



**8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN LGS'DE SORULAN CEBİR SORULARINA
İLİŞKİN GÖRSEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdürrahim KIR

Danışman

Prof. Dr. Murat PEKER

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

(MATEMATİK EĞİTİMİ)

Temmuz 2025

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN LGS'DE SORULAN CEBİR
SORULARINA İLİŞKİN GÖRSEL AKIL YÜRÜTME
BECERİLERİNİN İNCELENMESİ**

Abdürrahim KIR

Danışman

Prof. Dr. Murat PEKER

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
(MATEMATİK EĞİTİMİ)

Temmuz 2025

TEZ ONAY SAYFASI

Abdürrahim KIR tarafından hazırlanan “8. Sınıf  ğrencilerinin LGS’de Sorulan Cebir Sorularına İlişkin Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi” adlı tez  alışması Afyon Kocatepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim- ğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 03/07/2025 tarihinde aşığıdaki jüri tarafından **oy birliğı** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik ve Fen Bilimleri Eğıtimi Anabilim Dalı Matematik Eğıtimi Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Murat PEKER

Başkan : Doç. Dr. İbrahim ÇETİN
Necmettin Erbakan Üniversitesi,
Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi

 ye : Prof. Dr. Murat PEKER
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Eğitim Fakültesi

 ye : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ertürk GEÇİCİ
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Eğitim Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
..... /..... /..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

03 / 07 / 2025

İmza

Abdürrahim KIR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN LGS'DE SORULAN CEBİR SORULARINA İLİŞKİN GÖRSEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Abdürrahim KIR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı (Matematik Eğitimi)

Danışman: Prof. Dr. Murat PEKER

Bu araştırmanın amacı, Liselere Geçiş Sistemi (LGS) Merkezi Ortak Sınavlarında sorulan cebir sorularına ilişkin 8. Sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerini araştırmaktır. Bu çalışmada sınıf düzeyi olarak sadece 8. Sınıf ele alındığından tek durum, orta ve yüksek seviyedeki öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerinin analizi yapıldığından dolayı da iç içe geçmiş analiz birimi ele alınması nedeniyle durum çalışması desenlerinden iç içe geçmiş tek durum deseni kullanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubundaki öğrencilerin belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır. Bu araştırmanın çalışma grubunu, Afyonkarahisar ili Merkez ilçesindeki devlet okulları arasından seçilen üç ortaokulun 2023-2024 eğitim öğretim yılında öğrenim gören 8. sınıf öğrencileri içerisinde belirlenen 18 öğrenci oluşturmaktadır. Belirlenen her bir okuldan orta ve yüksek başarı düzeyine sahip üçer olmak üzere toplam altı öğrenci seçilmiştir. Böylece her okuldan altışar öğrenci olmak üzere çalışma grubu 18 öğrenciden oluşmuştur. Araştırmacı tarafından hazırlanan “Cebir Testi” ve “Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları Formu” veri toplama araçları kullanılarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Cebir Testinde kullanılan sorular 2018-2023 yılları arasında LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testine ait cebir konu alanı ile ilgili kazanımları içeren sorular içerisinde seçilmiş 15 sorudan oluşmaktadır. Cebir Testi 18 öğrenciye uygulanmıştır. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları Formu kullanılarak 18 öğrenci arasından belirlenmiş 6 öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Veri analizi “betimsel analiz” kullanılarak yapılmıştır. Elde edilen veriler,

Geçici ve Tüknüklü (2021)'nün önerdiği kavramsal çerçeveden yola çıkılarak analiz edilmiştir. Araştırmada, katılımcıların en çok tercih ettikleri görsel temsil çeşidinin çizim temsili olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte tablo temsili tercih eden katılımcılar da vardır. Resim temsili ise hiçbir öğrencinin kullanmadığı görülmüştür. Farklı görsel temsilleri kullanabilen öğrencilerin soruları çözerken matematiksel düşünmeyi gerçekleştirebilmek için gerekli olan adımları kolaylıkla tamamlayabildikleri belirlenmiştir. Görsel temsiller arası geçiş yapabilen öğrencilerin daha başarılı oldukları görülmüştür. Başarı seviyesi yüksek olan öğrencilerin diğer öğrencilere göre matematiksel düşünmeye geçiş bileşenleri olan özelleştirme, varsayımında bulunma, doğrulama ve genelleme yapma adımlarında daha başarılı oldukları görülmüştür.

2025, xvi + 210 sayfa

Anahtar Kelimeler: Görsel akıl yürütme, Görselleştirme, Görsel temsil, Cebir.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

INVESTIGATION OF 8TH GRADE STUDENTS' VISUAL REASONING SKILLS REGARDING ALGEBRA QUESTIONS ASKED IN HIGH SCHOOL ENTRANCE EXAMINATION

Abdürrahim KIR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics and Science Education (Mathematics Education)

Supervisor: Prof. Dr. Murat PEKER

The aim of this study is to investigate the visual reasoning skills of 8th grade students regarding algebra questions asked in the Central Common Exams of the High School Transition System (LGS). In this study, since only the 8th grade was considered as the grade level, a single case design was used, and since the visual reasoning skills of middle and high level students were analysed, a nested single case design was used. Criterion sampling, one of the purposeful sampling methods, was used to determine the students in the study group. The study group of this research consists of 18 students selected from the 8th grade students studying in the 2023-2024 academic year in three secondary schools selected among the public schools in the central district of Afyonkarahisar province. A total of six students, three students with medium and high achievement levels, were selected from each school. Thus, the study group consisted of 18 students, six students from each school. The data of the study were collected by using 'Algebra Test' and 'Semi-structured Interview Questions Form' data collection tools prepared by the researcher. The questions used in the Algebra Test consist of 15 questions selected from the questions that include the acquisitions related to the algebra subject area of the mathematics subtest asked in the LGS central common exams between 2018-2023. Algebra Test was applied to 18 students. Using the Semi-Structured Interview Questions Form, interviews were conducted with 6 students selected among 18 students. Data analysis was conducted using 'content analysis'. The data obtained were analysed based on the conceptual framework proposed by Geçici

and Törnükü (2021). In the study, it was determined that the most preferred visual representation type of the participants was drawing representation. However, there are also participants who prefer tabular representation. It was observed that no student used the picture representation. It was determined that students who could use different visual representations could easily complete the steps necessary for mathematical thinking while solving the questions. It was observed that students who could switch between visual representations were more successful. It was observed that students with high achievement levels were more successful than other students in the steps of specialisation, conjecture, verification and generalisation, which are the components of transition to mathematical thinking.

2025, xvi + 210 pages

Keywords: Visual reasoning, Visualization, Visual representation, Algebra.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, çalışma sürecinin yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Murat PEKER'e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ertürk GEÇİCİ'ye, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı'ndaki (Matematik Eğitimi) değerli öğretim üyelerine, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemi sağlayan sevgili anneme ve babama, bu araştırma boyunca bana güvenen, cesaret veren, her zaman yanımda olan kıymetli eşim Şerife KIR'a ve değerli oğullarım Mustafa KIR ve Furkan KIR'a anlayışlarından, maddi ve manevi tüm desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Abdürrahim KIR
Afyonkarahisar 2025

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vi
KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xv
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Problem Durumu.....	1
1.2 Araştırmanın Amacı.....	5
1.3 Problem Cümlesi.....	5
1.4 Araştırmanın Önemi	5
1.5 Araştırmanın Sayıtları.....	10
1.6 Araştırmanın Sınırlılıkları.....	11
1.7 Tanımlar.....	11
2. LİTERATÜR BİLGİLERİ	13
2.1 Kuramsal Çerçeve.....	13
2.1.1 Görsel Akıl Yürütme.....	13
2.1.2 Görsel Temsil	17
2.1.3 Görselleştirme	20
2.1.4 Matematiksel Düşünmeye Geçiş.....	25
2.2 İlgili Araştırmalar	26
2.2.1 Görselleştirme ile ilgili çalışmalar	26
2.2.2 Görsel temsil kavramı ile ilgili çalışmalar	34
2.2.3 Görsel akıl yürütme ile ilgili çalışmalar.....	41
2.2.4 Cebir ve görsel akıl yürütme ile ilgili çalışmalar	48
3. MATERYAL ve METOT	50
3.1 Araştırmanın Modeli.....	50
3.2 Çalışma Grubu	51
3.3 Veri Toplama Araçları	52
3.3.1 Cebir Testi	52
3.3.2 Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formu	57

3.4 Veri Toplama Süreci	58
3.4.1 Cebir Testi ile Veri Toplama Süreci	58
3.4.2 Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları Formu ile Veri Toplama Süreci....	59
3.5 Verilerin Analizi	59
3.6 Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği	63
4. BULGULAR	66
4.1 Özdeşlik Modeli İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	66
4.2 Cebirsel İfadelerin Çarpımını İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	72
4.3 Cebirsel İfadeleri Çarpanlarına Ayırmayı İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	78
4.4 Doğrunun Eğimini İçeren Görsel Genelleme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	87
4.5 Doğrusal İlişki İçeren Görsel Genelleme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	96
4.6 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik İçeren Görsel Varsayımda Bulunma Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	103
4.7 Cebirsel İfadelerin Çarpımını İçeren Görsel Varsayımda Bulunma Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	110
4.8 Doğrunun Eğimini İçeren Görsel Genelleme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	117
4.9 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme.....	123
4.10 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik İçeren Görsel Varsayımda Bulunma Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	130
4.11 Cebirsel İfadeleri Çarpanlarına Ayırmayı İçeren Görsel Doğrulama ve İkna Etme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	136
4.12 Özdeşlik Modeli İçeren Görsel Varsayımda Bulunma Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	142
4.13 Cebirsel İfadelerin Çarpımını İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	147
4.14 Koordinat Sisteminin Özelliklerini İçeren Görsel Doğrulama ve İkna Etme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme.....	154
4.15 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik İçeren Görsel Doğrulama ve İkna Etme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme	160
5. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER.....	169
5.1 Tartışma ve Sonuç	169

5.2 Öneriler	174
5.2.1 Uygulamacılara Yönelik Öneriler	174
5.2.2 Araştırmacılara Yönelik Öneriler.....	175
6. KAYNAKLAR.....	177
ÖZGEÇMİŞ.....	193
EKLER	194



KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar

ABİDE	Akademik Başarıların İzlenmesi ve Değerlendirilmesi
LGS	Liselere Geçiş Sistemi
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PISA	Programme for International Student Assessment
TDK	Türk Dil Kurumu
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Görsel akıl yürütmeye yönelik kavramsal çerçeve	16
Şekil 2.2 Görsel temsil örnekleri.....	19
Şekil 2.3 Görselleştirmenin tanımına yönelik bir görsel.....	23
Şekil 4.1 Ö14'ün özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	68
Şekil 4.2 Ö3'ün özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	68
Şekil 4.3 Ö17'nin özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen iki görsel arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	69
Şekil 4.4 Ö18'in özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili ve problemi çözme süreci	69
Şekil 4.5 Ö13'ün özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci.....	71
Şekil 4.6 Ö8'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	75
Şekil 4.7 Ö18'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	75
Şekil 4.8 Ö17'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen iki görsel arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	77
Şekil 4.9 Ö7'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili ve problemi çözme süreci	77
Şekil 4.10 Ö5'in cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	81
Şekil 4.11 Ö12'nin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili.....	82
Şekil 4.12 Ö3'ün cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen görsel içerisindeki şekiller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	83
Şekil 4.13 Ö4'ün cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu görsel temsil ve problemi çözme süreci	84
Şekil 4.14 Ö18'in cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili	84
Şekil 4.15 Ö7'nin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci	86
Şekil 4.16 Ö6'nın doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	89

Şekil 4.17 Ö9'un doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	90
Şekil 4.18 Ö4'ün doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin verilen görsel içerisinde çizilen yollar arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	91
Şekil 4.19 Ö12'nin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili	91
Şekil 4.20 Ö13'ün doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu genelleme temsili.....	93
Şekil 4.21 Ö3'ün doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu doğrulama ve ikna etme temsili.....	94
Şekil 4.22 Ö7'nin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci.....	95
Şekil 4.23 Ö14'ün doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	98
Şekil 4.24 Ö18'in doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu tablo temsili	99
Şekil 4.25 Ö12'nin doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	100
Şekil 4.26 Ö2'nin doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin verilen görseller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	101
Şekil 4.27 Ö5'in doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili ve problemi çözme süreci	102
Şekil 4.28 Ö4'ün doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu genelleme temsili.....	102
Şekil 4.29 Ö9'un birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili.....	105
Şekil 4.30 Ö3'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	106
Şekil 4.31 Ö7'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin verilen iki görsel arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	106
Şekil 4.32 Ö17'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili	108
Şekil 4.33 Ö18'in birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci	109
Şekil 4.34 Ö16'nın cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili.....	112

Şekil 4.35 Ö3'ün cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili.....	113
Şekil 4.36 Ö6'nın cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin verilen görseller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili.....	113
Şekil 4.37 Ö1'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili	114
Şekil 4.38 Ö17'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili	115
Şekil 4.39 Ö7'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci	116
Şekil 4.40 Ö3'ün doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	119
Şekil 4.41 Ö12'nin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu özelleştirme temsili	120
Şekil 4.42 Ö18'in doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu genelleme temsili.....	121
Şekil 4.43 Ö2'nin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili.....	122
Şekil 4.44 Ö6'nın doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	122
Şekil 4.45 Ö14'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	126
Şekil 4.46 Ö18'in birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili.....	126
Şekil 4.47 Ö6'nın birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen görseller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili.....	127
Şekil 4.48 Ö4'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin özelleştirme temsili	128
Şekil 4.49 Ö17'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili...	128
Şekil 4.50 Ö3'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci	129
Şekil 4.51 Ö13'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu çizim ve özelleştirme temsilleri ...	132
Şekil 4.52 Ö3'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu tablo temsili.....	133

Şekil 4.53 Ö4'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	133
Şekil 4.54 Ö1'in birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili	134
Şekil 4.55 Ö18'in birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci	135
Şekil 4.56 Ö6'nın cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	138
Şekil 4.57 Ö4'ün cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	139
Şekil 4.58 Ö7'nin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin verilen görseller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	139
Şekil 4.59 Ö18'in cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili.....	140
Şekil 4.60 Ö17'nin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu doğrulama ve ikna etme temsili..	141
Şekil 4.61 Ö1'in özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	144
Şekil 4.62 Ö13'ün özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	144
Şekil 4.63 Ö4'ün özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin verilen görsel içerisindeki şekiller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili.....	145
Şekil 4.64 Ö18'in özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili	145
Şekil 4.65 Ö6'nın özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili.....	147
Şekil 4.66 Ö8'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	149
Şekil 4.67 Ö17'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen görsel içerisindeki şekillerin arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	150
Şekil 4.68 Ö6'nın cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili	151
Şekil 4.69 Ö4'ün cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili.....	151
Şekil 4.70 Ö18'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci	152

Şekil 4.71 Ö13'ün cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci	153
Şekil 4.72 Ö6'nın koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili	156
Şekil 4.73 Ö7'nin koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili .	157
Şekil 4.74 Ö14'ün koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin verilen iki nokta arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili	158
Şekil 4.75 Ö18'in koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili	159
Şekil 4.76 Ö17'nin koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu doğrulama ve ikna etme temsili.....	160
Şekil 4.77 Ö17'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu tablo temsili	163
Şekil 4.78 Ö4'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili	164
Şekil 4.79 Ö2'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin çıkarımla oluşturduğu özelleştirme temsili	165
Şekil 4.80 Ö13'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu genelleme temsili	166
Şekil 4.81 Ö9'un birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili ..	167
Şekil 4.82 Ö6'nın birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu doğrulama ve ikna etme temsili	168

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 3.1 Araştırmaya katılan okulların ve öğrencilerin demografik özellikleri	51
Çizelge 3.2 Cebir ile ilişkili 2018-2023 yılları arasında yapılan LGS sorularının “M.8.2.1. Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler” alt öğrenme alanındaki kazanımlara göre dağılımı.	53
Çizelge 3.3 Cebir ile ilişkili 2018-2023 yılları arasında yapılan LGS sorularının “M.8.2.2. Doğrusal Denklemler” alt öğrenme alanındaki kazanımlara göre dağılımı.	54
Çizelge 3.4 Cebir ile ilişkili 2018-2023 yılları arasında yapılan LGS sorularının “M.8.2.3. Eşitsizlikler” alt öğrenme alanındaki kazanımlara göre dağılımı. ..	54
Çizelge 3.5 Cebir Testi Sorularının Özellikleri.	56
Çizelge 3.6 Cebir Testi Sorularının matematiksel düşünme bileşenindeki göstergelere göre dağılımı.	57
Çizelge 3.7 Veri analizi işlem adımları.	60
Çizelge 3.8 Görsel akıl yürütmenin bileşenleri ve göstergeler	61
Çizelge 3.9 Yarı yapılandırılmış görüşmeye ilişkin verilerin düzenlenmesi ve analiz sürecine ait bir örnek.	63
Çizelge 4.1 Öğrencilerin özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.	66
Çizelge 4.2 Öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri	73
Çizelge 4.3 Öğrencilerin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.	79
Çizelge 4.4 Öğrencilerin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.	87
Çizelge 4.5 Öğrencilerin doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.	96
Çizelge 4.6 Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri	103
Çizelge 4.7 Öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri	110
Çizelge 4.8 Öğrencilerin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.	117
Çizelge 4.9 Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.	124
Çizelge 4.10 Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri	130

Çizelge 4.11 Öğrencilerin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.....	136
Çizelge 4.12 Öğrencilerin özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri	142
Çizelge 4.13 Öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri	148
Çizelge 4.14 Öğrencilerin koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.....	154
Çizelge 4.15 Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri.....	161



1. GİRİŞ

Bu bölümde, problem durumu, araştırmanın amacı, problem cümlesi, araştırmanın önemi, araştırmanın sayıltıları, araştırmanın sınırlılıkları ve tanımlar olmak üzere yedi alt başlığa yer verilmiştir.

1.1 Problem Durumu

Öğrenciler matematiği başaramayacakları kadar zor bir ders olarak algılamaktadırlar (Yetim Karaca ve Ada 2018). Oysa ülkemizde son yıllarda uygulanan eğitim sisteminde ezberci eğitim anlayışından uzak, öğrencilerin bilgileri ilk elden alabildiği, eleştirel ve yaratıcı düşünebilmesini, öğrendiklerini günlük hayata aktarabilmesini sağlayan bir eğitim anlayışı vardır (Keşan ve Kaya 2014). Bununla birlikte matematik birbirine karışmış bilgiler topluluğu olmayıp bunun aksine birbiri ile ilişkili kavramların birleşiminden oluşur (Ural 2017). Umay (2003), matematikte sadece sayılar ve işlemlerin öğretilmediğini, bunların yanında olaylar arasında ilişki kurma, düşünme, tahmin etme, akıl yürütme ve problem çözme gibi çok önemli becerilerin de öğretilmeye çalışıldığını ifade etmektedir. Güler (2020) ise matematik yapmanın sadece formüllerle benzer problemleri çözme süreci olmadığını, bunun ötesinde matematik yaparak matematiksel düşünme ve kavramsal anlama gelişimini sağlama olduğunu ifade etmektedir.

Son yıllarda matematiğin sadece bir ders olmayıp hayatın da bir parçası olduğunun unutulmaması ve matematiksel düşünmeyi geliştirebilmek için eğitim sürecinde karşımıza çıkacak her fırsatın iyi bir şekilde değerlendirilmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] 2018a). National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) tarafından dünya şartlarının her geçen gün değiştiği ve bu nedenle matematiğin anlaşılmasına ve kullanılmasına daha çok önem verilmesine vurgu yapılmış olup matematiksel düşünme ve problem çözmeye farklı meslek dallarında daha çok ihtiyaç duyulacağı belirtilmiştir. Atkinson vd. (1999), Piaget'in bilişsel gelişim dönemlerinin eğitim-öğretim açısından önemli olduğunu ve bireylerin yaşlarına göre sahip oldukları gelişim dönemleri göz önünde bulundurularak

uygulanacak olan eğitim-öğretim etkinliklerinin planlanmasının gerektiğini belirtmektedir. Bu sebeple özellikle soyutluk düzeyi yüksek olan konular ortaokul öğrencilerine öğretilirken bu öğrencilerin soyut işlemsel döneme yeni geçiş yaptıklarının göz önünde bulundurulması ve görsel temsiller kullanılarak görsel düşünme süreçlerinden yararlanılması gerekir. Güncel matematik öğretim programında öğrencilerin matematiksel akıl yürütme, matematiksel temsil, matematiksel problem çözme, veriyi kullanarak karar verme, matematiksel teknoloji ve araçlarla çalışma kabiliyetlerinden oluşan matematik alan becerilerini etkili bir şekilde kullanmaları amaçlanmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] 2024). Ayrıca matematiksel düşünmenin sadece sayılar ve matematiksel kavramların bulunduğu durumlarla sınırlı olmadığı, hayatın içinde de gerçekleştirilebilen bir düşünme şekli olduğu düşünülmektedir (Yeşildere ve Türnüklü 2007). Bu sebeple matematik eğitiminin önemli noktalarından biri, bireylere matematiksel düşünme becerisi kazandırmak ve böylece bireylerin hayata daha kolay uyum sağlamalarına yardımcı olmaktır.

“Matematiksel akıl yürütme, eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci olarak düşünülmektedir” (MEB 2013, s. 5). Benzer şekilde Artz ve Yaloz-Femina (1999), akıl yürütmenin matematiksel düşünmenin bir parçası olduğunu ve genellemeler yapmayı, geçerli sonuçlara ulaşmayı da içine aldığını ifade etmişlerdir. Bu nedenle alanyazında analogik akıl yürütme, tümevarımsal akıl yürütme, tümdengelimsel akıl yürütme, geometrik akıl yürütme, cebirsel akıl yürütme, geometrik akıl yürütme ve nicel akıl yürütme gibi matematik eğitimi için birçok akıl yürütme çeşitleri ortaya çıkmıştır (Conner vd. 2014).

Bir bilişsel yapıyı resim, grafik veya diyagram kullanarak oluşturma, gözlemleme, içyapısını ve bileşenlerini algılama, oluşturduğu bu algılar üzerine düşünüp sezgilerini kullanarak yeni hipotezler üretme, hipotezlerini doğrulama, düşüncelerini iletme ve bunlar arasında bağlantılar kurma işlemlerinin tamamı görsel akıl yürütme olarak tanımlanmaktadır (Karras 2012, s. 27). Fikir ve kavramların cebirsel ve sözel ifadeler yerine diyagram ve imgelerin aracılığıyla görselleştirilerek anlaşılmasına çalışılması

görsel temsillerin yardımıyla görsel akıl yürütmeyi gerçekleştirme ile ilgilidir (Anderson ve McCartney 1997). Bu görüşlerden yola çıktığımızda zihinsel etkinlikler yardımıyla görsellerle etkileşim kurulup görsel akıl yürütmenin gerçekleştirilebileceği sonucuna ulaşılabilir.

Alanyazın incelendiğinde görsel akıl yürütme ile görselleştirmenin iç içe geçtiği ifade edilmektedir (Hershkowitz vd. 2001, Natsheh ve Karsenty 2014). Matematiksel bir problemi veya kavramı temsil ederken öğrencinin kalem, kağıt veya bilgisayar yardımıyla uygun bir diyagram çizme, diyagramı anlama ve problemi çözerken yardım amaçlı kullanma becerisi matematiksel görselleştirme olarak tanımlanmaktadır (Zimmerman ve Cunningham 1991, s. 3). Arcavi (2003, s. 217) de görselleştirmenin tanımını, “bilgiyi betimlemek ve iletmek, önceden bilinmeyen fikirleri geliştirmek ve düşünmek ve anlayışları ilerletmek amacıyla, zihninizde, kâğıt üzerinde veya teknolojik araçlarla resimlerin, imajların, diyagramların oluşturulması, yorumlanması, kullanılması ve üzerinde düşünme becerisi, süreci ve ürünü” olarak yapmaktadır. Bu görüşlerden yola çıktığımızda görselleştirmenin görsel araçlardan yararlanarak gerçekleştirilen bir süreç olduğu görülür. Ayrıca görsel akıl yürütmenin de görselleştirme sürecini içine alan düşünme şekli olduğu söylenebilir.

Alanyazında görsel akıl yürütme ile ilgili daha çok görsel ispat çalışmaları (Bardelle 2010, Gülşen 2012, Karrass 2012, Akkan vd. 2018), öğrencilerinin geometri problemlerine ilişkin görsel akıl yürütme becerilerinin incelendiği çalışmalar (Sırtmaç 2018, Fujita vd. 2020, Geçici 2022) ile fonksiyonlar ve türev alma kazanımlarını içeren problemleri çözme (Natsheh ve Karsenty 2014, Abd Hamid 2017) bağlamındaki araştırmaların yapıldığı görülmüştür. Buradan anlaşıldığı üzere yapılan araştırmalarda daha çok geometri konularındaki görsel akıl yürütme, görsel temsil ve görselleştirme becerilerinin incelendiği görülmüştür. Ayrıca ortaokul öğrencilerinin görsel akıl yürütme ve görselleştirme becerilerini incelemeye yönelik çalışmalar (Şan 2008, Uysal-Koç ve Başer 2012, Sırtmaç 2018, Delibaş 2020, Geçici 2022) ise çok azdır.

Yüksek soyutluk düzeyine sahip olan cebirsel ifadeler, özdeşlikler, doğrusal denklemler, eşitsizlikler ve grafikler gibi konularda öğrencilerin görsel temsillerden

yararlanarak düşünmeleri gerekebilir. Bu araştırmada özellikle cebir konularının seçilmesinin temel nedeni, bu konuların hem görsel temsile açık bir yapıya sahip olması hem de öğrencilerin en çok zorlandıkları matematiksel alanlardan biri olmasıdır. Soyut kavramların somutlaştırılması, matematiksel kavramların anlamlandırılması ve cebirsel düşünme süreçlerinin yapılandırılması aşamalarında görsel akıl yürütmenin rolü oldukça önemlidir. Ortaokul düzeyinde öğrenim gören öğrenciler, bilişsel gelişimleri açısından somut işlemsel dönemde bulunmakta olup soyut işlemler dönemine ise yeni girmeye başladıkları için bu döneme tam olarak geçmemişlerdir. Özellikle 8. sınıf seviyesinde, soyut düşünmenin daha yoğun olduğu cebir kazanımlarının öğretiminde öğrencilerin kavramsal anlama seviyelerini ve zihinde canlandırma becerilerini artırmak için görsel temsillerden yardım alınabilir. Görsel temsiller, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini hızlandırmakta ve cebirsel ifadelerin anlamlandırılmasında kolaylıklar sağlamaktadır (Zimmerman ve Cunningham 1991). Cebirsel ifadeler ve eşitsizlikler gibi konulara ait kazanımların öğretiminde çizim yapma, tablo kullanma ve grafik çizme gibi görsel temsillerle desteklenerek öğrencilerin kavramsal anlamaları güçlenmektedir (Geçici ve Türnüklü 2021).

Bu çalışma kapsamında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından uygulanan Liselere Geçiş Sistemi (LGS) sınavındaki soruların tercih edilmesi birkaç nedene dayanmaktadır. Birincisi, LGS merkezi ve standart bir sınav olduğundan, ülke genelindeki öğrenci başarısını ölçen güvenilir bir araçtır. İkincisi, LGS’de yer alan matematik soruları güncel öğretim programındaki kazanımlara dayandığından araştırmanın müfredatla uyumu sağlanmaktadır. Üçüncüsü ise bu sınavda kullanılan sorular, öğrencilerin problem çözme ve düşünme becerilerini ölçmeye yönelik olduğu için görsel akıl yürütme becerisinin doğrudan gözlemlenebilmesine olanak tanımaktadır. Dolayısıyla bu çalışmada hem alan olarak cebirin hem de araç olarak LGS sorularının tercih edilmesi, öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerini doğal ve geçerli bir bağlamda inceleme olanağı sunmaktadır. Bununla birlikte LGS Merkezi Ortak Sınavlarında sorulan cebir sorularına ilişkin 8. sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerinin hangi düzeyde olduğunu inceleyen bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bundan dolayı LGS Merkezi Ortak Sınavlarında sorulan cebir sorularına ilişkin 8. sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesinin alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.2 Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı “Liselere Geçiş Sistemi (LGS) Merkezi Ortak Sınavlarında sorulan cebir sorularına ilişkin 8. Sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerini araştırmak” şeklinde belirlenmiştir.

1.3 Problem Cümlesi

Bu araştırmanın problemi “8. sınıf öğrencilerinin LGS’de sorulan cebir sorularına ilişkin görsel akıl yürütme becerileri nasıldır?” şeklinde belirlenmiş olup bu problem cümlesi ile beraber aşağıda verilen problemlere de cevap aranmıştır:

1. 8. sınıf öğrencilerinin LGS’de sorulan cebir sorularına ilişkin görsel akıl yürütme becerileri nasıldır?
2. 8. sınıf öğrencilerinin LGS’de sorulan cebir sorularına ilişkin görsel akıl yürütme becerileri başarı düzeylerine göre nasıl farklılıklar göstermektedir?

1.4 Araştırmanın Önemi

Bu araştırmada LGS Merkezi Ortak Sınavlarında sorulan cebir sorularına ilişkin 8. Sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Öğrencilerin matematiksel düşünme ve düşüncelerini modeller, formüller, grafikler ve tablolar aracılığıyla sunma beceri ve istekleri matematiksel yetkinlik olarak ifade edilmektedir (MEB 2018a). Öğrencilerin farklı görsel temsil biçimlerini etkili bir şekilde kullanıp matematiksel düşüncelerini ifade edebilmelerinin matematiksel iletişim becerilerinin gelişimini olumlu yönde etkilediği (MEB 2013) bilinmektedir. İnsanın zihin yapısı ile matematiksel etkinliklerin anlamı birlikte düşünüldüğünde görselleştirmenin matematiğin önemli bir yanı olduğu görülebilir (Şan 2008). Diğer taraftan cebirsel ifadelerin şekil, tablo ve grafikler yardımıyla sunulmasının görselleştirme yaklaşımının temel yollarından biri olduğu ifade edilmekte (İpek 2003), farklı eğitim kademelerinde yapılan matematik öğretiminde görsel temsillerin sıklıkla

kullanılması ve böylece matematik öğretiminin doğal bir unsuru olması gerektiği vurgulanmaktadır (Gutiérrez 1996'dan akt. Geçici 2022). Bir problemin anlaşılması amacıyla görselleştirme için şekil, tablo ve grafikler gibi görsel şekil ve şemaların kullanılması göz önüne alındığında görselleştirme bir amaç değil amaca ulaştıran bir araçtır (Uysal-Koç ve Başer 2012). Matematiksel görselleştirme, zihinsel olarak, kâğıt ve kalem kullanılarak veya teknoloji yardımıyla görüntülerin oluşturulması ve matematiksel anlama, anlamlandırma ve keşif için bu görüntülerin etkili bir şekilde kullanılması sürecidir (Zimmermann and Cunningham 1991). Öğrenciyi güdülemede, öğrencinin dikkatini çekmede, kavramlar arasındaki somut ve soyut ilişkisini kurabilmesinde, öğrenmeyi somutlaştırıp zihinde bilgiyi anlamlandırmasını sağlamada görselleştirme çok yararlı bir yaklaşımdır (Işık ve Konyalıoğlu 2005). Öğrencilerin soruları çözerken oluşturduğu görsel temsiller, onların matematiksel düşüncelerini ve yorumlamalarını anlamamızı sağlayabilir. (Ergen 2018).

Görsel akıl yürütme, grafik, diyagram ve resim gibi görseller kullanılarak sunulan bilişsel yapının gözlenmesi, içsel yapılarının ve bileşenlerinin anlaşılması, oluşan bu algılar üzerine düşünülerek sezgisel olarak hipotezler üretilmesi, bunların doğrulanması, düşüncelerin iletilmesi ve bağlantıların kurulması ile ilgilidir (Karras 2012). Akıl yürütme ve görsel temsilleri içine alan görsel akıl yürütme; cebirsel veya dilbilimsel araçları kullanmak yerine imge ve diyagramlarla görselleştirilen fikir ve kavramların anlaşılmasıyla ilgilenir (Anderson ve McCartney 1997'den akt. Geçici 2022). Hoffmann (2007), düşünmeyi kolaylaştırma süreci olarak tanımladığı görsel akıl yürütmenin bilgi geliştirme ve karar verme süreciyle ilgili olduğunu ifade eder. Fischbein (1987) ise görsel akıl yürütmenin, sadece anlamlı yapılarda verinin organize edilmesiyle yetinmeyen, çözümün analitik gelişimini de yönlendiren önemli bir faktör olduğunu belirtir.

Geçmişte yapılan çalışmalarda öğrencilerin daha çok geometri konularındaki görsel akıl yürütme, görsel temsil ve görselleştirme becerilerini inceleme üzerinde durulduğu görülmüştür (Delice ve Sevimli 2010, Karpuz, Koparan, Güven 2014, İlhan ve Aslaner 2018, Yaprak 2019, Geçici 2022). Bunun dışında matematiğin farklı konularında görselleştirmenin incelendiği çalışmalar da bulunmaktadır. Şan (2008) tarafından

yapılan araştırmada, görselleştirmenin ilköğretim 8. Sınıf ğrencilerinin “zdeşlikler” konusu hakkındaki erişilerine etkisi incelenmiştir. İpek (2003), çalışmasında öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları anlamalarına, bu kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına ve matematiğē karşı tutumlarına görselleştirme yönteminin etkisini deneysel bir çalışma ile incelemiştir. Uysal-Koğ ve Başer (2012) tarafından yapılan araştırmada, görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin matematik başarılarına ve matematiğē yönelik tutumlarına olan etkisi incelenmiştir. alışmasında görselleştirme kavramını kullanmasa da yukarıda belirtilen çalışmalara benzer bir çalışma yapan Körükçü (2008), “Tam sayılar” konusunun görsel araçlar kullanılarak öğretilmesinin öğrencilerin matematiksel başarılarına, hatırlamalarına, matematiğē yönelik tutumlarına ve kaygısına etkisini incelemiştir. Benzer şekilde Kükey vd. (2019) tarafından yapılan araştırmada, “Kesirler” konusunun görsel materyal ile öğretiminin öğrencilerin matematik başarı ve tutumlarına etkisi incelenmiştir. Bu çalışmaların yanında problem çözme ve görselleştirme ile ilgili çalışmalar da bulunmaktadır. Günaydın (2011) tarafından yapılan araştırmada geometri ve cebir problemlerinin çözüm süreçleri görselleme ve göstergebilim bağlamında incelenirken, Delice ve Sevimli (2010) tarafından yapılan araştırmada, ortaöğretim matematik ğrencilerinin geometri problemlerinin çözüm sürecinde görselleme becerilerindeki farklılıkları, Özkan vd. (2018) tarafından yapılan araştırmada altıncı sınıf ğrencilerinin kesirler konusuna ilişkin problemleri görsel modellerden yararlanarak çözüp özemeyecekleri ve görselleştirmeyi nasıl kullandıkları, Yaprak (2019) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin geometrik problemleri çözmelerinde görselleme süreçleri, Delibaş (2020) tarafından yapılan araştırmada, görselleştirme ve görsel temsile dayalı problem çözme etkinlikleriyle yapılan öğretimin, ğrencilerinin problem çözmeye yönelik başarıları, problem çözmeye yönelik tutumları ve matematik dersine yönelik tutumlarına etkisi incelenmiştir.

Özsoy (2018) tarafından yapılan araştırmada bir üniversitenin sınıf ğretmenliğı bölümünde öğrenim gören ğretmen adaylarının sözel problemlerin çözümü için oluşturdukları görsel temsiller ğretmen adaylarının uzamsal beceri düzeyleri dikkate alınarak incelenirken, Ergan (2018) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin problem çözme sürecinde oluşturduğı görsel temsillerin türleri, ilingir-Altınar ve Önal (2022)

tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin sözel problemleri çözerken hangi görsel ve görsel olmayan temsil türlerini kullandığı ve kullandıkları temsil türlerinin öğrencilerin problem çözme performanslarını yordama gücü incelenmiştir. Geçici (2022) tarafından yapılan araştırmada ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerileri incelenirken, Gülşen (2012) tarafından yapılan araştırmada matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumları seçilen görsel ispatlar kapsamında incelenmiştir. Şadan (2017) tarafından yapılan araştırmada Fen Lisesinde öğrenim gören öğrencilerin görsel ispatları geliştirme süreçleri, Sırtmaç (2018) tarafından yapılan araştırmada, ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik akıl yürütmeleri, Akkan vd. (2018) tarafından yapılan araştırmada matematik öğretmenlerinin görsel teoremleri ispatlama bağlamında, geometrik düşünme düzeyleri ile görsel akıl yürütme ve uzamsal görselleştirme becerileri arasında ne tür ilişkiler olduğu nitel olarak incelenmiştir. Yine İlhan ve Aslaner (2018) tarafından yapılan araştırmada, matematik öğretmeni adaylarının geometrik şekiller üzerine akıl yürütme becerileri, üniversite ve sınıf düzeyi değişkenleri dikkate alınarak incelenmiştir.

Son yıllarda görselleştirme (İpek 2003, Körükçü 2008, Şan 2008, Delice ve Sevimli 2010, Günaydın 2011, Uysal-Koğ ve Başer 2012, Özkan vd. 2018, Kükey vd. 2019, Yaprak 2019, Delibaş 2020) ve görsel akıl yürütmeye (Gülşen 2012, Şadan 2017, Akkan vd. 2018, İlhan ve Aslaner 2018, Sırtmaç 2018, Geçici 2022) yönelik araştırmaların daha çok yapıldığı görülmektedir. Bununla birlikte araştırma konusu olarak görsel temsilleri inceleyen çalışmalar da bulunmaktadır (Ergan 2018, Özsoy 2018, Çilingir-Altınır ve Önal 2022).

Türkiye, eleştirel düşünebilen, bilgiyi üretebilen ve sahip olduğu bilgiyi kullanarak üst düzey bilişsel beceri isteyen problemlere çözüm üretebilen bireylerin yetiştirilebilmesi, öğrenci başarılarının diğer ülkelerle karşılaştırılabilmesi ve uygulanan öğretim programlarının etkilerinin görülebilmesi için TIMSS ve PISA gibi uluslararası araştırmalara katılmaktadır (Çolak 2022).

PISA, öğrencilerin okuma becerileri, matematik ve fen okuryazarlığı alanlarında sahip oldukları bilgi ve becerilerine ait göstergelerini ölçen, üçer yıllık aralıklarla yapılan

uluslararası bir araştırmadır. Örgün eğitim öğretime devam eden 15 yaşındaki öğrencilerin bilgi ve becerilerini inceleyen bu araştırmaya Türkiye ilk olarak 2003 yılında dahil olmuş ve bu yıldan itibaren katılmaya devam etmiştir. 2003 yılından itibaren yapılan PISA uygulamaları incelendiğinde Türkiye'nin matematik okuryazarlığı alanında öğrenci performanslarının artış eğiliminde olduğu ve 2018 yılında en iyi performansı gösterdiği görülmektedir (MEB 2019).

TIMSS, 4. ve 8. sınıf düzeyinde örgün eğitim öğretime devam eden öğrencilerin matematik ve fen öğrenme alanlarında sahip oldukları akademik performansları ölçen uluslararası bir araştırmadır. Türkiye bu araştırmaya 8. sınıf düzeyinde ilk olarak 1999 yılında dahil olmuş ve bu yıldan itibaren 2007, 2011, 2015 ve 2019 yıllarında katılmaya devam etmiştir. 4. sınıf düzeyinde ise ilk olarak 2011 yılında dahil olmuş ve bu yıldan sonra 2015 ve 2019 yıllarında da katılım sağlamıştır. Geçen yirmi yıllık süreçte Türkiye'nin matematik öğrenme alanındaki öğrenci performanslarında önemli ölçüde iyileşme gösterdiği görülmektedir (MEB 2020).

Bunlarla birlikte MEB, 2015 yılında ABİDE projesinin pilot uygulamasını yapmıştır. Örgün eğitim öğretime devam eden 4. ve 8. sınıf düzeyindeki öğrencilere beceri testleri uygulanarak bu öğrencilerin sahip oldukları zihinsel özelliklerin ölçülmesi amaçlanmıştır (Sezer 2019).

Türkiye'nin TIMSS ve PISA gibi uygulamalara katılmasının, Türkiye'de ABİDE uygulamasının yapılmaya başlanmasının yeni nesil soru olarak ifade edilen beceri temelli soruların müfredatımıza girmesine aracılık ettiği söylenebilir (Çolak 2022). MEB tarafından yapılan düzenleme ile 2018 yılında ortaöğretim kurumlarına giriş için Liselere Geçiş Sistemi getirilmiştir. Yapılan bu düzenlemenin amacı LGS sınavı ile üst düzey düşünme becerileri olarak adlandırdığımız problem çözme ve akıl yürütme becerilerinin ölçülmesidir (MEB 2018b). LGS sınav soruları uluslararası sınavlarda sorulan sorularda olduğu gibi beceri temelli sorulardan oluşmaktadır (Çepni 2019).

Alanyazında yapılan çalışmalarda, öğrencilerin daha çok geometri konularındaki görsel akıl yürütme, görsel temsil ve görselleştirme becerilerinin incelendiği görülmüştür.

Türkiye’de cebir alanında görsel akıl yürütme becerileri üzerine yapılan çalışmalar sınırlıdır. Ayrıca ortaokul öğrencilerinin görsel akıl yürütme ve görselleştirme becerilerini incelemeye yönelik çalışmalar ise çok azdır. Bununla birlikte LGS Merkezi Ortak Sınavlarında sorulan cebir sorularına ilişkin 8. Sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerinin hangi düzeyde olduğunu inceleyen bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmanın bu boşluğu doldurması beklenmektedir. Dolayısıyla bu araştırmada LGS Merkezi Ortak Sınavlarında sorulan cebir sorularına ilişkin 8. Sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesinin alanyazına, öğretmenlerin derslerinde soru çözerken görsel akıl yürütmeyi ön planda tutmalarına teşvik ettiği için uygulayıcılara, beceri temelli soruları çözerken görsel akıl yürütme adımlarından yardım almalarına teşvik edeceği için öğrencilerin problem çözme başarılarına ve motivasyonlarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca MEB 2024 matematik öğretim programı görsel temsilleri bir kazanım olarak öngörmektedir.

1.5 Araştırmanın Sayıtları

Bu araştırmada aşağıda verilen sayıtların geçerli olduğu düşünülmektedir:

1. Araştırmaya gönüllü olarak katılan 8. sınıf öğrencilerinin Cebir Testi sorularına; sahip oldukları bilgi ve becerilerini kullanarak, objektif, içten ve samimi bir şekilde yanıt verdikleri varsayılmaktadır.
2. Araştırmaya gönüllü olarak katılan 8. sınıf öğrencilerinin yarı yapılandırılmış görüşme sorularını; sahip oldukları bilgi ve becerilerini kullanarak, objektif, içten ve samimi bir şekilde yanıtladıkları varsayılmaktadır.
3. Araştırmada kullanılan Cebir Testindeki ve yarı yapılandırılmış görüşme formunda bulunan soruların uygunluğu hakkında alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmaktadır.
4. Araştırma sürecinde kontrol dışı oluşan tüm etkenlerden her bir öğrencinin eşit düzeyde etkilendiği varsayılmaktadır.

1.6 Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırmanın sınırlılıkları aşağıda belirtilmiştir:

1. Bu araştırma 2023-2024 eğitim öğretim yılında Afyonkarahisar ilindeki üç farklı devlet okulunun 8. sınıf seviyesinde öğrenim gören öğrencilerden araştırmaya katılanlar ile sınırlıdır.
2. Araştırmanın bulguları Cebir Testi ve yarı yapılandırılmış görüşme uygulamalarıyla elde edilen verilerle sınırlıdır.
3. Araştırmada kullanılan Cebir Testi 2018-2023 yıllarında LGS Merkezi Ortak Sınavlarında sorulan cebir sorularından seçilen 15 soru ile sınırlıdır.
4. Öğrencilerin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütme süreçleri bu araştırmada kullanılan sorular ile sınırlıdır.

1.7 Tanımlar

Görsel Temsil: Bilginin görsel halini öne çıkarmak için kullanılan resim, diyagram ve grafik gibi yapılara görsel temsil adı verilir (Gilbert 2010).

Görselleştirme: Matematiksel bir problemi veya kavramı temsil ederken öğrencinin kalem, kağıt veya bilgisayar yardımıyla uygun bir diyagram çizme, diyagramı anlama ve problemi çözerken yardım amaçlı kullanma becerisine matematiksel görselleştirme denir (Zimmerman ve Cunningham 1991, s. 3)

Matematiksel Düşünme: Matematiksel düşünme; tahmin, analogi, formal ve formal olmayan akıl yürütme, tümdengelim, tümevarım, özelleştirme, genelleme, doğrulama gibi karmaşık süreçlerin birleşiminden oluşur (Liu 2003, s. 417).

Görsel Akıl Yürütme: Bir bilişsel yapıyı resim, grafik veya diyagram kullanarak oluşturma, gözlemleme, içyapısını ve bileşenlerini algılama, oluşturduğu bu algılar üzerine düşünüp sezgilerini kullanarak yeni hipotezler üretme, hipotezlerini doğrulama,

düşüncelerini iletme ve bunlar arasında bağlantılar kurma işlemlerinin tamamına görsel akıl yürütme denir (Karrass 2012, s. 27).

Cebir: Sayılar, işlemler ve değişkenleri birleştirerek matematiksel ilişki ve yapıların kısa ve öz biçimde ifade edilebilmesini sağlayan dile cebir denir (Blanton vd. 2011'den akt. Özmuşul 2024).



2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

2.1 Kuramsal Çerçeve

Bu başlık altında görsel akıl yürütme kavramı üzerinde durulmuş ve görsel temsil süreci, görselleştirme süreci ile matematiksel düşünmeye geçiş adımlarından oluşan araştırmanın kuramsal çerçevesine yer verilmiştir.

2.1.1 Görsel Akıl Yürütme

Günümüz matematik eğitiminde öğrencilerin matematiksel akıl yürütme, matematiksel temsil, matematiksel problem çözme, veriyi kullanarak karar verme, matematiksel teknoloji ve araçlarla çalışma kabiliyetlerinden oluşan matematik alan becerilerini etkili bir şekilde kullanmaları amaçlanmaktadır (MEB 2024). Akıl yürütme, bir işin veya problemin çözümünde varsayımlarda bulunma ve sonuca ulaşma için bir düşünce biçimini benimseme olarak tanımlanmaktadır (Bergqvist ve Lithner 2012). Araştırmacılar tarafından benzer tanımlar yapılmasına (Artz ve Yaloz-Femina 1999, Ball ve Bass 2003, Umay 2003) rağmen akıl yürütmenin tanımı için ortak bir noktada buluşamamışlardır (Yackel ve Hanna 2003'ten akt. Conner vd. 2014). Bu nedenle alanyazında analogik akıl yürütme, tümevarımsal akıl yürütme, tümdengelimsel akıl yürütme, geometrik akıl yürütme, cebirsel akıl yürütme, geometrik akıl yürütme ve nicel akıl yürütme gibi matematik eğitime dair akıl yürütme çeşitleri ortaya çıkmıştır (Conner vd. 2014).

Rival (1987, s.417)'e göre diyagramlar da matematik kadar eskiye dayanmaktadır. Matematiğin ilk kullanıldığı yerlerden olan Yunanistan ve Mezopotamya'da aynı zamanda görsel akıl yürütme de kullanılmıştır. Öklid'in Elementler'de sunduğu soyut ve mantıksal yapıdaki iddia ve ispatları aynı zamanda şekillerin kullanımına dayanır. Bu şekilleri kullanmadan veya akılda tutmadan bu sunumların takibi olanaksızdır (Stylianou 2000, s.4). 18. Yüzyıla kadar diyagramların kullanımı kabul gören ve tercih edilen bir uygulama olarak görülmüştür. Öyle ki grafiklerden ve diyagramlardan Euler ve Newton'un sunumlarında da sıkça yararlanılmıştır (Stylianou 2000).

Alanyazın incelendiğinde görsel akıl yürütmenin farklı tanımlarının yapıldığı araştırmalar bulunmaktadır (Fischbein 1987, Anderson ve McCartney 1997, Hoffmann 2007, Karrass 2012). Bir bilişsel yapıyı resim, grafik veya diyagram kullanarak oluşturma, gözlemlleme, içyapısını ve bileşenlerini algılama, oluşturduğu bu algılar üzerine düşünüp sezgilerini kullanarak yeni hipotezler üretme, hipotezlerini doğrulama, düşüncelerini iletme ve bunlar arasında bağlantılar kurma işlemlerinin tamamına görsel akıl yürütme denir (Karrass 2012, s.27). Hoffmann (2007) görsel akıl yürütmenin, bilgiyi geliştirme ve karar verme ile ilgili olduğunu belirtir ve düşünmeyi kolaylaştırma süreci olarak ifade eder. Arcavi (1994), sembol algısını iyi bir şekilde kullanan bir gözlemcinin ortaya çıkaracağı sembolik temsilin, görsel ipuçlarının yorumlanmasına destekleyici ve yardımcı olabileceğini savunmuştur. Bundan dolayı görsel akıl yürütme, hem zihnimize gerçekleşen görsel imajları oluşturma ve görme kabiliyeti olup hem de bunları görsel imajlarıyla canlandırma ve anlamlandırma yeteneğimizle ilgilidir (Karrass 2012). Fikir ve kavramların cebirsel ve sözel ifadeler yerine diyagram ve imgelerin aracılığıyla görselleştirilerek anlaşılmasına çalışılması görsel temsillerin yardımıyla görsel akıl yürütme ile ilgilidir (Anderson ve McCartney 1997). Fischbein (1987)'e göre görsel akıl yürütme, hem veriyi anlamlı yapılarda organize eden hem de analitik gelişim açısından çözümü yönlendiren önemli bir etkiye sahiptir. Ayrıca görsel akıl yürütme için görselleştirme çok önemlidir (Presmeg 1986, Aspinwall, Shaw ve Presmeg 1997).

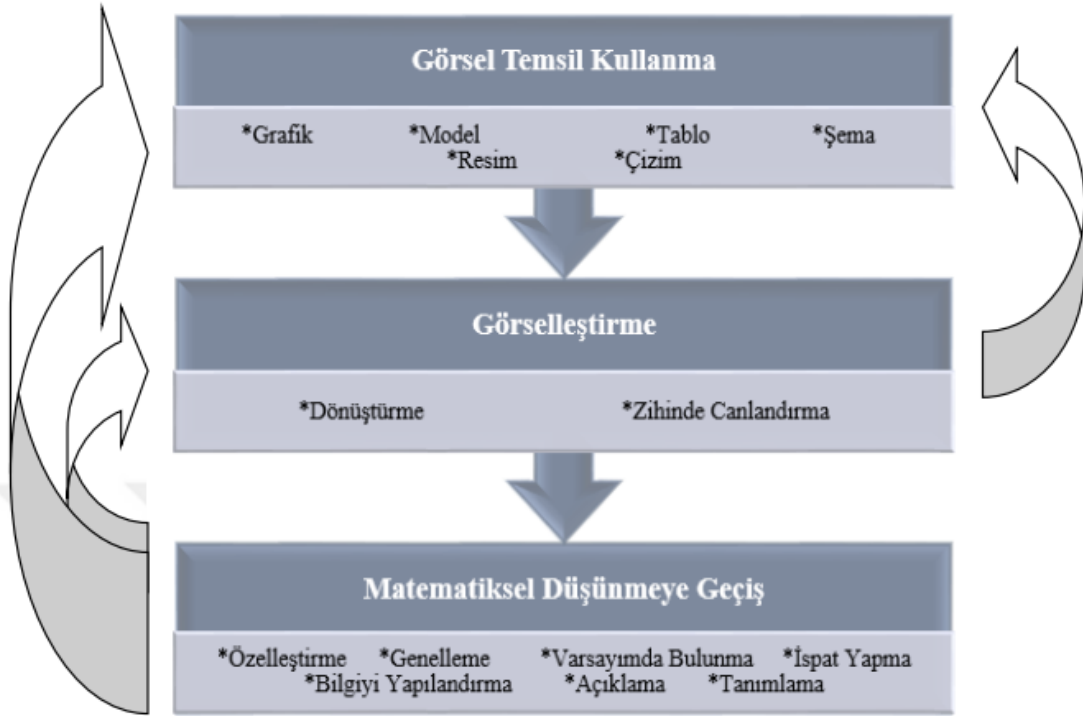
Görsel akıl yürütmenin sözel akıl yürütmeden farklı olmasının sebeplerinden biri diyagramlarla desteklenmesidir. Ancak bu görsel akıl yürütme ile sözel akıl yürütmenin birbirinden ayrıldığı anlamına gelmemeli, görsel akıl yürütmenin tamamlayıcı etkisini sözel akıl yürütme üzerinde göstermesi anlamına gelmelidir (akt. Pantziara vd. 2009). Matematiksel anlama sürecinin tam olarak yerine getirilebilmesi için görsel akıl yürütme ile olan ilişkisinden yararlanılabilir (Trigueros ve Martínez-Planell 2010). Pantziara vd. (2009), görsel açıdan ilişkileri anlama, yeniden düzenleme, değiştirme, ilişkiler hakkında yorum yapma gibi zihinsel becerilerin görsel akıl yürütme tarafından birleştirildiğini belirtmektedir. Bu da zihinsel becerileri kullanma yeteneğinin matematiksel problem çözme ve matematiksel düşünme açısından çok önemli ve güçlü

bir araç olduğunu gösterir (Pantziara vd. 2009). Gülşen (2012) görsel akıl yürütmenin öğrencilere matematiksel kavramların özelliklerini keşfetmede ve matematik problemlerinin çözüm sürecinde yardımcı olduğunu, bu durumun öğrencilerin matematik başarısı açısından özgüvenlerinin artmasını sağladığını belirtmiştir. Bundan dolayı öğrencilerin matematiksel problemlerin çözüm sürecinde görsel akıl yürütmeyi bir araç olarak deneyimlemelerine imkan verilmesi gerektiğine inanılır (Abd Hamid 2017).

Alanyazına bakıldığında görsel akıl yürütmeyle ilgili birkaç kavramsal çerçeveye karşılaşılmıştır (Russell 1997, Natsheh ve Karsenty 2014, Abd Hamid 2017, Geçici ve Türnüklü 2021). Abd Hamid (2017), kodlama ve kod çözme süreçlerini kullanarak görsel akıl yürütme becerilerinin incelenebileceğini belirtmiştir. Öğrencilerin görsel temsilleri kullanarak yazılı veya sözlü bilgileri açıklamaları kodlama süreci olarak ifade edilirken; görsel temsilleri okuma, yorumlama ve anlamlandırma becerilerini kullanarak görsel bilgiye ulaşmaları ise kod çözme süreci olarak tanımlanabilir.

Görsel akıl yürütme ile ilgili bir diğer kavramsal çerçeve ise Natsheh ve Karsenty (2014)'nin oluşturduğu “Görsel çıkarımsal kavramsal akıl yürütme” çerçevesidir. Kavramsallaştırmanın geliştirilmesi ve bununla ilgili çıkarımlara ulaşmak için görsel düşünceleri kullanma yeteneğiyle ilgilenen bu çerçeve görsel akıl yürütmeyi anlamlandırabilmenin yolunu gösterecek niteliktedir. Natsheh ve Karsenty (2014)'nin oluşturduğu bu çerçeve görsel temsil, görsel eylem ve görsel amaç bileşenlerinden oluşur. Tablo, grafik, şekil, resim gibi iki veya üç boyutlu nesneler görsel temsillere örnek olarak verilebilir. Görsel temsillerin kullanılması bilginin yoğunlaştırılmasını, kanıtlara ilişkin farklı yaklaşımların düşünülmesini veya yeni sonuçlara ulaşılmasını sağlayabilir (Presmeg 1986, Alcock ve Simpson 2004). Bir görselin okunması, parçalarına ayrılması, farklı bir görsel temsile dönüştürülmesi, görsele eklemeler yapılması gibi eylemler yapılarak görsel temsilden yeni bilgilere ulaşılması işlemleri ise görsel eylemlerdir. Görsel amaçlar olarak adlandırılan bir bilginin tanımlanması, açıklanması, yeniden ifade edilmesi ve ispatı gibi farklı amaçlara ulaşabilmek için de görsel temsillerin üzerinde farklı görsel eylemler uygulanarak görsel temsiller arasındaki ilişki ortaya çıkarılmaya çalışılır.

