



**A_n -TIPLİ AUSLANDER-REİTEN
KUİVERLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşenur DİNÇER

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$\mathbb{A}_n$ -TIPLI AUSLANDER-REİTEN KUİVERLER

Ayşenur DİNÇER

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2023

TEZ ONAY SAYFASI

Ayşenur DİNÇER tarafından hazırlanan “ A_n -Tipli Auslander-Reiten Kuiverler” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

Başkan : Doç. Dr. Engin MERMUT
Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tuğba YALÇIN UZUN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
..... /..... /..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

21/06/2023

Ayşenur DİNÇER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

A_n -TİPLİ AUSLANDER-REİTEN KUİVERLER

Ayşenur DİNÇER

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konuyla ilgili genel bilgilerin verildiği giriş kısmı yer almaktadır. İkinci bölümde, tez çalışması için gerekli olan temel tanımlar ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, A_n -Tipli Auslander-Reiten kuiverlerin oluşturulmasına dair farklı yöntemler verilmiş ve bu yöntemler örneklerle açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ise Auslander-Reiten kuiverlerin kullanımı ile ilgili bazı bilgilere yer verilmiştir.

2023, v + 64 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuiver, Kuiver temsili, Temsil morfizmi, Ayrıştırılmaz temsil, Basit temsil, İnjektif temsil, Projektif temsil, Auslander-Reiten kuiver.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

AUSLANDER-REİTEN QUIVERS OF TYPE $\mathbb{A}_n$

Ayşenur DİNÇER

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Fatma KAYNARCA

This thesis consists of four parts. In the first chapter, there is the introduction part where general information about the subject is given. In the second chapter, the basic definitions and features required for the thesis work are given. In the third chapter, different methods of constructing Auslander-Reiten quivers of type $\mathbb{A}_n$ are given and these methods are explained with examples. In the fourth chapter, some information about the use of Auslander-Reiten quivers is given.

2023, v + 64 pages

Keywords: Quiver, Quiver representation, Representation morphism, Indecomposable representation, Simple representation, Injective representation, Projective representation, Auslander- Reiten quiver.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli katkılarıyla bana oldukça fazla zaman ayıran, tüm bilgilerini benimle paylaşan, fikirleri ile bana yol gösteren, gerekli motivasyon ile çalışmamı sağlayan ve desteğini üzerimden hiç eksik etmeyen çok değerli danışanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA'ya sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca araştırma sürecinde değerli katkıları ile destek olan, bilgi ve görüşlerini paylaşarak bana yol gösteren Sayın Doç. Dr. Engin MERMUT'a ve fikirlerini benimle paylaşan ve görüşlerine önem verdiğim Sayın Prof. Dr. Noyan Fevzi ER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi bütün desteklerini benden esirgemeyen, aldığım her bir karar da yanımda olan, sabır ve sevgileri ile beni her konuda olduğu gibi tez çalışmam için de cesaretlendiren güzel aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayşenur DİNÇER
Afyonkarahisar 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	5
2.1 Bazı Cebirsel Yapılar	5
2.2 Kategorik ve Homolojik Kavramlar	8
2.3 Temsil Teori Kavramları	14
2.4 Auslander-Reiten Ötelemeleri ve Formülleri	28
3. AUSLANDER-REİTEN KUİVERLER	30
3.1 Ayrıştırılmaz Temsiller ve İndirgenemez Morfizmler	30
3.2 Örgü Algoritması	38
3.3 τ -Yörüngeler	41
3.4 Coxeter Funktor ve Cartan Matris	43
3.5 $n + 3$ Köşeli Çokgenin Köşegenleştirilmesi	48
3.6 Auslander-Reiten Kuiverlerin Kullanımı	51
3.7 Temsil Teoride Son Gelişmeler	57
4. KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	65

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

Q	Bir kuiver
Q^{op}	Karşıt kuiver
Q_0	Bir Q kuiverindeki köşelerin kümesi
Q_1	Bir Q kuiverindeki okların kümesi
s	Her oku başlangıç köşesine götüren fonksiyon
t	Her oku bitiş köşesine götüren fonksiyon
M_i	Bir i köşesine karşılık gelen vektör uzayı
φ_α	Bir α okuna karşılık gelen lineer dönüşüm
$M = (M_i, \varphi_\alpha)$	Bir kuiverin bir temsili
$\dim M$	Bir M temsiliinin boyut vektörü
$\hookrightarrow$	İçerim morfizmi
$\twoheadrightarrow$	İzdüşüm morfizmi
$\text{im} f$	Bir f temsil morfizminin görüntüsü
$\ker f$	Bir f temsil morfizminin çekirdeği
$\text{coker} f$	Bir f temsil morfizminin eşçekirdeği
$\text{Hom}(M, M')$	M 'den M' 'ye giden tüm temsil morfizmlerinin kümesi
$\text{isoclass}(M)$	Bir M temsiline izomorf olan tüm temsillerin sınıfı
$\text{Rep} Q$	Bir Q kuiverinin tüm temsillerinin kategorisi
$\text{rep} Q$	Bir Q kuiverinin tüm sonlu boyutlu temsillerinin kategorisi
$S(i)$	Bir Q kuiverinin i köşesindeki basit temsil
$I(i)$	Bir Q kuiverinin i köşesindeki injektif temsil
$P(i)$	Bir Q kuiverinin i köşesindeki projektif temsil
$c = (i \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l j)$	i 'de başlayıp j 'de biten l uzunluklu bir yol
$D = \text{Hom}_k(-, k)$	Standart dualite fonktoru
$\text{Hom}(-, A)$	Kontravaryant Hom fonktoru
ν	Nakayama fonktoru
τ, τ^{-1}	Auslander-Reiten ötelemeleri
$\text{Ext}^1(M, N)$	M 'nin N ile genişlemelerinin birinci grubu

1. GİRİŞ

Genel anlamda temsil teorisi, soyut matematiksel nesneleri olabildiğince somut bir şekilde temsil etmeyi amaçlayan cebirin bir dalı olarak özetlenebilir. Daha açık olarak temsil teorii; soyut cebirsel yapıların elemanlarını, vektör uzayları arasındaki birer lineer dönüşüm gibi ele alarak somutlaştıran, özellikleri çok iyi bilinen matrisler ve lineer dönüşümler gibi lineer cebirdeki bazı araçları kullanarak, bu yapıların soyut teorilerini basitleştiren ve bunların üzerine kurulan modüllerin homolojik cebirsel özelliklerini inceleyen bir alan olarak ifade edilebilir. Temsil teorii alanındaki ilk çalışmalar; 1972’de Peter Gabriel’in kuiver temsillerinin teorisini geliştirmesi ve 1974, 1975 ve 1977 yıllarında Maurice Auslander ve Idun Reiten’in neredeyse parçalanamayan dizileri tanıtmalarıyla başlamıştır. Temsil teorii’nin temel amacı tüm ayrıştırılmaz temsilleri ve bunların arasındaki morfizmleri izomorfizma farkıyla sınıflandırmaya dayanmaktadır.

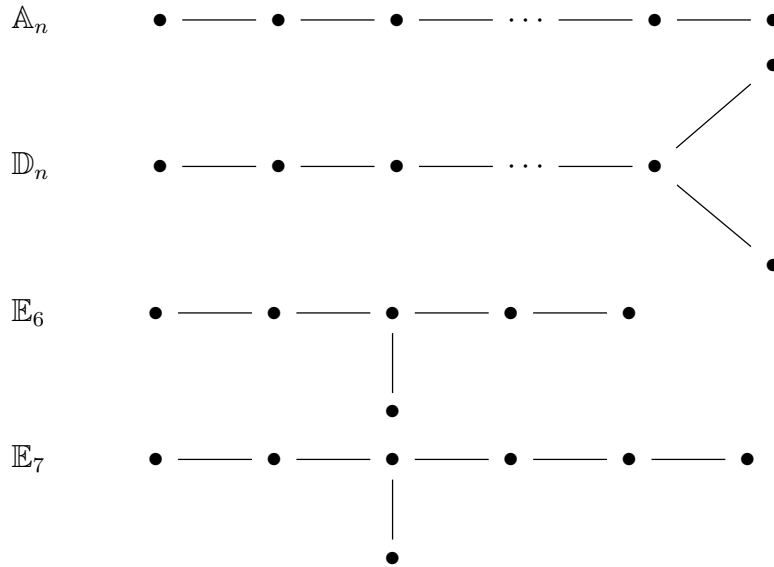
Bir kuiver; sonlu köşelerden ve bunların arasındaki sonlu yönlendirilmiş oklardan oluşan bir tür çizgedir. Bir kuiverdeki tüm okların yönleri ihmal edildiğinde ortaya çıkan çizgeye *kuiverin altında yatan çizge* denir. Kuiverler; bu çizgelere göre sonlu (finite), evcil (tame) ve vahşi (wild) tipli olmak üzere üç sınıfa ayrılmış ve özellikleri incelenmiştir.

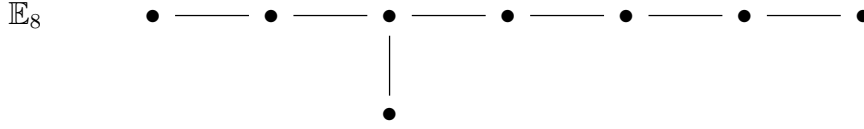
Bir kuiver temsili, kuiverdeki her bir köşeye karşılık bir vektör uzayı ve köşeler arasındaki her bir oka karşılık bir lineer dönüşümün oluşturduğu bir sistemdir. Verilen bir kuiverin temsillerini yazmak için vektör uzaylarına dolayısıyla bir $\mathbf{k}$ cismine ihtiyaç duyulur. Bu çalışmada $\mathbf{k}$; cebirsel kapalı bir cisim olarak kabul edilecektir. Birimli bir A halkası aynı zamanda her $a, b \in A$ ve her $\lambda \in \mathbf{k}$ için $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ özelliğini sağlayacak şekilde bir $\mathbf{k}$ -vektör uzayı yapısına sahip ise A ’ya bir $\mathbf{k}$ -cebir (k -algebra) ya da kısaca *cebir* adı verilir. Bir A cebiri vektör uzayı olarak sonlu boyutlu ise A *sonlu boyutlu cebir* (*finite dimensional algebra*) olarak adlandırılır. Cebirsel kapalı bir cisim üzerindeki sonlu boyutlu cebirlerin temsil teorii’nde, (özellikle sınırlı (bound)) kuiverlerin ve onların temsillerinin önemli rol oynadığı Gabriel

(1972) tarafından ortaya konmuştur.

Gabriel (1972); temel (basic) ve bağlantılı (connected) her bir A cebiri için tek türlü olarak tanımlanan ve *cebiri sıradan kuiveri* (*ordinary quiver*) ya da *Gabriel kuiveri* olarak adlandırılan bir Q_A kuiverinin var olduğunu ve $\mathbf{k}Q_A$ 'nın bağıntılardan (relations) oluşan geçerli (admissible) bir I ideali için $A \cong \mathbf{k}Q_A/I$ olduğunu göstermiştir. Daha sonra cebirleri karakterize etmek için bu kuiverleri kullanmış ve modüller ile temsiller arasında köprü görevi gören şu önemli teoremi kanıtlamıştır: Bir Q kuiverindeki tüm yolları taban kabul eden $\mathbf{k}Q$ yol cebiri (path algebra) üzerine kurulan modül kategorisi ile Q kuiverinin tüm sonlu boyutlu temsillerinin $\text{rep}Q$ kategorisi birbirine denktir. Bu sayede bir kuiverin her bir temsili bir modül olarak gözönüne alınıp ve her bir modül de bir kuiverin bir temsili olarak görselleştirilebilmektedir.

Bundan başka, Gabriel (1972); cebiri sonlu temsil tipli (finite representation type) olarak adlandırılan, sonlu sayıda birbirine izomorf olmayan ayrıştırılmaz temsile sahip olan tüm kuiverleri, 1940'lı yıllarda Sovyet matematikçi Eugene Dynkin tarafından tanımlanan ve yarıbasit Lie cebirlerinin sınıflandırmasında kullanılan diyagramlardan yararlanarak sınıflandırmıştır. Bir kuiverin sonlu tipli olması için gerek ve yeter koşul olarak kuiverin altında yatan çizgenin aşağıda belirtilen ADE-Dynkin tipli çizgelerden biri olması gerektiğini göstermiştir: $n \geq 1$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için





Bu sonuç, adını Weyl gruplarındaki Coxeter dönüşümleriyle bağlantısından alan, Coxeter fonktörleri kullanılarak Bernšteĭn vd. (1973) tarafından, Gabriel'in ispatından farklı bir teknikle kanıtlanmıştır. Gabriel (1972), ayrıca bir cebirin sonlu temsil tipli olması için gerek ve yeter koşulun kuiverin ayrıştırılmaz temsillerinin izosınıfları ile kuivere karşılık gelen kök sistemlerinin pozitif kökleri arasında birebir eşlemenin var olması gerektiğini de göstermiştir. Bu sonuç da Bernšteĭn vd. (1973) tarafından sentezlenerek farklı bir biçimde kanıtlanmıştır.

Tek yanlı idealleri üzerinde azalan zincir şartını sağlayan, yani tek yanlı ideallerinin sonsuz bir azalan zinciri bulunmayan bir halka *Artinian* ya da *Artin* halka olarak adlandırılmıştır. İdeallerin azalan zincir şartını sağlamasının, sonlu halkaları ve böylece herhangi bir cisim üzerine kurulan sonlu boyutlu vektör uzaylarını genelleştirdiğini, gösteren ilk kişinin Emil Artin olması sebebiyle bu isim verilmiştir. Ayrıca R değişmeli Artin bir halka olmak üzere $\text{Im}\phi$ kümesi Λ 'nın merkezinde kap-sanacak şekilde bir $\phi : R \rightarrow \Lambda$ halka homomorfizmasıyla birlikte bir Λ halkasına bir R -cebir (R -algebra) adı verilir. Bundan başka, Λ bir R -modül olarak sonlu üretilmiş ise, Λ 'ya bir *artin R -cebir* denir. Artin cebirlerin en önemli örnekleri bir cisim üzerine kurulan sonlu boyutlu cebirlerdir.

Artin cebirlerinin temsil teorisinde önemli rol oynayan, kısaca AR-kuiver olarak da adlandırılan, Auslander-Reiten kuiverler ilk olarak yetmişli yılların ortalarında Claus Michael Ringel tarafından tanıtılmıştır. Sonlu tipli bir Q kuiveri verildiğinde, köşeleri; Q 'nun ayrıştırılmaz (indecomposable) temsillerinin izosınıfları, okları; bu temsiller arasındaki indirgenemez (irreducible) morfizmler uzayının bir bazı olan yeni kuivere *Auslander-Reiten kuiver* adı verilir ve Γ_Q ile gösterilir. Bir kuiverin Auslander-Reiten kuiveri oluşturulduğunda o kuiverin yol cebiri üzerine kurulan modül kategorisi hakkında üç önemli bilgiye sahip olunur: Birincisi; Auslander-Reiten kuiverin köşeleri ayrıştırılmaz modüller olduğundan, bunların dik toplamaları alınarak, modül kategorisinin diğer tüm modülleri belirlenir. İkincisi; okları

ayrıştırılmaz modüller arasındaki indirgenemez morfizmlerin bir bazı olduğundan, bunların bileşkesi ya da lineer bileşimleri alınarak, modül kategorisindeki modüllerin arasındaki bazı morfizmler izomorfizma farkıyla belirlenmiş olur. Üçüncüsü; Auslander-Reiten kuiverdeki ağları oluşturan, bir modül ile onun Auslander-Reiten ötelemesi (translation) arasındaki doğal genişleme olan, normalde parçalanan (split) olmayan fakat parçalanan olmaya en yakın kısa tam diziler olan neredeyse parçalanan diziler (almost split sequences) belirlenir.

Tez çalışmasında, $\mathbb{A}_n$ -tipli kuiverlerin Auslander-Reiten kuiverlerinin oluşturulmasında kullanılan çeşitli yöntemler anlatılacak ve farklı örnekler üzerinde bunların nasıl uygulandığı açıklanacaktır. İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan cebirsel, homolojik, kategorik ve temsil teoriyle ilgili kavramlar ve özellikler tanıtılacaktır. Üçüncü bölümde, kombinatorik bir yapıya sahip olan Auslander-Reiten kuiverin oluşturulmasında kullanılan; ayrıştırılmaz temsiller ve indirgenemez morfizmler yardımıyla neredeyse parçalanan dizilerden ağların oluşturulması, örgü algoritması, ayrıştırılmaz temsillerin τ -yörüngelerinin hesaplanması, Coxeter fonktör ve Cartan matris yardımıyla temsillerin τ ve τ^{-1} Auslander-Reiten ötelemeleri altında oluşan görüntülerinin boyut vektörlerinin bulunması gibi yöntemler tanıtılacak ve her bir yöntem farklı örneklerle açıklanacaktır. Ayrıca geometrik olarak düzgün bir çokgenin üçgenleştirilmesi yöntemiyle Auslander-Reiten kuiverin nasıl oluşturulduğu gösterilecektir. Dördüncü bölümde ise, bir kuiverin Auslander-Reiten kuiveri neden çizilir sorusuna cevap verilecektir. Modül kategorisindeki ayrıştırılmaz herhangi iki modülün Hom ve Ext uzaylarının boyutunun, bu modüllerin Auslander-Reiten kuiverde birbirlerine göre durumlarına göre nasıl belirlendiği ifade edilecek ve bir ayrıştırılmaz modülün başka bir modüle göre genişlemelerinin nasıl oluşturulduğu anlatılacaktır. Son olarak, temsil teorideki son gelişmelerde Auslander-Reiten kuiverin yeri ve önemi vurgulanacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak olan bazı temel kavramlar, bazı alt başlıklara ayrılarak, tanıtılacak ve kullanılacak olan bazı özellikler ifade edilecektir. Hungerford (1974), Anderson ve Fuller (1974), Dummit ve Foote (2004), Pancar ve Alizade (2016), Assem ve Coelho (2020), Rotman (2009) bu bölümde kullanılan temel kaynaklardır.

2.1. Bazı Cebirsel Yapılar

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan bazı cebirsel yapıların tanımları verilecektir.

Tanım 2.1.1 $\mathbf{k}$ bir cisim olsun. Aşağıdaki denk koşullardan biri sağlanırsa $\mathbf{k}$ 'ya bir *cebirsal kapalı cisim* (*algebraically closed field*) denir.

- (i) $\deg(p) \geq 1$ olacak şekilde her $p \in \mathbf{k}[x]$ polinomunun $\mathbf{k}$ 'da bir kökü vardır.
- (ii) $\mathbf{k}$ üzerindeki her indirgenemez polinomun derecesi 1 dir.
- (iii) $\deg(p) \geq 1$ olacak şekilde her $p \in \mathbf{k}[x]$ polinomu $c, c_1, \dots, c_n \in k$ olmak üzere

$$p = c(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.1.2 $\mathbf{k}$ cebirsel kapalı bir cisim olsun. A birimli bir halka ve aynı zamanda $a, b \in A$ ve $\lambda \in \mathbf{k}$ için

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

özellikli sağlayan bir $\mathbf{k}$ -vektör uzayı yapısına sahipse A 'ya bir *$\mathbf{k}$ -cebiri* (kısaca *cebiri*) (*$\mathbf{k}$ -algebra*) denir. Bir $\mathbf{k}$ -vektör uzayı olarak sonlu boyutlu olması durumunda A 'ya *sonlu boyutlu cebiri* (*finite dimensional algebra*) adı verilir.

Bu çalışmadaki tüm cebirler sonlu boyutlu olacaktır.

