şekil 10'da öğrencilerin kendi çizecekleri bir dörtgen ve beşgene göre (belirli bir duruma göre) dış açılarının toplamını belirlemeleri ve genel bir ifade oluşturmaları beklenmektedir. Şekil 11'de ise görselde sunulan bir dikdörtgen içine çizilen başka bir dörtgenin alanı dikdörtgenin alanı ile ilişkilendirilerek belirlenmek istenmiştir. Genellemelerin sayısal örnekler üzerinden yapıldığı ama doğruluğu hakkında bilgi verilmeyen matematiksel aktivitelerin kodlandığı empirik argümanlara ait temsiller ise Şekil 12 ve Şekil 13'te sunulmuştur.

**Örnek**

Yandaki O merkezli çemberde,  $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$  ve  $|\widehat{ACB}| = 20$  cm ise çemberin uzunluğunu orantı yardımıyla bulunuz ( $\pi$ 'yi 3 alınız.).



**Çözüm**

Çemberin tamamını  $360^\circ$ 'lik açı,  $\widehat{ACB}$ 'ni  $120^\circ$ 'lik merkez açı temsil etmektedir. Buna göre orantı yardımıyla O merkezli çemberin uzunluğunu bulalım.

|              |                           |
|--------------|---------------------------|
| 120°'lik açı | 20 cm'ye karşılık gelirse |
| 360°'lik açı | x cm'ye karşılık gelir.   |

---

Orantı,  $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{20}{x}$  olarak yazılabilir.

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} \times \frac{20}{x} \rightarrow 120^\circ \cdot x = 20 \cdot 360^\circ$$

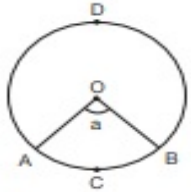
$$x = 20 \cdot \frac{360^\circ}{120^\circ}$$

$$x = 20 \cdot 3 = 60$$

O merkezli çemberin uzunluğu 60 cm'dir.

O merkezli, r yarıçaplı yandaki çemberde  $m(\widehat{AOB}) = a$  olmak üzere  $\widehat{ACB}$ 'nin uzunluğu, aşağıdaki bağıntı ile bulunur.

$$\frac{|\widehat{ACB}|}{2\pi r} = \frac{a}{360^\circ} \Rightarrow |\widehat{ACB}| = 2\pi r \cdot \frac{a}{360^\circ}$$



Şekil 12. Empirik Temsili 1  
(Akbulut, 2018, s.190).

**Örnek**

Yandaki M merkezli, yarıçap uzunluğu 14 cm olan dairedeki pembe daire diliminin alanı 154 cm<sup>2</sup>'dir. Buna göre orantı yardımıyla  $m(\widehat{EMV})$ 'nin değerini bulunuz ( $\pi$ 'yi  $\frac{22}{7}$  alınız.).

**Çözüm**

Önce M merkezli dairenin alanını bulalım.

$$\text{Alan} = \pi r^2 \Rightarrow \text{Alan} = \frac{22}{7} \cdot 14^2 \Rightarrow \text{Alan} = \frac{22}{7} \cdot 196 = 616 \text{ cm}^2$$

Dairenin tamamını 360°'lik açı temsil etmektedir. Buna göre orantı yardımıyla alanı 154 cm<sup>2</sup> olan daire dilimini temsil eden merkez açının ölçüsünü bulalım.

|                               |                        |
|-------------------------------|------------------------|
| 616 cm <sup>2</sup> 'lik alan | 360°'ye karşılık gelir |
| 154 cm <sup>2</sup> 'lik alan | x°'e karşılık gelir.   |

$$\text{Orantı, } \frac{616}{154} = \frac{360^\circ}{x} \text{ olarak yazılabilir.}$$

$$\frac{616}{154} \cdot \frac{360}{x} \Rightarrow 616 \cdot x = 154 \cdot 360^\circ$$

$$x = \frac{154}{616} \cdot 360^\circ$$

$$x = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

$m(\widehat{EMV}) = 90^\circ$

O merkezli, r yarıçaplı yandaki dairede  $m(\widehat{KOA}) = a$  olmak üzere KOA merkez açısının belirttiği daire diliminin alanı, aşağıdaki bağıntı ile bulunur.

$$\frac{\text{Daire diliminin alanı}}{\pi r^2} = \frac{a}{360^\circ} \Rightarrow \text{Daire dilimin alanı} = \pi r^2 \cdot \frac{a}{360^\circ}$$

Şekil 13. Empirik Temsili 2  
(Akbulut, 2018, s.196).

Ders kitabında bulunan çember parçasına ait çevre uzunluğunu belirleme ve daire dilimine ait alan belirleme matematiksel aktivitesinde, sayısal örnekler üzerinden genellemeler yapıldığı ve bu genel ifadenin doğruluğu ile ilgili açıklama yapılmadığı için empirik olarak kodlanmıştır.

7. Sınıf ders kitabında incelenen toplam 134 matematiksel aktivitenin sadece 7'sinin muhakeme ve ispat olma potansiyeli içerdiği görülmüştür. İncelen geometri öğrenme alanına ait içeriklerin sadece %5'inin istenilen muhakeme becerileri gerektirdiği geri kalan %95'inin NCTM'e (2000) göre istenilen matematiksel argümanlar olmadığı görülmektedir. Ders kitabı inceleme sonuçlarına ait verilerin derinlemesine açıklamaları tartışma ve yorum bölümünde yapılacaktır.

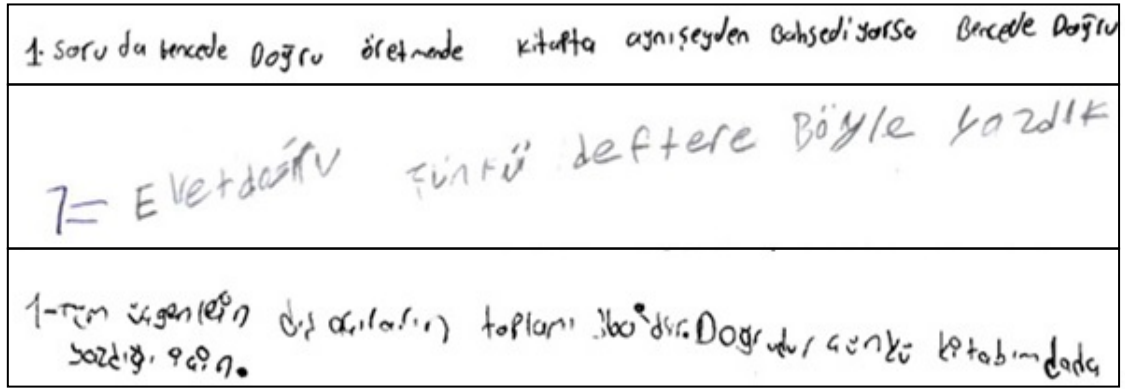
#### 4.2. Ders Planı Uygulaması Öncesine Ait Bulgular (İBT-1)

Öğrencilerden ders planı uygulaması öncesinde elde edilen veriler araştırmacı tarafından belirlenen dört kod çerçevesinde incelenmiştir (bkz. Tablo 5). İBT-1, öğrencilerin ispat yapma becerilerine ilişkin sorulara yönelik toplam dört sorudan oluşmaktadır. 1. ve 2. soruda öğrencilerden verilen ifadeyi doğrulamaları beklenirken, 3. soruda ifadenin yanlışlığını aksine örnek verme yöntemi ile göstermeleri beklenmektedir. 4. soruda; "Bir üçgende, herhangi bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir." ifadesine yönelik araştırmacı tarafından oluşturulan dört öğrenci cevabı sunulmuş ve öğrencilerden bu dört cevaptan hangisini daha ikna edici bulduklarını açıklamaları istenmiştir. İBT-1'de yer alan 1.soruya ait öğrenci argümanlarının frekans ve yüzde tablosu Tablo 8'de sunulmuştur.

Tablo 8. İBT-1'in 1. Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları

| Çözüm Kodları | F | %     |
|---------------|---|-------|
| Kod A         | 3 | 21,42 |
| Kod B         | 2 | 14,28 |
| Kod C         | 0 | 0     |
| Kod D         | 9 | 64,28 |

İBT-1'de öğrencilere 1.soru olarak; “Tüm üçgenlerin dış açıları toplamı  $360^\circ$ 'dir.” ifadesinin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında ne söyleyebilecekleri sorulmuş, 9 öğrenci soruyu boş bırakmış veya ilgisiz-yanlış cevaplar vermişlerdir. Öğrencilerin %35,70'i dışsal (Kod A) ve deneysel (Kod B) ispat şemasında bulunmaktadır. Analitik ispat şemasına sahip öğrenci uygulama öncesinde görülememiştir. Öğrenci cevaplarının bazılarına Şekil 14'te yer verilmiştir.



Şekil 14. İBT-1'in 1.Sorusuna Ait Kod A Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri

Harel ve Sowder'a (1998) göre dışsal ispat şemasında bulunan öğrenciler verilen ifadeleri kendi muhakemeleri dışında dışsal bir kaynağa dayandırarak cevaplar. Öğrencilerin verdikleri cevaplara bakıldığında ifadelerin doğruluğu için dışsal bir kaynağa atıfta bulundukları görülmektedir. Öğrencilerin cevaplarına bakıldığında dışsal kaynak olarak; ders kitabı, öğretmen söylemi ve deftere yazılan ifadeler olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin İBT-1 sorularına verdikleri cevapların derinlemesine incelendiği ses kayıtlarında Ö2 kodlu öğrencinin 1.soru için yaptığı açıklama aşağıda sunulmuştur:

**Araştırmacı:** 1.soru için tüm üçgenlerin dış açıları toplamı  $360^\circ$  dir demiş. Sen evet doğrudur çünkü deftere böyle yazdık demişsin.

**Ö2:** Evet hocam.

**Araştırmacı:** Bu seni ikna etmek için yeterli mi ya da karşındakini ikna etmek için yeterli mi?

**Ö2:** Beni ikna etmek için yeterli hocam.

**Araştırmacı:** Yani bunun için herhangi bir şekil felan çizmeden de sana yetiyor mu?

**Ö2:** Yetiyor hocam.

**Araştırmacı:** Defterde kitapta yazıyorsa bana yeter mi diyorsun?

**Ö2:** Evet.

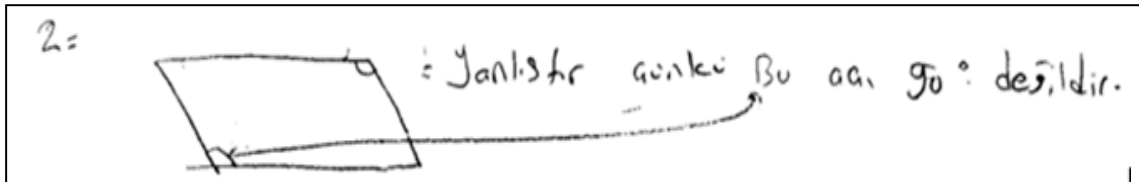
Verilen öğrenci cevaplar incelendiğinde, öğrencilerin; uygulama öncesinde karşılaştıkları bir ifadenin doğruluğunu göstermek için ders kitabı veya öğretmeni öne sürerek ikna olma ve başkalarını ikna etme amacıyla olduğu görülmektedir.

İBT-1’de yer alan 2. soru; “*Paralelkenarın ardışık iki iç açısının toplamı daima  $180^\circ$ ’dir.*” ifadesinden oluşmaktadır. Öğrencilerin argümanlarına ait frekans ve yüzde tablosu Tablo 9’da sunulmuştur.

Tablo 9. İBT-1’in 2. Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları

| Çözüm Kodları | F  | %     |
|---------------|----|-------|
| Kod A         | 1  | 7,14  |
| Kod B         | 0  | 0     |
| Kod C         | 0  | 0     |
| Kod D         | 13 | 92,85 |

Öğrencilerin 2.soru için verdikleri yanıtların çoğu (%92,85) yanlış-eksik veya öğrenciler tarafından boş bırakılmıştır. Öğrencilerin cevaplarına bakıldığında doğruluğunu bildikleri matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğu ile ilgili bir argüman oluşturamadıkları görülmektedir. Öğrenci cevaplarına ait temsiller Şekil 15’te sunulmuştur.



Şekil 15. İBT-1’in 2.Sorusuna Ait Kod D Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

Öğrenci cevapları incelendiğinde öğrencilerin aklına iki açının toplamının ölçüleri toplamı  $180^\circ$  olması için ikisinin de ölçüsünün  $90^\circ$  olması gerektiği gelmektedir. Bu durum sadece özel bir paralelkenar olan kare ve dikdörtgen için geçerlidir. Ama öğrencilerin bu durumu diğer paralelkenarlar içinde genelleştirerek yanlış bir düşünce sergiledikleri görülmüştür. Bu sebeplerden dolayı Şekil 16’da sunulan öğrenci cevabı Kod D olarak kodlanmıştır. Bir öğrenci ise öğretmenin ifadeyi söylemesinin kendisini ve başkalarını ikna etmek için yeterli olacağı düşüncesindedir. Bu öğrenci de Kod A olarak kodlanmıştır. Şekil 16’da Kod A olarak kodlanan öğrenci cevabına yer verilmiştir.

2- Paralel kenarın eşitlik için 90°'ye eşit olması gerekir. Önermenizi  
bize bu ders üzerinden anlatın.

Şekil 16. İBT-1'in 2.Sorusuna Ait Kod A Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

İBT-1 sorularının 3.sorusu olarak öğrencilere, “Çevreleri eşit dörtgenlerin alanları da birbirine eşittir.” ifadesi sorulmuş ve verilen argümanlara ait frekans ve yüzde tablosu Tablo 10’da gösterilmiştir. Bu soruda öğrencilerden verilen bir ifadeye aksi örnek veya örnekler vererek yanlışlığını göstermeleri beklenmektedir.

Tablo 10. İBT-1'in 3. Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları

| Çözüm Kodları | F  | %     |
|---------------|----|-------|
| Kod A         | 0  | 0     |
| Kod B         | 0  | 0     |
| Kod C         | 1  | 7,14  |
| Kod D         | 13 | 92,85 |

Tablo 10 incelendiğinde öğrencilerden sadece bir öğrencinin istenilen argümanı oluşturabildiği, diğer öğrencilerin soruya cevap vermediği veya eksik-yanlış cevap verdiği görülmektedir. Öğrencilerin %92,85’i karşılaştıkları yanlış bir ifadeye en az bir örnek vererek, önermenin yanlış olduğunu gösterememişlerdir. Sadece 1 öğrenci beklenen şekilde aksine örnek vererek ifadenin yanlış olduğunu gösterebilmiştir. Öğrenci cevaplarından Kod D ile sınıflandırılan temsiller Şekil 17’de görülmektedir.

3) Evet doğru bir açıklama yapılmıştır çünkü  
çevreleri eşit demek tüm uzunlukları ve ölçüleri aynı oranda  
demek. Bu nedenle tüm özellikleri aynı olur.

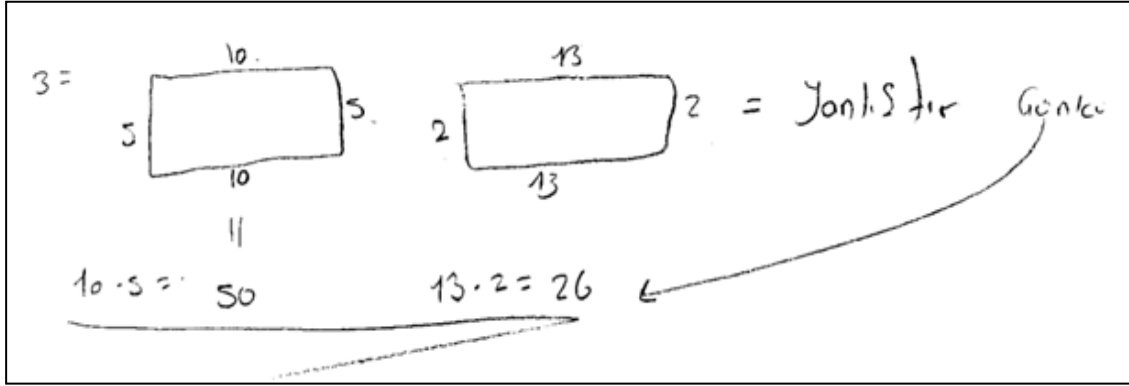
3: Uzunlukları aynı olduğu için kapladığı alanda  
eşittir

3= Evet aynı çevreleri eşit olduğu için alanları birbirine eşittir.

Şekil 17. İBT-1'in 3.Sorusuna Ait Kod D Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri

Öğrencilerin cevaplarına bakıldığında öğrencilerin çevre ve alanın farklı kavramlar olduğunu bilmedikleri ve bu nedenle çevreleri eşit olan dörtgenlerin eş dörtgenler

olacaklarını ve alanlarının da aynı olacağını düşünmektedirler. Şekil 18’de ise bu soruya Kod C olarak sınıflandırılan bir öğrenci cevabı sunulmuştur.



Şekil 18 İBT-1’in 3.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevabı Temsili

Aksine örnek vererek bir ifadenin yanlışlığının gösterildiği Şekil 19’a ait öğrencinin verdiği cevaba ait ses kaydı aşağıda sunulmuştur:

**Araştırmacı:** 3.Soruya yanlışdır demişsin. Nedenini de açıklamışsın bir de burada bahseder misin bana?

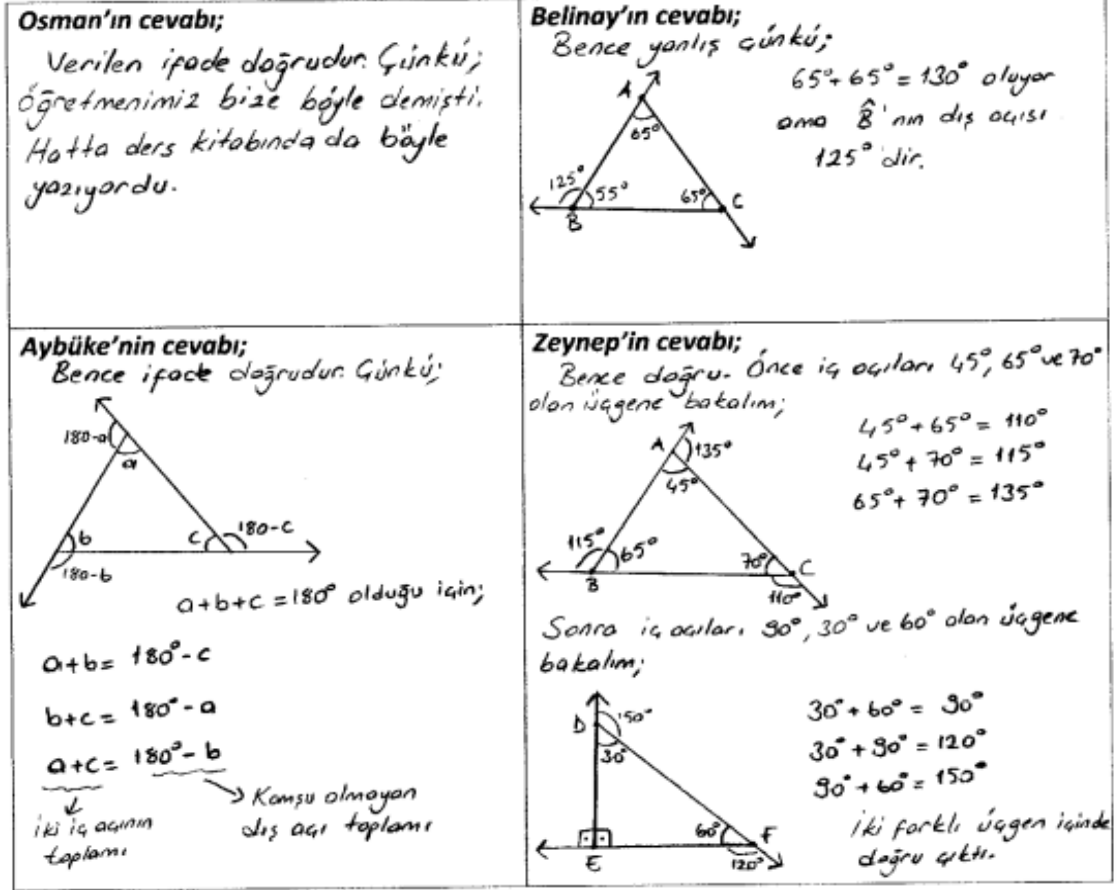
**Ö8:** Hocam on yirmi otuz burada otuz çıkıyor (çizdiği dikdörtgenleri gösteriyor). Bunun alanı 50 (1. dikdörtgeni gösteriyor). Bunun alanı 26 çıkıyor (2. dikdörtgeni gösteriyor).

