



**T.C.**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ABEL İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN  
İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GİZEM POLAT**

GİZEM POLAT

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

AĞUSTOS 2024

# ABEL İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Gizem POLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2024

## Yüksek Lisans Tezi Kabul Ve Onay Sayfası

Gizem POLAT tarafından hazırlanan “Abel İntegral Denklemlerinin Çözümlerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

Matematik Ana Bilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

**Başkan:** Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR

Matematik Ana Bilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

**Üye:** Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN

Matematik Ana Bilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

Tez Savunma Tarihi: 06/08/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallar'ına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gizem POLAT

06/08/2024

ABEL İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ  
(Yüksek Lisans Tezi)

Gizem POLAT

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Ağustos 2024

ÖZET

Bu çalışmada, Abel integral denklemleri, Genelleştirilmiş Abel integral denklemleri ve ikinci tür zayıf Volterra integral denklemleri ele alınmıştır. Ayrıca bu denklemleri çözmek için Laplace dönüşüm metodu, Adomian ayrıştırma, Ardışık yaklaşımlar metodu ve Homotopi analiz dönüşüm metodu kullanılmıştır. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Abel integral denklemleri ile ilgili kısa bir literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde kullanacağımız temel tanımlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde bu denklemleri çözmek için kullanacağımız metotlar tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde ise zayıf singüler Volterra integral denklemleri; Laplace dönüşüm, Adomian ayrıştırma, ardışık yaklaşımlar ve Homotopi analiz dönüşüm metodu ile çözülmüştür. Ayrıca Abel integral denklemleri de Homotopi analiz dönüşüm ve Laplace dönüşüm metodu ile çözülmüştür. Son olarak beşinci bölümde bu problemlerle ilgili gelecekteki çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Sayfa Adedi  
Anahtar Kelimeler  
Danışman

: 36  
: Abel integral denklemi, Genelleştirilmiş Abel integral denklemi,  
zayıf ikinci tür Volterra integral denklemi  
: Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

# INVESTIGATION OF SOLUTIONS OF ABEL'S INTEGRAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Gizem POLAT

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2024

## ABSTRACT

In this study, Abel integral equations, generalised Abel integral equations and second kind weak Volterra integral equations are considered. In addition, Laplace transform method, Adomian decomposition, method of successive approximations and Homotopy analysis transform method are used to solve these equations. This thesis consists of five chapters. In the first chapter, a brief summary of the literature on Abel integral equations is given. In the second chapter, the basic definitions we will use are mentioned. In the third chapter, the methods we will use to solve these equations are introduced. In the fourth section, weakly singular Volterra integral equations are solved by Laplace transform, Adomian decomposition, successive approximations and Homotopy analysis transform method. In addition, Abel integral equations are solved by Homotopy analysis transformation and Laplace transform method. Finally, in the fifth chapter, suggestions for future work on these problems are given.

Page Number

: 36

Keywords

: Abel's integral equation, Generalised Abel integral equation, weak second kind Volterra integral equation

Supervisor

: Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

## ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Kıymetli tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN 'e gösterdiği sonsuz sabır, anlayış, vermiş olduğu başarılı eğitim süreci, hoşgörülü davranışı için en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisi ile matematik bölümünün hem lisans hem de lisansüstü eğitimi süresince birlikte olmaktan hep mutluluk duydum. Engin bilgilerinden faydalanarak araştırmayı, üretmeyi ve geliştirmeyi öğrendim. Kendisinin öğrencisi olup ders almak benim için büyük bir onurdur. Tez çalışmam boyunca bilgilerinden yararlandığım Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN'a ve Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde çalışmakta olan ve her türlü sorunumu çözerken güler yüzünü eksik etmeyen Bayram ATAĞ'a teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans eğitimim boyunca üzerimde emeği bulunan tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. En önemlisi hayatım boyunca her başarımın arkasında sevgisini, güvenini, sabrını ve sonsuz desteğini en derinden hissettiren canım annem ve canım babam Naciye - Durmuş POLAT'a, Bugün ve bugünden sonraki süreçte sevgisi ve desteğiyle kalbimde yer alan Nazım AKGÜL'e tez çalışmam sürecinde beni daima motive edip daha iyi odaklanmama yardımcı olan kıymetli ablalarım Seval - Leyla ve Yeliz POLAT'a sonsuz saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.



## İÇİNDEKİLER

|                                                                           | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET . . . . .                                                            | iv    |
| ABSTRACT . . . . .                                                        | v     |
| ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR . . . . .                                              | vi    |
| İÇİNDEKİLER . . . . .                                                     | vii   |
| ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .                                               | ix    |
| ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .                                                 | x     |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .                                  | xi    |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                        | 1     |
| 2. GENEL BİLGİLER . . . . .                                               | 3     |
| 2.1. İntegral Denklem . . . . .                                           | 3     |
| 2.2. İntegral Denklemlerinin Sınıflandırılması . . . . .                  | 3     |
| 2.2.1. Fredholm integral denklemleri . . . . .                            | 3     |
| 2.2.2. Volterra integral denklemleri . . . . .                            | 3     |
| 2.2.3. Tekil (singüler) integral denklemleri . . . . .                    | 4     |
| 2.3. Abel İntegral Denkleminin Elde Edilmesi . . . . .                    | 4     |
| 2.3.1. Abel integral denklemleri . . . . .                                | 6     |
| 2.3.2. Genelleştirilmiş Abel integral denklemleri . . . . .               | 6     |
| 2.4. Laplace Dönüşümü için Konvolüsyon Teoremi . . . . .                  | 6     |
| 2.5. Zayıf Singüler Volterra İntegral Denklemi . . . . .                  | 7     |
| 2.6. Genelleştirilmiş Zayıf Singüler Volterra İntegral Denklemi . . . . . | 7     |
| 2.7. Leibniz Kuralı . . . . .                                             | 7     |
| 3. MATERYAL VE METOT . . . . .                                            | 8     |

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| 3.1. Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .         | 8  |
| 3.2. Adomian Ayırıştırma Metodu . . . . .     | 11 |
| 3.3. Modifiye Ayırıştırma Metodu . . . . .    | 12 |
| 3.4. Gürültü Terimi . . . . .                 | 12 |
| 3.5. Ardışık Yaklaşımlar Metodu . . . . .     | 13 |
| 3.6. Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu . . . . . | 15 |
| 3.7. Yakınsaklık Analizi . . . . .            | 17 |
| 4. BULGULAR . . . . .                         | 19 |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER . . . . .                | 33 |
| KAYNAKLAR . . . . .                           | 34 |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                            | 36 |

**ÇİZELGELER DİZİNİ**

| <b>Çizelge</b>                                                     | <b>Sayfa</b> |
|--------------------------------------------------------------------|--------------|
| Çizelge 4.1. <i>Örnek</i> : 4.1 için mutlak hata tablosu . . . . . | 24           |
| Çizelge 4.2. <i>Örnek</i> : 4.2 için mutlak hata tablosu . . . . . | 26           |
| Çizelge 4.3. <i>Örnek</i> : 4.3 için mutlak hata tablosu . . . . . | 30           |



## ŞEKİLLER DİZİNİ

| Şekil                                                                               | Sayfa |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Şekil 4.1. $m = 20$ ile tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma . . . . . | 23    |
| Şekil 4.2. $m = 20$ ve $h = -1.5$ için mutlak hata fonksiyonu . . . . .             | 24    |
| Şekil 4.3. $m = 20$ ve $x = 1$ için h-eğrisi . . . . .                              | 24    |
| Şekil 4.4. $m = 20$ ile tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma . . . . . | 26    |
| Şekil 4.5. $m = 20$ ve $h = -1$ için mutlak hata fonksiyonu . . . . .               | 26    |
| Şekil 4.6. $m = 20$ ve $x = 1$ için h-eğrisi . . . . .                              | 27    |
| Şekil 4.7. $m = 20$ ile tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma . . . . . | 29    |
| Şekil 4.8. $m = 20$ ve $h = -0.5$ için mutlak hata fonksiyonu . . . . .             | 29    |
| Şekil 4.9. $m = 20$ ve $x = 1$ için h-eğrisi . . . . .                              | 30    |

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler      | Açıklama                |
|---------------|-------------------------|
| $\Gamma$      | Gama                    |
| $K(x, t)$     | Çekirdek fonksiyonu     |
| $\lambda$     | Lamda                   |
| $L$           | Laplace dönüşümü        |
| $h_1 * h_2$   | Konvolüsyon çarpımı     |
| $\alpha$      | Alfa                    |
| $h$           | Yardımcı parametre      |
| $H(x)$        | Yardımcı fonksiyon      |
| $\mathcal{L}$ | Lineer operatörü        |
| $q$           | Gömme parametresi       |
| $N$           | Lineer olmayan operatör |

| Kısaltmalar | Açıklama                       |
|-------------|--------------------------------|
| HADM        | Homotopi analiz dönüşüm metodu |

## 1. GİRİŞ

Adını Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel'den alan Abel integral denklemleri, integral denklemler teorisinin önemli bir dalını oluşturur. Bu denklemler matematiğin, fiziğin ve mühendisliğin çeşitli alanlarında ortaya çıkar ve çok çeşitli problemlerin modellenmesi ve çözülmesi için güçlü araçlar sağlar. Örneğin mikroskopi, sismoloji, radyo astronomi, elektron emisyonu, atomik saçılma, radar menzili, plazma teşhisi, X-ışını radyografisi ve optiklif değerlendirmesi gibi bilimsel alanlar bunlardan birkaçıdır. 1823'de Abel, "tautochrone problemi" genelleştirirken

