

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**k -FİBONACCİ SAYI DİZİSİ VE POLİNOMUNUN YENİ BİR
AİLESİ**

Tugba ALP

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2023

Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Engin ÖZKAN danışmanlığında, Tugba ALP tarafından hazırlanan bu çalışma 27.01.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYDOĞDU İmza:

Üye : Prof. Dr. Engin ÖZKAN İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bülent ÇAĞLAR

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“*k*-Fibonacci polinomunun yeni bir ailesi” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim./...../20....

Tugba ALP

ÖZET

Yüksek Lisans

k -FİBONACCİ SAYI DİZİSİ VE POLİNOMUNUN YENİ BİR AİLESİ

Tugba ALP

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu tezde k -Fibonacci polinomunun yeni bir ailesi tanımlandı. Bu polinom ailesinin Binet formülü tanımlandı ve ispatlandı. Fibonacci polinomu ile k -Fibonacci polinomu arasındaki ilişki verildi. Matris yardımıyla gösterimi bulundu ve bazı terimleri tablo halinde gösterildi. Daha sonra Catalan özdeşliği ve onun genellemeleri olan Cassini, D'ocagne, Honsberger, Vajda özdeşlikleri tanımlandı ve ispatlandı. Bununla birlikte k -Fibonacci sayı dizisi için de bu özdeşlikler verildi ve ispatlandı. Bunlara ek olarak bazı özdeşlikler ve bu özdeşliklerin Fibonacci polinomu ile bağlantısı tanımlandı ve ispatlandı.

2023, 41 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Cassini formülü, Catalan formülü, k -Fibonacci polinomu, k -Fibonacci sayı dizisi, Üreten fonksiyonu.

ABSTRACT

MSc Thesis

A NEW FAMILY OF k -FIBONACCI NUMBERS AND POLYNOMIALS

Tugba ALP

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

In this thesis, a new family of k -Fibonacci polynomial is defined. The Binet formula is defined and proven. The relationship between the Fibonacci polynomial and the k -Fibonacci polynomial is given. Matrix representation is found and some of its terms are tabulated. Also, the Catalan Formula and its generalizations, Cassini, D'ocagne, Honsberger, Vajda formulas were defined and proved. Additionally, these identities are given and proved for the k -Fibonacci number sequence, too. In addition to these, some identities and their connection with the Fibonacci polynomial were defined and proved.

2023, 41 Pages

Keywords: Catalan identity, Cassini identity, k -Fibonacci polynomials, k -Fibonacci sequences, Generating functions.

TEŞEKKÜR

Tez ve makale konumu seçmemde yardımcı olup, fikirleriyle yol gösteren, çalışmalarım boyunca her zaman desteğini ve yardımını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a, ayrıca her türlü desteği veren ve birçok fırsatı bana tanıyan aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışma, TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Tugba ALP

Ocak, 2023

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
TABLolar LİSTESİ.....	v
SİMGELER ve KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. Fibonacci Sayı Dizisi	7
2.2. Fibonacci Polinomu.....	12
2.3. Lucas Sayı Dizisi.....	15
2.4. Lucas Polinomu.....	18
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	20
3.1. k -Fibonacci Sayı Dizisi.....	20
4. BULGULAR	24
4.1. k -Fibonacci Sayı Dizisi.....	24
4.2. k -Fibonacci Polinomu	27
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	37
KAYNAKLAR	38

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 3.1 k -Fibonacci sayı dizisi.....	21
Tablo 4.1 k -Fibonacci polinomu.....	28



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

F_n	Fibonacci sayı dizisi
$F_n(x)$	Fibonacci polinomu
L_n	Lucas sayı dizisi
$F_n^{(k)}$	k -Fibonacci sayı dizisi
$F_n^{(k)}(x)$	k -Fibonacci Polinomu



1. GİRİŞ

Bilimsel çalışmalardaki yeri gün geçtikçe artan ve sayı dizileri arasında en bilineni olan Fibonacci dizileri, ilk olarak Leonardo Fibonacci'nin birçok temel problemler içeren 'Liber Abaci' kitabında, bir tavşan probleminde ortaya çıkmıştır. Başlangıçta bebek olan bir dişi ve bir erkek tavşanın yalnızca ayda bir kez üremeleriyle doğan yeni tavşanlarla birlikte toplam tavşan sayıları her ay sırasıyla yazıldığında, Fibonacci sayı serisi elde edilmiştir. Bu sayı serisinde her bir sayı kendisinden önceki iki sayının toplanmasıyla elde edilir.

Günümüzde önemli bir yere sahip olan bu sayılar sadece matematikte değil, günlük hayatımızın her noktasında karşımıza çıkmaktadır. Doğada, borsada, insan vücudunda ve hayatın her alanında görülen ve estetik ile ilişkilendirilen bir sayı dizisidir. Birbirine oranlandığında 'Altın Oran' adını alan ve en estetik görünümü verdiği düşünülen bu sayılar bilim dünyasının her alanında ilgi odağıdır.

Bu sayılar üzerine yapılan bazı çalışmalar ise Lucas sayı dizileri, Jacobsthal sayı dizileri, Pell sayı dizileridir. Bu çalışmalara ait bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

Miles (1960), genel k -Fibonacci sayı dizisini tanımlamış ve $k = 2$ için bu sayı dizisinin ilginç özelliklerini ve bilinen Fibonacci sayı dizisi ile ilişkisini vermiştir.

Horadam (1961), Fibonacci polinomlarının genelleştirilmiş versiyonunu tanımlamıştır.

Waddill ve Sacks (1967), Fibonacci sayılarını, herhangi bir teriminin kendinden önceki üç terimin toplamı olduğu dizileri dikkate alarak genişletmiştir.

Webb ve Parberry (1969), Fibonacci sayılarının asalılıklarını ve bölünebilirlik özelliklerini incelemiştir.

Hoggatt (1969), Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili yeni özdeşlikler tanımlamıştır.

Bicknell (1970), Fibonacci polinomunun bölünebilirlik özelliklerini incelemiştir.

Hoggatt ve Bicknell (1973), Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin polinomları üzerine çalışmış ve yeni özellikler keşfederek Fibonacci sayıları ile bağlantısını vermiştir.

Hoggat ve Bicknell (1973), Fibonacci polinomlarının kökleri üzerine çalışmış ve yeni özellikler tanımlamıştır.

Kalman (1982), matris kullanarak genel Fibonacci sayı dizisi hakkında çalışma yapmıştır.

Er (1984), matris gösterimini genelleştirerek, genel Fibonacci sayılarının toplamalarının bu matris gösterimiyle türetilbileceğini göstermiştir.

Wilcox (1986), gruplarda n . periyoda sahip Fibonacci sayıları üzerine çalışmış ve çalışmasında yeni teoremlere yer vermiştir.

Vajda (1989), Fibonacci ve Lucas sayı dizisinin yeni özelliklerine yer vermiştir. Ayrıca bu özellikler arasında yer alan altın orandan da bahsetmiştir.

Filipponi ve Horadam (1993), Fibonacci polinomlarının ikinci türevleri üzerine çalışmış ve özellikleri üzerine incelemeler yapmıştır.

Lengyel (1995), Fibonacci sayılarının asal kuvvetleri üzerine çalışmıştır.

Ricci (1995), genel Lucas ve Fibonacci polinomlarının yeni özellikleri üzerine çalışmıştır.

Dunlap (1997), Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için çeşitli özdeşlikler ve teoremler tanımlamıştır.

Aydın ve Dikici (1998), genel Fibonacci sayıları üzerine çalışmıştır.

Luca (2000), Fibonacci ve Lucas serilerinin basamak sayıları üzerinde çalışmıştır.

Thomas Koshy (2001), Fibonacci ve diğer sayı dizilerinin önemli bağıntılarını vermiştir.

Yuan ve Zhang (2002), Fibonacci polinomları ile ilgili yeni özdeşlikler tanımlamıştır.

Vorobiev (2002), kitabında Fibonacci sayıları ile ilgili yeni özdeşlikler tanımlamış ve en basit haliyle teoremlerini açıklamıştır.

Cahill, Ericco ve Spence (2003), Fibonacci ve Lucas sayılarının kompleks çarpanları üzerine çalışmıştır.

Dikici ve Özkan (2003), Gruplarda Fibonacci sayı dizisi üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Özkan, Aydın ve Dikici (2003), Sonlu nilpotent gruplarda Fibonacci serisi ile alakalı uygulamalar üzerinde çalışmıştır.

Öcal, Tuğlu ve Altınışık (2005), Genelleştirilmiş k -Fibonacci ve k -Lucas sayılarını tanımlamıştır.

Taşçı ve Kılıç (2004), k mertebeli Lucas sayıları ile bilinen Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi tanımlamıştır.

Zhang (2004), Fibonacci ve Lucas sayılarının genel toplamalarını farklı metotlar kullanarak hesaplama üzerine çalışmalar yapmıştır.

Solak (2005), Fibonacci ve Lucas sayılarının çeşitli matris gösterimleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Ma ve Zhang (2007), Chebyshev polinomları üzerine çalışmış ve Fibonacci ve Lucas sayılarının bu polinomlarla bağlantısı üzerine çalışma yapmıştır.

Falcon ve Plaza (2009), k -Fibonacci sayı polinomlarını tanımlamış ve bu polinomların türevleri ile ilgili yeni özdeşlikler ispatlamıştır.

Nalli ve Haukkanen (2009), genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas polinomlarını tanımlamıştır. Ayrıca matris gösterimlerini de sunmuştur.