**Araştırmacı:** Yani bu beşe onluk dikdörtgenin alanı 50 çıkıyor, ikiye on üçlüğün 26 çıkıyor. Hal bu ki bunların çevreleri eşitti ama alanları farklı çıktı.

**Ö8:** Evet.

Öğrenci yanıtı incelendiğinde çevreleri birbirine eşit iki dikdörtgen seçerek alanlarının aynı olmadığını aksine örnek vererek ispatladığı görülmektedir. Şekil 18’de verilen bu cevap uygulama öncesi yapılan İBT-1 sorularına verilen cevaplar içerisinde Kod C olarak kodlanan tek cevap olarak görülmüştür.

İBT-1 sorularının son sorusu olarak öğrencilere; “ Bir üçgende, herhangi bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.” ifadesine yönelik oluşturulan dört öğrenci cevabı sunulmuştur. Öğrencilerden bu cevaplardan hangisini/hangilerini daha ikna edici bulduklarını belirtmeleri istenmiştir. Sorunun içeriğinde bulunan öğrenci cevapları Şekil 19’da sunulmuştur.



Şekil 19. İBT-1'in 4.Sorusuna Ait Soru İçeriğinde Bulunan Öğrenci Cevapları

Osman'ın cevabı öğretmenlerinin söylemine ve ders kitaplarına atıfta bulunduğu dışsal ikna şeması Kod A olarak kodlanacak öğrenci cevabı olarak belirlenmiştir. Zeynep'in cevabı incelendiğinde örnekler vererek başkalarını ikna etme çabasında olduğu, bundan dolayı bu öğrenciyi seçen öğrenciler deneysel ispat şeması yani Kod B olarak kodlanması düşünülmüştür. Belinay'ın cevabı ise yanlış-eksik olarak oluşturulmuş olup Kod D olarak kodlanacak öğrenci cevabı seçilmiştir. Aybüke'nin cevabı ise analitik ispat şeması olup Kod C olarak kodlanması planlanan öğrenci cevabı olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin bu soru için seçtikleri öğrenci cevabına göre frekans ve yüzdeleri Tablo 11'de sunulmuştur.

Tablo 11. İBT-1'in 4. Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları

| Çözüm Kodları | F | %     |
|---------------|---|-------|
| Kod A         | 3 | 21,42 |
| Kod B         | 5 | 35,71 |
| Kod C         | 0 | 0     |
| Kod D         | 6 | 42,85 |

Öğrencilerin yaptıkları seçimlere bakıldığında hiçbirinin verilen ifadenin formal bir şekilde ispatını yapan öğrenci cevabını – Aybüke isimli öğrencinin cevabını seçemediği görülmektedir. Öğrenciler uygulama öncesinde verilen bir ifadenin

doğruluğunu veya yanlışlığını gösteremedikleri gibi sunulan ispat örneklerinden hangisinin ispat argümanıolduğunu da belirleyemedikleri görülmüştür. Öğrenci cevaplarının %21,42'si Kod A ile kodlanırken, %35,71'i Kod B olarak kodlanmış cevaplar verdiği görülmektedir. Şekil 20'de Kod B ile kodlanan bazı öğrenci cevaplarının temsilleri sunulmuştur.

|                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>4: Bence Zeynep haklı çünkü</p> <p>135'e komşu olmayan açılar 65 ve 70 ve toplamı <math>65+70=135</math><br/> 110'a komşu olmayanlar 65 ve 45 toplamı <math>65+45=110</math><br/> 115'e komşu olmayanlar 70 ve 45 toplamı 115</p> |
| <p>4) Zeynep'in cevabı doğrudur çünkü Yine aynı şekilde bir üçgen çizildiğinde:</p>                                                                                                                                                  |
| <p>4= Bence Zeynep'in cevabı doğrudur çünkü güzel örneklerle bunu kanıtlamıştır ve örnekleride doğrudur sorunun cevabına doğru, bir örnekle olmuştur.</p>                                                                            |

Şekil 20. İBT-1'in 4.Sorusuna Ait Kod B Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri

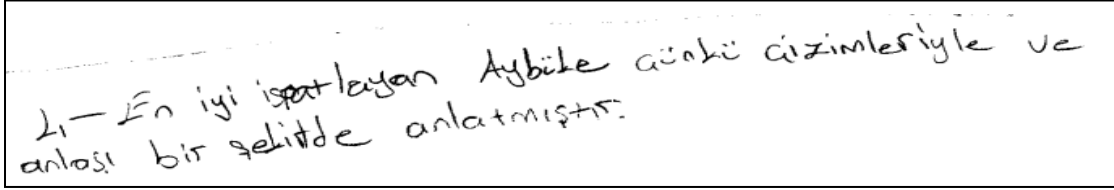
Şekil 20'deki öğrenci cevaplarına bakıldığında öğrencilerin verilen ifade için örneklerle başvurdukları görülmektedir. İfadeleri ispatlarken örnek kullanmaları öğrencilerin deneysel ispat şemasında bulunduğunu göstermektedir. Bundan dolayı Şekil 20'de temsilleri verilen cevaplar Kod B olarak kodlanmıştır.

Öğrenci cevaplarından Kod A olarak kodlanan öğrenci ait cevapları temsilleri ise Şekil 21'de gösterilmiştir. Öğrencilerin verilen ifadelerin doğruluğu veya yanlışlığını düşünmeksizin ders kitabında yazması ve öğretmenin ifade etmiş olması onlar için ikna edici olarak görüldüğü belirlenmiştir.

|                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>4= Örneğin Zeynep'in cevabı doğru çünkü ders kitabında yazdığını söylüyor</p>                                                        |
| <p>4) Bence Örneğin çünkü öğretmen yanlış anlatmış ya belkide oldu yanlış söyledi ama kitapta da yazıyorsa bu ifade beni ikna eder.</p> |

Şekil 21. İBT-1'in 4. Sorusuna Ait Kod A Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri

Uygulama öncesi yapılan İBT-1 sorularından 4. Soru için sadece bir öğrenci analitik ispat şemasına ait cevap olan Aybüke'nin cevabını seçmiştir. Bu öğrencinin cevabının Kod C yerine Kod A olarak kodlanmasının nedeni öğrenci ile yapılan birer bir görüşmelerde cevabın içerisinde bulunan harfli ifadelerin daha üst düzey görüldüğünü düşünmesi ve cevabın doğruluğundan veya yanlışlığından ziyade Şekilsel boyutuna odaklanması olduğu gözlemlenmiştir. Öğrencinin verdiği cevap Şekil 22'de gösterilmiş, öğrenci ile yapılan birebir görüşmeye ait ses kaydı cevabının altında sunulmuştur.



Şekil 22. İBT-1'in 4.Sorusuna Ait Kod A Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

Öğrencinin seçtiği bu cevabı açıklaması istenildiğinde öğrencinin yaptığı açıklama şu şekildedir:

**Araştırmacı:** 4.Soru da kimi seçtin?

**Ö4:** Aybüke'yi seçtim.

**Araştırmacı:** Neden Aybüke'yi seçtin?

**Ö4:** Hocam en iyi ispatlayan o.

**Araştırmacı:** En iyi ispatlayan en iyi ikna edici o mu geldi sana?

**Ö4:** Evet.

**Araştırmacı:** Neresi ikna edici geldi? Ya da Aybüke burada ne yapmış?

-Kısa bir sessizlik-

**Araştırmacı:** Harfleri kullandığı için mi sana ispat gibi geldi?

**Ö4:** Evet, daha bir üst düzey gibi geldi evet.

**Araştırmacı:** Peki buraların (dış açıları gösteriyor) neden böyle yazdı sence, bir fikrin var mı?

**Ö4:** Yok

Öğrenci ile yapılan görüşme göstermektedir ki Aybüke'nin yanıtını seçmesi cevabın görselliği ile alakalı olduğundandır. Bu da öğrencinin dışsal ikna şemasının alt kategorisinde bulunan sembolik ispat şemasına sahip olduğunu göstermektedir. Öğrenci cevabın neden doğru olduğu hakkında bilgiye sahip değilken sadece cevabın içerisinde bulunan harfli ifadelerle odaklandığı gözlemlenmiştir. Öğrenci cevabı bu sebeplerden Kod A olarak kodlanmıştır.

#### 4.3. Ders Planı Uygulaması Aşamasına Ait Bulgular

Öğrencilerle uygulama esnasından öğrencilerin ispat yaptığı, genellemelerde bulunduğu ve yeni argümanlar oluşturabildikleri bölümler gözlemlenmiştir. Toplam 15 ders planı ile yürütülen uygulamanın her bir dersi öğrencilerin uygulama sırasında

gösterdikleri ispat yapma becerileri ve beceri gelişimlerini ortaya çıkarabilmek amacıyla video ile kayıt altına alınmıştır. Ders videoları uygulama sonrasında analiz edilerek araştırmanın sonuçları için veri olarak görülen öğrenci argümanları belirlenmiştir. Argümanlar çıkarım yapma ve argüman geliştirme olarak iki ögeye ayrılmıştır. Bu iki matematiksel ögeye ait ders bazında sunulan argüman sayıları Tablo 12’de sunulmuştur.

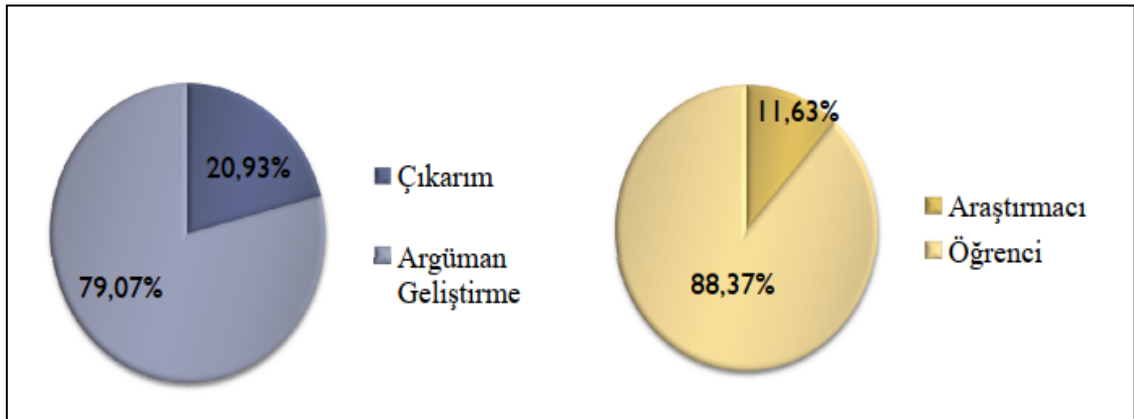
Tablo 12. Ders Planı Uygulamasında Sunulan Argüman Çeşitleri ve Sayıları

| Dersler | Matematiksel Ögeler |                    | Toplam |
|---------|---------------------|--------------------|--------|
|         | Çıkarım Yapma       | Argüman geliştirme |        |
| 1.Ders  | 1 ö                 | 2 ö*<br>1 a**      | 4      |
| 2.Ders  | -                   | 2 ö                | 2      |
| 3.Ders  | -                   | 1 a                | 1      |
| 4.Ders  | -                   | 2 ö                | 2      |
| 5.Ders  | 2 ö                 | 1 ö                | 3      |
| 6.Ders  | 3 ö                 | 1 a                | 4      |
| 7.Ders  | 1 ö                 | 1 a                | 2      |
| 8.Ders  | 1 ö                 | 1 ö                | 2      |
| 9.Ders  | 1 ö                 | 3 ö                | 4      |
| 10.Ders | -                   | 5 ö                | 5      |
| 11.Ders | -                   | 4 ö                | 4      |
| 12.Ders | -                   | 5 ö                | 5      |
| 13.Ders | -                   | 2 ö                | 2      |
| 14.Ders | -                   | 1 a                | 1      |
| 15.Ders | -                   | 2 ö                | 2      |
| Toplam  | 9 ö                 | 29 ö<br>5 a        | 43     |

\*ö: Öğrenci Argüman Sayısı

\*\*a: Araştırmacı Tarafından Sunulan Argüman Sayısı

Ders planı uygulamaları aşamasında öğrenci merkezli bir plan uygulanmış, öğrencilerin düşüncelerini açıklamaları ve tartışmalarına olanak sağlanmıştır. Tablo 12’nin daha iyi okunabilmesi için Şekil 23’teki grafik oluşturulmuştur.



Şekil 23. Ders Planı Uygulamasında Sunulan Argümanların Dağılım Grafikleri

Öğrenciler tarafından oluşturulan matematiksel aktivitelerin dağılımına bakıldığında öğrencilerin daha ön planda olduğu ve çıkarım yapmadan daha fazla argüman geliştirdikleri görülmektedir. Çalışmanın ders planı uygulaması aşamasında 9'u çıkarım yapma ve 34'ü argüman geliştirme olacak şekilde toplam 43 argüman oluşturulmuştur. Oluşturulan argümanların 38'ini öğrenciler, geri kalan 5'inin araştırmacı tarafından sunulduğu görülmektedir. Ders planı uygulamasında giderek çıkarım yapmanın azalması ve argüman geliştirmenin artması çalışmanın olumlu sonuçları arasında görülmektedir. Araştırmacının yönlendirici pozisyonunda olduğu bu çalışmada öğrencilerin gerekli sözel ve görsel desteklerle argüman geliştirebildiği görülmektedir. İspat ders planı uygulamasına ait bazı örneklerle aşağıda yer verilmiştir.

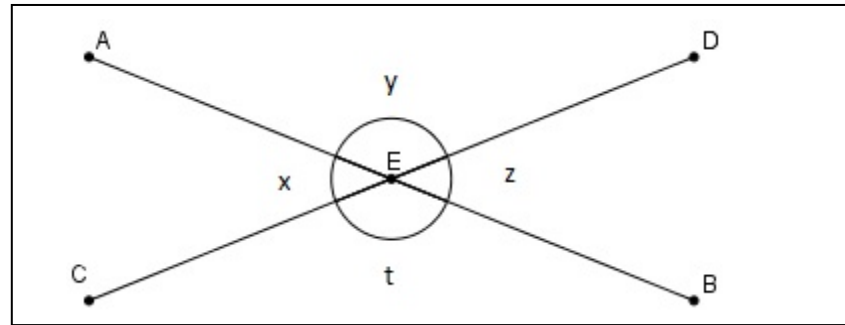
İspat dersi uygulamalarının 1.dersinde öğrencilerle iki tek sayının toplamının neden çift sayı ettiği üzerine fikir yürütüldükten ve matematiksel aktiviteler sunulduktan sonra farklı sayılar için matematiksel düşünme gerçekleştiren bir öğrenciyi ait diyalog:

**Ö2:** Hocam bir şey sorabilir miyim?

**Araştırmacı:** Efendim?

**Ö2:** Hocam o zaman bir çift sayı ile bir tek sayının toplamı ile her zaman tek sayı elde ederiz.

Öğrenci ile araştırmacı arasında geçen bu diyalog, öğrencilerde ispat yapma becerisinin ilk aşamalarından olan merak duygusu ve genelleme yapma isteğinin oluşmaya başladığını göstermektedir. Öğrencilerin verilen bir ifadeye benzer önermeler geliştirebilmeleri ispat becerisinin kazanılması için önemli bir aşama olduğu söylenilebilir.



Şekil 24. Kesişen İki Doğrunun Oluşturduğu Ters Açılar

Ders uygulamalarının 2.dersinde ters açılarının birbirine eşit olma nedeni üzerine öğrenciler fikir yürütürken Şekil 24'te toplamaları  $180^\circ$  olan açılar yazmışlar ve bu eşitlikten sonuç çıkarmaya çalışmışlardır. Öğrenciler tarafından oluşturulan eşitlikler:

$x + y = 180^\circ$   $y + z = 180^\circ$   $z + t = 180^\circ$   $t + x = 180^\circ$  şeklinde olup sınıf tahtasına alt alta yazılmış ve araştırmacının iki öğrenci ile olan diyalogu dikkat çekmiştir:

**Araştırmacı:**  $x$ 'in  $z$ 'ye  $t$ 'nin de  $y$ 'ye eşit olduğunu söylemenizi bekliyorum. Biraz düşünün.

**Ö9:** Hocam burada  $x$  ile  $y$  'nin toplamı  $180^\circ$  ya

**Araştırmacı:** Evet.

**Ö9:** Mesela birini  $90^\circ$  diğerine de  $90^\circ$  dersek

**Araştırmacı:** İşte onu demeyelim istiyorum. İstiyorum ki biraz daha genel konuşalım. Ö8'i dinleyelim.

**Ö8:** Hocam şurada  $x$  ile  $y$  'nin toplamı  $180^\circ$  ya

**Araştırmacı:** Evet

**Ö8:** En altta  $x$  'e eşit olduğu için  $y$  'nin de  $t$  'ye eşit olması gerekir.

Öğrenci bu konuşmada  $x + y = 180^\circ$  ve  $t + x = 180^\circ$  eşitliklerinde aynı şeye eşit olan şeyler birbirine eşittir demek ve  $x + y = t + x$  eşitliğinin oluştuğunu ve bu eşitliğe göre  $y$  'nin  $t$  'ye eşit olması gerektiğini söylemektedir. Öğrencilerin farklı eşitlikleri birbiri ile ilişkilendirebilmeleri ispat dersi uygulamalarının öğrencilerin muhakeme bağlamında düşüncelerini geliştirebildiğini göstermektedir.

Ders uygulamalarının dördüncü dersinde öğrenciler üçgenin iç açılarının toplamı üzerine düşünürlerken araştırmacı ile öğrenciler arasında geçen diyalog:

**Ö12:** Hocam ben söyleyebilir miyim?

**Araştırmacı:** Evet.

**Ö12:** Okuldaki öğretmenlerimiz bize öyle öğretti.

**Araştırmacı:** Kitapta bu yazıyordu değil mi? (gülerek)

**Ö12:** Aynen aynen.

**Araştırmacı:** Peki şu ana kadar öğrendiklerinizden yola çıkarak bir şeyler yapamaz mıyız acaba Ö8 bir şeyler söylüyor evet Ö8.

**Ö8:** Paraleller çizelim.

Üçgenin iç açılarının toplamının nedeni üzerine konuşulan bu diyalog da bir öğrencinin tahtaya çizilmiş herhangi bir ABC üçgenin için herhangi bir köşesinden karşı kenara paralel bir doğru çizerek iç ters açılar eşitliği ifadenin kanıtlanabileceğini fark ettiğini göstermektedir. Araştırmacının yönlendirmeleri ile üç iç açı şekil üzerinde komşu bütünler açıları oluşturacak şekilde bir araya getirilip doğru açı ( $180^\circ$ ) oldukları gösterilmiştir. Öğrencilerin önceki öğrenmelerini karşılaştıkları farklı durumlarda kullanabilmeleri ispat yapma becerisinin gelişimi için önemli görülmektedir.

Öğrencilerle yürütülen ders uygulamalarının dokuzuncu dersinde düzgün çokgenlerin bir iç açısı ve bir dış açısına ait genel ifadeler bulunduktan sonra bir öğrenci iç açı ile dış açının toplamının tüm çokgenler için  $180^\circ$  olması gerektiğinden yola çıkarak genel ifadelerin toplamının sonucunu ortaya çıkarmıştır. Öğrencinin sunduğu matematiksel aktivite Şekil 25'te sunulmuştur.

| <u>Bir iç açı</u>                                                                   |   | <u>Bir dış açı</u>    |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------|---|
| $\frac{(n-2).180^\circ}{n}$                                                         | + | $\frac{360^\circ}{n}$ | = |
| $\frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}$                                                 | + | $\frac{360^\circ}{n}$ | = |
| $\frac{180^\circ n - 360^\circ + 360^\circ}{n} = \frac{180^\circ n}{n} = 180^\circ$ |   |                       |   |

Şekil 25. Öğrenci Matematiksel Aktivite Temsili

Ders uygulamalarının on ikinci dersinde dörtgenlerin sınıflandırılması üzerine araştırmacı ile öğrenciler arasında geçen diyaloga aşağıda yer verilmiştir:

**Ö6:** Hocam çünkü onun (eşkenar dörtgenin) kenarları eşit ya hani onun (dikdörtgenin) değil. Daha özel olmaz mı?

**Araştırmacı:** Ben size soruyorum.

**Ö8:** Hocam paralelkenarla dikdörtgen birbirine daha çok yakın sonra eşkenar dörtgen daha özel.

**Araştırmacı:** Yani açılarının  $90^\circ$  olmasını bir kenara bırakıp kenarlarının birbirine eşit olması sizin için daha önemli geldi bana. Doğru mu anlıyorum?