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} w(t) dt, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

denklemini türetmiştir (Wazwaz, 2011). Bu denklem, birinci türden lineer Volterra integral denkleminin özel bir durumudur. Abel'in integral denklemleri, diferansiyel denklemler, potansiyel teorisi, sinyal işleme, görüntü işleme yarı iletkenler, saçılma teorisi, ısı iletimi, sıvı akışı, kimyasal reaksiyonlar, popülasyon dinamiği ve kuantum mekaniği gibi çeşitli alanlarda uygulama alanı bulmaktadır (Gorenflo and Vessella, 1991a). Çok yönlülükleri, niceliklerin yalnızca mevcut değerlerine değil aynı zamanda geçmiş davranışlarına da bağlı olduğu olayları modelleme yeteneklerinde yatmaktadır, bu da onları dinamik sistemleri ve hafıza etkileri olan olayları incelemede paha biçilmez kılmaktadır. Abel integral denklemlerinin çözümü tipik olarak integral dönüşümleri, iterasyon yöntemleri, spektral yöntemler ve sayısal yaklaşım teknikleri gibi teknikleri içerir. Analitik çözümlerin elde edilmesi genellikle zordur, bu da araştırmacıları bu denklemleri etkili bir şekilde ele almak için sayısal ve hesaplamalı yaklaşımları keşfetmeye yönlendirir. Liao çeşitli boyutlardaki farklı problemlerin çözümü için homotopi analiz yöntemini kullanmıştır (Liao, 2003, 2004, 2009; Liao and Tan, 2007). Bu yöntemde üretilen çözüm sonsuz seri formundadır ve bu form tam çözüme yakınsar son yıllarda birçok yazar Laplace dönüşümü yöntemi ile birleştirilmiş homotopi analiz yöntemini kullanarak lineer ve lineer olmayan- diferansiyel integral denklemlerin çözümlerini incelemiştir (Khan, Gondal, Hussain and Vanani, 2012; Kumar, Singh, Kumar and Kapoor, 2013). Bu çalışmada homotopi analiz dönüşüm metodu (HADM) kullanılarak genelleştirilmesi Abel birinci tür integral denklemleri çözülmüştür. İntegral denklemlerini çözmek için birçok farklı yöntem vardır ve bunlardan sadece bazıları tekil integral denklemleri için etkilidir (Atkinson, 1997; Rahman, 2007; Agarwal, 2003; Estrada and Kanwal, 2000a). Özellikle tekillik özelliğine sahip Abel integral denklemi zor ve ağır hesaplamalara neden olur (Capobianco and Conte, 2006; Gorenflo and Vessella, 1991b; Pandey, Singh and Vineet, 2009; Yousefi, 2006; Singh, Pandey and Singh, 2010).

Bu tezde, Abel integral denklemlerinin temel kavramlarını inceleyecek, çeşitli çözüm tekniklerini tartışacak ve bu denklemlerin farklı alanlarda ki uygulamalarını ele alacağız. Abel integral denklemlerini anlamak ve onlara hakim olmak, karmaşık sistemler hakkında bilgi edinmemize ve mühendislikteki zorlu problemleri çözmemize katkı sağlar. Ayrıca bu çalışmada, tekil birinci tür Abel integral denklemi, genelleştirilmiş Abel integral denklemi ve zayıf singüler Volterra integral denklemlerini çözmek için Laplace dönüşümü, Adomian ayrıştırma, Ardışık yaklaşımlar ve Homotopi analiz dönüşüm metodu kullanılmıştır.



## 2. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda, ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan başlıca tanımların, teoremlerin ve yardımcı teoremlerin ifadelerine yer verilmiştir.

### 2.1. İntegral Denklem

$w(x)$  bilinmeyen fonksiyonun hem integral işareti altında hem de dışında görüldüğü denklemlerdir. Bu denklemlerin en genel formu,  $k(x)$  ve  $l(x)$  integral sınırları,  $\gamma$  bir sabit,  $K(x, t)$ , çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$w(x) = f(x) + \gamma \int_{k(x)}^{l(x)} K(x, t)w(t)dt \quad (2)$$

şeklinde gösterilir.

### 2.2. İntegral Denklemlerinin Sınıflandırılması

Bu kısımda Fredholm integral denklemini, Volterra İntegral denklemini ve Tekil(singüler) integral denklemlerini tanıtacağız.

#### 2.2.1. Fredholm integral denklemleri

Bu tür denklemler için integral sınırları sabittir. Ayrıca bilinmeyen  $w(x)$  fonksiyonu sadece integral denklemin içinde görülebilir.

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)w(t)dt \quad (3)$$

eşitliğine birinci türden Fredholm integral denklemini denir. Ancak, ikinci tür Fredholm integral denklemleri için,  $w(x)$  bilinmeyen fonksiyonu integral işaretinin içinde ve dışında görülür. İkinci tür Fredholm integral denklemleri

$$w(x) = f(x) + \gamma \int_a^b K(x, t)w(t)dt \quad (4)$$

şeklinde temsil edilmektedir.

#### 2.2.2. Volterra integral denklemleri

Bu tür denklemlerde, integral sınırlarından en az biri değişken olup birinci tür volterra integral denklemleri için  $w(x)$  bilinmeyen fonksiyonu yalnızca integral işareti içinde görülür . Yani

$$f(x) = \int_0^x K(x, t)w(t)dt \quad (5)$$



formundadır. Bununla birlikte, ikinci tür Volterra integral denklemlerinde,  $w(x)$  bilinmeyişi integralin hem içinde hem de dışında görülür. Yani

$$w(x) = f(x) + \gamma \int_0^x K(x,t)w(t)dt \quad (6)$$

şeklinde ifade edilir.

### 2.2.3. Tekil (singüler) integral denklemleri

Eğer  $k(x)$  ve  $l(x)$  integral limitlerinden bir tanesi ya da her ikisi birden sonsuz oluyorsa

$$f(x) = \gamma \int_{k(x)}^{l(x)} K(x,t)w(t)dt \quad (7)$$

denklemine birinci tür tekil Volterra integral denklemleri ve

$$w(x) = f(x) + \gamma \int_{k(x)}^{l(x)} K(x,t)w(t)dt \quad (8)$$

denklemine de ikinci tür tekil(singüler) Volterra integral denklemi denir. Ayrıca  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu integral aralığındaki bir ya da daha çok noktada sınırsız oluyorsa (7) ve (8) denklemlerine tekildir denir.

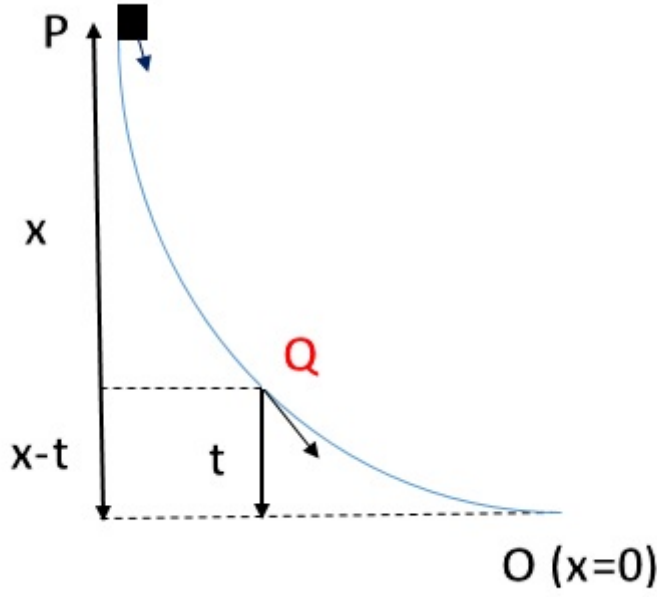
### 2.3. Abel İntegral Denkleminin Elde Edilmesi

Burada Abel integral denkleminin elde edilişi verilmiştir. Abel, düşey düzlemde yer çekimi etkisi altında düzgün bir eğri boyunca giden bir cismin hareketini incelemiştir. Cismin  $P$  noktasından başladığı ve  $x$  düşey yükselmesiyle bir eğri boyunca en düşük nokta olan  $O$  noktasına doğru hareket ettiği kabul edilir.  $O$  noktasındaki düşey uzaklık  $x = 0$  'dır. Cismin  $P$ 'den  $O$ 'ya hareket süresi  $T$  olsun.  $T$ ,  $x$  yüksekliğine bağlı olduğundan,

$$T = h(x) \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Kabul edelim ki  $P$ 'den  $O$ 'ya olan yörünge eğrisinin yer uzunluğu  $s$  olsun. O hâlde

$$\frac{ds}{dT} = v \quad (10)$$



Başlangıçtaki Enerji =  $Q$  'daki kinetik + potansiyel enerji ( $P$  noktasındaki enerji)

$$mgx = \frac{1}{2}mv^2 + mgt \text{ (Burada } t, Q \text{ 'nun yüksekliği)}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gx - gt$$

$$v^2 = 2g(x - t)$$

$$v = -\sqrt{2g(x - t)} \text{ (Aşağıya doğru bir hızlanma olduğundan)}$$

$$\frac{ds}{dT} = -\sqrt{2g(x - t)} \quad (11)$$

$$dT = -\frac{ds}{\sqrt{2g(x - t)}}$$

$$T = -\int_P^O \frac{ds}{\sqrt{2g(x - t)}}$$

$$T = \int_O^P \frac{ds}{\sqrt{2g(x - t)}}$$

$T = h(x)$  ve  $f(x) = \sqrt{2g}h(x)$  olsun. Ayrıca  $ds = w(t)dt$  de yazılabilir.  $T = \int_O^P \frac{ds}{\sqrt{2g(x - t)}}$  integralinin her tarafını  $\sqrt{2g}$  ile çarparsak:

$$\sqrt{2g}T = \sqrt{2g} \int_O^P \frac{ds}{\sqrt{2g}\sqrt{x - t}} \quad (12)$$

$$f(x) = \int_O^x \frac{1}{\sqrt{x - t}} w(t) dt \quad (13)$$

şeklinde Abel denklemi elde edilir.