Bolat ve Köse (2010), k -Fibonacci sayıları üzerine yaptığı çalışmada bu sayı dizisinin yeni özelliklerini tanımlamıştır.

Mikkawy ve Sogabe (2010), k -Fibonacci sayı dizisinin yeni bir ailesini tanımlamıştır.

Yayenie (2011), genelleştirilmiş Fibonacci dizilerinin yeni özelliklerini incelemiş ve çalışmasında bazı yeni teoremlere yer vermiştir..

Falcon (2011), k -Fibonacci ve k -Lucas sayı dizisini tanımlamış ve aralarındaki ilişkiyi göstererek bu dizilerin bazı özdeşlikleri üzerine çalışmıştır.

Halıcı (2012), Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını tanımlamış ve bu kuaterniyonların binet formülünü, üreten fonksiyonunu tanımlamıştır.

Tingting ve Wenpeng (2012), Fibonacci ve Lucas sayılarının kuvvet toplamaları üzerine çalışmış ve bununla alakalı ilginç özdeşlikler tanımlamışlardır.

Zafer ve Keskin (2013), genel Fibonacci ve Lucas sayılarının bilinen özdeşliklerini kullanarak yeni özdeşlikler tanımlamıştır.

Thomas Koshy (2014), Pell sayı dizisi ile ilgili önemli bağıntıları vermiştir. Ayrıca bu sayı dizisinin Lucas dizisi ile bağlantılarını vermiştir.

Catarino (2014), k -Fibonacci sayı dizisi üzerine çalışma yapmıştır ve bu çalışmasında k -Fibonacci sayı dizisinin bazı yeni özdeşliklerini vermiştir.

Özkan (2014), Truncated Lucas sayıları üzerine çalışmıştır.

Dresden ve Du (2014), genel k -Fibonacci sayılarını tanımlamak için kullanılabilecek Binet tarzı yeni bir formül tanıtmışlardır.

Godase ve Dhakne (2014), k -Fibonacci ve k -Lucas sayı dizilerine ait bazı özellikler üzerine çalışmış ve matris yardımıyla ispatlar yapmıştır.

Özkan, Aydoğdu ve Altun (2017), Fibonacci ve Lucas sayılarının bir ailesinin bazı özdeşliklerini vermişlerdir.

Boussayoud, Kerada ve Harrouche (2017), k -Lucas sayıları ve polinomlarının yeni simetrik özelliklerini ve üreten fonksiyonunu tanımlamıştır.

Özkan, Altun ve Göçer (2017), Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi ile ilgili bazı teoremler üzerine çalışmışlardır. Ayrıca k -Lucas sayılarının yeni bir ailesini tanımlamışlardır.

Özkan, Taştan ve Aydoğdu (2018), Fibonacci sayı dizisi ailesinin 2-Fibonacci polinomunu incelemiştir.

Özkan ve Altun (2019), Fibonacci ve Lucas polinomları arasındaki ilişkiyi tanımlamış ve Lucas polinomlarının terimlerini matris kullanarak bulmuşlardır.

Özkan ve Taştan (2019), Fibonacci ailesinin k -Fibonacci polinomlarını tanımlamıştır.

Özkan, Taştan ve Aydoğdu (2019), 3-Fibonacci polinomları üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Özkan ve Kuloğlu (2020), k -Jacobstal-Lucas serisi ile ilişkili Jacobstal benzeri bir seri üzerine çalışmışlardır.

Özkan ve Taştan (2020), Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas polinomları üzerine çalışmış ve yeni özdeşlikler tanımlamışlardır.

Özkan, Taştan ve Güngör (2020), k -Lucas sayı dizisinin Catalan dönüşümünü ve bu dönüşümün geren fonksiyonunu tanımlamıştır.

Çelik, Durukan ve Özkan (2021), Pell, Pell-Lucas sayıları, Jacobstal ve Jacobstal-Lucas sayıları üzerine çalışmalar yapmıştır.

Taştan ve Özkan (2021), Gauss k -Fibonacci polinomlarının yeni bir ailesini tanımlamış ve bu polinomların yeni özelliklerini sunmuştur.

Özkan ve Taştan (2021), Gauss k -Lucas sayılarının yeni bir ailesini ve onların polinomlarını tanımlamıştır.

Taştan, Özkan ve Shannon (2021), genelleştirilmiş k -Fibonacci ve genelleştirilmiş k -Lucas sayılarının yeni bir ailesini tanımlamışlar.

Özkan ve Kuloğlu (2021), yeni Narayana polinomlarını ve Gauss Narayana sayı dizisi ve bu dizinin polinomlarını tanımlamıştır.

Bu tezin ikinci bölümünde, Thomas Koshy'nin "Fibonacci and Lucas numbers with applications" kitabında yer alan bazı tanım ve teoremler, sonraki bölümlerde verilecek olan yeni ailenin tanıtılması için temel bilgiler olarak verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, Mikkawy ve Sogabe'nin (2010), k -Fibonacci sayı dizisinin yeni bir ailesini tanıttığı çalışmasına ait bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca bu tanım ve teoremlerin ispatları verilmiştir.

Tezin dördüncü kısmında k -Fibonacci sayı dizisinin yeni ailesi için Catalan, Cassini, D'Ocagne, Honsberger, Vajda özdeşlikleri verilip ispatlanmıştır. Bu yeni ailenin polinomu tanıtılmıştır. Daha sonra bilinen Fibonacci polinomu ile bağlantısı ve önemli özdeşlikleri verilmiştir. Bu kısımda yapılan çalışmaların temel amacı; k -Fibonacci sayı dizisi için Catalan, Cassini, D'Ocagne, Honsberger, Vajda özdeşliklerini tanımlamak, k -Fibonacci polinomunun yeni bir ailesini tanımlamak, bu yeni ailenin bilinen polinom aileleri ile bağlantısını göstermek, Catalan ve onun genellemeleri olan bazı önemli özdeşlikleri araştırmak, matris gösterimini tanımlamaktır. Bu sayede yeni sayı ve polinom aileleri araştırılırken, k -Fibonacci polinomunun yeni ailesi de yapılacak olan çalışmalara temel oluşturabilecektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Fibonacci sayı dizisi, kendi içinde birçok özelliği ve özdeşliği barındıran özel bir sayı dizisidir. Fibonacci sayı dizisinin en önemli özelliği, altın oranla ilişkilendirilmesidir. Bu sayede hayatımızın neredeyse her alanında karşımıza çıkan bu sayılar üzerinde bilim dünyasında hatırı sayılır miktarda çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan biri de bu tezde üzerinde çalıştığımız k -Fibonacci polinomlarıdır.

Bu kısımda, öncelikle Fibonacci sayıları ve onların polinomları için tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 2.1.1

n . Fibonacci sayısı F_n şeklinde gösterilir ve başlangıç değerleri $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ olacak şekilde

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3$$

şeklinde tanımlanır (Vajda, 1989).

Tanım 2.1.2

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri α ve β olsun.

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad n \geq 1$$

bağıntısına Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü denir (Vajda, 1989).

Fibonacci dizisinin bazı değerleri şu şekildedir;

$$F_n = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34\}$$

Tanım 2.1.3

Fibonacci Q -matrisi

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin F_n Fibonacci dizisi ile ilişkisi

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisi ile verilir (Koshy, 2001).

Teorem 2.1.4

F_n Fibonacci sayı dizisi için üreten fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

bağıntısıyla ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. $g(x)$ Fibonacci sayı dizisinin üreten fonksiyonu olsun. Buna göre

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

eşitliğiyle birlikte $xg(x)$ ve $x^2g(x)$ eşitlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} xF_n x^n, x^2g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2F_n x^n.$$

Bu eşitlikleri kullanarak, Fibonacci sayı dizisi için üreten fonksiyonu

$$(1 - x - x^2)g(x) = F_0 + xF_1 - x^2F_0 = x$$

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.1.5 (Catalan Özdeşliği)

Fibonacci polinomu için Catalan özdeşliği

$$F_{n-k}F_{n+k} - (F_n)^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2, \quad n \geq k$$

bağıntısı ile ifade edilir (Vajda, 1989).

İspat. Catalan özdeşliğini ispat etmek için Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü kullanılır.

$$\begin{aligned} F_{n-k}F_{n+k} - (F_n)^2 &= \left(\frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n-k}\beta^{n+k} - \alpha^{n+k}\beta^{n-k} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n}{5} \\ &= \frac{2(-1)^n - (-1)^n(-1)^k\beta^{2k} - (-1)^n(-1)^k\alpha^{2k}}{5} \\ &= \frac{2(-1)^n - (-1)^{n+k}(\beta^{2k} + \alpha^{2k})}{5} \\ &= \frac{2(-1)^n + (-1)^{n+k+1}(5F_k^2 - 2(-1)^k)}{5} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2 + \frac{2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1}}{5} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2. \end{aligned}$$

Catalan özdeşliği, Fibonacci sayılarının özel bir matematiksel ifadesidir. Bu özdeşliğin bazı özel durumları sırada verilecek olan teoremlerde gösterilecektir.

Teorem 2.1.6 (Cassini Özdeşliği)

Fibonacci sayı dizisi için Cassini özdeşliği

$$F_{n-1}F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^n, \quad n \geq 1$$

eşitliğiyle ifade edilir (Vajda, 1989).

İspat. İspatı tümevarım metodu ile gösterilecektir.

$n = 1$ için $F_0F_2 - (F_1)^2 = 0 \cdot 1 - 1 = (-1)^1$ eşitlik sağlanır.