**Tüm sınıf:** Evet.

Öğrencilerin dörtgenleri genelden özele doğru oluşturdukları sıralama; yamuk, paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare şeklinde olmuştur. Dikdörtgen ve eşkenar dörtgen arasında kararsız kaldıkları ama sonrasında kenar uzunluklarının eşitliğinin açılarının  $90^\circ$  olmasından daha özel bir durum olduğu kanaatine vararak tamamladıkları görülmüştür. Öğrencilerin sınıflandırma yaparken dikkat ettikleri durumun kenarları eşit olup olmaması durumu olduğu görülmektedir.

Eşkenar dörtgenin alanının bulunmaya çalışıldığı on üçüncü derste, öğrencilerin genel ifadeyi belirlemek için araştırmacıya sundukları argümanlar şu şekildedir:

**Ö12:** Hocam bir şey diyeceğim şöyle mi?

**Araştırmacı:** Efendim

**Ö12:** Bunu bir kare olarak hesaplasak etrafı dümdüz olacak ama bazı yerlerinde boşluk var. Kenarları boş...

**Araştırmacı:** Bunu (eşkenar dörtgeni göstererek) bir şeye mi tamamlayalım diyorsun?

**Ö12:** Aynen.

**Araştırmacı:** Etrafına ne çizelim?

**Ö12:** Kare

**Araştırmacı:** Kare midir dikdörtgen mi?

**Birkaç öğrenci birlikte:** Dikdörtgen.

**Araştırmacı:** Peki bu dikdörtgenin kenarları için ne söyleyebilirsiniz. Mesela şu kenar (kısa kenarı göstererek) neye eşittir?

**Ö8:** Köşegene

**Araştırmacı:** *Evet nedir burası*

**Birkaç öğrenci birlikte:** *f*

**Araştırmacı:** *Alt taraf için ne dersiniz?*

**Ö12:** *g'ye*

**Araştırmacı:** *Güzel*

**Ö12:** *f.g*

**Araştırmacı:** *Efendim?*

**Ö12:** *f.g*

**Araştırmacı:** *f.g tamamını verir değil mi?*

**Ö12:** *Aynen*

**Araştırmacı:** *Sonra ne yapacağız?*

**Ö12:** *Çıkaracağız... 4 Tane üçgeni çıkaracağız.*

**Araştırmacı:** *Peki bana bu üçgenlerin kenarları lazım. Şu uzunluk (oluşan dik üçgenlerin birinin bir kenarı) neye eşittir?*

**Ö6:**  $\frac{f}{2}$

Öğrenciler eşkenar dörtgenin alan formülünü ortaya çıkarmaya çalışırken, eşkenar dörtgeni alan formülünü bildikleri bir dörtgene yani dikdörtgene tamamlama fikri oluşmuştur. Daha sonrasında araştırmacının yönlendirmeleri ile eşkenar dörtgenin köşegenleri ile dikdörtgenin kenarları arasında ilişki kurarak eşkenar dörtgenin alan formülünü belirlemişlerdir. Benzer bir durum yamuğun alan formülü belirlenirken de öğrenciler tarafından ortaya konulmuştur. Farklı olarak bu defa şekli parçalama fikri öne sürülmüştür. Bu konu üzerine araştırmacı ile öğrenciler arasında geçen diyalog şu şekildedir:

**Araştırmacı:** *Bildiğimiz şekillere yönelelim. Alanlarını bulmayı bildiğimiz şekiller neler var?*

**Birkaç öğrenci birlikte:** *Kare, dikdörtgen, üçgen...*

**Araştırmacı:** *Paralelkenar*

**Ö8:** *İki üçgen bir şey var*

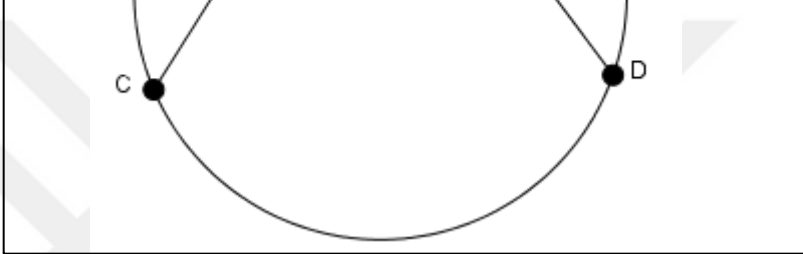
**Araştırmacı:** *Ne var?*

**Ö8:** *Kare var.*

Öğrenciler yamuğun alan formülü için şekli iki üçgen ve bir kareye (dikdörtgene) ayırmak istemişlerdir. Daha sonrasında araştırmacının yönlendirmeleri ile oluşan üç geometrik şeklin alanını belirlemiş sonunda tüm bu alanları toplayarak yamuğun alan formülünü elde etmişlerdir.

Genel olarak öğrencilerin derslere aktif olarak katılma eğiliminde oldukları ama genel ifadeler oluştururken zorlandıkları araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Öğrenciler düşündükleri ifadeleri matematiksel sembollere dönüştürürken zorluklar yaşamışlar, araştırmacının yönlendirmeleri ile sonuca ulaşmışlardır.

Ders uygulamalarının bir kısmında öğrencilere ispat içerikli ödevler verilmiştir. Bu ödevler ve verilen öğrenci cevapları da araştırmanın bulguları arasında gösterilebilir.



Şekil 26. Çemberde Çevre Açısı Bulmayı Gerektiren Öğrenci Ödevi

Bu ödev için bir öğrencinin verdiği cevap ise Şekil 27’de gösterilmiştir.

Bu ödev için bir öğrencinin verdiği cevap ise Şekil 27’de gösterilmiştir.

$180 - 2a$   
 $180 + (180 + 2a) = 2a$   
 $2b + 2a$   
 $\widehat{Ab} = 2b + 2a$   
 Yani  $c$  açısının görüldüğü yayın ölçüsü  $c$  açısının  
 iki katına eşittir.

Verilen öğrenci cevabı incelendiğinde öğrencinin önceki öğrendiklerini yeni duruma uygulayabildiği görülmektedir. İkizkenar üçgenin açıları, üçgenin iç ve dış açılarını matematiksel harf ve sembollerle göstererek çevre açığı merkez açığa taşımış ve çevre açının gördüğü yay için merkez açığı bir araç olarak kullanmıştır. Bu çözüm 7.sınıf öğrencisinin ispat becerisinde oluşan gelişimi gözler önüne sermektedir.

Çokgenlerin iç açıları toplamının konu olarak ele alındığı altıncı dersin sonunda öğrencilere; “Kenar sayıları ardışık olan iki çokgenin iç açıları toplamı arasındaki fark  $180^\circ$ ’dir.” ifadesinin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermeleri ödev olarak verilmiştir. Bir öğrencinin ödev için verdiği cevap Şekil 28’de görülmektedir.

$$\begin{array}{rcl}
 n \text{ kenarlı} & & (n+1) \text{ kenarlı} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (n-2) \cdot 180 & & (n-1) \cdot 180 \\
 180n - 360 & & 180n + 180 \\
 (180n - 180) + (180n + 360) & & \\
 180n - 180n = 0 & & \\
 \begin{array}{r}
 - 180 \\
 + 360 \\
 \hline
 180^\circ
 \end{array} & & 
 \end{array}$$

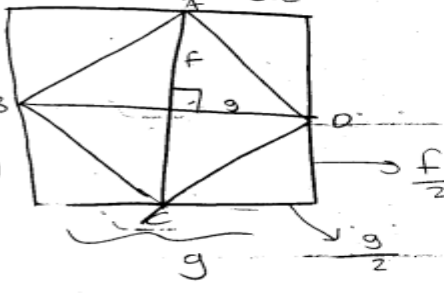
Şekil 28. Ödev İçin Öğrenci Argümanı Temsili 2

Öğrencinin yaptığı ödevde matematiksel harf ve sembolleri doğru bir şekilde ve belirli bir örnek için değil daha genel ifadelerle ulaşmak için kullandıkları görülmektedir. Hem Şekil 27 hem de Şekil 28’de sunulan öğrenci argümanları araştırmanın bulguları için önemli görülmektedir.

Öğrenci ödevlerine benzer bir durum öğrenme günlüklerinde de görülmüştür. Öğrenciler, o gün öğrenilen kazanımı dair ders sonunda öğrendiklerini derse gelmeyen bir öğrenciye anlatır gibi anlatmaları istenilmiştir. Yine öğrencilerin harf ve sembolleri kullanarak derste öğrendiklerini anlatabildikleri görülmüştür. Öğrencilere ait bazı öğrenme günlükleri Şekil- 29, 30 ve 31’de sunulmuştur.

Suğün matematik dersinde, Eskenar dörtgen ve yamığın alanlarını bulduk. İste şöylece:

Eskenar dörtgen = Normalde eskenar dörtgenin alanı, köşegen uzunlukları çarpımının yarısıdır. Esittir, biz bunu ispatladık.

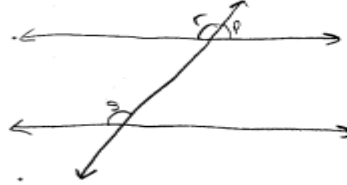


$$\begin{aligned}
 \frac{f}{2} \cdot \frac{g}{2} &= \frac{f \cdot g}{4} : 2 = \frac{f \cdot g}{2} \\
 \frac{f \cdot g}{8} \cdot 4 &= \frac{f \cdot g}{2} \\
 \frac{f \cdot g}{2} &= \frac{f \cdot g}{2} \\
 \text{Alanı} &= \frac{f \cdot g}{2}
 \end{aligned}$$

Şekil 29. Öğrenci Öğrenme Günlüğü Temsili 1

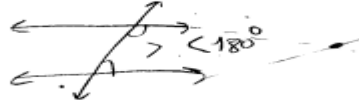
Bugün matematik dersinde, yine... sorular oluşturdık ve yine her zamanki gibi video çektik. Bugün öklid'in 5. Postulat'ına yararık iki ters açının da ters açılarının birbirine eşit olduğunu ispatladık. Örnekler oluşturarak daha iyi öğrenimize yardımcı olduk. İki ters açılar, dış ters açılar ve yandaş açılar eşit olduğunu öklid sayesinde öğrendik.

Örnek olarak şu şekilde:



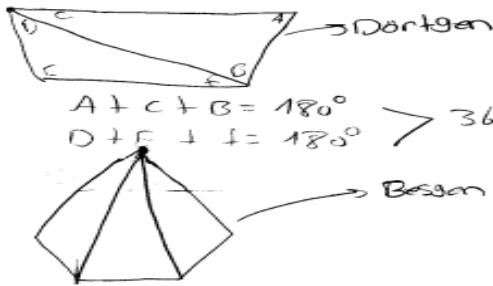
$P + S = 180^\circ$  dir  
 Axiomlar: P ve S eşit olmasın  
 $P > S$  olsun  
 $P + r > S + r$   
 $180^\circ > S + r$   
 $P = S$

ve öklid'in 5.ünü söylemesi: Eğer bir doğru iki doğru keserse bu doğruların aynı tarafındaki iç açılar iki dik açıdan küçükse bu iki doğru o yerde uzatıldıklarında kesişir.



Şekil 30. Öğrenci Öğrenme Günlüğü Temsili 2

Bugün matematik dersinde, Çokgenlerin iç açılar toplamlarını öğrendik. Çokgenlerin iç açılarının açılar sayısında bulduk zaten bir önceki dersimizde açının iç açısının toplamının  $180^\circ$  olduğunu ispatlamıştık bugün de altıgenin, yedigenin, dörtgenin, beşgenin... iç açılarını bulduk. Bunu bir köşeden çizilen köşegen sayısına bulduk işte söyleyorduk.



Bir köşesinden çizilen  
 4 köşegeni vardır ve  
 iki tane açı oluşur  
 bu sayede  $2 \cdot 180 = 360^\circ$  dir  
 = 2 köşegeni var 3  
 açı oluştu yani  
 $3 \cdot 180^\circ = 540$

Dörtgen = 2 tane  
 Beşgen = 3 tane  
 altıgen = 4 tane  
 yedigen = 5 tane  
 Sekizgen = 6 tane  
 n-gen =  $n - 2$  tane

1. köşegen  
 2. köşegen  
 3. köşegen  
 4. köşegen  
 5. köşegen  
 6. köşegen  
 7. köşegen  
 8. köşegen  
 9. köşegen  
 10. köşegen  
 11. köşegen  
 12. köşegen  
 13. köşegen  
 14. köşegen  
 15. köşegen  
 16. köşegen  
 17. köşegen  
 18. köşegen  
 19. köşegen  
 20. köşegen  
 21. köşegen  
 22. köşegen  
 23. köşegen  
 24. köşegen  
 25. köşegen  
 26. köşegen  
 27. köşegen  
 28. köşegen  
 29. köşegen  
 30. köşegen  
 31. köşegen  
 32. köşegen  
 33. köşegen  
 34. köşegen  
 35. köşegen  
 36. köşegen  
 37. köşegen  
 38. köşegen  
 39. köşegen  
 40. köşegen  
 41. köşegen  
 42. köşegen  
 43. köşegen  
 44. köşegen  
 45. köşegen  
 46. köşegen  
 47. köşegen  
 48. köşegen  
 49. köşegen  
 50. köşegen  
 51. köşegen  
 52. köşegen  
 53. köşegen  
 54. köşegen  
 55. köşegen  
 56. köşegen  
 57. köşegen  
 58. köşegen  
 59. köşegen  
 60. köşegen  
 61. köşegen  
 62. köşegen  
 63. köşegen  
 64. köşegen  
 65. köşegen  
 66. köşegen  
 67. köşegen  
 68. köşegen  
 69. köşegen  
 70. köşegen  
 71. köşegen  
 72. köşegen  
 73. köşegen  
 74. köşegen  
 75. köşegen  
 76. köşegen  
 77. köşegen  
 78. köşegen  
 79. köşegen  
 80. köşegen  
 81. köşegen  
 82. köşegen  
 83. köşegen  
 84. köşegen  
 85. köşegen  
 86. köşegen  
 87. köşegen  
 88. köşegen  
 89. köşegen  
 90. köşegen  
 91. köşegen  
 92. köşegen  
 93. köşegen  
 94. köşegen  
 95. köşegen  
 96. köşegen  
 97. köşegen  
 98. köşegen  
 99. köşegen  
 100. köşegen

Şekil 31. Öğrenci Öğrenme Günlüğü Temsili 3

#### 4.4. Ders Planı Uygulaması Sonrasına Ait Bulgular (İBT-2)

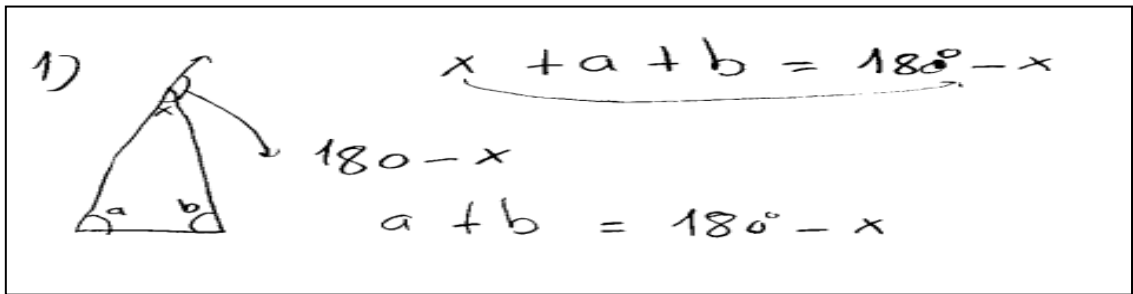
İBT-2, öğrencilerin ispat yapma becerilerinin belirlenmesi amacıyla hazırlanmış olan toplam dört sorudan oluşmaktadır. İBT-1'e benzer bir şekilde hazırlanan İBT-2, 1. ve 2. sorusunda öğrencilerden verilen ifadeyi doğrulamaları beklenirken, 3. soruda ifadenin yanlışlığını aksine örnek verme yöntemi ile göstermeleri beklenmektedir. 4.soruda ise; “ *Tüm çokgenlerin dış açıları ölçüleri toplamı  $360^\circ$  dir.*” ifadesine ait üç öğrenci cevabı sunulmuştur. Sorunun içeriğinde bulunan öğrenci argümanları analitik ispat ve örnek vererek ifadeyi doğrulama olarak ayrılmıştır. Uygulama sonrası gerçekleştirilen İBT-2'ye ait 1. soru; “*Bir üçgende, herhangi bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.*” ifadesi olup, öğrencilerden bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermeleri istenmiştir. Verilen öğrenci argümanlarına ait frekans ve yüzde tablosu Tablo 13'te sunulmuştur.

Tablo 13: İBT-2'nin 1. Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları

| Çözüm Kodları | F | %     |
|---------------|---|-------|
| Kod A         | 1 | 7,14  |
| Kod B         | 1 | 7,14  |
| Kod C         | 3 | 21,42 |
| Kod D         | 9 | 64,28 |

Öğrencilerin 1.soru için verdikleri cevaplara bakıldığında sınıfın %64,28'i soruyu yanlış-eksik cevaplamış ya da soruya cevap vermemiştir. Öğrenci argümanlarının %21,42'sinin Kod C olarak kodlanması dikkat çekici olarak görülmektedir.

Şekil 32'de İBT-2'nin 1.sorusu için analitik ispat şemasına uygun yanıtlayan bir öğrencinin argümanı verilmiştir.



Şekil 32. İBT-2'in 1.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

Öğrenci cevabı üzerine yapılan birebir görüşme kayıtlarında ise bu soru için geçen diyalog şu şekildedir:

**Araştırmacı:** 1. Soru için ne dedin? Biraz açıklayabilir misin?

**Ö8:**  $x$ 'in  $a$ 'nın  $b$ 'nin toplamı  $180^\circ$

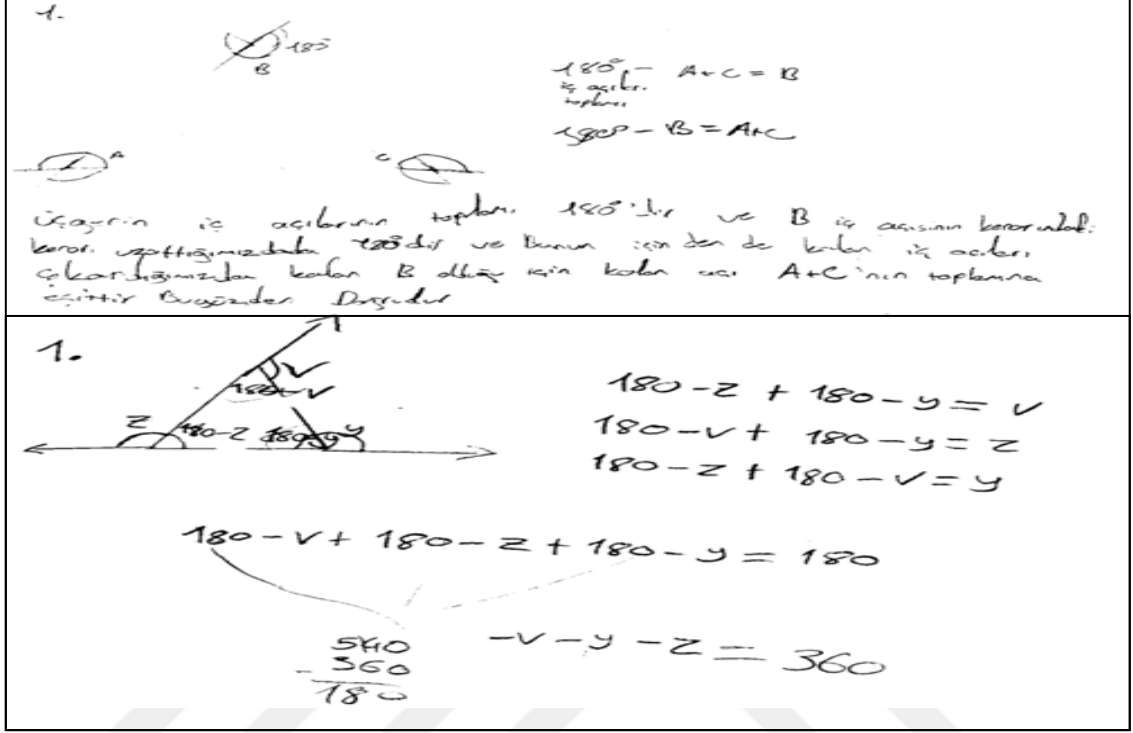
**Araştırmacı:** Tamam...