### 2.3.1. Abel integral denklemleri

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt \quad (14)$$

denkleminde Abel integral denklemi denir. Abel integral denklemi birinci tür Volterra denklemi olarak da bilinmektedir.

Bu denklemin çekirdeği  $K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}$  dir.  $t \rightarrow x$  iken  $K(x, t) \rightarrow \infty$  olduğundan singülerlik ortaya çıkmaktadır.

### 2.3.2. Genelleştirilmiş Abel integral denklemleri

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} w(t) dt, \quad 0 < x < 1 \quad (15)$$

denkleminde Genelleştirilmiş Abel integral denklemi denir.  $\alpha = \frac{1}{2}$  olması durumunda Abel integral denklemi elde edilir.

## 2.4. Laplace Dönüşümü için Konvolüsyon Teoremi

Bu teorem, integral denklemlerin çözümünde kullanılacak önemli bir teoremdir.

$$w(x) = f(x) + \gamma \int_{k(x)}^{l(x)} K(x, t) w(t) dt \quad (16)$$

eşitliğinin çekirdeği olan  $K(x, t)$  sadece  $x-t$  'ye bağlı ise fark çekirdeği şeklinde adlandırılır. Bu tür çekirdeklere örnek olarak  $e^{x-t}$ ,  $\sin(x-t)$  ve  $\cosh(x-t)$  fonksiyonları bunlara örnek olarak verilebilir. (16) nolu integral denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$w(x) = f(x) + \gamma \int_{k(x)}^{l(x)} K(x-t) w(t) dt \quad (17)$$

Laplace dönüşümünün varlığı için gerekli koşullara sahip olan iki  $h_1(x)$  ve  $h_2(x)$  fonksiyonunu ele alalım.  $h_1(x)$  ve  $h_2(x)$  fonksiyonları için Laplace dönüşümleri şu şekilde verilsin:

$$\begin{aligned} L\{h_1(x)\} &= H_1(s), \\ L\{h_2(x)\} &= H_2(s). \end{aligned} \quad (18)$$

Bu iki fonksiyonun Laplace konvolüsyon çarpımı şu şekilde tanımlanır:

$$(h_1 * h_2)(x) = \int_0^x h_1(x-t) h_2(t) dt \quad (19)$$

ya da

$$(h_2 * h_1)(x) = \int_0^x h_2(x-t)h_1(t)dt \quad (20)$$

Konvolüsyon çarpımının Laplace dönüşümü

$$L\{(h_1 * h_2)(x)\} = L\left\{\int_0^x h_1(x-t)h_2(t)dt\right\} = H_1(s)H_2(s) \quad (21)$$

şeklindedir

## 2.5. Zayıf Singüler Volterra İntegral Denklemi

$$w(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{x-t}} w(t) d(t), \quad x \in [0, T] \quad (22)$$

denklemine Zayıf Singüler Volterra İntegral denklemi denir.

## 2.6. Genelleştirilmiş Zayıf Singüler Volterra İntegral Denklemi

$$w(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} w(t) d(t), \quad 0 < x < 1 \quad x \in [0, T] \quad (23)$$

denklemine Genelleştirilmiş Zayıf Singüler Volterra İntegral denklemi denir.

## 2.7. Leibniz Kuralı

Leibniz kuralı, değişken limitlere sahip bir integralin türevini alırken kullanılır. Eğer  $u(x)$  ve  $v(x)$  birer sürekli fonksiyon ve  $f(t, x)$  iki değişkenli sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise, Leibniz kuralı şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x) dt \right) = f(v(x), x) \cdot v'(x) - f(u(x), x) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt \quad (24)$$

### 3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde Abel ve genelleştirilmiş Abel denklemlerini çözmek için kullandığımız bazı metotlar verilmiştir. Bu metotlar Laplace dönüşüm, Adomian, Ardışık yaklaşımlar ve Homotopi analiz dönüşüm metodudur.

#### 3.1. Laplace Dönüşüm Metodu

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt \quad (25)$$

Abel integral denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} L\{f(x)\} &= L\{w(x)\}L\{x^{-(1/2)}\} \\ (K(x-t) &= \frac{1}{\sqrt{x-t}} \text{ olduğundan } K(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ olur.}) \\ F(s) &= w(s) \frac{\Gamma(1/2)}{s^{(1/2)}} = w(s) \frac{\sqrt{\pi}}{s^{(1/2)}} \\ w(s) &= \frac{s^{(1/2)}}{\sqrt{\pi}} F(s) \text{ dir.} \end{aligned} \quad (26)$$

Burada  $\Gamma$ ,  $\gamma$  fonksiyonu ve  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  dir. Son denklemden  $w(s)$  ifadesini çekersek;

$$w(s) = \frac{s}{\pi} (\sqrt{\pi} s^{-(1/2)} F(s)) \quad (27)$$

elde edilir. Eğer  $y(x) = \int_0^x (x-t)^{-(1/2)} f(t) dt$  dersek

$$L\{y(x)\} = L\{x^{-(1/2)}\}L\{f(t)\} = \sqrt{\pi} s^{-(1/2)} F(s) \quad (28)$$

olur. O hâlde (27) denklemini yeniden düzenlersek

$$L\{w(x)\} = \frac{s}{\pi} L\{y(x)\} \quad (29)$$

bulunur. Ayrıca  $L\{y'(x)\} = sL\{y(x)\} - y(0)$  olduğu yukarıda kullanılırsa

$$L\{w(x)\} = \frac{1}{\pi} L\{y'(x)\} \quad (30)$$

bulunur. Her iki tarafa ters Laplace dönüşümünü uygularsak

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (31)$$

elde edilir. Abel problemi, (31) formülü kullanılarak çözülebilir. Burada verilen  $f(x)$  fonksiyonu (31) denkleminde yeniden yerine yazılır. Şimdi,

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} w(t) dt, \quad 0 < x < 1 \quad (32)$$

Genelleştirilmiş Abel İntegral denkleminde Laplace dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} L\{f(x)\} &= L\{w(x)\} L\{x^{-\alpha}\} \\ &= L\{w(x)\} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} \\ L\{w(x)\} &= \frac{s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} L\{f(x)\} \\ L\{w(x)\} &= \frac{s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} L\left\{\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right\} \end{aligned} \quad (33)$$

Burada

$$g(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (34)$$

dersek

$$L\{w(x)\} = \frac{s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} L\{g(x)\} \quad (35)$$

elde edilir.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \text{ özelliğini ve } L\{g'(x)\} = sL\{g(x)\} \quad (36)$$

ifadesini kullanırsak

$$L\{w(x)\} = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} L\{g'(x)\} \quad (37)$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$w(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{(1-\alpha)}} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (38)$$

bulunur. Böylece (38)' den uygun pek çok formül türetebiliriz. Bu formülü belirlemek için (38)'in sağ tarafındaki integrali hesaplayalım.

$$\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{(1-\alpha)}} dt = -\frac{1}{\alpha} [f(t)(x-t)^\alpha] \Big|_0^x + \frac{1}{\alpha} \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \quad (39)$$

$$\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{(\alpha-1)}} dt = \frac{1}{\alpha} f(0)x^\alpha + \frac{1}{\alpha} \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \quad (40)$$

(40) denkleminin her iki tarafının türevini alırsak

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (41)$$

elde edilir. (41) denklemini (38) de yerine yazarsak

$$w(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left( \frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{x-t} dt \right), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (42)$$

bulunur. Dolayısıyla (42) eşitliği genelleştirilmiş Abel integral denkleminin çözümünü belirlemede kullanılacaktır.

$$w(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} w(t) dt, \quad 0 < x < 1 \quad (43)$$

(43) denkleme Laplace dönüşüm metodunu uygularsak

$$L(w(x)) = L(f(x)) + L(x^{-\alpha})L(w(x)) \quad (44)$$

$$W(s) = F(s) + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} W(s) \quad (45)$$

$$W(s) = \frac{s^{1-\alpha} F(s)}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)} \quad (46)$$

(46) denkleminin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$w(x) = L^{-1} \left( \frac{s^{1-\alpha} F(s)}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)} \right) \quad (47)$$

elde edilir.

*Örnek:*  $\pi = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt$  Abel integral denkleminin çözümünü bulunuz.