Görselleştirme ve görsel akıl yürütme kavramlarının birbiriyle iç içe olduğunu düşünen Geçici ve Türnüklü (2021) bu iki kavram arasındaki ayrımın belirgin bir şekilde yapılabilmesi için görsel akıl yürütme ile ilgili bir kavramsal çerçeve oluşturmuşlardır. Geçici ve Türnüklü (2021) geliştirdikleri görsel akıl yürütme çerçevesinde, Natsheh ve Karsenty (2014)'nin oluşturduğu “Görsel çıkarımsal kavramsal akıl yürütme” çerçevesinden faydalandıklarını belirtmişlerdir. Geçici ve Türnüklü (2021) geliştirdikleri görsel akıl yürütme çerçevesinde, görselleştirmenin görsel akıl yürütmedeki yerini açıklayarak görsel akıl yürütmeyle olan ayrımını yapmaya çalışmıştır. Ayrıca matematiksel düşünme ile görsel akıl yürütme arasındaki ilişkiden bahsettiği için bu çerçeve diğer kavramsal çerçevelerden ayrılmaktadır. Bu araştırmada Geçici ve Türnüklü (2021)'nün geliştirdiği kavramsal çerçeve dikkate alınmıştır. Geçici ve Türnüklü (2021)'nün geliştirdiği kavramsal çerçeve Şekil 2.1’de sunulmuştur:



Şekil 2.1 Görsel akıl yürütmeye yönelik kavramsal çerçeve

Şekil 2.1’de verilen kavramsal çerçeveyi incelediğimizde ilk bileşenin görsel temsil olduğu görülmekte olup öncelikle görsel temsil ele alınmalıdır. Daha sonra sunulan veya kişinin kendisinin oluşturduğu görsel temsil ile etkileşimde bulunularak

görselleştirme adımına geçiş yapılmış olur. Görselleştirme aşamasında zihinde canlandırma veya dönüştürme gibi bazı zihinsel etkinlikler gerçekleştirilir. Son aşamada ise görselleştirme adımı tamamlanmış olup bu adımda ortaya çıkan durum ile ilgili açıklamalar yapılarak, tahminlerde bulunularak veya genellemelerle matematiksel düşünme etkinliklerinde bulunulur. Herhangi bir adımdaki etkinlikler yapılırken kişi bir önceki adıma tekrar dönüş yaparak yeni süreçler oluşturabilir (Geçici ve Türnüklü 2021).

2.1.2 Görsel Temsil

Literatürde görsel temsillerle ilgili de birçok tanım bulunmaktadır. Görsel temsiller, görsel imgeler aracılığıyla bir fikrin veya kavramın aktarılmasına ve konuşturulmasına imkan veren bir dil ve zihinsel şekillerin dışa aktarılmasına yardımcı olan bir araçtır (Goldin 1998). Görsel temsil kullanımı matematiksel ilişkileri veya kavrama eylemini gerçekleştirdiği için bir süreç, öğelere ilişkin bir görsel yapının ortaya çıkarılmasını içerdiği için nihai bir üründür (Stylianou 2010). Presmeg (1986) görsel temsili, öğrenciler ve öğretmenlerin birlikte veya her biri ayrı ayrı olarak görsel görüntüleri oluşturmaları ve oluşturdıkları bu temsilleri kullanmaları olarak tanımlar. Bir diğer tanımda ise bilginin uzamsal bir yapı içerisinde ifade edildiği gösterimler görsel temsil olarak adlandırılır (Diezmann ve English 2001). Aynı şekilde bilginin görsel halini öne çıkarmak için kullanılan resim, diyagram ve grafik gibi yapılara görsel temsil adı verilir (Gilbert 2010). Larkin ve Simon (1987)'a göre görsel temsil, bilginin çok boyutlu olacak şekilde yerleştirilerek oluşturulan veri yapılarıdır. Sözel matematik problemlerinin çözümünde görsel temsillerin kullanımı sıkça önerilir (Lesh 1999, Pape ve Tchoshanov 2001, Zawojewski ve Lesh 2003).

Dış temsilleri beş türe ayıran Lesh vd. (1987) bunların konuşma dili, resim, sembolik ifade, somut modeller ve gerçek yaşam durumlarından oluştuğunu belirtmiştir. Gilbert (2010)'e göre ise soyut yapıda bulunan sembol, işaret ve söylem gibi yapılar sembolik temsili; bilginin görsel halinin öne çıkarılmasını sağlayan grafik veya diyagram gibi yapılar da görsel temsili oluşturur. Bu çalışmada ele alınan temsiller Gilbert (2010)'in sembolik ve görsel olarak sınıflandırdığı temsiller doğrultusunda incelenmiştir.

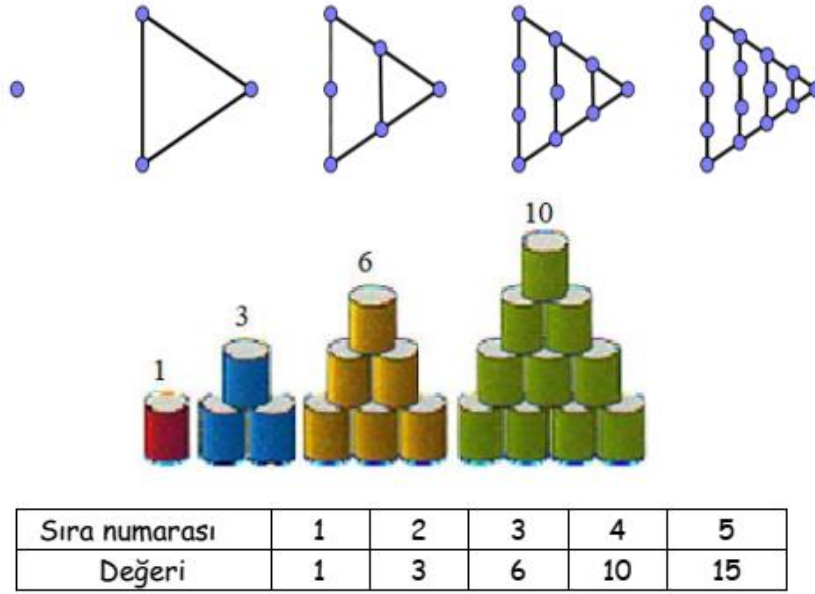
Hegarty ve Kozhevnikov (1999) görsel temsilleri şematik ve resimsel olmak üzere iki başlık altında toplamıştır. Uzamsal dönüşümlerin hayal edilmesinde ve nesnelerin aralarındaki uzamsal ilişkilerin temsil edilmesinde şematik temsiller rol oynar. Görsel görüntülerin daha detaylı ve canlı bir şekilde oluşturulması için resimsel temsiller kullanılır. Problem çözme sürecinde görsel temsillerin oluşturulması ve kullanılmasının problem çözme başarısına etkisinin olduğu birçok çalışmada görülmektedir (Hegarty ve Kozhevnikov 1999, Van Garderen ve Montague 2003, Uesaka vd. 2007, Ahmad vd. 2010). Bununla birlikte Hegarty ve Kozhevnikov (1999) problem çözme başarısının resimsel temsil kullanımı ile negatif yönlü bir ilişkiye sahip olmasına rağmen şematik temsil kullanımı ile pozitif yönlü bir ilişkiye sahip olduğunu belirtmişlerdir.

Alanyazında biliş ve öğretim ile ilgili yapılan araştırmalar incelendiğinde kullanılan temsil türleri içerisinde en fazla dikkat çeken grafiksel dış temsillerdir (Cox ve Brna 1995). Bilim, mantık ve matematik gibi alanlarda problem çözme sürecinde diyagramları yani dış görsel temsilleri kullanmanın çözüme daha kolay ulaştırdığını ortaya koyan önemli kanıtlar bulunmaktadır (Larkin ve Simon 1987, Beckmann 2004, Stylianou ve Silver 2004, Zahner ve Corter 2010). Ott (2015)'e göre problemle ilgili nesnelere, bu nesnelerin ilişkisel ve matematiksel yanlarına odaklanılarak görsel temsillerin oluşturulması ve problemin dışına çıkılmaması durumları incelenerek görsel temsilin soyutlama derecesi belirlenebilir. Geçici (2022, s.22) tarafından yapılan araştırmada paylaşılan görsel temsiller ile ilgili bazı örneklerin bulunduğu görsel Şekil 2.2'de sunulmuştur:

“1 ile başlayıp ardışık tamsayıların toplamı biçiminde yazılabilen sayılara üçgensel sayılar denir” (Donald, 1998, s. 2). Örneğin, $T_1 = 1$, $T_2 = 1+2 = 3$, $T_3 = 1+2+3 = 6$ olur.

n . üçgensel sayı, $T_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ biçiminde ifade edilebilir.

Bir öğrenci yukarıdaki gibi bir tanımla karşılaştığında, tanımlı anlamlandırabilmesi için bir takım görsel temsiller işini kolaylaştıracaktır.



Şekil 2.2 Görsel temsil örnekleri

Matematik öğrenme ve matematiksel problemlerin çözüm sürecinde, görsel temsilleri oluşturma ve kullanma stratejisinin önemi ve yeri araştırmacılar tarafından yıllardır incelenmektedir (Goldin ve Kaput 1996, Goldin 1998). Greeno ve Hall (1997) görsel temsilleri matematiksel problemlerin çözümleri sonucunda elde edilen bir ürün olarak değerlendirmiştir. Stylianou (2011) ise görsel temsillerin problem çözme sürecinin kendisi olduğunu sadece nihai bir ürün olmadığını belirtmiştir. Ergen (2018), görsel temsillerin oluşturulması ve kullanılmasının problem çözmek için sadece bir yardım olarak görülmemesi gerektiğini, öğrenciler tarafından geliştirilen görsel temsillerin problem çözme sürecinin önemli bir parçası olduğunun anlaşılması gerektiğini belirtir. Bir görsel temsili tam olarak içselleştiren ve kavrayan bir öğrenci görsel temsilleri problem çözme sürecinde faydalı bir araç olarak kullanabilir (Dufour-Janvier vd. 1987’den akt. Ergen 2018).

Görsel temsiller matematiksel problemlerin çözüm sürecinde; problemin analizi, çözümün planlanması, yapılacak olan eylemlerin açıklanması ve doğrulanması, sonuçların tahmin edilmesi, sürecin izlenmesi ve süreç hakkında değerlendirmenin yapılması, sonuçların birleştirilip bütünleştirilmesi ve iletilmesi için bilişsel bir etkinlik aracı olarak kullanılabilir (Pape ve Tchoshanov 2001).

2.1.3 Görselleştirme

Görselleştirme ile ilgili farklı uzmanlık alanlarında bundan 30 yıl öncesine kadar da birçok araştırma ve yayın yapıldığı ifade edilmektedir (Gutiérrez 1996). İnsanların değişik koşullar altında farklı biçimlerdeki duyuşsal bilgiye göre görsel bilgiye daha çok eğilim gösterdikleri ve güvendikleri belirlenmiştir (Sinnott, Spence ve Soto-Faraco 2007). Görselleştirme, görsel bilgiyle iletişime geçme, görsel bilgiyi oluşturma, dönüştürme, temsil etme, genelleme, yansıma ve belgeleme yeteneği olarak ifade edilebilir (Hershkowitz vd. 1989'dan akt. Hershkowitz vd. 2001). Bundan dolayı matematiksel kavramların öğrenilmesi açısından görselleştirme çok önemlidir (Hershkowitz vd. 2001).

Görme kavramının sosyo-kültürel ve biyolojik olarak insan doğasının temelinde olması, insanların görsel bilgiye güvenmelerinin ve görselleştirmenin etkili olmasının sebebi olarak gösterilebilir (Arcavi 2003). Görselleştirme çok geniş bir alana sahip olduğu için onu tamamen sınırlamak uygun değildir (Gutiérrez 1996). Matematik, görselleştirmenin bulunduğu tüm uzmanlık alanları arasında görselleştirmenin temelini dayandığı alandır (Zimmerman ve Cunningham 1991). Temeli matematiğe dayanan ve çok geniş alanlarda kullanılan görselleştirmeden matematik eğitiminde yararlanma düşüncesinin uygun olduğu görülmektedir.

Farklı yaklaşımlar kullanılarak elde edildiği için matematiksel bilgiyi ortaya çıkarma süreci oldukça karmaşıktır (Duval 2006). Bundan dolayı matematiksel ilerleme farklı akıl yürütme biçimlerinin birleşimi sonucu gerçekleşir (Healy ve Hoyles 1999). Bu araştırmada akıl yürütme çeşitleri içerisinde görsel akıl yürütmenin kullanımı da incelenecek olup bu başlık altında görselleştirmenin matematikteki kullanım yerlerine

de yer verilecektir.

Alanyazın incelendiğinde görselleştirme ile görsel akıl yürütmenin birlikte bahsedildiği araştırmalar bulunmaktadır (Nemirovsky ve Noble 1997, Healy ve Hoyles 1999, Hanna 2000, Presmeg ve Balderas-Canas 2001, Stylianou 2002, Alcock ve Simpson 2004, Zahner ve Corter 2010). Bununla birlikte görsel akıl yürütmenin adının geçtiği araştırmalarıda (Arcavi 2003, Borba ve Villarreal 2005, Pitta Pantazi ve Christou 2009) ve başlığında görsel akıl yürütme ifadesini içeren araştırmalarda (Healy ve Hoyles 1999, Hershkowitz vd. 2001) görselleştirmenin çeşitli tanımları yer almaktadır. Matematik eğitiminde görselleştirme kavramı ile ilgili yapılan teoriksel araştırmaların çok geniş bir alana yayılmasından dolayı görselleştirme tanımları bir tek teoriksel yapının parçası şeklinde ifade edilememiştir (Gutiérrez 1996, Nemirovsky ve Noble 1997, Borba ve Villarreal 2005). Bundan dolayı görselleştirmenin matematikte daha çok incelenmesinin gerektiği söylenmektedir (Mancosu 2005).

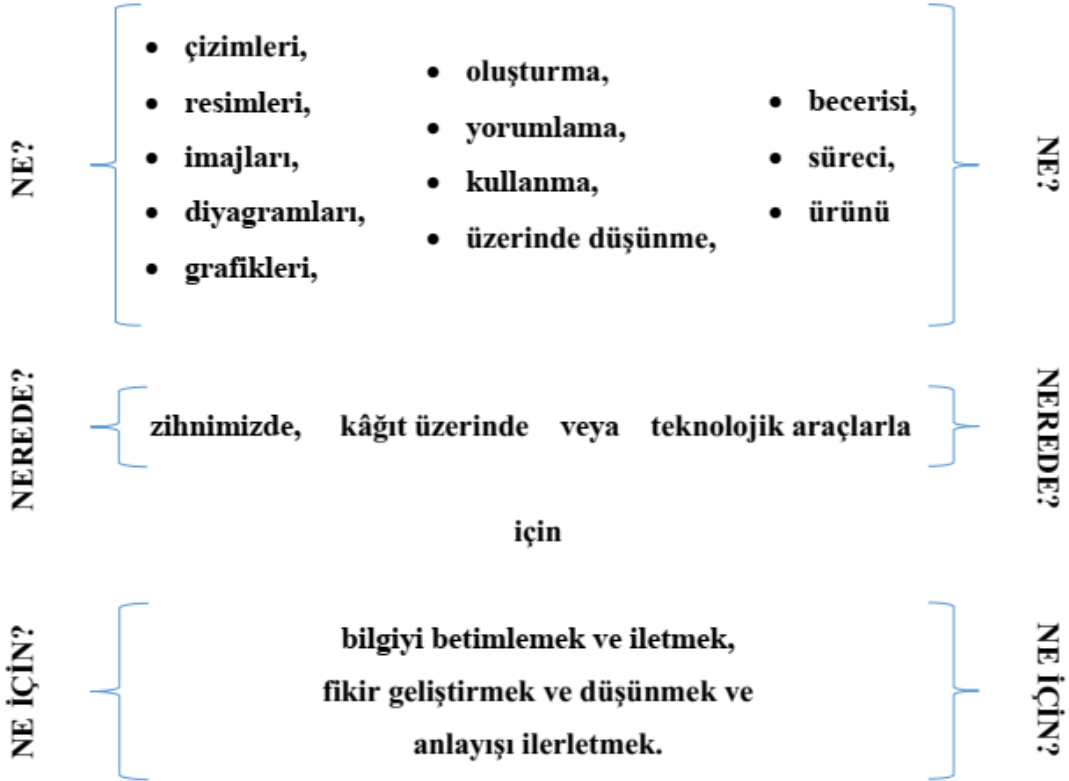
Matematiksel bir problemi veya kavramı temsil ederken öğrencinin kalem, kağıt veya bilgisayar yardımıyla uygun bir diyagram çizme, diyagramı anlama ve problemi çözerken yardım amaçlı kullanma becerisine matematiksel görselleştirme denir (Zimmerman ve Cunningham 1991, s.3). Wheatley (1998) görselleştirmeyi karmaşık bir süreç olarak nitelendirir ve temsillendirme, yapılandırma ve zihinsel imajlar arasındaki bir dönüşüm süreci olduğunu belirtir. Grafik ve resim gibi görsellerin kullanımıyla verilerin somutlaştırılıp gözle rahatlıkla algılanabilecek şekilde düzenlenmesi görselleştirme olarak adlandırılabilir (Sevimli vd. 2008). Russell (1997), matematiksel görselleştirmenin bir süreç olduğunu ve bu sürecin matematik problemlerinin çözümünde uygun bir görsel temsilin oluşturulması ve oluşturulan bu temsilin çözümde kullanılması aşamalarından oluştuğunu belirtmiştir. Gilbert (2008)'e göre iç temsil ve dış temsil olmak üzere iki tür görsel temsil bulunur. İç temsil bireyin kişisel zihinsel yapısıdır. Başkaları tarafından denetlenmeye izin verilen ise dış temsildir. Bu iki temsil biçimi de alanyazında görselleştirme olarak adlandırılmaktadır (Gilbert 2008).

Soyut sembolik temsiller ve kavramların görsel temsiller aracılığıyla somutlaştırılıp öğrenciler tarafından anlaşılmasını sağlamak için öğretim düzeyinin her aşamasında

görselleştirme sürecinden faydalanılabilir (Presmeg 2006). Somut materyal, jestsel, sözel, sembolik ve görsel olmak üzere görselleştirmenin ifadesini ve dış temsillerin inşasını sağlayan modlar genel temsil biçimleri olarak ifade edilebilir (Gilbert vd. 2000). Farmaki ve Paschos (2007) görselleştirmenin, matematiksel bir nesnenin içerisindeki yapıların arasındaki ilişkilerin tamamının kavranmasını sağlayarak kısa yoldan ve hızlıca tüm yapısının anlaşılabilirliğini iddia etmektedir. Matematiksel yapıların görselleştirilmesi, öncesinde görülmemiş bir gerçeğin imajını zihninizde canlandırılmasını ve zihninizin öncesinde hiç bulunmadığı yerlere gitmesini sağlar (Borwein ve Jorgenson 2001). Zimmerman ve Cunningham (1991) matematiksel görselleştirmenin matematiği resimler aracılığıyla anlama olarak ifade edilemeyeceğini, matematiksel görselleştirmenin bir sezi olduğunu ve düşüncenin kalbine işlediğini belirtir.

Görselleştirmenin tanımını, “bilgiyi betimlemek ve iletmek, önceden bilinmeyen fikirleri geliştirmek ve düşünmek ve anlayışları iletme amacıyla, zihninizde, kâğıt üzerinde veya teknolojik araçlarla resimlerin, imajların, diyagramların oluşturulması, yorumlanması, kullanılması ve üzerinde düşünme becerisi, süreci ve ürünü” olarak yapan Arcavi (2003, s.217) “Ne için?” , “Nerede?” ve “Ne” sorularına yaptığı tanımla cevap vermek istemiştir. Arcavi (2015, s.146) tarafından yapılan araştırmada bu bileşenlerin ayrıntılı olarak gösterildiği görsel Şekil 2.2’de sunulmuştur:

Görselleştirilen görselleştirme



Şekil 2.3 Görselleştirmenin tanımına yönelik bir görsel

Görselleştirmenin matematikçilerin çalışmalarında önemli bir yere ve kritik bir göreve sahip olduğu kabul edilmektedir (Noss vd. 1997). Bu görüşlerden ilki görselleştirmenin matematikte sadece yardımcı bir görev üstlendiğini daha fazlasının ise mümkün olamayacağını düşünenlerdir (Noss vd. 1997, Morgan 2001, Gagatsis ve Elia 2004, Stylianou ve Silver 2004, Borba ve Villarreal 2005, Alshwaikh 2007, Pantziara vd. 2009). Bu görüşü savunanlardan (Alshwaikh 2007) görselleştirmenin, matematiğin aksine biçimselliğin bulunmadığı kişisel bir yapı olduğundan bahsetmiş olup araştırmacı için önemli ve motivasyon kaynağı olmasına rağmen bilgiyi göstermede sınırlı olduğunu belirtmiştir. Zimmerman ve Cunningham (1991, s.3)'a göre ise görselleştirme bir amaç olmayıp amaca ulaşmaya yardım eden bir araçtır. Diğer bir görüş ise görselleştirme ile diğer yöntemlerin birbirinden farkının olmadığı görüşüdür. Elliott vd. (2000) görselleştirmenin, matematikte kavramsal anlamayı güçlendirmesi ve teşvik etmesine rağmen diğer yöntemlerden çok da farklı olmadığı ve aynı öneme sahip olduğunu belirtmektedir. Görüşlerden bir diğeri ise görselleştirmenin matematikte

önemli bir yere sahip olduğundan merkezde yer alması gerektiğidir (Pylyshyn 2003, Alcock ve Simpson 2004, Borba ve Villarreal 2005). Pylyshyn (2003) matematikteki bazı konularda görselleştirme olmadan, şekil çizilmeden akılda canlandırmanın zor olacağından bahsetmektedir. Farklı bir görüşte ise görselleştirmenin matematiğin bir parçası olduğu savunulmaktadır (Alcock ve Simpson 2004, Borba ve Villarreal 2005). Stylianou ve Silver (2004), yapılan araştırmalarda görselleştirme ile matematiksel başarı arasında bulunan ilişkinin doğası ile ilgili daha çok bilgiye ihtiyaç olduğunu, ilişkinin tam olarak belirgin olmadığını iddia etmektedirler.

Presmeg (1986) görselleştirmenin hem uzamsal yapıyı hem de uzamsal veya görsel bilginin tasvirinin yapıldığı zihinsel şemalardan oluşan görsel imajları oluşturma ve dönüştürme süreçlerini içerdiğini belirtmektedir. Uzamsal ve görsel bilginin tasvir edildiği zihinsel şemalar bahsedilen görsel imajları oluşturur (Delibaş 2020). Presmeg (1986) görsel imajları beş gruba ayırıp bunların tanımlarını yapmıştır. Görsel imajlardan ilki resimsel görüntülerden oluşan somut imajdır. İkincisi saf ilişkilerin uzamsal-görsel bir şema ile tasvir edilerek gösterildiği örüntü imajıdır. Bu imaj şekli yapılara ait önemli detayların zihinde hatırlanmasına olanak sağlar. Üçüncüsü kinestetik imajdır. Kas gücünün kullanılmasına ihtiyaç duyulan jestler ve hareketleri içerir. Dördüncüsü geometrik şekilleri dönüştürerek farklı somut imajlar oluşturup bir kavramın daha iyi anlaşılmasına yardımcı olan dinamik imajdır. Son imaj çeşidi ise defter, kitap, tahta vb. ders araçlarında yazılı olarak bulunan ancak hafızamızda tuttuğumuz formüllerin görüntülerinden oluşan formül imajıdır.

Matematiksel kavramları daha iyi anlamak ve keşfetmek için zihinde oluşturulan imajlardan en iyi bir şekilde yararlanma süreci matematiksel görselleştirme olarak ifade edilir (Zimmerman ve Cunningham 1991). Presmeg (1986) soyutlama ve genelleme yapmaya en uygun olan örüntü imajlarının problemlerin ilişkisel yapılarını ortaya çıkarmasından dolayı problem çözme için önemli bir yere sahip olduğunu belirtir. Bununla birlikte somut imajların ise diğer imaj türlerine göre daha az kullanıldığını ifade eder.

Geçici ve Türnüklü (2021), uzamsal yeteneğin gerekli olduğu zihinde canlandırma ile

görsel bir temsilin farklı bir matematiksel yapıya çevrildiği dönüştürme kavramlarının görselleştirme sürecini oluşturduğunu belirtmişlerdir. Kareli bir kağıt üzerine çizilmiş paralelkenar şeklinin görsel temsili dikdörtgen gibi farklı bir matematiksel yapıya dönüştürülerek paralelkenarın alanının hesaplanması dönüştürmeye örnek olarak verilebilir. Aynı şekilde tablo ve grafikler incelenip anlamlandırıldıktan sonra matematiksel çıkarımlarda bulunmak da dönüştürmeye bir örnektir. Diğer bir örnekte ise bir dikdörtgenin uzun kenarı etrafında belirli bir açıyla döndürülmesi sonucu ortaya çıkacak olan cisim zihinde canlandırma sayesinde tahmin edilebilir. İki veya üç boyutlu yapıların temsillerinin zihindeki imajlarının oluşturulması ve bu yapıların farklı yönlerini gözümüzde canlandırabilmek için zihindeki imajların döndürülüp hareket ettirilmesi de zihinde canlandırmaya örnek verilebilir.

Bu araştırmada akıl yürütme çeşitleri içerisinde görsel akıl yürütmenin kullanımı incelenecek olup bu başlık altında görselleştirmenin matematikteki kullanım yerlerine de yer verilecektir.

2.1.4 Matematiksel Düşünmeye Geçiş

Matematiksel düşünme; tahmin, analogi, formal ve formal olmayan akıl yürütme, tümdengelim, tümevarım, özelleştirme, genelleme, doğrulama gibi karmaşık süreçlerin birleşiminden oluşur (Liu 2003, s.417). Alanyazında matematik eğitimi ile ilgili araştırmalara bakıldığında, matematiksel düşünmeyi bazı araştırmacılar (Tall 1995, Dreyfus 2002) matematiksel kavramların gelişimi olarak incelemiş, bazı araştırmacılar (Burton 1984, Harel ve Sowder 2005, Mason vd. 2010, Schoenfeld 2016, Geçici ve Türnüklü 2021) ise bakış açısı olarak matematiksel süreçleri ele alarak özelleştirme, varsayımında bulunma, ispat yapma ve genelleme gibi süreçler olarak incelemişlerdir.

Matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların gelişimi bakış açısından inceleyen araştırmaların odak noktasının kavramların zihinde nasıl yapılandırıldığını anlamak olduğu, bakış açısı olarak matematiksel süreçleri ele alan araştırmaların odak noktasının ise “Matematiksel düşünme nasıl gerçekleşir?” sorusuna cevap aramak olduğu söylenebilir (Çelik 2016). Matematiksel düşünmenin etkili ve güçlü araçları olan görsel

temsiller matematiksel düşünce ve fikirleri somutlaştırarak anlaşılır hale getirir (Greeno ve Hall 1997). Pantziara vd. (2009) matematiksel düşünme ve matematiksel problem çözme için güçlü ve önemli olan bir diğer aracın ise öğrencilerin zihinsel becerileri kullanma yeteneklerinin olduğunu belirtirler.

Geçici ve Tüknüklü (2021)'nün geliştirdiği görsel akıl yürütme kavramsal çerçevesi bakış açısı olarak matematiksel süreçleri ele alarak oluşturulmuş ve görsel temsil kullanma, görselleştirme ve matematiksel düşünmeye geçiş aşamalarından oluşmaktadır. Birey matematiksel düşünmeye geçiş sürecinin tüm aşamalarını anlamlandırabiliyor, her bir aşamada ne yapacağını kararını verebiliyor ve bunları uygulayabiliyorsa istenilen sonuca ulaşmasa bile görsel akıl yürütme becerilerini kullanmış olduğu söylenebilir. Geçici ve Tüknüklü (2021) geliştirdikleri görsel akıl yürütme çerçevesinin, ilkokuldan üniversiteye kadar görsel temsillerin sıklıkla kullanıldığı geometri alanıyla birlikte sayılar, istatistik ve cebir gibi alanlarda da kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Çerçevenin belirtilen alanlardaki matematiksel problemlerin çözüm süreçlerinde kullanılması halinde öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerine önemli katkı sağlayacağı ifade edilmiştir. Bu araştırmada öğrencilerin cebir sorularına ilişkin görsel akıl yürütme becerileri Geçici ve Tüknüklü (2021)'nün geliştirdiği görsel akıl yürütme kavramsal çerçevesi dikkate alınarak incelenmiştir.

2.2 İlgili Araştırmalar

Bu başlık altında görsel akıl yürütme ve cebir ile ilgili yapılmış çalışmalara yer verilmiştir.

2.2.1 Görselleştirme ile ilgili çalışmalar

Presmeg ve Balderas-Cañas (2001) tarafından yapılan araştırmada, rutin olmayan problemlerin çözümünde lisansüstü öğrencilerinin görsel düşüncelerinin rolü, kısıtlamaları ve kapsamı incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir üniversitede yüksek lisans yapan 4 öğrenci oluşturmuştur. Araştırma sonucunda öğrencilere sorulan üç sözel problemin tamamında tüm öğrencilerin görselleştirmeyi kullandığı tespit

edilmiştir. Diyagramların kullanılmadığı ve çözümün cebirsel olarak yapıldığı durumlarda da görsel imajlar görülmüştür. Ayrıca görselleştirme kullanımında duyuşsal özelliklerin de rolünün olduğu tespit edilmiştir.

Lowrie ve Kay (2001) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin sözel matematik problemleri çözerken tercih ettikleri farklı yaklaşımların belirlenmesi, görsel ve görsel olmayan yöntemlerin başarı üzerine etkisi ve problemlerin karmaşıklığının azalmasının problemi çözerken kullanılacak yöntemin seçimine etkisi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 112 altıncı sınıf öğrencisi oluşturmuştur. 20 matematik probleminden oluşan bir test uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Öğrencilerden problemleri çözmeleri ve çözümlerinde kullandıkları yöntemleri belirtmeleri istenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin kolay sorularda görsel olmayan yöntemleri kullandıkları, yeni veya daha zor sorularda ise görsel yöntemleri kullanarak çözümlerini yaptıkları tespit edilmiştir.

Lowrie ve Clements (2001) tarafından yapılan araştırmada, altıncı sınıf öğrencilerinin matematik problemlerini çözerken kullandıkları görsel ve görsel olmayan yöntemler incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 3 altıncı sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Matematik problemlerini çözerken öğrencilerden biri genellikle görsel yöntemi, diğeri görsel olmayan yöntemi, üçüncüsü ise her iki yöntemi de tercih etmektedir. Araştırma sonucunda tüm öğrencilerin yıl boyunca yapılan etkinliklerle problemlere karşı aşinalık kazandıkları ve bu sayede matematik problemlerini çözerken görsel olmayan sözel akıl yürütme yöntemlerini daha çok tercih ettikleri belirlenmiştir.

Konyalıoğlu (2003) tarafından yapılan araştırmada, vektör uzayları konusuna ait kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkililiği incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 60 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Bu araştırma kapsamında verilen dersler, deney grubunda görselleştirme yaklaşımıyla, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yöntemleri ile yürütülmüştür. Araştırma sonucunda vektör uzayları konusundaki kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının daha etkili olduğu ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte deney ve kontrol gruplarının

matematiğe yönelik tutumlarının deney grubu lehine anlamlı farklılık gösterdiği tespit edilmiştir.

İpek (2003) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları anlamalarına, bu kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına ve matematiğe karşı tutumlarına görselleştirme yönteminin etkisi deneysel bir çalışma ile incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 73 dördüncü sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Örneklemeye alınan bu 73 öğrenci ile deney ve kontrol grupları oluşturulmuştur. Kontrol grubunda “Kompleks Sayılar” konusu okulda mevcut uygulanmakta olan öğretim yöntemiyle, deney grubunda ise görselleştirilmiş matematik öğretimi kullanılarak sunulmuştur. “Kompleks Sayılar Kavram Testi” , “Matematik Dersi Tutum Ölçeği” ve “Bilimsel İşlem Beceri Testi” ölçekleri kullanılıp ön test-son test olarak uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “yüzde-frekans” ve “çift katlı ve bağımsız grup t-testi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları anlamada görselleştirme yönteminin çok daha etkili olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca görselleştirme yönteminin öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına olumlu etkisinin olduğu görülmüştür. Ancak her iki yöntemde öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarına olan etkisinin farklı olmadığı tespit edilmiştir.

Woolner (2004) tarafından yapılan araştırmada, matematik öğretiminde sözel yaklaşım ile görsel-uzamsal yaklaşım karşılaştırılarak incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu iki farklı sınıfta öğrenim gören 7. sınıf öğrencileri oluşturmuştur. Sınıflardan birinde “Sözel öğretim” yöntemiyle konular sunulurken, diğer sınıfta ise “Görsel öğretim” yöntemiyle konular sunulmuştur. “MidYIS testi” , “Matematik Yeterlilik Testi (MCT)” , “Uzamsal hafıza testi” ve “Tanıma testi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “iki yönlü ANOVA” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda sözel öğretimin yapıldığı sınıfın görsel öğretimin yapıldığı sınıfa göre başarısının önemli ölçüde daha fazla olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca görsel öğretim yapılan sınıftaki öğretim stili ile öğrencilerin soru çözümlerinde kullandıkları stil arasında bir ilişkinin bulunmadığı belirlenmiştir.

Alcock ve Simpson (2004) tarafından yapılan araştırmada, üniversite 1. Sınıf öğrencilerinin analiz dersinde diziler ve serilerin yakınsaklığı konusu ile ilgili problemlere yaklaşımları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu İngiltere’deki bir üniversitede öğrenim gören 1. Sınıf öğrencileri oluşturmuştur. Araştırma sonucunda öğrencilerin akıl yürütme yaparken görsel imajları kullanmayı daha çok tercih ettikleri tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin, farklı boyutlarda ancak benzer imajlar kullandıkları belirlenmiştir.

Weckbacher (2007) tarafından yapılan araştırmada, iki ve üç boyutlu geometri problemlerinin çözümünde görselleşmenin rolü incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 10., 11. ve 12. Sınıflarda öğrenim gören 114 lise öğrencisi oluşturmuştur. “uzamsal imgeleme ölçümü” , “nesne imgeleme ölçümü” , “bilişsel tarzda bir anket” ve “geometri testi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin iki ve üç boyutlu geometri problemlerini çözme performanslarında, görsel süreçlerdeki bireysel farklılıkların etkisinin kritik olduğu tespit edilmiştir.

Şan (2008) tarafından yapılan araştırmada, görselleştirmenin ilköğretim 8. Sınıf öğrencilerinin “Özdeşlikler” konusu hakkındaki erişilerine etkisi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu iki farklı sınıftaki toplam 50 ilköğretim 8. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Örnekleme alınan bu 50 öğrenci ile deney ve kontrol grupları oluşturulmuştur. Kontrol grubunda “Özdeşlikler” konusu okulda mevcut uygulanmakta olan öğretim yöntemiyle, deney grubunda ise görselleştirilmiş matematik öğretimi kullanılarak sunulmuştur. Araştırmacı tarafından hazırlanmış olan “Özdeşlikler Başarı Testi” kullanılıp ön test-son test olarak uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “bağımsız örneklem t-testi” ve “bağımlı örneklem t-testi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda matematik dersinde görselleştirmeyi kullanmanın okullarda mevcut uygulanmakta olan öğretim yöntemine göre başarıyı artırması bakımından daha etkili bir yöntem olduğu tespit edilmiştir.

Körükçü (2008) tarafından yapılan araştırmada, “Tam sayılar” konusunun görsel materyal kullanılarak öğretiminin öğrencilerin matematik başarılarına, hatırlamalarına,

matematiğe yönelik tutumlarına ve kaygısına etkisi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 60 ilköğretim 6. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Örneklemeye alınan bu 60 öğrenci ile deney ve kontrol grupları oluşturulmuştur. Kontrol grubunda “Tam Sayılar ve Tam Sayılarla İşlemler” konusu okulda mevcut uygulanmakta olan öğretim yöntemiyle, deney grubunda ise görsel materyal kullanılarak matematik öğretimi sunulmuştur. “Mantıksal Düşünme Becerisi Testi” , “İşlem Bilgisi Testi” , “Tam Sayı Başarı Testi”, Nazlıçiçek ve Erkin (2002) tarafından geliştirilen “tutum ölçeği” ve Emine Erol tarafından geliştirilen “matematik kaygı ölçeği” ölçekleri kullanılıp ön test-son test olarak uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “One Sample Kolmogorov- Smirnov testi”, “bağımsız değişkenler için t testi” ve “bağımlı değişkenler için t-testi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda “Tam sayılar” konusunun görsel materyal ile öğreniminin öğrencilerin matematik başarılarına ve hatırlamalarına olumlu yönde etki yaptığı tespit edilmiştir. Ancak görsel materyal ile öğreniminin öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarına ve kaygısına olan etkisi incelendiğinde deney ve kontrol grubu arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmamıştır.

Makina ve Wessels (2009) tarafından yapılan çalışmada, görselleştirmenin veri işlemedeki rolü incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu lisede öğrenim gören 9. Sınıf öğrencileri oluşturmuştur. Araştırma sonucunda farklı görselleştirme rolleri belirlenmiş ve belirlenen rollerin veri işleme konusunun öğrenimi aşamasında öğrencilerin yaratıcı ve eleştirel düşüncelerine olumlu bir etkisinin olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca anlama aracı olarak görselleştirmenin kullanılma ihtiyacının farkına varılması vurgulanırsa, veri işleme konusundaki öğrenci başarısını yükseltebileceği belirtilmiştir.

Delice ve Sevimli (2010) tarafından yapılan çalışmada, ortaöğretim matematik öğrencilerinin geometri problemlerinin çözüm sürecinde görselleme becerilerindeki farklılıkları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu amaçlı örneklem tekniği kullanılarak seçilen 52 ortaöğretim 11. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Merkezi sınavlarda kullanılmış olan soruların içerisinden seçilmiş 24 geometri probleminden oluşan bir test uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda öğrenciler problemin üç boyuta kıyasla, iki boyutlu; sözel temsillere kıyasla görsel temsilli,

boyutlar arası geçişlere kıyasla boyut içi geçişlerin olduğu problem türlerinde daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Ayrıca sözel problemlerin görsel temsili, ek çizim ve boyut geçişlerinin gerektiği problemlerde, çözüm sürecine şekil üzerinde yapılacak değişikliklerin yansıtılamadığı, bu durumda başarıyı olumsuz etkilediği görülmüştür.

Bu çalışmaların yanında problem çözme ve görselleştirmeye ilişkin çalışmalarda bulunmaktadır. Günaydın (2011) tarafından yapılan çalışmada, geometri ve cebir problemlerinin çözüm süreçleri görselleme ve göstergebilim bağlamında incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir devlet lisesinde öğrenim gören 80 tane 9. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Örneklemeye alınan bu öğrenciler Matematiksel Süreç Aracı (MSA) uygulamasına katılmış ve amaçlı örneklemeye yolu ile 9 öğrenci seçilip bu öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin cebir testlerindeki çözümlerinde daha çok sözel yaklaşımları kullandıkları, geometri testlerinde ise sözel, karma ve görsel yaklaşımlarının kullanımının dengeli olduğu tespit edilmiştir. Göstergebilim bağlamında öğrenci cevapları incelendiğinde öğrencilerin cebir problemlerinde daha çok sözel göstergeleri tercih ettikleri, geometri problemlerinde de soru gövdelerinin yapısına göre gösterge kullanımında farklılık olduğu görülmüştür.

Uysal-Koğ ve Başer (2012) tarafından yapılan çalışmada, görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin matematik başarılarına ve matematiğe yönelik tutumlarına olan etkisi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 43 ilköğretim 8. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Örneklemeye alınan bu 43 öğrencinin 21'i ile deney ve 22'si ile kontrol grubu oluşturulmuştur. Kontrol grubunda “Cebirsel İfadeler ve Denklemler” alt öğrenme alanlarına ait “Çarpanlara Ayırma, I. Dereceden bir ve iki bilinmeyenli Denklemler” konuları okulda mevcut uygulanmakta olan öğretim yöntemiyle, deney grubunda ise görselleştirilmiş matematik öğretimi kullanılarak sunulmuştur. Nazlıççek ve Erkin (2002) tarafından geliştirilen “tutum ölçeği” kullanılıp ön test-son test olarak uygulanmış ve araştırmacıların geliştirdiği “Cebirsel İfadeler ve Denklemler Başarı Testi” ölçeği kullanılıp sadece son test olarak uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “Shapiro Wilks normallik testi”, “t-testi” ve “iki yönlü ANOVA” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda görselleştirme yöntemi ile

yürütülen matematik öğretiminin öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarında ve matematik başarılarında daha etkili olduğu tespit edilmiştir.

Karpuz vd. (2014) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin geometrik şekil ve kavram bilgilerini nasıl kullandıkları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu ortaöğretim 9. ve 11.sınıf öğrencilerinden oluşan 120 öğrenci oluşturmuştur. Birinde kavram ve şekillerin birlikte verildiği, diğerinde ise sadece kavramın verilip şekillerin verilmediği sekizer adet açık uçlu sorudan oluşan iki farklı veri toplama aracı uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin şekilli soruların çözümünde daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin kavramsal bilgiyi temsil eden şekli çizememesinden, çizilen geometrik şeklin genellenebilirlik koşulunu sağlamamasından ve çözüm yapılırken prototip şekillerin etkisinde kalınmasından dolayı şekilsiz soruların çözülmesinde güçlükler yaşandığı görülmüştür.

Teahen (2015) tarafından yapılan araştırmada, sözel matematik problemlerini çözerken öğrencilerin problemi anlamaları, doğru işlemi seçme becerileri ve doğru çözdüğü problem sayılarını çizimler ve zihinsel görselleştirme yoluyla artırıp artırılmayacağı incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir şehir okulunun 4. ve 5. sınıflarında öğrenim gören 10 öğrenci oluşturmuştur. Araştırma sonucunda sözel matematik problemlerini çözerken görselleştirmeyi kullanmanın problemlerin çözüm sürecinde önemli bir adım ve problemlerin çözümünde ise etkili bir strateji olduğu tespit edilmiştir.

Josef (2016) tarafından yapılan araştırmada, cebir problemlerinin çözümünde öğrencilerin kullandığı görselleştirme süreçlerinin analizi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir lisenin 11. ve 12. sınıflarında öğrenim gören 6 öğrenci oluşturmuştur. 10 sorudan oluşan “Cebirsel Görselleştirme Görevleri (AVT)” ve “Klinik görüşmeler” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda cebir problemlerinin çözümünde organizasyonel çerçevelerden yararlanılmasının faydalı olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin cebir problemlerini çözerken görselleştirme süreçlerinden yararlandıkları görülmüştür. Bundan dolayı cebir öğretiminde öğretmenlerin görselleştirme süreçlerinden

yararlanmalarının önemli olduğu belirtilmiştir.

Özkan vd. (2018) tarafından yapılan araştırmada, altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler konusuna ilişkin problemleri model kullanarak çözüme ulaşıp ulaşamayacaklarını ve öğrencilerin görselleştirmeyi nasıl kullandıkları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 50 ortaokul 6. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. 10 sorudan oluşan bir başarı testi uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler üzerinde çalışırken görsel model kullanmada zorluk yaşadıkları ve görsel model kullanmadan kuralları kullanarak hesaplama yapmayı tercih ettikleri tespit edilmiştir.

Benzer şekilde Kükey vd. (2019) tarafından yapılan araştırmada, “Kesirler” konusunun görsel materyal ile öğretiminin ilkökul 4. Sınıfta öğrenim gören öğrencilerin matematik başarı ve tutumlarına etkisi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 38 ilkökul 4. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Örneklemeye alınan bu 38 öğrencinin 20’si ile deney ve 18’i ile kontrol grubu oluşturulmuştur. Kontrol grubunda “Kesirler” konusu okulda mevcut uygulanmakta olan öğretim yöntemiyle, deney grubunda ise görsel materyal kullanılarak sunulmuştur. Milli Eğitim Bakanlığı’nın hazırladığı İlkokul Matematik Öğretmen Kılavuz kitabında bulunan “Matematik dersine yönelik tutum ölçeği” ve araştırmacıların matematik ders kitaplarında bulunan soruları kullanarak oluşturduğu “Kesirler başarı testi” ölçekleri kullanılıp ön test-son test olarak uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda “Kesirler” konusunun görsel materyal ile öğretimin yapıldığı deney grubunun matematik başarısının, okulda mevcut uygulanmakta olan öğretim yöntemiyle yapılan kontrol grubuna göre anlamlı düzeyde arttığı tespit edilmiştir. Ayrıca “Kesirler” konusunun görsel materyal ile öğretiminin öğrencilerin matematik başarı ve tutumlarını olumlu yönde etkilediği görülmüştür.

Yaprak (2019) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin geometrik problemlerin çözümünde görselleme süreçleri incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu beş farklı ortaokulda öğrenim gören ve her okuldan 10 öğrenci olmak üzere toplam 50 ortaokul 7. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Öğrenciler amaçlı örneklemeye yöntemi kullanılarak seçilmiştir. Müfredata uygun olarak hazırlanmış geometri problemlerinden oluşan bir

Çalışma kağıdı uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Daha sonra nitel araştırma yöntemlerinden yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Veri analizi “betimsel analiz” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin görsel problemlerde sözel problemlere göre daha çok zorlandığı görölmüştür. Ayrıca öğrencilerin geometrik problem özömlerinde boyutlar arası geçiş gerektiren sorularda diğer sorulara göre daha çok zorlandıkları tespit edilmiştir.

Delibaş (2020) tarafından yapılan araştırmada, görselleştirme ve görsel temsile dayalı problem çözme etkinlikleriyle yapılan öğretimin, öğrencilerinin problem çözmeye yönelik başarıları, problem çözmeye yönelik tutumları ve matematik dersine yönelik tutumlarına etkisi incelenmiştir. Araştırmanın alışma grubunu 54 ortaokul 8. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Öğrenciler basit seçkisiz örnekleme yöntemi kullanılarak seçilmiştir. Araştırmacı tarafından geliştirilen “Problem özme Başarı Testi”, Nazlııek ve Erktin (2002) tarafından geliştirilen “Matematik Tutum Ölçeği” ve anakı (2002) tarafından geliştirilen “Matematik Problemi özme Tutum Ölçeği” ölçekleri uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi araştırmanın nicel boyutunda “Wilcoxon İşaretli Sıra Testi”, “Mann Whitney U Testi”, “Kruskal Wallis Testi”, “Bağımlı Örnekleme t Testi”, “Bağımsız Örnekleme t Testi” ve “ANOVA Testi” kullanılırken, nitel boyutunda “betimsel analiz” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda görselleştirme ve görsel temsile dayalı problem çözme etkinlikleriyle yapılan öğretimin, öğrencilerinin problem çözmeye yönelik başarılarına istatistiksel olarak olumlu etkisinin olduğu tespit edilmiştir.

2.2.2 Görsel temsil kavramı ile ilgili alışmalar

George (1997) tarafından yapılan araştırmada, matematik dersinde üst düzey başarıya sahip lise öğrencilerinin problemlerin çözümünde görsel temsilleri nasıl ve ne zaman kullandıkları incelenmiştir. Araştırmanın alışma grubunu 600 lise öğrencisi oluşturmuştur. “1996 BC seviyesi İleri Seviye Kalkölüs Sınavı” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda kız öğrencilerin verilen görsel ve diyagramları düzenleyip daha karmaşık görsel temsillere dönüştürme düzeylerinin erkek öğrencilere göre daha iyi olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca başarı düzeyi yüksek

olan öğrencilerin görsel temsilleri oluşturma ve verilen görsel temsilleri düzenleme esnekliklerinin daha iyi olduğu belirlenmiştir.

Hegarty ve Kozhevnikov (1999) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin matematik problemlerini çözme başarısı ile bu problemlerin çözümünde görsel ve uzamsal temsilleri kullanmaları arasındaki ilişki incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 6. Sınıf öğrencileri oluşturmuştur. Matematiksel problem çözmede şematik ve resimsel temsil olmak üzere iki tür görsel uzamsal temsil belirlenmiştir. Araştırma sonucunda resimsel temsil kullanımının matematiksel problem çözme başarısı ile negatif yönde ilişkili, şematik temsil kullanımının ise matematiksel problem çözme başarısı ile pozitif yönde ilişkili olduğu tespit edilmiştir.

Booth ve Thomas (1999) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin sahip oldukları görsel uzamsal beceriler ile şematik, resimsel ve sözel gösterimler kullanılarak sunulan problemlerin çözümünde yaşadıkları zorluklar arasındaki ilişki incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu ortaokul öğrencileri oluşturmuştur. “Standart matematik testi” , “aritmetik kelime problemleri testi” ve “Klinik mülakatlar” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda yüksek düzeyde görsel uzamsal beceriye sahip olan öğrencilerin şematik, resimsel ve sözel gösterimler kullanılarak sorulan problemleri çözme başarısının daha iyi olduğu tespit edilmiştir.

Stylianou (2002) tarafından yapılan araştırmada, profesyonel matematikçilerin diyagram çizme stratejisini kullanarak problemleri nasıl çözdükleri deneysel olarak incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu doktora eğitimini tamamlamış, aktif bir şekilde araştırmayla ilgilenen ve üniversite düzeyinde ileri matematik dersleri veren matematikçiler oluşturmuştur. Beş sorudan oluşan “Matematik problemleri testi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Matematikçilerin problemleri çözerken diyagramları nasıl kullandıkları ve diyagramların çözüme olan katkıları çözüm sürecinde incelenmiştir. İspat geliştirmenin alt görevlerini gerçekleştirebilmek için uzman problem çözücülerin diyagramları nasıl kullandıkları belirlenmiş ve kullanılan diyagramların çözüme katkı sağladığı görülmüştür. Araştırma sonucunda matematikçilerin kendilerine çözüm yapılamaz görünen problemlerin çözümü için

diyagramları kullandıkları tespit edilmiştir. Matematikçiler görsel temsilleri sistematik bir şekilde yapılandırarak keşfettikleri için problem çözümlerinde kullandıkları görsel temsillerin çok yapılandırılmış olduğu belirlenmiştir.

Van Garderen ve Montague (2003) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin matematik problemlerinin çözümünde görsel imgeleri nasıl kullandıkları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 6. sınıfta öğrenim gören 66 öğrenci oluşturmuştur. Çalışma grubu üstün yetenekli, ortalama başarıya sahip olan ve öğrenme güçlüğü olan öğrencilerden oluşmaktadır. Araştırma sonucunda üstün yetenekli öğrencilerin problem çözümlerinde görsel uzamsal temsili daha fazla kullandıkları tespit edilmiştir. Öğrenme güçlüğü olan öğrenciler ise problem çözümlerinde resimsel temsili daha fazla kullandıkları görülmüştür. Ayrıca resimsel temsil kullanımının matematiksel problem çözme ile negatif yönde ilişkili, şematik temsil kullanımının ise matematiksel problem çözme ile pozitif yönde ilişkili olduğu tespit edilmiştir.

Stylianou ve Silver (2004) tarafından yapılan araştırmada, ileri düzey matematik problemlerinin çözümünde görsel temsillerin rolü incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu lisans öğrencileri ile uzman matematikçiler oluşturmuştur. Araştırma sonucunda hem lisans öğrencileri hem de uzman matematikçilerin problemlerinin çözümünde görsel temsilleri kullanmanın faydalı ve uygulanabilir bir strateji olarak algıladıkları tespit edilmiştir. Lisans öğrencileri görsel temsillerin geometri problemlerinde faydalı olduğunu belirtmişlerdir. Uzman matematikçiler ise geometriyle birlikte farklı konulara ait problemlerin çözümlerinde de görsel temsillerin kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca uzman matematikçilerin lisans öğrencilerine göre daha çok görsel temsil oluşturdukları ve kullandıkları tespit edilmiştir. Uzman matematikçilerin görsel temsilleri daha çok kullanmalarının sebebi problem çözümüne yön vermek ve problem durumlarını iyi bir şekilde anlamak için dinamik nesneler olarak kullanmak olarak belirlenmiştir.

Corter ve Zahner (2007) tarafından yapılan araştırmada, harici görsel temsillerin olasılık problemlerinin çözümünde kullanımı incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir üniversitenin sosyal bilimler enstitüsünde öğrenim gören 26 yüksek lisans öğrencisi

oluşturmuştur. Çalışma grubu istatistiğe giriş dersine kayıt yaptırmış öğrencilerden oluşmaktadır. Araştırma sonucunda lisansüstü öğrencilerinin çözmekte oldukları olasılık problemlerinin türüne göre farklı harici görsel temsilleri oluşturdukları ve bunları kendi istekleriyle kullandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin oluşturdukları harici görsel temsillerin Venn diyagramları, özgün şematik temsiller, olasılık tabloları, sonuç listeleri, ağaç diyagramları, resimler ve verilen bilginin tekrar düzenlenmesi olduğu belirlenmiştir.

Pantziara vd. (2009) tarafından yapılan araştırmada, diyagramların rutin olmayan matematik problemlerinin çözümünde bir araç olarak kullanımı incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 6. Sınıf öğrencileri oluşturmuştur. Araştırma sonucunda matrix, ağ ve hiyerarşik gibi sorularda verilen diyagram çeşitlerine göre rutin olmayan matematik problemlerinin çözümündeki başarının değiştiği tespit edilmiştir. Ayrıca matrixlerin diğer diyagramlara göre daha kolay algılanıp yapılandırılabilirdiği belirlenmiştir. Öğrencilerin soruda verilenleri diyagramları yerleştirmede ve diyagramları yorumlamada zorluk yaşadıkları görülmüştür.

Zahner ve Corter (2010) tarafından yapılan araştırmada, özellikle görsel ve uzamsal nitelikte olan harici görsel temsillerin olasılık problemlerinin çözümünde kullanımı incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir üniversitede öğrenim gören 34 lisans öğrencisi oluşturmuştur. 6 sorudan oluşan bir sözel olasılık problemi testi uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda olasılık problemlerinin çözümünde uygun bir harici görsel temsil seçiminin problem çözümünü kolaylaştırdığı tespit edilmiştir. Ayrıca problemi anlama aşamasında resim temsillerinin kullanıldığı, çözüm aşamasında ise tabloların oluşturulduğu belirlenmiştir.

Ahmad vd. (2010) tarafından yapılan araştırmada, görsel temsillerin sözel matematik problemlerinin çözümünde kullanımı incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu sekiz farklı ortaokulda öğrenim gören 381 ortaokul 4. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. 20 dersin kapsamını içeren toplam 73 sözel problemten oluşan bir temel sözel matematik problemi testi uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda sözel matematik problemlerinin çözümünde çoğunlukla şematik temsillerin kullanıldığı,

Çözümlerin yüzde ikisinden az bir kısmında ise resim temsillerinin tercih edildiği tespit edilmiştir.

Csikos vd. (2012) tarafından yapılan araştırmada, çizim kullanmanın üçüncü sınıf ğrencilerinin sözel matematik problemlerini çözmelerini geliştirmedeki etkileri incelenmiştir. Araştırmanın alışma grubunu 244 üçüncü sınıf ğrencisi oluşturmuştur. Örneklemeye alınan 106 ğrenci ile beş deney sınıfı ve 138 ğrenci ile ise altı kontrol sınıfı oluşturulmuştur. Deney grubunda ders anlatımı yapan öğretmenlere sözel matematik problemlerine eklenmiş farklı tür görsel temsilleri içeren asetatlar verilmiş ve derslerde kullanmaları istenmiştir. Öğretmenlerin yönlendirmesiyle yapılan tartışmalar, grup çalışmaları ve her bir problem için öğrencilerden istenilen çizimler sayesinde öğrencilerin sözel matematik problemlerini çözerken kullanılan görsel temsillerin çözümlerdeki etkisine olan inançları şekillendirilmiştir. “Aritmetik Beceri Testi” ve “Sözel Matematik Problemleri Testi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda deney grubunda bulunan öğrencilerin matematik dersi hakkındaki inançlarında önemli ölçüde değişiklik olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca görsel temsillerin kullanılarak sözel matematik problemlerinin çözümünün üçüncü sınıf öğrencilerine öğretilmesinin önemli ve uygulanabilir olduğu görülmüştür.