**Ö8:**  $x$ 'i çıkarınca  $180^\circ - x$  çıkıyor

**Araştırmacı:** Tamam...

**Ö8:** Burada da ( $x$  açısının dış açısını gösteriyor)  $180^\circ - x$  olduğu için eşittir.

Şekil 33'te İBT-2'nin 1.sorusu için analitik ispat şemasına ait diğer cevaplar görülmektedir.



Şekil 33. İBT-2'in 1.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri

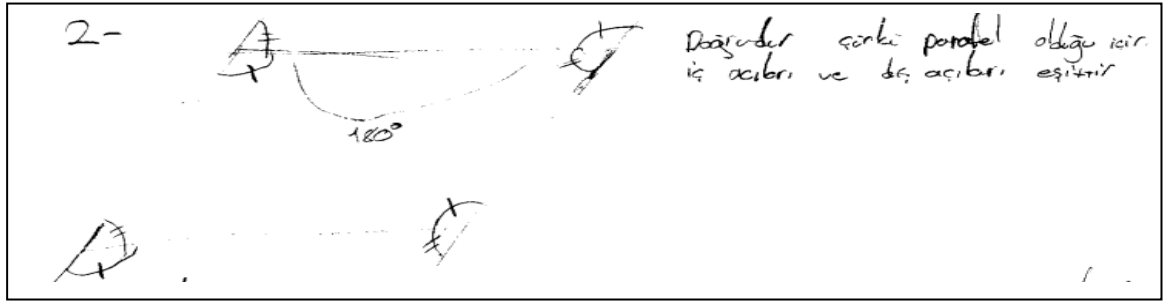
Şekil 32 ve Şekil 33'te verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin verilen bir ifade için Kod C ile kodlanan argümanlar sunabildikleri ve bunu kendi kavramsal seviyeleri ile açıklayabildikleri görülmektedir.

Öğrencilere İBT-2'nin 2.soru olarak; "Paralelkenarın ardışık iki iç açısının toplamı daima  $180^\circ$  dir." ifadesini doğrulayacak bir argüman sunmaları istenmiş, soruya verilen öğrenci argümanlarına ait frekans ve yüzde tablosu Tablo 14'te sunulmuştur.

Tablo 14: İBT-2'in 2. Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları

| Çözüm Kodları | F | %     |
|---------------|---|-------|
| Kod A         | 1 | 7,14  |
| Kod B         | 2 | 14,28 |
| Kod C         | 5 | 35,71 |
| Kod D         | 6 | 42,85 |

Tablo 14 incelendiğinde öğrencilerin %42,85'i soruyu boş bırakmış veya eksik-yanlış cevap vermiş olduğu görülmektedir. Kod C olarak kodlanan öğrenci argümanı frekansının 6 olarak tespit edilmesi bir diğer dikkat çekici bulgu olarak görülmektedir. Şekil 34'te Kod C olarak kodlanan bir öğrenci argümanı görülmektedir.



Şekil 34. İBT-2'in 2.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

Öğrencinin Şekil 33'te verdiği argüman üzerine yapılan görüşme kayıtlarında araştırmacıyla argümanı sunan öğrenci arasında geçen diyalog şu şekildedir:

**Araştırmacı:** 2. Soru için ne dedin?

**Ö6:** Hocam paraleller ya hani paralel oldukları için buradaki açılarla buradaki açılar eşit oluyor (çift çizgili açılar gösteriyor).

**Araştırmacı:** Ne açılar bunlar?

**Ö6:** Yöndeş açılar.

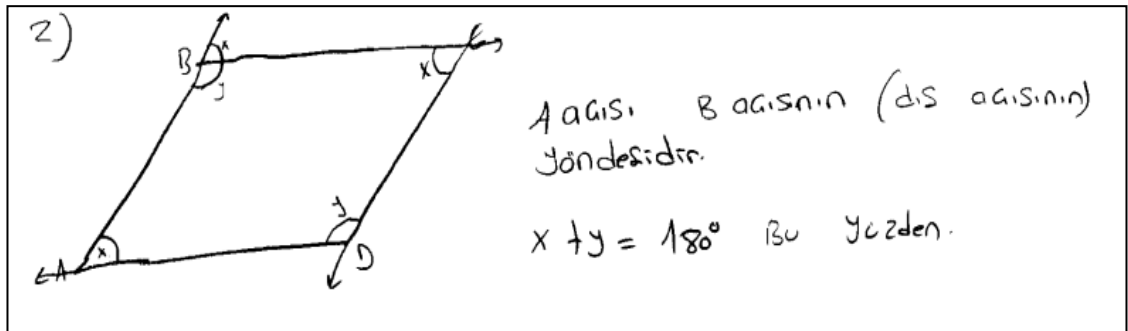
**Araştırmacı:** Şunu anladım. Sen açıları tek çizgi çift çizgi atmışsın ve bunlarında (tüm iç açılar gösteriyor) yöndeşlerini belirlemişsin. Doğru mu anlıyorum?

**Ö6:** Evet.

**Araştırmacı:** Baktığın zaman tek çizgili ile çift çizgililer yan yana komşu bütünler olduğu için  $180^\circ$  yapıyor.

**Ö6:** Evet.

Şekil 35'te Kod C olarak kodlanan başka bir öğrenci argümanı görülmektedir.



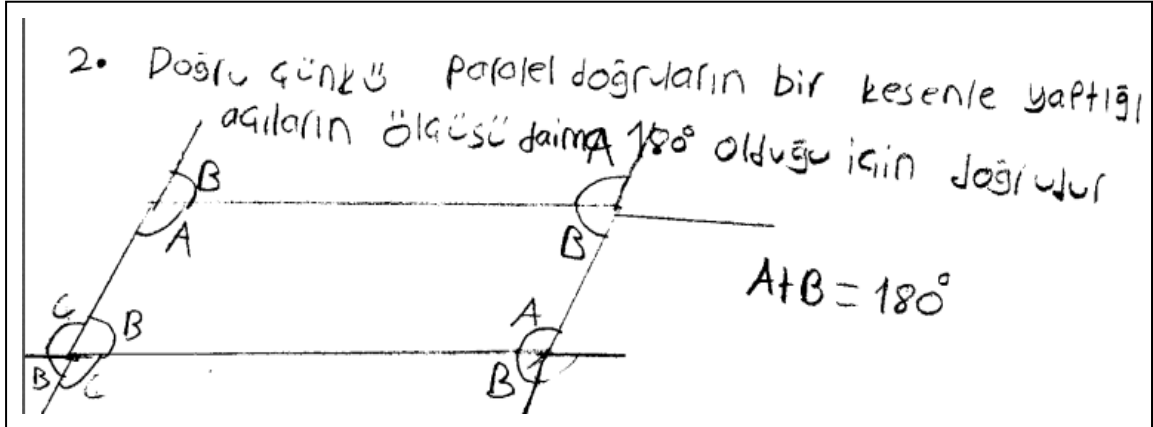
Şekil 35. İBT-2'in 2.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

Öğrenci cevabı üzerine yapılan birebir görüşme kayıtlarında ise bu soru için araştırmacıyla argümanı sunan öğrenci arasında geçen diyalog şu şekildedir:

**Araştırmacı:** Peki 2. Soru için ne dedin?

**Ö8:** Şuradaki açı yöndeş oluyor (A ve B köşelerindeki x açılarını gösteriyor). Bunların ikisinin toplamı  $180^\circ$  (B köşesindeki x ve y açılarını gösteriyor). Yani burada (B köşesindeki y açısı ile C köşesindeki x açısını gösteriyor) y ile x'in toplamı  $180^\circ$ .

Şekil 36’da İBT-2’nin 2.sorusu için Kod C olarak kodlanan farklı bir öğrenci argümanı görülmektedir.



Şekil 36. İBT-2’in 2.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

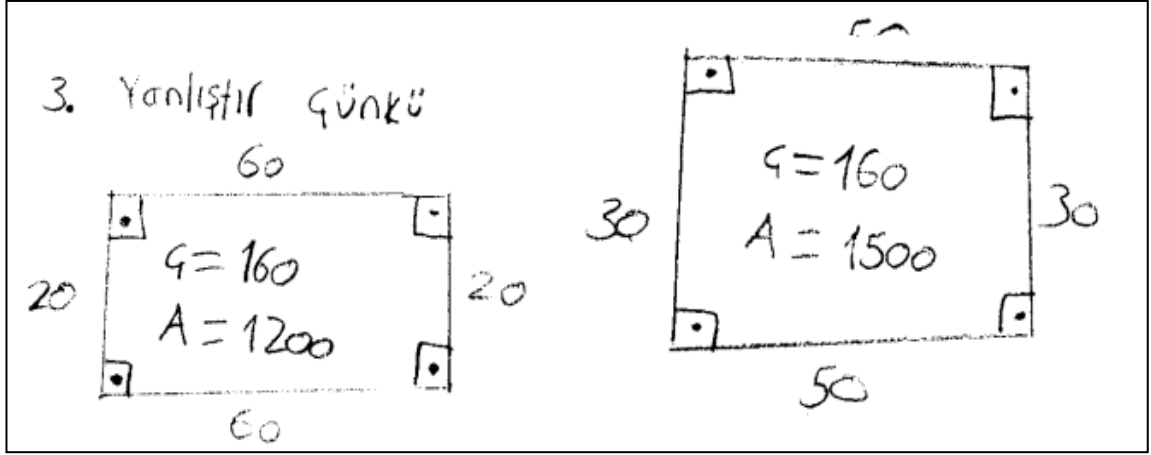
Öğrenci cevaplarına bakıldığında, öğrenciler paralel doğruların bir kesenle yaptığı açıların eşitliklerinden faydalanarak verilen ifadeyi doğrulayacak argümanlar ürettikleri görülmektedir. Öğrencilerin uygulama sonrasında, verilen bir ifadeyi doğrulayacak argümanların istenildiği bu iki soru için beklenenleri gerçekleştirebildikleri araştırmanın önemli bulguları arasında sayılmaktadır.

Öğrencilerden İBT-2’nin 3.sorusunda aksine örnek vererek verilen ifadenin yanlış olduğunu göstermeleri beklenmektedir. Öğrencilerden sadece bir ifadenin doğruluğunu göstermeleri değil verilen bir ifadenin yanlışlığını da göstermeleri beklenmektedir. Çevreleri eşit çokgenlerin alanlarının da eşit olacağı belirtilen ifadeye ait öğrenci argümanlarına ait frekans ve yüzde tablosu Tablo 15’te gösterilmiştir.

Tablo 15. İBT-2’in 3. Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları

| Çözüm Kodları | F | %     |
|---------------|---|-------|
| Kod A         | 0 | 0     |
| Kod B         | 0 | 0     |
| Kod C         | 5 | 35,71 |
| Kod D         | 9 | 64,28 |

Tablo 15’e göre öğrencilerin %35,71’i istenilen düzeyde gelişim göstermiş ve sundukları argümanlar Kod C olarak kodlanmıştır. Öğrencilerin 9’unun Kod D olarak kodlanması öğrencilerin verilen bir ifadenin yanlış olduğunu göstermek için uygun örnekler sunamadıklarını göstermesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Şekil 37’de İBT-2’nin 3.sorusu için Kod C olarak kodlanan bir öğrencinin argümanı sunulmuştur.



Şekil 37. İBT-2'in 3.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

Öğrenci cevabı üzerine yapılan birebir görüşme kayıtlarında ise bu soru için öğrencinin açıklamaları şu şekildedir;

**Araştırmacı:** 3.Soruda ne yaptın?

**Ö12:** Çevreleri eşit çokgenlerin alanları da eşittir diyor. Yanlış dedim. Burada aksine örnek vermeyi kullandım hocam. Kısa kenarı 20 br diğerine de 60 br yazdım. Çevreleri 160 etti.

**Araştırmacı:** Diğer dikdörtgeni nasıl ayarladın?

**Ö12:** Diğer dikdörtgeni de kısa kenarına 30 cm dedim uzun kenarına 50 cm dedim hocam. Onun çevresini de 160 buldum yine.

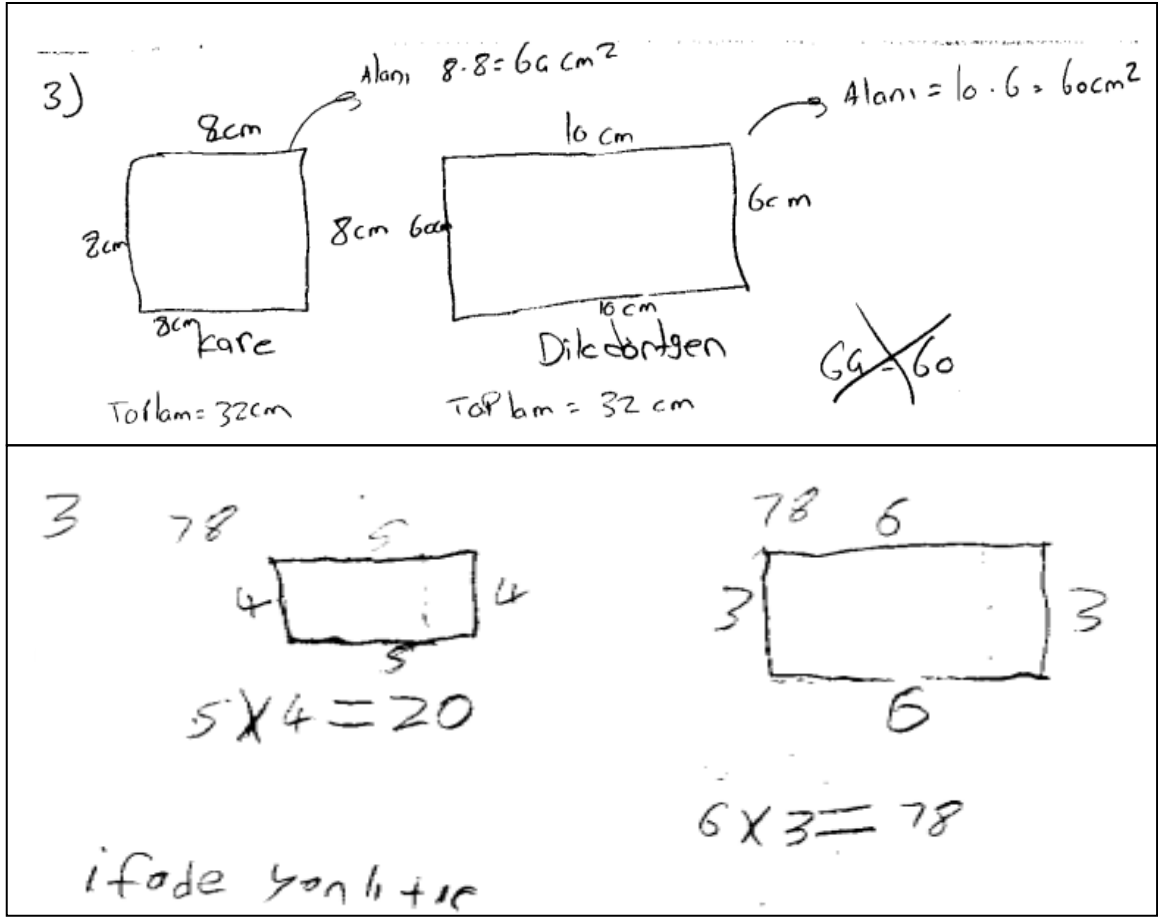
**Araştırmacı:** Şunu anladım ben. Çevreleri eşit iki tane dikdörtgen çizdin.

**Ö12:** Aynen aynen.

**Araştırmacı:** Yani 20 ye 60 lık ve 30 a 50 lik. Sonra da bunların neyini buldun?

**Ö12:** Alanlarını buldum. 20 ile 60 ı çarptım 1200 buldum. 2. dikdörtgenin alanını 50 ye 30 olduğu için 1500 buldum alanını. Çevreleri 160 da eşit ama birinin alanı 1200 diğerinin 1500 olduğu için burada aksine örnek vererek yanlış olduğunu ispatladım.

Öğrencilerin aksine örnek vererek bir ifadenin yanlış olduğunu göstermeleri beklenen bu soruya ait Kod C olarak kodlanan farklı öğrenci cevapları Şekil 38'de verilmiştir.



Şekil 38. İBT-2'in 3.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsilleri

Uygulama sonrası yapılan İBT-2'ye ait 4. soruda öğrencilerden ispat olarak kabul edecekleri bir öğrenci cevabı seçmeleri istenilmiştir. “Tüm çokgenlerin dış açıları ölçüleri toplamı  $360^\circ$  dir.” ifadesine verilen üç öğrenci cevabından hangisini/hangilerini daha ikna edici bulduklarını belirtmeleri istenmiştir. Sorunun içeriğinde bulunan her biri farklı koda ait öğrenci argümanları Şekil 39’da sunulmuştur.

**Osman'ın cevabı;**  
 n kenarlı bir çokgenimiz olsun. Bu çokgenin;  $x, y, z, t, \dots$  şeklinde  $n$  tane iç açısı vardır. Dış açıları her bir iç açı için;  $180^\circ - x, 180^\circ - y, \dots$  olur. Toplamları  
 $180^\circ - x + 180^\circ - y + 180^\circ - z + 180^\circ - t + \dots = n \cdot 180^\circ - \underbrace{(x + y + z + t + \dots)}_{\text{Çokgenin iç açıları toplamı}}$   
 $x + y + z + t + \dots = (n - 2) \cdot 180^\circ$  olduğundan;  
 Dış açıları toplamı =  $n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 2 \cdot 180^\circ$   
 $= n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 360^\circ$   
 Dış açıları toplamı =  $360^\circ$  olduğundan ifade doğrudur.

**Aybüke'nin cevabı;**  
 Örneğin bir altıgen düşünelim iç açıları toplamı  $720^\circ$  olacak şekilde iç açıları seçelim.  $100^\circ, 130^\circ, 140^\circ, 110^\circ, 120^\circ$  ve  $120^\circ$  olsun. Sırasıyla dış açıları da  $80^\circ, 50^\circ, 40^\circ, 70^\circ, 60^\circ$  ve  $60^\circ$  olacaktır. Dış açıları toplarsak  
 $80^\circ + 50^\circ + 40^\circ + 70^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 360^\circ$  buluruz.  
 Rastgele seçtiğim bir çokgende dış açıları toplamı  $360^\circ$  çıktığından diğer çokgenler de de aynısı çıkacaktır. Verilen ifade doğrudur.

**Zeynep'in cevabı;**  
 Bence doğru çünkü bir üçgen ile bir dikdörtgene bakarsak ikisinin de dış açıları toplamı  $360^\circ$  dir.

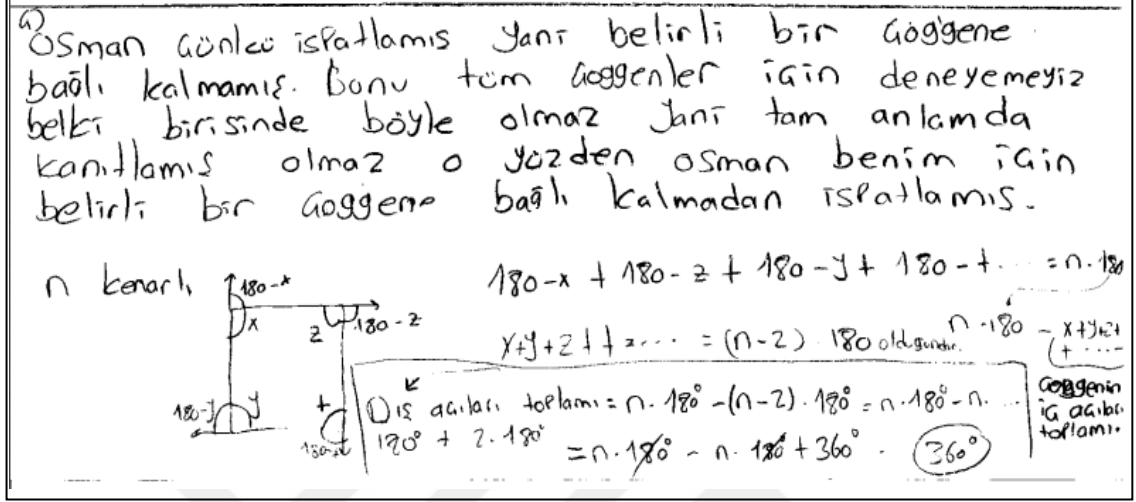
Şekil 39. İBT-2'in 4.Sorusuna Ait Soru İçeriğinde Bulunan Öğrenci Cevapları

Soru içeriğinde bulunan öğrenci cevaplarının Osman için Kod C, Aybüke ve Zeynep için Kod B olarak kodlanması planlanmıştır. Aybüke ve Zeynep'in argümanlarında örnekler kullanıldığından Kod B, Osman'ın cevabı tüm geometrik şekiller için genel bir ifade oluşturduğundan Kod C olarak kodlanmıştır. Aybüke'nin argümanının Zeynep'ten farkı, tek bir örnek ve örneğini rastgele seçmiş olduğu görülmektedir. Zeynep ise örneklerini iki farklı geometrik şekil için belirlediği ve Kod B olarak kodlanan öğrenciler için tek bir rastgele örneğin mi yoksa iki veya daha fazla örneğin mi ifadelerin doğruluğunu gösterirken daha ikna edici olduğunu ortaya çıkarılması düşünülmüştür. Öğrencilerin son görüşme formuna ait 4.soru için seçtikleri öğrenciargümanlarına ait frekans ve yüzde tablosu Tablo 16'da sunulmuştur.