*Çözüm:*  $f(x) = \pi$ 'yi (31) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\pi}{\sqrt{x-t}} dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} dt \\ &\quad \left( y = x-t \text{ yazılırsa } dy = -dt \quad t=0 \text{ için } y=x, t=x \text{ için } y=0 \right) \\ w(x) &= \frac{d}{dx} \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{y}} (-dy) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{d}{dx} (2\sqrt{x}) \\ w(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek:  $\pi x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt$  Abel probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:  $f(x) = \pi x$   $f(0) = 0$  ve  $f'(x) = \pi$  dir.  $\alpha = \frac{1}{2}$   $\sin(\alpha\pi) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$  dir. O hâlde (42) eşitliğini kullanırsak

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\pi}{\sqrt{x-t}} dt = 2\sqrt{x}$$

elde edilir.

### 3.2. Adomian Ayırıştırma Metodu

Bu kısımda;

$$w(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} w(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x \in [0, T] \quad (48)$$

genelleştirilmiş zayıf tekil Volterra integral denklemini ele alacağız. Çünkü

$$w(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{x-t}} w(t) dt, \quad x \in [0, T] \quad (49)$$

denklemi (48) denkleminde  $h(x) = x$  ve  $\alpha = 1/2$  alınmasıyla genel denklemin özel hâline indirgenir. (48) denkleminin  $w(x)$  çözümünü belirlemek için

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \quad (50)$$

ayırıştırma serisi yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$w(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} \left( \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \right) dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (51)$$

elde edilir.  $w_0(x), w_1(x), w_2(x), \dots$  bileşenleri aşağıdaki tekrarlama bağıntısı kullanılarak bulunabilir.

$$\begin{aligned} w_0(x) &= f(x) \\ w_1(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} w_0(t) dt \\ w_2(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} w_1(t) dt \\ w_3(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} w_2(t) dt \\ &\vdots \end{aligned} \quad (52)$$

$w_0(x), w_1(x), \dots$  bileşenlerin belirlendikten sonra, (32)'nin  $w(x)$  çözümü, türetilen bileşenlerin (40) 'da yerine yazılmasıyla hızlı yakınsayan bir kuvvet serisi formunda belirlenecektir. Eğer



çözüm varsa seri çözüme yakınsar. Sayısal sonuçlar için de yeterli sayıda terim kullanılması gerekmektedir. Adomian ayrıştırma metodunun bu tür integral denklemleri için de etkili bir metot olduğu kanıtlanmıştır.

### 3.3. Modifiye Ayrıştırma Metodu

Bu metotta  $f(x)$  fonksiyonu  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$  şeklinde iki parçaya ayrılır. Yani

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (53)$$

şeklindedir. Bu ifadeyi ve (48) denkleminin (50) çözümünü yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = (f_1(x) + f_2(x)) + \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} \left( \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \right) dt, \quad 0 < x < 1 \quad (54)$$

elde edilir. Burada ilk kısım olan  $f_1(x)$  sıfırcı bileşen  $w_0(x)$  ve ikinci kısım olan  $f_2(x)$  de birinci bileşen  $w_1(x)$ 'e atanır.  $f(x)$ 'in bu ayrışımına dayanarak aşağıdaki tekrarlama bağıntısını elde ederiz.

$$\begin{aligned} w_0(x) &= f_1(x), \\ w_1(x) &= f_2(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} w_0(t) dt \\ w_2(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[h(x) - h(t)]^\alpha} w_1(t) dt \\ &\vdots \end{aligned} \quad (55)$$

### 3.4. Gürültü Terimi

$w(x)$ 'in çeşitli bileşenleri arasında ortaya çıkabilecek gürültü terimleri, zıt işaretli özdeş terimler olarak tanımlanır. Bu gürültü terimlerinin  $w_0(x)$  ve  $w_1(x)$  bileşenleri arasında yok edilmesi ile tam çözüm elde edilebilir. Eğer  $w(x)$ 'in bileşenleri arasında gürültü terimi görülürse çözümün yakınsaklığı hızlanır ve hesaplama hacmi de düşer.

*Örnek:*

$$w(x) = 1 - 2x - \frac{32}{21}x^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{4}}} w(t) dt \quad (56)$$

Zayıf singüler Volterra integral denkleminin gürültü terimlerini bularak çözünüz.

Çözüm:

$$f(x) = w_0(x) \quad (57)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} w_0(x) &= 1 - 2x - \frac{32}{21}x^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} \\ w_1(x) &= - \int_0^x \frac{1 - 2t - \frac{32}{21}t^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}}{(x-t)^{\frac{1}{4}}} dt \\ &= \frac{32}{21}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{128}{63}x^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{9}x^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (58)$$

Buradan da  $w_0(x)$  ve  $w_1(x)$  bileşenleri arasında zıt işaretli terimler yani denklemin gürültü terimleri,  $\mp \frac{32}{21}x^{\frac{7}{4}}$  ve  $\pm \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$  olarak belirlenir. Gürültü terimlerini dışarıda bıraktığımızda da tam çözüm

$$w(x) = 1 - 2x \quad (59)$$

bulunur.

### 3.5. Ardışık Yaklaşımlar Metodu

Ardışık yaklaşımlar metodu veya Picard iterasyon metodu, integral denklemini veya başlangıç değer problemini çözmek için kullanılan yaklaşımlardır. Bu metot sıfırıncı yaklaşım adı verilen bir başlangıç tahmini ile başlayarak çözüme Ardışık yaklaşımlar bularak herhangi bir problemi çözer. Sıfırıncı yaklaşım, diğer yaklaşımları belirlemek için tekrarlı bir bağıntıda kullanılacak olan herhangi bir şekilde seçilmiş reel değerli fonksiyonlardır.

Buradan,

$$w(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt \quad (60)$$

İkinci tür zayıf singüler (tekil) Volterra integral denklemini ele alalım. Ardışık yaklaşımlar metodu,

$$w_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (61)$$

şeklinde bir tekrarlama bağıntısı verir. Burada sıfırıncı yaklaşım, olan  $w_0(x)$  herhangi bir şekilde seçilmiş reel değerli fonksiyon olabilir. Daima  $w_0(x)$  başlangıç tahmini ile başlarız ve  $w_0(x)$  için genellikle 0, 1 veya  $x$  alırız. (44) eşitliğinin kullanılmasıyla  $n \geq 0$  olmak üzere

$w_n$  Ardışık yaklaşımları aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$\begin{aligned} w_1(x) &= f(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w_0(t) dt \\ w_2(x) &= f(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w_1(t) dt \\ w_3(x) &= f(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w_2(t) dt \\ &\vdots \end{aligned} \quad (62)$$

Böylelikle  $w(x)$  çözümü

$$w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{n+1}(x), n \geq 0 \quad (63)$$

şeklinde verilir.

*Örnek:* Aşağıdaki zayıf tekil Volterra integral denklemini Ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak çözelim.

$$w(x) = \sqrt{x} + \frac{\pi}{2}x - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt \quad (64)$$

*Çözüm:* Sıfırıncı yaklaşım  $w_0(x)$  için,

$$w_0(x) = 0 \quad (65)$$

seçebiliriz. Şimdi aşağıdaki tekrarlama bağıntısını kullanalım.

$$w_{n+1}(x) = \sqrt{x} + \frac{\pi}{2}x - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (66)$$

O hâlde,

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \sqrt{x} + \frac{\pi}{2}x \\ w_2(x) &= \left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}x\right) - \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &\vdots \\ w_{n+1}(x) &= \left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}x\right) - \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{4}(x)^2\right) \end{aligned} \quad (67)$$

elde edilir. Dolayısı ile  $w(x)$  çözümü

$$w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{n+1}(x) = \sqrt{x} \quad (68)$$

şeklinde bulunur.

### 3.6. Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu

$$f(x) = \int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} w(t) dt, \quad 0 < x < 1 \quad (69)$$

birinci tür genelleştirilmiş Abel integral denklemini çözmek için (69)'un her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L\{f(x)\} - L\left\{\int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt\right\} = 0 \quad (70)$$

eişliğı elde edilir. Şimdi lineer olmayan

$$N[\Phi(x, q)] = -L\{f(x)\} + L\left\{\int_a^x \frac{\Phi(x, q)}{(x-t)^\alpha} dt\right\} \quad (71)$$

operatörünü tanımlayalım. Burada,  $q \in [0, 1]$  gömme parametresi ve  $\Phi(x, q)$  da  $x$  ve  $q$  nun reel fonksiyonudur. Böylelikle aşağıdaki homotopi kullanabilir.

$$(1-q)\mathcal{L}[\Phi(x, q) - y_0(x)] - qhH(x)N[\Phi(x, q)] = \widehat{H}[\Phi(x, q); y_0(x), H(x), h, q] \quad (72)$$

Burada  $y_0(x)$ ,  $y(x)$  tam çözümüne başlangıç yaklaşımıdır.  $h \neq 0$ , yardımcı parametre,  $H(x) \neq 0$  yardımcı bir fonksiyon ve  $\mathcal{L}$  de yardımcı lineer operatördür. (72) denkleminin sağ tarafını sıfıra eşitlersek sıfırncı mertebeden deformasyon denklemini elde edebiliriz. Yani,

$$(1-q)\mathcal{L}[\Phi(x, q) - y_0(x)] = qhH(x)N[\Phi(x, q)] \quad (73)$$

bulunur. Açıkça,  $q = 0$  ve  $q = 1$  olduğunda sırasıyla

$$\Phi(x, 0) = y_0(x) \quad \text{ve} \quad \Phi(x, 1) = y(x) \quad (74)$$

ifadeleri geçerlidir. Böylece  $q$  gömme parametresi 0 dan 1'e arttıkça  $\Phi(x, q)$  da başlangıç yaklaşımı  $y_0(x)$ 'den tam çözüm  $y(x)$ 'e sürekli olarak değişir. Homotopide bu tür bir değişime deformasyon denir.  $q$ 'ya göre  $\Phi(x, q)$  'yu Taylor serisine açarsak

$$\Phi(x, q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) q^m \quad (75)$$

bulunur. Burada,

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \cdot \left. \frac{\partial^m \Phi(x, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (76)$$

şeklindedir. Eğer yardımcı lineer operatör, başlangıç yaklaşımı  $h$  parametresi ve yardımcı fonksiyon uygun şekilde seçilirse (75) serisi  $q = 1$  de yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) \quad (77)$$

elde edilir. Kısa olması adına,

$$\vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\} \quad (78)$$

vektörünü tanımlayalım.