Boonen vd. (2014) tarafından yapılan araştırmada, okuduğunu anlama, uzamsal yetenek ve görsel temsil türünün altıncı sınıf ğrencilerinin sözel matematik problemlerini çözmedeki rolü madde düzeyindeki bir analizle incelenmiştir. Araştırmanın alışma grubunu 128 altıncı sınıf ğrencisi oluşturmuştur. “Matematiksel İşleme Aracı (MPI)”, “Okuduğunu Anlama Testi”, “Kağıt Katlama ve Resim Döndürme Görevleri” ve “Klinik görüşmeler” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “ki-kare testi” ve “lojistik regresyon analizi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda görsel şematik temsilleri doğru bir şekilde yapan öğrencilerin sözel matematik problemlerini çözme şansının görsel temsil kullanmayan öğrencilere göre yaklaşık altı kat arttığı tespit edilmiştir. Bununla birlikte görsel şematik temsilleri hatalı yapan öğrencilerin sözel matematik problemlerini çözme şansının azaldığı görülmüştür. Ayrıca okuduğunu anlamının sözel matematik problemlerinin çözme ile madde düzeyinde ilişkili olmadığı, test düzeyinde ise ilişkili olduğu tespit edilmiştir.

Van Garderen vd. (2014) tarafından yapılan araştırmada, farklı yetenek düzeylerindeki öğrencilerin diyagramları görselleştirme aracı olarak kullanıp sözel matematik problemlerini çözerken yaşadıkları zorluklar incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu öğrenme güçlüğü çeken 16 ve yüksek başarılı 12 olmak üzere toplam 28 dördüncü ve yedinci sınıf öğrencileri oluşturmuştur. Araştırma sonucunda öğrencilerin sözel matematik problemlerini çözümünde diyagramları görselleştirme aracı olarak kullanırken karşılaştıkları dokuz zorluk belirlenmiştir. Bununla birlikte öğrenme güçlüğü olan öğrencilerin diyagramları görselleştirme aracı olarak kullanırken karşılaştıkları zorluğun yüksek başarılı olan öğrencilere göre daha fazla olduğu tespit edilmiştir.

Xing (2016) tarafından yapılan araştırmada, farklı diyagram türlerinin öğrencilerin sözel olasılık problemlerini çözme başarı düzeyine ve çözüm sürecindeki strateji seçimine etkisi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 48 üniversite öğrencisi oluşturmuştur. 3 sorudan oluşan bir sözel olasılık problemi testi uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin problemde verilen diyagramların yapısını yansıtan stratejiler seçerek çözüme ulaştıkları tespit edilmiştir. Ayrıca farklı diyagram türlerinin öğrencilerin sözel olasılık problemlerini çözme başarı düzeyini de etkilediği belirlenmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin problemleri çözme başarısını artırabilmek için problemin yapısı ve içeriği ile verilen diyagramın yapısı ve içeriği iyi bir şekilde eşleştirilip seçilmesi ve tasarlanması gerektiği tespit edilmiştir.

Özsoy (2018) tarafından yapılan araştırmada, sınıf öğretmenliği bölümünde öğrenim gören öğretmen adaylarının sözel problemleri çözerken oluşturdukları görsel temsiller uzamsal beceri seviyeleri açısından incelenmiştir. Sözel bir problemde oluşan bir çalışma kağıdı uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “betimsel analiz” ve “içerik analizi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının oluşturduğu görsel temsil türleri şematik ve resimsel temsil olarak tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının uzamsal beceri düzeyleri temsil türleri seçimlerini etkilediği görölmüştür. Yüksek düzeyde uzamsal becerilere sahip olan öğretmen adaylarının yapılandırılmış şematik temsilleri daha iyi bir şekilde oluşturabildiklerini,

ancak düşük düzeyde uzamsal becerilere sahip olanların ise resimsel temsiller üretme eğiliminde oldukları tespit edilmiştir.

Ergan (2018) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin problem çözme sürecinde oluşturduğu görsel temsillerin türleri incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu beş farklı ilkokulun altı farklı sınıfında öğrenim gören 162 ilkokul 4. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Çalışma grubuna dahil edilen öğrenciler aynı öğretmenin dört yıl boyunca ders verdiği farklı sosyoekonomik özelliklerde bulunan okullardan seçilmiştir. Suwarsono (1982) tarafından geliştirilen ve Hacıömeroğlu (2014) tarafından Türkçeye dönüştürülen “Matematiksel Süreç Envanteri” içerisinde seçilen 12 sözel matematik probleminden oluşan bir test uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “betimsel analiz” ve “içerik analizi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda problem çözme sürecinde şematik, resimsel ve işlemsel olmak üzere üç farklı temsil türü tanımlanmıştır. Şematik temsil oluşturan öğrencilerin %87.4’ü probleme doğru cevap verirken, resimsel temsil oluşturan öğrencilerin %91.9’u probleme yanlış cevap vermiş, işlemsel temsil oluşturan öğrencilerin ise %67.5’i probleme yanlış cevap verdiği tespit edilmiştir.

Karaman-Dundar ve Otten (2022) tarafından yapılan araştırmada, lise öğrencilerin teoremleri ispatlama sürecinde diyagramları nasıl kullandıkları ve yorumladıkları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir lisenin 10. ve 12. sınıflarında öğrenim gören 9 öğrenci oluşturmuştur. “Klinik görüşmeler” yapılarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Diyagramlarla ilgili olarak öğrencilerin kullandıkları semiyotik kaynaklara çok dikkat edilmiştir. Araştırma sonucunda bazı görsel kaynakların, düzenli olarak belirli görevlerde ortaya çıktığı tespit edilmiştir. Ayrıca jest kullanmanın, görevlerin tümünde en çok kullanılan eylem olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte jestler, semboller ve görsellerden oluşan üç semiyotik kaynağın tamamının öğrencilerin ürettiği tüm ispatlarda kullanıldığı tespit edilmiştir.

Çilingir-Altın ve Önal (2022) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin sözel problemleri çözerken hangi görsel ve görsel olmayan temsil türlerini kullandığı ve kullandıkları temsil türlerinin öğrencilerin problem çözme performanslarını yordama

gücü incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu kolay ulaşılabilir örneklem yoluyla seçilmiş iki farklı ilin devlet okullarında öğrenim gören 225 dördüncü sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Hegarty ve Kozhevnikov (1999)'un sözel problemler olarak geliştirdiği ve Çilingir-Altın ve Doğan (2018)'in ilkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin seviyesine uygun olacak bir şekilde uyarladığı 11 sorudan oluşan “Matematiksel İşlem Testi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi araştırmanın nicel boyutunda “Çoklu Regresyon analizi” kullanılırken, nitel boyutunda “tematik analiz” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda şematik temsil kullanmayı tercih eden öğrenciler diğer temsilleri tercih edenlere göre daha yüksek oranda doğru cevap vermişlerdir. Diğer bir sonuçta ise öğrencilerin sözel temsil veya resimsel temsil seçimleri ile problem çözme performansları arasında bir ilişki olmadığı sadece şematik temsili tercih etmenin problem çözme performansını yordadığı tespit edilmiştir.

2.2.3 Görsel akıl yürütme ile ilgili çalışmalar

Russell (1997) tarafından yapılan çalışmada, görsel akıl yürütme stratejilerini matematik öğretmen adayları tarafından problem çözme etkinliklerinde kullanma durumları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu ortaöğretim matematik öğretmen adayları oluşturmuştur. “Vaka çalışması” yapılarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda nesneler ve eylemlerin öğrencilerin problemleri çözme modellerinin ortak noktası olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte gerçek fiziksel nesneler, bilgisayarda simüle edilen nesneler ve kağıt üzerindeki nesneler dış temsilleri oluştururken, zihindeki nesnelerin ise iç temsilleri oluşturduğu belirlenmiştir. Ayrıca görsel akıl yürütmenin üst bilişsel etkinliklerden biri olduğu tespit edilmiştir.

Hanna ve Sidoli (2007) tarafından yapılan çalışmada, matematik felsefesi literatüründe görselleştirmenin nasıl tartışıldığı incelenmiştir. Araştırma sonucunda görselleştirmenin matematiksel anlayışa ve ispat sürecine önemli katkılarının olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin ayrıntıları fark edip ilişkiler üzerinde düşünme, varsayımlarda bulunma, yorumlama ve açıklamalar yapma becerilerini geliştirmesine dinamik yazılımların yardımcı olduğu belirlenmiştir.

Eraso (2007) tarafından yapılan araştırmada, yapılandırmacı bir yaklaşımla öğrencilerin uzamsal görselleştirme becerilerini artırmak için analitik ve görsel akıl yürütmenin birleştirilerek kullanılması incelenmiştir. Araştırmanın alışma grubunu üç farklı geometri sınıfında öğrenim gören 64 onuncu sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Örnekleme alınan bu 64 öğrenci ile iki deney ve bir kontrol grubu oluşturulmuştur. “Purdue Uzamsal Görselleştirme Testleri (PSVT)” ön test ve son test olarak uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi araştırmanın nicel boyutunda “Kovaryans analizi” kullanılırken, nitel boyutunda nitel yöntemler kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda gruplara göre anlamlı bir farklılığın olmadığı ancak cinsiyete göre anlamlı bir farklılığın olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte altı hafta boyunca yapılan uygulamadan görselleştirme becerileri iyi olmayan öğrencilerin görselleştirme becerileri iyi olan öğrencilere göre daha fazla yararlandığı tespit edilmiştir.

Bardelle (2010) tarafından yapılan araştırmada, görsel ispatların matematik öğretimindeki kullanımları ve temel özellikleri incelenmiştir. Araştırmanın alışma grubunu bir üniversitenin matematik bölümünde öğrenim gören 13 ikinci ve üçüncü sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Araştırma sonucunda görsel akıl yürütme becerileri konusunda öğrencilerin eksiklerinin olduğu belirlenmiştir. Ayrıca matematiksel bilgi parçalarından bazılarını kullanmadan ispatları öğrenmenin zor olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte grafiksel gösterimlerin potansiyelinden en iyi şekilde faydalanabilmek için bu konuda özel bir eğitimin alınması gerektiği belirtilmiştir.

Gölşen (2012) tarafından yapılan araştırmada, matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören öğretmen adaylarının kullandıkları görsel akıl yürütme durumları incelenmiştir. Araştırmanın alışma grubunu bir devlet üniversitesinin Matematik Öğretmenliği bölümünde öğrenim gören matematik öğretmen adayları oluşturmuştur. Dört sorudan oluşan “Görsel İspat Testi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “gömülü teorelin analiz teknikleri” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının görsel ispatları algılama, takip ettikleri süreç ve ulaştıkları sonuçların farkında olma ile ilgili birtakım zorluklarla karşılaştıkları tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispatı, cebirsel olarak yapmayı daha çok tercih ettikleri, çözüm süreçlerinde ispata odaklandıkları veya ispattan uzaklaştıkları

görülmüştür. Bununla birlikte görsel ispat üzerindeki çözümlerinde görsel ispattaki şekil ve çözümleri üzerinden stratejiler uyguladıkları tespit edilmiştir.

Karrass (2012) tarafından yapılan araştırmada, matematik öğretmen adaylarının geometrik bilgileri ile diyagramik akıl yürütme becerileri arasındaki ilişki incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir üniversitenin matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 12 son sınıf öğrencisi oluşturmuştur. “CV Anketi” , “Değiştirilmiş bir van Hiele Düzeyleri Geometri Testi” , “Değiştirilmiş Purdue Uzamsal Görselleştirme Testi” ve “Klinik mülakat” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda matematik öğretmen adaylarından van Hiele düzeyi yüksek olanların görsel teoremleri tanıma ve kanıtlama işlemlerinde daha yetenekli oldukları tespit edilmiştir. Bununla birlikte matematik öğretmen adaylarının van Hiele düzeyleri ile ilişkili olan belirli davranışları ile diyagramik akıl yürütme becerileri arasında bir uyumun olduğu belirlenmiştir. Ayrıca matematik öğretmen adaylarının van Hiele düzeylerinin, diyagramik akıl yürütme becerilerine göre daha iyi olduğu görülmüştür.

Barbosa (2013) tarafından yapılan araştırmada, görselleştirmenin matematiksel akıl yürütmedeki rolü öğrencilerin çözdüğü görsel örüntüler içeren problemler üzerinde incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir ortaokulun iki farklı sınıfında öğrenim gören 54 altıncı sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Öğrenciler yedi görevi ikili gruplar halinde çözmüşlerdir. “Mülakat” , “Gözlem” ve “Belge analizi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda örüntünün yapısını görme, çizim yapma, strateji bulma ve genelleme yapma gibi durumlarda görselleştirmenin yararlı bir beceri olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte kullanılan görsel stratejilerin, öğrencilerin aynı örüntüyü farklı ifadelerle göstermesine ve bu ifadeleri anlamasına yardımcı olduğu belirlenmiştir.

Natsheh ve Karsenty (2014) tarafından yapılan araştırmada, türev ve fonksiyon kavramlarının öğrenilmesi ve öğretilmesinde kavramsal akıl yürütme ve görsel akıl yürütme arasındaki ilişki, öğrencilerin kalkülüs problemlerini çözüm yaklaşımları üzerinde incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 10 öğretmen ile lise ve üniversite birinci sınıfta öğrenim gören 12 öğrenci oluşturmuştur. Araştırma sonucunda

katılımcıların problemleri çözerken başlangıçta zorlanmalarına rağmen büyük çoğunluğunun çeşitli yaklaşımlar geliştirerek çözümlerini gerçekleştirdikleri tespit edilmiştir. Bununla birlikte katılımcılar, kavramsal anlamayı geliştirmek ve özendirmek için bu tür görevlerin müfredata eklenmesinin faydalı olacağını belirtmişlerdir.

Uğurel vd. (2016) tarafından yapılan araştırmada, üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispata farklı bakış açıları geliştirebilmeleri adına görsel çizimlerden yararlanabilme durumları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu özel bir Fen Lisesi'nin 9. sınıfında öğrenim gören 3 erkek öğrenci oluşturmuştur. 10 sorudan oluşan “Görsel İspat Testi” ve 5 sorudan oluşan “Öğrencilerin görsel ispatlar hakkındaki görüşleri formu” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Çalışmada ilk önce öğrencilere konu ile ilgili bilgilendirme yapılmıştır. Daha sonra beş hafta boyunca verilen teoremlerin ispatlarına ait görseller oluşturmaları istenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin sözel olmayan ispatlar geliştirme ve kanıtları görseller kullanarak gösterme konusunda başarılı oldukları tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin verilen görsel çizimleri zorlanmadan anladığı ve kendi çizimlerini oluşturdukları görülmüştür. Son olarak ispatlarda görsellerden faydalanmanın tüm kavramların anlaşılmasında zenginlik oluşturacağı belirtilmiştir.

Abd Hamid (2017) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin türev ve fonksiyon problemlerini çözerken görsel akıl yürütme becerilerini kullanarak kartezyen grafiklerle bütünleştirip çözümün nasıl gerçekleştirildiğinin değerlendirilmesi ve bununla ilgili bir çerçevenin geliştirilmesi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir üniversitede öğrenim gören 194 hazırlık sınıfı öğrencisi oluşturmuştur. “Görsel Temsil Kullanım Düzeyi” , “Matematiksel Görsellik Testi” ve “Grafiksel Akıl Yürütme Testi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin doğru çözümlere ulaşmalarına rağmen grafik çizme konusunda zorluk çektikleri için isteksiz oldukları ve çözümlerinde daha çok cebirsel yöntemi tercih ettikleri tespit edilmiştir. Bununla birlikte görsel problemler zorlaştıkça öğrencilerin çözüme ulaşabilmeleri için daha çok bilişsel beceriye ihtiyaç duydukları belirlenmiştir. Ayrıca yapılan bu çalışmanın görsel akıl yürütme becerilerinin gelişimi için önemli fikirler vermesi, rehberlik etmesi ve yeni öğretim stratejilerinin geliştirilmesi açılarından önemli olduğu

görülmüştür.

Şadan (2017) tarafından yapılan araştırmada, Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçleri incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu özel bir Fen Lisesi'nin 11. sınıfında öğrenim gören gönüllü 6 öğrenci oluşturmuştur. Öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Araştırma öğrencilerin görsel ispata dair algıları, sınıf tartışmaları ve görsel ispat etkinlikleri olmak üzere üç aşamadan oluşmuştur. “Görsel İspat Testi” ve “Klinik görüşmeler” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “betimsel analiz” ve “içerik analizi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin algı aşamasında verilen görsel ispatların genellenebilirliği ve alternatif durumlar için şekillerin yapılarındaki değişimler için doğru çıkarımlara ulaştığı görülmüştür. Çalışmada öğrencilerin görsel ispat geliştirme sürecindeki hataları ve karşılaştıkları zorluklar belirlenmiştir. Klinik görüşmeler sonucunda yapılan hata ve zorluklar giderilmeye çalışılmıştır. Öğrenciler, görsel ispat geliştirme sürecinden hoşlandıklarını, bu süreci faydalı olarak gördüklerini ifade etmişler ve matematik sınıflarında görsel ispatların kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir.

Sırtmaç (2018) tarafından yapılan araştırmada, ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik akıl yürütmeleri, TIMMS (2011)'in belirttiği doğru akıl yürütmeye sahip öğrencilerden beklediği bu beceriler çerçevesinde incelenmiştir. Çalışmada ayrıca öğrencilerle yapılan grup çalışmaları ile kendi aralarındaki akran etkileşiminin önemi de incelenmiş, bu etkileşimin öğrencilerin akıl yürütme becerilerini zayıf ya da kusurlu akıl yürütmeden doğru akıl yürütmeye yükseltip yükseltmeyeceği de araştırılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu dört ortaokul 8. Sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. “Açık uçlu problemler” ve “Klinik görüşmeler” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “betimsel analiz” kullanılarak yapılmıştır. Ön klinik mülakatta hiçbir öğrencinin doğru akıl yürütmeleri gösteremedikleri gözlenmiştir. Araştırma sonucunda yapılan odak grup görüşmelerinin öğrencilerin birbirlerini olumlu etkileyerek son klinik mülakatta daha doğru akıl yürütmeler sergiledikleri tespit edilmiştir.

Dongwi (2018) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin sözel matematik

problemlerini çözerken akıl yürütme ve görselleştirme süreçlerinin bağlantılı olarak birlikte nasıl gerçekleştiği incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir lisenin 11. sınıfında öğrenim gören 17 öğrenci oluşturmuştur. Araştırma, akıl yürütme ve görselleştirme süreçlerinin birlikte ortaya çıkışının gözlenip analiz edilebileceği bir perspektifle çerçevelenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin problemleri çözerken akıl yürütme ve görselleştirme süreçlerini birlikte gerçekleştirdikleri görülmüş, bu süreçlerin birbirinden ayrılamaz olduğu tespit edilmiştir.

Akkan vd. (2018) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğretmenlerinin görsel teoremleri ispatlama bağlamında, görsel akıl yürütme becerileri ile geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasında ne tür ilişkiler olduğu nitel olarak incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir üniversitede yüksek lisans yapan gönüllü 10 matematik öğretmeni oluşturmuştur. Amaçlı örnekleme yöntemlerinden, maksimum çeşitlilik yöntemi tercih edilerek çalışma grubu oluşturulmuştur. “Van Hiele Geometri Düzeyleri Testi”, “Uzamsal Görselleştirme Beceri Testi” ve “Klinik mülakatlar” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “betimsel analiz” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda matematik öğretmenlerinin görsel akıl yürütme becerileri ile geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasında bir ilişki olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca geometrik düşünme düzeyi yüksek olan öğretmenlerin, görsel teoremleri tanımda, görsel teoremler üzerine akıl yürütme ve ispatlama konusunda yeteneklerinin daha fazla olduğu tespit edilmiştir.

İlhan ve Aslaner (2018) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının geometrik şekiller üzerine akıl yürütme becerileri üniversite ve sınıf düzeyi değişkenleri açısından incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu iki farklı üniversitede öğrenim gören 266 matematik öğretmeni adayı oluşturmuştur. Araştırmacı tarafından geliştirilmiş olan “GŞAYB testi” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “ANOVA Testi” ve “Tukey ve t-testleri” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda matematik öğretmeni adaylarının geometrik şekiller üzerine orta düzeyde akıl yürütme becerisine sahip oldukları tespit edilmiştir. Ayrıca bu düzeyin sınıflar arasında ve üniversite değişkenine göre anlamlı farklılığa sahip olduğu tespit edilmiştir.

Fujita vd. (2020) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin üç boyutlu geometrik şekillerin iki boyutlu temsillerine ilişkin problemleri çözerken uzamsal akıl yürütme becerilerinin kullanım durumları incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu dördüncü sınıftan dokuzuncu sınıfa kadar olan sınıf düzeylerinde öğrenim gören 1357 öğrenci oluşturmuştur. Araştırma sonucunda öğrencilerin birden fazla akıl yürütme adımlarını içeren problemleri çözerken tek başına özellik tabanlı uzamsal analitik akıl yürütme veya uzamsal görselleştirmenin yeterli olmayacağı, verilen diyagramların görünümünün üstesinden gelebilmek için alana özgü bilgi ile bu becerilerin uyumlu hale getirilerek birlikte kullanılmasının gerektiği tespit edilmiştir. Ayrıca ilkokul ve ortaokul öğrencilerinin tümüne, uzamsal akıl yürütme becerileri ile birlikte geometri problemlerinde daha üretken akıl yürütmeler yapabilmeleri için alana özgü geometri bilgi ve becerilerini de kullanabilecekleri ve pekiştirilebilecekleri fırsatlar verilmesinin gerektiği belirtilmiştir.

Geçici (2022) tarafından yapılan araştırmada, ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerileri incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir il merkezinde öğrenim gören 32 ortaokul öğrencisi oluşturmuştur. Öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilmiştir. Araştırmacı tarafından hazırlanmış olan “Geometri Problemi Çözme Testi”, “klinik mülakat kayıtları” ve “gözlem notları” ölçekleri kullanılıp uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “içerik analizi” ve “çapraz durum analizi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğrenciler en çok şekil çizerek problemleri daha iyi anladıklarını belirtmiş olup resim temsili ise en az tercih edilen temsil türü olduğu tespit edilmiştir. Ancak çizim yaparken yapılan hataların öğrencileri yanlış sonuçlara götürdüğü de vurgulanmıştır. Uygun ortamlar sunulduğunda model kullanma ve tablo temsili de öğrenciler tarafından zaman zaman tercih edildiği belirtilmiştir. Araştırmanın bir diğer sonucunda problem çözerken farklı görsel temsilleri birlikte kullanabilen öğrencilerin matematiksel düşünme göstergelerini kolaylıkla gerçekleştirebildikleri tespit edilmiştir. Araştırmada temsiller arası geçiş yapamayan öğrencilerin ise daha başarısız oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmada uzamsal düşünme gerektiren problemlerde öğrencilerin boyutlar arası geçiş yapmakta zorlandıkları görülmüştür. Araştırmanın ortaya koyduğu

bir diğ er sonuç ise öğrencilerin genelleme ve doğrulama yapmakta zorluk çekmeleri olmuştur.

Ram rez-Ucl s ve Ruiz-Hidalgo (2022) tarafından yapılan araştırmada, 8. Sınıfta  ğrenim gören özel yetenekli öğrencilerin geometrik ispat içeren problemlerin çözümünde temsil etme, akıl yürütme ve genelleme yapma becerilerini nasıl kullandıkları incelenmiştir. Araştırmanın  alışma grubunu farklı okullarda öğrenim gören yaşları 14, 15 ve 16 olarak değişen 21  ğrenci oluşturmuştur. Beş problemden oluşan ve geogebra programı kullanılarak hazırlanan “   genlerde benzerlik testi” Google formu aracılığıyla uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “içerik analizi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda genelleme yapabilmek için analitik ve harmonik akıl yürütmenin görsel akıl yürütmeye göre daha elverişli olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte genelleme yapabilmek için temsil türünün tek başına yeterli olmadığı görülmüştür. Ayrıca algısalardan genele geçişin desteklenebilmesi için tüm temsil türlerinin birlikte kullanılmasının gerektiği belirtilmiştir.

2.2.4 Cebir ve görsel akıl yürütme ile ilgili  alışmalar

Atasay Sunay (2024) tarafından yapılan araştırmada, 3. Sınıfta  ğrenim gören öğrencilerin erken cebir öğrenimi sürecinde görsel düşünme etkinlikleri kullanılarak problem çözme yöntemi olarak tasarlanmış Donguri yönteminin kullanımı incelenmiştir. Araştırmanın  alışma grubunu bir ilkokulun 3. sınıfında öğrenim gören 4  ğrenci oluşturmuştur. Araştırma  ğrencilerin üç saat problem çözme ile ilgili hazırbulunuşluk tespiti, altışar saat de aritmetik ve erken cebir problemlerinin Donguri yöntemiyle çözümlerinin öğretilmesinden oluşan ders anlatımları olmak üzere üç aşamadan oluşmuştur. “Gözlem” ve “Klinik görüşmeler” uygulanarak araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “sürekli analiz” ve “geriye dönük içerik analizi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda Donguri yönteminin uygulama süreci öncesinde öğrencilerin daha çok soyut temsilleri kullandıkları, uygulama sonrasında ise öğrencilerin somut dilsel ve resimsel semboller kullanmaya başladıkları, simgesel temsilleri kullanarak ilişkileri genellemeye çalıştıkları ve sembolik temsillere geçiş yaptıkları tespit edilmiştir. Böylece  ğrencilerin somut temsillerden başlayarak adım

adım soyut temsillere geçiş yaptıkları ve soyutlama yapabildikleri görölmüştür.

Demircioğlu ve Arslantaş İlter (2022) tarafından yapılan araştırmada, matematik öğretmenlerinin Pisagor teoremi bağlamında görsel akıl yürütme becerileri incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı farklı ortaokul ve liselerde görev yapan 7 gönüllü öğretmen oluşturmuştur. “Pisagor teoreminin sözsüz ispatı” ile araştırmanın verileri toplanmıştır. Veri analizi “içerik analizi” kullanılarak yapılmıştır. Araştırma sonucunda matematik öğretmenlerinin soruyu okuma, açıklama, çözüm planı oluşturma, görselde bulunan geometrik şekilleri inceleme, görsel üzerindeki matematiksel ifadeleri gösterme, görseldeki ilişkileri açıklama, kavramsal bilgiyi ifade etme, görsele uyarılama, değerlendirmeyi yapma ve ispatı yapma gibi adımları takip ettikleri tespit edilmiştir.

3. MATERYAL ve METOT

Bu bölümde; araştırmanın modeli, çalışma grubu, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, veri toplama süreci, verilerin analiz süreci hakkında bilgiler yer almaktadır.

3.1 Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada, 8. sınıf öğrencilerinin LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testine ait cebir konu alanı ile ilgili kazanımları içeren sorulara ilişkin görsel akıl yürütme becerilerinin derinlemesine incelenmesi amaçlanmış olup nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Çünkü nitel araştırma yöntemleri, nicel araştırma yönteminin tercih edildiği araştırmalara göre daha az sayıda katılımcı ve durum kullanılarak yürütülmesine rağmen ayrıntılı ve derinlemesine bilgi edinilmesini sağlar (Patton 2002). Bununla birlikte nitel araştırma desenlerinin yapısının esnek ve dinamik (Büyüköztürk vd. 2013) olması da bu araştırma için uygun olabileceği düşüncesini desteklemektedir.

Bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Durum çalışması, temelinde ‘nasıl’ ve ‘niçin’ sorularının yer aldığı, araştırmacının kontrolünde olmayan bir olgu veya olayı derinlemesine incelemesini sağlayan bir araştırma yöntemidir (Yıldırım ve Şimşek 2021). Literatür incelendiğinde birçok durum çalışması deseninin olduğu görülmektedir. Subaşı ve Okumuş (2017) bu sınıflamaları Yin (1984)’in, Yin (2009)’in, Merriam (1998)’in ve Stake (2005)’nin durum çalışma desenleri olarak derlemiştir. Bu araştırmada Yin (2009)’in durum çalışma desenleri sınıflandırması dikkate alınmıştır. Durum çalışmaları; durum sayılarına göre tekli ya da çoklu, analiz birimlerine göre ise bütüncül ya da iç içe geçmiş olarak ele alınmakta olup bütüncül tek durum, iç içe geçmiş tek durum, bütüncül çoklu durum ve iç içe geçmiş çoklu durum olarak sınıflandırılmaktadır (Yin 2009). Bu araştırmada ise sınıf düzeyi olarak sadece 8. Sınıf ele alındığından tek durum, orta ve yüksek seviyedeki öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerinin analizi yapıldığından dolayı da iç içe geçmiş analiz birimi ele alınması nedeniyle durum çalışması desenlerinden iç içe geçmiş tek durum deseni kullanılmıştır.

3.2 Çalışma Grubu

Bu araştırmanın çalışma grubunu, Afyonkarahisar ili Merkez ilçesindeki devlet okullarından 2023 yılı LGS merkezi ortak sınavları sonucunda Fen Liselerine en fazla öğrenci yerleştiren ilk üç ortaokulun 2023-2024 eğitim-öğretim yılında öğrenim gören 8. sınıf öğrencilerinden belirlenen 18 öğrenci oluşturmaktadır. Belirlenen her bir okuldan orta ve yüksek başarı düzeyine sahip üçer olmak üzere toplam altı öğrenci seçilmiştir. Böylece her okuldan altışar öğrenci olmak üzere çalışma grubu 18 öğrenciden oluşmuştur. Çalışma grubundaki öğrencilerin belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme, daha önceden belirlenmiş birkaç ölçütü karşılayan tüm durumların incelenmesi (Yıldırım ve Şimşek 2021) olarak tanımlanmaktadır. Bu çalışmada da ölçüt olarak Fen Liselerine en çok öğrenci yerleştiren ilk üç ortaokulda öğrenim gören orta ve yüksek başarı seviyesi belirlenmiş ve bu ölçüt doğrultusunda çalışma grubuna alınacak öğrenciler seçilmiştir. Bu okullardan seçilen öğrencilerden 7. sınıf matematik not ortalaması 70-84 aralığında olanlar orta başarı düzeyinde, 85-100 aralığında olanlar ise yüksek başarı düzeyinde kabul edilmiştir. Başarı seviyesi düşük olan öğrencilerin soruları çözmede ve kendileri ile yapılacak görüşmelerde uygulama ile ilgili görüşlerini ifade ederken matematiksel zorluk yaşayabilecekleri düşünülerek bu öğrenciler araştırmanın çalışma grubuna dâhil edilmemiştir. Araştırmaya katılan okulların ve öğrencilerin demografik özellikleri Çizelge 3.1’de sunulmuştur.

Çizelge 3.1 Araştırmaya katılan okulların ve öğrencilerin demografik özellikleri

Okullar	2023 Yılında Fen Liselerine Yerleşmiş Öğrenci Sayıları	Araştırmaya Katılan Öğrenci Sayıları					
		Kız		Erkek		Toplam	
		O	Y	O	Y	O	Y
A	39	1	2	2	1	3	3
B	23	1	2	2	1	3	3
C	16	3	2	0	1	3	3

O: Orta başarı düzeyi

Y: Yüksek başarı düzeyi

Çizelge 3.1 incelendiğinde; bir önceki yılda Fen Liselerine en çok öğrenci yerleştiren A ortaokulundaki 8. sınıf öğrencilerinden 1’i orta 2’si yüksek düzeyde 3 kız, 2’si orta 1’i yüksek düzeyde 3 erkek olmak üzere 6 öğrenci, bir önceki yılda Fen Liselerine en çok

öğrenci yerleştiren ikinci okul olan B ortaokulundaki 8. sınıf öğrencilerinden 1'i orta 2'si yüksek düzeyde 3 kız, 2'si orta 1'i yüksek düzeyde 3 erkek olmak üzere 6 öğrenci, bir önceki yılda Fen Liselerine en çok öğrenci yerleştiren üçüncü okul olan B ortaokulundaki 8. sınıf öğrencilerinden 3'ü orta 2'si yüksek düzeyde 5 kız, 1 yüksek düzeyde erkek olmak üzere 6 öğrencinin örnekleme alındığı görülmektedir. Öğrencilerin belirlenmesinde okul idaresinin 7. sınıf matematik not ortalaması 70-84 aralığında olanlar orta başarı düzeyinde, 85-100 aralığında olanlar yüksek başarı düzeyinde olacak şekilde verdiği öğrenci listesi dikkate alınmıştır.

3.3 Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada veri toplama aracı olarak Cebir Testi ve görüşmelerde kullanılmak üzere Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları Formu kullanılmıştır. Cebir Testi, 8. sınıf öğrencilerinin LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testine ait cebir konu alanı ile ilgili kazanımları içeren sorulara ilişkin öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerini inceleyip tespit etmek amacıyla kullanılmıştır. Cebir Testi EK-1'de sunulmuştur. Cebir sorularına ilişkin öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerini derinlemesine inceleyip belirlemek için kullanılan Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları Formu EK-2'de sunulmuştur.

3.3.1 Cebir Testi

Araştırmada kullanılan Cebir Testi matematik eğitimi alanında yüksek lisans yapmış bir öğretmenin görüşleri ile matematik eğitimi alanında uzmanlığı olan ve görsel akıl yürütme üzerine çalışmış bir öğretim elemanının görüş ve önerileri doğrultusunda araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Cebir Testinde kullanılan sorular 2018-2023 yılları arasında LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testine ait cebir konu alanı ile ilgili kazanımları içeren sorular içerisinde seçilmiş 15 sorudan oluşmaktadır. LGS merkezi ortak sınavının matematik alt testindeki cebir konu alanı ile ilgili kazanımları içeren soruların büyük çoğunluğunun görsellerle birlikte sorulması ve bu sınavlarda öğrencilere ait üst düzey akıl yürütme becerilerinin ölçülmek istenmesi, bu tezde kullanılan Cebir Testi sorularının uygun olduğunu göstermektedir.

Cebir Testi soruları belirlenirken aşağıdaki basamaklar takip edilmiştir. İlk önce 2018-2023 yılları arasında sorulmuş olan Cebir konu alanı ile ilgili kazanımlarla ilişkili sorular belirlenmiştir. Sonrasında MEB (2018a) matematik öğretim programı 8. sınıf matematik dersi müfredatında bulunan Cebir konu alanı kazanımları listelenmiştir. Belirtilen yıllar arasında LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testine ait Cebir konu alanı ile ilgili 32 sorunun hangi kazanım ya da kazanımlarla ilişkili olduğunu matematik eğitimi alanında yüksek lisans yapmış bir öğretmen ile araştırmacı ayrı ayrı ilişkilendirmiştir. Her iki ilişkilendirme karşılaştırılmış ve farklılık olan eşleştirmeler üzerine tekrar düşünülüp ortak kararlar alınarak Cebir kazanım listesi ve LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testine ait Cebir konu alanı ile ilgili soru dağılım tablosu oluşturulmuştur. Tablo matematik eğitimi alanında uzmanlığı olan ve görsel akıl yürütme üzerine çalışmış bir öğretim elemanının görüş ve önerilerine sunulmuştur. Alınan görüşler doğrultusunda tabloda düzenlemeler yapıp Cebir kazanım listesi ve LGS soru dağılım tablosunun son hali hazırlanmıştır. LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testine ait Cebir konu alanı ile ilgili soruların MEB (2018a) Cebir öğrenme alanındaki kazanımları ile ilişkilendirilmesi Çizelge 3.2, Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4’de sunulmuştur.

Çizelge 3.2 Cebir ile ilişkili 2018-2023 yılları arasında yapılan LGS sorularının “M.8.2.1. Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler” alt öğrenme alanındaki kazanımlara göre dağılımı.

Kazanımlar	2018	2019	2020	2021	2022	2023
“M.8.2.1.1. Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar.”	-	4. soru 11. soru 14. soru 20. soru	5. soru 19. soru	3. soru	12. soru	-
“M.8.2.1.2. Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar.”	11. soru	4. soru	5. soru 15. soru	1. soru	13. soru	8. soru 13. soru 17. soru
“M.8.2.1.3. Özdeşlikleri modellerle açıklar.”	11. soru	-	-	-	-	16. soru 17. soru
“M.8.2.1.4. Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır.”	13. soru	-	19. soru	13. soru	7. soru	8. soru 13. soru 16. soru

Çizelge 3.2 incelendiğinde; 8. sınıf matematik dersi müfredatında bulunan Cebir konu alanında “M.8.2.1. Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler” alt öğrenme alanı ile ilgili 4 kazanım olduğu ve bu kazanımlarla ilişkili 2018 yılında 2, 2019 yılında 4, 2020 yılında 3, 2021 yılında 3, 2022 yılında 3 ve 2023 yılında 4 soru sorulduğu görülmektedir.

Çizelge 3.3 Cebir ile ilişkili 2018-2023 yılları arasında yapılan LGS sorularının “M.8.2.2. Doğrusal Denklemler” alt öğrenme alanındaki kazanımlara göre dağılımı.

Kazanımlar	2018	2019	2020	2021	2022	2023
“M.8.2.2.1. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.”	-	11. soru 14. soru 20. soru	-	-	18. soru	-
“M.8.2.2.2. Koordinat sistemini özellikleriyle tanımlar ve sıralı ikilileri gösterir.”	7. soru	-	-	-	-	-
“M.8.2.2.3. Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.”	15. soru	-	-	-	-	-
“M.8.2.2.4. Doğrusal denklemlerin grafiğini çizer.”	-	-	-	-	-	-
“M.8.2.2.5. Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.”	3. soru	-	-	10. soru	20. soru	-
“M.8.2.2.6. Doğrunun eğimini modellerle açıklar, doğrusal denklemleri ve grafiklerini eğimle ilişkilendirir.”	-	9. soru	-	-	15. soru	-

Çizelge 3.3 incelendiğinde; 8. sınıf matematik dersi müfredatında bulunan Cebir konu alanında “M.8.2.2. Doğrusal Denklemler” alt öğrenme alanı ile ilgili 6 kazanım olduğu ve bu kazanımlarla ilişkili 2018 yılında 3, 2019 yılında 4, 2020 yılında 0, 2021 yılında 1, 2022 yılında 3 ve 2023 yılında 0 soru sorulduğu görülmektedir. Ayrıca 2018-2023 yılları arasında “M.8.2.2.4. Doğrusal denklemlerin grafiğini çizer.” kazanımını ile ilişkili hiç soru sorulmadığı görülmüştür.

Çizelge 3.4 Cebir ile ilişkili 2018-2023 yılları arasında yapılan LGS sorularının “M.8.2.3. Eşitsizlikler” alt öğrenme alanındaki kazanımlara göre dağılımı.

Kazanımlar	2018	2019	2020	2021	2022	2023
“M.8.2.3.1. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren günlük hayat durumlarına uygun matematik cümleleri yazar.”	15. soru	-	-	5. soru 8. soru	4. soru 6. soru	-
“M.8.2.3.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösterir.”	-	10. soru	-	-	-	-
“M.8.2.3.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözer.”	15. soru	-	-	5. soru 8. soru	4. soru 6. soru	-

Çizelge 3.4 incelendiğinde; 8. sınıf matematik dersi müfredatında bulunan Cebir konu alanında “M.8.2.3. Eşitsizlikler” alt öğrenme alanı ile ilgili 3 kazanım olduğu ve bu kazanımlarla ilişkili 2018 yılında 1, 2019 yılında 1, 2020 yılında 0, 2021 yılında 2, 2022 yılında 2 ve 2023 yılında 0 soru sorulduğu görülmektedir.

Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4 incelendiğinde; 2020 ve 2023 yıllarında yapılan LGS merkezi ortak sınavlarında 8. sınıf matematik dersi müfredatında bulunan 2. Dönem konularını içerisine alan kazanımlardan soru sorulmadığı görülmüştür. 2020 yılında COVID-19 salgınından dolayı LGS merkezi sınav sorularının kapsamı sadece öğrencilerin derslere yüz yüze devam ettiği 8. Sınıf ilk dönem konularıyla sınırlandırılmıştır. 2023 yılında ise yaşanan büyük depremlerden dolayı LGS merkezi ortak sınav sorularının kapsamı sadece 8. sınıf ilk dönem konularıyla sınırlandırılmıştır.

Cebir öğrenme alanındaki kazanım listesi ile LGS merkezi ortak sınavı matematik alt testindeki Cebir konu alanı ile ilgili soruların ilişkilendirilmesi yapıldıktan sonra 8. sınıf matematik dersi müfredatında bulunan Cebir konu alanı ile ilgili 13 kazanım olduğu tespit edilmiştir. Ancak 2018-2023 yılları arasında bu kazanımlardan 1 tanesi olan “M.8.2.2.4. Doğrusal denklemlerin grafiğini çizer.” kazanımını ile ilişkili bir soru sorulmadığı görülmüştür. Geriye kalan 12 kazanım 2018-2023 yılları arasında sorulan LGS soruları ile eşleştirilerek 15 sorudan oluşan Cebir Testi oluşturulmuştur. Yapılan eşleştirmede her soru en az bir kazanımla ilişkilendirilmiş olup bazı sorular iki farklı kazanımla ilişkilendirilmiştir. Bir soruda ise üç farklı kazanımla ilgili ilişkilendirme yapılmıştır. Cebir Testi soruları LGS merkezi ortak sınavlarda sorulan sorulardan seçilmiş olup seçenekleriyle birlikte hiçbir değişiklik yapılmadan kullanıldığı için sorular geçerli ve güvenilir kabul edilmiş, ayrıca bir madde analizi yapılmamıştır. Sadece öğrencilerin çizim ve işlemlerini rahatça yapabilmesi için her bir sorunun altına geniş boşluklar bırakılmıştır. Öğrencilerden çizim ve işlemlerini bırakılan boşluklara yapmaları istenmiştir. LGS merkezi ortak sınavlarında matematik alt testinin her bir sorusu için ortalama 2 dakika süre verilmektedir. Cebir Testi uygulamasında ise öğrencilerden çizim ve işlemlerini bırakılan boşluklara yapmalarını istediğimiz için uygulama süresi 15 soru için toplam 45 dakika olarak belirlenmiştir. Çalışmada kullanılan Cebir Testi sorularının hangi yıl hangi soru numarası ile sorulduğu ve hangi

kazanım ile ilişkili olduğu Çizelge 3.5'te sunulmuştur.

Çizelge 3.5 Cebir Testi Sorularının Özellikleri.

Cebir Testi Soru Numarası	LGS Yılı	LGS Soru Numarası	Sorunun İlişkili Olduğu Kazanım/Kazanımlar
1	2023	16	“M.8.2.1.3. Özdeşlikleri modellerle açıklar.” “M.8.2.1.4. Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır.”
2	2020	5	“M.8.2.1.1. Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar.” “M.8.2.1.2. Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar.”
3	2020	19	“M.8.2.1.1. Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar.” “M.8.2.1.4. Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır.”
4	2019	9	“M.8.2.2.6. Doğrunun eğimini modellerle açıklar, doğrusal denklemleri ve grafiklerini eğimle ilişkilendirir.”
5	2022	20	“M.8.2.2.5. Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.”
6	2021	5	“M.8.2.3.1. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren günlük hayat durumlarına uygun matematik cümleleri yazar.” “M.8.2.3.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözer.”
7	2019	4	“M.8.2.1.1. Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar.” “M.8.2.1.2. Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar.”
8	2022	15	“M.8.2.2.6. Doğrunun eğimini modellerle açıklar, doğrusal denklemleri ve grafiklerini eğimle ilişkilendirir.”
9	2019	11	“M.8.2.1.1. Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar.” “M.8.2.2.1. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.”
10	2019	10	“M.8.2.3.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösterir.”
11	2021	13	“M.8.2.1.4. Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır.”
12	2018	11	“M.8.2.1.2. Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar.” “M.8.2.1.3. Özdeşlikleri modellerle açıklar.”
13	2023	13	“M.8.2.1.2. Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar.” “M.8.2.1.4. Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır.”
14	2018	7	“M.8.2.2.2. Koordinat sistemini özellikleriyle tanıır ve sıralı ikilileri gösterir.”
15	2018	15	“M.8.2.2.3. Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.” “M.8.2.3.1. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren günlük hayat durumlarına uygun matematik cümleleri yazar.” “M.8.2.3.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözer.”

Çizelge 3.5 incelendiğinde; Cebir Testinde sorulan soruların 3 tanesinin 2018, 4

tanisinin 2019, 2 tanisinin 2020, 2 tanisinin 2021, 2 tanisinin 2022 ve 2 tanisinin de 2023 yılındaki LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testinde sorulmuş olduğu görülmektedir. Çalışmada kullanılan Cebir Testi sorularının matematiksel düşünme bileşenindeki hangi göstergeye ilişkin olduğu Çizelge 3.6’da sunulmuştur.

Çizelge 3.6 Cebir Testi Sorularının matematiksel düşünme bileşenindeki göstergelere göre dağılımı

Matematiksel Düşünme Bileşenindeki Göstergeler	Cebir Testi Soru Numarası
Özelleştirme	1, 2, 3, 9, 13
Genelleme	4, 5, 8
Varsayımda Bulunma	6, 7, 10, 12
Doğrulama ve İkna Etme	11, 14, 15

Çizelge 3.6 incelendiğinde; Cebir Testinde bulunan 1, 2, 3, 9 ve 13 numaralı sorular matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesine ilişkin; 4, 5 ve 8 numaralı sorular matematiksel düşünme bileşenindeki genelleme göstergesine ilişkin; 6, 7, 10 ve 12 numaralı sorular matematiksel düşünme bileşenindeki varsayımda bulunma göstergesine ilişkin olup 11, 14 ve 15 numaralı sorular ise matematiksel düşünme bileşenindeki doğrulama ve ikna etme göstergesine ilişkin sorulardır.

3.3.2 Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formu

Araştırmada kullanılan Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formu, cebir sorularına ilişkin öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerini derinlemesine incelemek ve öğrencilerin görsel akıl yürütme basamaklarından hangisine ulaşabildiğini belirlemek amacıyla kullanılmıştır. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formu matematik eğitimi alanında yüksek lisans yapmış bir öğretmen ile birlikte araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Daha sonra matematik eğitimi alanında uzmanlığı olan ve görsel akıl yürütme üzerine çalışmış bir öğretim elemanının görüş ve önerileri doğrultusunda düzenlenerek araştırmacı tarafından yarı yapılandırılmış görüşme formunun son hali oluşturulmuştur.

Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formunun ilk üç sorusunda öğrencinin soru çözümü yaparken nasıl bir yol izlediğini öğrenmek, çözümde görsel akıl yürütme becerilerini ortaya çıkaracak görsel temsilleri kullanıp kullanmadığını belirlemek istenmiştir.

Dördüncü soruda eğer görsel kullanmışsa nedenini ve ona sağladığı faydalarını, kullanmamışsa neden kullanmadığını öğrenmek amaçlanmıştır. Eğer soruda görsel bulunuyorsa mevcut görseli nasıl anlamlandırıldığını ve görsel üzerine yeni çizimler yapıp yapmadığını, yaptıysa çizimlerinin ona sağladığı faydaları ortaya çıkarmak istenmiştir. Beşinci soruda ise öğrenciden sorunun çözümü için farklı çözüm yollarının olup olmadığı sorulmuştur. Bu sorudaki amaç öğrencinin farklı görsel temsil araçlarını kullanarak sorunun çözümüne ulaşip ulaşamayacağını gözlemlenmesidir. Araştırmada kullanılan Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formu EK-2’de sunulmuştur.

3.4 Veri Toplama Süreci

Bu bölümde Cebir Testi ve Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları Formu ile veri toplama sürecinin nasıl gerçekleştiği ayrı başlıklar altında sunulmuştur.

3.4.1 Cebir Testi ile Veri Toplama Süreci

Veri toplama sürecinin en başında araştırma yapılacak olan okullar belirlenip araştırma için gerekli olan izinler Milli Eğitim Bakanlığı Araştırma Uygulamaları Başvuru ve Değerlendirme Sistemi üzerinden alınmıştır. Sonrasında araştırmaya katılacak öğrencilerde bulunması gereken özellikler araştırmanın yapılacağı okuldaki idareci ve öğrencilerin dersine giren matematik öğretmenine bildirilmiştir. Belirlenen kriterlere uygun öğrenciler okul müdürü ve öğrencilerin dersine giren matematik öğretmenlerinin önerileriyle seçilmiştir. Seçilen öğrenciler reşit olmadıkları için öğrenci velilerine Bilgilendirilmiş Gönüllü Onam Formu imzalatılarak velilerden de araştırma izinleri alınmıştır. Bu aşamadan sonra Cebir Testi uygulamasının yapılabilmesi için okul idaresi ve araştırmacı tarafından uygun olan bir gün, saat ve sınıf seçimi yapılmıştır. Cebir Testi uygulamasının bu koşullara uygun bir şekilde yapılabilmesi için veri toplama süreci planı hazırlanmıştır. Belirlenen plan doğrultusunda her okuldan istenilen şartlara uygun olarak örnekleme alınan altışar öğrenci okul yönetimleri tarafından gösterilen bir sınıfta toplanmıştır. Uygulama üç farklı okulda ayrı ayrı yapılmıştır. Araştırmacının kendisi bizzat öğrencilerin başında bulunup uygulamayı yapmıştır. Araştırma başlamadan önce öğrencilere araştırma hakkında bilgi verilmiş ve öğrencilere ait kişisel

bilgilerin ise üçüncü şahıslarla paylaşılmayacağı belirtilmiştir. Öğrencilerin içtenlikle ve samimi bir şekilde soruları cevaplamalarının araştırma açısından çok önemli olduğu vurgulanmıştır. Uygulama yapılan her okuldan altışar olmak üzere araştırmaya katılan 18 öğrenciye soruları cevaplamaları için 45 dakika süre verilmiştir. Bu süre içerisinde öğrencilerden soruların üzerine veya altlarına bırakılan boşluklara gerekli çizim ve işlemleri yaparak çözümleri yapmaları istenmiştir.

3.4.2 Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları Formu ile Veri Toplama Süreci

Cebir Testi uygulaması yapıp öğrencilerin cevapları incelendikten sonra çözümlerinde görsel akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarması açısından en uygun cevaplar verdiği düşünülen her okuldan ikişer olmak üzere toplam altı öğrenci belirlenmiştir. Daha önce araştırma için veli izinleri alınmış bu öğrenciler aynı gün okul yönetimi tarafından belirlenmiş bir sınıfta ayrı ayrı görüşme yapmak için tekrar toplanılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşme başlamadan önce öğrencilere görüşme hakkında bilgi verilmiş ve öğrencilere ait kişisel bilgilerin ise üçüncü şahıslarla paylaşılmayacağı belirtilmiştir. Öğrencilerin içtenlikle ve samimi bir şekilde soruları cevaplamalarının görüşme açısından çok önemli olduğu vurgulanmıştır. Okul idaresi ve araştırmacının yaptığı plan doğrultusunda her okuldan ikişer olmak üzere toplam altı öğrenciye ait görüşme verileri ses kayıtları alınarak toplanmıştır.

Yapılan görüşme süreleri 9 dakika ile 27 dakika arasında gerçekleştirilmiştir. Altı öğrenciyle yapılan görüşmelerin ortalama süresinin her bir öğrenci için 16 dakika olduğu tespit edilmiştir. Yapılan görüşmeler arasındaki süre farkı öğrencilerin kullanmış oldukları görsel temsiller, farklı çözüm yolları ve kendilerini ifade etme şekilleri arasındaki farklılıklardan kaynaklandığı söylenebilir.

3.5 Verilerin Analizi

Araştırmada Cebir Testinin uygulandığı 18 öğrenciden elde edilen verilerin analizine başlamadan önce her bir öğrencinin cevap kağıdı numaralandırılmıştır. Numaralama işlemi ilk öğrenciden başlanarak Ö1, Ö2, Ö3, ... , Ö18 olacak şekilde Ö1'den Ö18'e

kadar yapılmıştır. Bu öğrencilerden Ö3, Ö4, Ö5, Ö8, Ö10, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17 kodlu öğrenciler orta başarı düzeyinde, Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18 kodlu öğrenciler ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerdir. Araştırmada Cebir Testi ile toplanan verilere ilişkin öğrencilerin görsel akıl yürütme bileşenlerinin belirlenmesinde nitel araştırma yöntemleri içerisindeki analiz tekniklerinden betimsel analiz ile yapılmıştır. Nitel araştırmalarda amaç, sayılar ve işlemler kullanılarak sonuca ulaşmaktan öte okuyucuya araştırılan konuyu gerçeğe uygun bir şekilde betimsel olarak resmetmektir (Yıldırım ve Şimşek 2016). Betimsel analizde veriler belirli bir sisteme göre açık bir şekilde betimlenir. Sonrasında betimlemelerden her biri ayrı ayrı açıklanır, aralarındaki sebep sonuç ilişkileri incelenir ve yorum yapılarak bazı sonuçlar çıkarılır. Bu yöntemde katılımcılardan elde edilen verilerin çoğunluğu direkt alıntılar yapılarak sunulduğundan katılımcı görüşleri etkili bir şekilde yansıtılmaktadır (Çepni 2014). Bu araştırmada Geçici ve Türnüklü (2021)'nin geliştirdiği ve önerdiği kavramsal çerçeve kullanılmış, araştırmanın verilerinin analizi bu doğrultuda betimsel yöntem ile yapılmıştır. Cebir Testi ile elde edilen verilerdeki her bir soru ayrı ayrı incelenmiş olup analiz edilirken Çizelge 3.7'deki adımlar izlenmiştir.

Çizelge 3.7 Veri analizi işlem adımları.

1. Adım	2. Adım	3. Adım
Öğrencilerin her bir soruya verdiği cevaplar ayrı ayrı kategorize edilmiştir.	Görsel akıl yürütme basamaklarına göre cevaplar Geçici ve Türnüklü (2021) tarafından oluşturulan kodlara göre analiz edilmiştir.	Elde edilen sonuçlar rapor edilmiştir.

Araştırmada görüşme kayıtları Cebir Testindeki öğrenci cevapları da göz önüne alınarak dikkatlice gözden geçirilip yazılı olarak dijital ortama aktarılmıştır. Ayrıca Cebir Testindeki dokümanlar da ayrı ayrı sınıflandırılarak dijital ortama aktarılmıştır. Öğrencilerin Cebir Testindeki sorulara verdikleri cevaplara göre görsel akıl yürütme becerileri belirlenirken Geçici ve Türnüklü (2021) tarafından oluşturulan görsel akıl yürütmeye ilişkin bileşenler ve göstergeler kullanılmıştır. Bu bileşenler ve göstergeler Çizelge 3.8'de sunulmuştur.

Çizelge 3.8 Görsel akıl yürütmenin bileşenleri ve göstergeler

Bileşenler	Göstergeler	Kriterler
Görsel Temsil	Resim	Bir şeyin resmini çizmek
	Çizim	Verilen görsellerin üzerine çizim yapmak ya da yeni bir görsel çizmek
	Model	Kağıt katlama, birimküp kullanma, el ve parmakları kullanarak şekiller oluşturma gibi modellemek
	Tablo	Verileri kullanarak sıralama yapmak ya da bir düzen içerisine koymak için tablo oluşturmak
Görselleştirme	Dönüştürme	Bir örüntüdeki artış miktarını bulmak, verilen görseli yorumlayarak çıkarımda bulunmak, verilenleri yorumlayarak elde ettiği çıkarımlarla yeni görseller çizmek, yeni cebirsel ifade yazmak
	Zihinde Canlandırma	Görsel temsiller arasında bağlantı kurabilmek, farklı bir çözüm yönteminden bahsetmek, verilen görseldeki küçük parçaları kullanıp görselin tamamı hakkında fikir yürütmek
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Verilen görsel üzerindeki değişkenlerin ya da kenar uzunluklarının yerine farklı değerler vererek yeni sonuçlara ulaşmak, verilerden yola çıkarak yazdığı denklem ya da eşitsizlikleri çözmek, verilenleri kullanarak yeni bir tablo oluşturmak, verilen şekillerin çevre ve alanlarını bulmak
	Genelleme	Verilen bir örüntüden genel bir kural elde edip bunu uygulamak
	Varsayımda Bulunma	Verilen görsellerden yola çıkarak çözüme nasıl ulaşılacağı hakkında tahminde bulunmak ve karar vermek, değişkenler yerine farklı değerler verilerek sonuca ulaşmak, istenilen sonuca ulaşılması için yapılması gerekenleri belirlemek
	Doğrulama ve İkna Etme	Verilen görsellerdeki alanların birbirine eşit olduğunu göstermek, farklı yöntemler kullanılarak elde edilen sonuçların eşit olduğunu göstermek

Geçici ve Türnüklü (2021) tarafından oluşturulan görsel temsil kullanımı, görselleştirme yapma ve matematiksel düşünme adımına geçiş olmak üzere 3 farklı bileşenden oluşan bir analiz çerçevesi kullanılmıştır. Görsel temsil kullanımı bileşeni içerisinde resim, çizim, model ve tablo temsillerini içeren göstergeler yer almaktadır. Görselleştirme bileşeni içerisinde dönüştürmeyi ve zihinde canlandırmayı içeren göstergeler yer almaktadır. Matematiksel düşünme adımına geçiş bileşeni içerisinde ise özelleştirmeyi, genellemeyi, varsayımda bulunmayı, doğrulama ve ikna etmeyi içeren göstergeler yer almaktadır.