$n = k$ için $F_{k-1}F_{k+1} - (F_k)^2 = (-1)^k$ eşitliğini doğru kabul edelim. Buna göre;

$$\begin{aligned}
n = k + 1 \text{ için } & F_k F_{k+2} - (F_{k+1})^2 = (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - (F_{k+1})^2 \\
& = F_k F_{k+1} + (F_{k+1})^2 - F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_{k+1} - (F_{k+1})^2 \\
& = F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} - (F_{k+1})^2 - (-1)^k \\
& = F_k F_{k+1} - F_k (F_k + F_{k-1}) + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n = k + 1$ için eşitlik sağlandığından her $n \geq 1$ için verilen ifade sağlanır.

Fibonacci sayıları içerisinde önemli yere sahip olan Cassini bağıntısı Catalan özdeşliğinin özel bir durumudur. Birçok teoremin temelini oluşturan Cassini özdeşliği, İtalyan matematikçi Jean Domenique Cassini ile ortaya çıkmıştır. Bu özdeşlik Curry'nin paradoksu olarak bilinen meşhur bir geometrik paradoksun ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Teorem 2.1.7 (D'Ocagne Özdeşliği)

Fibonacci sayı dizisi için D'Ocagne formülü

$$F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}, \quad m, n \geq 1$$

eşitliği ile verilir (Koshy, 2001).

İspat. İspatı için Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} &= \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{\alpha^{m+n+1} - \alpha^m \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \beta^m + \beta^{m+n+1}}{5} - \frac{\alpha^{m+n+1} - \alpha^{m+1} \beta^n - \alpha^n \beta^{m+1} + \beta^{m+n+1}}{5} \\
&= \frac{-\alpha^m \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \beta^m + \alpha^{m+1} \beta^n + \alpha^n \beta^{m+1}}{5} \\
&= \frac{\alpha^m \beta^n (\alpha - \beta) - \alpha^n \beta^m (\alpha - \beta)}{5} \\
&= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m)}{5} \\
&= \frac{(-1)^n (\alpha - \beta) F_{m-n}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^n F_{m-n}.$$

D'Ocagne özdeşliği de Catalan özdeşliğinin özel bir genellemesi olup Fransız matematikçi Philbert Maurice d'Ocagne tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.1.8 (Honsberger Özdeşliği)

Fibonacci sayı dizisi için Honsberger formülü

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}, \quad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

eşitliği ile verilir (Koshy, 2001).

İspat. İspatı için Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} &= \left(\frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{\alpha^{m+n-1}(1+\alpha^2) + \beta^{m+n-1}(1+\beta^2) - \alpha^{m-1}\beta^n(1+\alpha\beta) - \alpha^n\beta^{m-1}(1+\alpha\beta)}{5} \\
&= \frac{\alpha^{m+n-1}(1+\alpha^2) + \beta^{m+n-1}(1+\beta^2)}{5} \\
&= \frac{\alpha^{m+n-1}(2+\alpha) + \beta^{m+n-1}(2+\beta)}{5} \\
&= \frac{\alpha^{m+n-1}\left(2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta^{m+n-1}\left(2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{5} \\
&= \frac{\alpha^{m+n-1}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta^{m+n-1}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}{5} \\
&= \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{\sqrt{5}} \\
&= F_{m+n}.
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.9 (Vajda Özdeşliği)

Fibonacci sayı dizisi için Vajda formülü

$$F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} = (-1)^n F_i F_j, \quad m, n \geq 1$$

eşitliği ile verilir (Vajda, 1989).

İspat. İspat için Teorem 2.1.8. eşitliği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} &= (F_nF_{i-1} + F_{n+1}F_i)F_{n+j} - F_n(F_{i-1}F_{n+j} + F_iF_{n+j+1}) \\ &= (F_nF_{i-1} + F_{n+1}F_i)F_{n+j} - F_nF_{i-1}F_{n+j} - F_nF_iF_{n+j+1} \\ &= (F_nF_{i-1} + F_{n+1}F_i - F_nF_{i-1})F_{n+j} - F_nF_iF_{n+j+1} \\ &= (F_{n+1}F_i)F_{n+j} - F_nF_iF_{n+j+1} \\ &= F_i(F_{n+1}F_{n+j} - F_nF_{n+j+1}) \\ &= F_i(-1)^{2n+1}(F_nF_{n+j+1} - F_{n+1}F_{n+j}) \\ &= F_i(-1)^{n-j-1}F_{(n+1)-(n+j+1)} \\ &= F_i(-1)^{n-j-1}F_{-j} \\ &= (-1)^n F_i F_j. \end{aligned}$$

Catalan özdeşliğinin farklı bir genellemesi olan Vajda özdeşliği, ilk olarak Steven Vajda tarafından verilmiştir.

2.2. Fibonacci Polinomu

Tanım 2.2.1

Fibonacci polinomunu $f_n(x)$ şeklinde gösterilir ve başlangıç değerleri $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ olacak şekilde

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x), \quad n \geq 3$$

şeklinde ifade edilir (Bicknell, 1970).

Tanım 2.2.2

Fibonacci polinomunun Binet formülü

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\alpha = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ dir (Bicknell, 1970).

Fibonacci polinomlarının bazı değerleri şu şekildedir;

$$F_n(x) = \{1, x, x^2 + 1, x^3 + 2x, x^4 + 3x^2 + 1, x^5 + 4x^3 + 3x, \dots\}$$

Tanım 2.2.3

Fibonacci polinomları

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}, \quad n \geq 1$$

şeklinde matris yardımıyla gösterilebilir (Koshy, 2001).

Teorem 2.2.4

$F_n(x)$ Fibonacci polinomu için üreten fonksiyonu

$$g(t) = \frac{t}{1 - xt - t^2}$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. $g(t)$ Fibonacci polinomunun üreten fonksiyonu olsun. Buna göre;

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) t^n$$

eşitliğiyle birlikte $xtg(t)$ ve $t^2g(t)$ eşitlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$xtg(t) = \sum_{n=0}^{\infty} xF_n(x) t^{n+1}, \quad t^2g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) t^{n+2}.$$

Bu eşitlikleri kullanarak Fibonacci polinomu için üreten fonksiyonu

$$(1 - xt - t^2)g(x) = F_0(x) + tF_1(x) - xtF_0(x) = t$$

$$g(x) = \frac{t}{1 - xt - t^2}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.5 (Catalan Özdeşliği)

Fibonacci polinomu için Catalan özdeşliği

$$F_{n-k}(x)F_{n+k}(x) - (F_n(x))^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2(x), \quad n \geq k$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. İspat için Fibonacci polinomunun Binet formülü kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} F_{n-k}(x)F_{n+k}(x) - (F_n(x))^2 &= \left(\frac{\alpha^{n-k}(x) - \beta^{n-k}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \left(\frac{\alpha^{n+k}(x) - \beta^{n+k}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) - \left(\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{2n}(x) - (\alpha^{n+k}(x)\beta^{n-k}(x) - \alpha^{n-k}(x)\beta^{n+k}(x)) + \beta^{2n}(x)}{x^2 + 4} - \frac{\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) - 2(-1)^n}{x^2 + 4} \\ &= \frac{2(-1)^n - (-1)^n(-1)^k\beta^{2k}(x) - (-1)^n(-1)^k\alpha^{2k}(x)}{x^2 + 4} \\ &= \frac{2(-1)^n - (-1)^{n+k}(\beta^{2k}(x) + \alpha^{2k}(x))}{x^2 + 4} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2(x) + \frac{2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1}}{x^2 + 4} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2(x) + \frac{2(-1)^n + 2(-1)^{n+1}}{x^2 + 4} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2(x). \end{aligned}$$

Teorem 2.2.6 (Cassini Özdeşliği)

Fibonacci polinomu için Cassini özdeşliği

$$F_{n-1}(x)F_{n+1}(x) - (F_n(x))^2 = (-1)^n, \quad n \geq k$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. İspatı için Catalan özdeşliğinde $k = 1$ yazılarak verilen eşitlik sağlanır.

Teorem 2.2.7 (Honsberger Özdeşliği)

Fibonacci polinomu için Honsberger özdeşliği

$$F_{m+n}(x) = F_{m-1}(x)F_n(x) + F_m(x)F_{n+1}(x), \quad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

İspat. İspatı Fibonacci polinomunun Binet formülü kullanılarak yapılacaktır.

$$\begin{aligned} F_{m-1}(x)F_n(x) + F_m(x)F_{n+1}(x) &= \left(\frac{\alpha^{m-1}(x) - \beta^{m-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \left(\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) + \\ &\left(\frac{\alpha^m(x) - \beta^m(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \\ &= \frac{\alpha^{m+n-1}(x) - \alpha^{m-1}(x)\beta^n(x) - \alpha^n(x)\beta^{m-1}(x) + \beta^{m+n-1}(x)}{x^2 + 4} \\ &+ \frac{\alpha^{m+n+1}(x) - \alpha^m(x)\beta^{n+1}(x) - \alpha^{n+1}(x)\beta^m(x) + \beta^{m+n+1}(x)}{x^2 + 4} \\ &= \frac{\alpha^{m+n-1}(x)(1 + \alpha^2(x)) + \beta^{m+n-1}(x)(1 + \beta^2(x))}{x^2 + 4} \\ &= \frac{\alpha^{m+n-1}(x)(2 + \alpha(x)) + \beta^{m+n-1}(x)(2 + \beta(x))}{x^2 + 4} \\ &= \frac{\alpha^{m+n-1}(x)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \beta^{m+n-1}(x)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + 4}} \\ &= \frac{\alpha^{m+n}(x) - \beta^{m+n}(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} \\ &= F_{m+n}. \end{aligned}$$

2.3. Lucas Sayı Dizisi

Tanım 2.3.1

n . Lucas sayısı L_n ile gösterilir ve başlangıç değerleri $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ olacak şekilde

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 3$$

şeklinde tanımlanmıştır (Koshy, 2001).