Şimdi (73) nolu sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin  $q$ 'ya göre  $m$  kez türevleri alınır,  $m!$ 'e bölüp ve son olarak  $q = 0$  alınırsa,  $m$ -inci mertebeden aşağıdaki deformasyon denklemini elde edilir.

$$\mathcal{L}[y_m - \chi_m y_{m-1}(x)] = hH(x)\mathcal{R}m(\vec{y}_{m-1}(x)) \quad (79)$$

Burada

$$\mathcal{R}m(y_{m-1}(x)) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(x, q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (80)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (81)$$

şeklindedir. Bu şekilde devam edilerek  $m$ -inci mertebeden  $y_m(x)$ 'i elde etmek kolaydır. Dolayısıyla,

$$y(x) = \sum_{m=0}^n y_m(x) \quad (82)$$

olur.  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x) \quad (83)$$

denkleminin doğru bir yaklaşımını elde ederiz. HADM'de  $y_0(x)$  başlangıç yaklaşımını,  $\mathcal{L}$  yardımcı lineer operatörünü, sıfır olmayan yardımcı  $h$  parametresini ve  $H(x)$  yardımcı fonksiyonunu özgür bir şekilde seçilebilir.

### 3.7. Yakınsaklık Analizi

#### 3.1 Teorem

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) \quad (84)$$

seri çözümü yakınsak olduğu sürece (69) denkleminin tam çözümü olmalıdır.

*İspat:* Eğer (84) serisi yakınsak ise şunu yazabiliriz:

$$S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m(x) \quad (85)$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x) = 0 \quad (86)$$

olur. O hâlde bu ifadeyi doğrulayalım:

$$\sum_{m=1}^n [y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = y_1 + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_n(x) \quad (87)$$

(87) denklemine göre;

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 0 \quad (88)$$

elde edilir. Ayrıca (88) denklemi ve  $\mathcal{L}$  lineer operatörünün tanımı kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \mathcal{L} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)) \right] = 0 \quad (89)$$

O hâlde

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)) \right] = hH(x) \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}m(\vec{y}_{m-1}(x)) = 0 \quad (90)$$

eşitliği elde edilir.  $h \neq 0$  ve  $H(x) \neq 0$  olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}m(\vec{y}_{m-1}(x)) = 0 \quad (91)$$

olmalıdır.  $\mathcal{R}m(\vec{y}_{m-1}(x))$  ifadesini yukarıdaki açılımda yerine koyup düzenlediğimizde

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}m(\vec{y}_{m-1}(x)) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (1 - \chi_m) f(x) - \int_a^x \frac{y_{m-1}(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right] \\
 &= f(x) - \int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} y_{m-1}(t) \right] dt \\
 &= f(x) - \int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} y_m(t) \right] dt \\
 &= f(x) - \int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} S(t) dt
 \end{aligned} \tag{92}$$

ifadesi elde edilir. Böylece (91) ve (92) ifadelerinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$f(x) = \int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} S(t) dt \tag{93}$$

O hâlde  $S(x)$ , (69) denkleminin tam çözümü olmalıdır.

Bu metodun geçerliliğini doğrulamak için birkaç örnek verelim. Bu örnekler (Wazwaz, 2011; Yousefi, 2006; Avazzadeh, Shafiee and Loghmani, 2011)'den seçilmiştir. Ayrıca,  $h$ 'nin farklı değerleri için kesin ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma grafikleri çizilmiş olup mutlak hata fonksiyonu ve  $h$ -eğrisi grafikleri çizilmiştir. Sayısal sonuçlar tablo hâlinde verilmiştir.

#### 4. BULGULAR

Bu bölümde Laplace dönüşüm, Adomian ayrıştırma, Ardışık yaklaşımlar ve Homotopi analiz dönüşüm metodu, ikinci tür zayıf singüler Volterra integral denklemi ve Abel integral denkleminde uygulayacağız.

*Örnek:*

$$w(x) = x - \frac{4}{3}x^{(\frac{3}{2})} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt \quad (94)$$

ikinci tür zayıf singüler Volterra integral denklemini Laplace dönüşüm, Adomian ayrıştırma, Ardışık yaklaşımlar ve Homotopi analiz dönüşüm metodu ile çözelim.

*Çözüm:* İlk olarak Laplace dönüşüm metodu ile çözelim. Burada

$f(x) = x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$  ve  $\alpha = \frac{1}{2}$ 'dir. Bu denklemin her iki tarafını Laplace dönüşümünü alırsak

$$w(s) = \left( \frac{s^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}} \right)}{s^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}} \right) \quad (95)$$

bulunur. Burada

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{3} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{s^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}} \text{ ve } \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \text{ dir.}$$

Her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$w(x) = L^{-1} \left( \frac{s^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}} \right)}{s^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}} \right) = L^{-1} \left( \frac{1}{s^2} \right) = x \quad (96)$$

elde edilir.

*Örnek:*

$$w(x) = x - \frac{4}{3}x^{(\frac{3}{2})} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt \quad (97)$$

denklemini Adomian ayrıştırma metodu ile çözelim.



*Çözüm:*

$$\begin{aligned}
 w_0(x) &= x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
 w_1(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w_0(t) dt \\
 &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left( t - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \right) dt
 \end{aligned}$$

$\left( t = x \sin^2 \theta \text{ dönüşümü yapılırsa } dt = 2x \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta, \ t = 0 \rightarrow \theta = 0, \ t = x \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ olur.} \right)$

$$\begin{aligned}
 w_1(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x \sin^2 \theta - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \sin^3 \theta)}{\sqrt{x - x \sin^2 \theta}} (2x \sin \theta \cos \theta) d\theta \\
 w_1(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x^2 \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{8}{3}x^{\frac{5}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta}{\sqrt{x} \cos \theta} d\theta \\
 w_1(x) &= 2x^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta - \frac{8}{3}x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta \\
 w_1(x) &= 2x^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} - \frac{8}{3}x^2 \frac{3\pi}{16} \\
 w_1(x) &= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{2}x^2
 \end{aligned} \tag{98}$$

Dolayısıyla gürültü terimi  $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$  olduğundan  $w(x) = x$  şeklinde bulunur.

*Örnek:*

$$w(x) = x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt \tag{99}$$

zayıf singüler integral denklemini Ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak çözelim.

*Çözüm:* Sıfırıncı yaklaşım  $w_0(x)$  için

$$w_0(x) = 0 \tag{100}$$

seçebiliriz.

(99) denklemini çözmek için aşağıdaki tekrarlama bağıntısını kullanabiliriz.

$$w_{n+1}(x) = x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w_n(t) dt, \ n \geq 0 \tag{101}$$

O hâlde

$$\begin{aligned}
 w_1(x) &= x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
 w_2(x) &= (x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}) + (\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{2}x^2) \\
 &\vdots \\
 w_{n+1}(x) &= (x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}) + (\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{2}x^2) + (\frac{\pi}{2}x^2 - \frac{8\pi}{15}x^{\frac{5}{2}}) + \dots
 \end{aligned} \tag{102}$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla

$$w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{n+1}(x) = x \tag{103}$$

bulunur.

*Örnek:*

$$w(x) = x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} w(t) dt \tag{104}$$

denklemini ele alalım ve son olarak Homotopi analiz dönüşüm metodu ile çözelim.

*Çözüm:* Bu denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak

$$L[w(x)] = L[x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}] + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[w(x)] \tag{105}$$

olur. Şimdi lineer olmayan operatörü tanımlayalım.

$$N[\phi(x, q)] = L[\phi(x, q)] - \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[\phi(x, q)] - L[x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}] \tag{106}$$

(69)'i kullanarak m - inci dereceden deformasyon denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathcal{L}[w_m(x) - \chi_m w_{m-1}(x)] = h \mathcal{R}m(\vec{w}_{m-1}(x)) \tag{107}$$

Buradan

$$\mathcal{R}m(\vec{w}_{m-1}(x)) \mathcal{L}[w_{m-1}(x)] - \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} \mathcal{L}[w_{m-1}(x)] - L[x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}] \tag{108}$$

elde edilir. Böylece (108) denkleminin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$w_m = (\chi_m + h)w_{m-1}(x) - h(1 - \chi_m)(x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}) - hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} W_{m-1}(x) \right] \tag{109}$$

elde edilir.  $w_0(x) = x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$  başlangıç yaklaşımını ve tekrarlama bağıntısını (109)'i kullanırsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\begin{cases} w_0(x) &= x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}, \\ w_1(x) &= -hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[w_0(x)] \right], \\ w_m(x) &= (1+h)w_{m-1}(x) - hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[w_{m-1}(x)] \right], m \geq 2 \end{cases} \quad (110)$$

Bu yöntem de  $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x)$  serisinin ilk  $m+1$  terimin toplanmasıyla  $w(x) = x$  tam çözüme  $(m+1)$ 'inci yaklaşımı elde ederiz.