Tanım 2.1.3 A bir cebiri olsun. A 'nın elemanları, $a, b \in A$ için $a \times_{op} b = ba$ (b 'nin a ile A 'daki çarpımı) ile tanımlanan yeni çarpma işlemine göre bir cebiri yapısına sahiptir. Buna A 'nın *karşıt cebiri* (*opposite algebra*) denir ve A^{op} ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 Birimli bir R halkası ve toplamsal bir M abelyan grubu için aşağıdaki aksiyomları sağlayan, her $(r, m) \in R \times M$ için rm ile tanımlı bir $M \times R \rightarrow M$ fonksiyonu varsa M bir *sağ R -modül* olarak adlandırılır ve M_R ile gösterilir: her $r, r', r'' \in R$ ve $m, m', m'' \in M$ için

$$(i) (m' + m'')r = m'r + m''r;$$

$$(ii) m(r' + r'') = mr' + mr'';$$

$$(iii) m(r'r'') = (mr')r'';$$

$$(iv) m1_R = m.$$

Benzer olarak tanımlanan bir *sol R -modül* ${}_R M$ ile gösterilir. R ve S halkaları üzerinde, hem bir sol R -modül, hem de bir sağ S -modül olan M ; her $r \in R, s \in S$ ve $m \in M$ için $(rm)s = r(ms)$ olduğu durumda bir (R, S) -bimodül olarak adlandırılır ve ${}_R M_S$ ile gösterilir.

Her bir sağ A -modülün aynı zamanda bir sol A^{op} -modül olduğu açık olup, bu çalışmadaki modüller aksi belirtilmedikçe sonlu boyutlu bir A cebiri üzerindeki sağ A -modüller olacaktır.

Tanım 2.1.5 M bir A -modül olmak üzere M 'nin boştan farklı bir N altkütmesi verilsin. Her $n, n', n'' \in N$ ve her $a \in A$ için $n' + n'' \in N$ ve $na \in N$ oluyorsa N 'ye M 'nin bir *A -altmodülü* (*A -submodule*) adı verilir ve $N \leq M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 Sıfırdan farklı bir modülün kendisinden ve sıfırdan başka altmodülü yoksa *basit* (*simple*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7 M ve N birer A -modül olmak üzere her $m, m', m'' \in M$ ve her $a \in A$ için

$$(i) \varphi(m' + m'') = \varphi(m') + \varphi(m'')$$

$$(ii) \varphi(ma) = \varphi(m)a$$

özelliklerini sağlayan bir $\varphi : M \rightarrow N$ fonksiyonuna bir *A-modül homomorfizmi* (kısaca *A-morfizm*) (*morphism of A-modules*) denir. Ayrıca, birebir olan bir *A-morfizm* bir *monomorfizm*, örten olan bir *A-morfizm* bir *epimorfizm*, hem birebir hem de örten olan bir *A-morfizm* bir *izomorfizm* olarak adlandırılır. Özel olarak bir $\varphi : M \rightarrow M$; *A-morfizmine* bir *endomorfizm*, bir $\varphi : M \rightarrow M$; *A-izomorfizmine* de bir *otomorfizm* denir. Doğal olarak bir *A-vektör uzayı* yapısına sahip, tanım kümesi M ve değer kümesi N olan tüm *A-morfizmlerin* kümesi

$$\text{Hom}_A(M, N) = \{\varphi : M \rightarrow N \mid \varphi \text{ bir } A\text{-morfizm}\}$$

ile gösterilir. $\text{End}_A M$ ile gösterilen M 'nin tüm endomorfizmlerinin kümesi, fonksiyon bileşkesi işlemiyle birlikte bir *A-cebir* olup M 'nin *endomorfizm cebiri* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.8 Bir $\varphi : M \rightarrow N$ *A-morfizminin*;

- (i) *Çekirdeği (kernel)*; $\ker \varphi = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$ kümesi ile,
- (ii) *Görüntüsü (image)*; $\text{im} \varphi = \{\varphi(m) \mid m \in M\}$ kümesi ile,
- (iii) *Eşçekirdeği (cokernel)*; $\text{coker} \varphi = N/\text{im} \varphi = \{n + \text{im} \varphi \mid n \in N\}$ kümesi ile

tanımlanır.

Tanım 2.1.9 M bir *A-modül* olsun. Bir $A_A^d \rightarrow M$ epimorfizminin ve bir $d \geq 0$ sayısının var olması durumunda M 'ye *sonlu üretilmiş (finitely generated)* modül denir.

Tanım 2.1.10 P bir *A-modül* olmak üzere her $\varphi : B \rightarrow C$ epimorfizmi ve her $g : P \rightarrow C$ *A-morfizmi* için

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow h & \downarrow g & & \\ B & \xrightarrow{\varphi} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $g = \varphi h$ olacak şekilde, bir $h : P \rightarrow B$ *A-morfizmi* varsa P 'ye *projektif (projective)* modül denir.

Tanım 2.1.11 I bir A -modül olmak üzere her $\varphi : A \longrightarrow B$ monomorfizmi ve her $g : A \longrightarrow I$ A -morfizmi için

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & & \downarrow g & \swarrow h & \\ & & I & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $g = h\varphi$ olacak şekilde, bir $h : B \longrightarrow I$ A -morfizmi varsa I 'ya *injektif* (*injective*) modül denir.

2.2. Kategorik ve Homolojik Kavramlar

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan bazı kategorik ve homolojik kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.1 Bir $\mathcal{C}$ *kategorisi* (*category*) aşağıdaki biçimde tanımlanan; nesnelerin, morfizmlerin ve bileşkenin oluşturduğu bir $(\text{Ob}\mathcal{C}, \text{Mor}_{\mathcal{C}}, \circ)$ sistemidir, öyle ki:

- (i) *Nesnelerin* (*objects*) $\text{Ob}\mathcal{C}$ sınıfı;
- (ii) Farklı $(A, B) \neq (C, D)$ obje çiftleri için

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$$

özellğine sahip *morfizmlerin* (*morphisms*) $\text{Mor}_{\mathcal{C}}$ kümesi ve;

- (iii) Her bir $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ morfizmi için aşağıdaki özellikleri sağlayan $(g, f) \mapsto g \circ f$ ile tanımlı

$$\circ : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

bileşke (*composition*) işleminden oluşur, öyle ki:

- (a) *Birleşme Özelliği*: Her $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ve her $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ve $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ sağlanır.
- (b) *Birim Eleman Özelliği*: Her $A \in \text{Ob}\mathcal{C}$ objesi ve her $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ morfizmi için $f \circ 1_A = f$ ve $1_A \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ birim morfizmi vardır.

Uyarı 2.2.2 Tez çalışmasında kullanılacak olan bazı kategoriler; bilinen fonksiyon bileşkesiyle birlikte nesneleri ve morfizmleriyle aşağıda verilmiştir.

Nesneleri; bir $\mathbf{k}$ cismi üzerindeki sonlu boyutlu $\mathbf{k}$ -vektör uzayları, morfizmleri; $\mathbf{k}$ -lineer dönüşümler olan kategori $\text{mod}\mathbf{k}$ ile gösterilir.

Nesneleri; bir A bir cebiri üzerindeki sağ A -modüller, morfizmleri; A -morfizmler olan kategori $\text{Mod}A$ ile gösterilir.

Nesneleri; sonlu üretilmiş sağ A -modüller, morfizmleri; A -morfizmler olan kategori ise $\text{mod}A$ ile gösterilir. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe, $\text{mod}A$ kategorisi üzerinde çalışılacaktır.

Tanım 2.2.3 $\mathbf{k}$ bir cisim olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{C}$ kategorisine bir $\mathbf{k}$ -kategori adı verilir:

- i) $\mathcal{C}$ 'deki her X, Y çifti için X 'den Y 'e giden morfizmlerin $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ kümesi bir $\mathbf{k}$ -vektör uzayıdır.
- ii) Morfizimlerin bileşkesi bilineerdir. Yani $f, f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ ve $g, g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ morfizmleri ve $\lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbf{k}$ skalerleri için;

$$g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (g \circ f_1) + \lambda_2 (g \circ f_2)$$

$$(\eta_1 g_1 + \eta_2 g_2) \circ f = (g_1 \circ f) \eta_1 + (g_2 \circ f) \eta_2$$

Tanım 2.2.4 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki $\mathbf{k}$ -kategori olsun. $\mathcal{C}$ 'nin her A nesnesine $\mathcal{D}$ 'nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{C}$ 'deki her $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmine $\mathcal{D}$ 'deki bir $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ morfizmini karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fonksiyonuna bir *kovaryant fonktor* (*covariant functor*) denir, öyle ki:

$$(i) \quad f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \text{ için } F(gf) = F(g)F(f) \text{ dir.}$$

$$(ii) \quad \text{Her } A \in \text{Ob}\mathcal{C} \text{ için } F(1_A) = 1_{F(A)} \text{ dır.}$$

Tanım 2.2.5 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$ 'nin her A nesnesine $\mathcal{D}$ 'nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{C}$ 'deki her $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmine $\mathcal{D}$ 'deki bir $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ morfizmini karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fonksiyonuna bir *kontravaryant fonktor* (*contravariant functor*) denir, öyle ki:

(i) $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ için $F(gf) = F(f)F(g)$ dir.

(ii) Her $A \in \text{Ob}\mathcal{C}$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dir.

Tanım 2.2.6 A ve B ; bir $\mathcal{C}$ $\mathbf{k}$ -kategorisinin sabit nesneleri olmak üzere

(i) $\text{Hom}(A, -)$ fonktoru; $\mathcal{C}$ 'den $\text{mod}\mathbf{k}$ kategorisine giden bir kovaryant funktordur, öyle ki:

(1) $\mathcal{C}$ 'de bir B nesnesini A 'dan B 'ye giden tüm morfizmlerin kümesi olan $\text{Hom}(A, B)$ 'ye götürür.

(2) $\mathcal{C}$ 'de bir $f : B \rightarrow C$ morfizmini $\text{Hom}(A, f)(g) = f_*(g) = f \circ g$ ile tanımlı bir $\text{Hom}(A, f) = f_* = \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ morfizmine götürür. Burada f_* ; f 'nin ileri itmesi (*push forward of f*) olarak adlandırılır.

(ii) $\text{Hom}(-, B)$ fonktoru; $\mathcal{C}$ 'den $\text{mod}\mathbf{k}$ kategorisine giden bir kontravaryant funktordur, öyle ki:

(1) $\mathcal{C}$ 'de bir A nesnesini A 'dan B 'ye giden tüm morfizmlerin kümesi olan $\text{Hom}(A, B)$ 'ye götürür.

(2) $\mathcal{C}$ 'de bir $f : A \rightarrow C$ morfizmini $\text{Hom}(f, B)(g) = f^*(g) = g \circ f$ ile tanımlı bir $\text{Hom}(f, B) = f^* = \text{Hom}(C, B) \rightarrow \text{Hom}(A, B)$ morfizmine götürür. Burada f^* ; f 'nin geri çekmesi (*pull back of f*) olarak adlandırılır.

Uyarı 2.2.7 Tanım 2.2.6(ii)'de B yerine $\mathbf{k}$ cismi alındığında, herhangi bir $\mathbf{k}$ -kategoriden $\text{mod}\mathbf{k}$ kategorisine giden ve *standart dualite* (*standart duality*) olarak adlandırılan $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(-, \mathbf{k})$ fonktoru elde edilir. Bu fonktor kısaca D ile gösterilir.

Tanım 2.2.8 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere $F_1, F_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ iki fonktor olsun. $\mathcal{C}$ 'nin her M, N nesnelerine ve her $f : M \rightarrow N$ morfizmine karşılık aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir $\eta_M : F_1(M) \rightarrow F_2(M)$ izomorfizmi varsa F_1 ve F_2 'ye *functorsal izomorfiktir* (*functorially isomorphic*) denir ve $F_1 \cong F_2$ ile gösterilir:

$$\begin{array}{ccc} F_1(M) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(N) \\ \eta_M \downarrow & & \downarrow \eta_N \\ F_2(M) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(N) \end{array}$$

Bir $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ kovaryant fonktoru için $F' \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ ve $F \circ F' \cong 1_{\mathcal{D}}$ olacak şekilde bir $F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ fonktoru varsa F 'ye *kategorilerin denkliği* (*equivalence of categories*), F' 'ye de F 'nin *sözde-terse* (*quasi-inverse*) adı verilir. Bir sözde terse sahip olan kontravaryant bir fonktor ise bir *dualite* (*duality*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.9 A -morfizmlerin bir sonsuz $\cdots \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$ dizisine, her bir $i \in \mathbb{Z}$ için $\text{im} f_i = \ker f_{i+1}$ olması durumunda *tam* (*exact*) denir. Özel olarak

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

formundaki bir tam diziyi *kısa tam dizi* (*short exact sequence*) denir. Bu kısa tam dizi aynı zamanda M 'nin N ile bir *genişlemesi* (*extension*) olarak ta adlandırılır. M 'nin N ile tüm genişlemelerinin kümesi $\mathcal{E}(M, N)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.10 A -morfizmlerin oluşturduğu $0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ ve $0 \longrightarrow N' \longrightarrow L' \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ kısa tam dizileri verilsin. Aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir (α, β, γ) üçlüsüne bir *kısa tam dizi homomorfizmi* (*homomorphism of short exact sequences*) denir:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

α, β ve γ 'nın birer izomorfizm olması durumunda (α, β, γ) üçlüsüne bir *izomorfizm*, bu dizilere *izomorf dizi*, L ve L' 'ye *izomorf genişlemeler* (*isomorphic extensions*) adı verilir. Ayrıca $N = N'$ ve $M = M'$ ve α ve γ 'nın birim dönüşümler olması durumunda, bu diziler *denk* (*equivalent*) olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.11 A -modüllerin bir $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) $hf = 1_N$ olacak şekilde bir $h : L \rightarrow N$ morfizmi vardır. Bu durumda f 'ye bir *kesit* (*section*) adı verilir.
- (ii) $gk = 1_M$ olacak şekilde bir $k : M \rightarrow L$ morfizmi vardır. Bu durumda g 'ye bir *büzme* (*retraction*) adı verilir.

(iii) Bu dizi; $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} N \oplus M \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisine izomorftur. Özel olarak $L \cong N \oplus M$ dir.

Tanım 2.2.12 Teorem 2.2.11'in denk koşullarından birini sağlayan bir kısa tam diziye *parçalananan* (*split*) dizi denir.

Uyarı 2.2.13 Tanım 2.2.9'da verilen $\mathcal{E}(M, N)$ kümesi özel tanımlı bir toplama işlemine göre, birim elemanı (yani; sıfırı) parçalananan diziler olan, bir grup yapısına sahiptir.

Tanım 2.2.14 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer abelyan kategori olsun.

(a) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ kovaryant bir fonktor olmak üzere

$$(i) \text{ Her } \cdots \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \cdots \text{ tam dizisi için}$$

$$\cdots \longrightarrow F(L) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \longrightarrow \cdots$$

dizisi tam ise, F 'ye *tam fonktor* (*exact functor*) denir.

(ii) Her $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ tam dizisi için

$$0 \longrightarrow F(L) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N)$$

dizisi tam ise, F 'ye *soldan tam fonktor* (*left exact functor*) denir.

(iii) Her $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ tam dizisi için

$$F(L) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \longrightarrow 0$$

dizisi tam ise, F 'ye *sağdan tam fonktor* (*right exact functor*) denir.

(b) $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir kontravaryant fonktor olmak üzere

$$(i) \text{ Her } \cdots \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \cdots \text{ tam dizisi için}$$

$$\cdots \longrightarrow T(N) \xrightarrow{T(g)} T(M) \xrightarrow{T(f)} T(L) \longrightarrow \cdots$$

dizisi tam ise, T 'ye *tam fonktor* (*exact functor*) denir.

(ii) Her $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ tam dizisi için

$$0 \longrightarrow T(N) \xrightarrow{T(g)} T(M) \xrightarrow{T(f)} T(L)$$

dizisi tam ise, T 'ye *soldan tam fonktor* (*left exact functor*) denir.

(iii) Her $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ tam dizisi için

$$T(N) \xrightarrow{T(g)} T(M) \xrightarrow{T(f)} T(L) \longrightarrow 0$$

dizisi tam ise, T 'ye *sağdan tam fonktor* (*right exact functor*) denir.

Uyarı 2.2.15 Tanım 2.2.6'da verilen Hom fonktorları her zaman soldan tam fonktörler olmalarına karşın sağdan tam olmaları bazı koşullar altında gerçekleşir.

Tanım 2.2.16 M bir A -modül olsun. Herhangi $j \geq 0$ için P_j 'ler projektif olmak üzere bir

$$\cdots P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

tam dizisi vardır. $f_0 : P_0 \rightarrow M$ epimorfizmi ile birlikte (2.1)'deki bu tam diziye M 'nin *projektif çözücüsü* (*projective resolution*) denir. Herhangi bir M modülünün bir projektif çözücüsü her zaman vardır. $P_0 \xrightarrow{f_0} M$ ve her $j \geq 1$ için $P_j \longrightarrow \text{im } f_j$ birer projektif örtü ise yukarıdaki tam dizi M 'nin bir *minimal projektif çözücüsü* (*minimal projective resolution*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.17 M bir A -modül olsun. Herhangi $i \geq 0$ için I^i 'ler injektif olmak üzere bir

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g^0} I^0 \xrightarrow{g^1} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^m \xrightarrow{g^{m+1}} I^{m+1} \longrightarrow \cdots \quad (2.2)$$

tam dizisi vardır. $M \xrightarrow{g^0} I^0$ monomorfizmi ile birlikte (2.2)'deki bu diziye M 'nin *injektif çözücüsü* (*injective resolution*) denir. Herhangi bir M modülünün bir injektif çözücüsü her zaman vardır. $M \xrightarrow{g^0} I^0$ ve her $i \geq 1$ için $\text{im } g^i \longrightarrow I^i$ birer injektif bürüm ise yukarıdaki tam dizi M 'nin bir *minimal injektif çözücüsü* (*minimal injective resolution*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.18 N herhangi bir A -modül olmak üzere M 'nin (2.1)'deki gibi bir projektif çözücüsüne $\text{Hom}_A(-, N)$ kontravaryant fonktoru uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f_0^*} \text{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{f_1^*} \text{Hom}_A(P_1, N) \xrightarrow{f_2^*} \dots \\ \dots &\xrightarrow{f_{m-1}^*} \text{Hom}_A(P_{m-1}, N) \xrightarrow{f_m^*} \text{Hom}_A(P_m, N) \xrightarrow{f_{m+1}^*} \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

dizisi elde edilir. $\text{Ext}_A^0(M, N) = \ker f_1^* \cong \text{Hom}_A(M, N)$ olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$\text{Ext}_A^n(M, N) = \ker f_{n+1}^* / \text{im } f_n^*$$

ile tanımlanan $\text{Ext}_A^n(M, N)$ 'ye $\text{Hom}_A(-, N)$ fonktöründen türetilen n . kohomoloji grubu (n^{th} cohomology group derived from the functor $\text{Hom}_A(-, N)$) denir.

Uyarı 2.2.19 Uyarı 2.2.13'de verilen genişlemelerin $\mathcal{E}(M, N)$ grubu ile $\text{Ext}_A^1(M, N)$ grubu arasında bir izomorfizm vardır.

2.3. Temsil Teori Kavramları

Bu bölümde, tez çalışması için gerekli olan bazı temsil teori kavramları çeşitli örnekler verilerek tanıtılacaktır. Ayrıca üçüncü bölümünde kullanılacak olan bazı özellikler ve sonuçlar ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.3.1

Q_0 : Köşe (*vertex*) lerin bir kümesi,

Q_1 : Ok (*arrow*) ların bir kümesi,

$s : Q_1 \longrightarrow Q_0$ fonksiyonu, her bir oku *başlangıç*(*source*) köşesine götüren fonksiyon,

$t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ fonksiyonu, her bir oku *bitiş*(*terminal*) köşesine götüren fonksiyon

olmak üzere bir $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ sistemine bir *kuiver* (*quiver*) adı verilir.

Q_0 ve Q_1 kümeleri sonlu olan bir Q kuiveri *sonlu* (*finite*) olarak adlandırılır. Bir kuiver yönlendirilmiş ve sonlu olması bakımından, sadece köşelerden ve kenarlardan oluşan, bir *çizgenin* (*graph*) özel halidir. Bir Q kuiverindeki her x, y köşesi için $x = s(\alpha_1^{v_1})$ ve $y = t(\alpha_l^{v_l})$ olacak şekilde okların oluşturduğu bir $\alpha_1^{v_1} \alpha_2^{v_2} \dots \alpha_l^{v_l}$ yolu varsa, Q kuiveri *bağlantılı* (*connected*) olarak adlandırılır.

Bu çalışmada kullanılan kuiverler sonlu ve bağlantılı olacaktır.