Tablo 16: İBT-2'in 4. Sorusuna Verilen Öğrenci Cevapları ve Frekansları

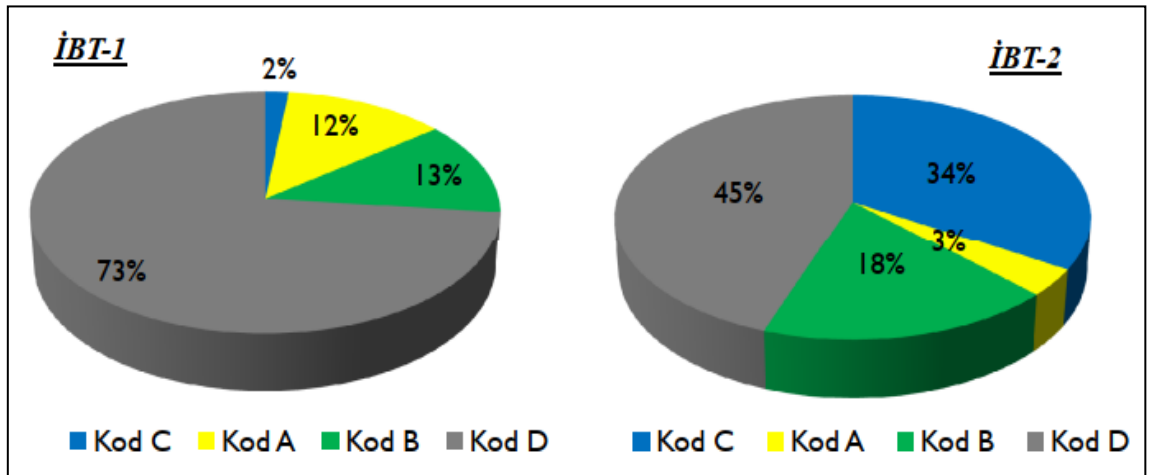
| Çözüm Kodları | F | %     |
|---------------|---|-------|
| Kod B         | 7 | 50    |
| Kod C         | 6 | 42,85 |
| Kod D         | 1 | 7,14  |

Öğrencilerin %50'sinin 4. soru için Kod B olarak kodlanan öğrenci argümanını seçtikleri görülmektedir. Kod C olarak kodlanana öğrenci argümanını seçenlerin 6 kişi olması uygulama sonrası için sınıfın azımsanmayacak bir bölümünün (%42,85'i) verilen bir ifadenin ispat olarak kabul edilip edilemeyeceğini belirleyebildikleri görülmektedir. Kod C olarak kodlanan bir öğrenci argümanı ve bu argümanı seçme nedenlerinin açıklaması Şekil 40'ta sunulmuştur.



Şekil 40. İBT-2'in 4.Sorusuna Ait Kod C Olarak Kodlanan Öğrenci Cevap Temsili

Uygulanan ders planı uygulamalarının 7.sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanına ait ispat becerilerine etklilerini daha uygun bir biçimde ifade etmek amacıyla elde edilen veriler grafik haline getirilmiştir. Öğrencilerin İBT-1 ve İBT-2 sonuçlarının her bir kodun değişimine ait grafikler Şekil 41'de sunulmuştur.



Şekil 41. İBT-1 ve İBT-2'ye Ait Kodların Dağılım Grafikleri

Öğrencilerin ispat için hazır bulunuşluk düzeylerinin belirlendiği İBT-1'e ait grafik incelendiğinde elde edilen verilerin sadece %2'lik bir kısmının Kod C olarak kodlandığı görülmektedir. Öğrencilerden elde edilen verilerin çoğunluğunun(%73) Kod D olarak kodlandığı yani öğrencilerin sorulara cevap vermekten kaçındığı ya da yanlış cevaplar sunduğu görülmektedir. Uygulamanın ardından yapılan İBT-2 sonuçlarına ait kod

dağılım grafiği incelendiğinde öğrencilerin sundukları Kod C argümanlarının sayısında belirgin bir artış görülmektedir(%34). Kod D olarak kodlanan verilerin sayısındaki azalış ve Kod B düzeyindeki kodlanan argüman sayısındaki artış dikkat çeken bulgular arasındadır.

#### 4.4. İspata Yönelik Eğilim Sorularına Ait Bulgular

Uygulamanın sonunda yarı yapılandırılmış görüşme yapılan sekiz öğrenciye, ispata yönelik tutumlarını belirlemek amacıyla ek sorular yöneltilmiştir. Uygulama öncesi altı öğrenci olarak planlanan görüşmeler iki öğrencinin İBT-2 için verdiği cevaplar dikkat çekici bulunduğundan çalışmanın daha fazla veriye ulaşması açısından sekiz öğrenciye çıkarılmıştır. Öğrencilerin verdiği yanıtlara ait veriler Tablo 17’de gösterilmiştir. Öğrencilerin tamamı ispatın matematik dersi için gerekli olduğunu düşünmektedir. İspat yapmayı keyifli bulan öğrenci sayısı 6 (%75) iken ispatta zorlandığını belirten öğrenci sayısı 4 (%50) olarak tespit edilmiştir.

Tablo 17. İspata Yönelik Tutum

| Ek sorular                      | Evet (f) |      | Hayır (f) |     |
|---------------------------------|----------|------|-----------|-----|
|                                 | f        | %    | f         | %   |
| İspat yapmak çok zor mu?        | 4        | %50  | 4         | %50 |
| İspat gerekli mi?               | 8        | %100 | 0         | %0  |
| İspat yapmaktan keyif aldın mı? | 6        | %75  | 2         | %25 |

Öğrenciler genel olarak ispat yaparken harf ve sembolleri kullanmakta zorlandıklarını belirtmişlerdir. Örnek ile ispat yapılıp yapılamayacağını sorulduğu soruya öğrencilerin çoğunluğu örnek vererek ispat yapılamayacağını söylemişlerdir. Her ifadenin doğru olmayacağı, yanlış ifadelerde olabileceği ve bu yanlış ifadeleri aksine örnek verme yöntemi ile gösterilebileceğini belirten öğrenciler gözlemlenmiştir. Öğrencilerin tamamı ispatın matematik için gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Bazı öğrencilerin ispatın gerekliliğine ve neden ispat yapıldığına dair argümanları aşağıda sunulmuştur:

**Ö12:** *Bir şeyin doğruluğunu veya yanlışlığını emin olmadan kullanmamamız gerekiyor. Bir kural belirliyoruz mesela matematikte onun doğruluğunu veya yanlışlığını emin olmadan kullanamayız. Yanlış olabilir çünkü. O yüzden ondan emin olmak için önce ispatlıyoruz sonra kullanıyoruz. Bence bu yüzden*

**Ö6:** *Gereklidir bence hocam. Çünkü bir kişiyi ikna edemiyorsun mesela onun olduğuna inandıramıyorsun. İnanmak içinde matematik verilerinden yararlanmak bence doğru bir yol hocam.*

**Ö4:** *Kanıtlamazsak neden doğru olduğunu bilemeyiz.*

Bir ifadenin doğruluğunu göstermek için örneklerin yeterli olup olmayacağı sorusuna bir öğrenci argümanı aşağıda sunulmuştur:

**Ö8:** Yanlış oluyorsa ispatlamış oluyoruz. Ama hepsinde olmaz.

**Araştırmacı:** Uygulamadaki çevreleri eşit dörtgenler sorusu gibi diyorsun. Yanlış göstermek için örnek kullanabiliriz

**Ö8:** Evet

**Araştırmacı:** Ama doğru bir şeyi göstermek için örnek kullanabilir miyiz?

**Ö8:** Yok.

**Araştırmacı:** Mesela

**Ö8:** Bütün sayılar için olursa olmaz. Sonsuza kadar gider.

Öğrencilerin çoğunluğu ispat yapmaktan keyif aldıklarını belirtmişlerdir. Bir öğrenci geometri öğrenme alanında ispat yapmak yerine uygulamanın ilk dersinde ispata alışmak için yaptığımız iki tek sayının toplamı çift sayı eder gibi ifadelerin yani sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait ispat yapmanın daha keyifli olduğunu belirtmiştir. Bazı öğrenciler ispat ders planlarının içeriklerinden daire ve çemberin çevre - alan bağlantılarında, dörtgenlerin kenar ve köşe bağıntılarında zorlandıklarını belirtmişlerdir.

## 5. SONUÇ VE TARTIŞMA

### 5.1. Ders Kitabının İspat Bağlamında İncelenmesi

Öğrencilerin öğrenmelerini etkileyen birçok etmen bulunmaktadır. Bu etmenlerin en önemlilerinden biri de ders kitaplarıdır (Cai, Wang, Moyer, Wang, ve Nie, 2011; Schmidt vd., 2002; Stein, Smith, ve Remillard, 2007). Ders materyalleri arasında bulunan ders kitapları içerik bakımından öğrenci öğrenmeleri üzerinde büyük bir etkiye sahiptir ve istenilen eğitim reformunun gerçekleşebilmesi için ders kitaplarının değiştirilmesi gerektiği birçok araştırmacı tarafından belirtilmiştir (Cai ve Howson, 2013; Howson, Keitel, ve Kilpatrick, 1981; Senk ve Thompson, 2003). Yapılan bu çalışmada 2022-2023 eğitim öğretim yılına ait MEB onaylı 7.sınıf matematik ders kitabının geometri öğrenme alanı ispat bağlamında incelenmiştir. Toplam 134 matematiksel aktivite incelenmiş olup, bunların %20,58'inin etkinlik, %44,02'sinin örnek ve %50,74'ünün alıştırma olduğu görülmüştür. İncelenen bu aktivitelerden sadece 7 (%5) tanesinin ispat olma potansiyeli barındırması dikkat çekici bulunmuştur. NCTM'e (2000) göre matematiksel muhakeme gelişimi ancak matematiksel zihin alışkanlıklarının gelişmesi ile olacağı belirtilmektedir. Ders kitabının ilgili bölümüne ait içeriklerin %95'lik kısmının matematiksel zihin alışkanlıkları kazandıramayacak düzeyde olması, ders kitaplarının ispat bağlamında yetersiz olduğunu göstermektedir (bkz. Tablo 7). Ayrıca ders kitabının genel incelemesinde, Smith ve Stein'e (1998) göre üst düzey etkinliklerden olan problem kurma etkinliklerine rastlanılamaması dikkat çekici bir diğer durumu oluşturmuştur.

Ders kitaplarının öğrencilerin birincil öğrenme kaynağı olduğu göz önüne alındığında, kitapların ispat bağlamında incelenmesi ve öğrencilere muhakeme ve ispat yapma etkinlikleri ile ne kadar etkileşim fırsatı oluşturduğunu gözler önüne sermek için yapılacak bu tür çalışmalar alana katkıda bulunacağı aşîkârdır. Stylianides (2008) Amerika Birleşik Devletleri'nde güncel olarak okutulan birçok kitabı ispat bağlamında incelemiştir. Stylianides toplam 4855 etkinliği incelediği çalışmasında etkinliklerin yeterince ispat yapma ve düşünme olanağı sunmadığını belirtmiştir. Benzer bir şekilde Stacey ve Vincent (2009) inceledikleri ders kitaplarının ispat ve muhakeme olarak yetersiz olduklarını, daha çok kural bulma etkinliklerinin olduğunu belirtmişlerdir. Doğan (2019), 8. sınıf ders kitaplarını matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları bakımından incelediği çalışmada benzer sonuçlara ulaşmıştır. Öğrenme alanlarına göre ayrı ayrı incelediği 8.sınıf ders kitabının sadece %7,7'sinin öğrencilere ispat yapma olanağı sağladığı belirtilmiştir. Karakuş ve Korkutan'ın (2021) 7. ve 8. sınıf ders kitabının içeriğinin ispat potansiyeli bakımından değişimini yıllara göre inceledikleri çalışmalarında geometri öğrenme alanına odaklanmışlardır. 2018 yılında kullanılan ders kitaplarında bulunan örnek, problem ve etkinlik sayısının 2013 yılına göre azaldığı belirtilen çalışmada buna bağlı olarak muhakeme olanağı sağlayan argümanlarda da azalış olduğu belirtilmiştir. Ayrıca yaptıkları çalışmanın sonuçları arasında ispat türlerinin çeşitliliğinin az oluşunun da matematik öğretim programı hedefleri ile örtüşmediği belirtilmiştir. Ortaokul matematik ders kitaplarını inceledikleri

alışmalarında Zeybek ve arkadaşları (2018) bezer sonuçları elde ettikleri görülmektedir. İnceledikleri 2831 matematiksel aktivitenin sadece 177(%6)'sinin muhakeme ve ispat etkinliği olma potansiyeli barındırdıklarını belirtmişlerdir.

Alan yazındaki bu çalışmalarla örtüşen sonuçlara sahip bu çalışmada da benzer bulgular yer almaktadır. İncelen 7. Sınıf ders kitabının geometri öğrenme alanına ait 134 matematiksel aktivitenin sadece 7'sinin ispat olanağı sağladığı görülmüştür. Yaklaşık olarak %5'e denk gelen bu oranın hem uluslar arası kuruluşların hem de MEB'in matematik ğretim programındaki hedeflerle uyuşmadığı söylenebilir. İspatın matematik öğrenmelerinin temelini oluşturdugu (Polya, 1981), matematiksel iletişimi sağlayan bir araç olduğu (Knuth, 2002), ayrı bir ders olarak değil, matematiğin doğal bir parçası olarak öğretilmesi gerektiği (NCTM, 2000) belirtilirken öğrencilerin birincil öğrenme kaynağı olan ders kitaplarında muhakeme ve ispat yapma aktivitelerine az sayıda yer verilmesi istenilen matematik öğrenmelerine öğrencilerin ulaşmasını zorlaştıracakını söylemek yanlış olmayacaktır. Öğrencilerin matematik öğrenmelerini anlamlandırabilmeleri için ispat yapma olanağı tanıyan aktivitelerle daha çok karşı karşıya gelmesi gerekmektedir.

## 5.2 İBT-1'e Ait ğrenci Cevapları

Matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin gelişimi için öğrencilerin ispat yapma olanağı sağlayan içeriklerle etkileşim içinde olması gerekmektedir. Ayrıca ispat yapmanın ileri düzey matematik bilgisine sahip olmayı gerektirmediği, bireylerin anaokulundan itibaren kendi yaş seviyesine uygun bir şekilde ispat yapabilecekleri birçok çalışma ve raporla belirtilmektedir (NCTM, 2000; zer ve Arıkan, 2002; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007). Amerika Birleşik Devletleri'nde kabul gören matematik standartlarında (CCSSI, 2010) ğrencilerin tüm sınıf seviyelerinde; soyut düşünebilmeleri, uygulanabilir matematiksel argümanlar üretmeleri, üretilmiş matematiksel argümanları değerlendirebilmeleri, açık-anlaşılır olmaya dikkat etmeleri beklenmektedir. NCTM (2000), "Ortaokul Matematiği için İlkeler ve Standartlar" kitabında okulöncesi öğretimden lise son sınıfa kadar her öğrenciden; muhakeme yapabilmesi ve ispatın temel yapısının kabul etmesi, matematiksel argümanlar oluşturun bu argümanları değerlendirebilmeleri, matematiksel varsayımlar oluşturun, bu varsayımları araştırabilmelerini, ispat yöntemlerinden uygun olanı seçip kullanabilme gibi matematiksel becerilerin beklendiği belirtilmektedir. MEB (2018) güncel ğretim programında; " *Problem zme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir.*"(s. 9) ifadesi ile ispat ve muhakemenin öğrencilerde kazandırılması gereken bir beceri olduğu görülmektedir. Belirtilen bu çalışmalar ve raporların ışığında yürütülen bu çalışmanın amaçlarından birisi de öğrencilerin ispat yapma becerilerinin belirlenmesidir.

7.Sınıf ğrencilerinin geometri öğrenme alanına ait ispat yapma becerilerinin incelendiği bu çalışmada İBT-1'e ait ğrenci cevapları incelendiğinde; öğrencilerin verilen bir ifadenin doğruluğunu göstermede eksikliklerinin olduğu görülmüştür.

Öğrencilere toplam dört aktivite sunulmuştur. Bu aktivitelerin ikisi ifadenin doğrulanmasının istendiği biri ise ifadenin yanlış olduğunun gösterilmesi biçiminde tasarlanmıştır. Son aktivite de sunulan öğrenci cevaplarından hangisini daha ikna edici bulduklarını açıklamaları istenmiştir. Öğrencilerin uygulama öncesi yapılan İBT-1'e ait cevapları incelendiğinde, verilen bir ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını gösteremedikleri, sunulan argümanlardan hangisinin ispat olarak kabul edileceğini belirleyemedikleri görülmüştür(bkz. Tablo 8, 9, 10 ve 11). Sadece bir öğrencinin aksine örnek vermenin beklendiği İBT-1'e ait 3.ifade için istenilen düzeyde cevap verebildiği diğer ifadeler için istenilen düzeyde (Kod C) cevaplar veremediği görülmüştür.

Öğrencilerin uygulama öncesi ispat yapamadıkları, ispat olarak kabul edilecek bir argüman seçemedikleri, bazı argümanlar için örnek verme eğiliminde oldukları ama genel olarak Kod D olarak kodlanan yanıtlar sundukları görülmüştür. İBT-1'den sonra öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğrencilerin verilen ifadeler için argüman üretmedikleri gözlemlenmiştir. Dörtgenlerle ilgili bir ifadede daire çizdikleri, üçgenin iki tane dış açısı olduğunu belirtmeleri, çevre ile alan arasındaki farkı idrak edemedikleri yapılan bu birebir görüşmelerin sonuçları arasındadır. İspatın matematiğin için önemli ve ayrılmaz bir parçası olduğu, küçük yaştan itibaren öğrencilerin ispat yapma becerilerinin oluşabileceği ve ispat yapabilecekleri beklenirken, 7.sınıf seviyesindeki öğrencilerinin matematiksel ispat ve muhakeme becerilerinin çok düşük seviyede görülmesi düşündürücü bir sonuç olduğu kanısına varılmıştır.

### 5.3. Ders Planı Uygulaması

7.sınıf öğrencilerine yapılan bu çalışmadahazırlanan 15 saatlik ders planları uygulanmıştır. Ders planı uygulamalarından elde edilen verilere göre öğrencilerin ispat ve muhakeme becerilerinin arttığı söylenebilir. İBT-1 için üçgenin dış açıları toplamının  $360^\circ$  olduğunu göstermeleri beklenen soruya bir öğrenci cevap olarak deftere bu şekilde yazdıklarını belirtmiştir. Aynı öğrenci uygulamanın ilk dersinde öğrencilere sunulan *"İki tek sayının toplamının her zaman çift sayı eder."*ifadesinden sonra, bir tek sayı ile bir çift sayının toplamının da her zaman tek sayı ettiğini söylemesi buna örnek olarak gösterilebilir. Benzer şekilde ters açıların ölçülerinin birbirine eşit olduğu gösterilirken bir öğrencinin doğru açılardan yararlanarak ters açıların birbirine eşitliğini ifade etmesi, üçgenin iç açılarının toplamının  $180^\circ$  olduğunu göstermeye çalışıldığı derste bir öğrencinin tepe açısından paraleller çizmemiz gerektiğini belirtmesi, düzgün çokgenlerin bir iç açısı ve bir dış açısının ölçüsünün nasıl bulunacağı ortaya çıkarıldıktan sonra bir öğrencinin tahtada ispat için ön koşul kabul edilebilecek olan matematiksel sembolleri ve işlemleri kullanarak bir iç açı ile bir dış açının ölçüleri toplamının  $180^\circ$  yaptığını göstermesi, eşkenar dörtgenin alan bağlantısının ispatı yapılırken bir öğrencinin eşkenar dörtgeni dikdörtgene tamamlayarak dikdörtgenin alanından faydalanmamız gerektiğini ifade etmesi, yamuğun alan bağıntısını ispatlamaya çalışılan derste bir öğrencinin yamuğu parçalara ayırma fikri gibi durumlar öğrencilerin ispat düşüncelerindeki gelişmeleri göstermektedir.