*Örnek:*

$$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t) dt \quad (111)$$

Abel integral denklemini çözmek için homotopi analiz dönüşüm yöntemini ve Laplace dönüşüm metodunu kullanalım.

*Çözüm:* İlk olarak homotopi analiz dönüşüm metodunu uygulayalım denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak

$$L \left[ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y(x)] = 0 \quad (112)$$

elde edilir. Lineer operatörü, c sabit olmak üzere  $\mathcal{L}(c) = 0$  özelliği ile

$$\mathcal{L}[\phi(x, q)] = L[\phi(x, q)], \quad (113)$$

şeklinde seçelim. Şimdi, lineer olmayan operatörü tanımlayalım.

$$N[\phi(x, q)] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[\phi(x, q)] - L \left[ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right] \quad (114)$$

(69)'u kullanarak ve  $H(x) = 1$  varsayımıyla, m'inci dereceden deformasyon denklemi,

$$\mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = h\mathcal{R}m(\vec{y}_{m-1}(x)) \quad (115)$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada,

$$\mathcal{R}m(\vec{y}_{m-1}(x)) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} \mathcal{L}[y_{m-1}(x)] - L \left[ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right] \quad (116)$$

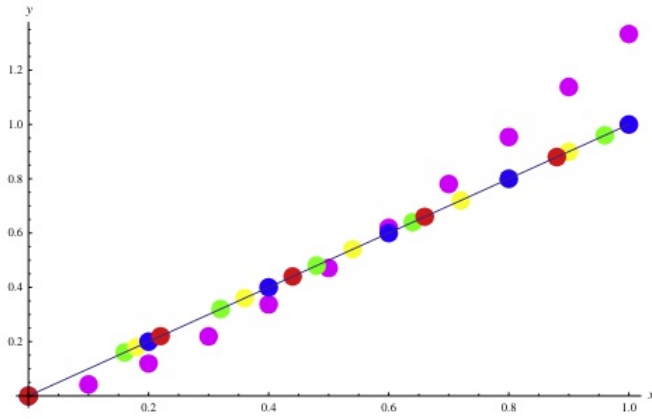
şeklindedir. Şimdi ters Laplace dönüşümünü uygulayarsak

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) h(1 - \chi_m) \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y_{m-1}(x)] \right] \quad (117)$$

eşitliği bulunur.  $y_0 = f(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}$  başlangıç yaklaşımını ve (4.14) tekrarlama bağıntısını kullanırsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

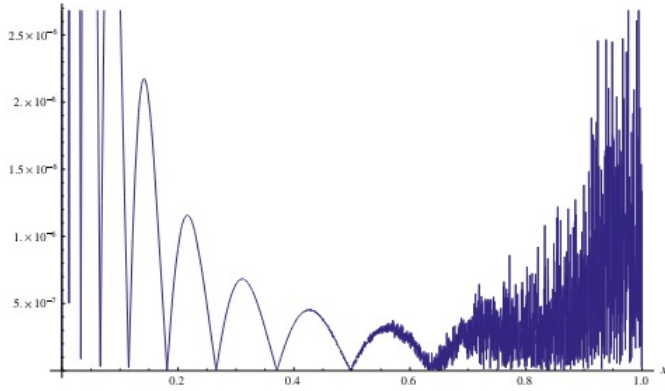
$$\begin{cases} y_0(x) &= \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \\ y_1(x) &= -h \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y_0(x)] \right], \\ y_m(x) &= y_{m-1}(x) + hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y_{m-1}(x)] \right], \quad m \geq 2 \end{cases} \quad (118)$$

Bu yöntemde  $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m(x)$  serisinin ilk  $m+1$  terimin toplanmasıyla  $y(x) = x$  tam çözümüne  $(m+1)$ -inci yaklaşımı elde ederiz.  $h$ 'ın farklı değerleri ve  $m = 20$  için tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Ayrıca mutlak hata fonksiyonunun grafiği ve sayısal sonuçlar Şekil 4.2 ve Çizelge 4.1'de gösterilmiştir. Son olarak Şekil 4.3'de de,  $h$ -eğrisinin bu örnek için yakınsama bölgesini görmekteyiz (Samad, Eisa and Barzegar, 2015).



Şekil 4.1.  $m = 20$  ile tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma

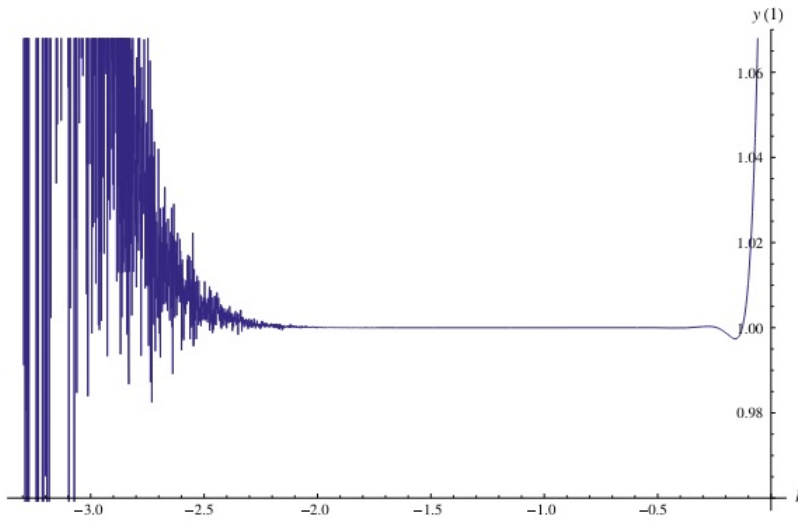
Mor daire:  $h = 0$ ; Yeşil daire:  $h = -0,5$  ; Sarı daire:  $h = -1$ ; Mavi daire:  $h = -1.5$ ; Kırmızı daire:  $h = -2$



Şekil 4.2.  $m = 20$  ve  $h = -1.5$  için mutlak hata fonksiyonu

Çizelge 4.1. Örnek: 4.1 için mutlak hata tablosu

| x   | h= 0      | h= -0.5                  | h= -1                    | h= -1.5                  | h=-2                     |
|-----|-----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0   | 0         | 0                        | 0                        | 0                        | 0                        |
| 0.2 | 0.080743  | 0.000150182              | $9.16773 \times 10^{-6}$ | $9.13614 \times 10^{-7}$ | $1.64372 \times 10^{-7}$ |
| 0.4 | 0.0626904 | 0.0000818083             | $2.87897 \times 10^{-8}$ | $3.47619 \times 10^{-7}$ | $1.76096 \times 10^{-7}$ |
| 0.6 | 0.0196773 | 0.0000244906             | $3.65464 \times 10^{-7}$ | $2.29336 \times 10^{-7}$ | $9.77283 \times 10^{-7}$ |
| 0.8 | 0.154056  | 0.0000291543             | $2.56315 \times 10^{-7}$ | $9.7045 \times 10^{-8}$  | 0.0000166451             |
| 1   | 0.333333  | $8.69143 \times 10^{-6}$ | $7.7486 \times 10^{-7}$  | 0                        | 0.0000610352             |



Şekil 4.3.  $m = 20$  ve  $x = 1$  için h-eğrisi

Örnek:

$$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t) dt \quad (119)$$

denklemini Laplace dönüşüm metodu ile çözelim.

*Çözüm:*

$$L\{y(x)\} = Y(s), L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \quad \text{ve} \quad L\left\{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{4}{3} \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}} \quad (120)$$

olmak üzere her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak

$$\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} Y(s) \quad (121)$$

eşitliği bulunur. Her iki tarafı da  $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ 'ye bölelim. O hâlde  $\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}} \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} = Y(s)$  bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek  $Y(s) = \frac{1}{s^2}$  elde edilir. Bunun da ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x \quad (122)$$

elde edilir. Yani  $y(x) = x$  bulunur.