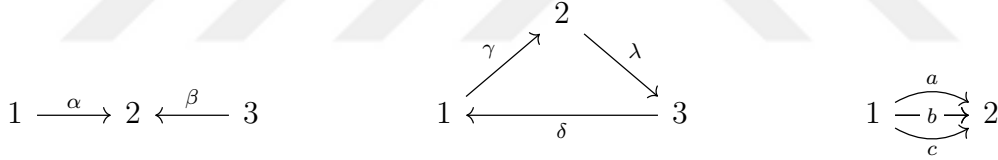
Tanım 2.3.2 Bir Q kuiverinde okların yönleri ihmal edildiğinde ortaya çıkan çizgeye kuiverin *altında yatan çizge* (*underlying graph*) adı verilir ve $\tilde{Q}$ ile gösterilir.

Uyarı 2.3.3 Kuiverler altında yatan çizgeye göre, sonlu (finite), evcil (tame) ve vahşi (wild) tipli olmak üzere 3 sınıfa ayrılırlar. Bu sınıflandırmada, Sovyet matematikçi Eugene Dynkin tarafından tanımlanan, Dynkin ve genişletilmiş Dynkin diagramları olarak adlandırılan, diagramlar kullanılır. Tez çalışmasında; $n \geq 1$ olacak şekilde bir n doğal sayısı için, n tane köşe ve $n - 1$ tane oktan oluşan

$$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } \dots \text{ --- } n-1 \text{ --- } n$$

biçimindeki kuiverler üzerinde çalışılacaktır. A_n -Dynkin tipli olarak adlandırılan bu kuiverlerin sonlu tipli olduğu Gabriel (1972) ve Bernšteĭn vd. (1973) tarafından birbirinden bağımsız olarak kanıtlanmıştır.

Örnek 2.3.4 Aşağıda verilen kuiverler sırasıyla sonlu, evcil ve vahşi tipli kuiverlere birer örnektir.



Tanım 2.3.5 Yönlendirilmiş döngü içermeyen bir Q kuiverindeki okların yönlerinin değiştirilmesiyle elde edilen ve Q^{op} ile gösterilen yeni kuivere *karşıt kuiver* (*opposite quiver*) denir ve köşelerinin kümesi $Q_0^{op} = Q_0$ ile, $s(\alpha^{op}) = t(\alpha)$ ve $t(\alpha^{op}) = s(\alpha)$ olmak üzere oklarının kümesi $Q_1^{op} = \{\alpha^{op} \mid \alpha \in Q_1\}$ ile tanımlıdır.

Örnek 2.3.6 Yukarıdaki örnekte verilen $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ sonlu kuiverinin karşıt kuiveri $Q^{op} : 1 \xleftarrow{\alpha^{op}} 2 \xrightarrow{\beta^{op}} 3$ biçimindedir.

Tanım 2.3.7 Bir Q kuiverinin bir M *temsili* (*representation*); Q_0 'daki her bir i köşesine karşılık yazılan M_i $\mathbf{k}$ -vektör uzaylarının ve Q_1 'deki her bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ okuna karşılık gelen $M_i \xrightarrow{\varphi_\alpha} M_j$ lineer dönüşümlerinin oluşturduğu bir sistemdir ve $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.8 $\mathbb{A}_2$ -Dynkin tipli $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ kuiverinin bazı temsilleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} M : k &\xrightarrow{1} k \\ M' : k &\xrightarrow{0} 0 \\ M'' : k^2 &\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} k^3 \end{aligned}$$

Tanım 2.3.9 Bir M temsilini oluşturan her bir M_i $\mathbf{k}$ -vektör uzayının boyutlarının oluşturduğu sıralıya M 'nin boyut vektörü (*dimension vector of M*) denir ve

$$\underline{\dim} M = (\dim M_i)_{i \in Q_0}$$

ile gösterilir. Bir M temsilinde her bir M_i $\mathbf{k}$ -vektör uzayı sonlu boyutlu ise, M temsili *sonlu boyutlu* (*finite dimensional*) olarak adlandırılır. Bu çalışmada bir kuiverin sonlu boyutlu temsilleri ile ilgileneceğiz. Ayrıca bir M temsilinin bir elemanı, $m_i \in M_i$ elemanlarının oluşturduğu $m = (m_i)_{i \in Q_0}$ sıralı biçimindedir.

Örnek 2.3.10 Örnek 2.3.8'de verilen temsillerin boyut vektörleri ve elemanları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\underline{\dim} M = (1, 1) \text{ ve } m_i \in k \text{ olmak üzere } m = (m_1, m_2) \in M,$$

$$\underline{\dim} M' = (1, 0) \text{ ve } a \in k \text{ olmak üzere } m = (a, 0) \in M',$$

$$\underline{\dim} M'' = (2, 3) \text{ ve } m_i \in k \text{ olmak üzere } m = ((m_1, m_2), (m_3, m_4, m_5)) \in M''.$$

Tanım 2.3.11 Bir Q kuiverinin $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ve $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ temsilleri verilsin. Q_1 'deki her bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ okuna karşılık aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $f_i : M_i \longrightarrow M'_i$ lineer dönüşümlerinin oluşturduğu sıralıya bir *temsil morfizmi* (*representation morphism*) denir.

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \end{array}$$

Diğer bir deyişle; bir $f : M \rightarrow M'$ temsil morfizmi; her $m_i \in M_i$ için

$$(f_j \circ \varphi_\alpha)(m_i) = (\varphi'_\alpha \circ f_i)(m_i)$$

olacak şekilde bir $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ koleksiyonudur.

Uyarı 2.3.12 Verilen bir Q kuiveri için, bilinen bileşke işlemiyle, nesneleri; Q 'nın tüm temsilleri ve morfizmleri; temsil morfizmleri olan kategori $\text{Rep}Q$ ile gösterilir. Özel olarak Q kuiverinin sonlu boyutlu temsillerinin kategorisi $\text{rep}Q$ ile gösterilir. Bir Q kuiverinin Q^{op} karşıt kuiverinin tüm sonlu boyutlu temsillerinin kategorisi $\text{rep}Q^{op}$ ile gösterilir.

Tez çalışmasında vereceğimiz sonuçlar $\text{rep}Q$ kategorisinde geçerli olacaktır.

Tanım 2.3.13 Bir $f = (f_i)_{i \in Q_0} : M \rightarrow M'$ temsil morfizmini oluşturan her bir f_i 'nin injektif (yani birebir) olması durumunda f 'ye bir *monomorfizm* (*monomorphism*), her bir f_i 'nin surjektif (yani örten) olması durumunda f 'ye bir *epimorfizm* (*epimorphism*) ve her bir f_i 'nin bijektif (yani, hem birebir hem de örten) olması durumunda f 'ye bir *izomorfizm* (*isomorphism*) denir ve bu durum $M \cong M'$ ile ifade edilir. Bir M temsiline izomorf olan tüm temsillerin sınıfı M 'nin *izosınıfı* (*isoclass*) olarak adlandırılır. Bir L temsilinden bir M temsiline bir $i : L \hookrightarrow M$ monomorfizmi varsa, L 'ye M 'nin bir *alttemsili* (*subrepresentation*), i 'nin eşçekerdeği olan $M/i(L)$ 'ye de *bölüm temsili* (*quotient representation*) adı verilir.

Tanım 2.3.14 $\text{rep}Q$ 'daki bir M temsilinden bir M' temsiline giden tüm temsil morfizmlerinin kümesi $\text{Hom}(M, M')$ ile gösterilir. Her $f, g \in \text{Hom}(M, M')$, $m \in M$ ve $\lambda \in \mathbf{k}$ için

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m)$$

$$(\lambda f)(m) = \lambda f(m)$$

ile tanımlı toplama ve skaler çarpma işlemlerine göre $\text{Hom}(M, M')$ kümesi bir $\mathbf{k}$ -vektör uzayı yapısına sahiptir.

Örnek 2.3.15 Örnek 2.3.8'de verilen M ve M' temsilleri arasındaki bir temsil morfizmi; f_1 ; $a \in k$ ile skaler çarpım ve f_2 ; sıfır lineer dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} M : & k & \xrightarrow{1} k \\ f \downarrow & a \downarrow & \downarrow 0 \\ M'' : & k & \xrightarrow{0} 0 \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan bir $f = (f_1, f_2) : M \longrightarrow M'$ fonksiyonu olarak belirlenir. Böylece $\text{Hom}(M, M') \cong \{(a, 0) \mid a \in k\} \cong k$ bulunur.

Tanım 2.3.16 $M = (M_i, \varphi_\alpha), M' = (M'_i, \varphi'_\alpha) \in \text{rep}Q$ için;

$$M \oplus M' = \left(M_i \oplus M'_i, \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix} \right)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

ile tanımlanan temsile M ve M' nn *dik toplamı* (*direct sum*) denir.

rnek 2.3.17 $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ kuiverinin

$$M : k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{0} 0 \quad \text{ve} \quad M' : k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k$$

temsillerinin dik toplamı

$$M \oplus M' : k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} 0 \oplus k$$

ile tanımlıdır ve aşağıdaki temsile izomorftur.

$$M'' : k^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k^3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k$$

Bir M temsilini oluşturan tüm vektör uzayları 0-boyutlu ise bu vektör uzayları 0 olup, bunların arasındaki lineer dönüşümlerin sıfır dönüşümü olduğu açıktır. Bu şekilde tanımlanan bir temsile *sıfır temsili* denir. Ayrıca bir M temsilinin sıfırdan farklı olması için gerek ve yeter koşul en az bir köşedeki vektör uzayının 0'dan farklı bir boyuta sahip olmasıdır. Burada tüm lineer dönüşümleri 0 olabilir.

Tanım 2.3.18 Sıfırdan farklı bir $M \in \text{rep}Q$ temsili; sıfırdan farklı iki temsilin bir dik toplamı olarak yazılamıyorsa, yani; $M_1, M_2 \in \text{rep}Q$ olmak üzere $M \cong M_1 \oplus M_2$ iken $M_1 = 0$ veya $M_2 = 0$ ise, M 'ye *ayrıştırılmaz temsil* (*indecomposable representation*) denir.

rnek 2.3.19 rnek 2.3.17'deki M temsili ayrıştırılmaz bir temsil iken, M' temsili aşağıdaki temsile izomorf olan ayrıştırılabilir bir temsildir.

$$\left(k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k \right) \oplus \left(k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{0} 0 \right)$$

Tanım 2.3.20 Q bir kuiver ve $i, j \in Q_0$ olsun. Q 'da i 'den j 'ye giden ℓ uzunluğunda bir c yolu (*path*);

$$\begin{aligned} s(\alpha_1) &= i, \\ s(\alpha_h) &= t(\alpha_{h-1}), \quad (h = 2, 3, \dots, \ell), \\ t(\alpha_\ell) &= j \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $c = (i|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell|j)$ dizisidir.

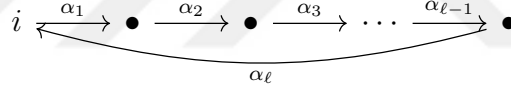
(1) i köşesindeki $\ell = 0$ uzunluklu $(i||i)$ yoluna *sabit yol (lazy path)* denir ve e_i ile gösterilir.

(2) Bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku bir uzunluklu $(i|\alpha|j)$ yoludur. Özel olarak $i = j$ iken

$$i \xrightarrow{\alpha} i$$

$(i|\alpha|i)$ yolu bir *döngü (loop)* olarak adlandırılır.

(3)



formundaki l uzunluklu bir $(i|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell|i)$ yolu *yönlendirilmiş döngü (oriented cycle)* olarak adlandırılır.

Örnek 2.3.21 Bir $Q : \alpha \curvearrowright 1 \xrightarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\gamma} 3$ kuiverinde;

0-uzunluklu (sabit) yollar: e_1, e_2, e_3 ,

1-uzunluklu yollar: $(1|\alpha|1)$, $(1|\beta|2)$ ve $(3|\gamma|2)$,

2-uzunluklu yollar: $(1|\alpha, \alpha|1)$, $(1|\alpha, \beta|2)$,

3-uzunluklu yollar: $(1|\alpha, \alpha, \alpha|1)$, $(1|\alpha, \alpha, \beta|2)$ biçiminde olup α bir döngü olduğundan 1 köşesinden sonsuz defa geçilerek sonsuz uzunluklu yollar yazılabilir. Bundan başka $(1|\alpha, \beta, \gamma|2)$ ve $(3|\gamma, \beta|2)$ dizileri bir yol belirtmez.

Bir Q kuiverindeki her bir i köşesi için yazılan ve sırasıyla basit, projektif ve injektif temsil olarak adlandırılan $S(i)$, $P(i)$ ve $I(i)$ temsillerinin tanımları aşağıda verilmiştir. Ayrıca Q^{op} karşıt kuiverinin basit, projektif ve injektif temsilleri yazılırken, karışıklık olmaması için, $S_{Q^{op}}(i)$, $P_{Q^{op}}(i)$ ve $I_{Q^{op}}(i)$ gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 2.3.22

- Vektör uzayları: i köşesinde 1-boyutlu diğer köşelerde 0-boyutlu,
- Lineer dönüşümleri: tamamı 0 dönüşümü

olan temsile i köşesindeki *basit temsil* (*simple representation*) denir ve $S(i) = (S(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.23

- Vektör uzayları: i 'den j 'ye giden tüm yolları taban kabul eden vektör uzayları,
- Lineer dönüşümleri: i 'den j 'ye giden c yollarının bir $j \xrightarrow{\alpha} \ell$ oku ile bileşkesi olarak tanımlı $\varphi_\alpha : P(i)_j \rightarrow P(i)_\ell$ lineer dönüşümleri

olan temsile i köşesindeki *projektif temsil* (*projective representation*) denir ve $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.24

- Vektör uzayları: j 'den i 'ye giden tüm yolları taban kabul eden vektör uzayları,
- Lineer dönüşümleri: j 'den i 'ye giden bir c yolunu; eğer $j \xrightarrow{\alpha} \ell$ oku ile başlıyorsa, α okunu silerek, ℓ 'den i 'ye giden bir yola; eğer α oku ile başlamıyorsa, 0'a götürmesi ile tanımlı $\varphi_\alpha : I(i)_j \rightarrow I(i)_\ell$ lineer dönüşümleri

olan temsile i köşesindeki *injektif temsil* (*injective representation*) denir ve $I(i) = (I(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ile gösterilir.

Uyarı 2.3.25 Yukarıda verilen tanımlar gözönüne alındığında, bir kuiverin temsilleri yazılırken bir köşeden diğer bir köşeye giden yol sayısına göre temsilleri oluşturan vektör uzaylarının boyutları belirlenir. Yönlendirilmiş bir döngü içeren bir kuiverde bir köşeden sonsuz defa yol geçebileceği için en azından o köşede yazılan projektif ve injektif temsillerin vektör uzayları sonsuz boyutlu olup bunlar yardımıyla sonsuz boyutlu başka temsiller yazılabilir. Bu durumda elde edilen temsiller $\text{rep}Q$ kategorisine ait olmaz ve çelişki ortaya çıkar. Bunu küçük bir örnekle açıklayalım: sadece bir tane

döngü içeren, yani; bir köşe ve bir oktan oluşan bir $Q : i \curvearrowright \alpha$ kuiveri gözönüne alındığında, bu kuiverin i köşesi için yazılan projektif ve injektif temsiller sonsuz boyutlu olup $\text{rep}Q$ kategorisine ait olmazlar. Bu sebeple, Uyarı 2.3.12 gereğince, tez çalışmasında kullanılan kuiverler yönlendirilmiş döngü içermeyecektir.

Uyarı 2.3.26 Verilen bir kuiverin temsillerinin gösterimini kolaylaştıran, kuiverin bir köşesinden diğer bir köşesine giden okların varlığına ve o köşelere karşılık gelen vektör uzaylarının boyutlarına bağlı olarak belirlenen, rakamların kullanıldığı bir gösterim vardır, öyle ki: n tane köşeye sahip bir Q kuiverinin bir M temsilinin boyut vektörü $\underline{\dim}M = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ olmak üzere; kuiverdeki bir $\alpha : i \rightarrow j$ okuna karşılık gelen $\varphi_\alpha : M_i \rightarrow M_j$ lineer dönüşümü sıfırdan farklı ise, i rakamı j rakamının üzerine d_i defa yazılarak M temsilinin basitçe gösterilmesi sağlanır.

Tanım 2.3.27 Bir Q kuiverinde bir i köşesi

- $s(\alpha) = i$ olacak şekilde bir α oku yok ise, bir *batak* (*sink*),
- $t(\alpha) = i$ olacak şekilde bir α oku yok ise, bir *kaynak* (*source*)

olarak adlandırılır.

Bir kuiverin bir i köşesinde yazılan basit, projektif ve injektif temsillerinin, ilerdeki bölümlerde kullanılacak olan bazı özellikleri aşağıdaki lemmada ispatsız olarak verilmiştir.

Lemma 2.3.28 Q bir kuiver ve $i \in Q_0$ olsun.

- $S(i)$, $P(i)$ ve $I(i)$ temsilleri ayrıştırılamazdır.
- $\text{rep}Q$ 'da bir M temsilinin basit olması için gerek ve yeter koşul $M \cong S(i)$ olacak şekilde bir $i \in Q_0$ var olmasıdır.
- i köşesindeki projektif temsilin basit temsil olması için gerek ve yeter koşul i 'nin batak olmasıdır. Yani; $P(i) = S(i) \Leftrightarrow i$ bir bataktır.
- i köşesindeki injektif temsilin basit temsil olması için gerek ve yeter koşul i 'nin kaynak olmasıdır. Yani; $I(i) = S(i) \Leftrightarrow i$ bir kaynaktır.

- $P_1, P_2 \in \text{rep}Q$ için $P_1 \oplus P_2$ projektiftir $\Leftrightarrow P_1$ ve P_2 projektiftir.
- $I_1, I_2 \in \text{rep}Q$ için $I_1 \oplus I_2$ injektiftir $\Leftrightarrow I_1$ ve I_2 injektiftir.
- $\text{rep}Q$ 'da herhangi bir P projektif temsili $P(i)$ temsillerinin bir dik toplamı olarak yazılır. Yani; farklı olması gerekmeyen $i_1, i_2, \dots, i_t$ için

$$P \cong P(i_1) \oplus P(i_2) \oplus \dots \oplus P(i_t).$$

Uyarı 2.3.29 (İnt. Kay. 1)'e göre Ringel tarafından yapılan bir çalışmada, $\mathbb{A}_n$ -Dynkin tipli bir kuiverin $\frac{1}{2}n(n+1)$ tane ayrıştırılamaz temsiline var olduğu belirtilmiştir. Aşağıdaki örnekte, $\mathbb{A}_3$ -Dynkin tipli bir kuiverinin her bir köşesi için yazılan 6 tane ayrıştırılamaz temsili, Uyarı 2.3.26'te ifade edilen yöntem kullanılarak, gösterilmiştir.

Örnek 2.3.30 $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ kuiverinin ayrıştırılamaz temsilleri

$$S(1) \cong I(1) = 1 : k \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0 ,$$

$$S(2) \cong P(2) = 2 : 0 \xrightarrow{0} k \xleftarrow{0} 0 ,$$

$$S(3) \cong I(3) = 3 : 0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} k ,$$

$$P(1) = \frac{1}{2} : k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{0} 0 ,$$

$$P(3) = \frac{3}{2} : 0 \xrightarrow{0} k \xleftarrow{1} k ,$$

$$I(2) = \frac{1}{2} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} : k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k$$

biçimindedir.

Aşağıdaki önerme, her bir i köşesi için yazılan ve projektif temsil olarak adlandırılan $P(i)$ temsiline $\text{rep}Q$ kategorisinde bir projektif nesneye karşılık geldiğini ifade eder. Nesneleri $\text{rep}Q$ kategorisindeki tüm projektif temsiller olan kategori $\text{rep}Q$ 'nın bir altkategorisidir ve $\text{proj}Q$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.31 Bir Q kuiverinin i köşesindeki projektif temsil $P(i)$ olmak üzere bir $g : M \rightarrow N$ epimorfizmine $\text{Hom}(P(i), -)$ fonktoru uygulandığında elde edilen

$$g_* : \text{Hom}(P(i), M) \longrightarrow \text{Hom}(P(i), N)$$

bir epimorfizm olur.