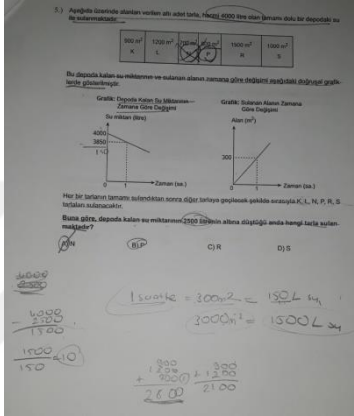
Araştırma verileri düzenlendikten sonra yukarıda belirtilen analiz çerçevesi kullanılarak kodlamalar yapılmıştır. Kodlama aşaması tamamlandıktan sonra her bir problem için

ayrı ayrı tablolar oluşturularak bulgulara sunulmuştur. Oluşturulan tablolar ve aktarılan bulgularla altında görsel temsil kullanımı bileşenlerine ilişkin katılımcıların oluşturduğu kanıtlar verilmiştir. Paylaşılan bu görsel temsil kanıtları katılımcı dokümanlarının fotoğraflarının alınması ile hazırlanmıştır.

Cebir Testi uygulaması yapıp öğrencilerin cevapları incelendikten sonra çözümlerinde görsel akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarması açısından en uygun cevaplar verdiği düşünülen öğrenciler yarı yapılandırılmış görüşme için seçilmiştir. Daha sonra bu öğrencilerle görüşme yapıp ses kayıtları alınarak veriler toplanmıştır. Eş zamanlı toplanan veriler analiz edilirken bütüncül bir yaklaşım (Bogdan ve Biklen 2007) izlenmiştir. Bundan dolayı öğrencilerin tüm sorulara verdikleri cevapları ayrı ayrı düzenlenip tablolar oluşturulmuştur. Oluşturulan tabloların ilk sütununda görüşmeye ait transkriptler, ikinci sütununda öğrencinin Cebir Testinde verdiği cevaba ait görsel kanıt, üçüncü sütunda ise görüşmeye ait araştırmacının notları yer almaktadır. Yapılan bu düzenlemelerin bir örneğini göstermek için Ö6 ile yapılan uygulamadaki bir soruya verilen cevap ve görüşme sonucu elde edilen veriler Çizelge 3.9’da sunulmuştur.

Yarı yapılandırılmış görüşme verilerinin Çizelge 3.9’daki gibi çözümlenmesinin ardından bu verilerden uygun olanlar, bulgular kısmında öğrencilerin Cebir Testine ilişkin görsel akıl yürütme durumlarının belirtildiği çizelgelere yönelik yapılan açıklamaların altında örnek görsellerle birlikte öğrencilerin görsel akıl yürütmelerinin derinlemesine incelenmesi amacıyla çizelge açıklamalarına ek olarak sunulmuştur.

Çizelge 3.9 Yarı yapılandırılmış görüşmeye ilişkin verilerin düzenlenmesi ve analiz sürecine ait bir örnek.

Görüşme Kaydı	Görsel Kanıt	Araştırmacı Notları
Besinci Soru: A: Sorudan ne anladığınızı söyler misin? Ö18: Burada hacmi 4000 L olan tamamı dolu bir su depomuz varmış. Bir saatte 150 L su kullanarak 300 metrekairelik alanı sulanıyor. Depoda kalan su 2500 litrenin altına düştüğünde hangi tarlanın sulandığı sorulmuş. A: Yaptığın çözümde izlediğin yolu kısaca açıklayabilir misin? Ö18: Depoda kalan su 2500 litrenin altına düştüğünde bu depomuzdan (ben şöyle yaptım 4000'den 2500'ü çıkardım) 1500 L su kullanılması gerekiyor. Bir saatte 150 L su kullanarak 300 metrekairelik alan sulanabildiği için 1500 litre su 3000 metrekairelik alana denk geliyor. 3000 metrekairelik sulanacak alan K, L, N, P, R, S şeklinde tarlaların sulanma sırası dikkat edilerek bulunması gerekiyormuş. 900 metrekaire ile 1200 metrekaireyi topladım, 2100 m² etti. 3000 metrekaireye daha ulaşamıyoruz. Bu nedenle 700 metrekaireyi de ekliyoruz. 2800 m² yapıyor. Görüyoruz ki bu da yetmiyor. 3000 metrekairelik kısmın sulanması lazım ki depodaki su 2500 litrenin altına düşsün. Bu nedenle P'nin sulanması lazım. Yani P'ye gelince sulaması bitiyor. A: Böyle bir yolu neden tercih ettiğini söyler misin? Ö18: Verilen grafiklerden yararlanarak sonuca ulaşabileceğimi düşündüğüm için. A: Soruyu çözerken neden bir görsel kullandığını söyler misin? Ö18: Soruda zaten tarlaları sırasıyla vermiş ve grafiği de çizmiş. Bu nedenle verilen görselin üzerinde işaretlemeler yaparak ve grafikten yararlanarak soruyu çözdüm. A: Sence bu soru, farklı bir çözüm yolu ile nasıl çözülebilir? Ö18: Saatlere göre ne kadar alanın sulandığı, hangi tarlada ne kadar alanın sulandığı yazılarak tablo oluşturulabilir.		-Verilen görseli kullandı. -Verilen görsel üzerinde çizim temsili kullandı. -Zihinde canlandırma ve dönüştürme yaptı. -Genellemeye ulaştı. -Özelleştirmeyi de tamamladı.

3.6 Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Bu başlık altında araştırma kapsamı içerisindeki tüm adımlardaki geçerlik ve güvenirliliğin sağlanması için alınan önlemler yer almaktadır. Durum çalışması deseni kullanılarak yapılan bu araştırmanın niteliğinin artırılabilmesi adına iç geçerlik, dış

geçerlik, yapı geçerliğinin ve güvenilirliğin sağlanabilmesi gerekmektedir (Yin 1984).

“Araştırmacının elde ettiği bulguların gerçekliğine, benzer ortamlarda sonuçların geçerliğine, süreçlerin birbiri ile tutarlı olmasına ve verilerin nesnel bir yaklaşımla toplandığına ve yine nesnel bir yaklaşımla sonuçlar ortaya koyduğuna ilişkin kanıtlar sunması gereklidir” (Yıldırım ve Şimşek 2021, s.289). Buradan hareketle bu araştırmanın iç geçerliliğini (inandırıcılığını) artırabilmek için belirlenen öğrencilerle uygulama öncesinde tanışılmış, yapılan görüşmelerde öğrencilerin kendilerini rahat hissedebilecekleri bir ortam hazırlanmış, yapılan görüşme süreleri öğrencileri sıkmadan uzun süreli bir etkileşim için ayarlanmıştır. Ayrıca uzman görüşleri alınarak hazırlanan Cebir Testinin uygulanması ile elde edilen dokümanlar, yarı yapılandırılmış görüşme soruları ile yapılan görüşmelerin kayıtları ve araştırmacının tuttuğu gözlem notları kullanılması sonucu veri çeşitlemesi yapılmıştır. Araştırmacı veri toplama sürecinin öncesi ve sonrası dahil olmak üzere araştırmanın tüm aşamalarında danışmanı ile toplantılar yaparak uzman görüşleri almıştır. Bu görüşmelerden elde edilen geri bildirimler dikkate alınmış ve araştırma sürecini destekleyerek katkı sağlamıştır.

Araştırmada kullanılan Cebir Testinin kapsam geçerliğini sağlaması için aşağıdaki adımlar atılmıştır. 2018-2023 yılları arasında LGS merkezi ortak sınavlarında sorulan matematik alt testine ait Cebir konu alanı ile ilgili 32 sorunun hangi kazanım ya da kazanımlarla ilgili olduğunu matematik eğitimi alanında yüksek lisans yapmış bir öğretmen ile araştırmacı ayrı ayrı ilişkilendirmiştir. Her iki ilişkilendirme karşılaştırılmış ve farklılık olan eşleştirmeler üzerine tekrar düşünülüp ortak kararlar alınarak Cebir öğrenme alanındaki kazanım listesi ve LGS soru dağılım tablosu oluşturulmuştur. Tablo matematik eğitimi alanında uzmanlığı olan ve görsel akıl yürütme üzerine çalışmış bir öğretim elemanının görüş ve önerilerine sunulmuştur. Alınan görüşler doğrultusunda tabloda düzenlemeler yapıp Cebir öğrenme alanındaki kazanım listesi ve LGS soru dağılım tablosunun son hali hazırlanmıştır. Böylece Cebir Testinin kapsam geçerliğinin sağlanmasına çalışılmıştır.

Araştırma sonuçlarının genellenebilirliği dış geçerlik (aktarılabirlik) olarak ifade edilmektedir (Yin 1984). Nitel araştırmaların sonuçları benzer ortamlara doğrudan

doğruya genellenemediği için bu araştırmalarda aktarılabilirlik kavramı ön plana çıkmaktadır (Yıldırım ve Şimşek 2016). Bu araştırmanın aktarılabilirliğini artırabilmek için doğrudan alıntılar yapılarak veya dokümanların resmedilmesiyle öğrencilerden elde edilen verilere sıklıkla yer verilmeye çalışılmış, betimlemeler ayrıntılı yapılmıştır. Bunlarla birlikte araştırma süreci ve ortamı detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

Araştırmacıdan kaynaklanabilecek yanlışlık ve hataların en asgari düzeye indirilmesi tutarlık olarak ifade edilmektedir (Yin 1984). Nitel araştırmalarda ise tutarlık araştırmada elde edilen bulguların benzer şartlarda tekrar edilebilirliğiyle ilgilidir (Merriam 2009). Araştırma sürecinin tamamında alanyazından faydalanılmış ve araştırmada kaynak gösterilerek yer verilmiştir. Araştırmanın tüm bölümlerinde ayrıntıya girilerek açıklamalar yapılmıştır. Ayrıca tutarlığın artması adına elde edilen verilerin bir bölümü için kodlayıcılar arası uyum yüzdesi hesaplanmıştır (Miles ve Huberman 1994). Her başarı düzeyinden rastlantısal olarak seçilen birer öğrencinin transkripti araştırmacı ve matematik eğitiminde uzman olan bir kodlayıcı tarafından ayrı ayrı kodlanmıştır. Bu kodlamaların ardından Miles ve Huberman (1994) formülüne ile hesaplanan kodlayıcılar arası uyum yüzdesinin % 81 çıktığı görülmüştür. Böylece araştırmacı ve matematik eğitiminde uzman olan kodlayıcı tarafından yapılan kodlamaların birbirine yakın olması, araştırmada yapılan kodlamanın tutarlı olduğunu göstermektedir.

Teyit edilebilirlik kavramının çerçevesinde “nitel araştırmacıdan beklenen ulaştığı sonuçları topladığı verilerle sürekli olarak teyit etmesi ve bu çerçevede okuyucuya mantıklı bir açıklama sunabilmesi” esastır (Yıldırım ve Şimşek 2021, s.295). Bu araştırmada teyit edilebilirliğin sağlanması için her aşamada uzman görüşleri alınmış ve gerekli olan düzeltmeler yapılmıştır. Ayrıca ham veriler dijital ortamda araştırmacı tarafından saklanmaktadır. Bunlarla birlikte araştırma sürecindeki tüm adımlar araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiş ve her aşamada araştırmacının danışmanı rehberlik yaparak yardımcı olmuştur.

4. BULGULAR

4.1 Özdeşlik Modeli İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel özelleştirme problemi kapsamında özdeşlik modeli içeren birinci sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.1’de sunulmuştur.

Çizelge 4.1 Öğrencilerin özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

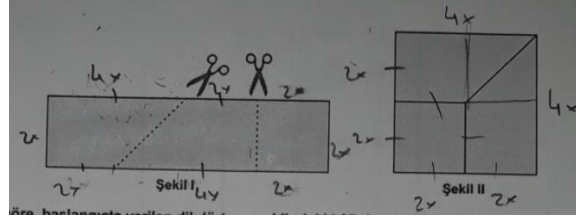
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö8, Ö12, Ö15, Ö17	Ö2, Ö7, Ö14, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	-	-
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

Çizelge 4.1 incelendiğinde; öğrencilerin özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö8 ve Ö15 verilen cebirsel ifadenin karekökünü bulurken hata yapmış olup soruda verilen karenin bir kenar uzunluğunu yanlış hesaplamışlardır. Her iki katılımcı da verilen görsel üzerinde çizim temsili kullanmalarına rağmen zihinde canlandırma aşamasına tam olarak geçiş yapamamışlardır. Ayrıca işlem hatası yaptıkları için görsel özelleştirme yapamayıp matematiksel düşünme aşamasına geçememişlerdir. Diğer katılımcılardan Ö1, Ö5, Ö6, Ö9, Ö10, Ö11 ve Ö16 herhangi bir çizim yapmak yerine verilen görseller arasında ilişki kurarak eşleştirdikleri cebirsel ifadelerden yola çıkıp uygun çıkarımlarda bulunarak zihinde canlandırmayı gerçekleştirmiştir.

Katılımcılardan Ö2, Ö7, Ö12 ve Ö14 verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaparak uygun çıkarımlara ulaşmış ve zihinde canlandırmayı gerçekleştirmişlerdir. Katılımcılardan Ö4 ve Ö13 verilen görsellerin üzerine açıklamalar ekleyerek uygun çıkarımlara ulaşmış ve zihinde canlandırmayı gerçekleştirmişlerdir. Katılımcılardan Ö3, Ö17 ve Ö18 verilen görselin bir benzerini çizerek uygun çıkarımlara ulaşmış ve zihinde canlandırmayı gerçekleştirmişlerdir. Zihinde canlandırmayı uygun bir şekilde yapabilen tüm katılımcıların görseller üzerinde veya yeni bir görsel çizerek yapmış oldukları çıkarımlar sonucunda dönüştürme ve özelleştirmeyi yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdikleri görülmüştür.

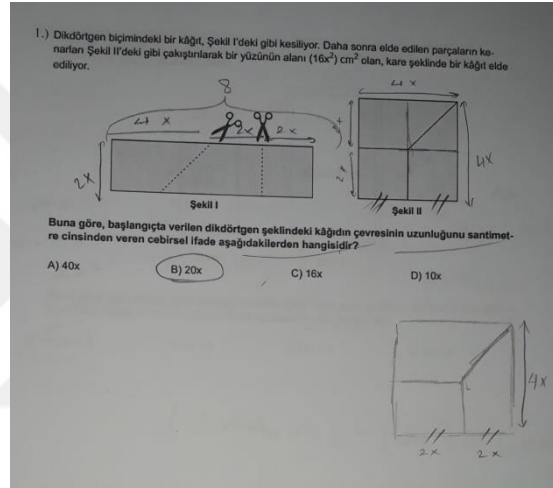
Özdeşlik modeli içeren bu görsel özelleştirme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 5 ve yüksek başarı düzeyinde 4 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme ve zihinde canlandırma göstergelerini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, benzer şekilde matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre görsel temsil-çizim göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergelerinde ve matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu (f=16) özelleştirme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö14'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.1'de görülebilir. Şekil 4.1 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen görsel üzerine yaptığı çizimlerle görseli parçalara ayırması, çizim temsilini kullandığını gösterir.



Şekil 4.1 Ö14'ün özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Katılımcı Ö3'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2 Ö3'ün özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

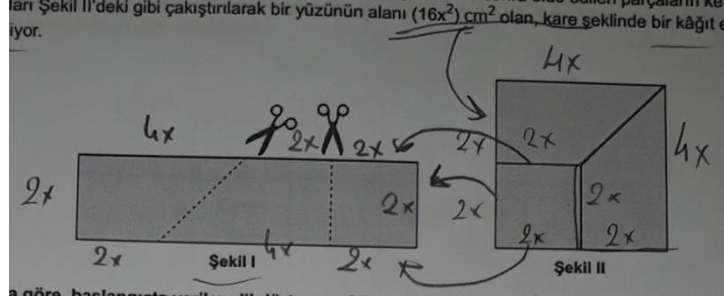
Dönüştürme temsilini gerçekleştiren Ö3 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

A: Soruyu çözerken neden bir görsel kullandığını söyler misin?

Ö3: Yaptığım çizimden yola çıkarak soruyu çözmüş oldum.

Ö3 ile yapılan görüşmede öğrencinin yeni bir görsel çizerek yapmış olduğu çıkarımlar sonucunda soruyu çözdüğünü ifade etmesi dönüştürme yaptığını gösterir.

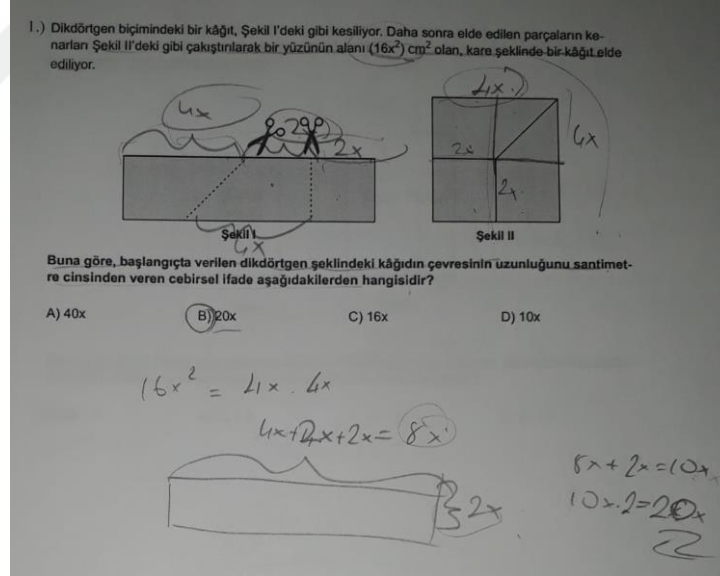
Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.3'te verilmiştir.



Şekil 4.3 Ö17'nin özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen iki görsel arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Şekil 4.3 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen görsellerin kenar uzunluklarını uygun bir şekilde eşleştirerek görsel temsiller arasında bağlantı kurması, zihinde canlandırma yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.4'te verilmiştir.



Şekil 4.4 Ö18'in özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili ve problemi çözme süreci

Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Birinci sorudan ne anladığını ve soruyu çözerken nasıl bir yol izlediğini kısaca söyleyebilir misin?

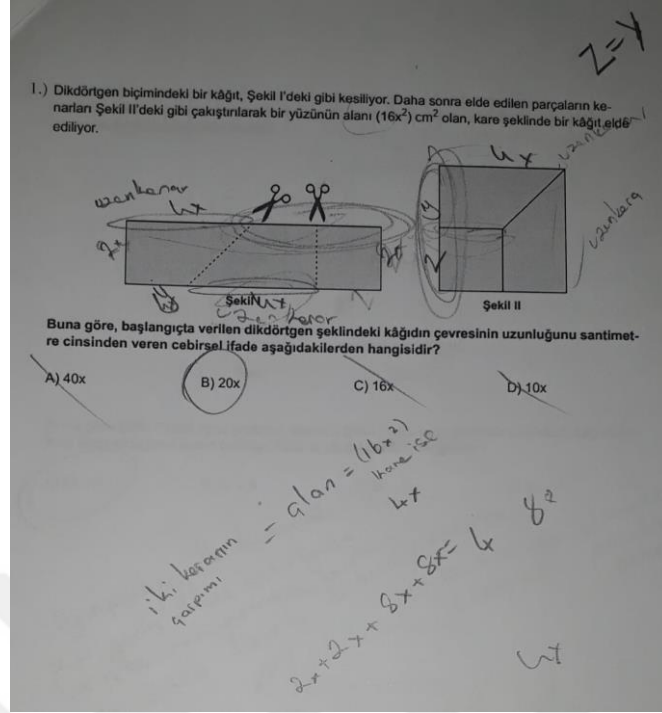
Ö18: Burada bir dikdörtgeni kesmişler ve elde edilen parçalarla ikinci şekli oluşturmuşlar. İkinci şekil kare olmuş ve alanı $16x^2$ olduğu için karenin bir kenar uzunluğu $4x$ oluyor. Zaten ortadan dik bir çizgi çekildiğinde ortadaki de kare olduğu için uzunluğu $2x$ olan iki parça oluşuyor. Oluşan yamuğun uzun kenarı $4x$, kısa kenarı ise $2x$ oluyor. Karenin kısa kenarı da $2x$ olduğundan toplam $8x$ yapıyor. Bir de ilk şekildeki dikdörtgenin kısa kenarı $2x$ olduğu için dikdörtgenin çevresi $8x + 2x = 10x$ ve $10x \cdot 2 = 20x$ oluyor. Ben cevaba B seçeneği dedim.

A: Aşağıda yeni bir görsel çizdiğini görüyorum. Neden bu çizimi yaptın?

Ö18: Yukarıda şekildeki makaslar var. Bu işi biraz zorlaştırdığı, karıştırdığı için aşağıya bir kare çizmeyi daha uygun gördüm.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin ilk şekildeki kesme işlemlerinden sonra elde edilen parçaların birleştirilerek ikinci şeklin nasıl oluşturulduğunu ifade edebilmesi zihninde canlandırma yaptığını gösterir. Katılımcının her bir parçanın uzunluğunu hesapladığını ve şekiller arasındaki ilişkiden yola çıkarak elde ettiği çıkarımlarla parçaların ait oldukları yerleri bulduğunu söylemesi dönüştürme adımını gerçekleştirdiğini göstermektedir. Bu adımların ardından dikdörtgenin çevresini bulduğunu belirten öğrencinin özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiği görülmüştür. Bunlarla birlikte verilen görselde bulunan makas sembollerinin kafasını karıştırmaması için yeni bir görsel çizmeyi tercih ettiğini söyleyen öğrenci bu sayede daha rahat çözüme ulaştığını belirtmiştir.

Katılımcı Ö13'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.5'te verilmiştir.



Şekil 4.5 Ö13'ün özdeşlik modeli içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci

Katılımcılardan bir diğeri olan Ö13 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

A: Merhaba, birinci sorudan ne anladığını ve yaptığın çözümde izlediğin yolu kısaca anlatabilir misin?

Ö13: Birinci soruda bize dikdörtgen şeklinde bir kâğıt vermiş. Bu kâğıdı kareye çevirip bu karenin alanını vermiş. Alanın formülü iki kenarının çarpımı ve alanı da $16x^2$ olduğu için ben kenarlardan birinin uzunluğunu $4x$ buldum. Burada aslında özdeşlik modeli olduğu için tam açılımında da (ilk şekilden bahsediyor) parçalardan biri olan yamuğun uzun olan kenarını $4x$ ve kısa olan kenarını ise $2x$ buldum. İlk şekildeki dikdörtgenin kısa kenar uzunluğu $2x$ olduğu için toplam $4x$ yapıyor. Elimizdeki parçaların uzunluklarını yerine yazdığımızda (ilk şekildeki dikdörtgenin) uzun kenarı $8x$ yapıyor. $8x$ ile $8x$ topladığımız zaman $16x$, son olarak $4x$ topladığımızda dikdörtgenin çevresi $20x$ yapıyor. Ben B seçeneği dedim.

A: Verilen şekli kullanarak çözüme ulaştığını görüyorum.

Ö13: Evet.

A: Yeni bir görsel çizmeye gerek duymadın galiba.

Ö13: Evet, verilen görseli kullandım.

A: Neden bu yolu tercih ettin? Bu sorunun çözümünde farklı bir yol tercih etmek ister miydin?

Ö13: Yaptığım çözümün pratik olduğunu düşünüyorum. Aklımda başka bir yol daha vardı. Ama verilen şekil üzerinden yapınca şekil çizme ile vakit kaybetmeyip soruyu daha hızlı çözebileceğimi düşündüm.

A: Aklına gelen diğer yolu kısaca söyleyebilir misin?

Ö13: Aklımda farklı bir şekil canlandırmıştım. Onu çizip, alanları aynı olacağı için bulduğumuz kenar uzunluklarını da yerine yazıp yapabilirdim ama ilk yaptığım yöntem daha basit olduğu için bunu yapmadım.

Ö13 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görsellerin bir özdeşlik modeline ait olduğunu belirtmesi daha önce öğrendiği bilgiyle verilen görseller arasında ilişki kurup zihninde canlandırma yaptığını göstermektedir. Öğrencinin verilen görseldeki parçaların yerlerini yaptığı çıkarımlarla eşleştirerek bulması ve kenar uzunluklarını hesaplayarak yerlerine yazması dönüştürme aşamasını gerçekleştirdiğini gösterir. Bu adımların sonunda dikdörtgenin çevresini bulması da özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Bunlarla birlikte zihninde yeni bir görsel canlandırıldığını belirten öğrenci bu görselin çizimini yapıp soruyu farklı bir yöntemle çözebileceğini ancak bunun daha uzun süre alacağını düşündüğü için yeni bir görsel çizmeyi tercih etmediğini belirtmiştir.

4.2 Cebirsel İfadelerin Çarpımını İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel özelleştirme problemi kapsamında cebirsel ifadelerin çarpımını içeren ikinci sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.2’de sunulmuştur.

Çizelge 4.2 Öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

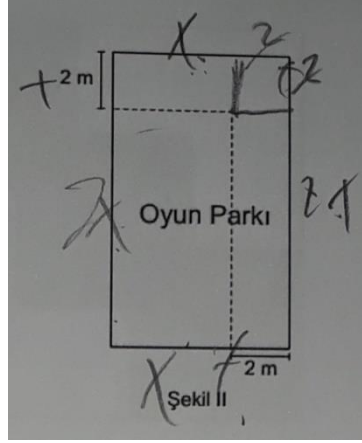
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö8, Ö13, Ö17	Ö16, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-	Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö8, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö8, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	-	-
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

Çizelge 4.2 incelendiğinde; öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeleri görülmektedir. Katılımcılardan Ö15 dikdörtgen şeklinde verilen oyun parkının alanını hesaplamak için kullanması gereken cebirsel ifadeleri belirlerken hata yapmış olup soruda verilen tüm verileri toplayarak yanlış sonuca ulaşmıştır. Katılımcı verilen görsel üzerinde herhangi bir çizim yapmadığı gibi dikdörtgen şeklindeki oyun parkının kenarlarının uzatılması sonucu oluşan yeni görsel ile ilgili bir çıkarımda bulunamamış, zihinde canlandırma aşamasını gerçekleştirememiştir. Bundan dolayı görsel özelleştirme yapamayıp matematiksel düşünme aşamasına geçememiştir. Diğer katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12 ve Ö14 herhangi bir çizim yapmak yerine verilen görseller arasında ilişki kurarak zihinde canlandırmayı gerçekleştirmiştir. Katılımcılardan Ö16 verilen görselleri ayrı ayrı çizip uygun çıkarımlara ulaşmış ve zihinde canlandırmayı gerçekleştirmiştir. Katılımcılardan Ö17 verilen birinci görsel üzerinde çizim yaparak uygun çıkarımlara ulaşmış ve zihinde canlandırmayı gerçekleştirmiştir. Katılımcılardan Ö13 verilen ikinci görseli tekrar çizmiş ve çıkarımlar yaparak zihinde canlandırmayı gerçekleştirmiştir. Katılımcılardan Ö18 ikinci görsel üzerinde çizimler yaparak yeni eklenen alanı üç parçaya ayırmış, sorunun çözümünde diğer katılımcılarla aynı çıkarımlarda bulunup benzer şekilde zihinde canlandırmayı gerçekleştirmiştir. Zihinde canlandırmayı uygun bir şekilde

yapan katılımcılar her bir görselin alanını ayrı ayrı hesaplayıp alanlar arasındaki farkı bulmuştur. Böylece katılımcılar özelleştirme adımını yerine getirmiş olup alanlar arasındaki farkın bulunması ile oyun alanının ne kadar büyüdüğünün hesaplanabileceğine karar vererek matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Katılımcılardan Ö8 ise ikinci görsel üzerinde çizimler yaparak yeni eklenen alanı üç parçaya ayırmış ve her bir parça için ayrı ayrı çıkarımlarda bulunup zihinde canlandırmayı gerçekleştirmiştir. Katılımcı yeni eklenen kısımdaki her bir parçanın alanını hesaplamış ve bulduğu sonuçları toplayarak eklenen kısmın alanını bulmuştur. Diğer katılımcılardan farklı bir özelleştirme yaparak sonuca ulaşan katılımcı matematiksel düşünmeyi uygun bir şekilde yerine getirmiş olur.

Cebirsel ifadelerin çarpımını içeren bu görsel özelleştirme problemünde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 ve yüksek başarı düzeyinde 2 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde öğrenci olmayıp yüksek başarı düzeyinde sadece 1 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki zihinde canlandırma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 8 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, benzer şekilde matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 8 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre görsel temsil-çizim göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergelerinde ve matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu (f=17) özelleştirme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

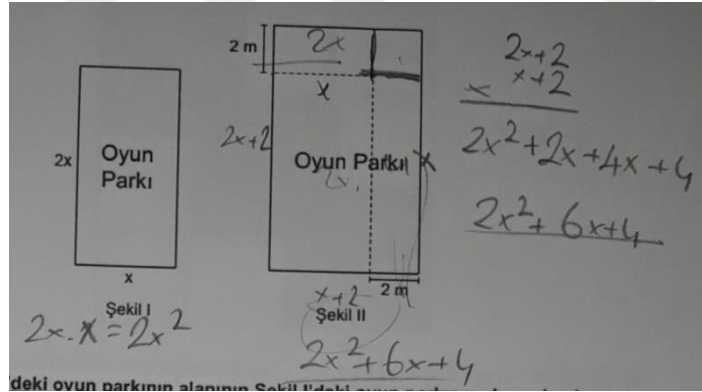
Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö8'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.6'da görülebilir.



Şekil 4.6 Ö8'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Şekil 4.6 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen görsel üzerine yaptığı çizimlerle görseli farklı dörtgensel bölgelere ayırması, çizim temsilini kullandığını gösterir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.7'de verilmiştir.



Şekil 4.7 Ö18'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: İkinci sorudan ne anladığını, soruyu çözerken nasıl bir yol izlediğini ve neden böyle bir yol tercih ettiğini kısaca söyleyebilir misin?

Ö18: Şekil 1'de oyun parkının planı veriliyor. Şekil 2'de oyun parkının planı her iki kenardan da ikişer metre olacak şekilde biraz daha büyütülüyor. Şekil 2'deki oyun parkının alanının şekil 1'deki oyun parkının alanından kaç metrekare fazla olduğunu

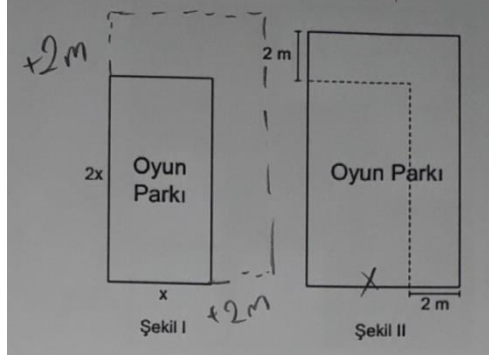
soruyor. Şekil 2'deki oyun parkının kenar uzunluklarını $(2x + 2)$ ve $(x + 2)$ olarak buldum. Bunları çarptıktan sonra $2x^2 + 6x + 4$ ifadesi çıktı. Şekil 1'deki oyun parkının alanı ise $2x^2$ çıkıyor. İkisini çıkardım ve $6x + 4$ buldum.

A: Bu soruda yeni bir görsel çizmemişsin. Verilen görsel üzerinde çizimler yapmışsın.

Ö18: Bu soruda yeni bir şekil çizmemize gerek yoktu. Fakat başka bir yolla çözecek olsaydım Şekil 2'de oyun parkının üzerinde 2 metre genişletilmiş olan kısımlarda noktalı çizgilerle gösterilmiş olan bir bölüm var. Bu bölümden yukarı doğru bir çizgi çizerdim. Burası 2 metre ve burası x olduğu için buradaki dikdörtgenin alanı $2x$ olacaktı. Buradaki karenin bir kenar uzunluğu 2 metre olduğu için alanı 4 metrekaire olacaktı. Diğer dikdörtgenin kenar uzunlukları 2 metre ve $2x$ olduğu için alanı $4x$ olur. Toplam $4x + 2x + 4 = 6x + 4$ olacak şekilde soruyu çözebilirdik. Ben bu yoldan çözmedim.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin Şekil 2'nin kenar uzunluklarını nasıl bulduğunu anlatması, Şekil 2'deki dikdörtgenin alanından Şekil 1'deki dikdörtgenin alanını çıkararak sonuca ulaşacağını belirtmiş olması sırasıyla zihinde canlandırma yapıp özelleştirme adımına geçtiğini göstermektedir. Öğrencinin bu adımların sonunda planladığı işlem adımlarının yerine getirerek doğru sonuca ulaşması özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Bununla birlikte Ö18 bu soruyu farklı bir yöntemle de çözülebileceğinden bahsetmiştir. Öğrencinin eklenen alanı yaptığı çizimlerle üç farklı dörtgene ayırarak oluşan dörtgenlerin alanlarını ayrı ayrı nasıl bulacağını belirtmesi dönüştürme yaptığını ve sorunun çözümünü anlatarak tekrar yapması özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Bununla birlikte başarı seviyesi yüksek olan öğrencilerden Ö18 bu soruda dönüştürmeyi gerçekleştiren tek katılımcıdır.

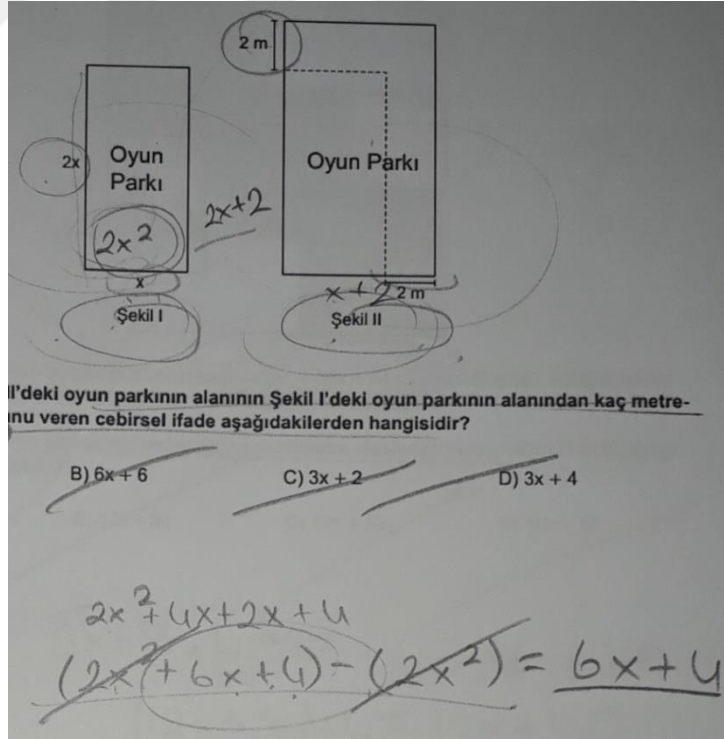
Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.8'de verilmiştir.



Şekil 4.8 Ö17'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen iki görsel arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Şekil 4.8 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen oyun parklarına ait görsellerin kenar uzunluklarını uygun bir şekilde eşleştirerek görsel temsiller arasında bağlantı kurması, zihinde canlandırma yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö7'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.9'da verilmiştir.



Şekil 4.9 Ö7'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili ve problemi çözme süreci

Ö7 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: İkinci sorudan ne anladığını ve soruyu çözmek için nasıl bir yol izlediğini bize kısaca anlatabilir misin?

Ö7: Şekil 1'de bize kenar uzunlukları x ve $2x$ m olan dikdörtgen şeklindeki bir oyun parkı vermiş. Şekil 2'de ise bu parkın genişletilmiş halini vermiş. Bizden genişletilmiş halinin alanının genişletilmemiş halinin alanından kaç metrekare fazla olduğunu veren cebirsel ifadeyi istemiş.

A: İstenilen ifadeleri şekil üzerinden yola çıkarak mı buldun?

Ö7: Evet, şekil üzerinden giderek yaptım. Zaten uzun kenar $2x$ 'ti. Uzun kenarı 2 metre daha artırdığı için $2x + 2$ metre oldu. Kısa kenar x metreydi. Burayı 2 metre artırınca $x + 2$ metre oldu. Bize alanını soruyor. Alanı da (Şekil 2'nin) $2x^2 + 6x + 4$ oluyor. Bulduğumuz sonuçtan ilk baştaki dikdörtgenin (Şekil 1) alanını çıkarmamız gerekiyor.

A: Şekil 2'nin alanından şekil 1'in alanını çıkararak cevabı bulmuşsun sanırım.

Ö7: Evet, çıkarmamız gerekiyor. Bu yüzden $2x^2$ 'yi de daha önce bulduğumuz cebirsel ifadeden (Şekil 2'nin alanından) çıkartınca A şikkını buluyoruz.

A: Anladım.

A: Bu sorunun çözümünde farklı bir yöntem kullanılabilir miydi? Çizim yapılarak bu soru çözülebilir miydi?

Ö7: Şekil üzerine çizim yapmayı düşünmedim. Aklıma ilk bu çözüm geldi ve bu yöntemi uyguladım. Benim için bu yöntem daha basit ve kısaydı.

Ö7 ile yapılan görüşmede öğrencinin ilk şeklin kenar uzunluklarının ikişer santimetre uzatılması sonucu elde edilen ikinci şeklin kenar uzunluklarını bulması ve bu iki şeklin alanları arasındaki farkı nasıl bulacağını belirtmesi zihninde canlandırma yaptığını gösterir. Katılımcının dikdörtgenlerin alanlarının farkını bularak sonuca ulaşması ise özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

4.3 Cebirsel İfadeleri Çarpanlarına Ayırmayı İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel özelleştirme problemi kapsamında cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren üçüncü sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.3'te

sunulmuştur.

Çizelge 4.3 Öğrencilerin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö4, Ö5, Ö8, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	-	-
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

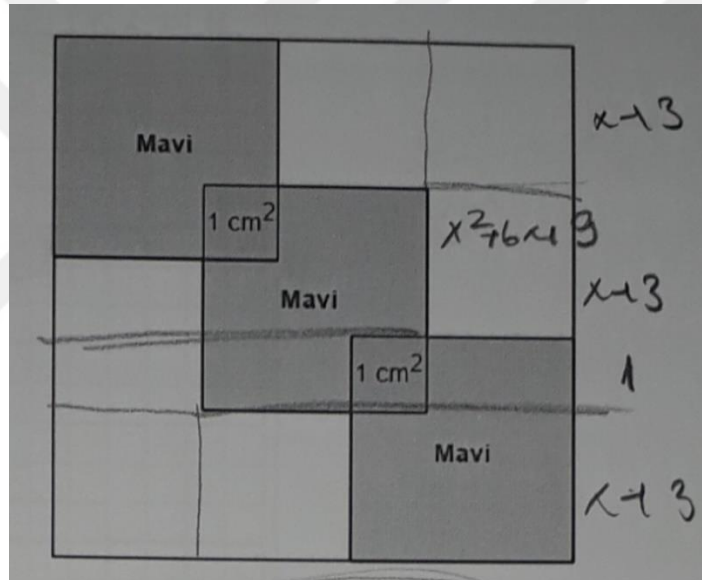
Çizelge 4.3 incelendiğinde; öğrencilerin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö13 ve Ö16, soruda verilen kare şeklindeki mavi kartonların kenar uzunluklarına y harfini vererek panonun bir kenar uzunluğunu ve alanını y cinsinden bulmuş ancak boş bırakılan bölgelerin alanları ile arasında uygun bir ilişki kuramadıkları için çözümü devam ettirememişlerdir. Ö13 çizim yapmış olup her iki katılımcı da açıklamalarda bulunmuş olmasına rağmen zihinde canlandırmayı tam olarak yapamadıkları için özelleştirme adımına geçememişlerdir. Ö8 soruyu çözmek için çaba harcamasına rağmen sonuca ulaşamadığı için soruyu boş bırakmışlardır. Ö11 ise hiçbir çizim ya da işlem yapmamış olup soruyu boş bırakmıştır. Katılımcılardan Ö15 çizim yapmasına rağmen doğru bir çıkarımda bulunamamış ve zihinde canlandırmayı gerçekleştirememiştir. Özelleştirme adımına geçemeyen bu öğrenciler matematiksel düşünmeyi yerine getirememişlerdir. Katılımcılardan Ö10'un herhangi bir çizim yapmadığı ancak verilen cebirsel ifadeyi ilk önce altıya böldüğü, daha sonra ise bulduğu cebirsel ifadeyi çarpanlarına ayırdığı ve elde ettiği sonucu ise verilen görsel üzerine uygun şekilde yazdığı görülmüştür. Doğru sonuca ulaşan bu öğrencinin yapmış olduğu

işlem basamakları dikkate alındığında sırasıyla zihinde canlandırma, dönüştürme ve özelleştirme basamaklarını yerine getirerek matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiği görülmektedir. Katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12, Ö14 ve Ö18 verilen görsel üzerinde yeni çizimler yaparak boş bırakılan bölgeyi altı adet özdeş kare oluşacak şekilde parçalara ayırarak uygun çıkarımlar yapmış ve zihinde canlandırmayı gerçekleştirmişlerdir. Bu katılımcılar verilen cebirsel ifadeyi altıya bölerek elde ettikleri her bir boş kare parçasının alanını bulmuş ve buradan yola çıkarak karenin bir kenar uzunluğunu hesaplayarak dönüştürme yapmışlardır. Elde ettikleri cebirsel ifadeleri verilen görselde yerlerine yazdıklarında kare şeklindeki panonun bir kenar uzunluğuna ulaşmış olmaları öğrencilerin özelleştirme yaptıklarını gösterir. Son olarak panonun çevresini bulup sonuca ulaşmaları öğrencilerin matematiksel düşünmeyi yerine getirdiklerini gösterir. Katılımcılardan Ö3 ve Ö4 tüm bu adımları yerine getirmekle beraber verilen görsellerin yanına açıklamalar ekleyerek yaptıkları çıkarımları detaylı bir şekilde aktarmışlardır. Katılımcılardan Ö9 verilen görselin içerisinde boş bırakılan bölgede çizim yaparak oluşturduğu altı özdeş kareden birini sorunun altına tekrar çizerek yaptığı çıkarımları burada göstermiştir. Katılımcılardan Ö17 ise boş bırakılan bölgeyi altı adet özdeş kare oluşacak şekilde parçalara ayıran diğer katılımcılar gibi soruya başlamış, verilen cebirsel ifadeyi altıya bölerek elde ettiği her bir boş kare parçasının alanını bulmuş ve buradan yola çıkarak karenin bir kenar uzunluğunu hesaplamıştır. Ancak mavi kartonlardan birini sorunun altına tekrar çizmesine rağmen elde ettiği cebirsel ifadeleri verilen görselde yerlerine yazarken mavi kartonun kenar uzunluğunu yanlış bulduğu için panonun alanını bulurken hata yapmıştır. Bundan dolayı bu öğrenci zihinde canlandırmayı ve dönüştürmeyi uygun bir şekilde yapmasına rağmen özelleştirme adımı hata yaptığı için matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememiştir.

Cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren bu görsel özelleştirme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 8 ve yüksek başarı düzeyinde 7 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme ve zihinde canlandırma göstergelerini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 7 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 5 ve yüksek başarı düzeyinde 7 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin

gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre görsel temsil-çizim göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergelerinde ve matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin yarıdan fazlası ($f=12$) özelleştirme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

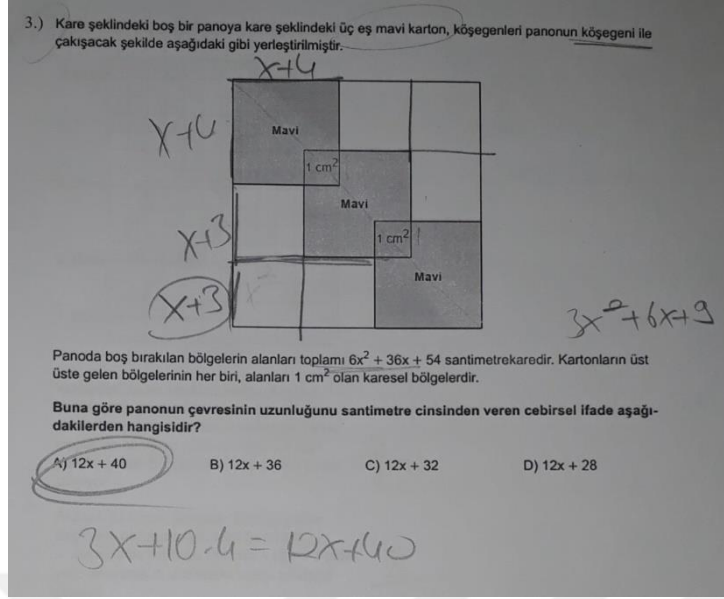
Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö5'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.10'da görülebilir.



Şekil 4.10 Ö5'in cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Şekil 4.10 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen görsel üzerine yaptığı çizimlerle görseldeki beyaz bölgeyi özdeş karesel bölgelere ayırması, çizim temsilini kullandığını gösterir.

Katılımcı Ö12'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.11'de verilmiştir.



Şekil 4.11 Ö12'nin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

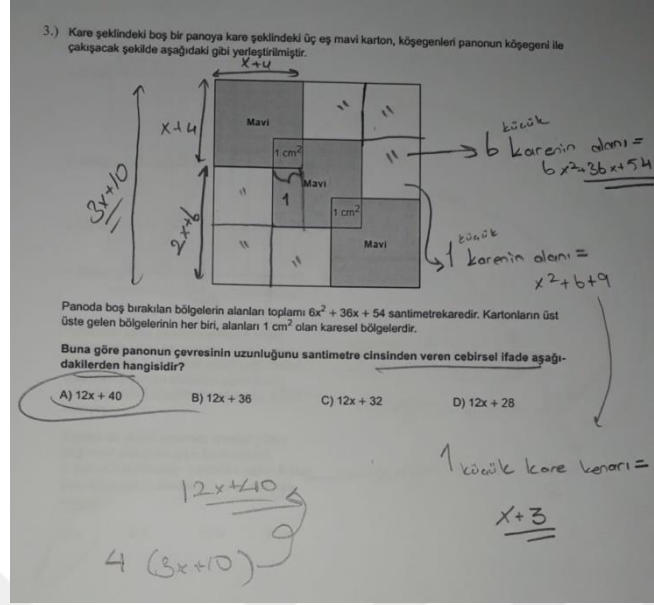
Dönüştürme temsili gerçeğe geçiren Ö12 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Yaptığın çözümde izlediğin yolu kısaca açıklayabilir misin?*

Ö12: *Bize kare şeklinde bir pano vermiş ve içine üç tane karton yerleştirmiş. Bu kartonların alanlarını vermemiş ama boş bırakılan yerlerin alanlarını vermiş. İki tane boş kısım var. Bu yüzden boş bırakılan yerlerin alanlarının toplamını ikiye böldüm. Boş bırakılan yerlerde küçük kareler oluşturdum ve o karelerin alanlarını buldum.*

Ö12 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen cebirsel ifadeyi kullanarak elde ettikleri her bir boş kare parçasının alanını bulduğunu ve buradan yola çıkarak karenin bir kenar uzunluğunu hesapladığını söylemesi dönüştürme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö3'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.12'de verilmiştir.



Şekil 4.12 Ö3'ün cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen görsel içerisindeki şekiller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

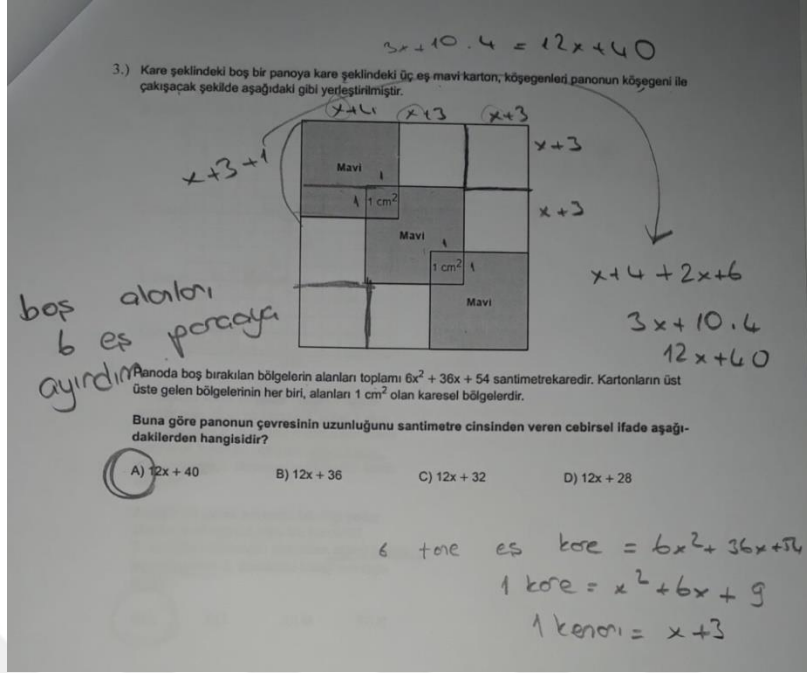
Zihinde canlandırma temsili gerçekleştirilen Ö3 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Soruyu çözerken neden bir görsel kullanmadığını söyler misin?

Ö3: Soruda verilen görsel üzerine yaptığım çizimler bana çok yardımcı oldu bence.

Ö3 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görseller üzerine yaptığı çizimlerin soruyu çözerken yardım ettiğini belirtmesi verilen görsel içerisinde oluşturduğu şekiller arasında bağlantı kurarak zihinde canlandırma yaptığını gösterir.

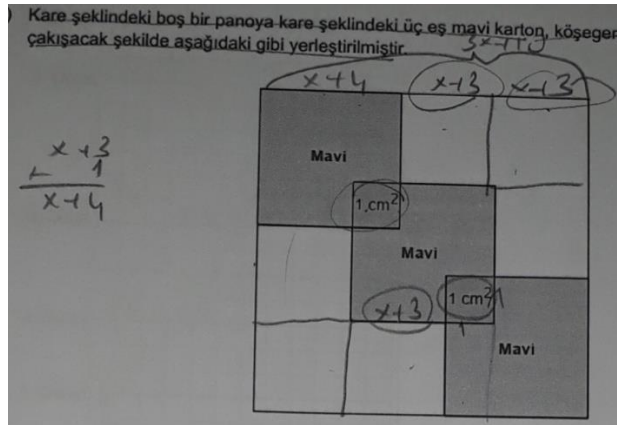
Katılımcı Ö4'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.13'te verilmiştir.



Şekil 4.13 Ö4'ün cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu görsel temsil ve problemi çözme süreci

Şekil 4.13 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen görsel üzerine yaptığı çizimler ve görselden elde ettiği çıkarımlar ile sonuca nasıl ulaştığını gösteren işlem adımlarını içeren problem çözme süreci görülmektedir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.14'te verilmiştir.



Şekil 4.14 Ö18'in cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili

Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

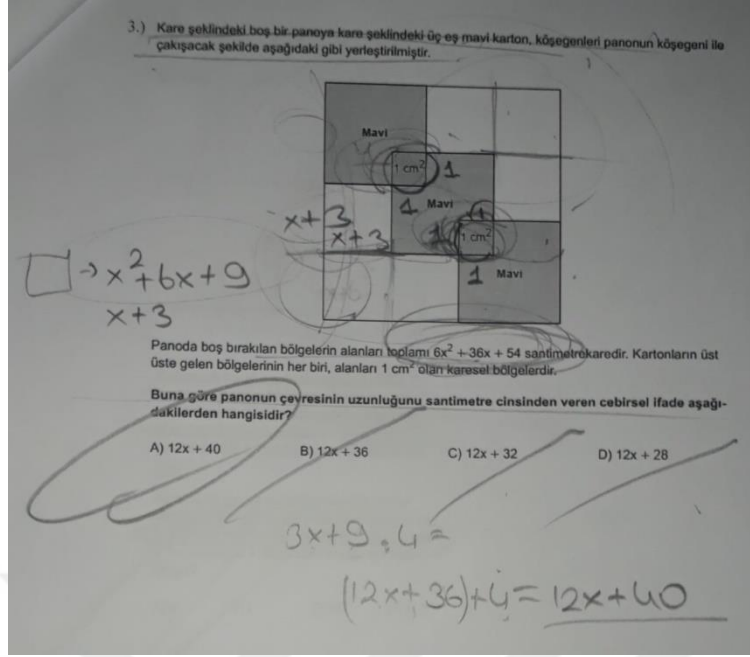
Ö18: *Bir pano var. Bu panonun üzerine 3 tane mavi kartonun panonun ve karelerin köşegenleri çakışık olacak şekilde yerleştirildiğini görüyoruz. Bu nedenle geri kalan kısımları altı eş kareye ayırdım. Bu altı karenin alanları toplamı $6x^2 + 36x + 54$ cm ediyormuş. Bunu 6'ya böldüm. Bir tane beyaz karenin alanı $x^2 + 6x + 9$ çıkıyor. "Buna göre panonun çevresinin uzunluğu kaç santimetredir?" demiş. Bunu da şöyle yaptım. Bir tane karemin alanı $x^2 + 6x + 9$ 'du. Bu da $(x + 3) \cdot (x + 3)$ özdeşliğine denk geliyor. Bu şekil kare olduğu için bir kenar uzunluğu $(x + 3)$ oluyor. İki tane beyaz karenin kenar uzunlukları $(x + 3)$ ve $(x + 3)$, bir de orada mavi kartonların üst üste bulunduğu 1 santimetrelilik bir kısım var. $(x + 3)$ ile 1'i topladığımızda $(x + 4)$ yapıyor. Panonun bir kenar uzunluğu $(x + 4) + (x + 3) + (x + 3) = (3x + 10)$ yapıyor. Bu nedenle panonun çevresi $(3x + 10) \cdot 4$ yaptığımızda $12x + 40$ yapıyor.*

A: *Bu soruda yeni bir görsel çizmek yerine verilen görsel üzerine çizim yaptığını görüyorum.*

Ö18: *Evet, çünkü bu şekilde daha kolay ve kullanışlı oldu.*

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görsel üzerinde çizimler yaparak boş bırakılan bölgeyi altı adet özdeş kareye ayırdığını belirtmesi zihinde canlandırmayı gerçekleştirdiğini gösterir. Verilen cebirsel ifadeyi altıya bölerek oluşturduğu her bir boş kare parçasının alanını bulan katılımcı buradan yola çıkarak karenin bir kenar uzunluğunu hesaplayarak dönüştürme yapmıştır. Bulduğu cebirsel ifadeleri verilen görselde yerlerine yazarak kare şeklindeki panonun bir kenar uzunluğuna ulaşmış olması öğrencinin özelleştirme yaptığını gösterir. Böylece panonun çevresini bulup sonuca ulaşması da öğrencinin matematiksel düşünmeyi yerine getirdiğini gösterir. Bu sorunun çözümünde Ö18 öğrencisinin yaptığı çizimler ve işlemlere ait görsel Şekil 8'de paylaşılmıştır.

Katılımcı Ö7'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.15'te verilmiştir.



Şekil 4.15 Ö7'nin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci

Katılımcılardan bir diğeri olan Ö7 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö7: Bize bir pano verilmiş ve bu panonun üzerine üç eşit mavi karton yerleştirilmiş. Bu kartonların çakışan kısımlarının alanları 1 cm^2 olarak belirtilmiş. Alanı 1 cm^2 ise kenar uzunlukları 1 cm 'dir. Ayrıca bize boş bölgelerin alanlarının toplamının $6x^2 + 36x + 54$ olduğunu söylemiş. Boş alanların her birini 3 eşit kareye ayırdığımda 6 tane kare oluştuğu için ben bu sonucu 6'ya böldüm.

A: Böylece küçük beyaz karelerin bir kenar uzunluğunu bulmuş oldun.

Ö7: Evet, $x^2 + 6x + 9$ küçük beyaz karelerden birinin alanı oldu. Bunu da çarpanlarına ayırınca bir kenarının uzunluğu $x + 3$ oldu. Küçük beyaz karelerden birini ayrıca çizerek gösterdim. Burada iki tane çakışan bölge var ve çakışan bölgelerin birer kenarı 1 cm oluyor. Panonun bir kenarının uzunluğu $3x + 10$ oluyor. Sonra da 4'le çarptım ve çevre uzunluğunu $12x + 40$ buldum.

A: Verilen görsel üzerine yaptığın çizimlerin çözüme olan katkısı nedir?

Ö7: Soruyu çözerken şekil üzerine yaptığım çizimler bana çok fayda sağladı. Şekil verilmeseydi kendim çizirdim. Çizim yapmadan yapılacak bir soru değildi. Gözümde canlandıramazdım.