Öğrencilerin uygulama aşamasında gösterdikleri performanslara bakıldığında, fırsat sunulduğunda kendi seviyelerine uygun bir şekilde ispat yapmaya başladıkları ve fikirlerini açıklama çabasında oldukları görülmektedir. Ayrıca uygulama aşamasında öğrencilere ödev olarak argümanlar sunulduğunda, ifadeleri analitik ispat şeması düzeyinde ispatlayabildikleri görülmektedir (bkz. Şekil 27, 28). Benzer bir durum öğrenci öğrenme günlüklerinde de görülmektedir. Öğrenciler ders esnasında yaptıkları çıkarım ve arümanları bir başkasına aktarırken matematiksel dil ve sembolleri kullanabilmektedirler (bkz. Şekil 29, 30 ve 31).Tüm bu sonuçlar birlikte değerlendirildiğinde öğrencilerin doğru yönlendirmelerle ve ispat içerikli hazırlanan ders planları ile üst düzey düşünme becerisi geliştirebildikleri ve matematiksel ispat yapabildikleri görülmektedir.

#### 5.4. İBT-2'ye Ait Öğrenci Cevapları

Matematiksel ispatlarla öğrencilerin sıkça karşılaşması onların ispat yapma becerilerini geliştireceği aşikârdır. Bu çalışmanın amaçlarından birisi de 7.sınıf öğrencilerinin ispat içerikli planlarla oluşturulan ders uygulamalarının etkinliğini ortaya çıkarmaktır. Bu amaçla uygulama öncesi İBT-1 ve uygulama sonrası İBT-1 ile benzer içeriklerle oluşturulmuş İBT-2 öğrencilere uygulanmıştır. Uzman görüşü alınarak oluşturulan bu içeriklerin bulgular, öğrencilerin ispat yapma becerilerinin gelişimini ortaya çıkarılmak açısından önemli görülmektedir. İBT-2'ye ait bulgulara bakıldığında öğrencilerin ispat yapma becerilerinden artış olduğu gözlemlenmektedir. İBT-1'e ait Tablolardan elde edilen bulgularda sadece bir öğrencinin bir soru için Kod C olarak sınıflandırıldığı görülürken, İBT-2 bulguları için oluşturulan benzer tablolarda bu durumun bariz bir şekilde değiştiği görülmektedir. Öğrencilerin 1.soru için %21,42'si, 2. ve 3.soru için %35,71'inin, 4.soru için %42,85'inin cevaplarının Kod C olarak sınıflandırıldığı görülmektedir. İBT-1 için bu oranlar 1. 2. ve 4. Soru için %0 iken 3.soru için %7,14 olarak bulunmuştur. Öğrencilerin bir kısmının uygulama sonrasında verilen bir ifadenin doğruluğunu-yanlışlığını- gösterebildiği ve sunulan matematiksel aktivitelerden hangisinin ispat olarak kabul edilebileceğinin farkında olduğu görülmüştür. Uygulamanın etkinliğinin daha iyi anlaşılabilmesi için İBT-1 ve İBT-2'ye ait verilerin, karşılaştırmalı olarak gösterimi Tablo 18, 19, 20 ve 21'de sunulmuştur.

Tablo 18. İBT-1 ve İBT-2 Kod A Sonuçları

| Sorular | İBT-1 Sonuçları |       | İBT-2 Sonuçları |      |
|---------|-----------------|-------|-----------------|------|
|         | F               | %     | F               | %    |
| 1.soru  | 3               | 21,42 | 1               | 7,14 |
| 2.soru  | 1               | 7,14  | 1               | 7,14 |
| 3.soru  | 0               | 0     | 0               | 0    |
| 4.soru  | 3               | 21,42 | 2*              | 0    |

\*Öğrenci cevapları iki farklı kod barındırmaktadır.

Öğrencilerin İBT-1 ve İBT-2 sonuçları Tablo 18 üzerinden incelendiğinde uygulamanın ardından 1. ve 2. soru için Kod A olarak sunulan argümanlarda azalış olduğu görülmektedir. Son soru olan 4.soru için uygulamanın İBT-2 testinde Kod-A olarak

öğrenci cevabı sunulmamasına rağmen (bkz. Şekil 38) iki öğrencinin seçtikleri öğrenci cevaplarının yanına yine Kod-A olarak kodlanacak yanıtlarda vermiş oldukları görülmüştür. Öğrencilerin cevapları kodlanırken seçimini yaptıkları öğrenci cevabının koduna göre kodlanmışlardır. Öğrenciler deneysel argümanı ikna edici bulurken bir otoriteye başvurma eğilimleri de bulunmaktadır.

Tablo 19. İBT-1 ve İBT-2 Kod B Sonuçları

| Sorular | İBT-1 Sonuçları |       | İBT-2 Sonuçları |       |
|---------|-----------------|-------|-----------------|-------|
|         | F               | %     | F               | %     |
| 1.soru  | 2               | 14,28 | 1               | 7,14  |
| 2.soru  | 0               | 0     | 2               | 14,28 |
| 3.soru  | 0               | 0     | 0               | 0     |
| 4.soru  | 5               | 35,71 | 7               | 50    |

Öğrencilerin İBT-1 ve İBT-2 sonuçları Tablo 19 üzerinden incelendiğinde uygulamanın ardından 1. soru için Kod B olarak sunulan argümanlarda azalış olduğu görülürken, 2.soru için deneysel şemalarda artış olduğu görülmektedir. Öğrencilerden 2.soru için İBT-1’de herhangi bir veri alınamazken deneysel aşamaya geçilmesi araştırmacı tarafından olumlu görülmektedir. Kod B olarak kodlanan öğrenci cevapları 4.soru için artış gösterdiği görülmektedir. Bu durumda öğrencilerin bir kısmının hala örneklerle daha çabuk ikna oldukları ve örnekleri daha ikna edici bulduklarını göstermektedir.

Tablo 20. İBT-1 ve İBT-2 Kod D Sonuçları

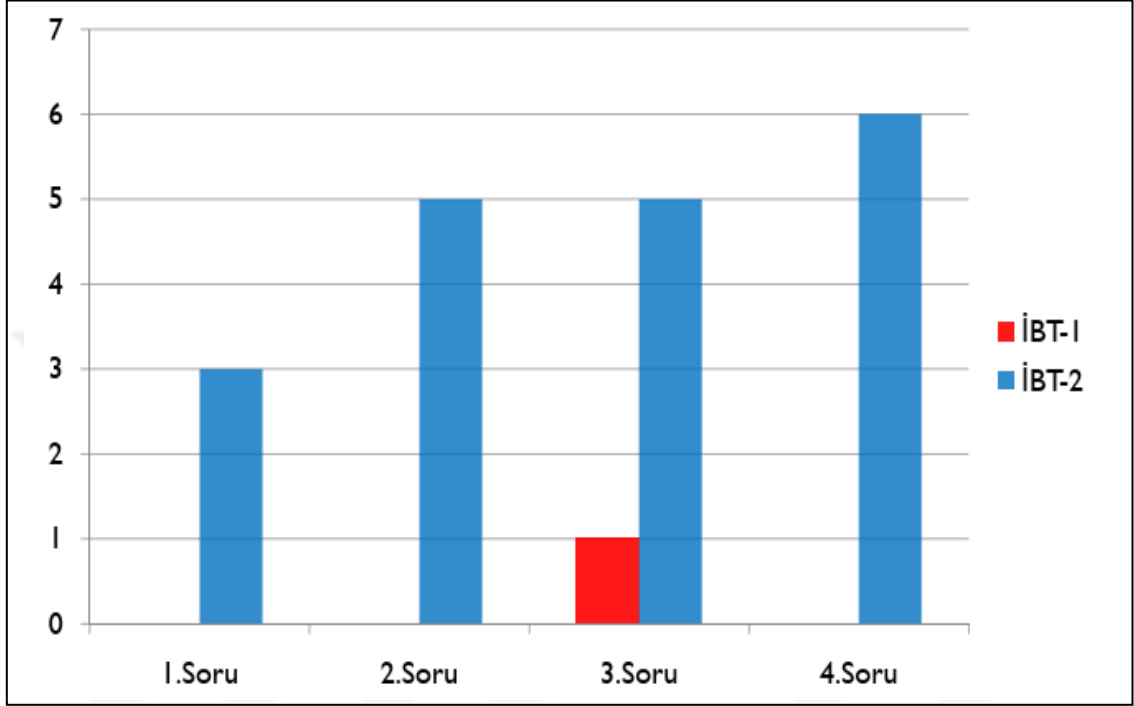
| Sorular | İBT-1 Sonuçları |       | İBT-2 Sonuçları |       |
|---------|-----------------|-------|-----------------|-------|
|         | F               | %     | F               | %     |
| 1.soru  | 9               | 64,28 | 9               | 64,28 |
| 2.soru  | 13              | 92,85 | 6               | 42,85 |
| 3.soru  | 13              | 92,85 | 9               | 64,28 |
| 4.soru  | 6               | 42,85 | 1               | 7,14  |

Tablo 21. İBT-1 ve İBT-2 Kod C Sonuçları

| Sorular | İBT-1 Sonuçları |      | İBT-2 Sonuçları |       |
|---------|-----------------|------|-----------------|-------|
|         | F               | %    | F               | %     |
| 1.soru  | 0               | 0    | 3               | 21,42 |
| 2.soru  | 0               | 0    | 5               | 35,71 |
| 3.soru  | 1               | 7,14 | 5               | 35,71 |
| 4.soru  | 0               | 0    | 6               | 42,85 |

Öğrencilerin Kod D olarak sundukları matematiksel aktivitelerin sayısı 1.soru için aynı kalırken; 2, 3 ve 4.soru için bu oranın azaldığı görülmektedir. Bu durum da öğrencilerin ifadelerle eksik veya yanlış argüman sunmalarının ve ifadeyi argüman sunmayarak kaçınmalarının azaldığını göstermektedir.

Öğrencilerin benzer testlere verdikleri cevaplara ait bu farklılığın uygulamanın etkililiğinden kaynaklandığını söylemek yanlış olmayacaktır. Tablo 21 ve Şekil 41, olanak sağlandığında 7.sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanında ispat yapabileceklerini göstermektedir. Uygun öğrenme ortamı ve yeterli sözel yönlendirmelerle öğrencilerin ispat yapabildiğinin görülmesi bu çalışmanın en önemli bulguları arasında yer almaktadır. Tablo 21'in grafik hali Şekil 42'de sunulmuştur.



Şekil 42. İBT-1 ve İBT-2 Kod C Sonuçlarına Ait Grafik

Öğrencilerin İBT-1 sonuçlarına bakıldığında sadece 1 argümanın Kod C olarak kodlandığı görülürken uygulama ardından gerçekleştirilen İBT-2 sonuçlarında bu sayının 19'a çıktığı görülmektedir. Soru bazından bakıldığında; 1 ve 2. sorularda öğrencilerden verilen bir ifadeyi neden doğru olduğunu açıklamaları beklenmiştir ve uygulama öncesinde elde edilen verilere göre öğrenciler verilen bir ifadenin doğruluğunu göstermede zorlanmışlardır. Karşıt örnek vererek bir ifadenin yanlışlığını göstermeleri beklenen 3.soruda sadece Kod C düzeyinde bir argüman tespit edilmiştir. Yine verilen ifadelerden hangisi/hangilerinin ispat olarak kabul edeceklerini belirlemeleri istenilen 4. soruda öğrencilerin hiç birinin verilen ifadenin ispat olarak kabul edileceğini belirleyemedikleri görülmüştür. Bu durum öğrencilerin mevcut durumunun muhakeme ve ispat becerileri bakımından yeterli olmadığını göstermektedir. İBT-2 sonuçlarında ise her bir soru çeşidinde Kod C düzeyinde argümanlar elde edildiği, mevcut durumun daha iyi bir noktaya geldiği görülmektedir. Bu durum öğrencilerin ispat ders planı uygulamaları ile mevcut ispat yapma becerilerini geliştirdiklerini göstermektedir. Öğrencilerin matematik öğrenmelerinin uygulama aşamasına kadar olan bölümü düşünüldüğünde hem ders kitaplarında hem de öğrenmeleri beklenen kazanımlarda ispat ve muhakeme aktivitelerine yeterince rastlanılmadığı görülmektedir. Uygulama için hazırlanan ders planlarının içeriğinin

öğrencilere bir kavramı veya bir matematiksel aktiviteyi doğrudan vermek yerine nedenleri ile birlikte matematiksel kesinliklerle açıklanmaya çalışılmasının, bireylerin ispat becerilerinde etkili olduğu söylenebilir. Nitekim NCTM (2000), ispatın matematik dersinin ayrılmaz doğal bir bileşeni olduğunun önemini belirtmektedir. Çalışmanın sonuçları Aylar'ın (2014) çalışmasına ait sonuçlarla örtüşmektedir.

### 5.5. Öğrencilerin İspata Yönelik Görüşleri

Çalışmanın elde edilen önemli sonuçlarından birisi de öğrencilerin ispata yönelik tutumlarının belirlenmesidir. Öğrencilerin ispat yapmaya, ispatın gerekliliğine ve ispatın keyifli olup olmadığına dair fikirleri onların ispat yağma becerilerine etki edeceği aşikârdır. Öğrencilerin uygulamanın ardından ispata yönelik görüşlerinin olumlu olduğu söylenilebilir (bkz. Tablo 17). Bazı öğrenciler ispat yaparken örnek vermenin yeterli olmayacağını düşünürken iki öğrenci örnek vermenin ifadenin yanlışlığını göstermek için kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin örnek vermenin ispat sayılmayacağını idrak etmeleri, sadece yanlış bir ifade için örnek verebileceklerini söylemeleri çalışmanın bulguları açısından önemli görülmektedir. Bu bulgu öğrencilerin ispat yaparken örneği ne zaman kullanabileceklerinin farkında olduklarını göstermektedir. Yarı yapılandırılmış görüşmelere katılan tüm öğrencilerin ortak olduğu fikir ispatın matematik öğrenmek için gerekli olduğu görüşüdür. İspatın gerekliliğini ise bir ifadenin doğruluğunun ya da yanlışlığının nedenini göstermesine bağlamaktadırlar. Bir öğrencinin ispatın gerekliliği ile ilgili olarak;  $2+2$  için ispat gerekli değil ama üçgenin iç açıları ile dış açıları arasındaki bağlantı için gerekli olduğunu belirtmesi öğrencilerde aksiyomatik yapının da oluşmaya başladığını göstermektedir. Öğrencilerde gözlemlenen bir diğer durum ise oluşturdukları argümanları karşılarındakilere anlatabilmek için gerekli olduğu düşüncesidir. Bir öğrencinin “*bir kişiyi ikna edemiyoruz ikna etmek için matematiksel verileri kullanmamız doğru bir yol*” söylemi bunu destekler niteliktedir. Öğrencilerin ispat yapmakta zorlanmalarına sebep olan durumun, daha önceden bu tür aktivitelerle karşılaşmadıkları gösterilebilir. Harf ve semboller yerine daha çok sayısal içeriklerle harmanlanan ders kitapları ve ders içerikleri de bu duruma neden olmaktadır. Öğrencilerin ispata yönelik tutumları genel olarak olumlu olduğu ortaya çıkmıştır. Bir öğrenci yeni şeyler öğrenmenin keyifli olduğunu belirtirken, bir başka öğrenci bu tür içeriklerin diğer matematik öğrenme alanlarında da öğrenmek istediğini belirtmesi bu olumlu tutuma örnek olarak gösterilebilir.

### 5.6. Özet

7.Sınıf ders kitaplarının ispat bağlamında incelendiği ve geometri öğrenme alanına ait öğrenci ispat becerilerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu çalışmada elde edilen ilk sonuç 7.sınıf ders kitaplarının istenilen düzeyde ispat potansiyeli barındıran aktivitelerle yer vermediği olmuştur. İncelenen 134 aktivitenin sadece 7'sinin istenilen ispat içeriğine sahip olması, ispatın giderek önem kazandığı bu dönemde yeterli görülmemektedir. NCTM'in (2000) anaokulundan lise son sınıfa kadar ispat içerikli

matematiğin öğrencilerle buluşturulması gerektiğini belirtirken incelenen ders kitabının bu içeriklerden çok azına sahip olması, öğrencilerin matematiği anlamlandırabilmelerinin önüne geçmektedir. İspatın öğrencilere aktarılması önemli bir süreç olup bunun en önemli kaynağı ders kitaplarıdır (Doğan, 2019). Matematik bilimi için bir ifadenin doğruluğu ya da yanlışlığı ispat ile mümkün olmaktadır. Öğrencilere ders kitaplarında sunulacak her bir ifadeyi kendi muhakeme biçimleri ile irdelemeleri, argümanlar oluşturmaları, oluşturdukları argümanları başkalarına aktarabilmeleri beklenmektedir. Ders kitaplarının içeriğinin bu amaç doğrultusunda düzenlenmesi matematik öğretimi adına önem arz etmektedir.

Matematiksel kavramların ve ifadelerin daha kalıcı bir biçimde öğrenilmesi için ispat olmazsa olmazdır. Son zamanlarda yapılan eğitsel reformlarda matematiksel ispatın öneminin giderek arttığı belirtilmektedir (CCSSI, 2010; NCTM, 2000). Öyle ki öğrencilerin ispatın ne anlama geldiğini bilmediklerinde, matematiğe dair bir şeyler bildikleri söylenemeyecektir (Hanna, 2000). İspatın matematik öğrenimi için bu kadar önemli olmasına karşın alanyazı incelendiğinde öğrencilerin ispat yapmakta zorlandıkları görülmektedir (Balacheff, 1991; Dede ve Karakuş, 2014; Uğurel ve Morali, 2010). 7.Sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanına ait ispat becerilerinin incelendiği bu çalışmada da öğrencilerin ispat yapmakta zorlandıkları görülmüştür. Uygulama öncesi yapılan İBT-1'e ait verilere bakıldığında öğrencilerin hemen hemen hiç birinin analitik düzeyde ispat yapamadığı sadece bir öğrencinin aksine örnek vererek bir ifadenin yanlışlığını gösterdiği görülmektedir. Bu sonuçlar yapılan benzer çalışmaların sonuçları ile de örtüşmektedir (Çalışkan, 2012; Harel ve Sowder, 1998; Knuth vd., 2012; Zaimoğlu, 2012). Öğrencilerin ilk olarak ortaöğretim seviyesinde ispat ile karşılaşmaları, öncesinde herhangi bir ispat aktivitesi ile etkileşime geçmemeleri ilerleyen yıllarda ispata yönelik olumsuz tutum geliştirmelerine ve ispat yapmakta zorlanmalarına neden olmaktadır. Çalışmanın uygulama öncesinde elde edilen veriler hali hazırda öğrencilerin ispata dair herhangi bir fikirlerinin olmadığı, harf ve sembolleri kullanamadıkları, geometri öğrenme alanına ait birçok kavram yanılgısı taşıdıkları ve bunun sonucunda da ispat yapamadıkları görülmüştür. Öğrencilerin uygulama sonrasında İBT-2 için verdikleri yanıtlar ışığında ispat içerikli ders planı uygulamalarının öğrencilerin ispat becerilerindeki gelişimini desteklediği görülmektedir. Çünkü İBT-1 ve İBT-2 sonuçlarının karşılaştırıldığı Tablo 20'ye bakıldığında öğrencilerin argüman üretmeye başladıkları görülmektedir. Aynı zamanda ders planı uygulaması sırasında, oluşturdukları argümanları bir başkasına aktarabilmeleri de olumlu sonuçlar arasında görülmüştür. Çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunun ispat yapmayı keyifli bulmaları ispata yönelik olumlu bir tutum içerisinde olduklarını göstermektedir. Bazı öğrencilerin farklı öğrenme alanları için de bu tarz ispat içerikli derslerin yapılmasını istediklerini belirtmeleri önemli görülmektedir. Öğrencilerin matematiksel kavram ve ifadeleri ezberlemelerinin önüne geçmek ve kalıcı öğrenme sağlamak için öğrencilerin ikna olmaları gerekmektedir. Uygulama öncesinde örnek vererek bir ifadeyi doğrulama eğiliminde olan öğrencilerin uygulama sonrasında örnek vermenin yeterli olmayacağı görüşünde olmaları üst düzey bilişsel düşünme becerisi kazanmaya başladıklarını göstermektedir. Sınırlı bir sınıf

seviyesi ve sınırlı bir öğrenme ile yürütülen bu çalışmada sonuç olarak; uygun öğrenme ortamları oluşturulduğunda öğrenciler istenilen düzeyde ispat yapabilme, sundukları argümanları değerlendirebilme, başkaları tarafından sunulan argümanları irdeleyebilme becerileri kazanabildiği görülmektedir. Bu sonuç erken yaşta öğrencilerin ispat yapabileceğini belirten çalışmalarla da örtüşmektedir (Ball ve Bass, 2003; Lannin, 2003; Maher ve Martino, 1996; Stylianides ve Ball, 2008; Stylianides ve Stylianides, 2008).