Diğer bir deyişle; $g : M \rightarrow N$ bir epimorfizm olmak üzere her $f : P(i) \rightarrow N$ morfizmi için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan, yani $f = g \circ h = g_*(h)$ olacak şekilde bir $h : P(i) \rightarrow M$ morfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccccc} & & P(i) & & \\ & \swarrow h & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Her bir i köşesi için yazılan ve injektif temsil olarak adlandırılan $I(i)$ temsiline $\text{rep}Q$ kategorisinde bir injektif nesneye karşılık geldiği aşağıdaki önermede ifade edilmiştir. Nesneleri $\text{rep}Q$ kategorisindeki tüm injektif temsiller olan kategori $\text{rep}Q$ 'nın bir altkategorisidir ve $\text{inj}Q$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.32 Bir Q kuiverinin bir i köşesindeki injektif temsil $I(i)$ olmak üzere bir $g : L \rightarrow M$ monomorfizmine $\text{Hom}(-, I(i))$ fonktoru uygulandığında elde edilen

$$g^* : \text{Hom}(M, I(i)) \longrightarrow \text{Hom}(L, I(i))$$

bir epimorfizm olur.

Diğer bir deyişle; $g : L \rightarrow M$ bir monomorfizm olmak üzere her $f : L \rightarrow I(i)$ morfizm için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan, yani $f = h \circ g = g^*(h)$ olacak şekilde bir $h : M \rightarrow I(i)$ morfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{g} & M \\ & & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & I(i) & & \end{array}$$

Önerme 2.3.31 ve 2.3.32'un direkt bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.3.33

- (i) $\text{rep}Q$ 'da P projektif ise, $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ formundaki bir tam dizi parçalanandır.
- (ii) $\text{rep}Q$ 'da I injektif ise, $0 \longrightarrow I \xrightarrow{g} M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ formundaki bir tam dizi parçalanandır.

Teorem 2.3.34 Bir $M \in \text{rep}Q$ temsili ve herhangi bir $i \in Q_0$ köşesi için

$$\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i$$

izomorfizması vardır.

Üçüncü bölümde; verilen bir kuiverin Auslander-Reiten kuiveri oluşturulurken kullanılacak olan ve yukarıdaki teoremden M temsili yerine sırasıyla $P(j)$ ve $P(i)$ temsilleri alınarak elde edilen sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.3.35 Bir Q kuiverindeki i ve j köşeleri için

- (i) $\text{Hom}(P(i), P(j)) \cong P(j)_i$.
- (ii) $\text{Hom}(P(i), P(i)) = \text{End}(P(i)) \cong \mathbf{k}$.
- (iii) $A = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)$ olmak üzere, $\text{Hom}(A, A) = \text{End}(A) \cong \mathbf{k}Q$

izomorfizmaları vardır.

Uyarı 2.3.36 Yukarıdaki sonucun (i) şıkında; $P(i)$ 'den $P(j)$ 'ye giden morfizmlerin uzayının $P(j)_i$ vektör uzayıyla izomorf olduğu, dolayısıyla $P(i)$ 'den $P(j)$ 'ye giden morfizmlerin j 'den i 'ye giden yollara göre belirlendiği, (ii) şıkında; $P(i)$ temsili'nin endomorfizmlerinin uzayının $\mathbf{k}$ 'ya izomorf olduğu ve (iii) şıkında; bir Q kuiverindeki tüm yolları taban kabul eden ve *yol cebiri* (*path algebra*) olarak adlandırılan $\mathbf{k}Q$ cebirinin, o kuiverdeki tüm projektif temsillerin dik toplamı olan A 'nın endomorfizm cebirine izomorf olduğu ifade edilmiştir.

Uyarı 2.3.37 Q yönlendirilmiş döngü içermeyen bir kuiver olmak üzere Q 'daki tüm yolları taban kabul eden $\mathbf{k}Q$ yol cebiri üzerine kurulan sonlu üretilmiş $\mathbf{k}Q$ -modüllerin $\text{mod } \mathbf{k}Q$ kategorisi ile $\text{rep } Q$ kategorisinin birbirine denk olduğu Gabriel (1972) tarafından kanıtlanmıştır. Bundan dolayı bir Q kuiverinin her bir M temsili bir $\mathbf{k}Q$ -modül olarak gözönüne alınabileceği için ilerleyen bölümlerde temsil ve modül kelimeleri birbirlerinin yerine kullanılacaktır.

Önerme 2.3.38 M ayrıştırılamaz bir temsil ve P bir projektif temsil olmak üzere eğer sıfırdan farklı bir $f : M \rightarrow P$ morfizmi varsa, M projektiftir ve f birebirdir.

Uyarı 2.3.39 Yukarıda verilen özellik, bir kuiverin Auslander-Reiten kuiverinde en solda bulunan temsillerin neden projektif olması gerektiğini açıklar. Ayrıca projektif temsiller " $\subseteq$ " kapsama bağıntısına göre kısmi sıralıdır.

Tanım 2.3.40 Bir Q kuiverinin i köşesindeki projektif temsil $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ olsun. $P(i)$ 'nin *radikali* (*radical*) aşağıdaki biçimde tanımlanan ve $\text{rad } P(i) = (R_j, \varphi'_\alpha)$ ile gösterilen bir temsildir:

$$R_j = \begin{cases} 0, & i = j \text{ ise;} \\ P(i)_j, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \varphi'_\alpha = \begin{cases} 0, & s(\alpha) = i \text{ ise;} \\ \varphi_\alpha, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$\text{rad } P(i)$; $P(i)$ 'nin maksimal alttemsildir, yani; $P(i)$ 'nin herhangi bir öz alttemsili $\text{rad } P(i)$ 'de kapsanır. Ayrıca $P(i)$ bir basit temsil ise $\text{rad } P(i) = 0$, $P(i)$ bir basit temsil değil ise $\text{rad } P(i)$ projektiftir. Bu durumda projektif bir temsilin her alttemsili projektif olup, bu özellik $\text{rep } Q$ kategorisinin bir *kalıtsal* (*hereditary*) kategori olduğunu gösterir.

Bir kuiverin, örme algoritması kullanılarak ya da temsillerinin τ -yörüngelerini bulmak suretiyle, Auslander-Reiten kuiveri oluşturulurken, ihtiyaç duyulan en temel araçlardan biri olan, bir temsilin standart projektif ve injektif çözücülerinin nasıl belirlendiğine dair, formüller aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 2.3.41 $\text{rep } Q$ kategorisinde bir $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ temsili verilsin. $(d_i)_{i \in Q_0}$, M 'nin boyut vektörü olmak üzere;

(i) M 'nin standart projektif çözücüsü (*standart projective resolution*)

$$P_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} d_i P(i) \quad P_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} P(t(\alpha))$$

olmak üzere

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

(ii) M 'nin standart injektif çözücüsü (*standart injective resolution*)

$$I_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} d_i I(i) \quad I_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} d_{t(\alpha)} I(s(\alpha))$$

olmak üzere

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1 \longrightarrow 0$$

biçimindedir.

Auslander-Reiten kuiver oluşturulurken kullanılan diğer bir temel araç olan Nakayama fonktörünün tanımı ve özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.42 Bir Q kuiverinin tüm ayrıştırılmaz projektif temsillerinin dik toplamı olan serbest temsil $A = \bigoplus_{j \in Q_0} P(j)$ ile gösterilmek üzere D standart dualite ve $\text{Hom}(-, A)$ fonktörlerinin bileşkesi olan

$$\begin{array}{ccccc} \text{rep}Q & \xrightarrow{\text{Hom}(-, A)} & \text{rep}Q^{op} & \xrightarrow{D} & \text{rep}Q \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \nu & & \end{array}$$

funktoruna *Nakayama fonktörü* (*Nakayama functor*) adı verilir ve ν ile gösterilir.

Uyarı 2.3.43 Nakayama fonktörünün tanımı gereğince, $\text{rep}Q$ 'daki herhangi bir M temsiline $\nu = D\text{Hom}(-, A)$ Nakayama fonktörü uygulanırken ilk olarak $\text{Hom}(-, A)$ fonktörü altındaki görüntüsüne bakılır. Eğer M temsilinin hiç projektif dik toplanamı yok ise, Uyarı 2.3.38 gereğince, $\text{Hom}(-, A)(M) = \text{Hom}(M, A) = 0$ olur. Bu durumda $\nu(M) = D\text{Hom}(-, A)(M) = D(M) = 0$ olup projektif dik toplanamı olmayan temsillerin ν Nakayama fonktörü altında görüntüleri sıfır olduğundan, sadece projektif temsillerin ν fonktörü altında görüntülerinin incelenmesi yeterlidir.

Diğer yandan, $\text{rep}Q$ 'nın D_Q ile gösterilen standart dualite fonktörü ile $\text{rep}Q^{op}$ 'un

$D_{Q^{op}}$ ile gösterilen standart dualite funktorunun bileşkesi alınırse $\text{rep}Q$ ve $\text{rep}Q^{op}$ 'un birim morfizmleri elde edilir. Yani; bu funktorlar birer dualite funktorlarıdır. Fakat $\text{Hom}(-, A)$ funktoru; $\text{rep}Q$ kategorisindeki projektif dik toplananı olmayan temsilleri 0'a götürdüğü için $\text{rep}Q$ kategorisinden $\text{rep}Q^{op}$ kategorisine bir dualite olamaz. Fakat $\text{Hom}(-, A)$ 'nın $\text{proj}Q$ 'ya kısıtlanmış olan

$$\text{Hom}(-, A)|_{\text{proj}Q} : \text{proj}Q \rightarrow \text{proj}Q^{op}$$

funktoru, Q^{op} 'daki tüm ayrıştırılmaz projektif temsillerin dik toplamı $A^{op} = \bigoplus_{j \in Q} P_{Q^{op}}(j)$ olmak üzere, sözde-tersi $\text{Hom}_{Q^{op}}(-, A^{op})$ olan, bir dualite olur. Bu funktorun D standart dualite funktoruyla bileşkesi olan $D \circ \text{Hom}_{Q^{op}}(-, A^{op})$ funktoru $\text{inj}Q$ 'dan $\text{proj}Q$ 'ya bir dualitedir.

Şimdi bir kuiverin Auslander-Reiten kuiveri oluşturulurken kullanılan, Auslander-Reiten ötelemelerinin belirlenmesinde önemli rol oynayan ve birbirlerinin sözde-tersleri olan Nakayama ve ters Nakayama funktorlarının tanımını verelim.

Tanım 2.3.44 Bir kategori denkliği olarak

$$\nu : \text{proj}Q \rightarrow \text{inj}Q$$

Nakayama funktoru aşağıdaki biçimde tanımlanır:

- Herhangi bir i köşesindeki ayrıştırılmaz projektif temsili, o köşedeki ayrıştırılmaz injektif temsile götürür. Yani $\nu(P(i)) = I(i)$ dir.
- i 'den j 'ye giden bir c yoluna karşılık gelen bir $f_c : P(j) \rightarrow P(i)$ morfizmini bir $\nu(f_c) : I(j) \rightarrow I(i)$ morfizmine götürür.

Ayrıca $\nu^{-1}\nu = 1_{\text{proj}Q}$ ve $\nu\nu^{-1} = 1_{\text{inj}Q}$ olacak şekildeki

$$\nu^{-1} = \text{Hom}(DA^{op}, -) : \text{inj}Q \rightarrow \text{proj}Q$$

ters Nakayama funktoru aşağıdaki biçimde tanımlanır:

- Herhangi bir i köşesindeki ayrıştırılmaz injektif temsili, o köşedeki ayrıştırılmaz projektif temsile götürür. Yani $\nu^{-1}(I(i)) = P(i)$ dir.

- j 'den i 'ye giden bir c yoluna karşılık gelen bir $f_c : I(i) \rightarrow I(j)$ morfizmini bir $\nu^{-1}(f_c) : P(i) \rightarrow P(j)$ morfizmine götürür.

Uyarı 2.3.45 $A = \oplus_{j \in Q_0} P(j)$ olmak üzere $\text{Hom}(-, A)$ fonktoru, Uyarı 2.2.15 gereğince, soldan tam olan bir kontravaryant fonktor ve D standart dualite fonktoru tam olan bir kontravaryant fonktor olmasına karşın ν Nakayama fonktoru sağdan tam olan kovaryant bir fonktordur.

2.4. Auslander-Reiten Ötelemeleri ve Formülleri

Bu bölümde, bir kuiverin Auslander-Reiten kuiveri oluşturulurken kullanılan en temel araçlardan biri olan, τ ve τ^{-1} Auslander-Reiten ötelemeleri tanıtılacaktır. Ayrıca, Auslander-Reiten kuiverde verilen iki temsilin Hom ve Ext uzaylarının boyutunu belirlemeye yarayan Auslander-Reiten formülleri olarak adlandırılan formüller verilecektir.

Tanım 2.4.1 Q yönlendirilmiş döngü içermeyen bir kuiver ve $M \in \text{rep}Q$ olsun. M 'nin bir

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0 \quad (2.4)$$

minimal projektif çözücüsüne ν Nakayama fonktoru uygulandığında sağdan tam olan ve soldan tamlığı $\tau M = \ker \nu p_1$ parçasının eklenmesiyle oluşturulan

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. Burada τM 'ye M 'nin Auslander-Reiten ötelemesi (*Auslander-Reiten translation of M*) adı verilir.

M 'nin bir

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1 \longrightarrow 0$$

minimal injektif çözücüsüne ν^{-1} ters Nakayama fonktoru uygulandığında soldan tam olan ve sağdan tamlığı $\tau^{-1} M = \text{coker } \nu^{-1} i_1$ parçasının eklenmesiyle oluşturulan

$$0 \longrightarrow \nu^{-1} M \xrightarrow{\nu^{-1} i_0} \nu^{-1} I_0 \xrightarrow{\nu^{-1} i_1} \nu^{-1} I_1 \longrightarrow \tau^{-1} M \longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. Burada $\tau^{-1} M$ 'ye M 'nin ters Auslander-Reiten ötelemesi (*inverse Auslander-Reiten translation of M*) adı verilir.

Uyarı 2.4.2 Bazı kaynaklarda $A = \bigoplus_{j \in Q_0} P(j)$ olmak üzere $\text{Hom}(-, A)$ fonktoru $(-)^t$ sembolüyle gösterilir. (2.4)'de verilen minimal projektif çözücüye bu fonktor uygulanırsa $\text{Tr}M = \text{coker}p_1^t$ ile tanımlanır ve M 'nin *transpozu* (*transpose*) olarak adlandırılır. Böylece, Tanım 2.4.1'de verilen tanım $\tau M = D\text{Tr}M$ ve $\tau^{-1}M = \text{Tr}DM$ biçiminde de verilebilir.

Tanım 2.4.3 M ve N birer A -modül olsun. M 'den N 'ye giden ve bir projektif modül üzerinden faktörlenен tüm morfizmlerin kümesi $\mathcal{P}(M, N)$ ile, M 'den N 'ye giden ve bir injektif modül üzerinden faktörlenен tüm morfizmlerin kümesi $\mathcal{I}(M, N)$ ile gösterilir. Tüm $\mathcal{P}(M, N)$ 'lerin kümesi olan $\mathcal{P}$ ve tüm $\mathcal{I}(M, N)$ 'leri kümesi olan $\mathcal{I}$; $\text{mod}A$ 'da bir ideal yapısına sahiptir. $\text{mod}A$ 'nın bu ideallere göre

$$\underline{\text{mod}}A = (\text{mod}A)/\mathcal{P} \quad \text{ve} \quad \overline{\text{mod}}A = (\text{mod}A)/\mathcal{I}$$

bölüm kategorileri sırasıyla *projektif olarak kararlı* (*projectively stable*) ve *injektif olarak kararlı* (*injectively stable*) kategoriler olarak adlandırılır. Bu kategorilerin nesneleri $\text{mod}A$ 'nın nesneleriyle aynı olup, morfizmlerinin kümesi

$$\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \frac{\text{Hom}_A(M, N)}{\mathcal{P}(M, N)} \quad \text{ve} \quad \overline{\text{Hom}}_A(M, N) = \frac{\text{Hom}_A(M, N)}{\mathcal{I}(M, N)}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.4.4 (Auslander-Reiten Formülleri) M ve N birer A -modül olmak üzere

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(N, \tau M)$$

izomorfizmleri vardır. Bu izomorfizmler iki bileşende de funktorsaldır, yani;

$$\text{Ext}^1(-, N) \cong D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}N, -) \cong D\overline{\text{Hom}}(N, \tau-)$$

$$\text{Ext}^1(M, -) \cong D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}-, M) \cong D\overline{\text{Hom}}(-, \tau M)$$

izomorfizmleri vardır.

3. AUSLANDER-REITEN KUİVERLER

Auslander-Reiten kuiverler, bir kuiverin temsil teorisi hakkında; keyfi temsiller için birer yapıtaş görevi gören ayrıştırılmaz temsiller, keyfi temsiller arasındaki morfizmleri belirlemeye yarayan indirgenemez morfizmler ve bu morfizmlerin oluşturduğu bir tür kısa tam dizi olan neredeyse parçalanmış diziler hakkında önemli bilgiler barındırır. Bu bölümde Shiffler (2014) ile Assem ve Coelho (2020) temel kaynak olarak kullanılarak, sadece $\mathbb{A}_n$ tipli kuiverlerin Auslander-Reiten kuiverlerinin farklı yöntemlerle nasıl oluşturulduğu örneklerle açıklanacaktır.

Bu bölümde; Q , $\mathbb{A}_n$ -tipli bir kuiver ve bu kuivere karşılık gelen sonlu boyutlu yol cebiri A olacaktır. Ayrıca $\text{rep}Q$ kategorisinin temsilleriyle $\text{mod}A$ kategorisinin modülleri birbirinin yerine kullanılacaktır.

Öncelikle bir kuiverin Auslander-Reiten kuiverinin tanımı verilerek, Assem ve Coelho (2020)'ya göre, ayrıştırılmaz temsiller ve indirgenemez morfizmler yardımıyla, Auslander-Reiten kuiverin nasıl oluşturulduğu açıklanacaktır.

3.1. Ayrıştırılmaz Temsiller ve İndirgenemez Morfizmler

Tanım 3.1.1 L ve M (ayrıştırılmaz olması gerekmeyen) birer A -modül olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $f : M \rightarrow N$ morfizmi *indirgenemez* (*irreducible*) olarak adlandırılır:

- (i) f bir kesit ve bir büzme değildir.
- (ii) $f : L \rightarrow M$ morfizminin aşağıdaki diyagramda gösterilen bir $f = gh$ ayrışımının var olması durumunda, h bir kesittir ya da g bir büzmedir.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow h & \nearrow g \\ & L & \end{array}$$

Tanım 3.1.2 Bir $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisinde f ve g morfizmleri indirgenemez ise bu diziye bir *neredeyse parçalanmış dizi* (*almost split sequence*) veya *Auslander-Reiten dizisi* (*Auslander-Reiten sequence*) adı verilir.

Tanım 3.1.3 M ve N A -modüller olmak üzere “her $q : M' \rightarrow M$ kesit morfizmi ve her $p : N \rightarrow N'$ bütme morfizmi için $pfq : M' \rightarrow N'$ bir izomorfizm değil” özelliğini sağlayan tüm $f : M \rightarrow N$ morfizmlerinin $\text{rad}_A(M, N)$ kümesine $\text{mod} A$ ’nın *radikali* (*radical*) denir ve

$$\text{rad}_A(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid pfq : M' \rightarrow N' \text{ izomorfizm değildir}\}$$

kümesine ait olan bir f morfizmi *radikal morfizm* (*radical morphism*) olarak adlandırılır.

$f : L \rightarrow M$ ve $g : M \rightarrow N$ radikal morfizmler olsun. Bu durumda gf bileşkesi rad_A^2 ’dedir. L ve N modülleri verildiğinde;

$$\text{rad}_A^2(L, N) = \{\sum g_i f_i \mid f_i \in \text{rad}_A(L, M_i), g_i \in \text{rad}_A(M_i, N)\}$$

ile, eğer $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ biçiminde yazılırsa;

$$\text{rad}_A^2(L, N) = \{gf \mid f \in \text{rad}_A(L, M), g \in \text{rad}_A(M, N), M \in \text{mod} A\}$$

ile tanımlanır.