Tanım 2.3.2

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri α ve β olsun.

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n \geq 1$$

bağıntısına Lucas sayı dizisinin Binet formülü denir (Koshy, 2001).

Lucas sayı dizisinin bazı değerleri şu şekildedir;

$$L_n = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots\}$$

Tanım 2.3.3

Lucas sayıları $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde

$$RQ^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, \quad n \geq 1$$

şeklinde matris yardımıyla gösterilir (Koshy, 2001).

Teorem 2.3.4

L_n Lucas sayı dizisi için üreten fonksiyonu

$$g(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. $g(x)$ Lucas sayı dizisinin üreten fonksiyonu olsun. Buna göre

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n$$

eşitliğiyle birlikte $xg(x)$ ve $x^2g(x)$ eşitlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} xL_n x^n, \quad x^2g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2L_n x^n.$$

Bu eşitlikler kullanılarak, Lucas sayı dizisi için üreten fonksiyonu

$$(x^2 - x - 1)g(x) = L_0 + x(L_1 - L_0)$$

$$g(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.5 (Catalan Özdeşliği)

Lucas sayı dizisi için Catalan özdeşliği

$$L_{n-k}L_{n+k} - (L_n)^2 = 5(-1)^{n+k}F_k^2, \quad n \geq k$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. İspatı Lucas sayı dizisinin Binet formülü kullanılarak yapılacaktır.

$$\begin{aligned} L_{n-k}L_{n+k} - (L_n)^2 &= (\alpha^{n-k} + \beta^{n-k})(\alpha^{n+k} + \beta^{n+k}) - (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n} + (\alpha^{n+k}\beta^{n-k} + \alpha^{n-k}\beta^{n+k}) + \beta^{2n} - (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(-1)^n) \\ &= [(\alpha\beta)^n\alpha^{-k}\beta^k + (\alpha\beta)^n\alpha^k\beta^{-k}] - 2(-1)^n \\ &= 2(-1)^{n+1} + (-1)^n(-1)^k\beta^{2k} + (-1)^n(-1)^k\alpha^{2k} \\ &= 2(-1)^{n+1} + (-1)^{n+k}(\beta^{2k} + \alpha^{2k}) \\ &= 5(-1)^{n+k}F_k^2 + 2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2 + 2(-1)^n + 2(-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2. \end{aligned}$$

Teorem 2.3.6 (Cassini Özdeşliği)

Lucas sayı dizisi için Cassini özdeşliği

$$L_{n-1}L_{n+1} - (L_n)^2 = 5(-1)^{n+1}, \quad n \geq 1$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. Teorem 2.3.5.'te $k = 1$ yazılarak istenen eşitlik elde edilir.

2.4. Lucas Polinomu

Tanım 2.4.1

Lucas polinomu $L_n(x)$ şeklinde gösterilir ve başlangıç değerleri $l_0(x) = 2$, $l_1(x) = x$ olacak şekilde

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

Lucas polinomunun bazı değerleri şu şekildedir;

$$L_n(x) = \{x, x^2 + 2, x^3 + 3x, x^4 + 4x^2 + 2, x^5 + 5x^3 + 5x, \dots\}$$

Tanım 2.4.2

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri α ve β olsun.

$$L_n = \alpha^n(x) + \beta^n(x), \quad n \geq 1$$

bağıntısına Lucas polinomunun Binet formülü denir (Koshy, 2001).

Teorem 2.4.3

L_n Lucas polinomu için üreten fonksiyonu

$$g(t) = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. $g(t)$ Lucas polinomunun üreten fonksiyonu olsun. Buna göre

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

eşitliğiyle birlikte $xtg(t)$ ve $t^2g(t)$ eşitlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$xtg(t) = \sum_{n=0}^{\infty} xL_n(x) t^{n+1}, \quad t^2g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+2}.$$

Bu eşitlikleri kullanarak, Lucas polinomu için üreten fonksiyonu

$$(1 - xt - t^2)g(t) = L_0(x) + tL_1(x) - xtL_0(x) = 2 - xt$$

$$g(t) = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.4.4 (Catalan Özdeşliği)

Lucas polinomu için Catalan özdeşliği

$$L_{n-k}(x)L_{n+k}(x) - (L_n(x))^2 = (x^2 + 4)(-1)^{n+k}F_k^2(x), \quad n \geq k$$

eşitliği ile sağlanır (Koshy, 2001).

İspat. İspatı yapmak için Lucas polinomunun Binet formülü kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} L_{n-k}(x)L_{n+k}(x) - (L_n(x))^2 &= (\alpha^{n-k}(x) + \beta^{n-k}(x))(\alpha^{n+k}(x) + \beta^{n+k}(x)) - \\ &(\alpha^n(x) + \beta^n(x))^2 \\ &= \alpha^{2n}(x) + (\alpha^{n+k}(x)\beta^{n-k}(x) + \alpha^{n-k}(x)\beta^{n+k}(x)) + \beta^{2n}(x) - (\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + \\ &2(-1)^n) \\ &= 2(-1)^{n+1} + (-1)^n(-1)^k\beta^{2k}(x) + (-1)^n(-1)^k\alpha^{2k}(x) \\ &= 2(-1)^{n+1} + (-1)^{n+k}(\beta^{2k}(x) + \alpha^{2k}(x)) \\ &= 5(-1)^{n+k}F_k^2(x) + 2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2(x) + 2(-1)^n + 2(-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2(x). \end{aligned}$$

Teorem 2.4.5 (Cassini Özdeşliği)

Lucas polinomu için Cassini özdeşliği

$$L_{n-1}(x)L_{n+1}(x) - (L_n(x))^2 = (x^2 + 4)(-1)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

eşitliğiyle ifade edilir (Koshy, 2001).

İspat. Teorem 2.4.4.'te $k = 1$ yazılarak istenen eşitlik bulunur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde k -Fibonacci sayılarının yeni ailesi ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

n ve k sıfırdan farklı doğal sayılar olmak üzere, $n = mk + r$ ($0 \leq r < k$) olacak şekilde farklı m ve r sayıları vardır. Bu bölümde verilecek tanım ve teoremlerde bu kural dikkate alınacaktır.

3.1. k -Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 3.1.1

$1 - x - x^3 - x^4$ karakteristik denkleminin kökleri α ve β olsun.

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{(\sqrt{5})^k} (\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r (\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r}$$

bağıntısı k -Fibonacci sayılarının Binet formülüdür. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir (Mikkawy ve Sogabe, 2010).

Tanım 2.1.2. ve Tanım 3.1.1. kullanılarak Fibonacci sayı dizisi ve k -Fibonacci sayı dizisi arasındaki ilişki

$$F_n^{(k)} = [F_m]^{k-r} [F_{m+1}]^r \quad (3.1)$$

şeklinde bulunur (Mikkawy ve Sogabe, 2010).

k -Fibonacci sayı dizisi için bazı değerler Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1. k -Fibonacci sayı dizisi

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2	1	1	2	4	6	9	15	25	40	64
3	1	1	1	2	4	8	12	18	27	45
4	1	1	1	1	2	4	8	16	24	36

Teorem 3.1.2

k -Fibonacci sayı dizisi $F_n^{(k)}$ için

$$F_n^{(2)} = F_{n-1}^{(2)} + F_{n-3}^{(2)} + F_{n-4}^{(2)}, \quad n \geq 4$$

eşitliği sağlanır (Mikkawy ve Sogabe, 2010).

İspat. Önce n sayısının çift olduğu durumlar incelenirse

$$F_{2m}^{(2)} = F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)} + F_{2m-4}^{(2)}$$

elde edilir. Bu eşitliği göstermek için $F_{2m}^{(2)} = [F_m]^2$ ve $F_{2m+1}^{(2)} = F_m F_{m+1}$ eşitliklerini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_{2m}^{(2)} &= [F_m]^2 \\
&= F_m(F_{m-1} + F_{m-2}) \\
&= F_m F_{m-1} + F_m F_{m-2} \\
&= F_m F_{m-1} + F_{m-2} F_{m-1} + (F_{m-2})^2 \\
&= F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)} + F_{2m-4}^{(2)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde n sayısının tek olduğu durumlar için de sağlandığı gösterilir.

Böylece

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_{2m}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)}$$

eşitliği elde edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.3

2-Fibonacci sayı dizisi için üreten fonksiyonu

$$G_n^{(2)}(x) = \frac{1}{1 - x - x^3 - x^4}$$

eşitliği ile verilir (Mikkawy ve Sogabe, 2010).