Ö7 ile yapılan görüşmede öğrencinin ifade ettiği işlem basamakları sırasıyla zihinde canlandırma, dönüştürme ve özelleştirme adımlarını yerine getirerek matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Ö7 verilen görsel üzerine yaptığı çizimlerle birlikte küçük beyaz karelerden birini de tekrar çizmiştir. Yapılan görüşmede yaptığı çizimlerin çok faydalı olduğunu belirten öğrenci kendisinin yeni bir görsel çizerek de soruyu çözebileceğini belirtmiştir.

4.4 Doğrunun Eğimini İçeren Görsel Genelleme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen genelleme problemi kapsamında doğrunun eğimini içeren dördüncü sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.4'te sunulmuştur.

Çizelge 4.4 Öğrencilerin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Genelleme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Varsayımda Bulunma	-	-
	Doğrulama ve İkna Etme	Ö3, Ö12, Ö13, Ö17	Ö2, Ö9

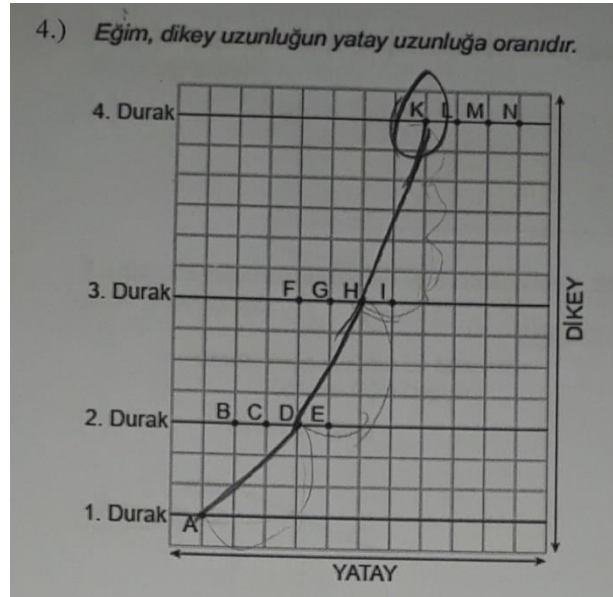
Çizelge 4.4 incelendiğinde öğrencilerin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö8 ve Ö15 verilen kareli zemin görseli üzerinde hiçbir işlem ve çizim yapmamış olup sadece yanlış seçeneği işaretlemişlerdir. Bu durum her iki katılımcının

da dördüncü durakta varılacak olan noktayı bulmak için verilen görsel üzerinde soruda belirtilen eğimlere uygun olacak şekilde çizimleri gereken doğrusal yolları zihinlerinde canlandıramadıklarını göstermektedir. Özelleştirme adımına geçemeyen bu öğrenciler matematiksel düşünmeyi yerine getirememişlerdir. Katılımcılardan Ö10 ise verilen kareli zemin görseli üzerinde eğimleri verilen doğrusal yollardan ilk ikisini doğru bir şekilde çizmiş ancak üçüncü yolun çiziminde hata yapmıştır. Bu katılımcının ilk iki adımıdaki çizimleri doğru yapması zihinde canlandırma, dönüştürme ve özelleştirme adımlarını yerine getirdiğini gösterir. Ancak üçüncü yolun çizimindeki hatası genelleme yapamadığını ve matematiksel düşünme aşamasına tam olarak geçemediğini gösterir. Diğer katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö3, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö13, Ö14, Ö17 ve Ö18 verilen kareli zemin görseli üzerinde A noktasından başlayıp D noktasına, buradan H noktasına ve en son K noktasına ulaşacak şekilde doğrusal yolları çizerek doğru cevaba ulaşmışlardır. Katılımcıların doğrusal yolları çizirken soruda belirtilen eğimlere dikkat ederek gerekli çıkarımlarda bulundukları ve uygun çizimleri yaptıkları görülmüştür. Katılımcılardan Ö14 ve Ö18 eğim formülünü de yazarak çözüme eklemiştir. Katılımcılardan Ö2, Ö3, Ö9, Ö13 ve Ö17 yaptıkları çizimlerin yanında doğrusal yolların eğimlerini işlem yaparak tekrar hesaplamış ve eğimlerin doğruluğunu kontrol etmişlerdir. Ö13 tüm bunların yanında açıklama da ekleyerek çözümü ayrıntılı bir şekilde yapmıştır. Katılımcılardan Ö4, Ö5, Ö12 ve Ö16 verilen kareli zemin görseli üzerinde A noktasından başlayıp D noktasına, buradan H noktasına ve en son K noktasına ulaşacak şekilde soruda belirtilen eğimlere dikkat ederek birim kareleri çizerek saymış, bu noktaları yuvarlak içine alıp doğru cevaba ulaşmışlardır. Ancak katılımcıların doğrusal yolları çizmediği, ulaşması gereken noktaları belirleyip işaretledikleri görülmüştür. Doğrusal yolları uygun bir şekilde çizerek veya noktaların yerini doğru bularak zihinde canlandırmayı yapan tüm katılımcılar sırasıyla dönüştürme, özelleştirme ve genelleme adımlarını tamamlayarak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

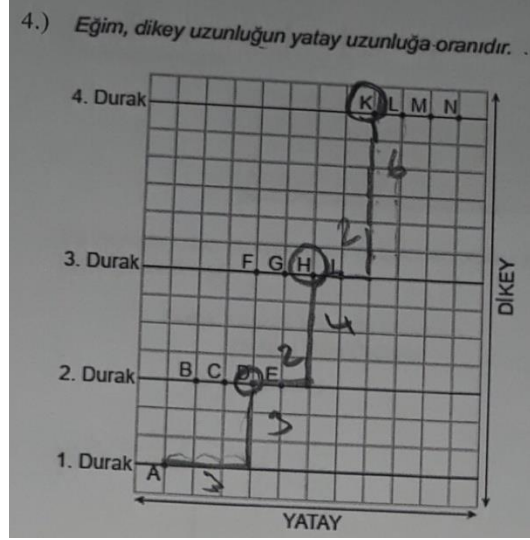
Doğrunun eğimini içeren bu görsel genelleme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme ve zihinde canlandırma göstergelerini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 9

öğrencinin olduğu, benzer şekilde matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki genelleme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki doğrulama ve ikna etme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 4 ve yüksek başarı düzeyinde 2 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre matematiksel düşünme bileşenindeki doğrulama ve ikna etme göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görsel temsil-çizim göstergesinde, görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergelerinde ve matematiksel düşünme-özelleştirme/genelleme göstergelerinde ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu (f=15) genelleme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.16'da görülebilir.



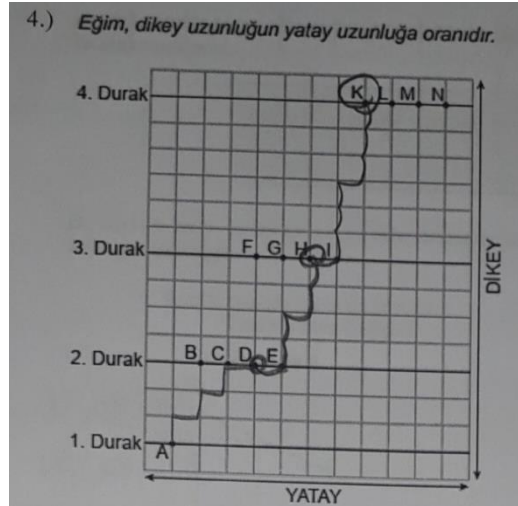
Şekil 4.16 Ö6'nın doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili



Şekil 4.18 Ö4'ün doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin verilen görsel içerisinde çizilen yollar arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Şekil 4.18 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen görsel üzerindeki duraklarda hangi noktalara ulaşılması ve bu noktalara ulaşılması için yolların nasıl çizilmesi gerektiğini göstermesi, zihinde canlandırma yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö12'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.19'da verilmiştir.



Şekil 4.19 Ö12'nin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili

Ö12 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö12: *Bu soruda bize duraklar vermiş. Birinci duraktan başlayıp ikinci durağa sonra üçüncü durağa ve en son dördüncü durağa soruda belirtilen eğimleri kullanarak ilerlememizi istemiş. Birinci duraktaki A noktasından ikinci durağa doğru eğimi 1 olan bir yoldan ilerleyerek D noktasına ulaştım. Sonra buradan eğimi 2 olan bir yol üzerinde ilerleyerek üçüncü duraktaki H noktasına ulaştım. Sonra bu noktadan eğimi 3 olan bir yol üzerinde ilerleyerek dördüncü duraktaki K noktasına ulaşıp sonucu buldum.*

A: *Verilen kareli zemin üzerinde soruda verilen eğim değerlerine uygun bir şekilde çizimler yaparak sırasıyla A noktasından D, H ve K noktalarına ulaştığını görüyorum.*

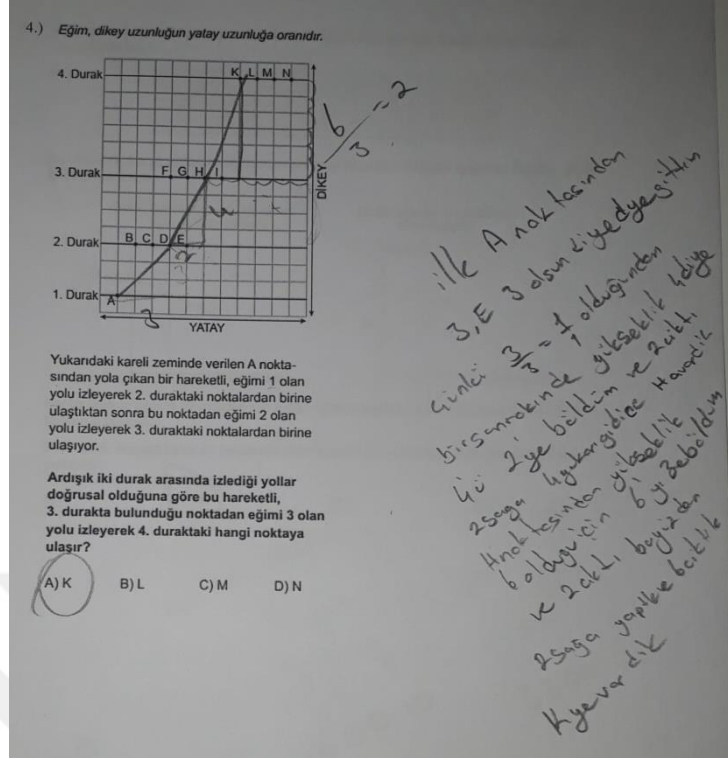
Ö12: *Evet.*

A: *Yolların eğimlerini oran olarak yazdığını görüyorum. Çizimlerini mi kontrol ettin?*

Ö12: *Evet. Yolların eğimlerini yazdım. Buna göre çizimlerimi yapıp kontrol ettim.*

Ö12 ile yapılan görüşmede öğrenci verilen kareli zemin görseli üzerinde soruda belirtilen eğimleri sağlaması için birim kareleri sayarak A noktasından başlayarak D noktasına, buradan H noktasına ve en son K noktasına ulaştığını ifade etmiştir. Katılımcı doğrusal yolları çizmemiş ama ulaşılması gereken noktaları bulmuş ve işaretlemiştir. Katılımcının ulaşılması gereken noktaları bulması sırasıyla zihinde canlandırma, dönüştürme, özelleştirme ve genelleme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Katılımcı ayrıca eğimleri kontrol ederek doğrulama ve ikna etme adımını da gerçekleştirmiştir.

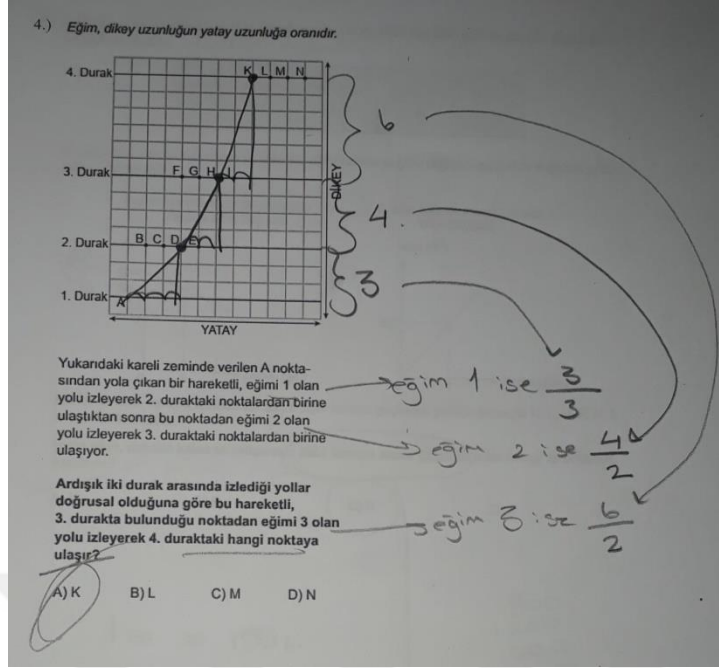
Katılımcı Ö13'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.20'de verilmiştir.



Şekil 4.20 Ö13'ün doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu genelleme temsili

Şekil 4.20 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen görsel üzerindeki duraklarda ulaşılması gereken tüm noktaları bulmak için aynı eğime sahip farklı yolları genelleyerek çizmesi ve bu sayede sonuca ulaşması, genelleme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö3'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.21'de verilmiştir.



Şekil 4.21 Ö3'ün doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu doğrulama ve ikna etme temsili

Şekil 4.21 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen görsel üzerindeki duraklarda ulaşılması gereken noktaları soruda belirtilen eğim değerlerini kullanarak görsel üzerinde yolları çizerek göstermesiyle birlikte çizdiği yolların eğimlerini hesaplayarak bulduğu noktaların yerlerinin doğruluğunu kontrol etmesi, doğrulama ve ikna etme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö7'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.22'de verilmiştir.

A: Verilen kareli zemin üzerinde H noktasından K noktasına doğru eğimi 3 olacak şekilde doğrusal bir yol çizdiğini görüyorum.

Ö7: Evet verilen kareli zemin üzerine çizimlerimi yaptım.

Ö7 ile yapılan görüşmede öğrenci verilen kareli zemin görseli üzerinde soruda belirtilen eğim değerlerini kullanarak A noktasından başlayıp D noktasına, buradan H noktasına ve en son K noktasına ulaşacak şekilde doğrusal yolları nasıl çizdiğini yaptığı açıklamalarla ifade etmiştir. Katılımcının doğrusal yolları uygun bir şekilde çizmesi zihinde canlandırmayı doğru bir şekilde yaptığını, sonrasında ise sırasıyla dönüştürme, özelleştirme ve genelleme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

4.5 Doğrusal İlişki İçeren Görsel Genelleme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel genelleme problemi kapsamında doğrusal ilişki içeren beşinci sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.5'te sunulmuştur.

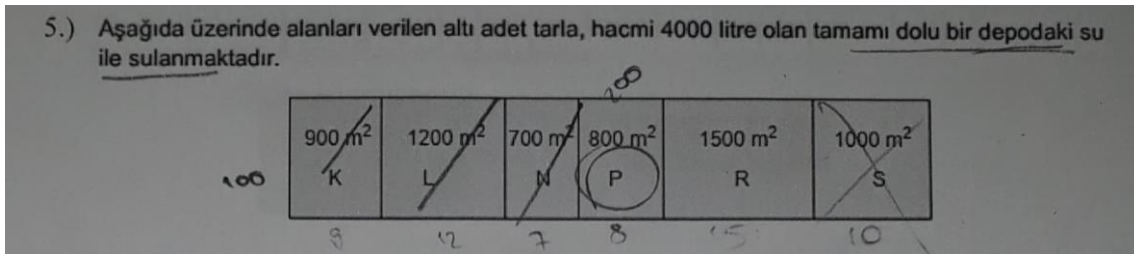
Çizelge 4.5 Öğrencilerin doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	Ö18
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö8, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13	Ö1, Ö2, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Varsayımda Bulunma	-	-
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

Çizelge 4.5 incelendiğinde; öğrencilerin doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö7, Ö9, Ö10, Ö12, Ö13, Ö14, Ö16 ve Ö18 verilen grafikleri yorumlayarak 1 saatte 150 L su kullanılıp 300 m²'lik bir alanın sulandığını bulmuşlardır. Sonrasında verilen tarla resimlerini ve üzerlerinde yazan alanları dikkate alarak hangi tarlanın kaç saatte ve kaç litre su ile sulanacağını bulmuşlardır. Bu aşamaya kadar katılımcılar grafikleri yorumlayıp anlamlandırmış, verilen resim temsilindeki sıraya dikkat etmiş ve uygun çıkarımlarda bulunarak sırasıyla zihinde canlandırma, dönüştürme ve genelleme adımlarını yerine getirmişlerdir. Daha sonra soruda belirtilen “kalan su miktarının 2500 litrenin altına düştüğü an” ifadesinden yola çıkarak $4000 - 2500 = 1500$ L işlemi yaparak 1500 L suyun kullanıldığı anda hangi tarlanın sulanmaya devam ettiğini bulmaya çalışmışlardır. K, L ve N tarlalarının sulandığını, P tarlasının ise sulanmaya devam ettiğini yaptıkları çıkarımlarla özelleştirme yaparak bulmuş ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Ö18 bu soruda tablo temsilini oluşturan tek katılımcıdır. Katılımcılardan Ö3, Ö6 ve Ö17 de verilen grafikleri yorumlayarak 1 saatte 150 L su kullanılıp 300 m²'lik bir alanın sulandığını, hangi tarlanın kaç saatte ve kaç litre su ile sulanacağını bulmuşlardır. Bu aşamaya kadar katılımcılar grafikleri yorumlayıp anlamlandırmış, verilen resim temsilindeki sıraya dikkat etmiş ve uygun çıkarımlarda bulunarak sırasıyla zihinde canlandırma, dönüştürme ve genelleme adımlarını yerine getirmişlerdir. Ancak bu katılımcıların soruda belirtilen “kalan su miktarının 2500 litrenin altına düştüğü an” ifadesini “2500 litre kullanılarak” diye algıladıkları görülmüş, bu noktada hata yapan katılımcılar özelleştirme yapamadıkları için matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememişlerdir. Diğer katılımcılardan Ö8 ve Ö15 depoda kalan su miktarının zamana göre değişimi grafiğini doğru yorumlayıp 1 saatte 150 L suyun kullanıldığı çıkarımında bulunmalarına rağmen devamını getiremeyip soruyu boş bıraktıkları için zihinde canlandırma adımını tamamlayamamışlardır. Bu katılımcılar sorunun devamını getiremedikleri için görsel özelleştirme ve genelleme yapamayıp matematiksel düşünme aşamasına geçememişlerdir. Ö11 ise hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ancak doğru cevabı işaretlemiştir. Herhangi bir çizim veya işlem yapılmadığı için bu öğrencinin cevabı hangi adımları izleyerek nasıl bulduğu hakkında bir yorum yapılamamaktadır.

Doğrusal ilişki içeren bu görsel genelleme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, görsel temsil bileşenindeki tablo göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde öğrenci olmayıp yüksek başarı düzeyinde sadece 1 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 8 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki zihinde canlandırma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 5 ve yüksek başarı düzeyinde 7 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki genelleme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; görsel temsil-çizim/tablo göstergelerinde, görselleştirme-zihinde canlandırma göstergesinde ve matematiksel düşünme-özelleştirme/genelleme göstergelerinde ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu, görselleştirme-dönüştürme göstergesinde ise orta ve yüksek başarı düzeyinde eşit sayıda öğrencinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu (f=15) genelleme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö14'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.23'te görülebilir.



Şekil 4.23 Ö14'ün doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Şekil 4.23 incelendiğinde, öğrencinin verilen görsel üzerine soruda verilenlerden yola

ıkarak elde ettiği çıkarımlarla hangi tarlaların sulandığını, hangi tarlanın ise sulanmaya devam ettiğini çizerek göstermesi, çizim temsilini kullandığını gösterir.

Katılımcı 18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme şekil 4.24'te verilmiştir.

The image shows handwritten mathematical relationships on a piece of paper. The first line is $1 \text{ saatte} = 300 \text{ m}^2 = 150 \text{ L su}$. The second line is $3000 \text{ m}^2 = 1500 \text{ L su}$. Both lines are circled.

şekil 4.24 18'in doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu tablo temsili

18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Sorudan ne anladığını söyler misin?

18: Burada hacmi 4000 L olan tamamı dolu bir su depomuz varmış. Bir saatte 150 L su kullanarak 300 metrekarelik alanı sulanıyor. Depoda kalan su 2500 litrenin altına düştüğünde hangi tarlanın sulandığı sorulmuş.

A: Yaptığın çözümde izlediğin yolu kısaca açıklayabilir misin?

18: Depoda kalan su 2500 litrenin altına düştüğünde bu depomuzdan (ben şöyle yaptım 4000'den 2500' çıkardım) 1500 L su kullanılması gerekiyor. Bir saatte 150 L su kullanarak 300 metrekarelik alan sulanabildiği için 1500 litre su 3000 metrekarelik alana denk geliyor. 3000 metrekarelik sulanacak alan K, L, N, P, R, S şeklinde tarlaların sulanma sırası dikkat edilerek bulunması gerekiyormuş. 900 metrekare ile 1200 metrekareyi topladım, 2100 m² etti. 3000 metrekareye daha ulaşamıyoruz. Bu nedenle 700 metrekareyi de ekliyoruz. 2800 m² yapıyor. Görüyoruz ki bu da yetmiyor. 3000 metrekarelik kısmın sulanması lazım ki depodaki su 2500 litrenin altına dşşn. Bu nedenle P'nin sulanması lazım. Yani P'ye gelince sulaması bitiyor.

A: Böyle bir yolu neden tercih ettiğini söyler misin?

18: Verilen grafiklerden yararlanarak sonuca ulaşabileceğimi düşündüğüm için.

A: Soruyu çözerken neden bir görsel kullandığını söyler misin?

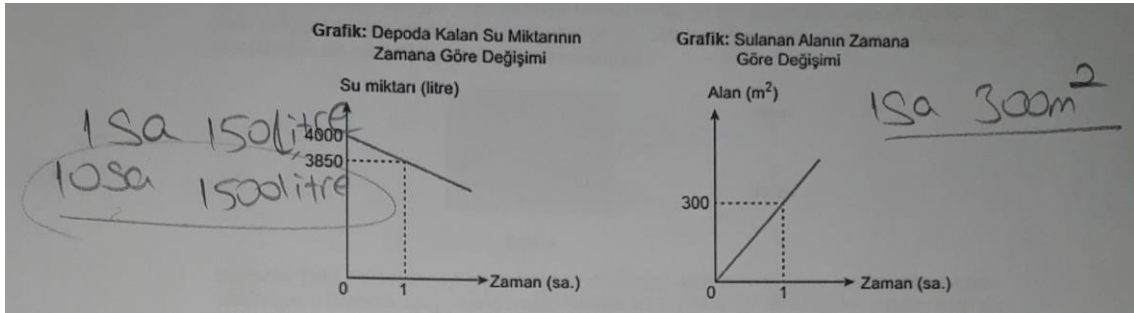
18: Soruda zaten tarlaları sırasıyla vermiş ve grafiği de çizmiş. Bu nedenle verilen görselin üzerinde işaretlemeler yaparak ve grafikten yararlanarak soruyu çözdüm.

A: Sence bu soru, farklı bir çözüm yolu ile nasıl çözülebilir?

Ö18: Saatlere göre ne kadar alanın sulandığı, hangi tarlada ne kadar alanın sulandığı yazılarak tablo oluşturulabilir.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen grafikleri yorumlayarak 1 saatte 150 L su kullanılıp 300 m²'lik bir alanın sulandığını belirtmesi dönüştürme yaptığını gösterir. Sonrasında katılımcının verilen tarla resimlerini ve üzerlerinde yazan alanları dikkate alarak hangi tarlanın kaç saatte ve kaç litre su ile sulanacağını ifade etmesi de zihinde canlandırma ve genelleme yaptığını göstermektedir. Daha sonra soruda belirtilen “kalan su miktarının 2500 litrenin altına düştüğü an” ifadesinden yola çıkarak 1500 L suyun kullanıldığı anda hangi tarlanın sulanmaya devam ettiğini bulmaya çalışmıştır. Katılımcı K, L ve N tarlalarının sulandığını, P tarlasının ise sulanmaya devam ettiğini özelleştirme yaparak bulmuş ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmiştir. Katılımcı geçen süreye göre ne kadar alanın sulandığı, hangi tarlada ne kadar alanın sulandığını gösteren bir tablo görselini çizip soruyu farklı bir yöntemle de çözebileceğini belirtmiştir.

Katılımcı Ö12'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.25'te verilmiştir.



Şekil 4.25 Ö12'nin doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Katılımcılardan Ö12 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö12: Bize soruda en son hangi alanın sulandığını sormuş. Kalan su miktarı 2500 L olacakmış. Ben de mevcut miktardan 2500'ü çıkarıp kullandığı su miktarını buldum.

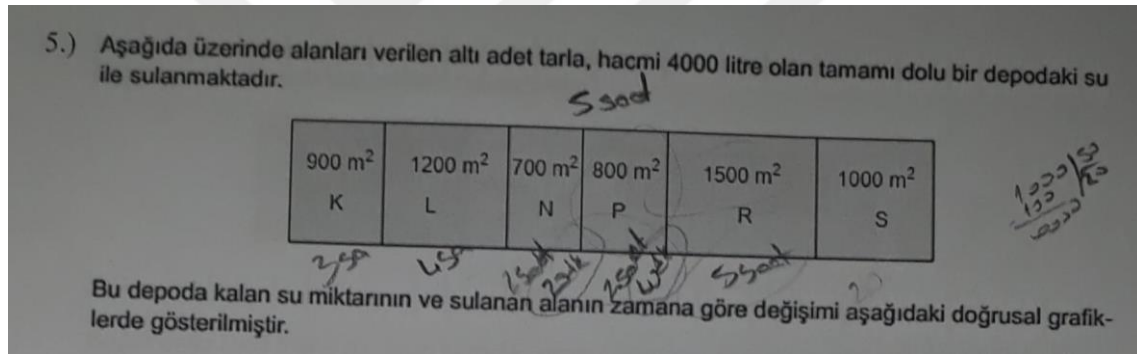
Grafiklerden yararlanarak orantı kurdum. Sonra alanları topladım. Sulanması gereken tarlaları bulup eledim. Böylece en son sulanan tarlayı buldum.

A: Verilen görsel üzerine yaptığın çizimleri ve işlemleri görebiliyorum.

Ö12: Evet, verilen resim ve grafikleri kullanarak soruyu çözdüm.

Ö12 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görsel ve grafikleri yorumlayarak çıkarımlarda bulunduğunu ve orantı kurarak sorunun çözümüne ulaştığını ifade etmesi, görsel akıl yürütme adımlarını sırasıyla yerine getirerek matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini göstermektedir.

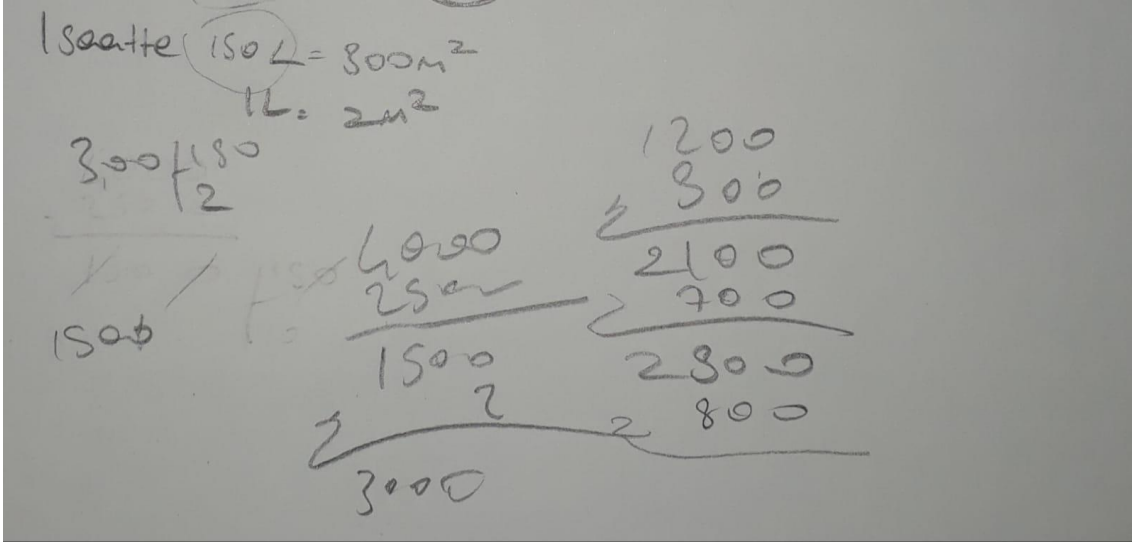
Katılımcı Ö2'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.26'da verilmiştir.



Şekil 4.26 Ö2'nin doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin verilen görseller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Şekil 4.26 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen grafik ve tarla görselleri arasında bağlantı kurarak görsel üzerine tarlaların kaç saatte sulanacağını bulup yazması, zihinde canlandırma yaptığını gösterir.

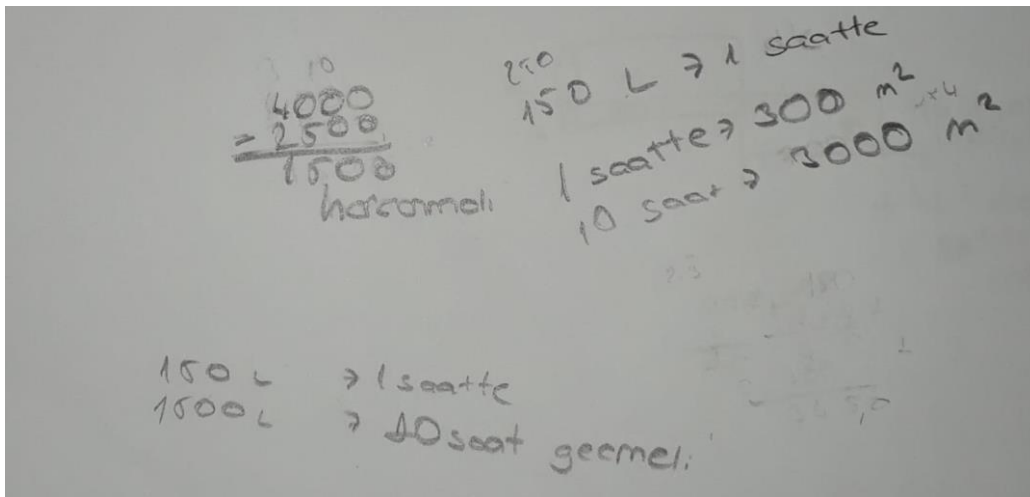
Katılımcı Ö5'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.27'de verilmiştir.



Şekil 4.27 Ö5'in doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili ve problemi çözme süreci

Şekil 4.27 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen grafiklerden yola çıkarak tarlaların sulanması için kaç litre suya ihtiyaç olduğunu ve hangi tarla sulanırken kalan su miktarının 2500 litrenin altına düşeceğini hesaplayıp belirtmesi, özelleştirme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö4'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.28'de verilmiştir.



Şekil 4.28 Ö4'ün doğrusal ilişki içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu genelleme temsili

Şekil 4.28 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen grafiklerden elde ettiği çıkarımlarla geçen süre ile kullanılan su miktarı arasındaki ilişkiye ait genel bir kuralın olduğunu fark etmesi ve kalan su miktarının 2500 litrenin altına düşmesi için ne kadar sürenin geçmesi gerektiğini hesaplaması, genelleme yaptığını gösterir.

4.6 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik İçeren Görsel Varsayımda Bulunma Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel varsayımda bulunma problemi kapsamında birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren altıncı sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.6’da sunulmuştur.

Çizelge 4.6 Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö4, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö17	Ö9
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö15, Ö17	Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	-	-
	Genelleme	-	-
	Varsayımada Bulunma	Ö3, Ö15, Ö17	Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

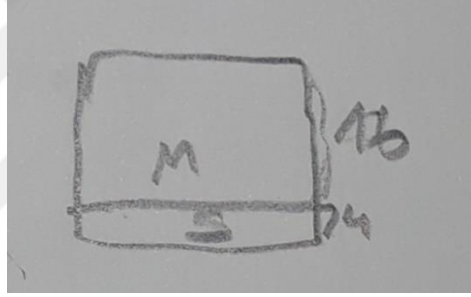
Çizelge 4.6 incelendiğinde; öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımada bulunma problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö12 ve Ö13 verilen görsel üzerine çizimler yapmış ancak doğru cevabı bulamamışlardır. Ö13 soruyu boş bırakmıştır. Ö12 ise aralıktaki en küçük değeri doğru bulmasına rağmen en büyük değeri bulurken hata yapmış olup eşitsizliği yanlış yazmıştır. Katılımcılardan Ö4 yeni bir görsel çizmiş,

açıklamalar eklemiş ve aralıktaki en küçük değeri doğru bulmuş ama en büyük değeri yanlış hesapladığı için eşitsizliği yanlış yazmıştır. Bu katılımcılar verilen görsel üzerinde çizim temsili kullanmalarına veya yeni görsel çizimlerine rağmen zihinde canlandırmayı doğru bir şekilde yapamamışlardır. Ayrıca eşitsizliği yazamadıkları için görsel varsayımda bulunma adımını gerçekleştiremeyip matematiksel düşünme aşamasına geçememişlerdir. Diğer katılımcılardan Ö1, Ö5, Ö8, Ö10 ve Ö11 ise hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ancak doğru cevabı işaretlemişlerdir. Herhangi bir çizim veya işlem yapmadıkları için bu öğrencilerin cevaplarını hangi adımları izleyerek nasıl buldukları hakkında bir yorum yapılamamıştır. Katılımcılardan Ö2, Ö6, Ö7, Ö14, Ö15, Ö16 ve Ö18 verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaparak mavi kartonun sarı karton üzerinde yaptığı hareket sonucu oluşacak görüntüyü göstermeye çalışmaları zihinde canlandırmayı gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Bu katılımcıların mavi kartonun hareket ettirilmesi gereken mesafenin alabileceği değerleri içeren eşitsizliği uygun çıkarımlar yaparak yazmaları varsayımda bulunma adımını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi de gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Katılımcılardan Ö3, Ö9 ve Ö17 yeni görseller çizerek mavi kartonun sarı karton üzerinde yaptığı hareket sonucu oluşacak görüntüyü oluşturmaları zihinde canlandırma ve dönüştürme adımlarını, mavi kartonun hareket ettirilmesi gereken mesafenin alabileceği değerleri içeren eşitsizliği doğru bir şekilde yazarak da varsayımda bulunma adımını gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Özellikle Ö3 ve Ö17 ayrıntılı çizimler yaparak ve açıklamalar ekleyerek çözümlerini göstermişlerdir. Zihinde canlandırma, dönüştürme ve varsayımda bulunma adımlarını çok iyi yapan bu katılımcıların bu adımlarda elde ettikleri çıkarımlar sonucunda matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdikleri görülmüştür.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren bu görsel varsayımda bulunma probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 7 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 ve yüksek başarı düzeyinde 1 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki zihinde canlandırma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 ve yüksek başarı düzeyinde 7 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 ve yüksek başarı düzeyinde 7

öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre görselleştirme-dönüştürme göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görsel temsil-çizim göstergesinde, görselleştirme-zihinde canlandırma göstergesinde ve matematiksel düşünme-varsayımda bulunma göstergesinde ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu soruda öğrencilerin sadece 10 tanesinin varsayımda bulunma adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiği görülmüştür.

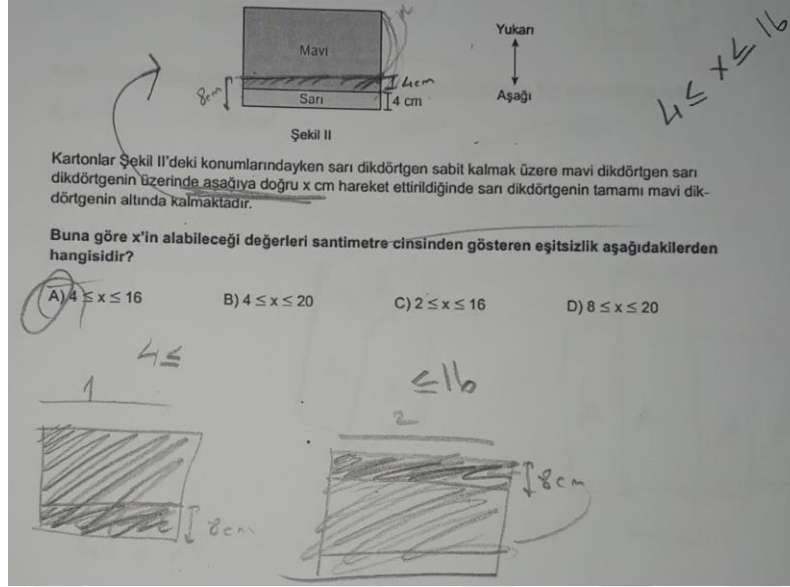
Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö9'un bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.29'da görülebilir.



Şekil 4.29 Ö9'un birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Şekil 4.29 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen bilgilerden yola çıkarak yeni bir görseli çizerek göstermesi, çizim temsilini kullandığını gösterir.

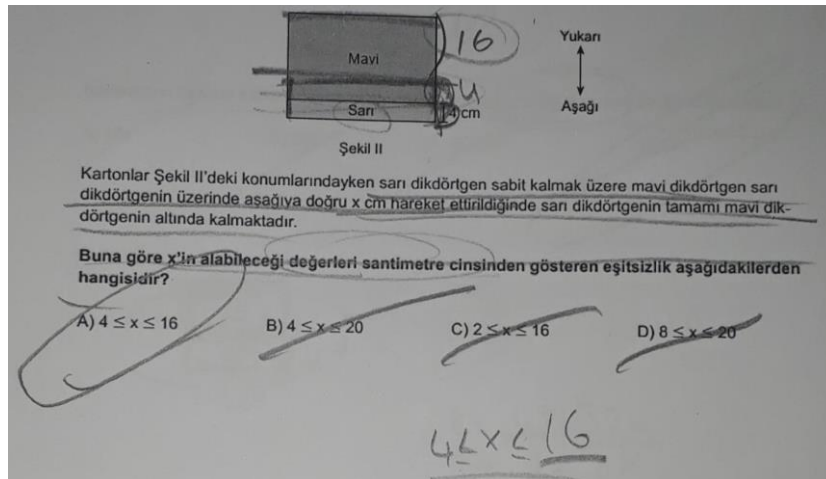
Katılımcı Ö3'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.30'da verilmiştir.



Şekil 4.30 Ö3'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Şekil 4.30 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilenleri yorumlayarak elde ettiği çıkarımlarla mavi dikdörtgenin sarı dikdörtgen üzerindeki hareketi sonucu ortaya çıkabilecek görüntülerin görsellerini oluşturması, dönüştürme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö7'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.31'de verilmiştir.



Şekil 4.31 Ö7'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin verilen iki görsel arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Ö7 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

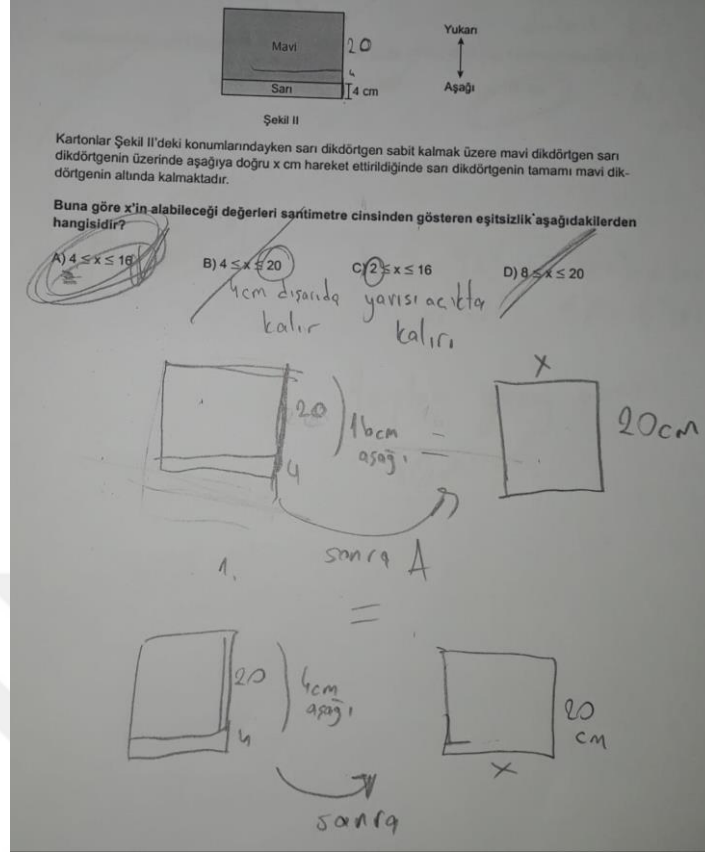
Ö7: Birinin kısa kenarının uzunluğu 8 cm, diğerinin ise 20 cm olacak şekilde iki tane karton verilmiş. Bu kartondan şekildeki gibi uzun kenarları paralel olacak şekilde yerleştirilmiş. Sarı karton mavi kartonun altına yarısı denk gelecek şekilde yerleştirilmiş ve mavi karton x santimetre aşağıya doğru hareket ettirildiğinde x 'in alabileceği değerleri soruyor. Sarı karton mavi kartonu geçmeyecek şekilde mavi karton aşağıya indirilmiş. Bize bu değerleri soruyor. Burada zaten sarı kartonun yarısı mavi kartonun altında olduğu için sarı kartonun 4 santimetrelık kısmı mavi kartonun altında kalıyor. Çünkü buranın (sarı kartonun kısa kenarının) uzunluğu 8 santimetreydi. 20'den 4'ü çıkarıyoruz, 16 cm buraya kalıyor. 16 santimetre aşağı indirildiğinde iki kenar tam çakışmış olacak. Maksimum 16 cm aşağıya indirilebilir.

A: Verilen görsel üzerine yaptığın çizimlerin çözüme olan katkısı nedir?

Ö7: Şekil üzerinde yaptığım çizimlerle bu değerlendirmeleri yaptım. Zaten şurası (sarı kartonun görünen kısmı) da 4 cm, 4 cm daha aşağı indiğinde tamamen mavi kartonun altına inmiş olur. O yüzden A seçeneği doğru.

Ö7 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaparak çıkarımlarda bulunduğunu, mavi kartonun sarı karton üzerinde yaptığı hareket sonucu oluşacak görüntüyü göstermeye çalıştığını belirtmesi zihinde canlandırmayı gerçekleştirdiğini gösterir. Bu katılımcının mavi kartonun hareket ettirilmesi gereken mesafenin alabileceği değerleri içeren eşitsizliği yazabilmesi varsayımda bulunma adımını yerine getirerek matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini göstermektedir.

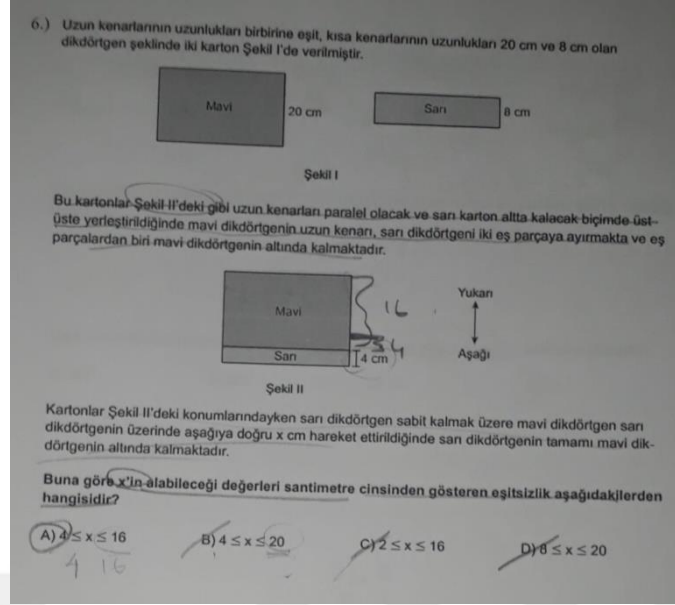
Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.32'de verilmiştir.



Şekil 4.32 Ö17'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımında bulunma problemine ilişkin oluşturduğu varsayımında bulunma temsili

Şekil 4.32 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen bilgiler ve görsellerden yola çıkarak mavi kartonun hareket ettirilmesi gereken mesafenin alabileceği değerleri içeren eşitsizliği yazabilmesi, varsayımında bulunma göstergesini gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.33'te verilmiştir.



Şekil 4.33 Ö18'in birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci

Katılımcılardan Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö18: Altıncı soruda 20 cm uzunluğunda mavi bir levhamız var, 8 cm uzunluğunda sarı levhamız var. Bu sarı levha mavi levhanın altına 4 cm girmiş bir şekilde bulunuyor. Sarı levhamızı biz mavi levhanın altına ittireceğiz. Sarı levhanın gözükmemesi için en fazla ve en az ne kadar ittirmemizin gerektiği bu aralığı bulmamız gerekiyor. Sarı levha 4 cm dışarıda olduğu için 4 cm içeri ittirip sarı levhayı hiç gözükmez hale getirebiliriz. O yüzden C ve D şıklarımız elenmiş olur. A ve B şıklarımızda ise en fazla 16 cm ve 20 cm hareket şeklimiz var. Ama sarı levha mavi levhanın 4 cm altına girmişti. Mavi levhanın uzunluğu da 20 cm olarak verilmişti. Eğer sarı levha 20 cm ittirilirse sarı levha mavi levhayı üstten 4 cm aşacaktır. 16 cm ittirilirse mavi levha ile sarı levha ile diğer uçta tam olarak üst üste gelmiş olacak. O yüzden A seçeneği doğru cevap.

A: Bu soruyu çözerken soruda verilen görselin üzerine çizimler yaptığını görüyorum. Verilen görsel üzerine yaptığın çizimlerin çözüme olan katkısı nedir?

Ö18: Ben verilen şekil üzerinde 16 cm ve 4 cm şeklinde yazıp sonuca ulaşabildim.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaparak mavi kartonun sarı karton üzerinde yaptığı hareketi göstermeye çalıştığını belirtmesi zihinde canlandırmayı gerçekleştirdiğini gösterir. Bu katılımcının mavi kartonun hareket ettirilmesi gereken mesafenin alabileceği değerleri içeren eşitsizliği ifade etmesi

varsayımda bulunma adımını yerine getirerek matematiksel düşünmeyi de gerçekleştirdiğini gösterir.

4.7 Cebirsel İfadelerin Çarpımını İçeren Görsel Varsayımda Bulunma Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel varsayımda bulunma problemi kapsamında cebirsel ifadelerin çarpımını içeren yedinci sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.7’de sunulmuştur.

Çizelge 4.7 Öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö4, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16
	Zihinde Canlandırma	Ö5, Ö10	Ö6, Ö11, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

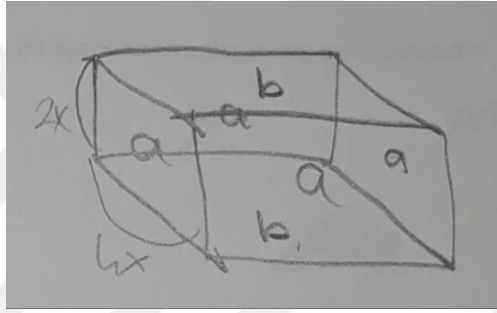
Çizelge 4.7 incelendiğinde; öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö15 verilen prizmada hangi kartondan kaç tane kullanıldığını, türlerine göre kalan kartonların sayısını belirlemede hata yaparak yanlış bir sonuca ulaşmıştır. Katılımcı yeni bir görsel çizmiş olmasına rağmen görseli doğru çizemediği için zihinde canlandırma ve dönüştürme aşamalarını tam olarak gerçekleştirememiş, bundan dolayı matematiksel düşünme aşamasına geçememiştir. Ö8 ise hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ancak doğru cevabı işaretlemiştir. Herhangi bir

çizim veya işlem yapılmadığı için bu öğrencinin cevabı hangi adımları izleyerek nasıl bulduğu hakkında bir yorum yapılamamıştır. Diğer katılımcılardan Ö5, Ö6, Ö10, Ö11 ve Ö18 herhangi bir çizim yapmak yerine soruda verilen görsel prizma temsilinden çıkarımlarda bulunarak hangi kartondan kaç tane kullanıldığını, türlerine göre kalan kartonların sayısını belirleyip not alarak zihinde canlandırmayı gerçekleştirmiştir. Bu katılımcılar yeni prizma modeli için kullanılması gereken kartonları seçerek varsayımda bulunmuşlardır. Oluşturmayı düşündükleri prizmanın yüzey alanını hesaplayıp doğru cevaba ulaşan katılımcıların özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdikleri söylenebilir. Katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö7, Ö9, Ö12, Ö14, Ö16 ve Ö17 verilen görsel temsillerden elde ettikleri çıkarımlarla yeni bir prizma modeli inşa ederek varsayımda bulunma ve dönüştürme yapmışlardır. Bu katılımcıların oluşturdukları prizmanın yüzey alanını hesaplamaları özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiklerini gösterir. Katılımcılardan Ö3 prizma modelinin yanında prizmanın açık şeklini çizerek, Ö17 ise çizdiği prizma modeli ile birlikte açıklamalar ekleyerek çözümlerini yapmışlardır. Ö13 verilen görsel temsilden çıkarımlarda bulunmuş ayrıca yeni oluşturulması gereken görsel prizma modelini de çizmiş olmasına rağmen yeni oluşturulacak prizmanın yüzey alanını bulmak yerine soruda verilen prizmanın yüzey alanını bulduğu için hata yapmıştır. Bu katılımcı sırasıyla varsayımda bulunma ve dönüştürme adımlarını gerçekleştirmesine rağmen sonuca ulaşamadığı için matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememiştir.

Cebirsel ifadelerin çarpımını içeren bu görsel varsayımda bulunma probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 6 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 5 ve yüksek başarı düzeyinde 6 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki zihinde canlandırma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 2 ve yüksek başarı düzeyinde 3 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı

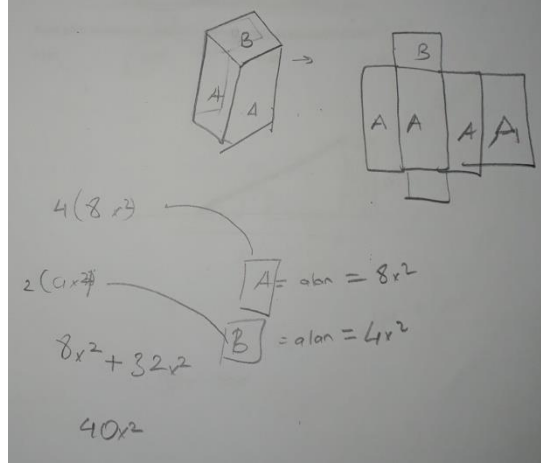
seviyelerine göre görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergesinde ve matematiksel düşünme-özelleştirme/varsayımda bulunma göstergesinde ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu, görsel temsil-çizim göstergesinde ise orta ve yüksek başarı düzeyinde eşit sayıda öğrencinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu ($f=16$) varsayımda bulunma adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö16'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.34'te görülebilir.



Şekil 4.34 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen bilgilerden yola çıkarak yeni bir kare prizma görselini çizerek göstermesi, çizim temsilini kullandığını gösterir.

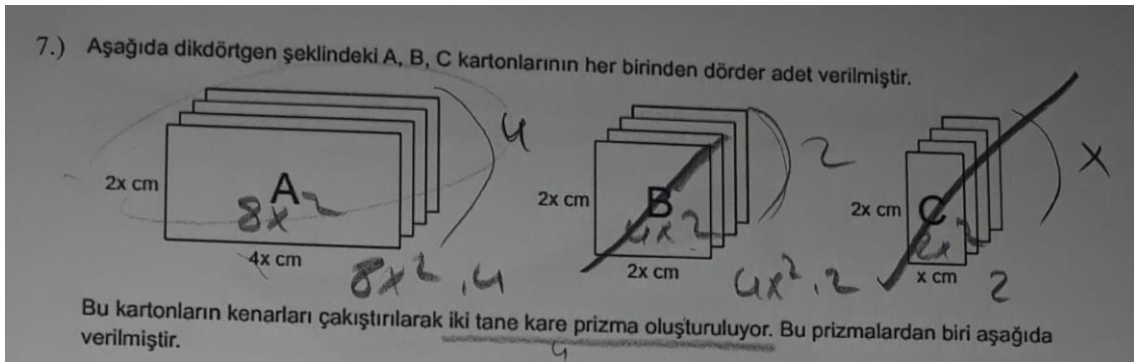
Katılımcı Ö3'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.35'te verilmiştir.



Şekil 4.35 Ö3'ün cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Şekil 4.35 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen görseli inceleyip elde ettiği çıkarımlarla görselde kullanılmayan kartonları tespit etmesi ve kalan kartonların kullanılarak oluşturulabilecek kare prizmanın görselini çizerek göstermesi, dönüştürme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.36'da verilmiştir.



Şekil 4.36 Ö6'nın cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin verilen görseller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Ö6 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö6: Burada verilen şekillerle iki tane kare prizma oluşturulacakmış. Prizmalardan bir tanesinin görselini vermiş ama diğerini vermemiş. Verilen çizimde iki tane B, 4 tane ise

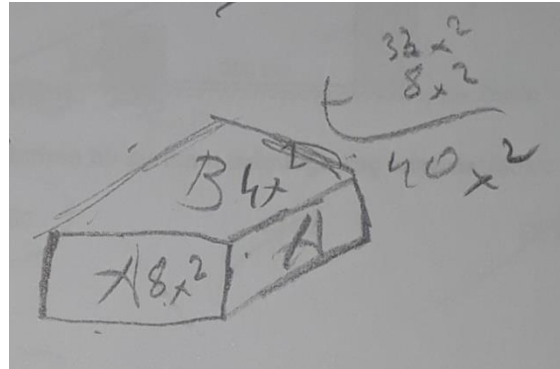
C kartonu kullanılmış. Bu şekilde kullanılanlar diğer şekilde kullanılmayacak. Onları atınca geriye 4 tane A ve 2 tane B kartonu kalıyor. Geriye kalanların hepsi kullanılacakmış. Kalan kartonların yüzey alanlarını hesapladım ve $40x^2$ buldum.

A: Burada yeni bir görsel çizmeye ihtiyaç duymamışsın. Verilen görsellerin üzerinde kullanılan kartonların üzerini çizip geriye kalanları işaretleyerek belirlemişsin.

Ö6: Evet. Verilen çizimde iki tane B, 4 tane C kullanılmış. Onları atınca geriye 4 tane A, 2 tane B kalıyor. Zaten kalanların hepsini kullanmamızı söylüyor.

Ö6 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görselde kullanılan kartonların üzerlerini çizip kalan kartonların türlerine göre sayılarını bulduğunu belirtmesi zihninde canlandırma yaptığını gösterir. Katılımcının kalan parçalarla yeni bir prizma görselinin oluşturulabileceğini ifade etmesi varsayımda bulunduğunu göstermektedir. Son olarak da yeni oluşturulan prizmanın yüzey alanını doğru olarak hesaplaması, katılımcının özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö1'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.37'de verilmiştir.