Assem ve Coelho (2020)’ya göre M ve N ayrıştırılmaz A -modüller olmak üzere bir $f : M \rightarrow N$ morfizminin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul f ’nin $\text{rad}_A(M, N) \setminus \text{rad}_A^2(M, N)$ ’ye ait olmasıdır. Bundan dolayı M ’den N ’ye giden tüm indirgenemez morfizmlerin uzayı

$$\text{Irr}_A(M, N) = \frac{\text{rad}_A(M, N)}{\text{rad}_A^2(M, N)}$$

bölüm uzayı olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.4

- (a) L ayrıştırılmaz olmak üzere $f : L \rightarrow M$ bir radikal morfizm olsun. Her $u : L \rightarrow U$ radikal morfizmi için $u'f = u$ olacak şekilde $u' : M \rightarrow U$ varsa, f 'ye *sol neredeyse parçalanan* (*left almost split*) morfizm denir.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ u \downarrow & \swarrow u' & \\ U & & \end{array}$$

- (b) N ayrıştırılmaz olmak üzere $g : M \rightarrow N$ bir radikal morfizm olsun. Her $v : V \rightarrow N$ radikal morfizmi için $gv' = v$ olacak şekilde $v' : V \rightarrow M$ varsa, g 'ye *sağ neredeyse parçalanan* (*right almost split*) morfizm denir.

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ & \swarrow v' & \\ M & \xrightarrow{g} & N \\ & \downarrow v & \end{array}$$

Tanım 3.1.5 Bir Q kuiveri verildiğinde,

- Köşeleri: $\text{rep}Q$ 'nın ayrıştırılmaz temsilleri,
- Okları: bu ayrıştırılmaz temsiller arasındaki indirgenemez morfizmlerin bir bazı

olan kuivere *Auslander-Reiten kuiver* ya da kısaca *AR-kuiver* adı verilir ve Γ_Q ile gösterilir.

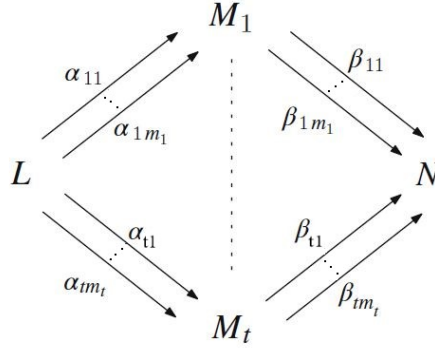
Uyarı 3.1.6

- (a) M ve N ayrıştırılmaz A -modülleri için Γ_Q 'da M 'den N 'ye en az bir okun var olması için gerek ve yeter koşul M 'den N 'ye bir indirgenemez morfizmin var olmasıdır bunun için gerek ve yeter koşul ise $\text{Irr}_A(M, N) \neq 0$ olmasıdır.
- (b) Ayrıştırılmaz bir modülden kendisine giden bir indirgenemez morfizm olmadığı için Γ_Q Auslander-Reiten kuiveri döngü içermez.
- (c) Ayrıştırılmaz bir M ve projektif olmayan ayrıştırılmaz bir N A -modülü için Γ_Q 'da M 'den N 'ye m tane okun var olması için gerek ve yeter koşul τN 'den M 'ye m tane okun var olmasıdır.

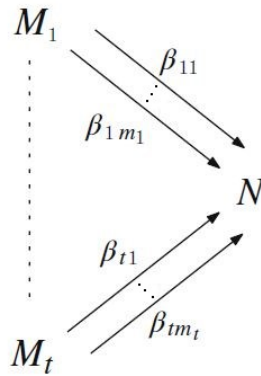
- (d) Her biri ayrıştırılmaz ve herhangi ikisi izomorf olmayan M_i A -modülleri için $M = \bigoplus_{i=1}^t M_i^{m_i}$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^t M_i^{m_i} \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

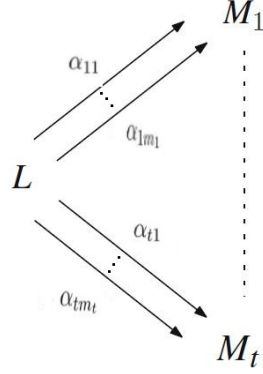
neredeyse parçalanan dizisinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda (c) şikkından, $1 \leq j \leq m_i$ olmak üzere okları: $M \rightarrow M_i$ izdüşüm fonksiyonları ile f 'nin bileşkesinden elde edilen $\alpha_{ij} : L \rightarrow M$ birebir eşlemeleri ve $M_i \hookrightarrow M$ içerim fonksiyonları ile g 'nin bileşkesinden elde edilen $\beta_{ij} : M_i \rightarrow N$ birebir eşlemeleri olan ve Γ_Q 'da *ağ* (*mesh*) olarak adlandırılan yukarıdaki diyagramlar vardır.



N 'nin ayrıştırılmaz projektif bir A -modül olması durumunda, N 'de biten bir sağ minimal neredeyse parçalanan $g : \text{rad}N \hookrightarrow N$ morfizmi var olduğundan, yukarıdaki gibi tanımlanan M_i ve β_{ij} 'ler için $\text{rad}N = \bigoplus_{i=1}^t M_i^{m_i}$ olmak üzere Γ_Q 'da *yarım ağ* (*half mesh*) olarak adlandırılan



diyagramlar vardır. Benzer olarak L 'nin ayrıştırılmaz injektif bir A -modül olması durumunda L 'de başlayan bir sol minimal neredeyse parçalanmış bir $f : L \rightarrow L/\text{soc}L$ morfizmi var olduğundan $L/\text{soc}L = \bigoplus_{i=1}^t M_i^{m_i}$ olmak üzere Γ_Q 'da *yarım ağ* (*half mesh*) olarak adlandırılan aşağıdaki diyagramlar vardır.



- (e) (d) şıkında açıklanan durum, Γ_Q Auslander-Reiten kuiverinin kombinatorik bir yapıya sahip olduğunu gösterir. Her köşe ve her ok bir ağda veya bir yarım ağda görünür. Bundan dolayı bu ağların veya yarım ağların birleşimi Γ_Q 'yu oluşturur. Özel olarak, Γ_Q 'daki her bir köşe en fazla sonlu sayıda okun bir başlangıç veya bitiş noktası olabilir. Bu durum, Γ_Q 'nın *yerel olarak sonlu* (*locally finite*) olması olarak nitelendirilir. Ayrıca Q kuiverinin sonlu tipli sonlu bir kuiver olması durumunda Γ_Q sonlu olup çoklu ok (multi arrow) içermez.

Genel olarak bir kuiverin, yukarıda tanımı ve özellikleri verilen, Auslander-Reiten kuiveri oluşturulurken, tüm ayrıştırılmaz modüllerin ve bunların arasındaki indirgenemez morfizmlerin belirlenmesi gerektiği için, Γ_Q 'yu oluşturmak kolay değildir. Fakat aşağıda verilen metod yönlendirilmiş döngü içermeyen kuiverlerin Auslander-Reiten kuiverlerini oluşturmada kolaylık sağlar.

Örgü Algoritması (Knitting Algorithm) Yönlendirilmiş döngü içermeyen bir Q kuiverinin Auslander-Reiten kuiveri aşağıdaki adımlar takip edilerek oluşturulur.

- (a) Γ_Q 'da oklar sol tarafta basit projektif modüllerden başlar.
- (b) Γ_Q 'da basit projektif bir modülde başlayan her ok bir projektif modülde biter.

(c) Γ_Q 'da bir projektif modülde biten her ok onun radikalının bir ayrıştırılmaz dik toplananında başlar.

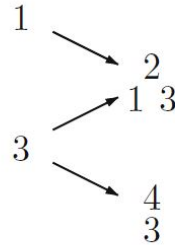
(d) İnjektif olmayan bir ayrıştırılmaz L modülü ve bir sol minimal neredeyse parçalanmış $f : L \rightarrow M$ morfizmi var ise, bu durumda $\tau^{-1}L = \text{coker } f$ ile bulunur ve her ayrıştırılmaz X modülü için, n tane $L \rightarrow X$ okunun var olması için gerek ve yeter koşul n tane $X \rightarrow \tau^{-1}L$ okunun var olmasıdır.

Şimdi, dayandığı temel ilkeleri yukarıda belirtilen, örgü algoritmasını $\mathbb{A}_4$ tipli bir kuiver örneği üzerinde açıklayalım.

Örnek 3.1.7 $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\gamma} 4$ kuiveri verilsin. Q 'nun tüm ayrıştırılmaz projektif modülleri

$$P(1) = 1, \quad P(2) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix}, \quad P(3) = 3, \quad P(4) = \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$$

biçimindedir. Burada $\text{rad}P(1) = 0$, $\text{rad}P(2) = 1 \oplus 3$, $\text{rad}P(3) = 0$ ve $\text{rad}P(4) = 3$ olup örgü algoritmasının (a), (b) ve (c) şıkları gereğince Auslander-Reiten kuiverin sol sınırı



biçimindedir. Örgü algoritmasının (d) şıkkı gereğince, sırasıyla yukarıdaki indirgenmez morfizmlerden başlayarak, her bir adımda eşekirdekleri hesaplayarak, injektif modüllere ulaşıncaya kadar ağları oluşturalım.

1.adım: 1'de başlayan sol neredeyse parçalanmış $1 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix}$ morfizmi için $\tau^{-1}(1)$;

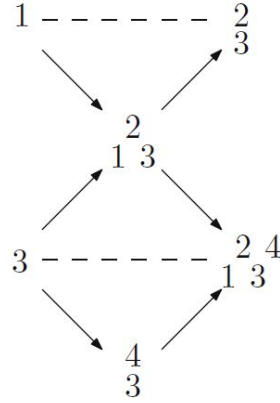
$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

neredeyse parçalanmış dizisindeki eşçirdek terimi olan $\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$ tür.

2.adım: 3'te başlayan sol neredeyse parçalanmış $3 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ morfizmi için $\tau^{-1}(3)$;

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \ 4 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

neredeyse parçalanmış dizisindeki eşçirdek terimi olan $\begin{smallmatrix} 2 \ 4 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix}$ tür. Bu iki adım sonunda ağı oluşur.



3.adım: $\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix}$ 'te başlayan sol neredeyse parçalanmış $\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \ 4 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix}$ morfizmi için

$$\tau^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \right);$$

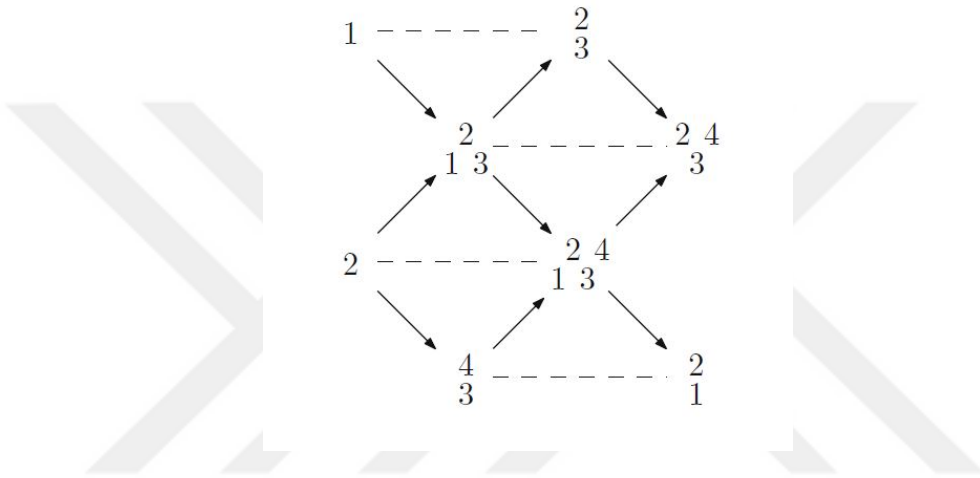
$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \ 4 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \ 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

neredeyse parçalanmış dizisindeki eşçirdek terimi olan $\begin{smallmatrix} 2 \ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ tür.

4.adım: $\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ 'te başlayan sol neredeyse parçalanan $\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{smallmatrix}$ morfizmi için $\tau^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

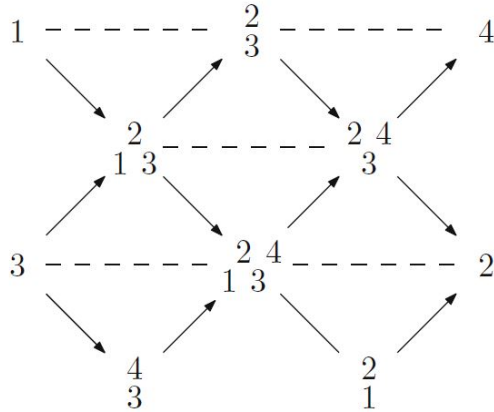
$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

neredeyse parçalanan dizisindeki eşçekirdek terimi olan $\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ dir. 4. adımın sonunda



ağları oluşur. Yukarıdaki yöntem iki adım daha tekrarlandığında; $I(1) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $I(2) = 2$,

$I(3) = \begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ ve $I(4) = 4$ injektif modülleri elde edildiği için, süreç sonlandırılır ve aşağıdaki biçimde Auslander-Reiten kuiveri oluşturulmuş olur.

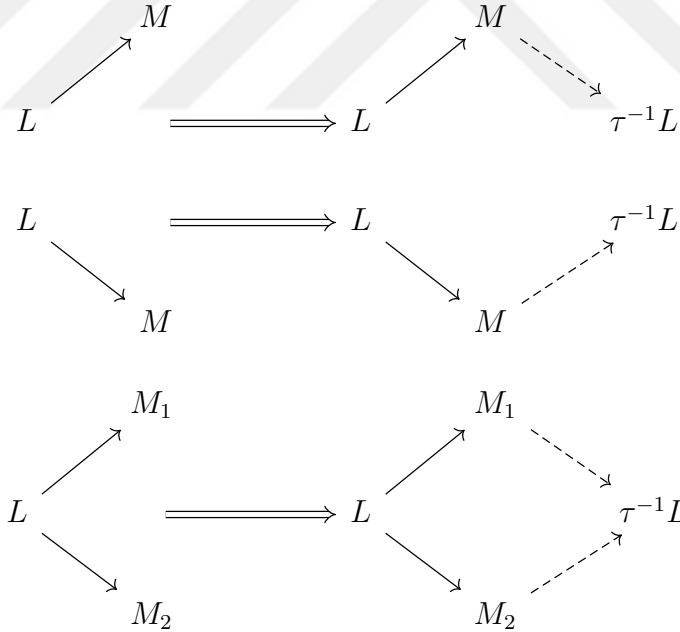


3.2. Örgü Algoritması

Bu bölümde, adını ağa benzeyen şekillerin soldan sağa doğru ard arda birleştirilmesinden alan ve önceki bölümde Assem ve Coelho (2020)'ya göre ele alınan *örgü algoritması* (*knitting algorithm*) olarak adlandırılan yöntemin, Schiffler (2014)'e göre $\mathbb{A}_n$ -tipli bir kuiverin Auslander-Retien kuiverinin oluşturulmasında nasıl kullanıldığı örneklerle açıklanacaktır.

Schiffler (2014)'e göre örgü algoritmasının adımları aşağıda verilmiştir.

- (1) Her bir $i \in Q_0$ köşesi için $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n)$ projektif temsilleri yazılır.
- (2) Sonuç 2.3.35(1) gereğince, Q 'daki her $i \rightarrow j$ oku için, her biri farklı seviyede olacak şekilde, Γ_Q 'da $P(j) \rightarrow P(i)$ oku çizilir.
- (3) $\dim L + \dim \tau^{-1}L = \sum_{i=1}^2 \dim M_i$ olacak şekilde adına sırasıyla *yarım ağ* (*half-mesh*) ve *ağ* (*mesh*) denilen aşağıdaki diyagramlar oluşturulur.

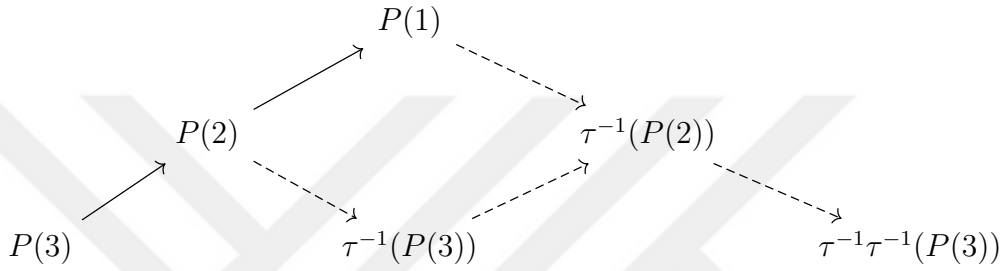


- (4) Boyut vektöründe negatif tam sayılar elde edilinceye kadar, yani; tüm injektif temsiller bulununcaya kadar her defasında bilinen L ve M temsilleri için $\tau^{-1}(L)$ hesaplanarak (3). adım tekrarlanır.

Şimdi bu algoritmanın nasıl kullanıldığını bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.2.1 $Q : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ kuiverinin Auslander-Reiten kuiverini örgü algoritması yardımıyla oluşturalım.

- Her bir köşe için $P(1) = 2$, $P(2) = \frac{2}{3}$, $P(3) = 3$ projektif temsilleri bulunur.
- $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ oklarına karşılık, $P(3) \longrightarrow P(2) \longrightarrow P(1)$ okları farklı seviyelere yerleştirilerek (3). adımda ifade edildiği gibi



ağları oluşturulur.

- Şimdi bu diyagramda belirsiz olan her bir τ^{-1} görüntüsünü hesaplayarak yerine yazalım.

Öncelikle $P(3) = 3$ için $\tau^{-1}(3)$ 'ü bulalım. 3 temsiliinin boyut vektörünün bileşenleri $d_1 = d_2 = 0$ ve $d_3 = 1$ olmak üzere Teorem 2.3.41 gereğince 3'ün minimal injektif çözücüsü

$$I_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} d_i I(i) = I(3) \quad \text{ve} \quad I_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} d_{t(\alpha)} I(s(\alpha)) = I(2)$$

olmak üzere

$$0 \longrightarrow 3 \xrightarrow{f} I(3) \xrightarrow{g} I(2) \longrightarrow 0$$

yazılır. Bu çözücüye ν^{-1} ters Nakayama fonktörü uygulanırsa

$$0 \longrightarrow \nu^{-1}3 \xrightarrow{\nu^{-1}f} \nu^{-1}(I(3)) \xrightarrow{\nu^{-1}g} \nu^{-1}(I(2)) \longrightarrow \tau^{-1}3 \longrightarrow 0$$

dizisi ve buradan

$$0 \longrightarrow P(3) \xrightarrow{\nu^{-1}g} P(2) \longrightarrow \tau^{-1}3 \longrightarrow 0$$

dizisi elde edilir. Projektif temsiller yerine yazılır ve

$$0 \longrightarrow 3 \xrightarrow{\nu^{-1}g} \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \tau^{-1}3 \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinde eşçekirdek terimi olan $\tau^{-1}(3) = 2$ olarak bulunur.