İspat. $G_n^{(2)}(x)$, 2-Fibonacci sayı dizisinin üreten fonksiyonu olsun. Buna göre

$$G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)} x^n$$

eşitliğiyle birlikte $xG_n^{(2)}(x)$, $x^3G_n^{(2)}(x)$ ve $x^4G_n^{(2)}(x)$ eşitlikleri Teorem 3.1.2. kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$xG_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-1}^{(2)} x^n, x^3G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-3}^{(2)} x^n, x^4G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-4}^{(2)} x^n.$$

Bu eşitlikleri kullanarak

$$\begin{aligned} & (1 - x - x^3 - x^4)G_n^{(2)}(x) \\ &= \left(F_0^{(2)} + xF_1^{(2)} + x^2F_2^{(2)} + x^3F_3^{(2)}\right) - \left(xF_0^{(2)} + x^2F_1^{(2)} + x^3F_2^{(2)}\right) - \left(x^3F_0^{(2)}\right) + \\ & \sum_{n=4}^{\infty} \left(F_n^{(2)} - F_{n-1}^{(2)} - F_{n-3}^{(2)} + F_{n-4}^{(2)}\right)x^n = 1. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece üreten fonksiyonu

$$G_n^{(2)}(x) = \frac{1}{1 - x - x^3 - x^4}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.4

k -Fibonacci sayı dizisi ve bilinen Fibonacci sayı dizisi arasında

$$i. \quad F_{2n}^{(2)} = [F_n]^2$$

- ii.** $F_{2n+1}^{(2)} = F_n F_{n+1}$
- iii.** $F_{2n+1}^{(2)} = F_{2n}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)}$
- iv.** $F_{3n}^{(3)} = [F_n]^3$
- v.** $F_{3n+1}^{(3)} = [F_n]^2 F_{n+1}$
- vi.** $F_{3n+1}^{(3)} = F_{3n}^{(3)} + F_{3n-1}^{(3)}$
- vii.** $F_{4n+1}^{(4)} = F_{4n}^{(4)} + F_{4n-1}^{(4)}$

bağıntıları verilir (Mikkawy ve Sogabe, 2010).



4. BULGULAR

Bu bölümde Mikkawy ve Sogabe (2010) tarafından tanımlanan k -Fibonacci sayılarının yeni bir ailesinin Catalan, Cassini, D'Ocagne, Honsberger ve Vajda özdeşlikleri verilip ispatlanmıştır. Bu yeni ailenin polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomların, bilinen Fibonacci polinomları ile bağlantısı gösterilmiştir. Catalan ve onun genellemeleri olan Cassini, D'Ocagne, Honsberger ve Vajda özdeşlikleri tanımlanıp ispatlanmıştır.

4.1. k -Fibonacci Sayı Dizisi

Teorem 4.1.1 (Catalan Özdeşliği)

k -Fibonacci sayı dizisi için Catalan özdeşliği

$$F_{nk+rk+t}^{(k)} F_{nk-rk+t}^{(k)} - \left(F_{nk+t}^{(k)}\right)^2 = \begin{cases} F_n^{2k-2} F_{r+1}^2 (-1)^{n+r+1}, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad n, k \geq 2$$

eşitliği ile ifade edilir.

İspat. (3.1) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} F_{nk+rk+t}^{(k)} F_{nk-rk+t}^{(k)} - \left(F_{nk+t}^{(k)}\right)^2 &= (F_n^{k-1} F_{n+r+t})(F_n^{k-1} F_{n-r+t}) - (F_n^{k-1} F_{n+t})^2 \\ &= F_n^{2k-2} (F_{n+r+t} F_{n-r+t} - (F_{n+t})^2) \end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned} F_n^{2k-2} (F_{n+r+t} F_{n-r+t} - (F_{n+t})^2) &= F_n^{2k-2} (F_{n+r+1} F_{n-r+1} - (F_{n+1})^2) \\ &= F_n^{2k-2} F_{r+1}^2 (-1)^{n+r+1} \end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N})$ için;

$$\begin{aligned} F_n^{2k-2} (F_{n+r+t} F_{n-r+t} - (F_{n+t})^2) &= F_n^{2k-2} (F_{n+m} F_{n+m-2} - (F_{n+m-1})^2) \\ &= F_n^{2k-2} \left(F_{2n+2m-2}^{(k)} - F_{2n+2m-2}^{(k)}\right) \end{aligned}$$

$$= 0$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2 (Cassini Özdeşliği)

k -Fibonacci sayı dizisi için Cassini özdeşliği

$$F_{nk+t}^{(k)} F_{nk+t-2}^{(k)} - \left(F_{nk+t-1}^{(k)}\right)^2 = \begin{cases} F_{n+1}^{2k-2} (-1)^{n+1}, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}, \quad n, k \geq 2$$

eşitliğiyle ifade edilir.

İspat. İspat için (3.1) eşitliği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} F_{nk+t}^{(k)} F_{nk+t-2}^{(k)} - \left(F_{nk+t-1}^{(k)}\right)^2 &= (F_{n+1}^{k-1} F_{n+t}) (F_{n+1}^{k-1} F_{n+t-2}) - (F_{n+1}^{k-1} F_{n+t-1})^2 \\ &= F_{n+1}^{2k-2} (F_{n+t} F_{n+t-2} - (F_{n+t-1})^2) \end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{2k-2} (F_{n+t} F_{n+t-2} - (F_{n+t-1})^2) &= F_{n+1}^{2k-2} (F_{n+1} F_{n-1} - (F_n)^2) \\ &= F_{n+1}^{2k-2} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N})$ için;

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{2k-2} (F_{n+t} F_{n+t-2} - (F_{n+t-1})^2) &= F_{n+1}^{2k-2} (F_{n+m} F_{n+m-2} - (F_{n+m-1})^2) \\ &= F_{n+1}^{2k-2} (F_{2n+2m-2}^{(k)} - F_{2n+2m-2}^{(k)}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teorem 4.1.3 (D'Ocagne Özdeşliği)

k -Fibonacci sayı dizisi için D'Ocagne özdeşliği

$$F_{mk}^{(k)} F_{nk+1}^{(k)} - F_{nk}^{(k)} F_{mk-1}^{(k)} = (F_n F_m)^{k-1} F_{m-n} (-1)^n, \quad m, n \geq 2$$

eşitliği ile ifade edilir.

İspat. İspat için (3.1) eşitliği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
F_{mk}^{(k)} F_{nk+1}^{(k)} - F_{nk}^{(k)} F_{mk-1}^{(k)} &= (F_m^k (F_{m+1})^0) (F_n^{k-1} F_{n+1}) - (F_n^k (F_{n+1})^0) (F_m^{k-1} F_{m+1}) \\
&= (F_m^k) (F_n^{k-1} F_{n+1}) - (F_n^k) (F_m^{k-1} F_{m+1}) \\
&= (F_n F_m)^{k-1} (F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1}) \\
&= (F_n F_m)^{k-1} F_{m-n} (-1)^n.
\end{aligned}$$

Teorem 4.1.4 (Honsberger Özdeşliği)

k -Fibonacci sayı dizisi için Honsberger özdeşliği

$$F_{mk-1}^{(k)} F_{nk}^{(k)} + F_{mk}^{(k)} F_{nk+1}^{(k)} = [F_m F_n]^{k-1} F_{m+n}, \quad n, k \in \mathbb{Z}^+$$

eşitliği ile ifade edilir.

İspat. İspat için (3.1) eşitliği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
F_{mk-1}^{(k)} F_{nk}^{(k)} + F_{mk}^{(k)} F_{nk+1}^{(k)} &= (F_m^{k-1} F_{m-1}) (F_n^k (F_{n+1})^0) + (F_m^k (F_{m+1})^0) (F_n^{k-1} F_{n+1}) \\
&= F_m^{k-1} F_n^{k-1} (F_{m-1} F_n - F_m F_{n+1}) \\
&= [F_m F_n]^{k-1} (F_{m-1} F_n - F_m F_{n+1}) \\
&= [F_m F_n]^{k-1} F_{m+n}.
\end{aligned}$$

Teorem 4.1.5 (Vajda Özdeşliği)

k -Fibonacci sayı dizisi için Vajda özdeşliği

$$F_{nk+i+t}^{(k)} F_{nk+j+t}^{(k)} - F_{nk+t}^{(k)} F_{nk+i+j+t}^{(k)} = \begin{cases} F_i F_j (F_n)^{2k-2} (-1)^{n+1}, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

eşitliği ile ifade edilir.

İspat. İspat için (3.1) eşitliği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
& F_{nk+i+t}^{(k)} F_{nk+j+t}^{(k)} - F_{nk+t}^{(k)} F_{nk+i+j+t}^{(k)} = \left(F_n^{k-1} F_{n+t+i} \right) \left(F_n^{k-1} F_{n+t+j} \right) - \\
& \left(F_n^{k-1} F_{n+t} \right) \left(F_n^{k-1} F_{n+t+i+j} \right) \\
& = (F_n)^{2k-2} (F_{n+t+i} F_{n+t+j} - F_{n+t} F_{n+t+i+j})
\end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned}
& (F_n)^{2k-2} (F_{n+t+i} F_{n+t+j} - F_{n+t} F_{n+t+i+j}) = (F_n)^{2k-2} (F_{n+i+1} F_{n+j+1} - F_{n+1} F_{n+i+j+1}) \\
& = F_i F_j (F_n)^{2k-2} (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N})$ için;

$$\begin{aligned}
& (F_n)^{2k-2} (F_{n+t+i} F_{n+t+j} - F_{n+t} F_{n+t+i+j}) = (F_n)^{2k-2} (F_{n+m+i} F_{m+n+j} - F_{m+n} F_{m+n+i+j}) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

4.2. k -Fibonacci Polinomu

Tanım 4.2.1

$1 - xt - xt^3 - t^4$ karakteristik denkleminin kökleri α ve β olsun.

$$F_n^{(k)}(x) = \left(\frac{\alpha^{m+1}(x) - \beta^{m+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^{k-r} \left(\frac{\alpha^{m+2}(x) - \beta^{m+2}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^r$$

bağıntısı $F_n^{(k)}(x)$ şeklinde gösterilen k -Fibonacci polinomunun Binet formülüdür.