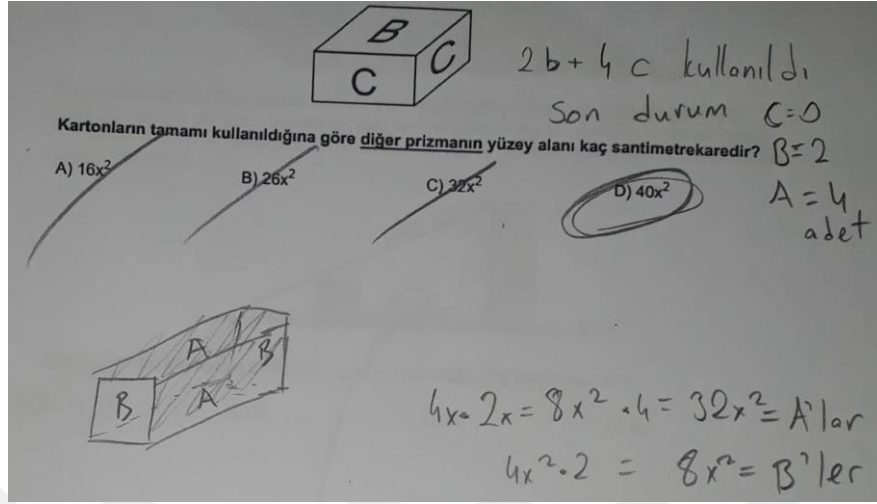


Şekil 4.37 Ö1'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili

Şekil 4.37 incelendiğinde, öğrencinin oluşturduğu prizmadaki her bir yüzeyin alanını soruda verilenleri kullanarak hesaplayıp prizmanın yüzey alanını bulması, özelleştirme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.38'de

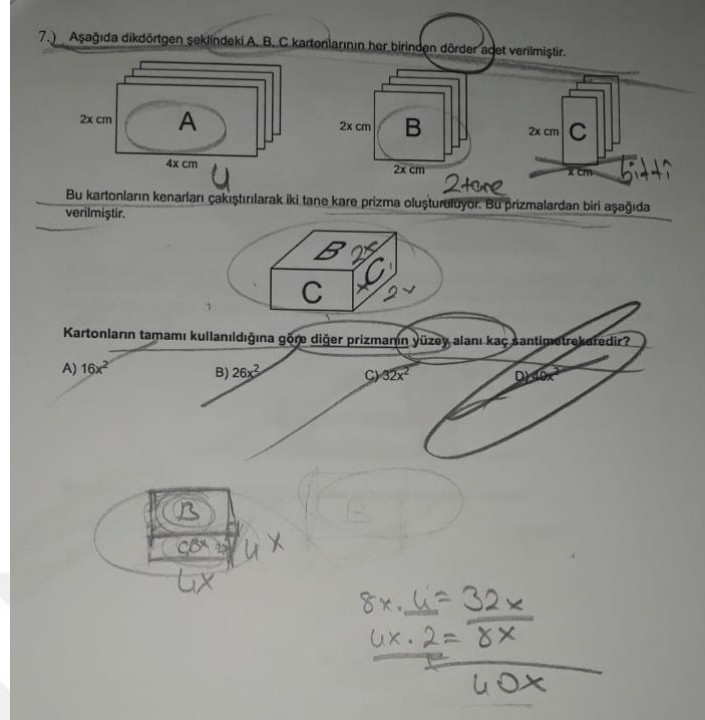
verilmiştir.



Şekil 4.38 Ö17'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili

Şekil 4.38 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen bilgiler ve görsellerden yola çıkarak tespit ettiği kalan kartonlarla yeni oluşturacağı prizmada hangi kartonun hangi yüzeye gelmesi gerektiğini tasarlaması, belirlemesi ve karar verip uygulayarak göstermesi, varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö7'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.39'da verilmiştir.



Şekil 4.39 Ö7'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci

Katılımcılardan bir diğeri olan Ö7 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö7: Ben bu soruyu çizim yaparak çözdüm. A, B ve C kartonlarının her birinden dörder tane vermiş. Bize verdiği prizmada C kartonunun hepsi kullandığı için C kartonu bitmiş. O yüzden biz kalan B ve A kartonlarına bakacağız. A kartonundan 4, B kartonundan 2 tane kalmıştı. Ben buna uygun olarak bir prizma çizdim. Prizmanın yan yüzeyleri A, üst ve alt yüzeyi B kartonu olacak şekilde çizdim. Daha sonra B kartonunun yüzey alanını bulup 2 ile çarptım. $(4x^2) \cdot 2 = 8x^2$ oluyor. A kartonun alanını da bulup 4 ile çarptım. 4 tane olduğu için $32x^2$ oluyor. Toplayınca $40x^2$ oluyor.

Ö7 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görsel temsillerden çıkarımlarda bulunarak türlerine göre kalan kartonların sayısını bulduğunu, sonrasında ise prizma modelini de çizdiğini belirtmesi sırasıyla varsayımda bulunma ve dönüştürme yaptığını gösterir. Çizdiği prizmanın yüzey alanını doğru bir şekilde hesaplaması da özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini göstermektedir.

4.8 Doğrunun Eğimini İçeren Görsel Genelleme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel genelleme problemi kapsamında doğrunun eğimini içeren sekizinci sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.8’de sunulmuştur.

Çizelge 4.8 Öğrencilerin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö4, Ö5, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö2, Ö6, Ö7, Ö11, Ö14, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö12, Ö13, Ö17	Ö2, Ö6, Ö7, Ö14, Ö18
	Zihinde Canlandırma	-	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö12, Ö13	Ö6, Ö18
	Genelleme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö12, Ö13	Ö2, Ö6, Ö7, Ö14, Ö18
	Varsayımda Bulunma	Ö15	Ö1, Ö2, Ö11, Ö14, Ö16
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

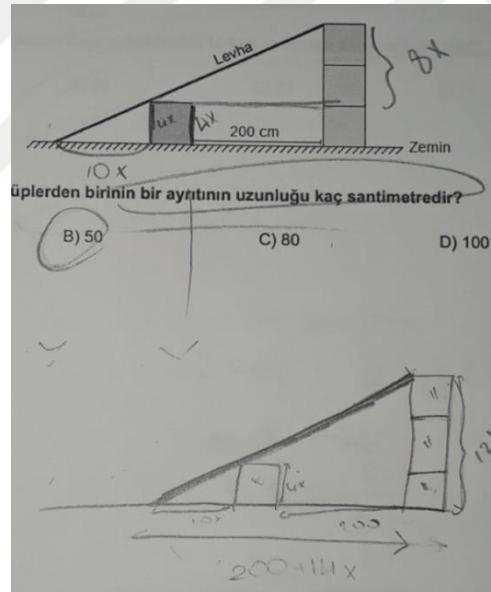
Çizelge 4.8 incelendiğinde; öğrencilerin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö9 herhangi bir çizim yapmamış, verilen görsel üzerinde küpün bir ayırıt uzunluğu için bir değişken yazarak cebirsel ifade bulup eğim ile ilişkilendirerek soruyu çözmeye çalışmıştır. Ancak yazmak istediği denklemde hata yaptığı için sonuca ulaşamamıştır. Katılımcılardan Ö11 ve Ö15 herhangi bir çizim yapmak yerine verilen görsel üzerinde küpün bir ayırıt uzunluğu için seçeneklere göre sayılar deneyerek varsayımda bulunmuş, eğim ile ilişkilendirerek soruyu çözmeye çalışmışlardır. Ancak verilen görselde denemek istedikleri sayıları yerleştirirken hata yapmışlardır. Katılımcılardan Ö4, Ö5 ve Ö7 verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaparak dönüştürme adımını gerçekleştirmiş ve elde ettikleri yeni üçgenin de eğiminin aynı olduğunu belirtip genelleme yapmışlardır. Ancak Ö5 dönüştürdüğü görselde denemek

istediği sayıları yerleştirirken hata yaptığı, Ö4 ve Ö7 ise denklemi yazarken hata yaptıkları için sonuca ulaşamamışlardır. Katılımcılardan Ö17 verilen görselin bir benzerini tekrar çizmek isterken hata yaptığı için sonuca ulaşamamıştır. Bu katılımcılar çeşitli hatalar yaptıkları için matematiksel düşünme aşamasına geçememişlerdir. Katılımcılardan Ö8 ve Ö10 hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ancak Ö8 doğru, Ö10 ise yanlış cevabı işaretlemiştir. Herhangi bir çizim veya işlem yapılmadığı için bu öğrencilerin cevaplarını hangi adımları izleyerek nasıl buldukları hakkında bir yorum yapılmamıştır. Katılımcılardan Ö1 ve Ö16 herhangi bir çizim yapmamış, küpün bir ayrıt uzunluğu için seçeneklere göre sayılar deneyerek varsayımda bulunmuş, son olarak eğim ile ilişki kurarak sonuca ulaşmışlardır. Katılımcılardan Ö2, Ö3, Ö6, Ö12, Ö13, Ö14 ve Ö18 verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaparak dönüştürme adımını gerçekleştirmiş ve elde ettikleri yeni üçgenin de eğiminin aynı olduğunu belirtip genelleme yapmışlardır. Ö2 ve Ö14 dönüştürdükleri görselde küpün bir ayrıt uzunluğu için seçeneklere göre sayılar deneyerek varsayımda bulunmuş ve eğim ile ilişki kurup sonuca ulaşarak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Ö3, Ö6, Ö12, Ö13 ve Ö18 ise dönüştürdükleri görselde küpün bir ayrıt uzunluğu için değişken yazarak cebirsel ifade oluşturmuş ve eğim ile ilişkilendirerek denklem kurmuşlardır. Denklemi çözen bu katılımcıların yapmış oldukları çıkarımlar sonucunda özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdikleri görülmüştür. Ayrıca katılımcı Ö3 hem verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaparak dönüştürme adımını gerçekleştirmiş, hem de görselin benzerini tekrar çizerek iki farklı denklem kurmuş ve soruyu iki farklı yöntemle çözmüştür.

Doğrunun eğimini içeren bu görsel genelleme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 6 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 5 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 ve yüksek başarı düzeyinde 2 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki genelleme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 5 ve yüksek başarı düzeyinde 5 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 1 ve yüksek başarı düzeyinde

5 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre görsel temsil-çizim göstergesinde, görselleştirme-dönüştürme göstergesinde ve matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, matematiksel düşünme-varsayımda bulunma göstergesinde yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu, matematiksel düşünme-genelleme göstergesinde ise orta ve yüksek başarı düzeyinde eşit sayıda öğrencinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu soruda öğrencilerin sadece 10 tanesinin genelleme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiği görülmüştür.

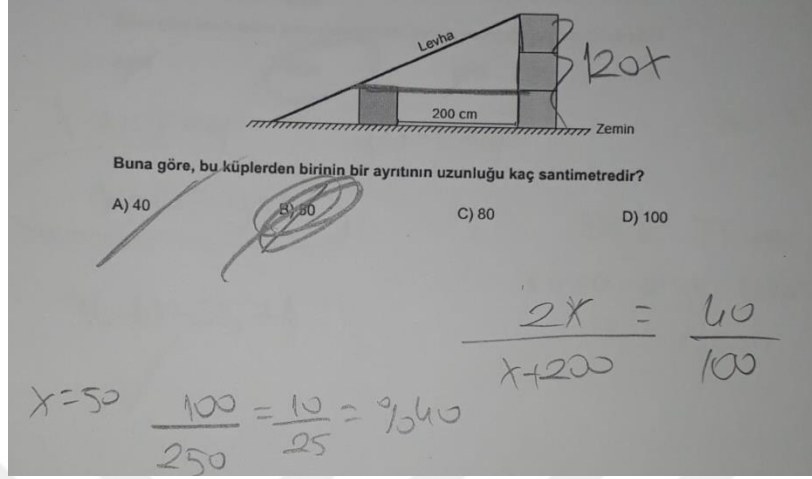
Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö3'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.40'ta görülebilir.



Şekil 4.40 Ö3'ün doğruzun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Şekil 4.40 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen görseller üzerine yeni çizimler yaparak dik üçgen oluşturması ve elde ettiği çıkarımlarla eğimin değişmediğini belirtip çizdiği üçgen üzerindeki değerleri yaptığı çözümde kullanması, dönüştürme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö12'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.41'de verilmiştir.



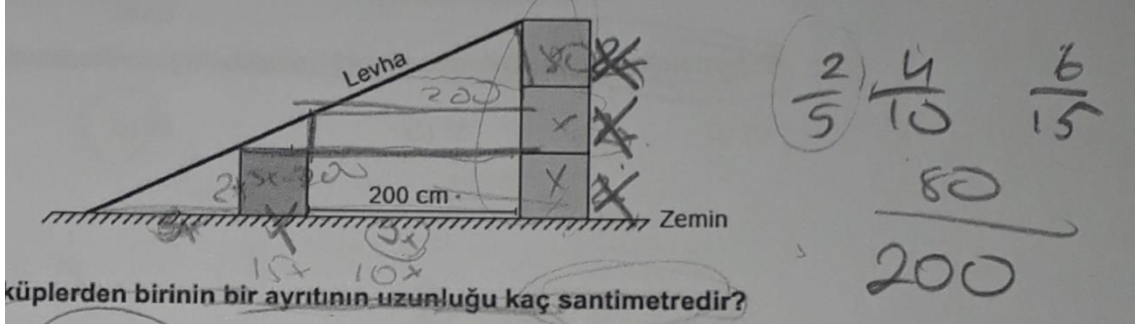
Şekil 4.41 Ö12'nin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu özelleştirme temsili

Ö12 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö12: Burada bize eğimi %40 olan bir rampa verilmiş. İkinci şekilde çizimler yaptım, eğimden yola çıkıp denklem kurdum ve seçenekleri denklemde yerine yazarak tek tek denedim. Böylece x'i buldum.

Ö12 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaptığını, eğiminden yola çıkarak denklem kurduğunu ve seçenekleri deneyerek sonuca ulaştığını belirtmesi sırasıyla dönüştürme, genelleme, özelleştirme ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.42'de verilmiştir.



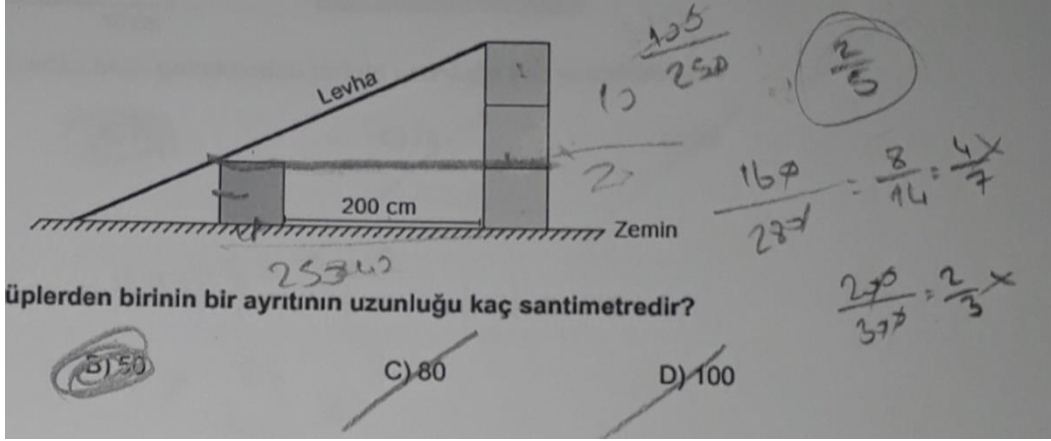
Şekil 4.42 Ö18'in doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu genelleme temsili

Katılımcılardan bir diğeri olan Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö18: Levhamız %40 eğim olacak şekilde bir mavi küpün üzerine durdurulmuş. Ayrıca 3 tane sarı küpümüz var. Tüm küplerin özdeş olduğu belirtilmiş. Bana bu küplerden birinin bir ayrıntının uzunluğunu sorduğu için ben küpün ayrıntılarından birinin uzunluğuna x değişkenini verdim. Verilen eğim değerini rasyonel sayı olarak yazıp sadeleştirerek " $\%40 = 40/100 = 4/10 = 2/5$ " olarak yazdım. Verilen eğimi kullanarak " $2x / 200 + x = 2/5$ " dedim. Bu da " $10x = 400 + 2x$ " yaptı. Buradan " $8x = 400$ " oluyor. " $x = 50$ " çıktı. Bu küplerden birinin ayrıntı uzunluğunu 50 cm buldum.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görseller üzerinde yeni çizimler yaptığını, eğiminden yola çıkarak denklem kurduğunu ve denklemi çözüp sonuca ulaştığını belirtmesi sırasıyla dönüştürme, genelleme, özelleştirme ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

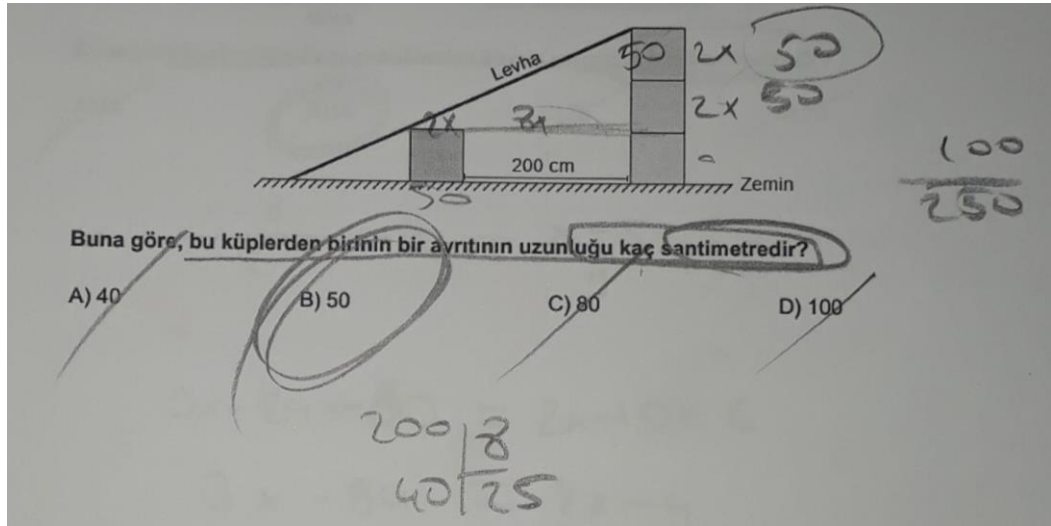
Katılımcı Ö2'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.43'te verilmiştir.



Şekil 4.43 Ö2'nin doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili

Şekil 4.43 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen görselin üzerine yaptığı çizimlerle oluşturduğu dik üçgen şeklindeki eğik düzlemde eğim formülünü kullanması ve görselde verilen özdeş küplerin bir ayrit uzunluğu için seçeneklerde verilen değerleri ayrı ayrı deneyerek soruda belirtilen eğim değerine ulaşmaya çalışması, varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.44'te verilmiştir.



Şekil 4.44 Ö6'nın doğrunun eğimini içeren görsel genelleme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Ö6 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö6: Bir levhayı eğimi % 40 olacak şekilde bir küpün üzerine koymuşlar. Ben bunu yerlerine yazdığım zaman dikey uzunluğa $4x$, yatay uzunluğa da $10x$ geliyor. Dikey uzunluğa $4x$ dediğim zaman küpün bir ayrıtı $2x$ oluyor. Çünkü burada iki tane küp var. Buradaki ayrıtı $2x$ ise yatayda bulunan küpün de bir ayrıtı $2x$ oluyor. Yatay uzunluk $10x$ olduğundan $10x$ 'den $2x$ çıkarınca geriye $8x$ kalıyor. 200 cm'lik uzunluk $8x$ 'e eşit oluyor. 200 'ü 8 'e bölerek x 'in 25 olduğunu buluyoruz. O zaman küpün bir ayrıtının uzunluğu $2x$ olduğundan, x 'in yerine 25 yazarsak 50 cm çıkıyor. Küpün bir ayrıtının uzunluğu 50 cm oluyor.

A: Bu soruyu çözerken soruda verilen görselin üzerine çizimler yaptığını görüyorum. Verilen görsel üzerine yaptığın çizimlerin çözüme olan katkısı nedir?

Ö6: Verilen görsel üzerine yaptığım çizimlerden yola çıktım. Eğimi de kullanarak bir denklem yazdım ve küpün bir ayrıtının uzunluğunu buldum.

Ö6 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görseller üzerinde yeni çizimler yapması dönüştürme adımını, elde ettiği yeni üçgenin de eğiminin aynı olduğunu belirtmesi genelleme adımını ve dönüştürdüğü görselin eğiminden yola çıkarak denklem kurup sonuca ulaşması da özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

4.9 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel özelleştirme problemi kapsamında birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren dokuzuncu sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.9'da sunulmuştur.

Çizelge 4.9 Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

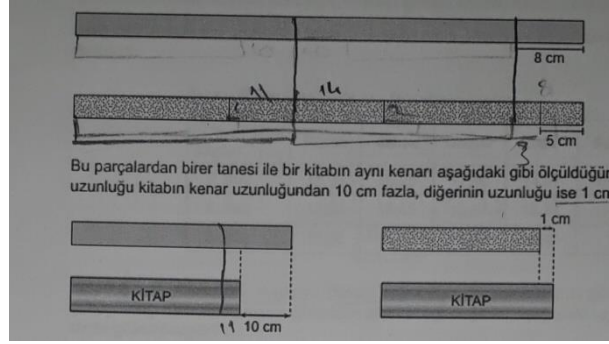
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö13, Ö15	Ö11, Ö14, Ö16
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö11, Ö14, Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö11, Ö14, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö16
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

Çizelge 4.9 incelendiğinde; öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö12, Ö13, Ö15, Ö16 ve Ö17 verilen çubuk görselinin uzunluğu için seçeneklerde verilen sayıları yerine yazıp deneyerek varsayımda bulunmuş, görsellerden elde ettiği çıkarımlarla doğru sonuca ulaşmışlardır. Ayrıca Ö12, Ö13 ve Ö16 birinci görseldeki her bir parçanın uzunluğu için x değerini, ikinci görseldeki her bir parçanın uzunluğu için de y değerini vererek ayrı ayrı cebirsel ifadeler oluşturmuşlardır. Katılımcılardan Ö8 ve Ö9 hiçbir çizim ya da işlem yapmamış olup Ö8 soruyu boş bırakırken, Ö9 ise doğru cevabı işaretlemiştir. Ö9 herhangi bir çizim veya işlem yapmadığı için bu öğrencinin cevabı hangi adımları izleyerek nasıl bulduğu hakkında bir yorum yapılamamıştır. Diğer katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö11 ve Ö18 soruda verilen kitap görselinin uzunluğu için x değerini verip birinci ve ikinci görseldeki çubukların uzunlukları için ayrı ayrı cebirsel ifadeler yazarak dönüştürmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bu katılımcıların yazdıkları cebirsel ifadeleri verilen görsellerle ilişkilendirerek birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmaları zihinde canlandırma adımını gerçekleştirdiklerini gösterir. Yazdıkları denklemi çözerek hem kitap görselinin hem de çubuk görselinin uzunluğunu hesaplayan bu katılımcıların özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdikleri görülür.

Katılımcılardan Ö6, Ö7 ve Ö14 soruda verilen çubuk görselinin uzunluğu yerine x değerini verip kitap görselinin uzunluğu için iki ayrı cebirsel ifade yazarak dönüştürmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bu katılımcılar oluşturdukları cebirsel ifadeleri eşitleyerek denklem kurmuş ve denklemi çözerek çubuk görselinin uzunluğunu hesaplamışlardır. Dönüştürmeyi uygun bir şekilde yapan bu katılımcıların sırasıyla zihinde canlandırma, özelleştirme ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdikleri görülmüştür. Bunlarla birlikte katılımcılardan Ö3, Ö11, Ö13, Ö14, Ö15 ve Ö16 verilen görsellerin üzerine çizim yaparak çıkarımda bulunmaya çalışmışlardır.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren bu görsel özelleştirme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 ve yüksek başarı düzeyinde 3 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme ve zihinde canlandırma göstergelerini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 4 ve yüksek başarı düzeyinde 7 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 8 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 4 ve yüksek başarı düzeyinde 1 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre matematiksel düşünme-varsayımda bulunma göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergelerinde yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu, görsel temsil-çizim göstergesinde ve matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde ise orta ve yüksek başarı düzeyinde eşit sayıda öğrencinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu ($f=16$) özelleştirme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

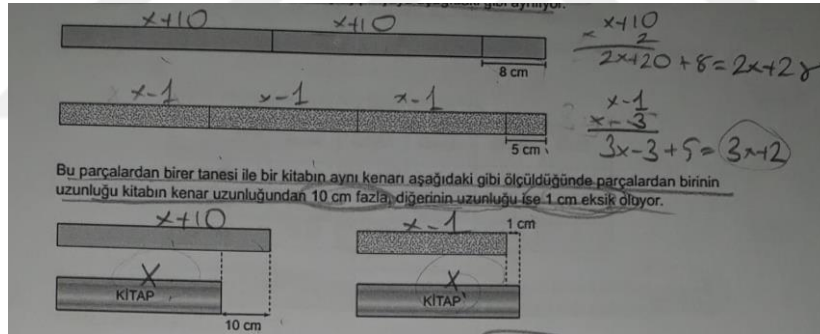
Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö14'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.45'te görülebilir.



Şekil 4.45 Ö14'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Şekil 4.45 incelendiğinde, öğrencinin görseller üzerine yaptığı çizimlerle çubuk parçaları ile kitap görsellerini karşılaştırması, çizim temsilini kullandığını gösterir.

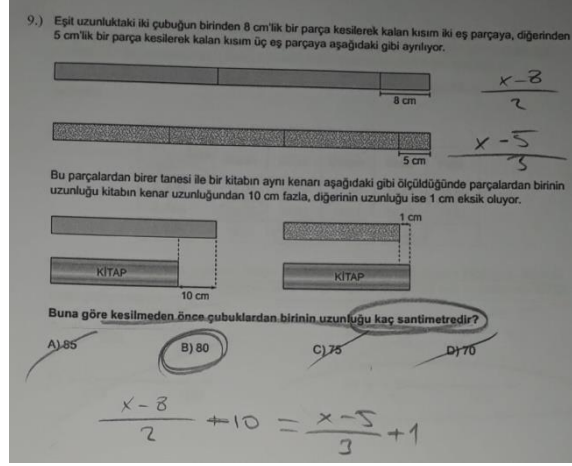
Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.46'da verilmiştir.



Şekil 4.46 Ö18'in birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Şekil 4.46 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen bilgi ve görselleri yorumlayarak elde ettiği çıkarımlarla görsellerdeki çubukların uzunlukları için ayrı ayrı cebirsel ifadeler yazması, dönüştürme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.47'de verilmiştir.



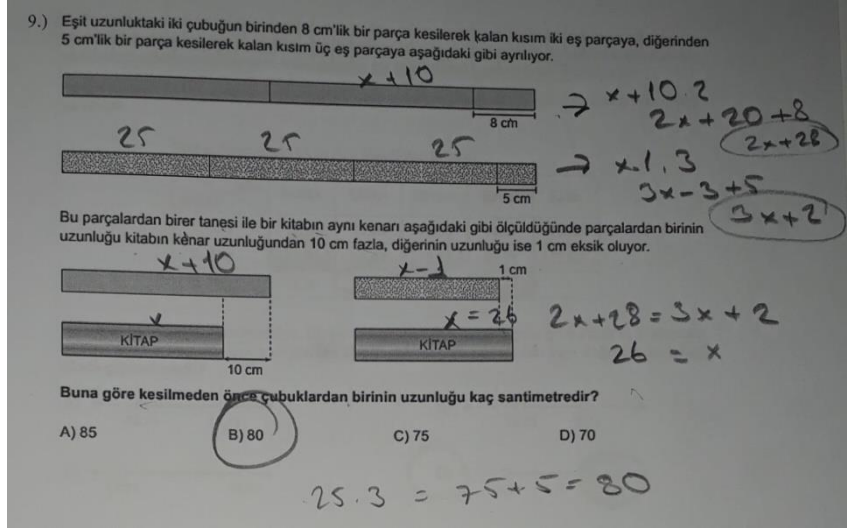
Şekil 4.47 Ö6'nın birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen görseller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Ö6 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö6: Eşit uzunluktaki iki çubuğu birinden 8 çıkartıp ikiye bölerek, diğerinden ise 5 çıkartıp 3'e bölerek parçalara ayırmışlar. Bu parçalardan ilki verilen kitaptan 10 cm daha uzun, diğeri ise verilen kitaptan 1 cm daha kısaymış. Bize çubuklardan birinin uzunluğunu sormuş. Çubukların birinin uzunluğuna x yazıp iki tane ifade buldum. İlk yazdığım ifadeden 10 çıkararak, diğerine ise 1 ekleyerek kitabın uzunluğu için iki farklı ifade yazdım. Kitabın uzunluğu için yazdığım iki farklı ifadeyi eşitledim ve denklemi çözdüm. Yani çubuğun uzunluğu 80 çıktı.

Ö6 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen çubuk görselinin uzunluğu için x değerini verdiğini, kitap görselinin uzunluğu için ise iki ayrı cebirsel ifade yazdığını belirtmesi dönüştürmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Bu katılımcının oluşturduğu cebirsel ifadeleri eşitleyerek denklem kurması ve bu denklemi çözerek çubuk görselinin uzunluğunu hesaplaması sırasıyla zihinde canlandırma, özelleştirme ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini göstermektedir.

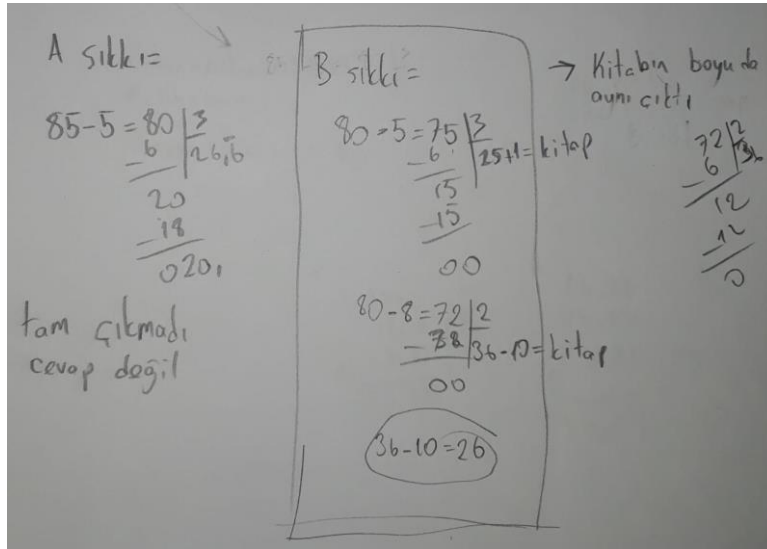
Katılımcı Ö4'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.48'de verilmiştir.



Şekil 4.48 Ö4'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin özelleştirme temsili

Şekil 4.48 incelendiğinde, öğrencinin yazdığı cebirsel ifadelerden yola çıkarak oluşturduğu birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi çözerek hem kitap görselinin hem de çubuk görselinin uzunluğunu hesaplaması, özelleştirme yaptığını gösterir.

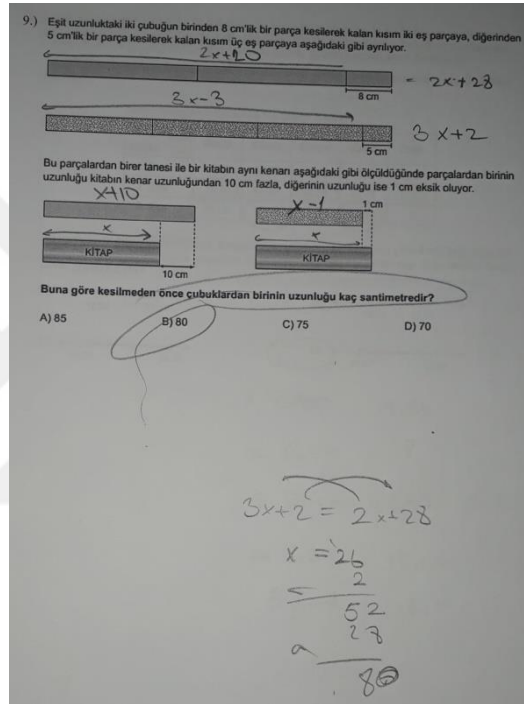
Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.49'da verilmiştir.



Şekil 4.49 Ö17'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili

Şekil 4.49 incelendiğinde, öğrencinin çubuk görsellerinin her biri için soruda belirtilen işlem basamaklarını seçeneklerde verilen değerleri ayrı ayrı deneyerek uygulaması sonucu kitap görselinin uzunluğuna ulaşmaya çalışması, varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö3'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.50'de verilmiştir.



Şekil 4.50 Ö3'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci

Katılımcılardan Ö3 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö3: Uzunlukları birbirine eşit olan iki farklı çubuktan birer parça kesilmiş ve kalan kısımları eşit parçalara bölünmüş. Sonra parçalar bir kitap ile karşılaştırılmış. Ben kitabın uzunluğu için x değerini verdim. Sonra parçaların uzunluğunu $x+10$ ve $x-1$ olarak buldum. Bu parçaların uzunluklarını çubuklarda yerine yazdığımda $3x+2$ ve $2x+28$ değerlerini buldum. Soruda çubukların uzunluklarının eşit olduğu söylendiği için bu ifadeleri eşitleyip soruyu çözdüm.

Ö3 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen kitap görselinin uzunluğu için x değerini

verip görsellerdeki çubukların uzunlukları için ayrı ayrı cebirsel ifadeler yazdığını belirtmesi dönüştürmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Bu katılımcının yazdığı cebirsel ifadeleri verilen görsellerle ilişkilendirerek denklem kurduğunu söylemesi zihinde canlandırma adımını gerçekleştirdiğini göstermektedir. Yazdığı denklemi çözerek hem kitap görselinin hem de çubuk görselinin uzunluğunu hesaplayan bu katılımcının özelleştirme yaparak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiği görülür.

4.10 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik İçeren Görsel Varsayımda Bulunma Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel varsayımda bulunma problemi kapsamında birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren onuncu sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.10’da sunulmuştur.

Çizelge 4.10 Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö13	-
	Model	-	-
	Tablo	Ö3, Ö4, Ö13	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö12, Ö13	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Zihinde Canlandırma	-	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö12, Ö13	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	Ö3, Ö4, Ö12, Ö13	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

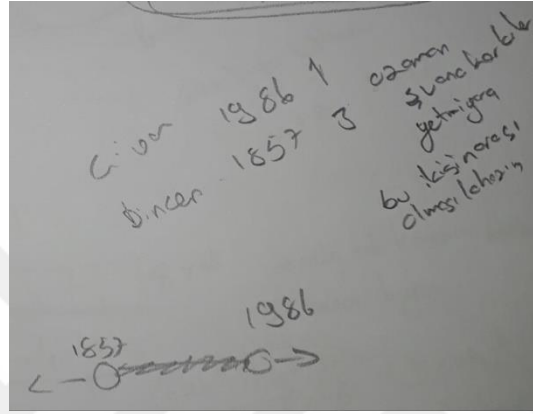
Çizelge 4.10 incelendiğinde; öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö5, Ö15 ve Ö17 en iyi atışları büyüktten küçüğe doğru sıralamak yerine verilen tüm atış mesafelerini toplayıp sıralama yapmaya çalıştıkları için hata yapmış ve sonuca ulaşamamışlardır. Bu katılımcılar sorunun

mantığını anlayamayıp doğru sıralamayı yapamadıkları için varsayımda bulunma adımına geçememişlerdir. Katılımcılardan Ö8, Ö10 ve Ö11 hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ancak Ö10 doğru, Ö8 ve Ö11 ise yanlış cevabı işaretlemişlerdir. Herhangi bir çizim veya işlem yapılmadığı için bu öğrencilerin cevaplarını hangi adımları izleyerek nasıl buldukları hakkında bir yorum yapılamamıştır. Katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö14 ve Ö18 altın ve bronz madalya alan sporcuların derecelerini verilen tabloda işaretlemişlerdir. Diğer katılımcılardan Ö3, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12, Ö13 ve Ö16 ise tüm sporcuların derecelerini verilen tabloda işaretlemişlerdir. Bu katılımcılar tablodaki verileri yorumlayarak Fatih'in gümüş madalya alması gerektiği çıkarımında bulunarak dönüştürmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bunlarla birlikte Ö3, Ö4 ve Ö13 yeni bir tablo görseli de oluşturmuşlardır. Ayrıca Ö13 sayı doğrusu çizerek eşitsizliği göstermiştir. Bu katılımcıların Fatih'in gümüş madalya alabilmesi için son atışının mesafesinin metre cinsinden alabileceği değerleri yaptıkları çıkarımlar sonucunda bulmaları ve sayı doğrusunda göstermeleri varsayımda bulunma ve özelleştirme adımlarını tamamlayarak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiklerini gösterir.

Orta düzey başarı seviyesindeki öğrencilerden Ö3, Ö4 ve Ö13 bu soruda tablo temsili oluşturmuş, Ö13 ise çizim temsili oluşturmuş tek katılımcıdır. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren bu görsel varsayımda bulunma probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren sadece orta başarı düzeyinde 1 öğrencinin olduğu, görsel temsil bileşenindeki tablo göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 4 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, benzer şekilde matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme ve varsayımda bulunma göstergelerini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 4 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre görsel temsil-çizim/tablo göstergelerinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görselleştirme-dönüştürme göstergesinde, matematiksel düşünme-özelleştirme/varsayımda bulunma göstergelerinde yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin yarısından fazlası (f=12)

varsayımda bulunma adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö13'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.51'de görülebilir.



Şekil 4.51 Ö13'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu çizim ve özelleştirme temsilleri

Ö13 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö13: Bu soruda bir yarışmadan bahsediyor ve yarışmacıları yaptıkları en iyi atışlara göre sıralamamızı istiyor. Burada Cihan altın madalya alıp birinci ve Dinçer'de üçüncü olmuş. Verilen tabloya baktığımda bu yarışmacıların atışlarının en yüksek iki derece olduğunu gördüm. Ayrıca kendim bir tablo oluşturdum ve Fatih'in atış mesafesinin bu ikisinin arasında bir sayı olması gerektiğini düşündüm. Buna uygun sayı doğrusunu seçeneklerde buldum ve o seçeneği işaretledim.

Ö13 ile yapılan görüşmede öğrencinin tablodaki verileri yorumlayarak Fatih'in gümüş madalya alması gerektiği çıkarımında bulunduğunu ve yeni bir tablo görseli oluşturup yarışmacıları sıraladığını belirtmesi dönüştürme ve özelleştirme adımlarını gerçekleştirdiğini gösterir. Katılımcı bulduğu eşitsizliğin sayı doğrusunda nasıl gösterilmesi gerektiğini ifade ederek varsayımda bulunma adımını tamamlamış ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmiştir.

Katılımcı Ö3'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.52'de verilmiştir.

1	Cihan	19.86
2	Fatih	?
3	Dincer	18.57
4	Erdal	18.44
5	Bural	18.20

Şekil 4.52 Ö3'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu tablo temsili

Şekil 4.52 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilenleri kullanarak tablo oluşturup sporcuları gülle atış mesafelerine göre sıralaması, tablo temsilini kullandığını gösterir.

Katılımcı Ö4'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.53'te verilmiştir.

Tablo: Sporcuların Gülle Atış Mesafeleri (Metre)

Atışlar	Bural	Cihan	Dincer	Erdal	Fatih
1. Atış	15.02	16.25	17.40	14.57	16.86
2. Atış	15.20	15.42	18.57	16.77	17.82
3. Atış	15.06	19.86	17.83	18.44	?

Bu yarışmada Cihan altın madalya, Dincer bronz madalya kazandığına göre Fatih'in 3. atışında gülleyi attığı mesafenin metre cinsinden alabileceği değerler aşağıdaki sayı doğrularının hangisinde gösterilmiştir?

A) 18.20 18.44 B) 18.44 18.57

C) 17.23 18.57 D) 18.57 19.86

1- Cihan
2-
3- Dincer

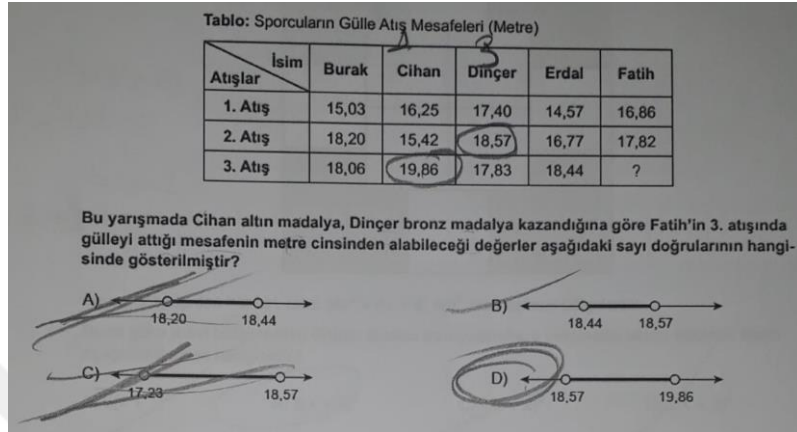
Cihandan küçük

Şekil 4.53 Ö4'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Şekil 4.53 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen bilgileri ve tabloyu yorumlayarak elde ettiği çıkarımlarla Fatih'in gümüş madalya alması gerektiği belirlenmesi,

dönüştürme yaptığını gösterir.

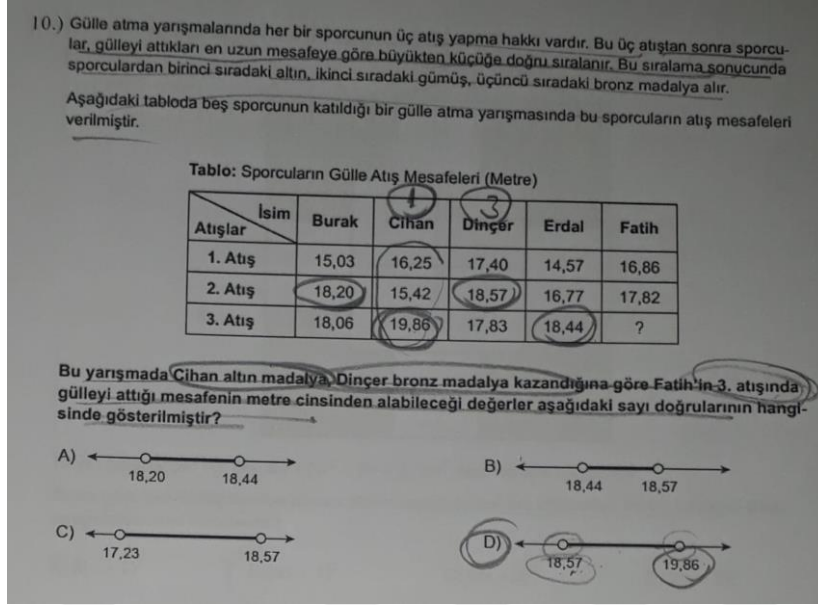
Katılımcı Ö1'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.54'te verilmiştir.



Şekil 4.54 Ö1'in birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili

Şekil 4.54 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilenlerden yola çıkarak Fatih'in gümüş madalya alabilmesi için son atışının mesafesinin metre cinsinden alabileceği değerleri bulması ve sayı doğrusunda göstermesi, varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.55'te verilmiştir.



Şekil 4.55 Ö18'in birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci

Katılımcılardan Ö18 ile bu problem hakkında yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö18: Burada bir gülle atış yarışması var. Gülle'yi en uzağa atan kazanıyor. Gülle atıcılara üç atış hakkı veriyorlar. Bu üç atış içerisindeki en uzak atışı en iyi atışı olarak seçilip yarışmacının hanesine yazılıyor. Cihan birinci olmuş. O yüzden altın madalya almış. Cihan'ın atış mesafesine baktığımda 19,86 metreyle en fazla onun atışı gelmiş. Dinçer üçüncü olmuş. Dinçer 18,57 metre uzaklığa atışını yapmış. Diğer yarışmacıların atış mesafelerine baktığımda 18,20 metre ve 18,44 metre var. Fatih'in atışlarından birisi belli değil. Bize de Fatih'in verilmeyen atışının mesafesinin hangi aralıkta olabileceğini soruyor. En iyi atış mesafelerine baktığımda birincinin 19,86 metre, üçüncünün 18,57 metre ve diğer yarışmacıların atışları ise bu ikisi arasında olmadığı için diğer yarışmacılar ikinci olamaz. İkinci Fatih olmak zorundadır. Bu nedenle Fatih atışlarını 18,57 metreden daha uzak ve 19,86 metreden daha yakın mesafeye atmak zorundadır. Bu nedenle de sayı doğrusunda gösterilen aralıkta 18,57 ve 19,86 sayılarının içi boyanmamış bir şekilde aradaki aralığı bize vermiş.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin tüm sporcuların derecelerini verilen tablodan yararlanarak bulduğunu, yaptığı çıkarımla Fatih'in ikinci olması gerektiğini belirtmesi

dönüştürme adımını gerçekleştirdiğini gösterir. Katılımcının Fatih'in ikinci olabilmesi için son atışının mesafesinin metre cinsinden alabileceği değerleri bulması ve sayı doğrusunda nasıl gösterilmesi gerektiğini ifade etmesi varsayımda bulunma ve özelleştirme adımlarını da tamamlayarak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

4.11 Cebirsel İfadeleri Çarpanlarına Ayırmayı İçeren Görsel Doğrulama ve İkna Etme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel doğrulama ve ikna etme problemi kapsamında cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren on birinci sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.11'de sunulmuştur.

Çizelge 4.11 Öğrencilerin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö4, Ö5, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	-	-
	Doğrulama ve İkna Etme	Ö10, Ö13, Ö17	Ö16, Ö18

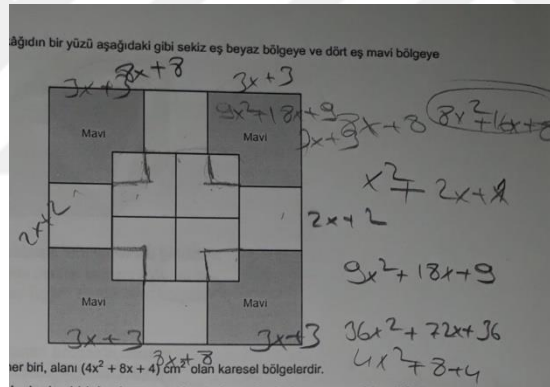
Çizelge 4.11 incelendiğinde; öğrencilerin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö12 ve Ö14 verilen cebirsel ifadeyi çarpanlarına ayırarak beyaz karenin bir kenar uzunluğunu bulmuşlardır. Katılımcıların büyük karenin, mavi karenin ve çizim yaparak

oluşturdukları küçük karenin bir kenar uzunluklarını beyaz kare ile ilişkilendirerek bulmaları zihinde canlandırma ve dönüştürme adımlarını gerçekleştirdiklerini gösterir. Bu katılımcılar mavi karenin alanından küçük karenin alanını çıkarıp geriye kalan mavi bölgenin alanını bularak özelleştirmeyi gerçekleştirmişler ve buldukları cebirsel ifadeyi çarpanlarına ayırarak matematiksel düşünmeye ulaşmışlardır. Katılımcı Ö15 beyaz karenin bir kenar uzunluğunu bulmuş, buradan yola çıkarak büyük karenin, mavi karenin ve çizim yaparak oluşturduğu küçük karenin bir kenar uzunluklarını da bularak zihinde canlandırma ve dönüştürme adımlarını gerçekleştirmiştir. Ancak mavi bölgelerden birinin alanını bulurken hata yaparak yanlış hesapladığı için özelleştirmeyi yapamayarak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememiştir. Katılımcılardan Ö10, Ö13, Ö16 ve Ö18 beyaz karenin ve büyük karenin bir kenar uzunluklarını bularak zihinde canlandırma, dönüştürme ve özelleştirme adımlarını gerçekleştirmişlerdir. Bu katılımcılar verilen görseli inceleyerek beyaz bölge ile mavi bölgenin alanlarının eşit olduğu çıkarımında bulunmuş ve mavi bölgelerden birinin alanını bularak doğrulama adımını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Katılımcı Ö17 beyaz karenin ve büyük karenin bir kenar uzunluklarını bulmuş, verilen görselde beyaz bölge ile mavi bölgenin alanlarının eşit olduğu çıkarımına ulaşarak doğrulama ve ikna etme adımını tamamlamış ancak çözümün devamını getiremeyip mavi bölgelerden birinin alanını bulamadığı için matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememiştir. Katılımcı Ö8 ise hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ve soruyu boş bırakmıştır. Herhangi bir çizim veya işlem yapılmadığı için bu öğrencinin cevabı hangi adımları izleyerek nasıl bulduğu hakkında bir yorum yapılamamıştır. Bunlarla birlikte katılımcılardan Ö8, Ö10 ve Ö11 dışındaki tüm katılımcılar verilen görsellerin üzerine çizim yaparak çıkarımda bulunmaya çalışmışlardır.

Cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren bu görsel doğrulama ve ikna etme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme ve zihinde canlandırma göstergelerini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 8 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki

doğrulama ve ikna etme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 ve yüksek başarı düzeyinde 2 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre matematiksel düşünme-doğrulama ve ikna etme göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görsel temsil-çizim göstergesinde, görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergelerinde, matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin çok azı (f=5) doğrulama ve ikna etme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.56'da görülebilir.



Şekil 4.56 Ö6'nın cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Şekil 4.56 incelendiğinde, öğrencinin görseller üzerine yaptığı çizimlerle özdeş karesel bölgeler oluşturması, çizim temsili kullandığını gösterir.

Katılımcı Ö4'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.57'de verilmiştir.

buldum. $x+1$ ile $2x+2$ 'yi toplayarak mavi karenin bir kenarının uzunluğunu $3x+3$ olarak buldum. Buradan mavi karenin alanını buldum. Sadece mavi bölgeyi bulmak için küçük karenin alanını çıkarttım. $8x^2+16x+8$ buldum. Bu sonuca da B şıkında ulaşıyoruz.

Ö7 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen cebirsel ifadeyi çarpanlarına ayırarak beyaz karenin bir kenar uzunluğunu bulduğunu, mavi karenin ve çizim yaparak oluşturduğu küçük karenin bir kenar uzunluklarını beyaz kare ile ilişkilendirerek bulduğunu belirtmesi zihinde canlandırma ve dönüştürme adımlarını gerçekleştirdiğini gösterir. Bu katılımcı mavi karenin alanından küçük karenin alanını çıkarıp geriye kalan mavi bölgenin alanını bularak özelleştirmeyi ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmiştir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.59'da verilmiştir.

The image shows handwritten mathematical work on a dark background. At the top, the expression $4x^2 + 8x + 4 = (2x+2) \cdot (2x+2)$ is written. Below this, there are several calculations:

- On the left, a vertical multiplication of $2x+2$ by $2x+2$ is shown, resulting in $4x^2 + 8x + 4$.
- In the center, a vertical multiplication of $4x^2 + 8x + 4$ by $2x+2$ is shown, resulting in $8x^3 + 16x^2 + 8x + 4$.
- On the right, a vertical multiplication of $4x^2 + 8x + 4$ by $2x+2$ is shown, resulting in $8x^3 + 16x^2 + 8x + 4$.
- Below these, there are several expressions: $32x^2 + 64x + 32$, $8x^2 + 16x + 8$, and $8(x^2 + 2x + 1)$.
- A curved arrow points from the expression $8(x^2 + 2x + 1)$ to the expression $8(x+1)^2$.

Şekil 4.59 Ö18'in cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili

Bu problem hakkında Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö18: Beyaz bölgelerin her birinin alanı $4x^2 + 8x + 4$ 'mü. Bu ifadeyi çarpanlarına ayırdığımda $(2x+2) \cdot (2x+2)$ yapıyor. Beyaz şekillerde kare olduğu için bir kenar uzunluğu $2x + 2$ oluyor. Büyük pano da bir kare olduğu için içerisinde kaç tane beyaz kare olduğuna baktım. Yatay olarak dört tane, dikey olarak da dört tane beyaz kare

bulunuyor. Bu nedenle $2x + 2$ ile 4'ü çarptım ve en büyük karenin bir kenar uzunluğunu $8x + 8$ buldum. Benden mavi karelerden birinin alanını istemiş. $(8x + 8)$ ile $(8x + 8)$ 'i çarptım ve en büyük karenin alanını $64x^2 + 128x + 64$ olarak elde ettim. Bundan da 8 tane beyaz karenin alanını çıkardım. Beyaz karelerden birinin alanını 8 ile çarptım. Bulduğum sonucu büyük karenin alanından çıkardım. $32x^2 + 64x + 32$ sonucunu elde ettim. Çıkan sonucu da dört mavi kare olduğu için 4'e bölerek $8x^2 + 16x + 8$ ifadesini buldum. Daha sonra elde ettiğim ifadeyi 8 parantezine aldım. $8.(x^2 + 2x + 1)$ oldu. Bu ifadeyi çarpanlarına ayırdığımda $8.(x+1)^2$ ifadesini elde ettim.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin beyaz karenin ve en büyük karenin bir kenar uzunluğunu bulduğunu belirtmesi zihinde canlandırma, dönüştürme ve özelleştirmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Bu katılımcı verilen görseli inceleyerek beyaz bölge ile mavi bölgenin alanlarının eşit olduğu çıkarımında bulunmuş ve mavi bölgelerden birinin alanını bularak doğrulama ve ikna etme adımını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmiştir.

Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.60'ta verilmiştir.

$4 \cdot (2x+2)$
 $8x+8 = \text{Kâğıdın kenarı}$
 $(8x+8)^2 = 64x^2 + 128x + 64 = \text{Kâğıdın alanı}$
 $(4x^2 + 8x + 4) \cdot 8 = 32x^2 + 64x + 32 = \text{Beyazların toplam alanı}$
 $(64x^2 + 128x + 64) - (32x^2 + 64x + 32) = 32x^2 + 64x + 32$

Şekil 4.60 Ö17'nin cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmayı içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu doğrulama ve ikna etme temsili

Şekil 4.60 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilenlerden yola çıkarak beyaz karenin ve büyük karenin bir kenar uzunluklarını bulup verilen görselde beyaz bölge ile mavi bölgenin alanlarının eşit olduğu çıkarımına ulaşması, doğrulama ve ikna etme yaptığını gösterir.

4.12 Özdeşlik Modeli İçeren Görsel Varsayımda Bulunma Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel varsayımda bulunma problemi kapsamında özdeşlik modeli içeren on ikinci sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.12’de sunulmuştur.

Çizelge 4.12 Öğrencilerin özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3	Ö1, Ö7, Ö9
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö4, Ö13	Ö1, Ö6, Ö16, Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö4, Ö13	Ö1, Ö6, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö4, Ö13	Ö6, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	Ö4, Ö13	Ö1, Ö6, Ö16, Ö18
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

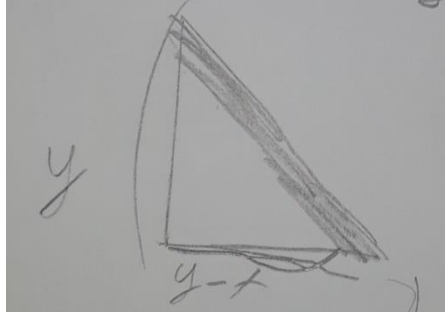
Çizelge 4.12 incelendiğinde; öğrencilerin özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö2, Ö3, Ö7, Ö9, Ö10, Ö12 ve Ö14 verilen görsel üzerinde bulunan üçgenlerin alanlarını bulmaya çalışmışlar ancak sonuca ulaşamamışlardır. Ö3, Ö9, Ö14 soruyu boş bırakırken, Ö2, Ö7, Ö10 ve Ö12 ise yanlış cevabı işaretlemişlerdir. Bu katılımcılar üçgenlerin kenar uzunluklarını ve alanlarını bulurken hata yaptıkları için zihinde canlandırma aşamasını tam olarak gerçekleştirememişlerdir. Katılımcılardan Ö5, Ö8, Ö11, Ö15 ve Ö17 hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ancak Ö11 doğru, Ö8 ve

Ö15 yanlış cevabı işaretlemiş olup Ö5 ve Ö17 ise soruyu boş bırakmışlardır. Herhangi bir çizim veya işlem yapılmadığı için bu öğrencilerin cevaplarını hangi adımları izleyerek nasıl buldukları hakkında bir yorum yapılamamıştır. Diğer katılımcılardan Ö1 soruda verilen görsel üzerinde bulunan üçgenlerin alanlarını bulmuş ancak alanları toplamak yerine birbirinden çıkardığı için hata yapmıştır. Bu katılımcı sırasıyla zihinde canlandırma, varsayımda bulunma, dönüştürme adımlarını tamamlamış ancak doğru sonuca ulaşamadığı için özelleştirmeyi yapamayarak matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememiştir. Diğer katılımcılardan Ö4, Ö6, Ö13, Ö16 ve Ö18 ise verilen görsel üzerinde bulunan üçgenlerin alanlarını bulmuşlar ve bu alanları toplayarak doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu katılımcılar sırasıyla zihinde canlandırma, varsayımda bulunma, dönüştürme ve özelleştirme adımlarını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bunlarla birlikte katılımcılardan Ö1, Ö3, Ö7 ve Ö9 verilen görsellerin üzerine çizim yaparak çıkarımda bulunmaya çalışmışlardır.

Özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 1 ve yüksek başarı düzeyinde 3 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme ve zihinde canlandırma göstergelerini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 2 ve yüksek başarı düzeyinde 4 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 2 ve yüksek başarı düzeyinde 3 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 2 ve yüksek başarı düzeyinde 4 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; görsel temsil-çizim göstergesinde, görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergelerinde, matematiksel düşünme-özelleştirme/varsayımda bulunma göstergelerinde yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin çok azı (f=6) varsayımda bulunma adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö1'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel

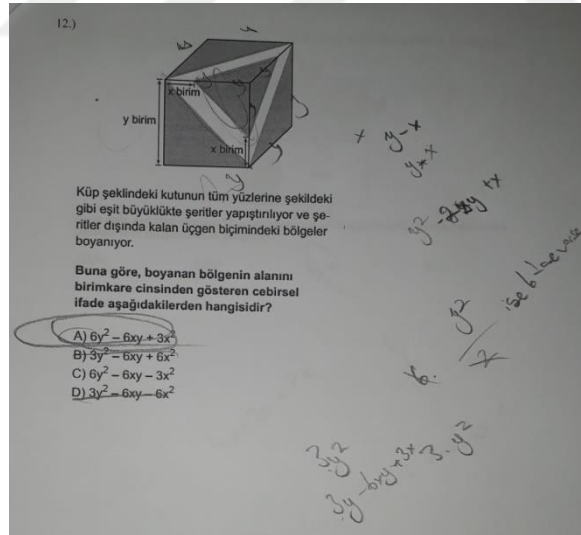
akıl yürütme Şekil 4.61’de görülebilir.



Şekil 4.61 Ö1’in özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Şekil 4.61 incelendiğinde, öğrencinin çizim yaparak verilen görselde boyanan bölgelerden biri olan üçgensel bölgeyi oluşturması, çizim temsilini kullandığını gösterir.

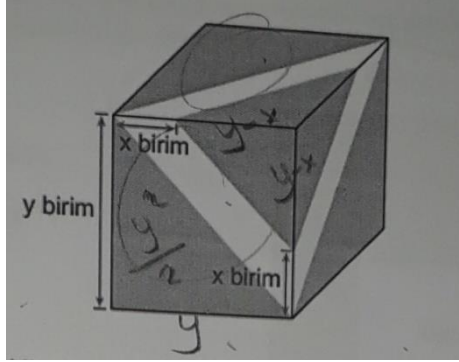
Katılımcı Ö13’ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.62’de verilmiştir.



Şekil 4.62 Ö13’ün özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Şekil 4.62 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen bilgileri ve görselleri yorumlayarak elde ettiği çıkarımlarla verilen görsel üzerinde bulunan üçgenlerin kenar uzunluklarını ve alanlarını bulması, dönüştürme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö4'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.63'te verilmiştir.



Şekil 4.63 Ö4'ün özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin verilen görsel içerisindeki şekiller arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Şekil 4.63 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen üçgensel bölgelerin kenar uzunluklarını şekiller arasındaki ilişkiyi inceleyerek nasıl bulduğunu göstermesi, zihinde canlandırma yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.64'te verilmiştir.

Şekil 4.64 Ö18'in özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili

Bu probleme ilişkin Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

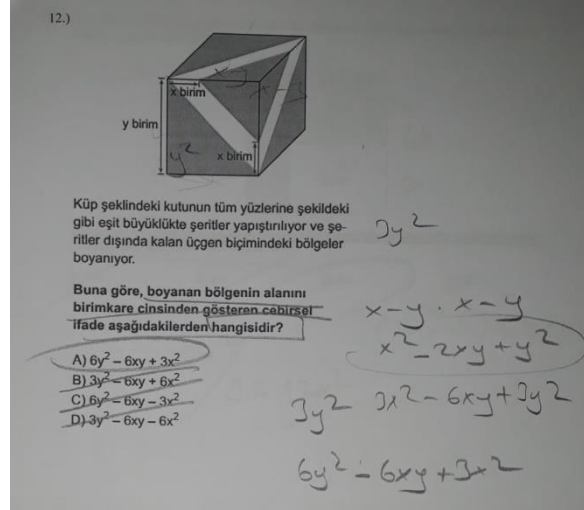
Ö18: *Bir küp verilmiş. Verilen küpün her yüzeyine şeritler çekmişler. Şerit olmayan bölümleri de boyamışlar. Bana boyanan bölgelerin alanını veren cebirsel ifadeyi soruyor. Şeridin solunda ve sağında birer üçgen var. İlk önce bu üçgenlerin alanlarını buldum. Soldaki üçgenin alanı $y^2 / 2$ yapıyor. Sağdaki üçgenin alanı $(y - x) \cdot (y - x) / 2$ yani $(y^2 - 2xy + x^2) / 2$ yapıyor. Bulduğum alanları topladığımda ise $(2y^2 - 2xy + x^2) / 2$ çıkıyor. Bu bir yüzündeki boyanın alan ancak bizim küpümüzde altı yüz var. Bulduğumuz sonucu 6 ile çarpıyoruz. İşlemi tamamladığımızda $6y^2 - 6xy + 3x^2$ çıkmış olur. Bu da A seçeneğinde bulunuyor.*

A: *Bu soruyu çözerken farklı bir çözüm yolu tercih etmek ister miydin?*

Ö18: *Aslında farklı bir çözüm yol daha var. Arada verilen şeridin alanını bulup 6 ile çarpıyoruz. Bulduğumuz sonucu küpün yüzey alanından yani $6y^2$ 'den çıkarabilirdik. Ama bu daha zor olacağı için benim yaptığım en uygun yöntemdi.*

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrenci verilen görsel üzerinde bulunan üçgenlerin alanlarını sırasıyla bulduğunu, bu alanları topladığını ve tüm yüzeylerde aynı şeritten bulunduğu için bulduğu toplamı 6 ile çarparak doğru sonuca ulaştığını belirtmiştir. Bu ifade katılımcının sırasıyla zihinde canlandırma, varsayımda bulunma, özelleştirme ve matematiksel düşünme adımlarını gerçekleştirdiğini gösterir. Bununla birlikte katılımcı verilen şeridin alanını bulabileceğini, her yüzeyde şerit bulunduğu için bulduğu ifadeyi 6 ile çarpıp küpün yüzey alanından çıkararak soruyu farklı bir yöntemle de çözebileceğini belirtmiştir. Ancak bu yöntemin daha zor olacağını düşündüğünü ifade eden katılımcı ilk yaptığı çözümün en uygun yöntem olduğunu belirtmiştir. Katılımcının bu ifadeleri farklı görsel akıl yürütmelerle soruyu çözebildiğini ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirebildiğini gösterir.

Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.65'te verilmiştir.



Şekil 4.65 Ö6'nın özdeşlik modeli içeren görsel varsayımda bulunma problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili

Bu proleme ilişkin Ö6 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö6: Bu soruda verilen bir küpün üzerine şerit çekmişler. Çekilen şeritlerin ayırdığı üçgensel bölgeleri boyamışlar. Şimdi üçgenlerden bir tanesinin dik kenarlarının uzunluğu y olduğu için alanını $y^2/2$ şeklinde buldum. Diğerinin kenar uzunluğu $y-x$ olduğu için alanını $(y-x) \cdot (y-x)/2$ buldum. Bunları tüm yüzeylere uyguladığım zaman boyanan bölgenin alanı $6y^2 - 6xy + 3x^2$ olarak çıkıyor.

Ö6 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görsel üzerinde bulunan üçgenlerin alanlarını bulduğunu ve bu alanları toplayarak doğru cevaba ulaştığını belirtmesi sırasıyla zihinde canlandırma, varsayımda bulunma, dönüştürme ve özelleştirme adımlarını takip ederek matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

4.13 Cebirsel İfadelerin Çarpımını İçeren Görsel Özelleştirme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel özelleştirme problemi kapsamında cebirsel ifadelerin çarpımını içeren on üçüncü sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.13'te sunulmuştur.

Çizelge 4.13 Öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

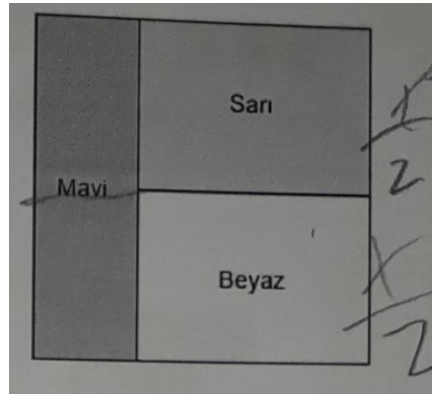
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö8	-
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-	-
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	Ö4	-
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

Çizelge 4.13 incelendiğinde; öğrencilerin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcı Ö8 verilen şekillerin kenar uzunluklarını bulurken hata yaptığı için yanlış hesaplamış ve sonuca ulaşamamıştır. Bu katılımcı verilen görsel üzerinde çizim temsili kullanmasına rağmen zihinde canlandırma ve özelleştirme aşamalarını tamamlayamadığı için matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememiştir. Katılımcılardan Ö11 ve Ö15 verilen görseldeki karenin bir kenar uzunluğunu doğru bulmuşlar ancak dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını bulurken hata yapmışlardır. Bu katılımcılar zihinde canlandırma adımını gerçekleştirmiş ancak özelleştirme ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememişlerdir. Katılımcı Ö4 verilen görseldeki karenin bir kenar uzunluğunu bulduktan sonra seçeneklerden yola çıkarak varsayımda bulunmuş ve sonuca ulaşmıştır. Bu dört katılımcı dışındaki tüm katılımcılar verilen görseldeki karenin bir kenar uzunluğunu ve dikdörtgensel bölgelerin kenar uzunluklarını doğru hesaplayarak sarı bölgenin çevresinin uzunluğunu bulmuşlardır. Doğru cevaba ulaşan tüm katılımcılar sırasıyla zihinde canlandırma, özelleştirme ve matematiksel düşünme adımlarını gerçekleştirmişlerdir.

Öğrencilerin büyük çoğunluğu bu soruda zihinde canlandırma ve özelleştirme adımlarını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bununla

birlikte orta düzey başarı seviyesine sahip olan öğrencilerden Ö8 bu soruda çizim temsilini, Ö4 ise varsayımda bulunma adımını gerçekleştiren tek katılımcıdır. Cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde sadece 1 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki zihinde canlandırma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 8 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde sadece 1 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre görsel temsil-çizim göstergesinde, matematiksel düşünme-varsayımda bulunma göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görselleştirme-zihinde canlandırma göstergesinde, matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu (f=15) özelleştirme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

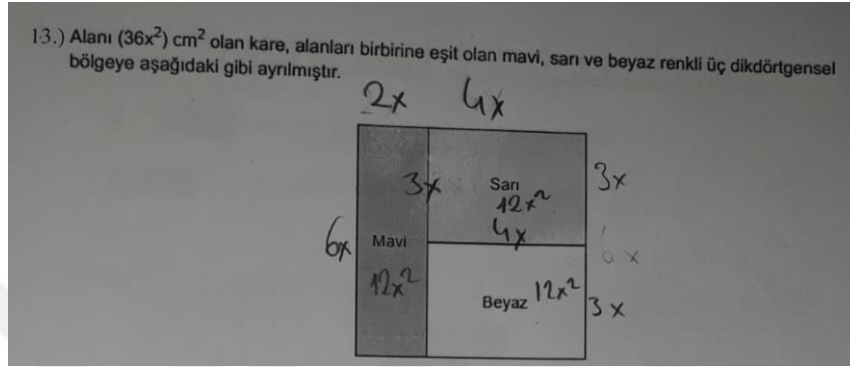
Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö8'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.66'da görülebilir.



Şekil 4.66 Ö8'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

Şekil 4.66 incelendiğinde, öğrencinin verilen görsel üzerine çizim yaparak mavi renkli dikdörtgensel bölgeyi iki eş parçaya ayırması, çizim temsilini kullandığını gösterir.

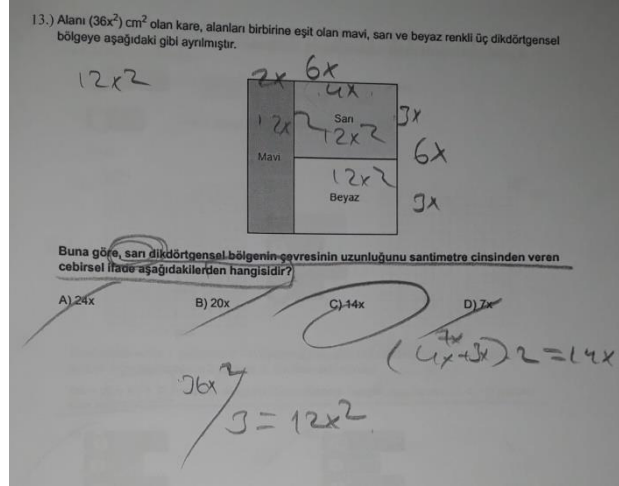
Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.67'de verilmiştir.



Şekil 4.67 Ö17'nin cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin verilen görsel içerisindeki şekillerin arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Şekil 4.67 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen dikdörtgensel bölgelerin kenar uzunlukları ile alanları arasında bağlantı kurarak şekiller arasındaki ilişkiyi inceleyip dikdörtgensel bölgelerin kenar uzunluklarını bulmaya çalışması, zihinde canlandırma yaptığını gösterir.

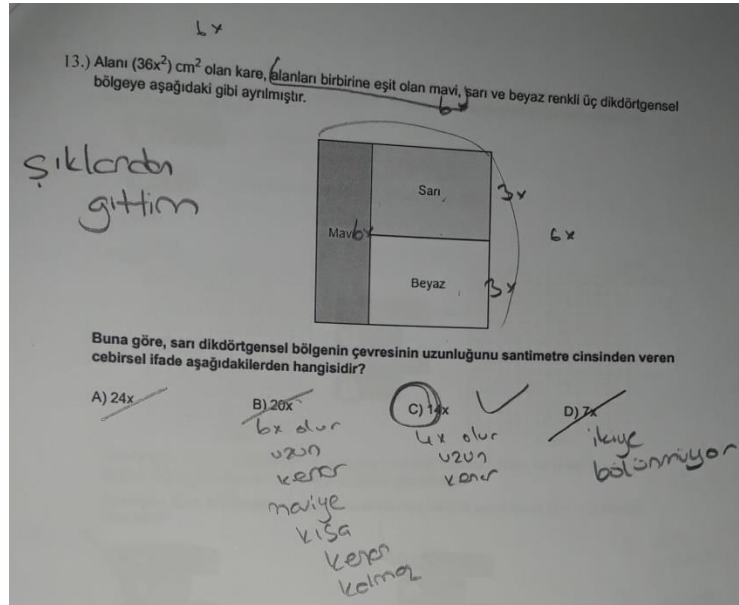
Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.68'de verilmiştir.



Şekil 4.68 Ö6'nın cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili

Şekil 4.68 incelendiğinde, öğrencinin verilenlerden yola çıkarak verilen görseldeki karenin bir kenar uzunluğunu ve dikdörtgenel bölgelerin kenar uzunluklarını bulup sarı bölgenin çevresinin uzunluğunu hesaplaması, özelleştirme yaptığını gösterir.

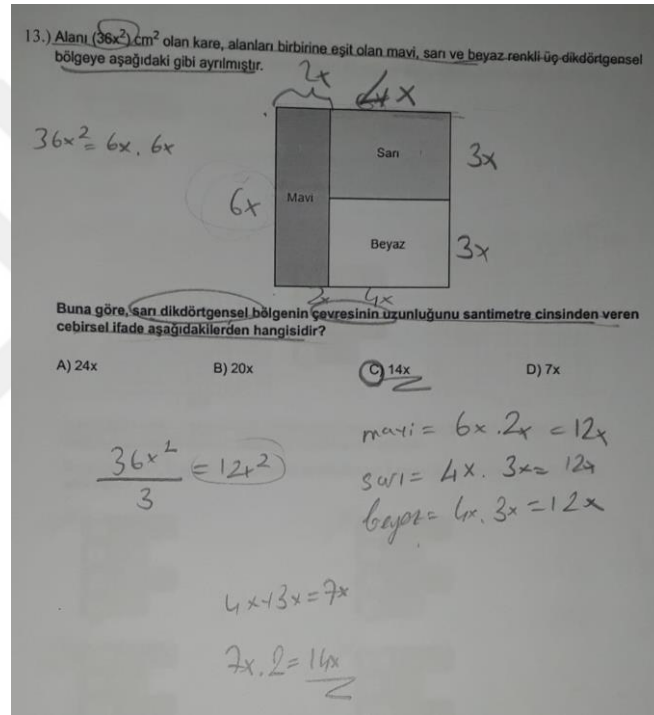
Katılımcı Ö4'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.69'da verilmiştir.



Şekil 4.69 Ö4'ün cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili

Şekil 4.69 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilenlerden yola çıkarak verilen görseldeki karenin bir kenar uzunluğunu bulduktan sonra seçeneklerdeki değerleri ayrı ayrı denemesi, sarı dikdörtgensel bölgenin kenar uzunluklarının alabileceği değerleri bulması ve bu değerlerin uygun olup olmadığını inceleyerek sonuca ulaşması, varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.70'te verilmiştir.



Şekil 4.70 Ö18'in cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci

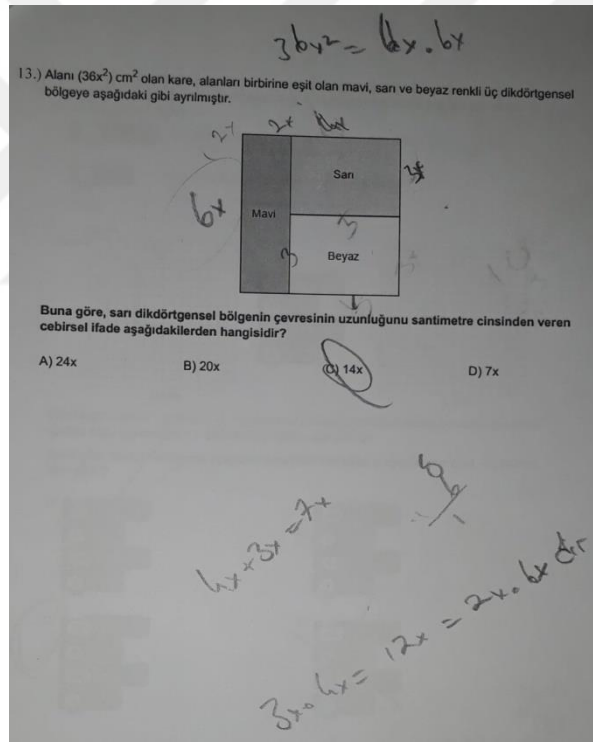
Bu probleme ilişkin Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö18: Verilen mavi, sarı ve beyaz renkli üç dikdörtgensel bölgenin toplam alanının $36x^2$ olduğu belirtilmiş. Verilen büyük şekil kare olduğu için her bir kenar uzunluğu $6x$ oluyor. Buradan mavi dikdörtgenin uzun kenarı $6x$ oluyor. Soruda mavi, sarı ve beyaz bölgelerin alanlarının birbirine eşit olduğu belirtiliyor. $36x^2$ 'yi 3'e böldüğümüzde $12x^2$ çıkıyor. Buradan yola çıkarak mavi dikdörtgenin uzun kenarı $6x$ ise kısa kenarının uzunluğu da $2x$ olmak zorundadır. Daha sonra mavi dikdörtgenin kısa kenarı $2x$ olduğundan sarı dikdörtgenin uzun kenarına da $6x - 2x = 4x$ kalıyor. Sarı dikdörtgenin

alanı da $12x^2$ olduğundan sarı dikdörtgenin kısa kenarı $3x$ oluyor. Sarı dikdörtgenin çevresi $4x + 3x = 7x$ ve $7x \cdot 2 = 14x$ ediyor.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrenci verilen görseldeki karenin bir kenar uzunluğunu soruda verilen alandan yola çıkarak bulduğunu belirtmiştir. Katılımcının dikdörtgensel bölgelerin kenar uzunluklarını hesaplayarak sarı bölgenin çevresinin uzunluğunu bulduğunu belirtmesi sırasıyla zihinde canlandırma, özelleştirme ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö13'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.71'de verilmiştir.



Şekil 4.71 Ö13'ün cebirsel ifadelerin çarpımını içeren görsel özelleştirme problemine ilişkin oluşturduğu problemi çözme süreci

Katılımcılardan Ö13 ile bu probleme ilişkin yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda verilmiştir:

Ö13: Burada alanı verilmiş bir kare var. Buradan yola çıkarak karenin bir kenarının uzunluğunu buldum. Bize burada alanları eşit olan 3 tane dikdörtgensel şekil vermiş. Karenin bir kenarı $6x$ buldum. Dikdörtgenlerden birinin uzun kenarı $6x$ olacağı için kısa kenarı da $2x$ olmalıdır. Geriye $4x$ kaldığı için ve bu dikdörtgenin diğer kenarı $3x$ olmalıdır.

Ö13 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen görselde bulunan tüm şekillerin kenar uzunluklarını hesaplayarak sarı bölgenin çevresinin uzunluğunu bulduğunu belirtmesi sırasıyla zihinde canlandırma, özelleştirme ve matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

4.14 Koordinat Sisteminin Özelliklerini İçeren Görsel Doğrulama ve İkna Etme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel doğrulama ve ikna etme problemi kapsamında koordinat sisteminin özelliklerini içeren on dördüncü sorudan elde edilen bulgular Çizelge 4.14'te sunulmuştur.

Çizelge 4.14 Öğrencilerin koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

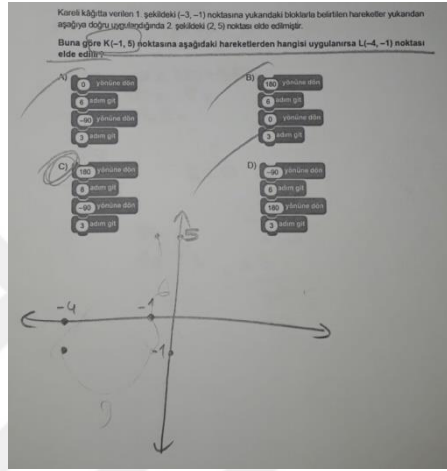
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	Ö3, Ö8, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö8, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Zihinde Canlandırma	Ö3, Ö8, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö3, Ö4, Ö8, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18
	Genelleme	-	-
	Varsayımda Bulunma	-	-
	Doğrulama ve İkna Etme	Ö3, Ö4, Ö8, Ö12, Ö13, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö14, Ö16, Ö18

Çizelge 4.14 incelendiğinde; öğrencilerin koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö5, Ö10, Ö11 ve Ö15 hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ancak Ö10 ve Ö11 doğru cevabı işaretlemiş olup Ö5 ve Ö15 ise soruyu boş bırakmışlardır. Herhangi bir çizim veya işlem yapılmadığı için bu öğrencilerin cevaplarını hangi adımları izleyerek nasıl buldukları hakkında bir yorum yapılamamaktadır. Katılımcı Ö4 herhangi bir çizim yapmadan verilen sıralı ikililerden çıkarım yaparak dönüştürme yapmış ve doğrulama yaparak sonuca ulaşmıştır. Katılımcı Ö6 ise yeni bir koordinat sistemi çizmiş, çizdiği görsel üzerinde K ve L noktalarının yerlerini bulmuş, bu noktaların arasındaki ilişkiden yola çıkarak uygulanması gereken hareketleri tespit ederek sonuca ulaşmıştır. Bu altı katılımcı dışındaki tüm katılımcılar soruda görseli verilen koordinat sistemi üzerinde K ve L noktalarının yerlerini bulmuş, L noktasının elde edilebilmesi için K noktasına uygulanması gereken hareketleri tespit etmiş ve verilen sembollerle ilişkilendirerek doğru cevaba ulaşmışlardır. Bunlarla birlikte katılımcı Ö18 yönler ile verilen sembollerin eşleştirildiği yeni bir görsel çizmiştir. Doğru cevaba ulaşan tüm katılımcılar sırasıyla zihinde canlandırma, dönüştürme, özelleştirme, doğrulama ve ikna etme adımlarını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme probleminde görsel temsil bileşenindeki çizim göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 5 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki zihinde canlandırma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 5 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme ve doğrulama ve ikna etme göstergelerini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 6 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre matematiksel düşünme-varsayımda bulunma göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görsel temsil-çizim göstergesinde, görselleştirme-dönüştürme/zihinde canlandırma göstergelerinde, matematiksel düşünme-özelleştirme/doğrulama ve ikna etme göstergelerinde yüksek

başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu ($f=14$) doğrulama ve ikna etme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.72'de görülebilir.



Şekil 4.72 Ö6'nın koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu çizim temsili

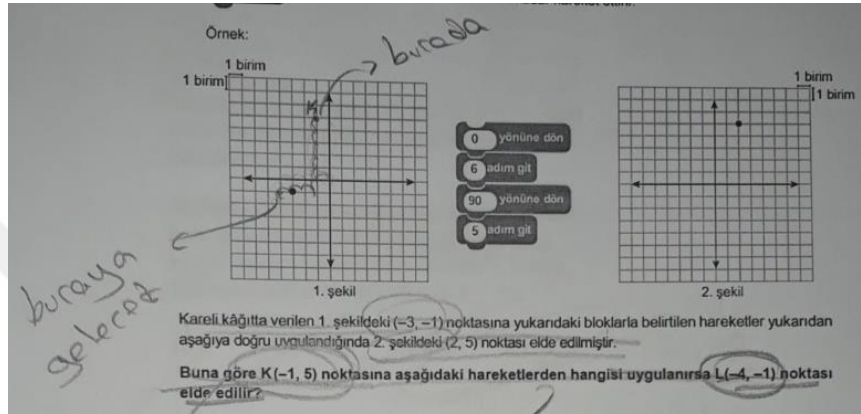
Ö6 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö6: Burada bir koordinat sistemi sorusu var. Koordinat sisteminde ilk önce yukarıdaki yönergeleri okudum. Çünkü burayı okumadan önce baktığımda yönleri tam olarak anlamadım. Aşağıda soru kökünde iki tane nokta vermiş. K noktasından L noktasına gitmek istemiş ve bunu nasıl yapabiliriz diye sormuş. Ben K ve L noktalarının yerlerini yeni çizdiğim koordinat sistemi üzerinde buldum. Seçeneklerde verilen kodları denedim. Baktığımda C şıkkı doğru çıktı.

Ö6 ile yapılan görüşmede öğrencinin yeni bir koordinat sistemi çizdiğini, K ve L noktalarının yerlerini bulduğunu, seçeneklerde verilen kodları tek tek deneyerek uygulanması gereken hareketleri tespit ettiğini belirtmesi sırasıyla zihinde canlandırma, özelleştirme, dönüştürme, doğrulama ve ikna etme adımlarını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Katılımcıların bu probleme ilişkin

gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde başarı seviyesi yüksek olan öğrencilerin çizim temsili oluşturma, dönüştürme, zihinde canlandırma, özelleştirme ve doğrulama adımlarında daha başarılı oldukları görülmüştür.

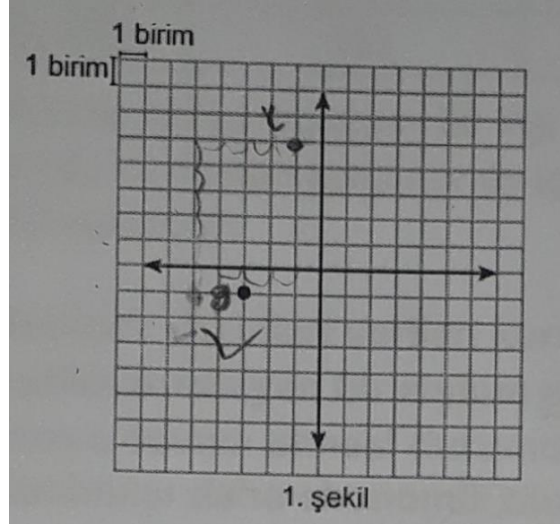
Katılımcı Ö7'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.73'te verilmiştir.



Şekil 4.73 Ö7'nin koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin yaptığı çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Şekil 4.73 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen bilgileri ve görselleri yorumlayarak elde ettiği çıkarımlarla görselde verilen K noktasına uygulanması gereken hareketleri tespit etmesi, dönüştürme yaptığını gösterir.

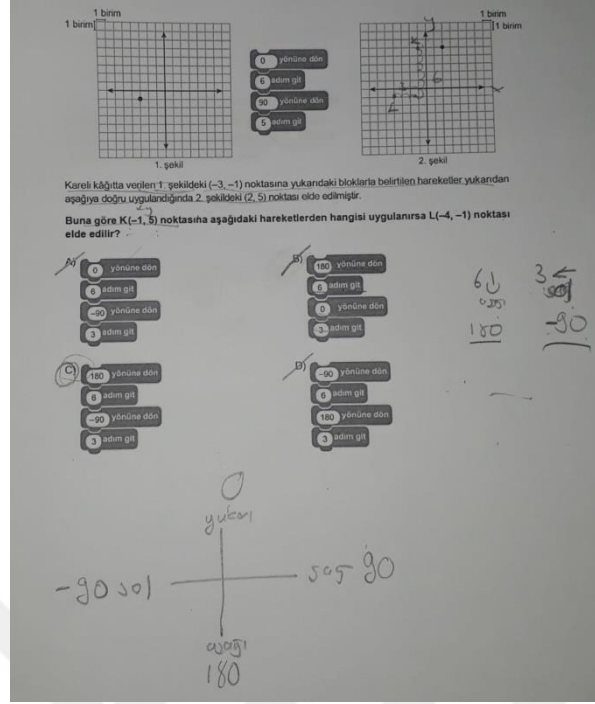
Katılımcı Ö14'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.74'te verilmiştir.



Şekil 4.74 Ö14'ün koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin verilen iki nokta arasında bağlantı kurarak oluşturduğu zihinde canlandırma temsili

Şekil 4.74 incelendiğinde, öğrencinin bu soruda verilen bilgileri kullanarak iki nokta arasındaki bağlantıyı kurması ve noktaların koordinat sistemindeki yerlerini tespit etmesi, zihinde canlandırma yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö18'in bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.75'te verilmiştir.



Şekil 4.75 Ö18'in koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu özelleştirme temsili

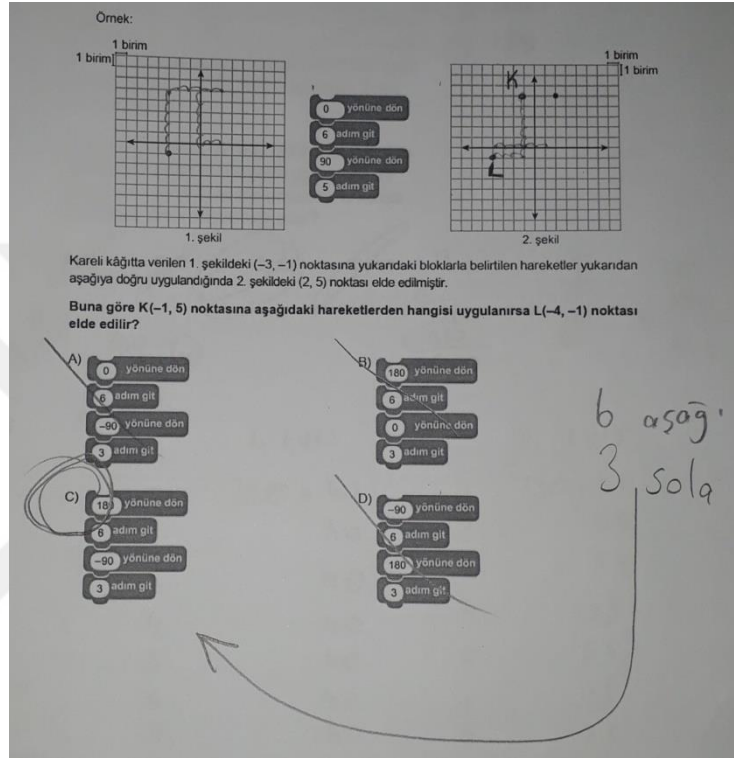
Bu probleme ilişkin Ö18 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö18: Ben burada bir yön pusulası çizdim. Soruyu çözerken kafamın karışmaması için yönleri yazdım. Sağ tarafın kodu 90, sol tarafın kodu -90, yukarının kodu 0 ve aşağıının kodu ise 180 olarak verilmiş. Soruda verilen örnekte kodlar verilmiş. Ben bu örneği inceledim. K noktasının kodu (-1,5) olarak verilmiş. Ben K noktasının yerini verilen koordinat sistemi üzerinde buldum. Daha sonra L noktasının kodu (-4,-1) olarak verilmiş. L noktasının yerini de verilen koordinat sistemi üzerinde buldum. Daha sonrasında L noktasını elde etmek için K noktasına uygulanması gereken hareketi yazdım. K noktasını 6 aşağı ve 3 sol şeklinde hareket ettirmeliyim. Kafam karışmasın diye yönergeleri çizmiştim. Aşağının kodu 180, sol tarafın kodu da -90'dı. Yani 180 yönüne dön 6 ilerle, -90 yönüne dön 3 ilerle şeklinde oluyor. Bu da C seçeneğinde verilmiş.

Ö18 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen koordinat sistemi üzerinde K ve L noktalarının yerlerini bulduğunu, L noktasının elde edilebilmesi için K noktasına uygulanması gereken hareketleri tespit ettiğini ve verilen sembollerle ilişkilendirerek sonuca ulaştığını belirtmesi sırasıyla zihinde canlandırma, dönüştürme, özelleştirme,

doğrulama ve ikna etme adımlarını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.76'da verilmiştir.



Şekil 4.76 Ö17'nin koordinat sisteminin özelliklerini içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu doğrulama ve ikna etme temsili

Şekil 4.76 incelendiğinde, öğrencinin hem verilen koordinatlar arasındaki ilişkiden yola çıkarak, hem de koordinat sistemi üzerine çizim yaparak uygulanması gereken hareketi bulması ve bulduğu sonucu soruda belirtilen programlama dilinden elde ettiği hareket kodu ile karşılaştırması, doğrulama ve ikna etme yaptığını gösterir.

4.15 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik İçeren Görsel Doğrulama ve İkna Etme Problemine İlişkin Görsel Akıl Yürütme

Öğrencilere yöneltilen görsel doğrulama ve ikna etme problemi kapsamında birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren on beşinci sorudan elde edilen bulgular

Çizelge 4.15'te sunulmuştur.

Çizelge 4.15 Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar	
		Orta Başarı	Yüksek Başarı
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	-	-
	Model	-	-
	Tablo	Ö17	-
Görselleştirme	Dönüştürme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö13	Ö6, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Zihinde Canlandırma	-	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	Ö12, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6
	Genelleme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Varsayımda Bulunma	Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18
	Doğrulama ve İkna Etme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17	Ö1, Ö2, Ö6, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö18

Çizelge 4.15 incelendiğinde; öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler görülmektedir. Katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö6, Ö12, Ö15 ve Ö17 seçeneklerde verilen ay sayılarını tabloda verilen ücretler ile eşleştirmişler, tüm seçenekleri ayrı ayrı deneyerek soruyu çözmüşlerdir. Bunların yanında katılımcı Ö12 eşitsizliği yazabilmiş, katılımcı Ö17 de yeni bir tablo çizmiştir. Bu katılımcılar verilen tablo görselini anlamlandırıp çıkarımlar yaparak varsayımda bulunma ve özelleştirme adımlarını, deneme yaparak da genelleme, doğrulama ve ikna etme adımlarını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Katılımcılardan Ö7 ve Ö10 da tüm seçenekleri tek tek deneyerek soruyu çözmeye çalışmışlar ancak hata yaptıkları için sonuca ulaşamamışlardır. Her iki katılımcı da verilen tablo görselini anlamlandırıp doğru bir çıkarım yaparak varsayımlarda bulunmalarına rağmen yaptıkları hatalar nedeniyle matematiksel düşünmeyi gerçekleştirememişlerdir. Katılımcılardan Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö11 ve Ö16 verilen tablo görselinden yaptıkları çıkarımlarla uygun bir eşitsizlik yazarak görsel varsayımda bulunma, dönüştürme ve genelleme adımlarını

gerçekleştirmişlerdir. Bu eşitsizliği çözerek sonuca ulaşan bu katılımcılar doğrulama ve ikna etme adımını da tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bunların yanında katılımcı Ö6 hem eşitsizliği çözerek hem de seçenekleri deneyerek sonuca ulaşmıştır. Diğer katılımcılardan Ö9, Ö13, Ö14 ve Ö18 kayıt ücretleri arasındaki farkı aylık ücretler arasındaki farka bölerek istenilen sonuca ulaşabilecekleri varsayımında bulunmuşlardır. Yaptıkları işlemlerin sonucuna göre çıkarımlarda bulunarak doğru cevaba ulaşan bu katılımcılar doğrulama ve ikna etme adımını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Katılımcı Ö8 hiçbir çizim ya da işlem yapmamış ancak doğru cevabı işaretlemiştir. Herhangi bir çizim veya işlem yapılmadığı için bu öğrencinin cevabını hangi adımları izleyerek nasıl bulduğu hakkında bir yorum yapılamamıştır.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren bu görsel doğrulama ve ikna etme probleminde görsel temsil bileşenindeki tablo göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde sadece 1 öğrencinin olduğu, görselleştirme bileşenindeki dönüştürme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 4 ve yüksek başarı düzeyinde 6 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki özelleştirme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 3 ve yüksek başarı düzeyinde 3 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki genelleme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki varsayımında bulunma göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 8 ve yüksek başarı düzeyinde 9 öğrencinin olduğu, matematiksel düşünme bileşenindeki doğrulama ve ikna etme göstergesini gerçekleştiren orta başarı düzeyinde 7 ve yüksek başarı düzeyinde 8 öğrencinin olduğu görülmüştür. Katılımcıların bu probleme ilişkin gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre görsel temsil-tablo göstergesinde orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, görselleştirme-dönüştürme göstergesinde, matematiksel düşünme-genelleme/varsayımında bulunma/doğrulama ve ikna etme göstergelerinde yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu, matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde ise orta ve yüksek başarı düzeyinde eşit sayıda öğrencinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu ($f=15$) doğrulama ve ikna etme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir.

Katılımcıların bu probleme yönelik oluşturdukları görsel akıl yürütme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir. Katılımcı Ö17'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.77'de görülebilir.

	1. kurs		2. kurs
1.	340 + 40	1	130 + 55
2.	40	2	55
3.	40	3	55
4.	40	4	55
5.	40	5	55
6.	40	6	55
7.	40	7	55
8.	40	8	55
9.	40	9	55

Şekil 4.77 Ö17'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu tablo temsili

Şekil 4.77 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilenlerden yola çıkarak bulduğu sonuçları tablolastırıp bir düzen içerisine koyması, tablo temsilini kullandığını gösterir.

Katılımcı Ö4'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.78'de verilmiştir.

15.) İki farklı yüzme kursuna ait ücretler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Kursların Ücretleri

Kurslar	Kayıt Ücreti (TL)	Aylık Ücret (TL)
1. Kurs	310	40 ₺
2. Kurs	130	55 ₺

Yüzme kursuna katılan bir kişi bir defalık kayıt ücreti ve devam ettiği her ay için aylık ücret ödemektedir.

Tabloda ücretleri verilen kurslardan birine katılmak isteyen bir kişinin en az kaç ay kursa devam etmesi durumunda 1. kursa katılması daha ekonomik olur?

A) 8 B) 9 C) 13 D) 14

Handwritten calculations:

$$180 \div 15 = 12$$

$$24 \div 310 = 120$$

$$310 + 40x < 130 + 55x$$

$$180x < 12x$$

$$x \geq 13$$

Şekil 4.78 Ö4'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin çıkarımla oluşturduğu dönüştürme temsili

Şekil 4.78 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen tablo görselini yorumlayarak elde ettiği çıkarımlarla uygun bir eşitsizlik yazmaya çalışması, dönüştürme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö2'nin bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.79'da verilmiştir.

15.) İki farklı yüzme kursuna ait ücretler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Kursların Ücretleri

Kurslar	Kayıt Ücreti (TL)	Aylık Ücret (TL)
1. Kurs	310	40
2. Kurs	130	55

Yüzme kursuna katılan bir kişi bir defalık kayıt ücreti ve devam ettiği her ay için aylık ücret ödemektedir.

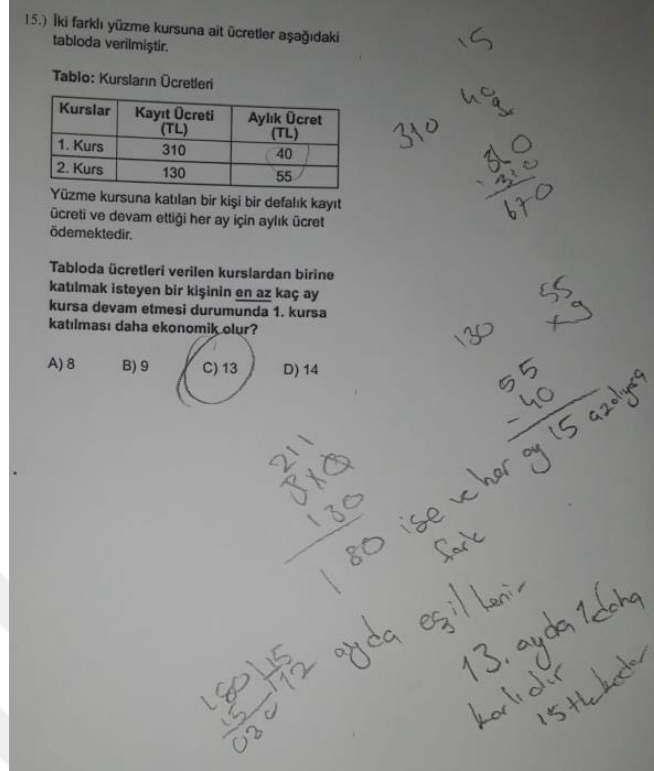
Tabloda ücretleri verilen kurslardan birine katılmak isteyen bir kişinin en az kaç ay kursa devam etmesi durumunda 1. kursa katılması daha ekonomik olur?

A) 8 B) 9 **C) 13** D) 14

Şekil 4.79 Ö2'nin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin çıkarımla oluşturduğu özelleştirme temsili

Şekil 4.79 incelendiğinde, öğrencinin kursa gidilen ay sayısına farklı değerler verebilmek için tüm seçenekleri ayrı ayrı denemesi ve seçeneklerde verilen ay sayıları ile tabloda verilen kayıt ücreti ve aylık ücret değerlerini eşleştirip istenilen cevaba ulaşmaya çalışması, özelleştirme yaptığını gösterir.

Katılımcı Ö13'ün bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.80'de verilmiştir.



Şekil 4.80 Ö13'ün birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu genelleme temsili

Bu probleme ilişkin Ö13 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö13: Bu soruda bizden aylık ücreti daha fazla olmasına rağmen birinci kursun daha karlı olduğu bir anlaşma istiyorlar. Bunun kaç ayda mümkün olabileceğini soruyorlar. Bizden ilk kurs kayıt ücreti olarak 310 TL alıyor. Öteki de 130 TL kayıt ücreti alıyor. Ben kayıt ücretlerini birbirinden çıkardım ki ne kadar fark olabileceğini bulayım. Fark 180 TL çıktı. Aylık ödediğimiz ücretlerde ise ikinci kursta ayda 15 TL fazla ödediğimiz için 180'i 15'e böldüm ve 12 buldum. 12 ay sonunda her iki kurs seçiminde de ödeyecekleri ücret eşit olacağı için ben de 13 olursa birinci kursun daha ekonomik olacağını düşünüp C seçeneğini işaretledim.

A: Bu sorunun çözümünde farklı bir yöntem tercih etmek ister miydin?

Ö13: Tek tek (ay ay) denemeyi de tercih edebilirdim ama bunun uzun süreceğini düşündüm.

Ö13 ile yapılan görüşmede öğrencinin kayıt ücretleri arasındaki farkı aylık ücretler arasındaki farka bölerek istenilen sonuca ulaşabileceğini belirtmesi varsayımında

bulunduğunu gösterir. Katılımcının yaptığı işlemlerin sonucuna göre çıkarımlarda bulunarak doğru cevaba ulaşması da doğrulama ve ikna etme adımını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir. Katılımcının ayrıca ay ay deneyerek de soruyu çözebileceğini belirtmesi aynı soru için birden fazla görsel akıl yürütme yapabildiğini gösterir.

Katılımcı Ö9'un bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.81'de verilmiştir.

15.) İki farklı yüzme kursuna ait ücretler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Kursların Ücretleri

Kurslar	Kayıt Ücreti (TL)	Aylık Ücret (TL)
1. Kurs	310	40
2. Kurs	130	55

Yüzme kursuna katılan bir kişi bir defalık kayıt ücreti ve devam ettiği her ay için aylık ücret ödemektedir.

Tabloda ücretleri verilen kurslardan birine katılmak isteyen bir kişinin en az kaç ay kursa devam etmesi durumunda 1. kursa katılması daha ekonomik olur?

A) 8 B) 9 C) 13 D) 14

Handwritten calculations and notes:

- Top left: $310 - 130 = 180$
- Bottom left: $180 / 15 = 12$
- Bottom right: $10 + 1 = 11$
- Bottom center: $10 + 1 = 11$
- Bottom right: $10 + 1 = 11$

Şekil 4.81 Ö9'un birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu varsayımda bulunma temsili

Şekil 4.81 incelendiğinde, öğrencinin soruda verilen tablo görselindeki verilerden yola çıkarak kayıt ücretleri arasındaki farkı aylık ücretler arasındaki farka bölerek istenilen sonuca ulaşabileceğini göstermesi, varsayımda bulunma göstergesini gerçekleştirdiğini gösterir.

Katılımcı Ö6'nın bu probleme yönelik oluşturduğu görsel akıl yürütme Şekil 4.82'de verilmiştir.

15.) İki farklı yüzme kursuna ait ücretler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Kursların Ücretleri

Kurslar	Kayıt Ücreti (TL)	Aylık Ücret (TL)
1. Kurs	310	40
2. Kurs	130	55

Yüzme kursuna katılan bir kişi bir defalık kayıt ücreti ve devam ettiği her ay için aylık ücret ödemektedir.

Tabloda ücretleri verilen kurslardan birine katılmak isteyen bir kişinin en az kaç ay kursa devam etmesi durumunda 1. kursa katılması daha ekonomik olur?

A) 8 B) 9 **C) 13** D) 14

$$310 + 40x < 130 + 55x$$

$$180 < 15x$$

$$12 < x$$

Handwritten calculations showing the solution:

$$\begin{array}{r} 310 \\ -130 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ 15 \overline{) 180} \\ \underline{150} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ + 75 \\ \hline 205 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 205 \\ 15 \overline{) 205} \\ \underline{150} \\ 55 \\ \underline{55} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 205 \\ 15 \overline{) 205} \\ \underline{150} \\ 55 \\ \underline{55} \\ 0 \end{array}$$

Şekil 4.82 Ö6'nın birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren görsel doğrulama ve ikna etme problemine ilişkin oluşturduğu doğrulama ve ikna etme temsili

Bu probleme ilişkin Ö6 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Ö6: Burada şimdi iki tane farklı yüzme kursu varmış. Birisinin kayıt ücreti 310 TL ama aylık ücreti 40 TL, diğerinin kayıt ücreti 130 TL ama aylık ücreti 55 TL olarak verilmiş. Bir kişi en az kaç ay boyunca kursa devam ederse birinci kursa katılması daha ekonomik olur diye sormuş. Ben burada eşitsizlik yazdım. $310 + 40x < 130 + 55x$ yazdım. Çünkü birinci kursun toplam ücreti daha ucuz olursa daha ekonomik olur. Eşitsizliği çözdüğümde de $12 < x$ buldum. Yani 12, x'ten küçükse ve en az kaç ay kursa devam ederse daha ekonomik olur dediği için cevabı 13 buldum.

Ö6 ile yapılan görüşmede öğrencinin verilen tablo görselinden yaptığı çıkarımlarla uygun bir eşitsizlik yazdığını belirtmesi görsel varsayımda bulunduğunu ve dönüştürme yaptığını gösterir. Katılımcının bu eşitsizliği çözüp uygun bir çıkarımda bulunarak sonuca ulaşması doğrulama ve ikna etme adımını tamamlayıp matematiksel düşünmeyi gerçekleştirdiğini gösterir.

5. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin LGS’de sorulan cebir sorularına ilişkin görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Buna yönelik ortaokul 8. Sınıf düzeyinde öğrenim gören 18 öğrenciye Cebir Testi uygulanmış ve bu öğrencilerden görsel akıl yürütme düzeyi iyi olan 6 öğrenciyle yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Araştırmada orta ve yüksek olmak üzere her bir başarı düzeyine göre gerçekleştirilen görsel akıl yürütme süreçleri karşılaştırılmaya çalışılmıştır. Bu bölümde bulgulardan elde edilen sonuçlar, alanyazın doğrultusunda yapılan tartışma ve öneriler yer almaktadır.

5.1 Tartışma ve Sonuç

Araştırmada uygulanan Cebir Testine ilişkin öğrencilerin çözümlerinde farklı görsel temsilleri kullandıkları görülmüştür. En çok tercih edilen görsel temsil türü ise çizim temsili olmuştur. Öğrencilerin eğitim öğretim hayatlarının başlangıcından bu yana matematik derslerinde çizim çalışmalarını sıklıkla yapmalarından dolayı bu durumun ortaya çıktığı söylenebilir. Öğrencilerle yapılan görüşmelerde çizim temsili kullanmalarının kendilerine büyük katkı sağladığını, soruları daha iyi anlamalarına yardımcı olduğunu ve yeni çıkarımlara ulaşırken kolaylık sağladığını ifade ettikleri görülmüştür. Araştırmada uygulanan Cebir Testine ilişkin sorularda çizim temsilini kullanan öğrencilerin çoğunun soruları çözerken başarılı oldukları ve gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütme süreçlerinin ardından matematiksel düşünmeye ulaştıkları tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin başarı seviyelerine göre çizim temsili oluşturma adımının gerçekleştirilmesinde büyük bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Csikos vd. (2012) tarafından yapılan araştırmada, matematik problemlerinin çözümünde çizim temsilini kullanan öğrencilerin başarısının daha fazla olduğu ve müdahale eğitimi yapılarak çizim yapmanın öneminin öğrencilere kavratılabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Şan (2008) yaptığı araştırmada, matematik dersinde görselleştirmeyi kullanmanın okullarda mevcut uygulanmakta olan öğretim yöntemine göre başarıyı artırması bakımından daha etkili bir yöntem olduğunu tespit ederek benzer bir sonuca ulaşmıştır. Benzer şekilde Uysal-Koğ ve Başer (2012) tarafından yapılan araştırmada da görselleştirme yöntemi

kullanılarak yapılan matematik öğretiminin öğrencilerin matematik dersine ilişkin tutumlarında ve matematik başarılarında mevcut yöntemlerden daha etkili olduğu tespit edilmiştir. Soruların çözümünde çizim yapmanın çok önemli olduğu düşünülmekte olup yanlış yapılan çizimlerin ise öğrencileri yanlış yönlendirebileceği unutulmamalıdır. Delice ve Sevimli (2010), içerisinde görsel temsil bulunduran ya da görsel temsilin kullanılabileceği problemlerde şekillerin üzerine yapılan çizimlerin istenilen çözümü yansıtmadığı veya yanlış kullanıldığı durumlarda öğrencilerin çözüme ulaşamadıklarını gözlemlemişlerdir.

Araştırma sonucunda öğrencilerin çok azının verileri düzenlemeye yarayan tablo temsilini de kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Verileri sıralamak ve genelleme yapmak için tablo temsilinin kullanılmasının öğrenciler adına kullanışlı ve faydalı olduğu söylenebilir. Örneğin; bazı öğrenciler soruda verilen atış mesafelerini büyükten küçüğe doğru sıralamak için tablo temsilini kullanmış ve buradan elde ettiği çıkarım ile ikinci olacak öğrencinin atış mesafesinin alabileceği değerleri gösteren eşitsizliğe ulaşmıştır. Diğer bazı öğrenciler ise doğrusal ilişki içeren bir soruda verilen grafiği yorumlayıp elde ettiği değerleri tablo temsiline aktarmış ve genelleme yapmaya çalışmıştır. Posamentier ve Krulik (2016) tablonun verilerin takibi ve bir sonraki adımdaki değerin nasıl bulunacağını kararlaştırmak için etkili bir araç olduğuna dikkat çekmektedir.

Araştırma sonucunda resim ve model temsillerinin ise hiçbir öğrenci tarafından tercih edilmediği sonucuna ulaşılmıştır. Bunun sebebi verilen soruların tamamında görsel temsilin bulunması olabilir. Ayrıca resim temsilinin şematik temsillere göre görselleştirmeye etkisinin daha az olduğu, resim temsilinde ayrıntıya çok fazla inilemediği de söylenebilir. Benzer şekilde Delibaş (2020) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin sadece şematik görseller kullanmayı tercih ettikleri tespit edilmiştir. Resim temsillerine göre şematik temsillerin kullanılmasının problem çözme sürecinde daha olumlu bir etkiye sahip olduğu yapılan araştırmaların sonuçlarında görülmektedir (Booth ve Thomas 1999, Hegarty ve Kozhevnikov 1999, Van Garderen ve Montague 2003, Boonen vd. 2014, Özsoy 2018, Ergan ve Özsoy 2021, Çilingir-Altınar ve Önal 2022, Geçici 2022). Bununla birlikte Özkan vd. (2018) tarafından

yapılan araştırmada, altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler konusuna ilişkin yaptıkları çalışmalarda görsel model kullanırken zorlandıkları ve sadece kuralları kullanarak hesaplama yaptıkları tespit edilmiştir. Öğretilmesi hedeflenen bilgilerin somutlaştırılarak öğrencilerin zihinlerinde kalıcı olarak kalabilmesini sağlayabilmek için gerçek malzemelerden elde edilen görsel materyallerin kullanılmasının gerektiği (Kükey vd. 2019) dikkate alındığında soruları çözerken gerçek materyallere ulaşmanın güç olması nedeniyle katılımcıların model temsilini kullanmadığı söylenebilir.

Bu araştırma sonucunda bazı öğrencilerin cebirsel ifadeler kullanıp denklem yazarak soruyu çözmek yerine seçeneklerden gitmeyi tercih ettikleri görülmüştür. Ancak dönüştürme ve zihinde canlandırma yapabilen öğrenciler çıkarımlar yaparak genellemelere ulaşmış, yazdıkları denklemleri çözerek matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Benzer şekilde Geçici (2022) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin genelleme ve doğrulama yapmakta zorluk çektikleri tespit edilmiştir. Genelleme yapma sürecinde kavramların belirlenmesinde ve belirlenen kavramların birbirleriyle olan ilişkisinin gösterilmesinde görselleştirmenin rolü oldukça önemlidir (Yılmaz ve Argün 2013).

Araştırma sonuçlarından bir diğeri ise farklı görsel temsilleri kullanabilen öğrencilerin soruları çözerken matematiksel düşünmeyi gerçekleştirebilmek için gerekli olan adımları kolaylıkla tamamlayabildikleri belirlenmiştir. Soruları çözerken farklı görsel temsillerin birlikte kullanılmasının soruyu düzenli bir şekilde çözmeyi ve adım adım ilerlemeyi sağladığı için matematiksel düşünme açısından kritik bir öneminin olduğu görülmüştür. Örneğin bazı öğrenciler soruda verilen grafiklerden çıkarım yaparak doğrusal ilişki içeren bir ifade yazmışlar, genellemeye ulaşabilmek için tablo temsilinden yardım alarak görselleştirme yapmışlar ve gerekli olan tüm adımları yerine getirerek matematiksel düşünmeyi yerine getirmişlerdir. Problem çözme sürecinde görsel temsillerin kullanılmasının önemli olduğu yapılan araştırmalarda ortaya çıkarılmıştır (George 1997, Stylianou ve Silver 2004, Ahmad vd. 2010, Zahner ve Corter 2010, Barbosa 2013, Boonen vd. 2014, Teahen 2015, Delibaş 2020, Geçici 2022) da görsel temsillerin problem çözme sürecindeki önemi vurgulanmıştır. Benzer şekilde Geçici (2022) tarafından yapılan araştırmada, problem çözme sürecinde farklı görsel

temsilleri birlikte kullanabilen öğrencilerin matematiksel düşünme göstergelerini kolaylıkla gerçekleştirebildikleri tespit edilmiştir. Bu araştırmada yapılan uygulama ve görüşmelerin sonucunda öğrencilerin farklı görsel temsilleri kullandıkları görülmüştür. En çok tercih edilen görsel temsil türü ise çizim temsili olmuştur. Bundan dolayı farklı görsel temsilleri birlikte kullanarak görselleştirmeyi gerçekleştirmek matematiksel düşünmeye ulaşmak için önemli bir yardımcıdır.