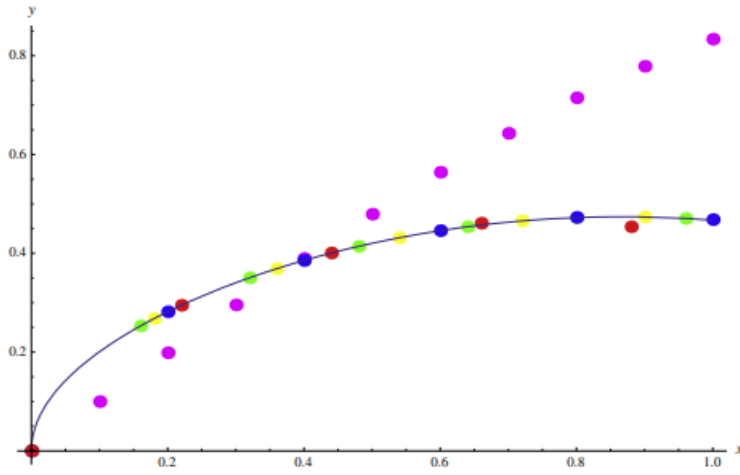
*Örnek:* Aşağıdaki Abel integral denklemini çözelim.

$$\sin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} y(t) dt \quad x \in [0, 1] \quad (123)$$

*Çözüm:* İlk olarak Homotopi analiz dönüşüm metodu ile bu örneği çözmek için  $m$ 'inci dereceden deformasyon denklemini (69)'u kullanıyoruz ve tekrarlama bağıntısını aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

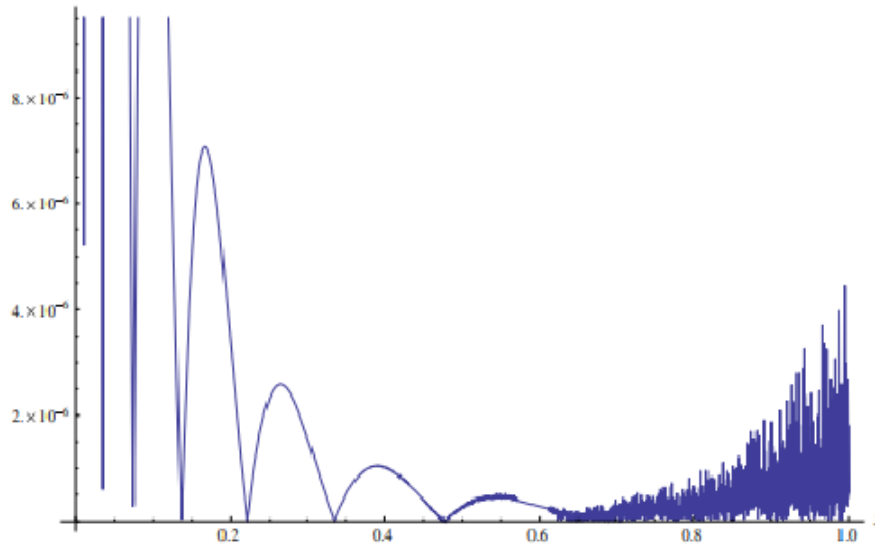
$$\begin{cases} y_0(x) &= \sin(x), \\ y_1(x) &= -h \sin(x) + hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y_0(x)] \right], \\ y_m(x) &= y_{m-1}(x) + hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y_{m-1}(x)] \right], m \geq 2 \end{cases} \quad (124)$$

Bu yöntemde  $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m(x)$  serisinin ilk  $m+1$  terimin toplanmasıyla  $y(x) = \frac{1}{\pi}(2\sqrt{x} - \frac{8}{15}x^{\frac{5}{2}})$  tam çözümüne  $(m+1)$ -inci yaklaşımı elde ederiz.  $h$ 'ın farklı değerleri ve  $m = 20$  için tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma Şekil 4.4 gösterilmiştir. Ayrıca mutlak hata fonksiyonunun grafiği ve sayısal sonuçlar ve Şekil 4.5'de Çizelge 4.2'de verilmiştir. Son olarak Şekil 4.6'da  $h$ -eğrisinin  $x = 1$  için yakınsama bölgesini görmekteyiz (Samad, Eisa and Barzegar, 2015).



Şekil 4.4.  $m = 20$  ile tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma

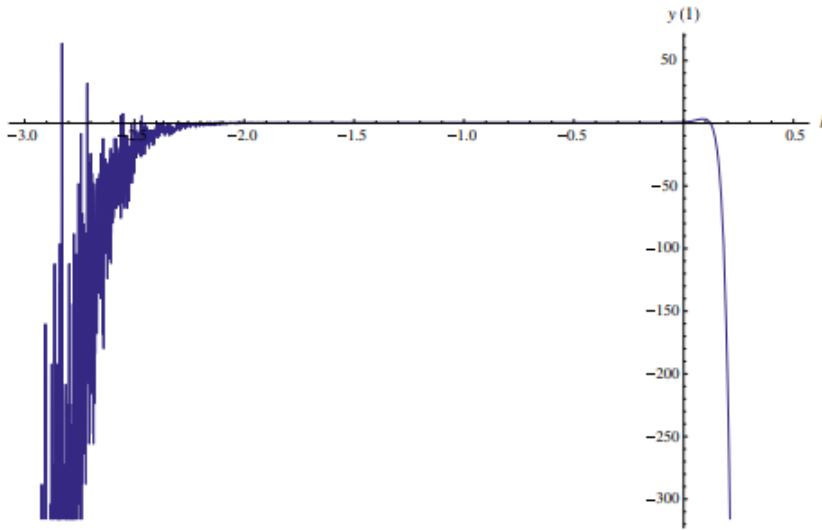
Mor daire:  $h = 0$ ; Yeşil daire:  $h = -0,5$  ; Sarı daire:  $h = -1$ ; Mavi daire:  $h = -1.5$ ; Kırmızı daire:  $h = -2$



Şekil 4.5.  $m = 20$  ve  $h = -1$  için mutlak hata fonksiyonu

Çizelge 4.2. Örnek: 4.2 için mutlak hata tablosu

| x   | $h= 0$     | $h= -0.5$                | $h= -1$                  | $h= -1.5$                | $h=-2$                   |
|-----|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0   | 0          | 0                        | 0                        | 0                        | 0                        |
| 0.2 | 0.0830015  | 0.000126772              | $3.36027 \times 10^{-6}$ | $3.44205 \times 10^{-7}$ | $1.17707 \times 10^{-7}$ |
| 0.4 | 0.00387867 | 0.0000381275             | $1.02079 \times 10^{-6}$ | $2.90513 \times 10^{-7}$ | 0.0000298544             |
| 0.6 | 0.118216   | 0.0000136147             | $2.69568 \times 10^{-7}$ | $4.275 \times 10^{-6}$   | 0.00105713               |
| 0.8 | 0.242436   | $3.40101 \times 10^{-6}$ | $2.84483 \times 10^{-7}$ | 0.0000139253             | 0.00973072               |
| 1   | 0.366479   | $5.54919 \times 10^{-6}$ | $1.35795 \times 10^{-6}$ | 0.000545906              | 0.0918545                |



Şekil 4.6.  $m = 20$  ve  $x = 1$  için  $h$ -eğrisi

Örnek:

$$\sin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} y(t) dt \quad x \in [0, 1] \quad (125)$$

problemini şimdi de Laplace dönüşüm metodu ile çözelim.

Çözüm:

Denklemin daha basite indirgemek için  $\sin x$ 'in Taylor serisi açılımdaki ilk iki teriminden faydalanalım.

$$x - \frac{x^3}{6} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} y(t) dt \quad (126)$$

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} &= \sqrt{\frac{\pi}{s}} Y(s) \\ Y(s) &= \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} \right) \sqrt{\frac{s}{\pi}} \\ Y(s) &= \frac{\sqrt{s}}{s^2 \sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{s}}{s^4 \sqrt{\pi}} \\ Y(s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{s^{\frac{7}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (127)$$



elde edilir. Son ifadenin de ters laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} - \frac{8x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} \right) \\ &= \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\pi} - \frac{8x^{\frac{5}{2}}}{15\pi} \end{aligned} \quad (128)$$

bulunmuş olur.

*Örnek:*

$$y(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} y(t) dt \quad (129)$$

zayıf singüler Volterra integral denklemini çözelim.

*Çözüm:* Homotopi analiz dönüşüm metodu ile çözümünü inceleyelim. Bu problemi çözmek için denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$L[y(x)] = L\left[x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}\right] - \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y(x)] \quad (130)$$

Şimdi lineer olmayan operatörü tanımlayalım.

$$N[\Phi(x, q)] = L[\Phi(x, q)] + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[\Phi(x, q)] - L\left[x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}\right] \quad (131)$$

(69)'u kullanarak m-inci dereceden deformasyon denklemini aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$\mathcal{L}[y_m - \chi_m y_{m-1}(x)] = h R_m(\vec{y}_{m-1}(x)) \quad (132)$$

Burada,

$$R_m(\vec{y}_{m-1}(x)) = \mathcal{L}[y_{m-1}(x)] + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} \mathcal{L}[y_{m-1}(x)] - L\left[x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}\right] \quad (133)$$

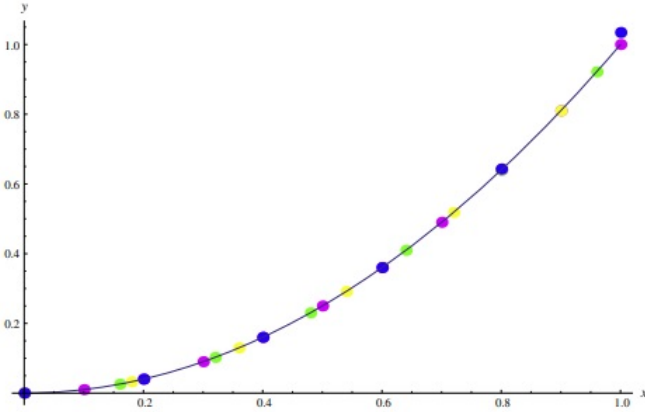
şeklindedir. Şimdi (132) denkleminde ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y_m = (\chi_m + h)y_{m-1}(x) - h(1 - \chi_m)\left(x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}\right) + hL^{-1}\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}}L[y_{m-1}(x)]\right] \quad (134)$$