Burada $\alpha = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ dir.

Tanım 4.2.2

k -Fibonacci polinomları $f_n(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}^{(k)}(x) & F_n^{(k)}(x) \\ F_n^{(k)}(x) & F_{n-1}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$ olacak şekilde

$$F_{n+1}^{(k)}(x) f_n(x) = \begin{bmatrix} F_{kn+k+1}^{(k)}(x) & F_{kn+k}^{(k)}(x) \\ F_{kn+k}^{(k)}(x) & F_{kn+k-1}^{(k)}(x) \end{bmatrix}, \quad n \geq 1$$

şeklinde matris gösterimiyle ifade edilir.

Tanım 2.2.2 ve Tanım 4.2.1 kullanılarak Fibonacci polinomu ve k -Fibonacci polinomu arasındaki ilişki

$$F_n^{(k)}(x) = [F_m(x)]^{k-r} [F_{m+1}(x)]^r \quad (4.1)$$

bağıntısıyla verilir.

(4.1) eşitliği yardımıyla elde edilen k -Fibonacci polinomu için bazı terimler Tablo 4.1’de verilmiştir.

Tablo 4.1. k -Fibonacci Polinomu

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
2	1	x	x^2	$x^3 + x$	$x^4 + 2x^2 + 1$	$x^5 + x^3 + 4x$	$x^6 + 4x^4 + 4x^2$	$x^7 + 5x^5 + 7x^3 + 2x$
3	1	x	x^2	x^3	$x^4 + x^2$	$x^5 + 2x^3 + x$	$x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$	$x^7 + 4x^5 + 5x^3 + 2x$
4	1	x	x^2	x^3	x^4	$x^5 + x^3$	$x^6 + 2x^4 + x^2$	$x^7 + 3x^5 + 3x^3 + x$

k -Fibonacci polinomları ile alakalı tanım ve teoremlerin ispatında yardımcı olacak (4.1) eşitliği göz önüne alınacak olursa, k -Fibonacci polinomları ve bilinen Fibonacci polinomları arasında bazı ilişkiler bulunabilir. Sıradaki teoremde bunlardan birkaçı verilip ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.3

2-Fibonacci polinomu ve bilinen Fibonacci polinomu arasında

- i. $F_{2n}^{(2)}(x) = [F_n(x)]^2$
- ii. $F_{2n+1}^{(2)}(x) = F_n(x)F_{n+1}(x)$
- iii. $F_{2n+1}^{(2)}(x) = xF_{2n}^{(2)}(x) + F_{2n-1}^{(2)}(x)$

bağıntıları verilebilir.

İspat. İspat için (4.1) eşitliği kullanılacaktır.

ii. $k = 2, r = 1$ olsun. Buradan $n = mk + r = 4m + 1$ elde edilir. Böylece

$$F_n^{(2)}(x) = [F_m(x)]^{2-1}[F_{m+1}(x)]^1$$

$$F_n^{(2)}(x) = [F_m(x)][F_{m+1}(x)]$$

$$F_{2m+1}^{(2)}(x) = [F_m(x)][F_{m+1}(x)]$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.4

3-Fibonacci polinomu ve bilinen Fibonacci polinomu arasında

i. $F_{3n}^{(3)}(x) = [F_n(x)]^3$

ii. $F_{3n+1}^{(3)}(x) = [F_n(x)]^2 F_{n+1}(x)$

iii. $F_{3n+1}^{(3)}(x) = x F_{3n}^{(3)}(x) + F_{3n-1}^{(3)}(x)$

bağıntıları verilebilir.

İspat. İspat için (4.1) eşitliği kullanılacaktır.

i. $k = 3, r = 0$ olsun. Buradan $n = mk + r = 3m$ elde edilir. Böylece

$$F_n^{(3)}(x) = [F_m(x)]^{3-0}[F_{m+1}(x)]^0$$

$$F_n^{(3)}(x) = [F_m(x)]^3$$

$$F_{4m}^{(3)}(x) = [F_m(x)]^3$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.5

4-Fibonacci polinomu ve bilinen Fibonacci polinomu arasında

i. $F_{4n}^{(4)}(x) = [F_n(x)]^4$

ii. $F_{4n+1}^{(4)}(x) = [F_n(x)]^3 F_{n+1}(x)$

- iii. $F_{4n+2}^{(4)}(x) = [F_n(x)]^2[F_{n+1}(x)]^2$
- iv. $F_{4n+3}^{(4)}(x) = F_n(x)[F_{n+1}(x)]^3$
- v. $F_{4n+1}^{(4)}(x) = xF_{4n}^{(4)}(x) + F_{4n-1}^{(4)}(x)$

bağıntıları verilebilir.

İspat. İspat için (4.1) eşitliği kullanılacaktır.

- ii. $k = 4, r = 0$ olsun. Buradan $n = mk + r = 4m$ elde edilir. Böylece

$$F_n^{(4)}(x) = [F_m(x)]^{4-0}[F_{m+1}(x)]^0$$

$$F_n^{(4)}(x) = [F_m(x)]^4$$

$$F_{4m}^{(4)}(x) = [F_m(x)]^4$$

eşitliği sağlanır.

- iii. $k = 4, r = 1$ olsun. Buradan $n = mk + r = 4m + 1$ elde edilir. Böylece

$$F_n^{(4)}(x) = [F_m(x)]^{4-1}[F_{m+1}(x)]^1$$

$$F_n^{(4)}(x) = [F_m(x)]^3[F_{m+1}(x)]^1$$

$$F_{4m+1}^{(4)}(x) = [F_m(x)]^3[F_{m+1}(x)]^1$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.6

$k = 2$ olacak şekilde k -Fibonacci polinomu $F_n^{(k)}(x)$ için

$$F_n^{(2)} = xF_{n-1}^{(2)}(x) + xF_{n-3}^{(2)}(x) + F_{n-4}^{(2)}(x), \quad n \geq 4$$

şeklinde bir tekrarlı bağıntı vardır.

İspat. Önce n sayısının çift olduğu durumlar incelenirse

$$F_{2m}^{(2)}(x) = xF_{2m-1}^{(2)}(x) + xF_{2m-3}^{(2)}(x) + F_{2m-4}^{(2)}(x)$$

elde edilir. Bu eşitliği göstermek için $F_{2m}^{(2)}(x) = (F_m(x))^2$ ve $F_{2m+1}^{(2)}(x) =$

$F_m(x)F_{m+1}(x)$ eşitlikleri kullanılırsa

$$F_{2m}^{(2)}(x) = (F_m(x))^2$$

$$= F_m(x)(xF_{m-1}(x) + F_{m-2}(x))$$

$$\begin{aligned}
&= xF_m(x)F_{m-1}(x) + xF_{m-2}(x)F_{m-1}(x) + (F_{m-2}(x))^2 \\
&= xF_{2m-1}^{(2)}(x) + xF_{2m-3}^{(2)}(x) + F_{2m-4}^{(2)}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde n sayısının tek olduğu durumlar için de eşitlik sağlanır.

Böylece

$$F_{2m+1}^{(2)}(x) = xF_{2m}^{(2)}(x) + xF_{2m-2}^{(2)}(x) + F_{2m-3}^{(2)}(x)$$

eşitliği elde edilerek ispat tamamlanır. Bu eşitlik, 2-Fibonacci polinomunun geniş çaplı terimlerinin bulunmasında kolaylık sağlar.

Teorem 4.2.7

2-Fibonacci polinomunun üreten fonksiyonu

$$G_n^{(2)}(t) = \frac{1}{1 - xt - xt^3 - t^4}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. $G_n^{(2)}(t)$, 2-Fibonacci polinomunun üreten fonksiyonu olsun. Buna göre

$$G_n^{(2)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)}(x)t^n$$

eşitliğiyle birlikte $xtG_n^{(2)}(t)$, $xt^3G_n^{(2)}(t)$ ve $t^4G_n^{(2)}(t)$ eşitlikleri Teorem 4.2.6. kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$xtG_n^{(2)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-1}^{(2)}(x)t^n, \quad xt^3G_n^{(2)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-3}^{(2)}(x)t^n,$$

$$t^4G_n^{(2)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-4}^{(2)}(x)t^n$$

Bu eşitlikleri kullanarak

$$(1 - xt - xt^3 - t^4)G_n^{(2)}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(F_0^{(2)}(x) + tF_1^{(2)}(x) + t^2F_2^{(2)}(x) + t^3F_3^{(2)}(x) \right) - \left(xtF_0^{(2)}(x) + xt^2F_1^{(2)}(x) + \right. \\
&\quad \left. xt^3F_2^{(2)}(x) \right) - \left(xt^3F_0^{(2)}(x) \right) + \sum_{n=4}^{\infty} \left(F_n^{(2)}(x) - xF_{n-1}^{(2)}(x) - xF_{n-3}^{(2)}(x) + F_{n-4}^{(2)}(x) \right) t^n
\end{aligned}$$

$$= (1 + tx + t^2x^2 + t^3(x^3 + x)) - (tx + t^2x^2 + t^3x^3) - xt^3 + 0 = 1.$$

elde edilir. Böylece üreten fonksiyonu

$$G_n^{(2)}(t) = \frac{1}{1 - xt - xt^3 - t^4}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.8 (Catalan Özdeşliği)

Catalan özdeşliğinin k -Fibonacci polinomu için elde edilen bağıntısı

$$F_{nk+r}^{(k)}(x)F_{nk-r}^{(k)}(x) - \left(F_{nk}^{(k)}(x)\right)^2 = F_n^{2k-2}(x)F_r^2(x)(-1)^{n+1}, \quad n, k \geq 2$$

şeklindedir.