Şimdi $P(2) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$ için $\tau^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ görüntüsünü belirleyelim. Boyut vektörünün bileşenleri $d_1 = 0, d_2 = d_3 = 1$ olmak üzere $I_0 = I(2) \oplus I(3)$ ve $I_1 = I(1) \oplus I(2)$ için

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \xrightarrow{f} I(3) \xrightarrow{g} I(1) \longrightarrow 0$$

minimal injektif çözücüsü yazılır. Bu çözücüye ν^{-1} uygulanarak

$$0 \longrightarrow \nu^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\nu^{-1}f} P(3) \xrightarrow{\nu^{-1}g} P(1) \longrightarrow \tau^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

dizisi ve buradan

$$0 \longrightarrow 3 \xrightarrow{\nu^{-1}g} \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \tau^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

dizisinin eşçekirdek terimi olarak $\tau^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ bulunur. Son olarak $\tau^{-1}(2)$ 'yi bulalım. 2 temsiliinin boyut vektörünün bileşenleri $d_1 = d_3 = 0, d_2 = 1$ olmak üzere $I_0 = I(2)$ ve $I_1 = I(1)$ için

$$0 \longrightarrow 2 \xrightarrow{f} I(2) \xrightarrow{g} I(1) \longrightarrow 0$$

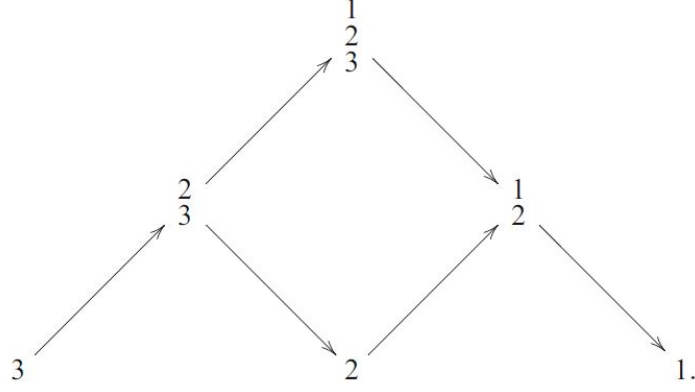
minimal injektif çözücüsü yazılır. Bu çözücüye ters Nakayama fonktörü uygulanarak

$$0 \longrightarrow \nu^{-1}2 \xrightarrow{\nu^{-1}f} P(2) \xrightarrow{\nu^{-1}g} P(1) \longrightarrow \tau^{-1}2 \longrightarrow 0$$

dizisi ve buradan

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \xrightarrow{\nu^{-1}g} \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \tau^{-1} \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

dizisinin eşşekirdek terimi olarak $\tau^{-1}(2) = 1$ bulunur. Sonuç olarak, τ^{-1} altında bulunan ters görüntüler yerine yazılarak



Auslander-Reiten kuiveri oluşturulur.

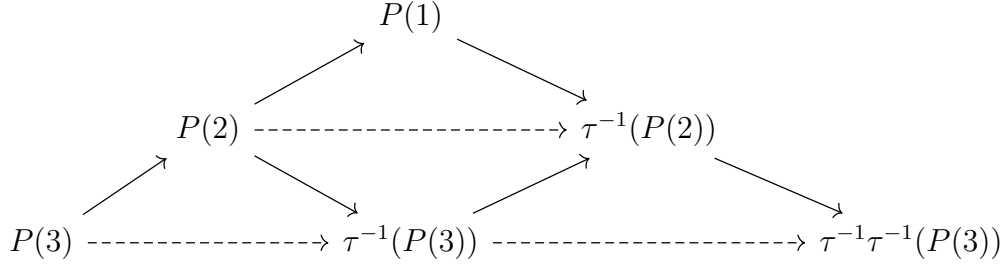
Yukarıdaki Auslander-Reiten kuiverin sol sınırını ayrıştırılamaz projektif temsiller, sağ sınırını ise ayrıştırılamaz injektif temsiller oluşturur. Diyagramda görünen tüm temsiller ayrıştırılamaz temsil olup aralarındaki oklar indirgenemez morfizmlerdir.

3.3. τ -Yörüngeler

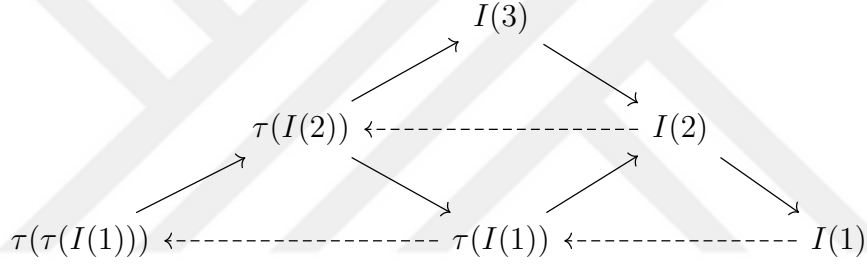
Tanım 2.4.1’de verilen τ dönüşümü Auslander-Reiten kuiverdeki bir ağın en sağındaki noktayı aynı ağın en solundaki noktaya götüren bir çeviricidir. Bir ayrıştırılamaz temsilin τ -yörüngesi (τ -orbit); o temsile arka arkaya τ veya τ^{-1} ötelemelerinin uygulanmasıyla elde edilebilecek tüm farklı temsillerin kümesi olarak tanımlanır. $\mathbb{A}_n$ -tipi bir kuiverin Auslander-Reiten kuiverinde aynı seviyede yer alan her bir τ -yörüngenin en solunda bir tane ayrıştırılamaz projektif temsil, en sağında ise bir tane ayrıştırılamaz injektif temsil yer alır. Örgü algoritmasında çapraz olarak oluşturulan Auslander-Reiten kuiver, ayrıştırılamaz temsillerin τ -yörüngeleri yardımıyla yatay olarak oluşturulur. τ -yörüngeler iki farklı yoldan hesaplanabilir. Bunu Örnek 3.2.1’de verilen kuiver üzerinde açıklayalım.

İlk olarak ayrıştırılamaz projektif temsillerden başlanırsa, her bir satırın en solunda bulunan ayrıştırılamaz projektif temsilin minimal injektif çözücüsüne ters Nakayama fonktörü uygulanarak, τ -yörüngeleri oluşturan τ^{-1} altındaki görüntüler, soldan sağa

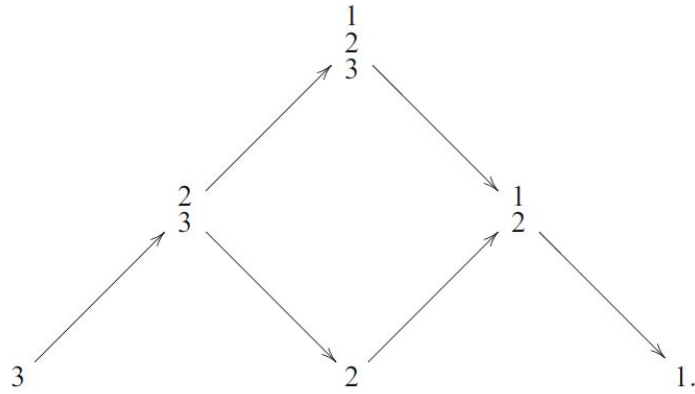
doğru yatay biçimde hesaplanır ve böylece aşağıdaki biçimde Auslander-Reiten kuiver oluşturulur.



Ayrıştırılabilir injektif temsillerden başlanırsa, her bir satırın en sağında bulunan ayrıştırılabilir injektif temsilin minimal projektif çözücüsüne Nakayama fonktörü uygulanarak, τ -yörüngeleri oluşturan τ altındaki görüntüler, sağdan sola doğru yatay biçimde hesaplanır ve aşağıdaki biçimde Auslander-Reiten kuiver oluşturulur.



Yukarıdaki iki diyagramda temsiller yerine yazıldığında her iki yoldan da aynı



Auslander-Reiten kuiveri çizilmiş olur.

3.4. Coxeter Funktor ve Cartan Matris

Şimdi bir temsili τ Auslander-Reiten ötelemesinin ya da τ^{-1} ters Auslander-Reiten ötelemesinin boyutunun belirlenmesinde kullanılan bir yöntem olan Coxeter elemanı tanıtaçağız. Bunun için öncelikle ihtiyacımız olan aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.4.1 $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere bir Q kuiveri verilsin. $\mathbb{R}^n$ 'nin standart tabanı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ -1/2, & i, Q\text{'da } j\text{'ye bitişik bir köşe ise;} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

kuralı ile tanımlı $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir simetrik ikilineer form olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n$ için $s_i(x) = x - 2B(x, e_i)e_i$ ile tanımlı $s_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonlarına *yansıma* (*reflection*) fonksiyonları adı verilir. Daha açık olarak, her $x \in \mathbb{R}^n$ elemanın, taban elemanlarının lineer bileşimi olarak, $x = \sum_j a_j e_j$ biçiminde yazıldığı gözönüne alınırsa

$$s_i(x) = s_i\left(\sum_j a_j e_j\right) = \sum_j a'_j e_j$$

ile tanımlıdır. Burada $j \neq i$ ise $a'_j = a_j$ ve toplam; Q 'da i 'ye bitişik tüm j köşeleri üzerinden alınmak üzere $a'_i = -a_i + \sum_{i \sim j} a_j$ biçimindedir.

Uyarı 3.4.2 Bir Q kuiveri verildiğinde, o kuiverden yeni kuiverlerin ve batakl köşelerden oluşan bir dizinin nasıl oluşturulduğunu bir kaç adımda özetleyelim:

- Q 'da bir i_1 batakl köşesi seçilir ve sadece bu köşeye gelen okların yönü değiştirilerek yeni bir $s_{i_1}Q$ kuiveri oluşturulur.
- $s_{i_1}Q$ 'da bir i_2 batakl köşesi seçilir ve sadece bu köşeye gelen okların yönü değiştirilerek $s_{i_2}s_{i_1}Q$ kuiveri oluşturulur. Kuiverdeki tüm köşeler bitinceye kadar bu şekilde devam edilerek,
- $t = 2, 3, \dots, n$ için $s_{i_n} \dots s_{i_2}s_{i_1}Q$ 'da seçilen i_t batakl köşesine gelen okların yönü değiştirildiğinde elde edilen kuiver Q olur.

Böylece her bir adımda yeni bir kuiver oluşturulurken, seçilen batac köşelerden bir $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ dizisi elde edilir.

Tanım 3.4.3 Uyarı 3.4.2’de belirtilen batac köşelerin dizisi kullanılarak oluşturulan yansımaların bir $c = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_n}$ çarpımına bir *coxeter eleman* adı verilir.

Coxeter eleman, bir M temsiliinin boyut vektörü kullanılarak $\tau^{-1}(M)$ temsiliinin boyut vektörünün belirlenmesinde şu şekilde kullanılır: $\underline{\dim} M = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ olmak üzere

$$c \left(\sum_i d_i e_i \right) = \sum_i d'_i e_i$$

eşitliğinden yararlanarak $\underline{\dim} \tau^{-1}(M) = (d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$ boyut vektörü ve buradan kuiverdeki okların yönüne göre $\tau^{-1}(M)$ temsili belirlenmiş olur. $\mathbb{A}_n$ -tipli bir kuiverin Auslander-Reiten kuiveri oluşturulurken; örgü algoritması ya da τ -yörüngelerin bulunmasında olduğu gibi, en solda yer alan projektif temsillerden başlanarak ağlar, ve bunların birleştirilmesiyle de Γ_Q kuiveri oluşturulur. Şimdi bu yöntemi bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.4.4 $Q : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longleftarrow 5$ kuiveri için bir Coxeter eleman bulup, $M = 4$ basit temsiliinin ters Auslander-Reiten ötelemesi olan $\tau^{-1}(4)$ görüntüsünü belirleyelim. Öncelikle batac köşelerin oluşturduğu bir dizi bulalım.

- Q ’da bir $i_1 = 1$ batac köşesi seçilir ve sadece 1’deki okların yönü değiştirilerek

$$s_1 Q : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longleftarrow 5$$

kuiveri oluşturulur.

- $s_1 Q$ ’da bir $i_2 = 4$ batac köşesi seçilir ve sadece 4’deki okların yönü değiştirilerek

$$s_4 s_1 Q : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4 \longrightarrow 5$$

kuiveri oluşturulur.

- $s_4 s_1 Q$ ’da bir $i_3 = 2$ batac köşesi seçilir ve sadece 2’deki okların yönü değiştirilerek

$$s_2 s_4 s_1 Q : 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4 \longrightarrow 5$$

kuiveri oluşturulur.

- $s_2s_4s_1Q$ 'da bir $i_4 = 3$ batac köşesi seçilir ve 3'teki okların yönü değıştirilerek

$$s_3s_2s_4s_1Q : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$$

kuiveri oluşturulur.

- Son olarak $s_3s_2s_4s_1Q$ 'da bir $i_5 = 5$ batac köşesi seçilir.

Sadece 5'e gelen okların yönü değıştirildiğinde başlangıçtaki Q kuiverinin elde edildiğı açıktır. Böylece batacların oluşturduğu bir $(1, 4, 2, 3, 5)$ dizisi ve bu diziye karşılık gelen bir coxeter eleman $c = s_1s_4s_2s_3s_5$ elde edilir. $M = 4$ temsilinin boyut vektörünün bileşenlerinin $d_1 = d_2 = d_3 = d_5 = 0$ ve $d_4 = 1$ olduğu gözönüne alınarak, her bir adımda s_i yansıma fonksiyonlarının kuralı uygulanarak, aşağıdaki hesaplamalar yapılır:

$$c \left(\sum_i d_i e_i \right) = s_1s_4s_2s_3s_5(e_4) \quad (3.1)$$

$i = 5$ için $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$ ve $a_4 = 1$ olmak üzere $s_5(e_4) = e_4 + e_5$ olarak bulunur. Bu değeri (3.1)'de yerine yazılırsa

$$c \left(\sum_i d_i e_i \right) = s_1s_4s_2s_3(e_4 + e_5) \quad (3.2)$$

olur. Buradan $i = 3$ için $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ve $a_4 = a_5 = 1$ olmak üzere $s_3(e_4 + e_5) = (-a_3 + a_2 + a_4)e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 = e_3 + e_4 + e_5$ olup bu değeri (3.2)'te yerine yazılırsa

$$c \left(\sum_i d_i e_i \right) = s_1s_4s_2(e_3 + e_4 + e_5) \quad (3.3)$$

elde edilir. Buradan $i = 2$ için $a_1 = a_2 = 0$ ve $a_3 = a_4 = a_5 = 1$ olmak üzere $s_2(e_3 + e_4 + e_5) = (-a_2 + a_1 + a_3)e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 = e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ olup (3.3)'de yerine yazılırsa

$$c \left(\sum_i d_i e_i \right) = s_1s_4(e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \quad (3.4)$$

olur. Burada $i = 4$ için $a_1 = 0$ ve $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ olmak üzere $s_4(e_2 + e_3 + e_4 + e_5) = a_2e_2 + a_3e_3 + (-a_4 + a_3 + a_5)e_4 + a_5e_5 = e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ olup (3.4)'de yerine yazılır ve

$$c \left(\sum_i d_i e_i \right) = s_1(e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \quad (3.5)$$

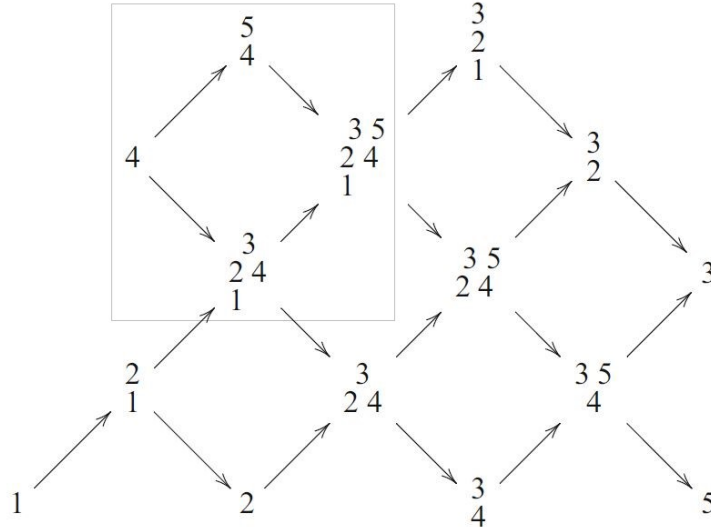
elde edilir. Son olarak, $i = 1$ için $a_1 = 0$ ve $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ olmak üzere $s_1(e_2 + e_3 + e_4 + e_5) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ bulunur ve (3.5)'de yerine yazılarak

$$c \left(\sum_i d_i e_i \right) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$$

bulunur. Son eşitlikten elde edilen katsayılar yardımıyla $\underline{\dim} \tau^{-1}(4) = (1, 1, 1, 1, 1)$
3 5

bulunur. Verilen kuiverdeki okların yönü dikkate alınarak, $\tau^{-1}(4) = 2 \ 4$ elde edi-
1

lir. Böylece aşağıdaki diyagramda en üstte belirtilen ağ oluşturulur. Her bir ağ oluşturmak için bu yöntem tekrarlanır ve Q kuiverinin Auslander-Reiten kuiveri aşağıdaki biçimde çizilir.



Coxeter elemanı belirlemenin diğer bir yolu, Q kuiverinin C Cartan matrisini kullanmaktır. Aşağıda bu matrisin tanımı verilmiştir.

Tanım 3.4.5 n köşeli bir Q kuiverinde, j 'den i 'ye giden yolların sayısı ile belirlenen c_{ij} bileşenlerinin oluşturduğu $C = [c_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ matrisine Q kuiverinin *Cartan matrisi* denir.

Bu tanımın direkt bir sonucu olarak, her bir i köşesi için C matrisinin i . sütununu; ayrıştırılamaz projektif $P(i)$ temsiliinin boyut vektörünün bileşenleri ve i . satırını ayrıştırılamaz injektif $I(i)$ temsiliinin boyut vektörünün bileşenleri oluşturur.

Yönlendirilmiş döngü içermeyen Q kuiverleriyle çalıştığımız için, Q 'nun köşelerini şu şekilde yeniden numaralandırabiliriz: j 'den i 'ye bir yol varsa, o zaman $i \leq j$ yazılır. Başka bir deyişle, C matrisi üst üçgensel olacak şekilde köşelerin bir yeniden numaralandırılması yapılır. Ayrıca her bir i köşesinde e_i sabit yolları olduğu için C 'nin köşegen bileşenleri 1 olup bu durumda C matrisi tersinir olur. Cartan matrisinin tersi olan $C^{-1} = [b_{ij}]$ matrisi; $b_{ii} = 1$ ve $i \neq j$ iken $b_{ij} = -c_{ij}$ ile bulunur. Şimdi boyut vektörlerinin belirlenmesinde kullanılan Coxeter matrisini tanımlayalım.

Tanım 3.4.6 $\Phi = -C^T(C^{-1})$ ile tanımlı Φ matrisi *Coxeter matris* olarak adlandırılır. Bu matrisin tersi ise $\Phi^{-1} = -C(C^{-1})^T$ dur. Cartan matrisi ve onun tersi yardımıyla tanımlanan Φ ve Φ^{-1} Coxeter matrisleri bulunur ve M temsilinin boyut vektörü olan $\underline{\dim}M$ sütun matrisi olarak yazılarak, $\tau(M)$ ve $\tau^{-1}(M)$ temsillerinin boyut vektörleri olan, sütun matrisleri şu şekilde bulunur:

- M projektif değil ise $\Phi \underline{\dim}M = \underline{\dim}\tau M$,
- M injektif değil ise $\Phi^{-1} \underline{\dim}M = \underline{\dim}\tau^{-1}M$

Ayrıca $\Phi \underline{\dim}P(j) = -\underline{\dim}I(j)$ ve $\Phi^{-1} \underline{\dim}I(j) = -\underline{\dim}P(j)$ dir.

Şimdi bu yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için, Örnek 3.4.4'de verilen Q kuiverinin $M = 4$ temsilinin $\tau^{-1}(M)$ ters Auslander-Reiten ötelemesinin nasıl hesaplandığını açıklayalım.

Örnek 3.4.7 Örnek 3.4.4'de verilen Q kuiverinin Cartan matrisi ve onun tersi

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olup, bu matrisler yardımıyla bulunan Coxeter matrisi ve onun tersi

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \phi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Boyut vektörü $\underline{\dim} M = (0, 0, 0, 1, 0)$ biçiminde olan projektif olan fakat injektif olmayan $M = 4$ temsili için

$$\underline{\dim} \tau^{-1}(4) = \Phi^{-1}(0, 0, 0, 1, 0)^T = (1, 1, 1, 1, 1)^T$$

3 5

olup $\tau^{-1}(4) = 2 \ 4$ olarak bulunur.

1

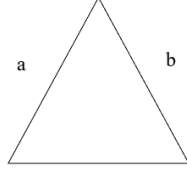
Diğer yandan, Auslander-Reiten kuiverin en solunda bulunan $P(4) = 4$ projektif temsili için boyut vektörü yardımıyla

$$\Phi \underline{\dim} P(4) = \Phi(0, 0, 0, 1, 0)^T = (0, 0, -1, -1, -1)^T = -\underline{\dim} I(4)$$

eşitliği kullanılarak Auslander-Reiten kuiverin en sağında yer alan $I(4) = \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ & 4 \end{smallmatrix}$ injektif temsili için bulunduğunu kolayca görülebilir.