Bu araştırmada araştırmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu (birinci soruda $f=16$, ikinci soruda $f=17$, üçüncü soruda $f=12$, dokuzuncu soruda $f=16$ ve on üçüncü soruda $f=15$) özelleştirme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bununla birlikte bu araştırmada katılımcıların gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre matematiksel düşünme-özelleştirme göstergesinde 4 soruda yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu, 1 soruda ise orta ve yüksek başarı düzeyinde eşit sayıda öğrencinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Geçici (2022) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin özelleştirme göstergesini gerçekleştirenler de genelleme yapmakta sıkıntı yaşadıkları tespit edilmiştir.

Bu araştırmada araştırmaya katılan öğrencilerin yarıdan fazlası (dördüncü soruda $f=15$, beşinci soruda $f=15$ ve sekizinci soruda $f=10$) genelleme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bununla birlikte bu araştırmada katılımcıların gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre matematiksel düşünme-genelleme göstergesinde 2 soruda yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu, 1 soruda ise orta ve yüksek başarı düzeyinde eşit sayıda öğrencinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Benzer şekilde Yeşildere-İmre vd. (2017) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin örüntü problemlerinde genel kuralı cebirsel olarak yazmakta zorlandıkları tespit edilmiştir.

Bu araştırmada araştırmaya katılan öğrencilerin yarısına yakını (altıncı soruda $f=10$, yedinci soruda $f=16$, onuncu soruda $f=12$ ve on ikinci soruda $f=6$) varsayımda bulunma adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bununla birlikte bu araştırmada katılımcıların gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde;

başarı seviyelerine göre matematiksel düşünme-varsayımda bulunma göstergesinde 4 soruda da yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Geçici (2022) tarafından yapılan araştırmada varsayımda bulunmanın problemlerde genellemeye ulaşmak için kritik bir yeri ve önemi olduğundan problem çözme süreci açısından önemli olduğu tespit edilmiştir.

Bu araştırmada araştırmaya katılan öğrencilerin yarısından fazlası (on birinci soruda $f=5$, on dördüncü soruda $f=14$ ve on beşinci soruda $f=15$) doğrulama ve ikna etme adımını yerine getirip matematiksel düşünmeyi gerçekleştirmişlerdir. Bununla birlikte bu araştırmada katılımcıların gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütmeler incelendiğinde; başarı seviyelerine göre matematiksel düşünme-doğrulama ve ikna etme göstergesinde 1 soruda orta başarı düzeyindeki öğrencilerin, 2 soruda ise yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Benzer şekilde Ergan ve Özsoy (2021) tarafından yapılan araştırmada, akademik başarı seviyesi yüksek olan öğrencilerin diğer öğrencilere göre problem temsili için oluşturulması gereken yapıyı daha kolay inşa ettikleri görülmüştür. Bununla birlikte Geçici (2022) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin genellemeye ulaşmakta ve doğrulama ve ikna etme bileşenini yerine getirmekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Bu nedenlerden dolayı derslerde geometri konularının yanında cebir konularında da görsellerin kullanıldığı problem tiplerine daha çok yer verilmeli ve derslerde görseller kullanılarak görselleştirme desteklenmelidir.

Matematiksel düşünmeyi gerçekleştirebilmek için temsiller arası geçiş yapabilmenin de önemli bir yeri vardır. Bu araştırmada görsel temsiller arası geçiş yapabilen öğrencilerin daha başarılı oldukları görülmüştür. Aynı zamanda içsel temsil ve dışsal temsiller arasında geçiş yapabilen öğrencilerin de matematiksel düşünmeye daha rahat ulaşabildikleri bu araştırmada belirlenmiştir. Bunlarla birlikte verilen görsellerden hareketle kendi görselini çizen öğrencilerin de görsel akıl yürütme adımlarını gerçekleştirirken zorlanmadıkları görülmüştür. Örneğin zihinde canlandırma yapan bazı öğrenciler sorularda verilen görseller üzerine çizimler yaparak görsel temsillerden yardım almışlar ve matematiksel düşünmeye ulaşmışlardır. Aynı şekilde varsayımda bulunan bazı öğrenciler yaptıkları çizimlerle temsiller arası geçiş yaparak

görselleştirmeyi gerçekleştirmişlerdir. Alcock ve Simpson (2004), cebirsel ve görsel temsiller bir uyum içerisinde bütünleştirilmedikçe görsel imajların ortaya çıkamayacağını belirtmişlerdir. Geçici (2022) tarafından yapılan araştırmada, temsiller arası geçiş yapamayan öğrencilerin daha başarısız oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Öğrenciler araştırmada uygulanan cebir testindeki tüm sorularda görsel temsil bulunmasının kendilerine kolaylık sağladığını yapılan görüşmelerde belirtmişlerdir. Bu durum öğrencilerin soruları somut bir şekilde görebilmelerini sağlaması, görsel çizmek için fazladan vakit harcamadıklarını düşünmeleridir. Delice ve Sevimli (2010) tarafından yapılan araştırmada, görsel temsil kullanılarak sorulan sorularda öğrencilerin çözüme daha kolay ulaştıkları tespit edilmiştir.

Matematiksel düşünmeye ulaşma sürecinde görsel akıl yürütmenin gerçekleştirilebilmesi için görsel temsillerle birlikte görselleştirmenin de yapılması gerektiği düşünülmektedir. Benzer şekilde Delibaş (2020) tarafından yapılan araştırmada, görselleştirme ve görsel temsile dayalı problem çözme etkinlikleriyle yapılan öğretimin, öğrencilerinin problem çözme başarılarına istatistiksel olarak anlamlı etkisi olduğu tespit edilmiştir. Görselleştirmenin en önemli özelliği görünmeyi görünür yapmaktır (Arcavi 2003).

5.2 Öneriler

Bu araştırmada elde edilen bulgular ve sonuçlar ışığında araştırmacılara ve uygulamacılara yönelik yararlı olabileceği düşünülen öneriler aşağıda sunulmuştur:

5.2.1 Uygulamacılara Yönelik Öneriler

1. Bu araştırmada görsel temsillerle birlikte sunulan sorularda çizim temsilini kullanarak görsel akıl yürütmeleri gerçekleştirebilen öğrencilerin çoğunun soruları çözerken başarılı oldukları görülmüştür. Bundan dolayı öğretmenlerin derslerde cebirsel ifadelerle ilgili görsel içeren sorulara daha çok yer vermeleri ve öğrencilerden görsel temsilleri kullanarak görsel akıl yürütmeler yapmalarını

istemeleri önerilmektedir. Böylece öğrenciler görsel temsilleri daha etkin bir şekilde kullanıp görsel akıl yürütmeleri daha rahat yerine getirebilirler. Ayrıca görsel temsilleri daha çok kullanacakları için temsil oluştururken hata yapma olasılıkları da azalabilir.

2. Bu araştırmada soruları çözerken farklı görsel temsillerin birlikte kullanılmasının matematiksel düşünme bakımından kritik bir yerinin ve öneminin olduğu görülmüştür. Bu sebeple öğretmenlerin derslerde farklı görsel temsillerin birlikte kullanılabileceği örneklerle daha çok yer vermeleri önerilmektedir. Böylece öğrenciler farklı görsel temsillerin birlikte nasıl kullanılacağını daha iyi anlayıp görsel akıl yürütme süreçlerini daha rahat gerçekleştirebilirler.
3. Bu araştırmada başarı seviyesi yüksek olan öğrencilerin diğer öğrencilere göre matematiksel düşünmeye geçiş bileşenleri olan özelleştirme, varsayımda bulunma, doğrulama ve genelleme yapma adımlarında daha başarılı oldukları görülmüştür. Bu nedenle öğretmenlerin derslerde matematiksel düşünmeye geçiş bileşenlerinin kullanım şekillerini içeren soru çözümlerinin üzerinde sıklıkla durmaları önerilmektedir. Böylece öğrencilerin görsel akıl yürütme becerileri artırılabilir.
4. MEB 2024 Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli öğretim programı doğrultusunda hazırlanacak olan yeni ders kitaplarında ve etkileşimli kaynaklarda görsel temsillerin kullanılıp görsel akıl yürütmelerin gerçekleştirilebileceği cebirsel problemlere daha çok yer verilmesi önerilmektedir. Böylece öğrencilerin cebirsel problemlerde gerçekleştirdikleri görsel akıl yürütme süreçleri sonucunda başarıya ulaşma oranları da artırılabilir.

5.2.2 Araştırmacılara Yönelik Öneriler

1. Bu araştırmada 8. sınıf öğrencilerinin LGS’de sorulan cebir sorularına ilişkin görsel akıl yürütme becerileri incelenmiştir. Araştırmacılar farklı sınıf seviyelerinde öğrenim gören öğrencilerin cebir sorularına ilişkin görsel akıl yürütme becerilerini inceleyebilecekleri araştırmalar yapabilirler.
2. Ders kitaplarında ve etkileşimli kaynaklarda cebir kazanımlarına ilişkin görsel

temsillerin kullanılarak görsel akıl yürütmelerin gerçekleştirilebileceği örneklere ve etkinliklere ne kadar yer verildiğini inceleyebilirler.

3. Bu araştırmanın bir benzeri cebirsel ifadeler konusu yerine farklı konular seçilerek yapılabilir. Ayrıca daha fazla ya da daha az öğrenci ile aynı araştırmanın bir benzeri yapılabilir. Elde edilecek sonuçlar bu araştırmanın sonuçlarıyla karşılaştırılabilir.



6. KAYNAKLAR

- Abd Hamid H, 2017, Visual Reasoning in Solving Mathematical Problems on Functions and Their Derivatives Among Malaysian Pre-University Students, University of Malaya, Doctoral Dissertation, 270p, Kuala Lumpur.
- Ahmad A, Tarmizi R A, Nawawi M, 2010, Visual Representations in Mathematical Word Problem Solving Among Form Four Students in Malacca, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 356-361.
- Akkan Y, Akkan P, Öztürk M, Demir Ü, 2018, Görsel Teoremler Üzerine Matematik Öğretmenleriyle Nitel Bir Çalışma, *Journal of Instructional Technologies & Teacher Education*, 7(2), 56-74.
- Alcock L, Simpson A, 2004, Convergence of Sequences and Series: Interactions Between Visual Reasoning and The Learner's Beliefs about Their Own Role, *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1-32.
- Alshwaikh J, 2007, Mathematical Visual Forms and Learning Geometry: Towards a Systemic Functional Analysis, *Proceedings of the Conference of the British Society of Research Into the Learning of Mathematics*, Sheffield Hallam University, 27(2), 1-6.
- Anderson M, McCartney R, 1997, Learning from Diagrams, *International Journal of Machine Graphics & Vision*, 6(1), 57-76.
- Arcavi A, 1994, "Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics", *For the Learning of Mathematics* 14(3), FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada Pp, 24 – 35.
- Arcavi A, 2003, The Role of Visual Representations in The Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Arcavi A, 2015, Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education, *La Matematica Nella Società e Nella Cultura-Rivista della Unione Matematica Italiana*, 8(3), 143-160.

- Artz A F, Yaloz-Femia S, 1999, Mathematical Reasoning During Small-Group Problem Solving, In L V Stiff, F R Curcio (Ed.), Developing mathematical reasoning in grades K-12 (115-127), National Council of Teachers of Mathematics, 298, Reston VA.
- Atasay Sunay M, 2024, Erken Cebir Öğreniminde Görsel Düşünmeye Dayalı Problem Çözme Yönteminin Kullanımı, Anadolu Üniversitesi, Doktora Tezi, 206s, Eskişehir.
- Atkinson, Rita L, Richard C Atkinson, Edward E Smith, Daryl J Bem, Susan Nolen-Hoeksema, 1999, Psikolojiye Giriş, Çev.: Y Alogan, Arkadaş Yayınevi, 800s, İstanbul.
- Ball D, Bass H, 2003, Making Mathematics Reasonable in School, In J Kilpatrick, G Martin, D Schifter (Ed.), A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics (27-44), National Council of Teachers of Mathematics, 413p, Reston VA.
- Barbosa A, 2013, Mathematical Reasoning: The Impact of Visual Patterns, In B D Paola (Ed.), International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education CIEAEM 65 (343-351), CIEAEM, 643p, Turin Italy.
- Bardelle C, 2010, Visual Proofs: An Experiment, In V Durand-Guerrier, S Soury-Lavergne, F Arzarello (Ed.), Proceedings of CERME 6 (251-260), Institut National De Recherche Pédagogique, 2893p, Lyon France.
- Beckmann S, 2004, Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: A Method Demonstrated in Grade 4-6 Texts Used in Singapore, Mathematics Educator, 14(1), 42-46.
- Bergqvist T, Lithner J, 2012, Mathematical Reasoning in Teachers' Presentations, The Journal of Mathematical Behavior, 31(2), 252-269.
- Bogdan R C, Biklen S K, 2007, Qualitative Research for Education: An Introduction to Theories and Methods, Pearson, 320p, London.
- Boonen A J, van Wesel F, Jolles J, van der Schoot M, 2014, The Role of Visual Representation Type, Spatial Ability, and Reading Comprehension in Word

- Problemsolving: An Item-Level Analysis in Elementary School Children, *International Journal of Educational Research*, 68, 15-26.
- Booth R D, Thomas M O 1999, Visualization in Mathematics Learning: Arithmetic Problem-Solving and Student Difficulties, *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169-190.
- Borba M C, Villarreal M E 2005, *Humans-with-Media and The Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*, Springer, 239p, New York.
- Borwein P, Jorgenson L, 2001, Visible Structures in Number Theory, *The American Mathematical Monthly*, 108(10), 897-1006.
- Burton L, 1984, Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49.
- Büyüköztürk Ş, Kılıç-Çakmak E, Akgün Ö E, Karadeniz Ş, Demirel F, 2013, *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (14. baskı), Pegem Akademi, 290s, Ankara.
- Conner A, Singletary L M, Smith R C, Wagner P A, Francisco R T, 2014, Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation, *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 181-200.
- Corter J E, Zahner D C, 2007, Use of External Visual Representations in Probability Problem Solving, *Statistics Education Research Journal*, 6(1), 22-50.
- Cox R, Brna P, 1995, Supporting the Use of External Representations in Problem Solving: The Need for Flexible Learning Environments, *Journal of Artificial Intelligence in Education* 6(2-3), 239–302.
- Csíkós C, Sztányi J, Kelemen R, 2012, The Effects of Using Drawings in Developing Young Children's Mathematical Word Problem Solving: A Design Experiment with Third-Grade Hungarian Students, *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 47-65.
- Çelik D, 2016, *Matematiksel Düşünme İçinde*, E Bingölbalı, S Arslan ve I O Zembat (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (17-42), Pegem Akademi, 1016s, Ankara.
- Çepni S, 2014, *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş* (7.baskı), Celepler Matbaacılık,

415s, Trabzon.

Çepni S, 2019, PISA ve TIMSS Mantiğını ve Sorularını Anlama, Pegem A Yayıncılık, 448s, Ankara.

Çilingir-Altın E, Önal H, 2022, İlkokul Öğrencilerinin Sözel Problem Çözerken Kullandıkları Görsel ve Görsel Olmayan Temsillerin İncelenmesi, Yaşadıkça Eğitim, 36(1), 16-34.

Çolak Z P, 2022, Matematik Öğretmenlerinin Beceri Temelli Sorulara Yönelik Algılayışları, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 184s, İstanbul.

Delibaş M E, 2020, Problem Çözmede Görselleştirme ve Görsel Temsil Kullanma, Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi, 149s, Kastamonu.

Delice A, Sevimli E, 2010, Geometri Problemlerinin Çözüm Süreçlerinde Görselleme Becerilerinin İncelenmesi: Ek Çizimler, Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Dergisi, 31, 83-102.

Demircioğlu H, Arslantaş İlter E, 2022, Matematik Öğretmenlerinin Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Pisagor Teoremi Bağlamında İncelenmesi: Garfield'ın Görsel İspatı, Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 42(3), 1857-1878.

Diezmann C, English L, 2001, Promoting The Use of Diagrams as Tools for Thinking, In A Cuoco, F Curcio (Ed.), The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 YearBook (1–23), NCTM , 292p, Virginia.

Dongwi B L, 2018, Examining Mathematical Reasoning Through Enacted Visualisation, Rhodes University, Doctoral Dissertation, 209p, Grahamstown.

Dreyfus T, 2002, Advanced Mathematical Thinking Processes, In D Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, 25-41, New York.

Duval R, 2006, A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, Educational Studies in Mathematics, 61(1), 103–131.

Elliott S, Hudson B, O'Reilly D, 2000, Visualisation and The Influence of Technology

- in 'A' Level Mathematics: A Classroom Investigation, *Research in Mathematics Education*, 2(1), 151-168.
- Eraso M, 2007, Connecting Visual and Analytic Reasoning to Improve Students' Spatial Visualization Abilities: A Constructivist Approach, Florida International University, Unpublished Doctoral Dissertation, 175p, Florida.
- Ergan S N, 2018, İlkokul Öğrencilerinin Problem Çözme Sürecinde Oluşturduğu Görsel Temsillerin İncelenmesi, Ordu Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 124s, Ordu.
- Ergan S N, Özsoy G, 2021, İlkokul Dördüncü Sınıf Öğrencilerinin Problem Çözme Sürecinde Oluşturduğu Görsel Temsillerin İncelenmesi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 51, 57-75.
- Farmaki V, Paschos T, 2007, The Interaction Between Intuitive and Formal Mathematical Thinking: A Case Study, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 353-365.
- Fischbein E, 1987, *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel Publishing Company, 225p, Dordrecht.
- Fujita T, Kondo Y, Kumakura H, Kunimune S, Jones K, 2020, Spatial Reasoning Skills about 2D Representations of 3D Geometrical Shapes in Grades 4 to 9, *Mathematics Education Research Journal*, 32(2), 235-255.
- Gagatsis A, Elia E, 2004, The Effects of Different Modes of Representation on Mathematical Problem Solving, In M J Hoines, A B Fuglestad (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education Vol. 2*, (447–454), PME, 524p, Bergen.
- Geçici M E, 2022, Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, 308s, İzmir.
- Geçici M E, Türnüklü E, 2021, Visual Reasoning in Mathematics Education: A Conceptual Framework Proposal, *Acta Didactica Napocensia*, 14(1), 115-126.
- George E A, 1997, *Reasoning with Visual Representations: Student's Use of Diagrams*,

- Figures and Graphs in Solving Problems Advanced Placement Calculus Examination, University of Pittsburgh, Doctoral dissertation, 190p, Pittsburgh.
- Gilbert J K, 2008, Visualization: An Emergent Field of Practice and Enquiry in Science Education, Visualization: Theory and Practice in Science Education, Springer, 326p, Dordrecht.
- Gilbert J K, 2010, The Role of Visual Representations in The Learning and Teaching of Science: An Introduction, Asia-Pacific Forum on Science Learning & Teaching, 11(1), 1-19.
- Gilbert J K, C J Boulter, et al, 2000, Positioning Models in Science Education & In Design and Technology Education, Developing Models in Science Education, Kluwer, 327p, Dordrecht.
- Gilbert J K, C J Boulter, et al, 2000, Explanations with Models in Science Education, Developing Models in Science Education, Kluwer, 327p, Dordrecht.
- Goldin G A, 1998, Representational Systems, Learning and Problem Solving in Mathematics, Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165.
- Goldin G, Kaput J, 1996, A Joint Perspective on the Idea of Representation In Learning and Doing Mathematics, In L Steffe, P Nesher, P Cobb, G Goldin, B Greer (Ed.), Theories of Mathematical Learning (397-430), Lawrence Erlbaum Associates, 544p, New Jersey.
- Greeno J G, Hall R P, 1997, Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms, The Phi Delta Kappan, 78(5), 361-367.
- Gutiérrez A, 1996, Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework, In L Puig, A Gutierrez (Ed.), Proceedings of the 20th PME International Conference Vol. 1 (3-19), PME, 285p, Valencia Spain.
- Güler G, 2020, Akıl Yürütme ve İspat İlişkisi İçinde, I Uğurel (Ed.), Matematiksel İspat ve Öğretimi (89-112), Anı Yayıncılık, 448s, Ankara.
- Gülşen İ, 2012, Matematik Öğretmen Adaylarının Görsel Akıl Yürütme Durumlarının İncelenmesi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 192s, Ankara.

- Günaydın O, 2011, Geometri ve Cebir Problemleri Çözüm Süreçlerinin Görselleme ve Göstergebilim Bağlamında İncelenmesi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 167s, İstanbul.
- Hanna G, 2000, Proof, Explanation and Exploration: An Overview, Educational Studies in Mathematics, 44, 5-23.
- Hanna G, Sidoli N, 2007, Visualisation and Proof: A Brief Survey of Philosophical Perspectives, ZDM Mathematics Education, 39(1-2), 73-78.
- Harel G, Sowder L, 2005, Advanced Mathematical-Thinking at any Age: Its Nature and Its Development, Mathematical Thinking and Learning, 7(1), 27-50.
- Healy L, Hoyles C, 1999, Visual and Symbolic Reasoning in Mathematics: Making Connections with Computers?, Mathematical Thinking and Learning, 1(1), 59-84.
- Hegarty M, Kozhevnikov M, 1999, Types of Visual-Spatial Representations and Mathematical Problem Solving, Journal of Educational Psychology, 91(4), 684-689.
- Hershkowitz R, Arcavi A, Bruckheimer M, 2001, Reflections on the Status and Nature of Visual Reasoning—the Case of the Matches, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32(2), 255-265.
- Hoffmann M H G, 2007, Cognitive Conditions of Diagrammatic Reasoning, In J Queiroz, F Stjernfelt (Ed), Special Issue on Peircian Diagrammatical Logic (1-28), Georgia Institute of Technology School of Public Policy, Atlanta.
- Işık A, Konyalıoğlu A C, 2005, Matematik Eğitiminde Görselleştirme Yaklaşımı, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 11, 462-471.
- İlhan, Aslaner, 2018, İlhan A, Aslaner R, 2018, Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometrik Şekiller Üzerine Akıl Yürütme Becerilerinin Üniversite ve Sınıf Düzeyi Değişkenleri Açısından İncelenmesi, İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19(2), 82-97.

- İpek A S, 2003, Kompleks Sayılarla İlgili Kavramların Anlaşılmasında Görselleştirme Yaklaşımının Etkinliğinin İncelenmesi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 140s, Erzurum.
- Josef J, 2016, An Analysis of Visualization Processes Used By Selected Grade 11 and 12 Learners When Solving Algebraic Problems: A Namibian Case Study, Rhodes University, Mathematics Education, Master's Thesis, 225p, Makhanda.
- Karaman-Dundar R, Otten S, 2022, High School Students' Use of Diagrams in Geometry Proofs, International Journal of Science and Mathematics Education, 21, 737–759.
- Karpuz Y, Koparan T, Güven B, 2014, Geometride Öğrencilerin Şekil ve Kavram Bilgisi Kullanımı, Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 5(2), 108-118.
- Karrass M, 2012, Diagrammatic Reasoning Skills of Pre-Service Mathematics Teachers, Columbia University, Graduate School of Arts and Sciences, 181p, Doctoral Dissertation, New York.
- Keşan C, Kaya D, 2014, İlköğretim Seviyesindeki Öğrenciler İçin Cebirsel Düşünme ve Cebirsel Muhakeme Becerisinin Önemi, International Journal of New Trends in Arts, 3, 38–48.
- Konyalıoğlu A C, 2003, Üniversite Düzeyinde Vektör Uzayları Konusundaki Kavramların Anlaşılmasında Görselleştirme Yaklaşımının Etkinliğinin İncelenmesi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 151s, Erzurum.
- Körükçü E, 2008, Tam Sayılar Konusunun Görsel Materyal ile Öğreniminin 6. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarılarına Etkisi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 148s, İstanbul.
- Kükey E, Tutak A M, Tutak T, 2019, Kesirler Konusunun Görsel Materyal ile Öğretiminin İlkokul 4. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarı ve Tutumlarına Etkisinin İncelenmesi, Ulusal Eğitim Akademisi Dergisi (UEAD), 3(1), 115-125.
- Larkin J, Simon H, 1987, Why a Diagram is (Sometimes) Worth Ten Thousand Words,

Cognitive Science, 11, 65–100.

- Lesh R, 1999, The Development of Representational Abilities in Middle School Mathematics, *Development of Mental Representation: Theories and Application*, 323-350.
- Lesh R, Post T R, Behr M, 1987, Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving, In C Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (33-40), Lawrence Erlbaum Associates, 248p, Hillsdale.
- Liu P H, 2003, Do Teachers Need to Incorporate The History of Mathematics in Their Teaching?, *Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421.
- Lowrie T, Clements M A K, 2001, Visual and Nonvisual Processes in Grade 6 Students' Mathematical Problem Solving, *Journal of Research in Childhood Education*, 16(1), 77-93.
- Lowrie T, Kay R, 2001, Relationship Between Visual and Nonvisual Solution Methods and Difficulty in Elementary Mathematics, *The Journal of Educational Research*, 94(4), 248-255.
- Makina A, Wessels D, 2009, The Role of Visualisation in Data Handling in Grade 9 within a Problem-Centred Context, *Pythagoras*, 69, 56-68.
- Mancosu P, 2005, Visualization in Logic and Mathematics, In P Mancosu, K F Jørgensen, S A Pedersen (Ed.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics Synthese Library Vol. 327* (13-30), Springer, 475p, Dordrecht.
- Mason J, Burton L, Stacey K, 2010, *Thinking Mathematically* (2nd ed.), Pearson Education Limited, 248p, England.
- Merriam S B, 1998, *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*, Jossey-Bass Publishers, 285p, San Francisco.
- Merriam S B, 2009, *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation* (2nd ed.), Jossey-Bass, 296p, San Francisco.
- Miles M B, Huberman A M, 1994, *An Expanded Source Book: Qualitative Data Analysis* (2nd ed.), SAGE Publications, 338p, California.

- Milli Eğitim Bakanlığı, 2013, Ortaokul Matematik Dersi 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar Öğretim Programı, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı, 2018a, Matematik Dersi Öğretim Programı İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı, 2018b, 2023 Eğitim Vizyonu, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı, 2019, PISA 2018 Türkiye Ön Raporu, Eğitim Analiz ve Değerlendirme Raporları Serisi No:10, 98s.
- Milli Eğitim Bakanlığı, 2020, TIMSS 2019 Türkiye Ön Raporu, Eğitim Analiz ve Değerlendirme Raporları Serisi No:15, 84s.
- Milli Eğitim Bakanlığı, 2024, Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Öğretim Programları Ortak Metni, Ankara.
- Morgan C, 2001, Mathematics and Human Activity: Representation in Mathematical Writing, In C Morgan, K Jones, (Ed.), Research in Mathematics Education Volume 3: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics (169-182), British Society for Research into Learning Mathematics, 250p, London.
- National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000, Principles and Standard for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics.
- Natsheh I, Karsenty R, 2014, Exploring the Potential Role of Visual Reasoning Tasks Among Inexperienced Solvers, ZDM Mathematics Education, 46(1), 109-122.
- Nemirovsky R, Noble T, 1997, Mathematical Visualization and The Place Where We Live, Educational Studies in Mathematics, 33(2), 99-131.
- Noss R, Healy L, Hoyles C, 1997, The Construction of Mathematical Meanings: Connecting The Visual with The Symbolic, Educational Studies in Mathematics, 33(2), 203-233.
- Ott B, 2015, Qualitative Analyse grafischer Darstellungen zu Textaufgaben eine Untersuchung von Kinderzeichnungen in der Primarstufe, In G Kadunz (Ed.), Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik (163-182), Springer, 245p, Heidelberg.

- Özkan A, Arikan E E, Özkan E M, 2018, A Study on The Visualization Skills of 6th Grade Students, *Universal Journal of Educational Research*, 6(2), 354-359.
- Özmuş B, 2024, Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları Çerçevesinde Probleme Dayalı Cebir Öğretiminin Öğretmen Adaylarının Cebir Öğretim Bilgilerine Etkisi, Gaziantep Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 200s, Gaziantep.
- Özsoy G, 2018, Pre-service Teachers' Use of Visual Representations, *International Electronic Journal of Elementary Education*, 11(1), 49-54.
- Pantziara M, Gagatsis A, Elia I, 2009, Using Diagrams as Tools for The Solution of Nonroutine Mathematical Problems, *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 39-60.
- Patton M Q, 2002, *Qualitative Research and Evaluation Methods* (3th ed.), SAGE Publications, 788p, California.
- Pape S J, Tchoshanov M A, 2001, The Role of Representation (s) in96 Developing Mathematical Understanding, *Theory into Practice*, 40(2), 118-127.
- Pitta-Pantazi D, Christou C, 2009, Cognitive Styles, Dynamic Geometry and Measurement Performance, *Educational Studies in Mathematics*, 70, 5-26.
- Posamentier A S, Krulik S, 2016, *Matematikte Problem Çözme 3-6. Sınıflar İçin*, Çev.: L Akgün, T Kar ve M F Öçal, Pegem Akademi, 168s, Ankara.
- Presmeg N C, 1986, Visualisation and Mathematical Giftedness, *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311.
- Presmeg N C, 2006, Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics: Emergence from Psychology, In A Gutierrez, P Borero, (Ed.), *Handbook of Research on Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (205-235), Sense Publishers, 544p, Rotterdam.
- Presmeg N C, Balderas-Cañas P E, 2001, Visualization and Affect in Nonroutine Problem Solving, *Mathematical Thinking and Learning*, 3(4), 289-313.
- Pylyshyn Z W, 2003, *Seeing and Visualizing: It's Not What You Think*, MA: MIT Press, 563p, Cambridge.

- Ramírez-Uclés R, Ruiz-Hidalgo J F, 2022, Reasoning, Representing, and Generalizing in Geometric Proof Problems Among 8th Grade Talented Students, *Mathematics*, 10, 789. <https://doi.org/10.3390/math10050789>
- Rival I, 1987, Picture Puzzling: Mathematicians are Rediscovering the Power of Pictorial Reasoning, *The Sciences*, 27, 41-46.
- Russell R A, 1997, The Use of Visual Reasoning Strategies in Problem-Solving Activities By Preservice Secondary Mathematics Teachers, The University of Georgia, Graduate Faculty, Unpublished doctoral dissertation, 155p, Georgia.
- Schoenfeld A H, 2016, Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint), *Journal of Education*, 196(2), 1-38.
- Sevimli E, Yıldız Ç, Delice A, 2008, Geometri Sorularında Görselleme Sürecine Bir Bakış: Nereden Çizeyim?, 8. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde Sunulan Bildiri, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.
- Sezer S, 2019, Millî Eğitim Bakanlığı Yerli PISA Model “ABİDE” (Akademik Becerilerin İzlenmesi ve Değerlendirilmesi) Tanıtımı Yapıldı, *Researchgate*, <https://www.researchgate.net/publication/334194982>.
- Sırtmaç G, 2018, Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 118s, İzmir.
- Sinnett S, Spence C, Soto-Faraco S, 2007, Visual Dominance and Attention: The Colavita Effect Revisited, *Perception & Psychophysics*, 69(5), 673–686.
- Stake R E, 2005, Qualitative Case Studies, In N K Denzin, Y S Lincoln, (Ed.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (443–466), Sage Publications, 1210p, California.
- Stylianou D A, 2000, Expert and Novice Use of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving, University of Pittsburgh, Graduate Faculty, Doctoral Dissertation, 280p, Pittsburgh.
- Stylianou D A, 2002, On The Interaction of Visualization and Analysis: The

- Negotiation of a Visual Representation in Expert Problem Solving, *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 303-317.
- Stylianou D A, 2010, Teachers' Conceptions of Representation in Middle School Mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325-343.
- Stylianou D A, 2011, An Examination of Middle School Students' Representation Practices in Mathematical Problem Solving Through The Lens of Expert Work: Towards an Organizing Scheme, *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 265-280.
- Stylianou D A, Silver E A, 2004, The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences, *Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353-387.
- Subaşı M, Okumuş K, 2017, Bir Araştırma Yöntemi Olarak Durum Çalışması, *Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 21(2), 419-426.
- Şadan N, 2017, Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Süreçlerinin İncelenmesi Üzerine Bir Öğretim Deneyi Çalışması, *Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 203s, İzmir.
- Şan İ, 2008, Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Özdeşlik Konusu Erişilerine Görselleştirmenin Etkisi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans tezi*, 158s, Eskişehir.
- Tall D, 1995, Cognitive growth In Elementary and Advanced Mathematical Thinking', In L Meira, D Carraher, (Ed.), *Proceedings of XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1 (61-75)*, ERIC, 284p, Recife Brazil.
- Teahen R J, 2015, Exploring Visualisation as a Strategy for Improving Year 4 & 5 Student Achievement on Mathematics Word Problems, *Victoria University of Wellington, Master's Thesis*, 151p, Wellington.
- Trends in International Mathematics and Science Study, TIMMS, 2011, TIMSS 2011 açıklanan matematik soruları, <http://timss.meb.gov.tr/www/aciklanansorular/icerik/1> adresinden edinilmiştir.

- Trigueros M, Martínez-Planell R, 2010, Geometrical Representations in the Learning of Two-Variable Functions, *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19.
- Uesaka Y, Manalo E, Ichikawa S I, 2007, What Kinds of Perceptions and Daily Learning Behaviors Promote Students' Use of Diagrams in Mathematics Problem Solving?, *Learning and Instruction*, 17(3), 322-335.
- Ugurel I, Morali H S, Karahan O, Boz B, 2016, Mathematically Gifted High School Students' Approaches to Developing Visual Proofs (VP) and preliminary Ideas About VP, *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(3), 174-197.
- Umay A, 2003, Matematiksel Muhakeme Yeteneği, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Ural A, 2017, Matematik Öğretiminde Kavram Yanılgıları ve Zorluklar, *Cinius Yayınları*, 90s, İstanbul.
- Uysal-Koç O, Başer N, 2012, Görselleştirme Yaklaşımının Matematiğe Yönelik Tutum ve Başarıdaki Rolü, *İlköğretim Online*, 11(4), 945-957.
- Van Garderen D, Montague M, 2003, Visual- Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities, *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(4), 246-254.
- Van Garderen D, Scheuermann A, Poch A, 2014, Challenges Students Identified with a Learning Disability and as High-Achieving Experience When Using Diagrams as a Visualization Tool to Solve Mathematics Word Problems, *ZDM Mathematics Education*, 46(1), 135-149.
- Weckbacher L M, 2007, The Role of Visualization in Geometric Problem Solving, *University of California, Doctoral Dissertation*, 155p, California.
- Wheatley G H, 1998, Imagery and Mathematics Learning, Focus on Learning Problems in Mathematics, 20(2-3), 65-77.
- Woolner P, 2004, A Comparison of a Visual-Spatial Approach and a Verbal Approach to Teaching Mathematics, In M J Høines A B, Fuglestad (Ed.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol.*

4 (449-456), 526p, Norway.

Xing C, 2016, Effects of Diagrams on Strategy Choice in Probability Problem Solving, Columbia University, Graduate School of Arts and Sciences, Doctoral Dissertation, 100p, New York.

Yaprak H, 2019, 7. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Problemlerin Çözümünde Görselleme Süreçlerinin İncelenmesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 151s, İzmir.

Yeşildere S, Türnüklü E, 2007, Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40(1), 181-213.

Yeşildere-İmre S, Akkoç H, Baştürk-Şahin B N, 2017, Ortaokul Öğrencilerinin Farklı Temsil Biçimlerini Kullanarak Matematiksel Genelleme Yapma Becerileri, Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 8(1), 103-129.

Yetim Karaca S, Ada S, 2018, Öğrencilerin Matematik Dersine ve Matematik Öğretmenine Yönelik Algılarının Metaforlar Yardımıyla Belirlenmesi, Kastamonu Eğitim Dergisi, 26(3), 789-800.

Yıldırım A, Şimşek H, 2016, Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri (10. baskı), Seçkin Yayıncılık, 427s, Ankara.

Yıldırım A, Şimşek H, 2021, Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri (12. baskı), Seçkin Yayıncılık, 427s, Ankara.

Yılmaz R, Argün Z, 2013, Matematiksel Genelleme Sürecinde Görselleştirme ve Önemi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28(2), 564-576.

Yin R K, 1984, Beyond Method: Strategies for Social Research, G Morgan (Ed.), Sage Publications, 408p, California.

Yin R K, 2009, Case Study Research: Design and Methods (4th ed.), SAGE Publications, 219p, California.

Zahner D, Corter J E, 2010, The Process of Probability Problem Solving: Use of External Visual Representations, Mathematical Thinking and Learning, 12(2), 177-204.

Zawojewski J S, Lesh R, 2003, A Models and Modeling Perspective on Problem Solving, In R Lesh, H M Doerr, (Ed.), Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving (317-328), Routledge, 607p, New York.

Zimmermann W, Cunningham S, 1991, Editor's Introduction: What is Mathematical Visualization?, In W Zimmermann, S Cunningham, (Ed.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics (1-7), Mathematical Association of America, 224p, Washington.

İnternet Kaynakları

1- <https://sozluk.gov.tr/>, 25.05.2025

EKLER

EK 1. Cebir Testi

CEBİR TESTİ

Sayın katılımcı,

Bu test daha önce Liselere Giriş sınavlarında çıkmış soruların içerisinde seçilmiş 15 sorudan oluşmaktadır. Uygulamanın amacı, öğrencilerin bu testteki cebir sorularını çözerken sergiledikleri görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesidir. Çalışmaya katılım gönüllülük esasına dayalıdır. Öğrencilerin kimlik bilgileri gizli tutulacaktır. Öğrencilerin sorulara vereceği cevaplar sadece araştırmacı tarafından değerlendirilecektir. Vereceğiniz cevapların gerçekçi, içten ve samimi olması araştırmanın hedefine ulaşması için çok önemlidir. Yapacağım bu çalışmaya ayıracağınız zaman, gösterdiğiniz ilgi ve yardımlarınızdan dolayı hepinize teşekkür ederim.

Abdürrahim KIR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Öğrencisi

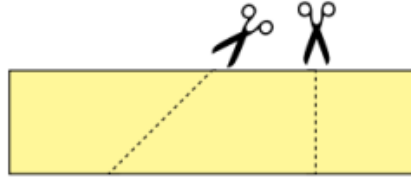
Okul:

Sınıf/Şube:

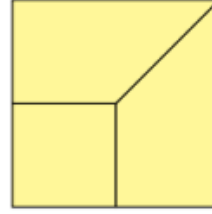
Cinsiyetiniz:

EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 1.) Dikdörtgen biçimindeki bir kâğıt, Şekil I'deki gibi kesiliyor. Daha sonra elde edilen parçaların kenarları Şekil II'deki gibi çakıştırılarak bir yüzünün alanı $(16x^2)$ cm² olan, kare şeklinde bir kâğıt elde ediliyor.



Şekil I



Şekil II

Buna göre, başlangıçta verilen dikdörtgen şeklindeki kâğıdın çevresinin uzunluğunu santimet-re cinsinden veren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

A) $40x$

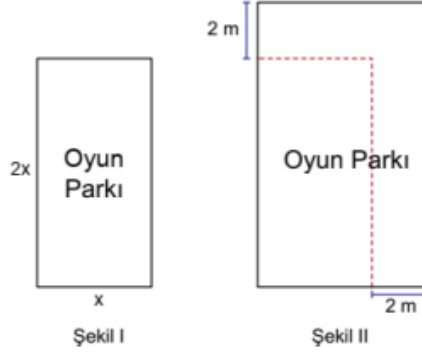
B) $20x$

C) $16x$

D) $10x$

EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 2.) Kenarlarının uzunlukları x metre ve $2x$ metre olan dikdörtgen şeklindeki oyun parkının planı Şekil I'de verilmiştir. Bu oyun parkının kenarları 2'şer metre uzatılarak Şekil II'deki gibi dikdörtgen biçiminde bir oyun parkı planlanmıştır.

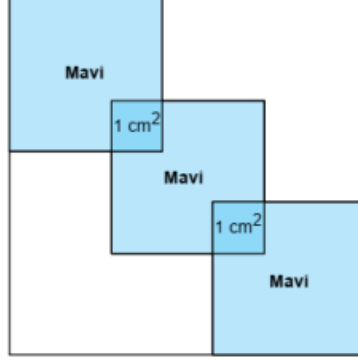


Buna göre Şekil II'deki oyun parkının alanının Şekil I'deki oyun parkının alanından kaç metre-kare fazla olduğunu veren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6x + 4$ B) $6x + 6$ C) $3x + 2$ D) $3x + 4$

EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 3.) Kare şeklindeki boş bir panoya kare şeklindeki üç eş mavi karton, köşegenleri panonun köşegeni ile çakışacak şekilde aşağıdaki gibi yerleştirilmiştir.



Panoda boş bırakılan bölgelerin alanları toplamı $6x^2 + 36x + 54$ santimetrekaredir. Kartonların üst üste gelen bölgelerinin her biri, alanları 1 cm^2 olan karesel bölgelerdir.

Buna göre panonun çevresinin uzunluğunu santimetre cinsinden veren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

A) $12x + 40$

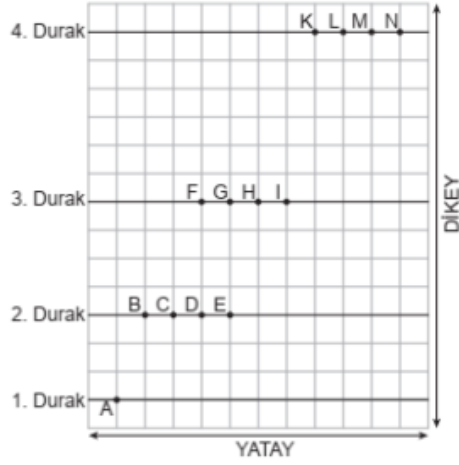
B) $12x + 36$

C) $12x + 32$

D) $12x + 28$

EK 1. (Devam) Cebir Testi

4.) Eğim, dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranıdır.



Yukarıdaki kareli zeminde verilen A noktasından yola çıkan bir hareketli, eğimi 1 olan yolu izleyerek 2. duraktaki noktalardan birine ulaştıktan sonra bu noktadan eğimi 2 olan yolu izleyerek 3. duraktaki noktalardan birine ulaşıyor.

Ardışık iki durak arasında izlediği yollar doğrusal olduğuna göre bu hareketli, 3. durakta bulunduğu noktadan eğimi 3 olan yolu izleyerek 4. duraktaki hangi noktaya ulaşır?

- A) K B) L C) M D) N

EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 5.) Aşağıda üzerinde alanları verilen altı adet tarla, hacmi 4000 litre olan tamamı dolu bir depodaki su ile sulanmaktadır.

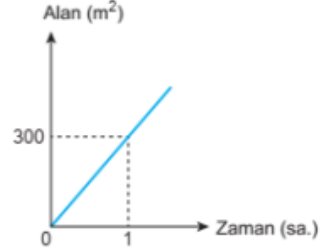
900 m ²	1200 m ²	700 m ²	800 m ²	1500 m ²	1000 m ²
K	L	N	P	R	S

Bu depoda kalan su miktarının ve sulanan alanın zamana göre değişimi aşağıdaki doğrusal grafiklerde gösterilmiştir.

Grafik: Depoda Kalan Su Miktarının Zamana Göre Değişimi



Grafik: Sulanan Alanın Zamana Göre Değişimi



Her bir tarlanın tamamı sulandıktan sonra diğer tarlaya geçilecek şekilde sırasıyla K, L, N, P, R, S tarlaları sulanacaktır.

Buna göre, depoda kalan su miktarının 2500 litrenin altına düştüğü anda hangi tarla sulanmaktadır?

A) N

B) P

C) R

D) S

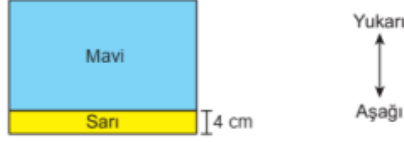
EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 6.) Uzun kenarlarının uzunlukları birbirine eşit, kısa kenarlarının uzunlukları 20 cm ve 8 cm olan dikdörtgen şeklinde iki karton Şekil I'de verilmiştir.



Şekil I

Bu kartonlar Şekil II'deki gibi uzun kenarları paralel olacak ve sarı karton altta kalacak biçimde üst üste yerleştirildiğinde mavi dikdörtgenin uzun kenarı, sarı dikdörtgeni iki eş parçaya ayırmakta ve eş parçalardan biri mavi dikdörtgenin altında kalmaktadır.



Şekil II

Kartonlar Şekil II'deki konumlarındayken sarı dikdörtgen sabit kalmak üzere mavi dikdörtgen sarı dikdörtgenin üzerinde aşağıya doğru x cm hareket ettirildiğinde sarı dikdörtgenin tamamı mavi dikdörtgenin altında kalmaktadır.

Buna göre x 'in alabileceği değerleri santimetre cinsinden gösteren eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4 \leq x \leq 16$

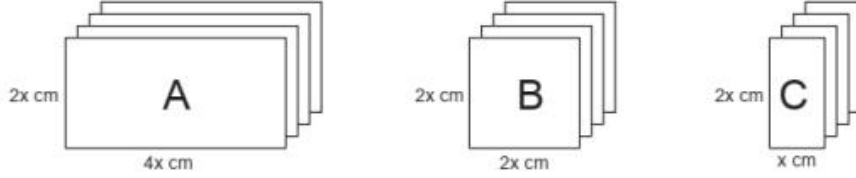
B) $4 \leq x \leq 20$

C) $2 \leq x \leq 16$

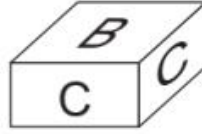
D) $8 \leq x \leq 20$

EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 7.) Aşağıda dikdörtgen şeklindeki A, B, C kartonlarının her birinden dörder adet verilmiştir.



Bu kartonların kenarları çakıştırılarak iki tane kare prizma oluşturuluyor. Bu prizmalardan biri aşağıda verilmiştir.



Kartonların tamamı kullanıldığına göre diğer prizmanın yüzey alanı kaç santimetrekaredir?

A) $16x^2$

B) $26x^2$

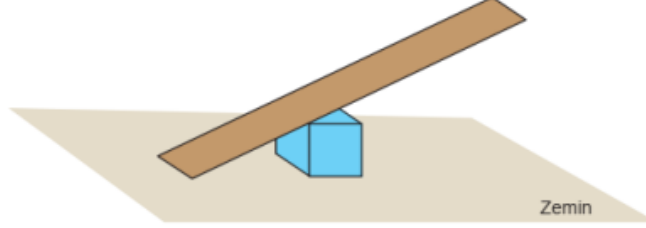
C) $32x^2$

D) $40x^2$

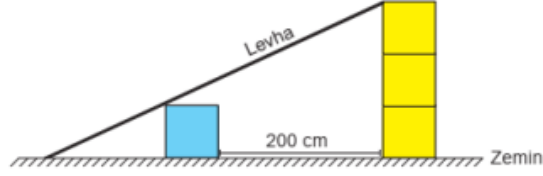
EK 1. (Devam) Cebir Testi

8.) Eğim, dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranıdır.

Dikdörtgen şeklindeki bir levha, mavi renkli bir küpün bir ayrıtı ile çakışacak ve eğimi %40 olacak biçimde zemin üzerine aşağıdaki gibi yerleştirilerek bir rampa elde edilmiştir.



Bu rampanın eğimi değişmeyecek biçimde mavi küp ile özdeş üç sarı küp aşağıdaki gibi taban yüzlerinin tamamı çakışacak biçimde üst üste zemine yerleştirildiğinde, levhanın bir kenarı üstteki sarı küpün bir ayrıtı ile çakışmıştır. Bu durumda mavi küp ile zemine temas eden sarı küp arasındaki uzaklık 200 cm'dir.

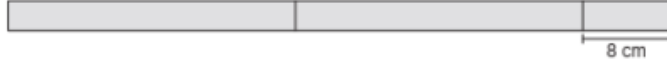


Buna göre, bu küplerden birinin bir ayrıtının uzunluğu kaç santimetredir?

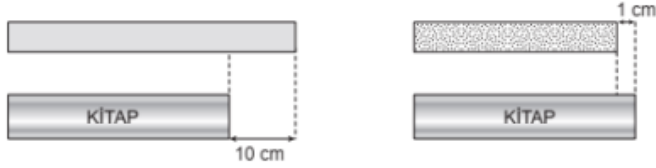
- A) 40 B) 50 C) 80 D) 100

EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 9.) Eşit uzunluktaki iki çubuğun birinden 8 cm'lik bir parça kesilerek kalan kısım iki eş parçaya, diğerinden 5 cm'lik bir parça kesilerek kalan kısım üç eş parçaya aşağıdaki gibi ayrılıyor.



Bu parçalardan birer tanesi ile bir kitabın aynı kenarı aşağıdaki gibi ölçüldüğünde parçalardan birinin uzunluğu kitabın kenar uzunluğundan 10 cm fazla, diğerinin uzunluğu ise 1 cm eksik oluyor.



Buna göre kesilmeden önce çubuklardan birinin uzunluğu kaç santimetredir?

- A) 85 B) 80 C) 75 D) 70

EK 1. (Devam) Cebir Testi

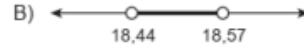
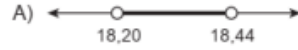
- 10.) Gülle atma yarışmalarında her bir sporcunun üç atış yapma hakkı vardır. Bu üç atıştan sonra sporcular, gülleyi attıkları en uzun mesafeye göre büyükten küçüğe doğru sıralanır. Bu sıralama sonucunda sporculardan birinci sıradaki altın, ikinci sıradaki gümüş, üçüncü sıradaki bronz madalya alır.

Aşağıdaki tabloda beş sporcunun katıldığı bir gülle atma yarışmasında bu sporcuların atış mesafeleri verilmiştir.

Tablo: Sporcuların Gülle Atış Mesafeleri (Metre)

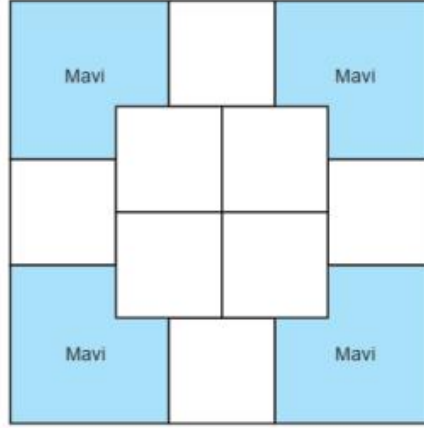
Atışlar \ İsim	Burak	Cihan	Dinçer	Erdal	Fatih
1. Atış	15,03	16,25	17,40	14,57	16,86
2. Atış	18,20	15,42	18,57	16,77	17,82
3. Atış	18,06	19,86	17,83	18,44	?

Bu yarışmada Cihan altın madalya, Dinçer bronz madalya kazandığına göre Fatih'in 3. atışında gülleyi attığı mesafenin metre cinsinden alabileceği değerler aşağıdaki sayı doğrularının hangisinde gösterilmiştir?



EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 11.) Kare şeklindeki bir kâğıdın bir yüzü aşağıdaki gibi sekiz eş beyaz bölgeye ve dört eş mavi bölgeye ayrılmıştır.



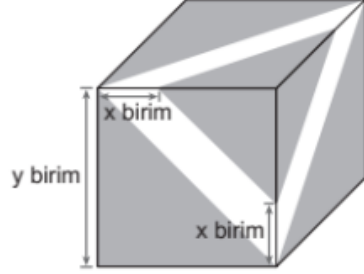
Beyaz bölgelerden her biri, alanı $(4x^2 + 8x + 4)$ cm^2 olan karesel bölgelerdir.

Buna göre mavi bölgelerden birinin alanını santimetrekare cinsinden veren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6(x + 1)^2$ B) $8(x + 1)^2$ C) $4(x + 2)^2$ D) $2(x + 2)^2$

EK 1. (Devam) Cebir Testi

12.)



Küp şeklindeki kutunun tüm yüzlerine şekildeki gibi eşit büyüklükte şeritler yapıştırılıyor ve şeritler dışında kalan üçgen biçimindeki bölgeler boyanıyor.

Buna göre, boyanan bölgenin alanını birimkare cinsinden gösteren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6y^2 - 6xy + 3x^2$
- B) $3y^2 - 6xy + 6x^2$
- C) $6y^2 - 6xy - 3x^2$
- D) $3y^2 - 6xy - 6x^2$

EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 13.) Alanı $(36x^2)$ cm² olan kare, alanları birbirine eşit olan mavi, sarı ve beyaz renkli üç dikdörtgensel bölgeye aşağıdaki gibi ayrılmıştır.



Buna göre, sarı dikdörtgensel bölgenin çevresinin uzunluğunu santimetre cinsinden veren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

A) $24x$

B) $20x$

C) $14x$

D) $7x$

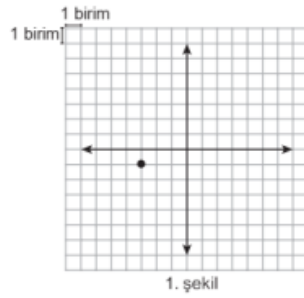
EK 1. (Devam) Cebir Testi

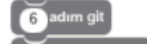
- 14.) Etkileşimli çalışmalar oluşturulabilecek bir programlama dilinde istenen hareketler tanımlı blokların uygun şekilde yerleştirilmesiyle elde edilmektedir. Bu programlama dilinde bulunan bazı bloklar ve tanımları aşağıda verilmiştir.

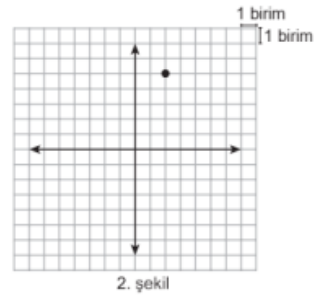
 **yönüne dön** → Karakterin hangi yönde hareket edeceğini belirler.
(0: yukarı, 90: sağ, 180: aşağı, -90: sol)

 **adım git** → Karakteri belirtilen birim kadar hareket ettirir.

Örnek:

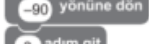


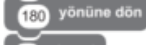
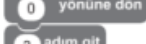
 0 yönüne dön
 6 adım git
 90 yönüne dön
 5 adım git

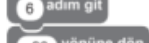
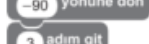


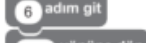
Kareli kâğıtta verilen 1. şekildeki $(-3, -1)$ noktasına yukarıdaki bloklarla belirtilen hareketler yukarıdan aşağıya doğru uygulandığında 2. şekildeki $(2, 5)$ noktası elde edilmiştir.

Buna göre $K(-1, 5)$ noktasına aşağıdaki hareketlerden hangisi uygulanırsa $L(-4, -1)$ noktası elde edilir?

A)  0 yönüne dön
 6 adım git
 -90 yönüne dön
 3 adım git

B)  180 yönüne dön
 6 adım git
 0 yönüne dön
 3 adım git

C)  180 yönüne dön
 6 adım git
 -90 yönüne dön
 3 adım git

D)  -90 yönüne dön
 6 adım git
 180 yönüne dön
 3 adım git

EK 1. (Devam) Cebir Testi

- 15.) İki farklı yüzme kursuna ait ücretler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Kursların Ücretleri

Kurslar	Kayıt Ücreti (TL)	Aylık Ücret (TL)
1. Kurs	310	40
2. Kurs	130	55

Yüzme kursuna katılan bir kişi bir defalık kayıt ücreti ve devam ettiği her ay için aylık ücret ödemektedir.

Tabloda ücretleri verilen kurslardan birine katılmak isteyen bir kişinin en az kaç ay kursa devam etmesi durumunda 1. kursa katılması daha ekonomik olur?

- A) 8 B) 9 C) 13 D) 14

EK 2. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları Formu

YARI YAPILANDIRILMIŞ GÖRÜŞME SORULARI

Aşağıda verilen açıklamalar görüşme öncesinde katılımcıyla paylaşılacaktır.

- ❖ Yapılacak görüşme esnasındaki görüşleriniz gizli tutulacaktır. Sadece araştırmacı değerlendirme yapacaktır.
- ❖ Görüşme sırasında sorular hakkındaki düşünceleriniz oldukça önemlidir. Lütfen cevaplarınızın yanlış olabileceğini düşünüp endişeye kapılmayın. Araştırmanın amacı soruları cevaplarken neler düşündüğünüzü tespit etmeye çalışmaktır.
- ❖ Görüşme öncesinde sormak istediğiniz sorular varsa bana iletebilirsiniz.

Çalışmaya vereceğiniz katkılardan dolayı şimdiden teşekkür ederim.

Görüşme sırasında aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilecektir. İhtiyaç duyulması halinde ek sorular da sorulabilir.

1. Sorudan ne anladığınızı söyler misin?
2. Yaptığınız çözümde izlediğiniz yolu kısaca açıklayabilir misin?
3. Böyle bir yolu neden tercih ettiğini söyler misin?
4. Soruyu çözerken neden bir görsel kullandığınızı/kullanmadığınızı söyler misin?
5. Sence bu soru, farklı bir çözüm yolu ile nasıl çözülebilir?