İspat. (4.1) eşitliği kullanılarak ispat yapılır.

$$\begin{aligned} F_{nk+r}^{(k)}(x)F_{nk-r}^{(k)}(x) - \left(F_{nk}^{(k)}(x)\right)^2 &= \left(F_n^{k-1}(x)F_{n+r}(x)\right)\left(F_n^{k-1}(x)F_{n-r}(x)\right) - \\ &\quad (F_n^{k-1}(x)F_n(x))^2 \\ &= F_n^{2k-2}(x)(F_{n+r}(x)F_{n-r}(x) - (F_n(x))^2) \\ &= F_n^{2k-2}(x)F_r^2(x)(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Teorem 4.2.9 (Cassini Özdeşliği)

Cassini özdeşliğinin k -Fibonacci polinomu için elde edilen bağıntısı

$$F_{nk}^{(k)}(x)F_{nk-2}^{(k)}(x) - \left(F_{nk-1}^{(k)}(x)\right)^2 = F_n^{2k-2}(x)(-1)^n, \quad n, k \geq 2$$

şeklindedir.

İspat. (4.1) eşitliği kullanılarak ispat yapılır.

$$\begin{aligned} F_{nk}^{(k)}(x)F_{nk-2}^{(k)}(x) - \left(F_{nk-1}^{(k)}(x)\right)^2 &= (F_n^{k-1}(x)F_{n+1}(x))(F_n^{k-1}(x)F_{n-1}(x)) - \\ &\quad (F_n^{k-1}(x)F_n(x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_n^{2k-2}(x)(F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - (F_n(x))^2) \\
&= F_n^{2k-2}(x)(-1)^n.
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.10 (D'Ocagne Özdeşliği)

D'Ocagne özdeşliğinin k -Fibonacci polinomu için elde edilen bağıntısı

$$F_{mk}^{(k)}(x)F_{nk+1}^{(k)}(x) - F_{nk}^{(k)}(x)F_{mk-1}^{(k)}(x) = (F_n(x)F_m(x))^{k-1}F_{m-n}(x)(-1)^n, \quad m, n \geq 2$$

şeklindedir.

İspat. (4.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&F_{mk}^{(k)}(x)F_{nk+1}^{(k)}(x) - F_{nk}^{(k)}(x)F_{mk-1}^{(k)}(x) = \left(F_m^k(x)(F_{m+1}(x))^0\right)\left(F_n^{k-1}(x)F_{n+1}(x)\right) - \\
&\left(F_n^k(x)(F_{n+1}(x))^0\right)\left(F_m^{k-1}(x)F_{m+1}(x)\right) \\
&= \left(F_m^k(x)\right)\left(F_n^{k-1}(x)F_{n+1}(x)\right) - \left(F_n^k(x)\right)\left(F_m^{k-1}(x)F_{m+1}(x)\right) \\
&= (F_n(x)F_m(x))^{k-1}F_{m-n}(x)(-1)^n
\end{aligned}$$

ispat elde edilir.

Teorem 4.2.11 (Honsberger Özdeşliği)

Honsberger özdeşliğinin k -Fibonacci polinomu için elde edilen bağıntısı

$$F_{mk-1}^{(k)}(x)F_{nk}^{(k)}(x) + F_{mk}^{(k)}(x)F_{nk+1}^{(k)}(x) = [F_m(x)F_n(x)]^{k-1}F_{m+n}(x), \quad m, n, k \in \mathbb{Z}^+$$

şeklindedir.

İspat. İspat için (4.1) eşitliği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
&F_{mk-1}^{(k)}(x)F_{nk}^{(k)}(x) + F_{mk}^{(k)}(x)F_{nk+1}^{(k)}(x) = \left(F_m^{k-1}(x)F_{m-1}(x)\right)\left(F_n^k(x)(F_{n+1}(x))^0\right) + \\
&\left(F_m^k(x)(F_{m+1}(x))^0\right)\left(F_n^{k-1}(x)F_{n+1}(x)\right) \\
&= F_m^{k-1}(x)F_n^{k-1}(x)(F_{m-1}(x)F_n(x) + F_m(x)F_{n+1}(x))
\end{aligned}$$

$$= [F_m(x)F_n(x)]^{k-1}F_{m+n}(x).$$

Teorem 4.2.12 (Vajda Özdeşliği)

Vajda özdeşliğinin k -Fibonacci polinomu için elde edilen bağıntısı

$$F_{nk+t+i}^{(k)}(x)F_{nk+t+j}^{(k)}(x) - F_{nk+t}^{(k)}(x)F_{nk+t+i+j}^{(k)}(x) = \begin{cases} F_i(x)F_j(x)(F_n(x))^{2k-2}(-1)^{n+1}, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $n, k \geq 2$ dir.

İspat. İspat için (4.1) eşitliği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} & F_{nk+t+i}^{(k)}(x)F_{nk+t+j}^{(k)}(x) - F_{nk+t}^{(k)}(x)F_{nk+t+i+j}^{(k)}(x) \\ &= (F_n^{k-1}(x)F_{n+t+i}(x))(F_n^{k-1}(x)F_{n+t+j}(x)) - (F_n^{k-1}(x)F_{n+t}(x))(F_n^{k-1}(x)F_{n+t+i+j}(x)) \\ &= (F_n(x))^{2k-2}(F_{n+t+i}(x)F_{n+t+j}(x) - F_{n+t}(x)F_{n+t+i+j}(x)) \end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned} & (F_n(x))^{2k-2}(F_{n+t+i}(x)F_{n+t+j}(x) - F_{n+t}(x)F_{n+t+i+j}(x)) \\ &= (F_n(x))^{2k-2}(F_{n+i+1}(x)F_{n+j+1}(x) - F_{n+1}(x)F_{n+i+j+1}(x)) \\ &= F_i(x)F_j(x)(F_n(x))^{2k-2}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N})$ için;

$$\begin{aligned} & (F_n(x))^{2k-2}(F_{n+t+i}(x)F_{n+t+j}(x) - F_{n+t}(x)F_{n+t+i+j}(x)) \\ &= [F_n(x)]^{2k-2}(F_{n+m+i}(x)F_{m+n+j}(x) - F_{m+n}(x)F_{m+n+i+j}(x)) = 0. \end{aligned}$$

Teorem 4.2.13

$k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için k -Fibonacci polinomu ve bilinen Fibonacci polinomu arasında

$$[F_{m+1}(x)]^k - [F_m(x)]^k = F_{(m+1)k}^{(k)}(x) - F_{mk}^{(k)}(x)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (4.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} F_{(m+1)k}^{(k)}(x) - F_{mk}^{(k)}(x) &= (F_m(x))^{k-k} (F_{m+1}(x))^k - (F_m(x))^{k-0} (F_{m+1}(x))^0 \\ &= [F_{m+1}(x)]^k - [F_m(x)]^k \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.14

k -Fibonacci polinomları için

$$F_{kn+1}^{(k)}(x) = xF_{kn}^{(k)}(x) + F_{kn-1}^{(k)}(x), \quad n \in \mathbb{Z}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (4.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} xF_{kn}^{(k)}(x) + F_{kn-1}^{(k)}(x) &= xF_n^k + (F_{n-1}(x)F_n^{k-1}(x)) \\ &= F_n^{k-1}(x)(xF_n(x) + F_{n-1}(x)) \\ &= F_{kn+1}^{(k)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.15

2-Fibonacci polinomu ile bilinen Fibonacci polinomu arasında

$$F_{2n-2}^{(2)}(x) - F_n(x)F_{n-2}(x) = (-1)^{n+1}$$

bağıntısı vardır.

İspat.

$$\begin{aligned} F_{2n-2}^{(2)}(x) - F_n(x)F_{n-2}(x) &= F_{n-1}^2(x) - F_n(x)F_{n-2}(x) \\ &= -(F_n(x)F_{n-2}(x) - F_{n-1}^2(x)) \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Teorem 4.2.16

$n \in \mathbb{Z}$ için

$$(x^2 + 4)F_{2n}^{(2)}(x) + 4(-1)^n = \begin{cases} (\alpha^n(x) + \beta^n(x))^2, & n \text{ çift ise} \\ (\alpha^n(x) - \beta^n(x))^2, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) + \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} F_{2n}^{(2)}(x) &= F_n^2(x) = \frac{1}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} \{ \alpha^{2n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^n + \beta^{2n}(x) \} \\ &= \frac{\alpha^{2n}(x) - 2(-1)^n + \beta^{2n}(x) + 4(-1)^n - 4(-1)^n}{(\sqrt{x^2 + 4})^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(x^2 + 4)F_{2n}^{(2)}(x) + 4(-1)^n = \alpha^{2n}(x) - 2(-1)^n + \beta^{2n}(x) + 4(-1)^n$$

n çift ise;

$$(x^2 + 4)F_{2n}^{(2)}(x) + 4 = (\alpha^n(x) + \beta^n(x))^2,$$

n tek ise;

$$(x^2 + 4)F_{2n}^{(2)}(x) - 4 = (\alpha^n(x) - \beta^n(x))^2.$$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, k –Fibonacci sayı dizisi için Catalan, Cassini, D’ocagne, Honsberger ve Vajda özdeşlikleri tanımlanıp ispatlandı. k –Fibonacci polinomunun yeni bir ailesi tanımlandı. Buna ek olarak Binet formülü, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve üreten fonksiyonu ifade edildi ve ispatları verildi. Ayrıca Fibonacci sayı dizisinde sağlanan bazı özdeşlikler bu yeni aileye genelleştirildi.