## 6. ÖNERİLER

7.Sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanına ait muhakeme ve ispat yapma becerilerinin ana amaç olarak belirlenmeye çalışıldığı bu çalışmanın bulgularına göre sunulacak öneriler şu şekildedir:

- Öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerinin gelişimi, muhakeme ve ispat içerikleri ile etkileşimde bulunma fırsatı ile doğru orantılıdır. 7.Sınıf matematik ders kitabının geometri öğrenme alanı yeterince muhakeme ve ispat içeriğine sahip olmadığından kitap yazarlarının ve MEB'in ders kitaplarındaki ispat içeriğini arttırmalarının öğrencilerin matematiği anlamlandırmalarına katkı sağlayacağı,
- OMDÖP kazanımlarına bakıldığında muhakeme ve ispata dair herhangi bir terimin bulunmaması öğrencilerin ispatı tanımlamada ve ispat yapmalarında ve ilerleyen yıllarda da ispat yaparken zorlanmalarına neden olacağı aşîkârdır. Bu sebepten kazanımların öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerini arttıracak şekilde yeniden düzenlenmesi,
- Öğrencilerin uygulama öncesi bir ifadenin doğru veya yanlış olduğunu göstermede, verilen bir ifade içinden hangi/hangilerinin ispat olarak kabul edilebileceğini seçmede yetersiz oldukları, uygulama sonrası ise muhakeme ve ispat becerilerinde artış gözlemlendiğinden ders içeriklerinin öğrencilerin ispat yapma potansiyellerini arttıracak şekilde belirlenmesi,
- Yapılan bu çalışma ile sadece 7.sınıf geometri öğrenme alanına ait ispat becerileri incelenmiş diğer öğrenme alanları için yapılacak farklı uygulamaların başka çalışmalarla ortaya çıkarılabileceğı,
- Yine yapılan çalışma sadece 7.sınıf düzeyinde olup, diğer sınıf düzeyleri içinde benzer veya farklı çalışmaların yapılabileceğı önerilmektedir.

## KAYNAKÇA

- Akman, G. N. (2014). Nicel ve nitel araştırma yöntemleri. *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Çay Meslek Yüksekokul, İşletme Yönetimi Programı, Yönetim ve Organizasyon Bölümü*.
- Aksoy, N. (2003). Eylem Araştırması: Eğitimsel Uygulamaları İyileştirme ve Değiştirmede Kullanılacak Bir Yöntem, *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi*, 36, 474-489.
- Albayrak Bahtiyari, Ö. (2010). 8. Sınıf Matematik Öğretiminde İspat Ve Muhakeme Kavramlarının Ve Önemlerinin Farkındalığı, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Erzurum.
- Almeida, D. (2000). *A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(6), 869-890.
- Almeida, D. (2003). “Engendering Proof Attitudes: Can The Genesis of Mathematical Knowledge Teach Us Anything?”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Altıparmak, K., & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.
- Altun, M. (2007). *Eğitim Fakülteleri ve Matematik Öğretmenleri İçin Ortaöğretimde Matematik Öğretimi*, Bursa: Alfa Aktüel Yayınevi.
- Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. In P. Boero (Ed.), (pp. 27-42). *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers. Rotterdam, The Netherlands.
- Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Doktora Tezi Bursa.
- Arslan, S., & Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156).
- Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.
- Aylar, E., & Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(3), 559-579.

- Ayyıldız, N., & Altun, S. (2013). Matematik dersine ilişkin kavram yanlışlarının giderilmesinde öğrenme günlüklerinin etkisinin incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(2), 71-86.
- Azzolino, A. (1990). Writing as a tool for teaching mathematics: The silent revolution. In T. J. Cooney & C. R. Hirsh (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s, 1990 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (pp. 92-100). Reston, VA: NCTM.
- Bagley, T., & Gallenberger, C. (1992). Assessing students' dispositions: Using journal to improve students' performance. *Mathematics Teacher*, 85, 660-663.
- Baki, A. (2001). Bilişim teknolojisi ışığı altında matematik eğitiminin değerlendirilmesi. *Milli eğitim dergisi*, 149(1), 26-31.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.
- Bahtiyari, Ö. (2010). 8. Sınıf Matematik Öğretiminde İspat ve Muhakeme Kavramlarının ve Önemlerinin Farkındalığı. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Erzurum.
- Baki, A. (2020). *Matematiği Öğretme Bilgisi*. Pegem Akademi, Ankara.
- Baki, A. (2020). *Matematik Tarihi ve Felsefesi*. Pegem Akademi, Ankara.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers, and children* (pp.216-238). London: Hodder & Stoughton.
- Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 173-192). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Ball, D. L., Hoyle, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). *The teaching of proof*. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27-44.
- Bayazit, İ. (2017). İspat'ın önemi ve ispat konusundaki öğretmen yeterliklerinin incelenmesi. *Electronic Turkish Studies*, 12(14).
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof – explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

- Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, 71-80.
- Birinci, K. S. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının ispatlama performanslarının süreç-nesne ilişkisi açısından incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2019). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Pegem Yayınları, Ankara.
- Filiz, S., & Ergan, S. N. (2020). İlkokul Matematik Dersi Öğretim Programının Beş Süreç Standardına Göre Değerlendirilmesi. *Ordu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Sosyal Bilimler Araştırmaları Dergisi*, 10(2), 464-477.
- CadwalladerOlsker, T. (2011). What Do We Mean By Mathematical Proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33- 60.
- Cai, J., Wang, N., Moyer, J. C., Wang, C., & Nie, B. (2011). Longitudinal investigation of the curriculum effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal Project. *International Journal of Educational Research*, 50(2), 117–136.
- Cai, J., & Howson, A. G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & K. S. F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education research*(pp. 949–978). Springer.
- Çalışkan, Ç. (2012). *8.sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi*. Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Bursa.
- Chapman, K. P. (1996). Journals: Pathways to thinking in second-year algebra. *Mathematics Teacher*, 89, 588-90.
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). Common Core State Standards for mathematics. Retrieved from [https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math\\_Standards1.pdf](https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf)
- Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalar*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.
- Creswell, J. W. (2016). *Nitel Araştırma Yöntemleri*. (Çeviri editörleri: Mesut BÜTÜN ve Selçuk Beşir DEMİR). Ankara: Siyasal Kitapevi.
- Cyr, S. (2011). Development of beginning skills in proving and proof writing by elementary school students. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-10).

- Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel İspat Kavramına Pedagojik Bir Bakış: Kuramsal Bir Çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi* 4(2), 47-71.
- Dougherty, B., J. (1996). The write way: A look at journal writing in first-year algebra. *Mathematics Teacher*, 89, 556-60.
- Doğan, M. F. (2019). Sekizinci sınıf matematik ders kitabındaki matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(2), 601-618.
- Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Doruk, M., & Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2014(3), 71-93.
- Duatepe, A. (2016). van Hiele geometrik düşünme düzeyleri. Bingölbali, E., Arslan, S., & Zembat, İ.Ö. (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler içinde* (ss. 265-275) Ankara: Pegem Akademi.
- Duatepe, A. (2004). *The effects of drama based instruction on seventh grade students' geometry achievement, van hiele geometric thinking levels, attitude toward mathematics and geometry* [Ph.D. - Doctoral Program]. Middle East Technical University.
- Eker, C., & Coşkun, I. (2012). Ders günlüğü yazmanın ilkököl 4. sınıf öğrencilerinin sosyal bilgiler dersi akademik başarılarına etkisi. *Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 29, 111-122.
- Ersoy, H. (2016). Durum Çalışması. Özden, M., Durdu, L. (Ed.). *Eğitimde Üretim Tabanlı Çalışmalar için Nitel Araştırma Yöntemleri içinde* (ss. 4-18). Ankara: Anı Yayıncılık
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *Zdm*, 45, 633-646.
- Ferrance, E. (2000). Themes in Education. *Action Research*. LAB. A Program of the Education Alliance. Northeast and Islands Regional Educational Laboratory at Brown University.
- Flores, A. (2006). "How Do Students Know What They Learn in Middle School Mathematics Is True?". *School Science and Mathematics*, 106(3), 124-132.
- Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.

- Gökkurt, B., Deniz, D., Akgün, L., & Soylu, Y. (2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Başkent University Journal of Education*, 1(1), 55-63.
- Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Güven, B., Çelik D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki Çocukların Matematiksel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi, *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 316, 35– 45.
- Grenier, D. (2000). 'Learning proof and modelling. *Inventory of teaching practice and new problems*', A paper presented at topic study group on Proof and Proving in Mathematics Education, ICME, 9.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof, *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.
- Hanna, G. (2008, 5–8 March). Beyond Verification: Proof Can Teach New Methods. *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI*, Rome.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic
- Hanna, G., & de Bruyn, Y. (1999). Opportunity to learn proof in Ontario grade twelve mathematics texts. *Ontario Mathematics Gazette*, 37(4), 23-29.
- Hatip, K., & Demircioğlu, H. (2022). Examination of 8th Grade Students' Geometric Proof Writing and Justification Skills. *Uluslararası Türk Dünyası Eğitim Bilimleri Kongresi Bildiri Kitabı*, 54.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842.

- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.
- Howson, G., Keitel, C., & Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Jones, K. (2000). The Student Experience of Mathematical Proof at University Level, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53–60.
- Kaplan, A., Doruk, M., Öztürk, M., & Duran, M. (2016). Matematik ve matematik eğitimi öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşleri arasında fark var mıdır?. *Journal of Human Sciences*, 13(3), 6020-6037.
- Karakuş F., & Korkutan, E. Ortaokul Matematik Ders Kitaplarında Geometri ve Ölçme Konularına Yönelik Yapılan İspatların Muhakeme ve İspat Analitik Çerçevesi Kapsamında İncelenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(1), 1-16.
- Karasar, N. (2005). *Bilimsel araştırma yöntemi*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Kılıç, H. (2013). Lise öğrencilerinin geometrik düşünme, problem çözme ve ispat becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1).
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in The Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61–88.
- Knuth, E.J., Slaughter, M., Chooppin, J., & Sutherland, J. (2002). Mapping The Conceptual Terrain of Middle School Students' Competencies in Justifying and Proving, In S. Mewborn, P.Sztajn, D.Y.White, H.G. Wiegel, R.L.Bryant & K.Nooney (Eds.) *Proceedings of the 24th Meeting for PME-NA*, 4:1693-1700. Athens, GA.
- Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Proof: Examples and beyond. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15, 206–211.
- Köğce, D. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile görüşleri ve ispat düzeyleri. *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 27-30.
- Köklü, N. (2001). Eğitim eylem araştırması – öğretmen araştırması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 34(1-2), 35-43.
- Kuzu, A. (2009). Öğretmen Yetiştirme ve Mesleki Gelişimde Eylem Araştırması. *The Journal of International Social Research*, 2(6), 425-433.

- Küchemann, D., & Hoyles, C. (2005). Pupils' Awareness of Structure on Two Number/Algebra Questions, In Marianna Bosch (ed) *Proceedings of the Fourth Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (CEMRE 4). Spain. 438–447.
- Kümbetoğlu, B. (2005). *Sosyolojide ve Antropolojide Niteliksel Yöntem ve Araştırma*. İstanbul : Bağlam Yayıncılık.
- Lannin, J. K. (2003). Algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 342–348.
- Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194–214.
- Mansi, K. E. (2003). *Reasoning and Geometric Proof in Mathematics Education: A Review of the Literature*, Degree of Master of Science, North Carolina State University.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future*(pp. 173-204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- McCorry, R., & Stylianides, A. J. (2014). Reasoning-and-proving in mathematics textbooks for prospective elementary teachers. *International Journal of Educational Research*, 64, 119-131.
- McKernan, J. (2013). *Curriculum action research: A handbook of methods and resources for the reflective practitioner*. Routledge.
- MEB (2013). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı*(5,6, 7 ve 8. sınıflar). Ankara: MEB.
- MEB (2018). *Matematik dersi (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- MEB (2022). *Ortaokul matematik ders kitabı 7.sınıf*. Ankara: MEB Yayınları.
- Meel, D. (1999). Email dialogue journals in a college calculus classroom: A look at the implementation and benefits. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 18(4), 387-413.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 41, 47-68.

- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- Moon, J. (2010). Learning journals and logs. *Centre for Teaching and Learning*.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.
- Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 341-344.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council for Teachers of Mathematics [NCTM].(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Newton, D. P., & Newton, L. D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom?. *Educational Studies in Mathematics*, 64(1), 69-84.
- Irmak, H. (2008). *Soyut Matematik*, Ankara: Pegem Akademi.
- İskenderoğlu, T., Baki, A., & Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1).
- Özdemir, M. (2010). Nitel Veri Analizi: Sosyal Bilimlerde Yöntembilim Sorunsalı Üzerine Bir Çalışma. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 11(1), 323-343.
- Özdemir, E., Dikici, R., & Kültür, M. N. (2015). Öğrencilerin örüntüleri genelleme süreçleri: 7. Sınıf örneği. *K. Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 523-548.
- Özer, Ö., & Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 2, 1083-10989.
- Öztürk, M. (2017). *Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin bilişsel açısından incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (çev. Bütün, M, Beşir Demir S). Ankara: Pegem Akademi.
- Polya, G. (1981). Mathematical Discovery on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving, *Volumes I and II*. Wiley.

- Porteous, K. (1990). What do children really believe?. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 589-598.
- Raman, M. J. (2002). *Proof and Justification in Collegiate Calculus*. Doctoral dissertation, University of California: Berkeley.
- Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education Research, Learning and Teaching*, Sense Publishers: Rotterdam.
- Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 105(3), 252-255.
- Rossi, R. J. (2006), *Theorems, Corollaries, Lemmas and Methods of Proof*, Wiley-Interscience, USA.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., & Wolfe, R. G. (2002). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword: The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. xii-xvi). New York, NY: Routledge.
- Selden, J., & Selden, A. (2009). Understanding The Proof Construction Process. In F.-L Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Vol. 2. (pp. 196-201). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Senk, S. L., & Thompson, D. R. (2003). *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students learn?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 3-31.
- Smith, M.S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.
- Stacey, K. Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.
- Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics*, 72(3), 271-288.
- Stein, M.K., Smith, M.S., & Remillard, J. (2007). How curriculum influences student learning. In Lester, F.K.(Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-370). Greenwich, CT: Information Age Publishing,

- Stylianides A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.
- Stylianides, G. (2010). Engaging secondary students in reasoning and proving. *Mathematics Teaching*, 129, 39-44.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.
- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, 11, 307-332.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103-133.
- Stylianides, G.J., Stylianides, A.J., & Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *J Math Teacher Educ.* 10:145-166
- Şengül, S., & Kırıl, B. (2023). Matematik Ders Kitaplarında Matematiksel Akıl Yürütme ve İspat. *Yaşadıkça Eğitim*, 37(2), 508-530.
- Şimşek, H., & Yıldırım, A. (2003). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Zeybek Şimşek, Z., & Kılıçoğlu, E. (2022). Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı Kazanımlarının Süreç Standartları Kapsamında İncelenmesi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, 13(2), 1440-1459. <https://doi.org/10.51460/baebd.1189260>
- Tall, D. O. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holland, 3-21.
- Tall, D. O. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?, In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around The World*, 4, 117-136.
- Tall, D., & Mejia-Ramos, J. P. (2006, November). The long-term cognitive development of different types of reasoning and proof. In *Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 1-11).

- Taştepe, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi* (Doctoral dissertation, Marmara Üniversitesi (Turkey)).
- Türk Dil Kurumu [TDK]. (2005). *Türkçe Sözlük*. Türk Dil Kurumu Yayınları: 549, Türk Dil Kurumu, 4. Akşam Sanat Okulu Matbaası, Ankara.
- Tucker, T. W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary issues in mathematics education*, 36, 31-35.
- Tuncer, G. (2014). *Matematik bölümü öğrencilerinin ispat algıları*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Uğurel, I., & Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıfcı tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135-154.
- Uygur Kabael, T.(2020). İspat yapma yöntemleri. In I Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış*, (ss. 227-242). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Umay, A. (2003). Matematiksel Muhakeme Yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(24).
- Umay, A., & Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(28).
- Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: Gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight. *A Theory of Mathematics Education*. Orlando, Florida. Academic Pres. U.S.A.
- Vatandaş, B. (2022). *Üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* (Master's thesis, Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Van De Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim*(Çev. S. Durmuş). Nobel.
- Waring, S. (2000). *Can You Prove It? Develoing Concept of Proof in Primary and Secondary School*, The Mathematical Association, UK.

- Yeşildere, S., & Türnüklü, E. B. (2007). Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181–213.
- Yeşildere, S., & Türnüklü, E. B. (2008). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin bilgi oluşturma süreçlerinin matematiksel güçlerine göre incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 21(2).
- Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum
- Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel Düşünme*, İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. 2016. *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. 10. Baskı., Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.
- Zeybek, Z., Üstün, A., & Birol, A. (2018). Matematiksel İspatların Ortaokul Matematik Ders Kitaplarındaki Yeri. *İlköğretim Online*, 17(3).
- Zeybek Şimşek, Z., & Üstün, A. (2019). 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitim Dergisi*, 13(1), 196-216.

## EKLER

### Ek 1. Veli İzin Formu

Sayın Veli:

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, “7.sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanındaki ispat becerilerinin incelenmesi ve ispat ders planı uygulamaları” adıyla, 1 Mart 2023 – 1 Temmuz 2023 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

**Araştırmanın Hedefi:** Araştırma 7.sınıf öğrencileri ile ders kapsamında yapılacaktır. Kazanımlar MEB müfredatı ile uyumlu olacaktır. Araştırmada öğrencilerin, çokgenler öğrenme alanı ile sınırlı olacak şekilde matematiksel ispat yapmayı öğrenmeleri hedeflenmektedir.

**Araştırma Uygulaması:** Anket / Görüşme / Gözlem şeklindedir.

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı’nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleştirilmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamada ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağımı söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı :

İletişim bilgileri :

***Velisi bulunduğum ..... sınıfı ..... numaralı öğrencisi .....  
.....’in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum.  
(Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz\*).***

.../.../.....

İsim-Soy İsim İmza:

Veli Adı-Soyadı :

Telefon Numarası :

## Ek 2. Araştırma İzni

T.C.  
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ARAŞTIRMALARI  
ETİK KURULU KARARLARI

| KARAR TARİHİ | OTURUM NO | KARAR SAYISI |
|--------------|-----------|--------------|
| 29.12.2022   | 16        | 01-60        |

Üniversitemiz Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Etik Kurul Başkanı Prof. Dr. Eren YÜRÜDÜR başkanlığında toplandı.

**KARAR 16.51-** Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğünün 12.12.2022 tarih ve 238600 sayılı yazısı görüşüldü.

Aşağıda bilgileri yer alan araştırmacıların yapmak istediğı uygulamaların ve kullanacağı veri toplama araçlarının etik açıdan uygunluğuna oy birliği ile karar verildi.

|                        |                                                                                                                      |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ÇALIŞMANIN TÜRÜ        | Yüksek Lisans Tezi                                                                                                   |
| BAŞLIK                 | 7. Sınıf Öğrencilerinin Geometri Öğrenme Alanındaki İspat Becerilerinin İncelenmesi ve İspat Ders Planı Uygulamaları |
| TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ/ YAZARI | Emre DÖNMEZ (Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı)                                                       |
| RAPORTÖR GÖRÜŞÜ        | OLUMLU                                                                                                               |

### Ek 3. Örnek Ders Planı

#### GEOMETRİ ÖĞRENME ALANI İSPAT DERS PLAN-8

**Dersin Adı:** Matematik

**Sınıf:** 7. Sınıf

**Ders Süresi:** 1 saat

**Kazanım:** Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarını belirler; iç açılarının ve dış açılarının ölçüleri toplamını hesaplar.