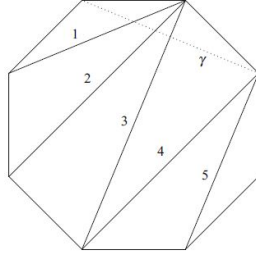
3.5. $n + 3$ Köşeli Çokgenin Köşegenleştirilmesi

Bu bölümde, sadece $\mathbb{A}_n$ -tipi bir kuiverlerin Auslander-Reiten kuiverlerinin oluşturulmasında kullanılan, $n + 3$ köşeli bir çokgenin üçgenleştirilmesi olarak bilinen geometrik bir yöntem tanıtılacaktır. Bir çokgende *köşegen* (*diagonal*) komşu olmayan iki köşeyi birleştiren düz bir çizgi parçası olarak tanımlanır. Bir düzgün çokgende kesişmeyen köşegenlerin maksimum kümesinin çizilmesi yani çokgenin üçgenlere ayrılması yöntemi, *üçgenleştirme* (*triangulation*) olarak bilinir ve $\mathbb{A}_n$ -tipi bir Q kuiverine karşılık gelen ve T_Q ile gösterilen üçgenleştirmeye $n + 3$ köşeli bir düzgün çokgen alınarak başlanır. Verilen bir kuiverin a, b köşeleri için, bir $b \rightarrow a$ oku varsa, a kenarı b kenarının saat yönünün tersinde olacak şekilde



üçgeni çizilir. Düzgün çokgenin tamamı üçgenlere ayrılıncaya kadar işlem tekrarlanır. Bu yöntemi Örnek 3.4.4'de verilen kuiver üzerinde açıklayalım.

Örnek 3.5.1 $Q : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longleftarrow 5$ kuiveri verilsin. Bu kuiver 5 köşeli olduğu için düzgün bir sekizgenin üçgenleştirilmesi yardımıyla Auslander-Reiten kuiveri oluşturalım. Kuiverdeki oklara göre aşağıdaki T_Q üçgenleştirmesi yapılır.



T_Q üçgenleştirmesinde, Q kuiverinin tüm köşelerine (basit temsillerine) karşılık getirilen 1,2,3,4,5 köşegenlerinden başka, Q kuiverinin bir $M_\gamma = (M_i, \varphi_\alpha)$ temsiline karşılık getirilen bir γ köşegeni vardır, öyle ki:

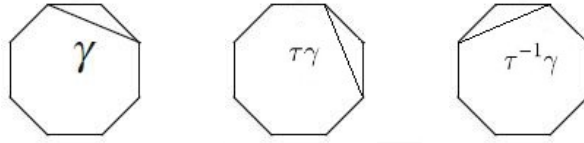
$$M_i = \begin{cases} \mathbf{k}, & \gamma \text{ köşegeni } i \text{ köşegenini bir iç noktada keser ise;} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = \begin{cases} 1, & M_{s(\alpha)} = M_{t(\alpha)} = \mathbf{k} \text{ ise;} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

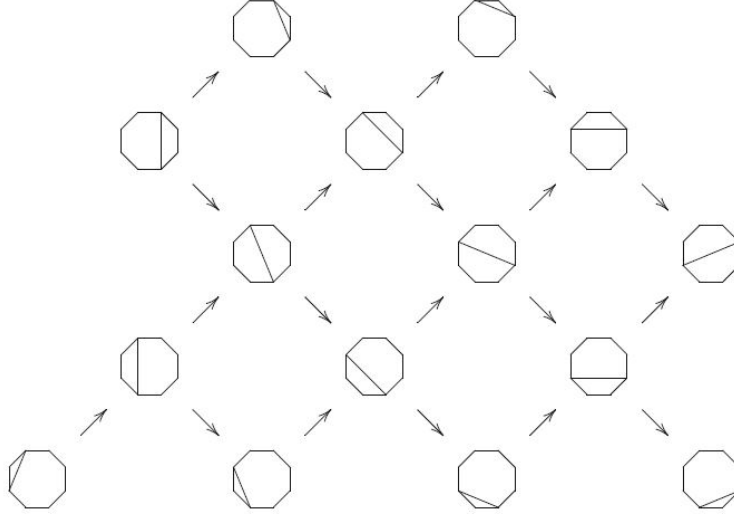
biçiminde tek türlü tanımlıdır. Örneğin yukarıdaki şekilde gösterilen γ köşegeni, Q kuiverinin bir $\mathbf{k} \xleftarrow{1} \mathbf{k} \xleftarrow{1} \mathbf{k} \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0$ temsiline karşılık gelen bir

köşegendir. Böylece T_Q 'daki köşegenlerle Q 'nın ayrıştırılamaz temsillerinin izosınıflarını arasında $\gamma \mapsto M_\gamma$ ile tanımlı bir birebir eşleme vardır.

Çokgendeki bir γ köşegeninin, sırasıyla, aşağıdaki biçimde saat yönündeki hareketi yardımıyla o köşegene karşılık gelen temsilin τ Auslander-Reiten ötelemesi altındaki görüntüsü, saat yönünün tersine hareketi yardımıyla o köşegene karşılık gelen temsilin τ^{-1} ters Auslander-Reiten ötelemesi altındaki görüntüsü hesaplanır.



Bu yöntemle Auslander-Reiten kuiver oluşturulurken projektif temsillere karşılık gelen köşegenler çokgende çizilir. Her bir τ -yörüngede injektif temsile ulaşmaya kadar τ -yörüngeleri hesaplamak için saat yönünün tersine döndürme hareketleri yapılarak

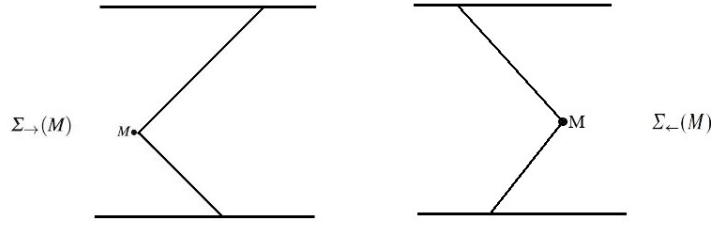


şekli oluşturulur. Sonuç olarak, bu şekildeki her bir köşegene karşılık gelen ayrıştırılamaz temsiller yazılarak Örnek 3.4.4'deki Auslander-Reiten kuiveri çizilmiş olur.

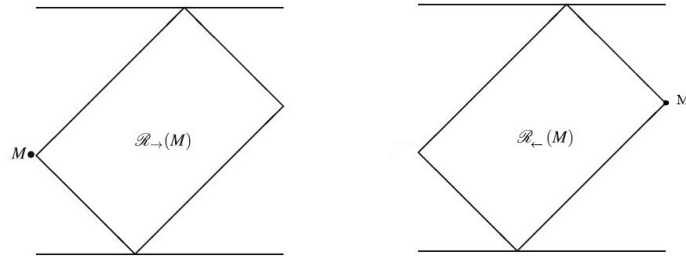
3.6. Auslander-Reiten Kuiverin Kullanımı

$\mathbb{A}_n$ -tipli bir Q kuiverinin ayrıştırılmaz M ve N temsilleri verilsin. Bu temsillerin Auslander-Reiten kuiverdeki, birbirine göre, durumlarına göre $\text{Hom}(M, N)$ vektör uzayının boyutu belirlenir. Bunun için önce bazı gösterimleri tanıtalım.

Tanım 3.6.1 Her $i = 1, 2, \dots, s-1$ için $\tau M_{i+1} \neq M_{i-1}$ olması durumunda bir $M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_s$ yoluna bir *kesitsel yol* (*sectional path*) adı verilir. Bir M temsilde başlayan kesitsel yol üzerinde bulunan tüm ayrıştırılmaz temsillerin kümesi $\Sigma_{\rightarrow}(M)$ ile; bir M temsilde biten kesitsel yol üzerindeki tüm ayrıştırılmaz temsillerin kümesi ise $\Sigma_{\leftarrow}(M)$ ile gösterilir. Bunlar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Auslander-Reiten kuiverde, sol sınırı $\Sigma_{\rightarrow}(M)$ olan eğimli dikdörtgensel bölgede bulunan tüm ayrıştırılmaz temsillerin kümesi $\mathcal{R}_{\rightarrow}(M)$ ile, sağ sınırı $\Sigma_{\leftarrow}(M)$ olan eğimli dikdörtgensel bölgede bulunan tüm ayrıştırılmaz temsillerin kümesi $\mathcal{R}_{\leftarrow}(M)$ ile aşağıdaki biçimde gösterilir.



Diğer bir deyişle, Auslander-Reiten kuiverde $\mathcal{R}_{\rightarrow}(M)$ 'yi, en solundaki nokta M olan en büyük eğimli dikdörtgen üzerindeki temsiller, $\mathcal{R}_{\leftarrow}(M)$ 'yi de en sağdaki nokta M olan en büyük eğimli dikdörtgen üzerindeki temsiller oluşturur.

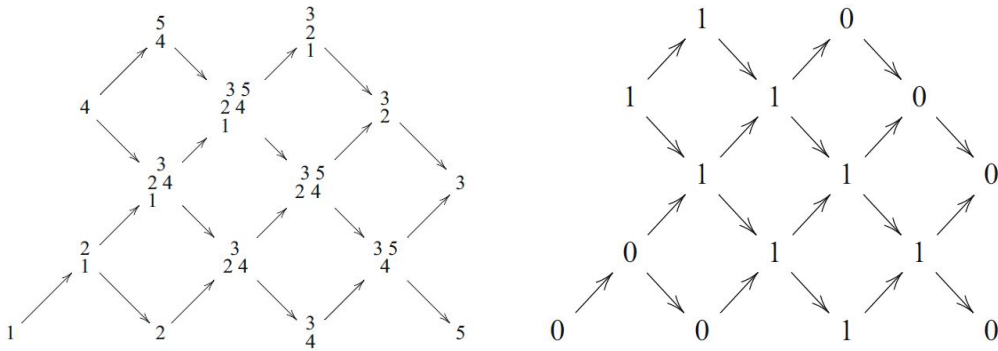
Uyarı 3.6.2 Yukarıda verilen notasyonlara göre, Auslander-Reiten kuiverde iki temsilin aynı eğimli dikdörtgen üzerinde bulunup bulunmamasına göre bu temsillerin Hom uzaylarının boyutu 0 veya 1 olarak belirlenebilir. Aşağıda bu durum karakterize edilmiştir.

- N temsili $\mathcal{R}_{\rightarrow}(M)$ 'dedir $\Leftrightarrow \dim \text{Hom}(M, N) = 1$ dir.
- N temsili $\mathcal{R}_{\rightarrow}(M)$ 'de değildir $\Leftrightarrow \dim \text{Hom}(M, N) = 0$ dır.

Bir temsilin eğimli dikdörtgensel bölgesi sadece düz bir çizgiden ibaret olabilir. Ayrıca M bir projektif temsil değil ise $\mathcal{R}_{\rightarrow}(M)$ eğimli dikdörtgeni kapanmadan Auslander-Reiten kuiver tamamlanabilir. Bundan başka, bir ayrıştırılamaz projektif $P(i)$ temsiline başlayan bir $\mathcal{R}_{\rightarrow}(P(i))$ eğimli dikdörtgensel bölgesinin en sağındaki nokta $I(i)$ injektif temsiline karşılık gelir ve $\mathcal{R}_{\rightarrow}(P(i)) = \mathcal{R}_{\leftarrow}(I(i))$ olur. Şimdi sözü geçen her bir durumu, Örnek 3.4.4'de verilen kuiverin Auslander-Reiten kuiveri üzerinde örneklendirelim.

Örnek 3.6.3 $Q : 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5$ kuiverinde

a) $M = P(4) = 4$ projektif temsili gözönüne alalım. Auslander-Reiten kuiverde, en solundaki nokta 4 temsili olan 1'lerle gösterilen $\mathcal{R}_{\rightarrow}(4)$ eğimli dikdörtgensel bölgesi, aşağıdaki ikinci diyagramda verilmiştir.



Bu bölgede bulunan N temsilleri için, M ve N temsillerinin oluşturduğu Hom uzayının boyutu 1, aksi durumda 0 olur. Örneğin, eğimli dikdörtgensel $\mathcal{R}_{\rightarrow}(4)$ bölgesinin en sağındaki noktaya karşılık gelen $N = \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ & 4 \end{smallmatrix} = I(4)$ injektif temsili için

$\text{Hom}(M, N)$ uzayının boyutu 1 dir. Bundan başka $N = 5$ basit temsili, $N = 1$

projektif temsili ya da $N = 3$ injektif temsili için, bu temsiller $\mathcal{R}_{\rightarrow}(4)$ 'de yer almadığından dolayı $\dim\text{Hom}(M, N) = 0$ olduğu açıktır.

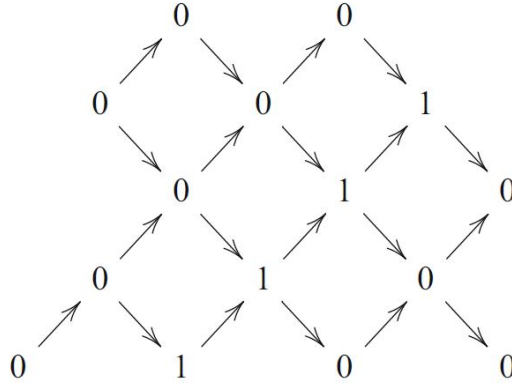
b) Projektif ve injektif olmayan $M = \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}$ temsili için, eğimli dikdörtgensel $\mathcal{R}_{\rightarrow}(M)$ bölgesi kapanmadan Auslander-Reiten kuiverin tamamlandığı yukarıdaki şekilde görülebilir. Ayrıca $N = \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$ injektif temsili için $\dim\text{Hom}(M, N) = 1$ olmasına

$$\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}$$

rağmen $N = \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$ temsili için $\dim\text{Hom}(M, N) = 0$ olur.

$$\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}$$

c) $M = 2 = S(2)$ basit temsili için $\mathcal{R}_{\rightarrow}(2)$ eğimli dikdörtgensel bölgesi



biçiminde 1'lerle gösterilen düz bir çizgiden oluşmaktadır. Bu çigi üzerinde bulunan

$N = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$ temsili için $\dim\text{Hom}(M, N) = 1$ iken $N = \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$ için $\dim\text{Hom}(M, N) = 0$ olduğu açıktır.

Uyarı 3.6.4 $\mathbb{A}_n$ -tipli bir kuiverin ayrıştırılamaz M ve N temsilleri için $\text{Ext}^1(M, N)$ uzayının boyutu, Teorem 2.4.4'de verilen

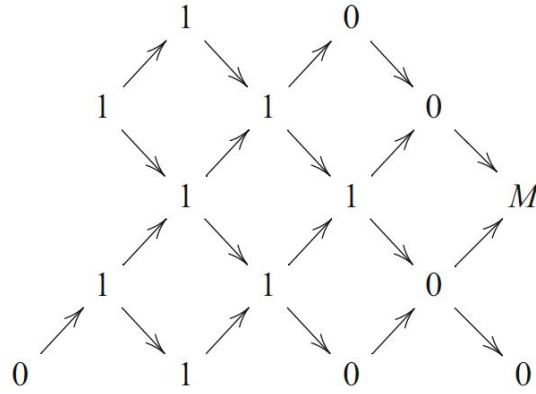
$$\text{Ext}^1(M, N) \cong D\text{Hom}(\tau^{-1}N, M)$$

$$\text{Ext}^1(M, N) \cong D\text{Hom}(N, \tau M)$$

Auslander-Reiten formülleri ve yukarıda ifade edilen Hom uzayının boyutunun bulunmasında kullanılan yöntem ile belirlenebilir. Ayrıştırılamaz M ve N temsilleri

için $\text{Ext}^1(M, N)$ uzayının boyutu 0 veya 1'dir. İnjektif bir N temsilinin tüm M temsilleriyle Ext uzaylarının boyutu 0 olur. Bu yüzden N temsilinin injektif olmadığı kabul edilir ve Auslander-Reiten kuiverde var olan $\tau^{-1}(M)$ noktasında başlayan $\mathcal{R}_{\rightarrow}(\tau^{-1}(M))$ eğimli dikdörtgensel bölgesinden yararlanarak, herhangi M temsili için $\text{Ext}^1(M, N)$ uzayının boyutu belirlenir. Diğer yandan M temsilinin projektif olması durumunda her N temsili için $\dim \text{Ext}^1(M, N) = 0$ olur. Bundan dolayı M projektif olmayan bir temsil olarak kabul edilir ve Auslander-Reiten kuiverde var olan $\tau(M)$ noktasında biten $\mathcal{R}_{\leftarrow}(\tau(M))$ eğimli dikdörtgensel bölgesinden yararlanılarak, herhangi N temsili için $\text{Ext}^1(M, N)$ uzayının boyutu belirlenir. Bunu Örnek 3.4.4'de verilen kuiver üzerinde açıklayalım.

Örnek 3.6.5 $Q : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longleftarrow 5$ kuiverinde $M = I(3) = 3$ injektif temsili için $\tau(M) = \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}$ olur. Aşağıdaki şekilde görüleceği gibi, bu noktada biten, 1 ile etiketlenmiş olarak gösterilen iç içe geçmiş iki tane eğimli dikdörtgensel bölge vardır.



Bu bölgede bulunan $N = 2$ basit temsili için $\dim \text{Ext}^1(M, N) = 1$ iken, bu bölgede bulunmayan basit projektif $N = 1$ temsili için $\dim \text{Ext}^1(M, N) = 0$ olur.

Uyarı 3.6.6 Ayrıştırılmaz M ve N temsilleri için, M 'nin N ile genişlemesi olarak adlandırılan

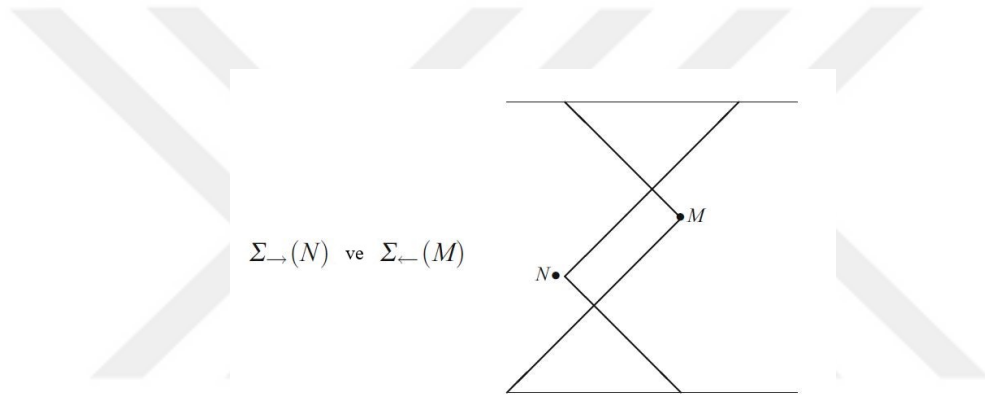
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

kısa tam dizilerinin denklik sınıflarının grubu ile $\text{Ext}^1(M, N)$ grubu arasında, Uyarı 2.2.19'de ifade edilen bir izomorfizma vardır. Uyarı 3.6.4 kullanılarak, ayrıştırılmaz

M ve N temsillerinin genişlemelerini oluşturan, ayrıştırılmaz olması gerekmeyen, E temsilleri şu şekilde belirlenir: $\dim \text{Ext}^1(M, N) = 0$ olması durumunda, $\text{Ext}^1(M, N) = 0$ olup yukarıda ifade edilen izomorfizma ve Uyarı 2.2.13 gereğince $E \cong M \oplus N$ olur. Bu durumda sadece

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

genişlemesi vardır. $\dim \text{Ext}^1(M, N) = 1$ olması durumunda ise, izomorfizma farkıyla belirli olan farklı E temsilleri, M ve N temsillerinin Auslander-Reiten kuiverde birbirine göre durumlarına göre şu şekilde bulunur: $\text{Ext}^1(M, N) \neq 0$ olacak şekilde ayrıştırılmaz M ve N temsilleri için aşağıdaki eğimli dikdörtgensel bölgesi belirlenir.