Bu çalışmadaki bulgular temel alınarak yeni tanımlar ve özellikler elde edilebilir. Bu yeni aile, diğer sayı serilerine uyarlanarak yeni aileler ve polinomları tanımlanabilir.



KAYNAKLAR

- Aydın, H. and Dikici, R. (1998) “General Fibonacci sequences in finite groups”, *Fibonacci Quarterly*, 36, 216-221.
- Bicknell, M. (1970) “Introduction to Fibonacci polynomials and their divisibility properties”, *Fibonacci Quarterly*, 8, 407-420.
- Bolat, C. and Köse, H. (2010) “On The Properties of k-Fibonacci Numbers”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 22(5), 1097-1105.
- Boussayoud, A., Kerada, M. and Harrouche, N. (2017) “On the k-Lucas Numbers and Lucas Polynomials”, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 5(4), 121-125.
- Cahill, N. D., D Errico, J. R., and Spence, J. P. (2003), “Complex factorizations of the Fibonacci and Lucas numbers”, *Fibonacci Quarterly*, 41(1), 13-19.
- Catarino, P. (2014) “On some identities for k-Fibonacci sequence”, *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 9(1), 37-42.
- Çelik, S., Durukan, İ. and Özkan, E. (2021) “New recurrences on Pell numbers, Pell-Lucas numbers, Jacobsthal numbers and Jacobsthal-Lucas numbers”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 150, 111173.
- Dikici, R. and Özkan, E. (2003) “An application of Fibonacci sequences in groups”, *Applied Mathematics and Computation*, 136(2–3), 323-331.
- Dresden, G. P. and Du, Z. (2014) “A Simplified Binet Formula for k-Generalized Fibonacci Numbers”, *J. Integer Seq.*, 17(4), 14-4.
- Dunlap, R. A. (1997) “The golden ratio and Fibonacci numbers”, *World Scientific.*, Canada, 35-70.
- Er, M. C. (1984) “Sums of Fibonacci numbers by matrix methods”, *Fibonacci Quart*, 22(3), 204-207.
- Falcon, S. (2011) “On the k-Lucas numbers”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 6(21), 1039-1050.
- Falcon, S. and Plaza, A. (2009) “On k-Fibonacci Sequences and Polynomials and their derivatives”, *Chaos, Solutions & Fractals*, 39, 1005-1019.
- Filipponi, P. and Horadam, A. F. (1993) “Second derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials”, *The Fibonacci Quarterly*, 31(3), 194-204.
- Godase, A. D. and Dhakne, M. B. (2014) “On the properties of k-Fibonacci and k-Lucas numbers”, *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2(1), 100-106.

- Halıcı, S. (2012) "On Fibonacci quaternions", *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 22(2), 321-327.
- Hoggatt, V. E. (1969) "Fibonacci and Lucas numbers", *Houghton Mifflin*, California, 30-79.
- Hoggatt, V. E. and Bicknell, M. (1973) "Generalized Fibonacci polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 11, 457-465.
- Hoggatt Jr, V. E. and Bicknell, M. (1973) "Roots of Fibonacci polynomials", *The Fibonacci Quarterly*, 11(3), 271-274.
- Horadam, A. F. (1961) "A Generalized Fibonacci Sequence", *Amer. Math. Montly*, 68(5), 827-232.
- Kalman, D. (1982) "Generalized Fibonacci numbers by matrix methods", *Fibonacci Quarterly*, 20(1), 73-76.
- Koshy, T. (2001) "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", *John Wiley & sons, inc.*, Canada, 51-476.
- Koshy, T. (2014) "Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications", *Springer*, New York, 31-410.
- Lengyel, T. (1995) "The order of the Fibonacci and Lucas numbers", *Fibonacci Quart*, 33(3), 234-239.
- Luca, F. (2000) "Fibonacci and Lucas numbers with only one distinct digit", *system*, 3(2), y2.
- Ma, R., and Zhang, W. (2007), "Several identities involving the Fibonacci numbers and Lucas numbers", *Fibonacci Quarterly*, 45(2), 164.
- Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010) "A New Family of k-Fibonacci numbers", *Applied Mathematics and Mathematics and Computation*, 215, 4456-4461.
- Miles, E. P. (1960) "Generalized Fibonacci numbers and associated matrices", *The American Mathematical Monthly*, 67(8), 745-752.
- Nalli, A. and Haukkanen, P. (2009) "On generalized Fibonacci and Lucas polynomials", *Chaos, Solitons&Fractals*, 42(5), 3179-3186.
- Öcal, A.A., Tuğlu, N. and Altınışik, E. (2005) "On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers", *Applied Mathematics and Computation*, 170, 584-596.
- Özkan, E. (2014) "Truncated Lucas sequence and its period", *Applied Mathematics and Computation*, 232, 285-291.
- Özkan, E., Aydoğdu, A. and Altun, İ. (2017) "Some Identities for a Family of Fibonacci and Lucas Number", *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 3(10), 295-303.

- Özkan, E. and Altun, İ. (2019) “Generalized Lucas Polynomials and Relationships Between the Fibonacci Polynomials and Lucas Polynomials”, *Communucations in Algebra*, 47(10), 4020-4030.
- Özkan, E., Altun, İ. and Göçer, A. (2017) “On relationship among a new family of k-Fibonacci, k-lucas numbers, Fibonacci and lucas numbers”, *Chiang Mai Journal of Science*, 44(3), 1744-1750.
- Özkan, E., Aydın, H. and Dikici, R. (2003) “Applications of Fibonacci Sequences In A Finite Nilpotent Group”, *Applied mathematics and computation*, 141 (2-3), 565-578.
- Özkan, E. and Kuloğlu, B. (2020) “On A Jacobsthal-Like Sequence Associated with k- Jacobsthal-Lucas Sequence”, *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, 10 (2), 3-13.
- Özkan, E. and Kuloğlu, B. (2021) “On The New Narayana Polynomials, The Gauss Narayana Numbers and Their Polynomials”, *Asian-European Journal of Mathematics*, 14 (6), 2150100.
- Özkan, E. and Taştan, M. (2019) “k-Fibonacci Polynomials in The Family of Fibonacci Numbers”, *Research&Reviews: Discrete Mathematical Structure*, 6(3), 19-22.
- Özkan, E. and Taştan, M. (2021) “On A New Family of Gauss k-Lucas Numbers And Their Polynomials”, *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(6), 2150101.
- Özkan, E. and Taştan, M. (2020) “On Gauss Fibonacci polynomials, on Gauss Lucas polynomials and their applications”, *Communications in Algebra*, 48(3), 952-960.
- Özkan, E., Taştan, M. and Aydoğdu, A. (2019) “3-Fibonacci Polynomials in The Family of Fibonacci Numbers”, *Erzincan University Journal of the Institute of Science and Technology*, 12(2), 926-933.
- Özkan, E., Taştan, M. and Aydoğdu, A. (2018) “2-Fibonacci Polynomials in the Family of Fibonacci Numbers”, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 24, 47-55.
- Özkan, E., Taştan, M., and Güngör, O. (2020) “Catalan transform of the k-lucas numbers”, *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 13(özel sayı I), 145-149.
- Ricci, P. E. (1995) “Generalized Lucas polynomials and Fibonacci polynomials”, *Riv. Mat. Univ. Parma*, 4, 137-146.
- Solak, S. (2005). “On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers”, *Applied Mathematics and Computation*, 160(1), 125-132.
- Taşçı, D. and Kılıç, E. (2004) “On the order-k generalized Lucas numbers”, *Applied mathematics and computation*, 155(3), 637-641.

- Taştan, M. and Özkan, E. (2021) “On The Gauss k-Fibonacci Polynomials”, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 9(1).
- Taştan, M, Özkan, E. and Shannon, A. (2021) “The Generalized k-Fibonacci Polynomials And Generalized k-Lucas Polynomials”, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27 (2), 148-158.
- Tingting, W. and Wenpeng, Z. (2012) “Some identities involving Fibonacci, Lucas polynomials and their applications”, *Bulletin mathématique de la société des sciences mathématiques de Roumanie*, 95-103.
- Vajda S. (1989) “Lucas numbers, and the Golden Section. Theory and applications”, *Chichester: Ellis Horword*.
- Vorobiev, N. N. (2002) “Fibonacci numbers”, *Springer Science & Business Media.*, Basel: birkhauser verlag, 5-174.
- Yayenie, O. (2011) “A note on generalized Fibonacci sequences”, *Applied Mathematics and Computation*, 217(12), 5603-5611.
- Yuan, Y. and Zhang, W. (2002) “Some identities involving the Fibonacci polynomials”, *Fibonacci Quarterly*, 40(4), 314-318.
- Zafer, Ş. and Keskin, R. (2013) “Some New Identities Concerning Generalized Fibonacci and Lucas Numbers”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42(3), 211-222.
- Zhang, W. (2004). “Some identities involving the Fibonacci numbers and Lucas numbers”, *Fibonacci Quarterly*, 42, 149-154.
- Waddill, M. E. and Sacks, L. (1967) “Another generalized Fibonacci sequence”, *The Fibonacci Quarterly*, 5(3), 209-222.
- Webb, W. A. and Parberry, E. A. (1969). “Divisibility properties of Fibonacci polynomials”, *Fibonacci Quarterly*, 7(5), 457-463.
- Wilcox, H. J. (1986) “Fibonacci sequences of period n in groups”, *Fibonacci Quarterly*, 24(4), 356-361.