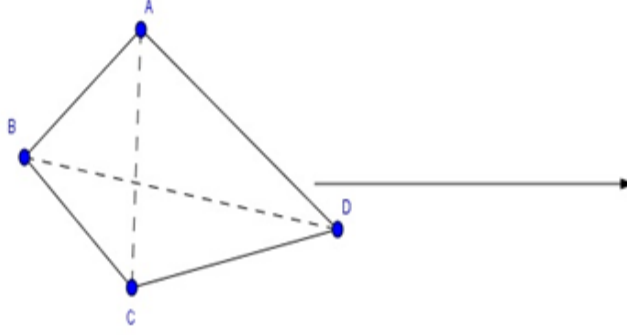
**Amaç:** Bir çokgende bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısının  $(n-3)$  olduğunu ve bir çokgenin toplam köşegen sayısının  $\frac{n \times (n-3)}{2}$  bağlantısı ile bulunabileceğini gösterir.

#### *Giriş:*

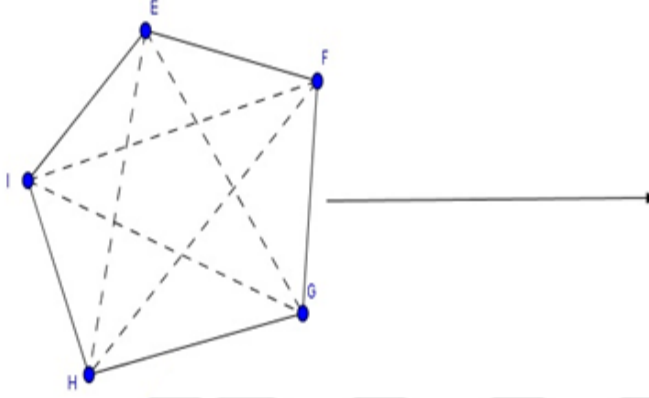
Öğrencilerin daha önceki öğrenmelerini ve hazır bulunuşluklarını belirlemek için; “Köşegenin tanımını yapmak isteyen var mı?” sorusu sorulur. Gelen cevaplar dinlendikten sonra köşegenin tanımının; “ardışık olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçası” olduğu söylenir. Daha sonra ise öğrencilere; “Peki çokgenlerin kaç köşegeni olduğunu bulabileceğimiz bir bağlantı oluşturmak istesek, örneğin sekizgenin kaç tane köşegeni olduğunu ya da daha fazla kenara sahip bir çokgenin kaç köşegeni olduğunu nasıl bulabiliriz?” sorusu yöneltilir ve öğrenci cevapları dinlendikten sonra gelişme aşamasında bunun nasıl gösterileceği anlatılır.

#### *Gelişme:*

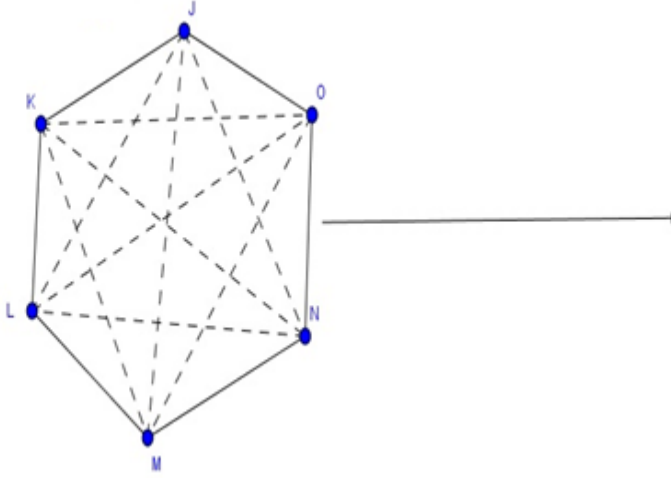
Öğrencilere ek-1 çalışma kağıdı verilerek orda bulunan dörtgen, beşgen ve altıgenlerin köşegenlerini çizmeleri istenir. Yine ek-2 çalışma kağıdı dağıtılarak buldukları sonuçlarla çalışma kağıdındaki tabloyu doldurmaları söylenir. Tablo doldurmadan önce öğrencilere: “Üçgenin kaç tane köşegeni var?” sorusu sorulur. Öğrenciler cevap vermekte zorlanırsalar köşegen tanımı hatırlatılır. Üçgenin tüm köşelerinin birbirinin ardışığı olduğu, köşegen çizebilmek için ardışık olmayan en az bir tane köşeye ihtiyacımızın olduğu, üçgenin bu duruma sahip olmadığı üçgen çizdirilerek öğrencilere fark ettirilir.



- ✓ Dörtgenin bir köşesinden 1 tane köşegen çizilebiliyor.
- ✓ Toplam köşegen sayısı ise 2.



- ✓ Beşgenin bir köşesinden 2 tane köşegen çizilebiliyor.
- ✓ Toplam köşegen sayısı ise 5.



- ✓ Altıgenin bir köşesinden 3 tane köşegen çizilebiliyor.
- ✓ Toplam köşegen sayısı ise 9.

Burada öğrenciler genelleştirme yapmakta zorlanabilirler. Bunun için tahtaya altıgen örneği çizilerek her köşeden çıkan köşegenleri toplamaları söylenebilir.

|                 |   |                |
|-----------------|---|----------------|
| K köşesi 3 tane | } | Toplam 18 tane |
| L köşesi 3 tane |   |                |
| M köşesi 3 tane |   |                |
| N köşesi 3 tane |   |                |
| O köşesi 3 tane |   |                |
| J köşesi 3 tane |   |                |

Daha sonra şu soru sorulur: "Peki ben burada K köşesinden N köşesine çizdiğim köşegen ile N köşesinden K köşesine çizdiğim köşegen aynı değil mi?", "Yani 18 tane köşegen çıktı diyoruz ama çizdiğimiz köşegen sayısını 2 defa sayıyoruz. Gerçek köşegen sayısını nasıl bulabiliriz?" gibi sorularla öğrencilerden bir köşeden çizilen köşegenlerin her bir köşe için aynı sayıda olduğu ve her köşeden çıkan köşegenleri toplayıp yarısını aldığımızda çokgenin köşegen sayısını bulabildiğimiz fark ettirilir.

Eğer yeterli algı oluşmazsa öğrencilerden Bir altıgen çizmeleri ve her köşeden çıkan köşegenleri farklı renkle çizmeleri istenir. Daha sonra şu sorular sorulur: "Hangi renkler üst üste geldi?", "Çizdiğiniz bir köşegeni farklı renkte tekrar çizdiğiniz oldu mu?", "Kaç tane köşegen için bu durum söz konusu?". Burada ki amaç öğrencilerde "köşe sayısı kadar köşegen çizildiği ancak bunların yarısının diğer yarısıyla aynı olduğu dolayısıyla köşe sayı ile bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısını çarpıp yarısını aldığımızda çokgenin köşegen sayısını buluruz" ifadesini kavratmaktır.

Tablo-1: Çokgenlerin köşegen sayısı

| Çokgen   | Kenar Sayısı | Bir Köşeden Çizilebilecek Köşegen Sayısı | Çokgenin toplam köşegen sayısı | Çokgenin köşegen sayısı için bağıntı |
|----------|--------------|------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| Dörtgen  | 4            | 1                                        | 2                              | $\frac{4 \times (4-3)}{2} = 2$       |
| Beşgen   | 5            | 2                                        | 5                              | $\frac{5 \times (5-3)}{2} = 5$       |
| Altıgen  | 6            | 3                                        | 9                              | $\frac{6 \times (6-3)}{2} = 9$       |
| Yedigen  | 7            | 4                                        | 14                             | $\frac{7 \times (7-3)}{2} = 14$      |
| Sekizgen | 8            | 5                                        | 20                             | $\frac{8 \times (8-3)}{2} = 20$      |
| Dokuzgen | 9            | 6                                        | 27                             | $\frac{9 \times (9-3)}{2} = 27$      |
| ~~~~~    | ~~~~~        | ~~~~~                                    | ~~~~~                          | ~~~~~                                |
| n-gen    | n            | n-3                                      |                                | $\frac{n \times (n-3)}{2}$           |

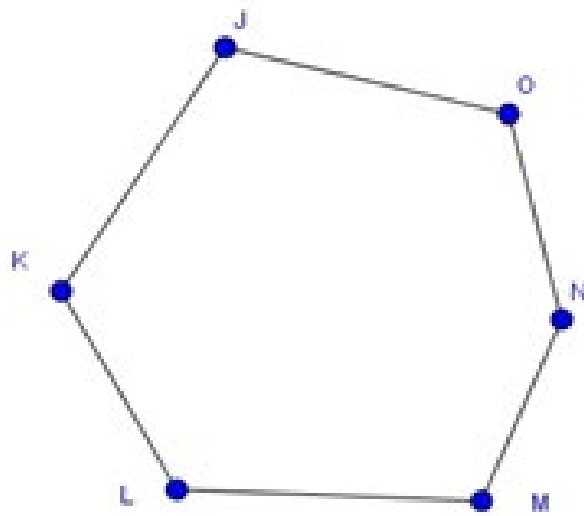
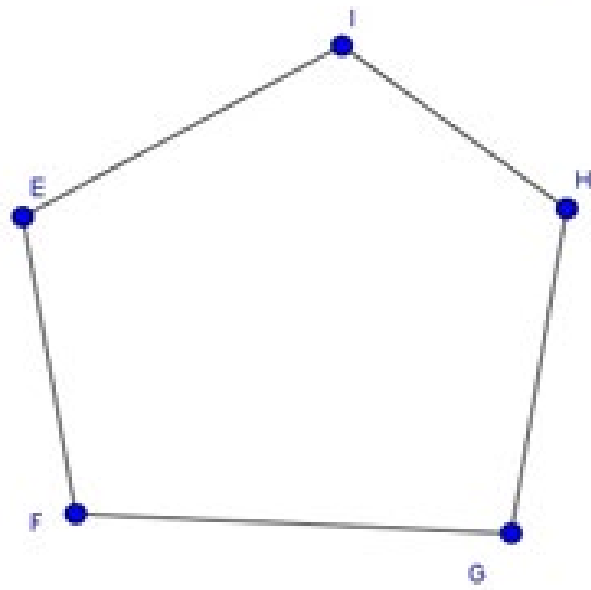
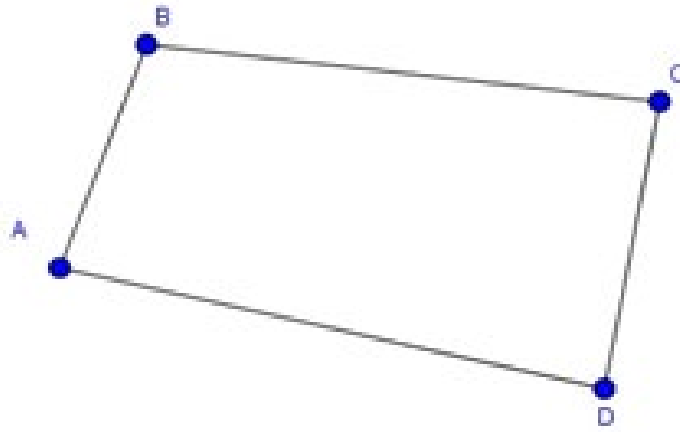
Öğrencilerle tablonun ilk üç adımı (dörtgen, beşgen ve altıgen için) birlikte doldurulur. Kenar sayısı ile bir köşegen çizilebilen köşegen sayısını kullanarak toplam köşegen sayısı için bir kural geliştirebilmeleri için öğrencilere biraz zaman tanınır. Öğrencilerin köşe sayısı ile kenar sayısının aynı olduğunu düşünerek bir köşeden çizilebilen köşegen sayısı ile köşe sayısını çarparak toplam köşegen sayısının iki katını elde ettiklerini keşfetmeleri beklenir. Toplam köşegen sayısı için de bulunan bu çarpımı ikiye bölmemiz gerekliliğini söylemeleri gerekir. Onlara sorular sorularak, ipuçları verilerek köşe sayısı ile köşegen sayısı arasındaki ilişki keşfettirilir.

### **Sonuç:**

Derste öğrenilenlerin genel bir tekrarı yapılır. Köşe sayısı ile köşegen sayısı arasındaki ilişkiyi bulmak için nasıl düşündüğümüz genel kuralı nasıl oluşturduğumuz öğrencilerle tekrar edilir. Son olarak öğrencilerden öğrenme günlüklerine; *"Ardışık kenara sahip iki çokgenin köşegen sayıları arasındaki fark her zaman az kenara sahip çokgenin kenar sayısının 1 eksiğine eşittir."* ifadesinin doğruluğunu veya yanlışlığını nedenleri ile birlikte açıklamaları istenir.



Ek 2. Çalışma Kağıdı 1



Ek 2. Çalışma Kağıdı 2

| Çokgen   | Kenar Sayısı | Bir Köşeden Çizilebilecek Köşegen Sayısı | Çokgenin toplam köşegen sayısı | Çokgenin köşegen sayısı için bağıntı |
|----------|--------------|------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| Dörtgen  |              |                                          |                                |                                      |
| Beşgen   |              |                                          |                                |                                      |
| Altıgen  |              |                                          |                                |                                      |
| Yedigen  |              |                                          |                                |                                      |
| Sekizgen |              |                                          |                                |                                      |
| Dokuzgen |              |                                          |                                |                                      |
| ~~~~~    |              |                                          |                                |                                      |
| n-gen    |              |                                          |                                |                                      |

#### Ek 4. Örnek Öğrenme Günlüğü

### ÖĞRENME GÜNLÜĞÜ

**Ders:** Matematik

**Tarih:** ...../...../.....

*“ Sevgili öğrenciler bu formda sizden, bugün derste öğrendiklerinizi derse gelmeyen bir arkadaşınıza anlatır gibi anlatmanız beklenmektedir. Yeni neler öğrendiğiniz, en çok zorlandığınız ya da size kolay gelen veya önemli gördüğünüz kısımlar neler olduğunu belirtebilirsiniz.”*

Bugün matematik dersinde.....



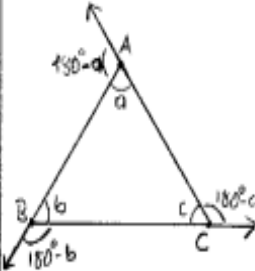
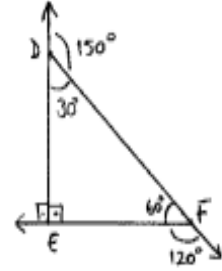
## Ek 5. İspat Beceri Testi-1 (İBT-1)

Aşağıdaki matematiksel ifadelerin doğruluğu veya yanlışlığını hakkında ne söyleyebilirsiniz. Cevaplarınızı açıklayınız.

- 1- Tüm üçgenlerin dış açıları ölçüleri toplamı  $360^\circ$  dir.
- 2- Paralel kenarın ardışık iki iç açısının toplamı daima  $180^\circ$  dir.
- 3- Çevreleri eşit dörtgenlerin alanları da birbirine eşittir.
- 4- Bir öğretmen öğrencilerine aşağıdaki soruyu sorar;

"Bir üçgende, herhangi bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir." Sizce bu ifade doğru mudur?

Bu soruya cevap veren 4 öğrencinin cevapları aşağıdaki gibidir. Sizce hangi öğrencinin cevabı sizi ikna etmek için yeterlidir? Nedenini açıklayınız?

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Osman'ın cevabı;</b></p> <p>Verilen ifade <u>doğrudur</u>. Çünkü; öğretmenimiz bize böyle demişti. Hatta ders kitabında da böyle yazıyordu.</p>                                                                                                                                                                                                        | <p><b>Belinay'ın cevabı;</b></p> <p>Bence <u>yanlış</u>;</p>  <p><math>65^\circ + 65^\circ = 130^\circ</math> ama <math>\hat{B}</math>'nin dış açısı <math>125^\circ</math>'dir.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Aybüke'nin cevabı;</b></p> <p>Bence ifade <u>doğru</u>.</p>  <p><math>a + b + c = 180^\circ</math> olduğu için;</p> $a + b = 180^\circ - c$ $b + c = 180^\circ - a$ $a + c = 180^\circ - b$ <p>İki iç açının ölçüleri toplamı      Komşu olmayan dış açı ölçüsü</p> | <p><b>Zeynep'in cevabı;</b></p> <p>Bence <u>doğru</u>; önce iç açıları <math>45^\circ</math>, <math>65^\circ</math> ve <math>70^\circ</math> olan üçgene bakalım;</p>  $45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$ $45^\circ + 70^\circ = 115^\circ$ $65^\circ + 70^\circ = 135^\circ$ <p>Sonra iç açıları <math>90^\circ</math>, <math>30^\circ</math> ve <math>60^\circ</math> olan üçgene bakalım;</p>  $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ $30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ <p>İki farklı üçgen için de doğru çıktı.</p> |

## Ek 6. İspat Beceri Testi-2 (İBT-2)

Aşağıdaki matematiksel ifadelerin doğruluğu veya yanlışlığını hakkında ne söyleyebilirsiniz. Cevaplarınızı açıklayınız.

- 1- Bir üçgende, herhangi bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.
- 2- Paralelkenarın ardışık iki iç açısının toplamı daima  $180^\circ$  dir.
- 3- Çevreleri eşit çokgenlerin alanları da eşittir.
- 4- Bir öğretmen öğrencilerine aşağıdaki soruyu sorar;

"Tüm çokgenlerin dış açıları ölçüleri toplamı  $360^\circ$  dir." Sizce bu ifade doğru mudur?

Bu soruya cevap veren 3 öğrencinin cevapları aşağıdaki gibidir. Sizce hangi öğrencinin cevabı sizi ikna etmek için yeterlidir? Nedenini açıklayınız?

**Osman'ın cevabı;**

$n$  kenarlı bir çokgenimiz olsun. Bu çokgenin;  $x, y, z, t, \dots$  şeklinde  $n$  tane iç açısı vardır. Dış açıları her bir iç açı için;  $180^\circ - x, 180^\circ - y, \dots$  olur. Toplamları  $180^\circ - x + 180^\circ - y + 180^\circ - z + 180^\circ - t + \dots = n \cdot 180^\circ - (x + y + z + t + \dots)$

$x + y + z + t + \dots = (n - 2) \cdot 180^\circ$  olduğundan;

$$\begin{aligned} \text{Dış açıları toplamı} &= n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 2 \cdot 180^\circ \\ &= n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 360^\circ \end{aligned}$$

Dış açıları toplamı  $= 360^\circ$  olduğundan ifade doğrudur.

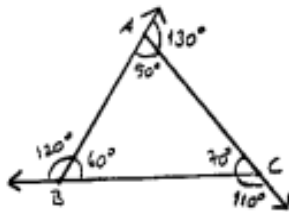
**Aybüke'nin cevabı;**

Örneğin bir altıgen düşünelim iç açıları toplamı  $720^\circ$  olacak şekilde iç açıları seçelim.  $100^\circ, 130^\circ, 140^\circ, 110^\circ, 120^\circ$  ve  $120^\circ$  olsun. Sırasıyla dış açıları da  $80^\circ, 50^\circ, 40^\circ, 70^\circ, 60^\circ$  ve  $60^\circ$  olacaktır. Dış açıları toplarsak  $80^\circ + 50^\circ + 40^\circ + 70^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 360^\circ$  buluruz.

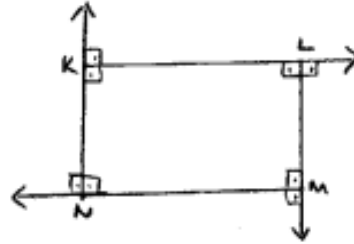
Rastgele seçtiğim bir çokgende dış açıları toplamı  $360^\circ$  çıktığından diğer çokgenlerde de aynısı çıkacaktır. Verilen ifade doğrudur.

**Zeynep'in cevabı;**

Bence doğru çünkü bir üçgen ile bir dikdörtgene bakarsak ikisinin de dış açıları toplamı  $360^\circ$  dir.



$$\begin{array}{r} 120^\circ \\ 130^\circ \\ + 110^\circ \\ \hline 360^\circ \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 90 \\ \times 4 \\ \hline 360^\circ \end{array}$$