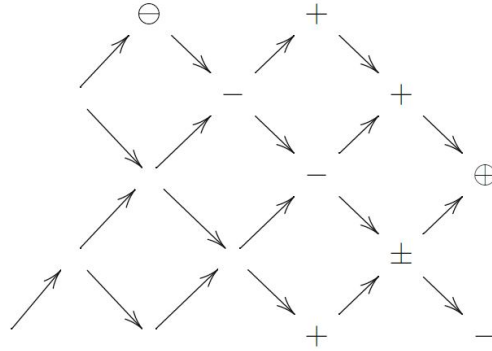


$\text{Ext}^1(M, N) \neq 0$ olması N 'nin $\mathcal{R}_{\leftarrow}(\tau M)$ 'de olmasını, bu ise $\Sigma_{\rightarrow}(N)$ ve $\Sigma_{\leftarrow}(M)$ 'nin, E 'nin ayrıştırılmaz dik toplananlarına karşılık gelen, 1 ya da 2 ortak noktasının bulunmasını gerektirir. E 'yi belirlemeye yarayan bu ortak noktaları bulmak için, kuiverin Auslander-Reiten kuiverinde N temsili $\ominus$ ve $\Sigma_{\rightarrow}(N)$ 'de bulunan temsiller $-$ ile, M temsili $\oplus$ ve $\Sigma_{\leftarrow}(M)$ 'de bulunan temsiller $+$ ile işaretlenir. Bu yolla, hem $-$ hem de $+$ işaretini alan, yani $\pm$ ile işaretlenen ortak temsillerin dik toplamı olan E belirlenerek $0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ kısa tam dizileri bulunur. Bu durumu Örnek 3.4.4'de verilen kuiver üzerinde açıklayalım.

Örnek 3.6.7 $Q: 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longleftarrow 5$ kuiverini gözönüne alalım.

$M = 3$ basit temsili $N = \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$ projektif temsili ile genişlemesi olan kısa tam diziyi belirleyelim. Uyarı 3.6.6'da ifade edildiği gibi, Q kuiverinin Auslander-Reiten kuiverinde; N temsili $\ominus$ ve N 'de başlayan kesit yol üzerinde bulunan temsiller $-$

sembolü ile, M temsili $\oplus$ ve M' 'de biten kesit yol üzerinde bulunan temsiller $+$ sembolü ile işaretlenerek



diyagramı oluşturulur. Her iki işareti de alan temsil sadece $E = \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ & 4 \end{smallmatrix}$ injektif temsili olup bir tek

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ & 4 \end{smallmatrix} \longrightarrow 3 \longrightarrow 0$$

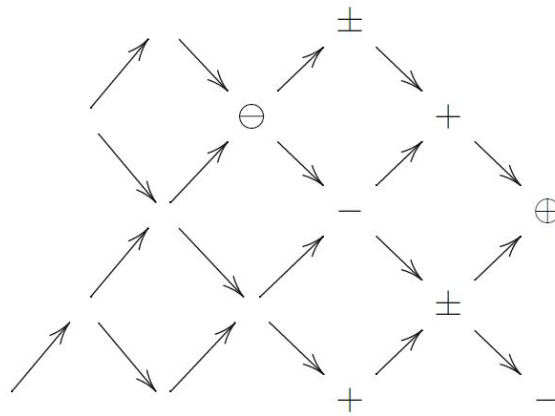
kısa tam dizisi yazılır.

$$\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ & 4 \end{smallmatrix}$$

Şimdi $M = 3$ basit temsili $N = \begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ & 1 \end{smallmatrix}$ temsili ile genişlemesi olan kısa tam di-

$$\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ & 1 \end{smallmatrix}$$

ziyi belirleyelim. Uyarı 3.6.6'da açıklanan yöntemle göre, Auslander-Reiten kuiverde gerekli işaretlemeler yapıldığında



diyagramı oluşturulur. Burada $\pm$ işaretini alan iki temsil olup, bu temsillerin dik

toplamı olan temsil $E = \begin{smallmatrix} & & 3 \\ 3 & 5 & \\ & 4 & \end{smallmatrix} \oplus 2$ olarak bulunur. Böylece

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix} & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \\ & 1 & \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} & 3 & 5 & 3 \\ & 4 & \oplus 2 & \\ & & & 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow 3 \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi yazılır.

3.7. Temsil Teoride Son Gelişmeler

Şimdi, (İnt. Kay.2) temel kaynak olarak kullanılarak, temsil teori alanındaki gelişmelerde Auslander-Reiten kuiverlerin önemine değinilecektir.

Son yıllarda temsil teori alanında yapılan pek çok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan ikisi olan tilting teori ve Auslander-Reiten teorisinin bağlantılı olduğunu vurgulamak adına her iki alanda da aynı τ sembolü kullanılmıştır. Adachi vd. (2014) tarafından τ -tilting kavramı ortaya atılmış ve bunun yardımıyla her iki alana da yeni bir yaklaşım getirilmiştir. Aşağıda açıklanan, tilting teori ve Auslander-Reiten teori alanlarındaki tarihsel gelişim sürecinde Auslander-Reiten kuiverlerin önemli rol oynadığı görülmektedir.

Temsil teori alanındaki modern çalışmalar; 1972’de Gabriel’in kuiver kavramını ortaya atmasının ardından, Auslander-Reiten’in (1974, 1975,1977) neredeyse parçalanan dizileri tanıtması ve 1973’te Gabriel’in kuiver temsillerinin teorisini geliştirmesiyle başlamıştır. Gabriel, sonlu boyutlu cebirlerin temsil teorisinin, kuiver temsillerinin kullanılarak anlaşılabilirliğini vurgulamış ve aşağıda verilen iki önemli teoremi ispatlamıştır.

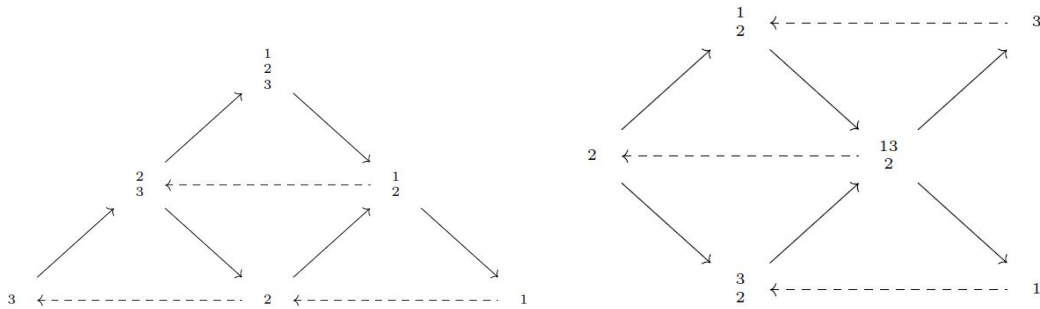
Teorem 3.7.1 (Gabriel-1) A cebirsel kapalı bir $\mathbf{k}$ cismi üzerinde bir sonlu boyutlu cebir olsun. Bağıntıların bir I ideali ile sınırlandırılan Q kuiverinin $\mathbf{k}Q/I$ sınırlı kuiver cebiri ile A cebiri Morita denktir. Yani $\text{mod}A \cong \text{mod}\mathbf{k}Q/I$ dır. Ayrıca, Q kuiveri A tarafından tek türlü tanımlıdır.

A cebiri tarafından tek türlü tanımlanan Q kuiverine *sıradan* (*ordinary*) ya da *Gabriel* kuiveri denir. Gabriel'in elde ettiği, sonlu temsil tipli kalıtsal cebirlerin Dynkin diyagramlarıyla sınıflandırılması sonucu aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.7.2 (Gabriel-2) A bir cebirsel kapalı $\mathbf{k}$ cismi üzerinde bir sonlu boyutlu kalıtsal cebir olsun. Q altında yatan çizgesi bir ADE-Dynkin diyagramı olan bir kuiver olmak üzere, $\mathbf{k}Q$ yol cebiri ile A cebiri Morita denktir. Yani $\text{mod } A \cong \text{mod } \mathbf{k}Q$ dir. Ayrıca A 'nın ayrıştırılmaz temsilleri ile Q 'ya karşılık gelen kök sistemlerinin pozitif kökleri arasında bir birebir eşleme vardır.

Bir kuiverin yol cebirinin pek çok özelliği kuiverdeki okların yönlendirilmesine bağlıdır. Örneğin aynı köşelere sahip farklı yönderilmiş kuiverlerde aynı sayıda ayrıştırılmaz temsil olsa bile bunlara karşılık gelen yol cebirlerinin boyutu farklı olabilir. Bunu aşağıdaki örneklerle açıklayalım.

Örnek 3.7.3 $Q_A : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ ve $Q_{A'} : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ kuiverlerine karşılık gelen yol cebirleri A ve A' olsun. A ; Auslander-Reiten kuiveri aşağıdaki birinci diyagram olan ve Q_A 'daki $e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \alpha\beta$ yollarını taban kabul eden 6 boyutlu bir cebirdir. A' ise, aşağıdaki ikinci diyagramda gösterilen Auslander-Reiten kuivere sahip olan ve $Q_{A'}$ 'deki $e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta$ yollarını taban kabul eden 5 boyutlu bir cebirdir.



Her iki diyagramda da 6 tane ayrıştırılmaz temsil var olup, oklar indirgenmez morfizmleri, kesikli çizgiler ise Auslander-Reiten ötelemeleri göstermektedir. Ayrıca bu örnekte, aynı sayıda köşeye sahip olan farklı yönlendirilmiş kuiverlerin Auslander-Reiten kuiverlerinin farklı olduğu görülmektedir.

Bernstein vd. (1973), $\text{mod } \mathbf{k}Q$ ile $\text{mod } \mathbf{k}Q'$ 'nin ayrıştırılmaz nesneleri arasında birbir eşleme kurmaya yarayan, yansıma (reflection) fonktörleri olarak adlandırılan fonktörlerin varlığını kanıtlamışlardır. Daha açık olarak; ADE-Dynkin tipli bir Q kuiverinde bir $x \in Q_0$ batac köşesi seçilerek, sadece bu köşeye gelen okların yönü değiştirildiğinde Q kuiverine özdeş olan yeni bir Q' kuiveri oluşturulur. x köşesi Q 'da bir batac iken Q' 'de bir kaynak olup, bu kuiverlere karşılık gelen A ve A' cebirleri x köşesinde birbirinin yansıması durumundadır. Bernstein vd. bu yansıma fonktörlerinden yararlanarak Gabriel'in ispatladığı, yukarıda ifade edilen teoremleri, farklı biçimde kanıtlamışlardır.

Auslander vd. (1979), yansıma fonktörlerinin $\text{mod } \mathbf{k}Q$ 'da çok özel bir nesne tarafından tanımlanabileceğini göstermiştir. Daha açık olarak, bir $x \in Q_0$ batac köşesine karşılık gelen projektif olan fakat injektif olmayan bir $S(x)$ basit modülünün, $\text{mod } \mathbf{k}Q$ 'da sıfırdan farklı bir nesne olan $\tau^{-1}S(x)$ ters Auslander-Reiten ötelemesi kullanılarak, yansıma fonktörlerinin

$$T = \tau^{-1}S(x) \oplus \bigoplus_{x \neq y \in Q_0} P(y)$$

modülü tarafından belirlendiğini kanıtlamışlardır. Ayrıca, $\mathbf{k}Q'$ ve $\text{End}_{\mathbf{k}Q}(T)^{op}$ cebirlerinin izomorf oldukları bu çalışmada gösterilmiştir. Özel olarak bu yaklaşım sayesinde, bir basit projektif modüle sahip herhangi bir A Artin cebirinin modül kategorisi ile $\text{End}_A(T)^{op}$ arasında reflection-like fonktörlerin varlığı kanıtlanmıştır. Şimdi bu T modülünün nasıl bulunduğuna bir örnek verelim.

Örnek 3.7.4 $Q : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ kuiverinde batac köşe $x = 3$ seçilirse, sadece bu köşeye gelen okların yönü değiştirilerek $Q' : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ özdeş kuiveri oluşturulur. Projektif olan fakat injektif olmayan $S(3) = 3$ basit modülü için

$$\tau^{-1}(3) = 2 \text{ olup } P(1) = 2 \text{ ve } P(2) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \text{ olmak üzere}$$

$$T = \tau^{-1}S(x) \oplus \bigoplus_{x \neq y \in Q_0} P(y) = 2 \oplus \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

özel modülü bulunur.

Brenner ve Butler (1980), bu özel modülü aşağıdaki biçimde aksiyomatik olarak tanımlamışlar ve buna tilting modül adını vermişlerdir.

Tanım 3.7.5 T herhangi bir A cebiri üzerinde bir modül olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlaması durumunda T 'ye bir *tilting modül* denir.

- (i) T 'nin projektif boyutu en fazla 1'dir ($\text{pd} T \leq 1$).
- (ii) $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$
- (iii) T' ve T'' ; T 'nin dik toplamlarının dik toplananları olmak üzere bir

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır.

Tilting modüllerin varlığı ilk defa Auslander, Platzeck ve Reiten tarafından ortaya konduğu için bunlara *APR-tilting* modül adı da verilir.

Brenner ve Butler (1980), herhangi bir tilting T A -modülü için $B := \text{End}_A(T)^{op}$ olmak üzere A ile B 'nin temsil teorisi arasında T 'nin bir tür dönüştürücü rolünde olduğunu göstermiştir. Örnek 3.7.4'de verilen T tilting modülünden başka tilting

1

modüller de vardır. Örneğin $T = 3 \oplus 2 \oplus 1$ başka bir tilting modüldür.

3

Bir cebirin modül kategorisi ile endomorfizma cebirinin modül kategorisi birbirlerinden bir dereceye kadar farklı olsalar bile, bu iki cebirin *türetilmiş denklikler* (*derived equivalents*) olduğu ilk olarak Happel (1988) tarafından gösterilmiş, daha sonra bu durum Richard (1989) tarafından genelleştirilmiştir. Basitçe söylemek gerekirse; bir cebirin bir modül kategorisinden başlanarak, cebirle ilgili oldukça fazla homolojik bilgiye sahip olan ve cebirin türetilmiş kategorisi olarak bilinen bir üçgenleştirilmiş kategori oluşturulabilir. Dolayısıyla Hapel ve Richard'ın elde ettiği sonuçlar; bir tilting modülün cebiri ile onun endomorfizma cebirinin aynı türetilmiş kategoriye sahip olduğunu ortaya koyar. Bu ise, her iki kategorinin pek çok ortak homolojik özelliğe

sahip olmalarını gerektirir.

Hapel ve Ringel (1982), kalıtsal bir cebir üzerindeki bir tilting modülün endomorfizma cebirini *tilted cebir* olarak adlandırmıştır. Bu fikrin ortaya atılmasının ardındaki temel neden, o zamana kadar sistematik olarak çalışılmamış olan yeni bir cebir sınıfını anlamak için, kalıtsal cebirler için geçerli olan tüm bilgileri kullanmaktır. Günümüzde tilted cebirlerle ilgili çok sayıda çalışma yapılmış olmasına rağmen iki tanesi dikkat çekici olmuştur.

Bunlardan ilki; kalıtsal cebirlerle ilgili bilgiler kullanılarak tilted cebirlerin temsil teorisi hakkında bilgi sahibi olunursa, işlem tekrarlanabilir ve Brenner ve Butler'in (1980) kanıtladıkları A cebiri üzerinde herhangi bir kısıtlama gerektirmeyen tilting teorem yardımıyla, tilted cebirlerle ilgili bilgilerin kullanılarak *iterated tilted cebirler* olarak bilinen yeni cebir ailelerinin temsil teorisinin anlaşılabilir olmasıdır. Assem ve Skowronski (1987), A_n -Dynkin tipli tüm iterated tilted cebirleri, onların sıradan kuiverleri ve bağıntıları bakımından sınıflandırmış ve bunları *gentle cebirler* olarak adlandırmıştır. Günümüzde gentle cebirler üzerine yapılan çalışmalar, sonlu boyutlu cebirlerin temsil teorisinin anlayışını derinleştirmiş ve grup teorisi, cebirsel geometri ve diferansiyel geometri gibi matematiğin diğer çeşitli dallarında uygulama alanının olduğunu ortaya koymuştur.

İkincisi ise; Liu (1993) ve Skowronski (1993)'nin, birbirinden bağımsız olarak, bir cebirin Auslander-Reiten kuiverini kullanarak tilted cebirleri karakterize etmeleridir. Bir cebirin tilted olması için gerek ve yeter koşul olarak onun Auslander-Reiten kuiverinin özel bir homolojik ve kombinatorik yapıya sahip olması gerektiğini kanıtlamışlardır. Tilted cebirlerin bu karakterizasyonundan ilham alınarak pek çok farklı cebir ailesi tanımlanmış ve bunlar Auslander-Reiten kuiverleri bakımından belirlenmişlerdir. 21. yüzyılın başlarında Fomin ve Zelevinsky'nin çalışmalarıyla cluster teori kavramı ortaya atılmış ve tilting teori ile ilişkilendirilerek cluster-tilted cebirler tanımlanmıştır. Sonuç olarak, sözü edilen ve yeni tanımlanan cebir sınıflarının yapısının incelenmesinde Auslander-Reiten kuiver kavramı önemli rol oynamaktadır.

4. KAYNAKLAR

- Adachi T, Iyama O and Reiten I, 2014, τ -tilting theory. *Compos. Math.*,150(3):415–452.
- Alizade R, Pancar A, 1999, Homoloji Cebirine Giriş, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 178s, Samsun.
- Anderson F W, Fuller K R, 1992, Rings and Categories of Modules, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 385p, New York, Inc.
- Assem I, Simson D, Skowronski A, 2006, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, 1: Techniques of Representation Theory London Mathematical Society Student Texts, 65, 458p, Cambridge University Press.
- Assem I, Coelho F U, 2020, Basic Representation Theory of Algebras, Graduate Text in Mathematics, Springer Nature, 311p, Switzerland.
- Assem I and Skowronski A, 1987, Iterated tilted algebras of type A_n . *Math. Z.*,195: 269–290.
- Auslander M, 1974, Representation theory of artin algebras II. *Comm. in Algebra*, 189-231.
- Auslander M, Platzeck M I and Reiten I, 1979, Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 250:1–46.
- Auslander M and Reiten I,1975, Representation theory of Artin algebras. III: Almost split sequences. *Commun. Algebra*, 3:239–294.
- Auslander M and Reiten I, 1977, Representation theory of Artin algebras. IV: Invariants given by almost split sequences. *Commun. Algebra*, 5:443–518.
- Auslander M, Reiten I and Smalø S O, 1997, Representation theory of Artin algebras, volume 36 Cambridge University Press, Cambridge.
- Bernstein I N, Gel’fand I M and Ponomarev V A, 1973, Coxeter Functors and Gab

- riel's Theorem, *Russ. Math. Surv.*, **28**: 17-32
- Brenner S and Butler M C R, 1980, Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. In Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), volume 832 of Lecture Notes in Math., pages 103–169. Springer, Berlin-New York.
- Dummit D S, Foote R M, 2004, Abstract Algebra, John Wiley and Sons.
- Gabriel P, 1972, Unzerlegbare Darstellungen.I (Indecomposable representations.I) *Manuscr. Math.*, 6:71–103
- Happel D and Ringel C M, 1982, Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2): 399–443.
- Happel D, 1988, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras, volume 119 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hungerford T W, 1974, Algebra, Springer-Verlag, 229p, New York.
- Liu S, 1993, Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver. *J. London Math. Soc.*(2), 47(3):405–416.
- Rickard J, 1989, Morita theory for derived categories. *J. Lond. Math. Soc.*, II. Ser., 39(3):436–456.
- Rotman J, 2009, An Introduction to Homological Algebra, Second Edition, Springer, 110p, New York.
- Schiffler R, 2014, Quiver Representations, Springer International Publishing, 230p, Switzerland.
- Skowronski A, 1993, Generalized standard Auslander-Reiten components without oriented cycles. *Osaka J. Math.*, 30(3):515–527.

İnternet Kaynakları

1- <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/kau/leit6.pdf> (18.07.2023)

2- <https://arxiv.org/abs/2106.00426> (18.07.2023)