$y_0 = f(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}$  başlangıç yaklaşımını ve (134) tekraralama bağıntısını kullanırsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

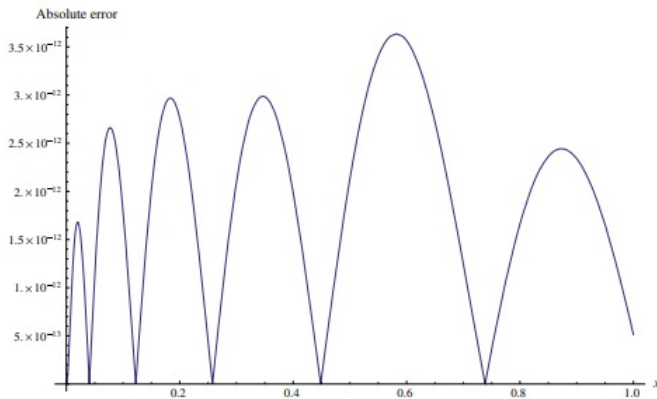
$$\begin{cases} y_0(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} \\ y_1(x) = hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y_0(x)] \right] \\ y_m(x) = (1+h)y_{m-1}(x) + hL^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} L[y_{m-1}(x)] \right], m \geq 2 \end{cases} \quad (135)$$

Bu yöntemde  $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m(x)$  serisinin ilk  $m+1$  terimin toplanmasıyla  $y(x) = x^2$  tam çözümüne  $(m+1)$ -inci yaklaşımı elde ederiz.  $h$ 'ın farklı değerleri ve  $m = 20$  için tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma Şekil 4.7'de gösterilmiştir. Ayrıca mutlak hata fonksiyonunun grafiği ve sayısal sonuçlar Şekil 4.8 ve Çizelge 4.3'de verilmiştir. Son olarak Şekil 4.9'da da  $h$ -eğrisinin bu örnek için yakınsama bölgesini görmekteyiz (Samad, Eisa and Barzegar, 2015).

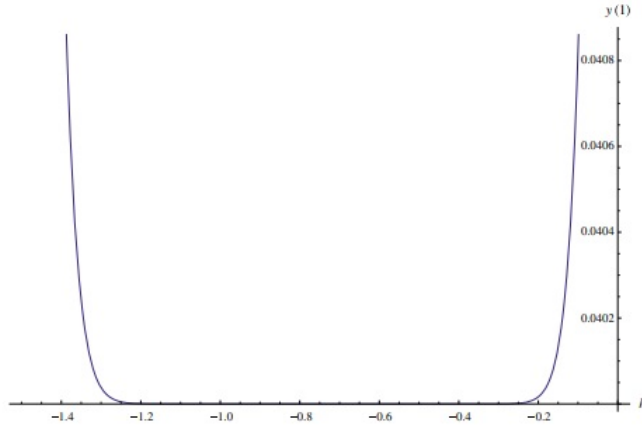


Şekil 4.7.  $m = 20$  ile tam ve yaklaşık çözümler arasındaki karşılaştırma

Mor daire:  $h = -0.2$  ; Yeşil daire:  $h = -0.5$  ; Sarı daire:  $h = -0.8$  ; Mavi daire:  $h = -1.1$  .



Şekil 4.8.  $m = 20$  ve  $h = -0.5$  için mutlak hata fonksiyonu



Şekil 4.9.  $m = 20$  ve  $x = 1$  için  $h$ -eğrisi

Çizelge 4.3. Örnek: 4.3 için mutlak hata tablosu

| x   | h= -0.2                  | h= -0.5                   | h= -0.8                   | h=-1.1                   |
|-----|--------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 0   | 0                        | 0                         | 0                         | 0                        |
| 0.2 | 0.0000163984             | $2.76116 \times 10^{-12}$ | $1.16331 \times 10^{-13}$ | $1.62214 \times 10^{-9}$ |
| 0.4 | 0.0000191079             | $1.98841 \times 10^{-12}$ | $9.25193 \times 10^{-12}$ | $1.85646 \times 10^{-6}$ |
| 0.6 | $4.59903 \times 10^{-6}$ | $3.56309 \times 10^{-12}$ | $9.70011 \times 10^{-11}$ | 0.000133995              |
| 0.8 | 0.00001377               | $1.68554 \times 10^{-12}$ | $5.16268 \times 10^{-10}$ | 0.00299121               |
| 1   | 0.0000273361             | $5.88196 \times 10^{-13}$ | $1.90795 \times 10^{-9}$  | 0.0345077                |

Örnek:

$$y(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} y(t) dt \quad (136)$$

denklemini Adomian ayrıştırma metodu ile çözelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} \\
 y_1(x) &= - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} y_0(t) dt \\
 y_1(x) &= - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} \left( t^2 + \frac{16}{15}t^{\frac{5}{2}} \right) dt \\
 &= -\frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{\pi}{3}x^3
 \end{aligned} \quad (137)$$

Dolayısıyla gürültü terimi  $\frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}$  ve  $y(x) = x^2$  şeklinde elde edilir.

Şimdi aynı örneği modifiye ayrıştırma metodunu kullanarak çözelim. Burada  $f_1(x) = x^2$  ve

$f_2(x) = \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}$  dersek,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= x^2 \\ y_1(x) &= \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{(x-t)}} y(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (138)$$

olup  $y(x) = x^2$  bulunur.

*Örnek:*

$$y(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} y(t) dt \quad (139)$$

denklemini Ardışık yaklaşımlar metodu ile çözelim.

*Çözüm:* Sıfırıncı yaklaşım olan  $y_0(x) = 0$  alalım. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} y_0(t) dt \\ y_1(x) &= x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} \cdot 0 dt \\ y_1(x) &= x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} \\ y_2(x) &= x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} \left(t^2 + \frac{16}{15}t^{\frac{5}{2}}\right) dt \\ &= x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{\pi}{3}x^3 \\ y_3(x) &= x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} \left(t^2 + \frac{\pi}{3}t^3\right) dt \\ &\vdots \\ y_n(x) &= x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{\pi}{3}x^3 + \frac{\pi}{3}x^3 \dots \end{aligned} \quad (140)$$

elde edilir. O hâlde  $y(x)$ 'in yaklaşık çözümü,

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = x^2 \quad (141)$$

olarak bulunur.

Örnek:

$$y(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}y(t)dt \quad (142)$$

denklemini Laplace dönüşüm metodu ile çözelim.

Çözüm: Bu denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alırsak

$$\begin{aligned} L\{y(x)\} &= L\{x^2\} + \frac{16}{15}L\{x^{\frac{5}{2}}\} - L\left\{\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}y(t)dt\right\} \\ Y(s) &= \frac{2}{s^3} + \frac{16}{15} \cdot \frac{15}{8} \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{7}{2}}} - \sqrt{\frac{\pi}{s}}Y(s) \\ Y(s) &= \frac{2}{s^3} + \frac{2\sqrt{\pi}}{s^{\frac{7}{2}}} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}Y(s) \\ (1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}})Y(s) &= \frac{2}{s^3} + \frac{2\sqrt{\pi}}{s^{\frac{7}{2}}} \\ \frac{\sqrt{s} + \sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}Y(s) &= \frac{2\sqrt{s} + 2\sqrt{\pi}}{s^{\frac{7}{2}}} = \frac{2}{s^{\frac{7}{2}}} \\ Y(s) &= \frac{2\sqrt{s}}{s^{\frac{7}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}} \\ &= 2s^{-3} \\ &= \frac{2}{s^3} \end{aligned} \quad (143)$$

elde edilir. Son ifadeye ters Laplace dönüşümünü uygulayacak olursak

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(x) = x^2 \quad (144)$$

şeklinde buluruz.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, matematiğin, fiziğin ve mühendisliğin çeşitli alanlarında ortaya çıkan Abel integral denklemlerinin davranışını ve çözümlerini araştırdık. Araştırmamızın temel amacı, bu integral denklemlerin çözümü için verimli ve doğru yöntemler geliştirmek ve bunların özellikleri ve uygulamaları hakkında bilgi edinmektir. Bunun için öncelikle Abel integral denklemi, genelleştirilmiş Abel integral denklemi ve ikinci tür zayıf Volterra integral denklemi tanıtılmıştır. Ayrıca bu denklemleri çözmek için Laplace dönüşüm metodu, Adomian ayrıştırma, Ardışık yaklaşımlar metodu ve Homotopi analiz dönüşüm metodu kullanılmıştır. Bu kullanılan metotlar arasında Adomian ayrıştırma, Laplace dönüşüm metodu ve Homotopi Analiz Dönüşüm metodu hesaplama hacmi ve yakınsaklık noktasında daha iyi sonuçlar vermiştir. Sonuç olarak bulgularımız, bu denklemlerin davranışları ve çözümleri hakkında değerli bilgiler sağlayarak ilgili alanların ve uygulamaların anlaşılmasına katkıda bulunmuştur. Araştırmamızın en önemli katkılarından biri, Abel integral denklemlerini çözmek için verimli sayısal yöntemlerin geliştirilmesi ve uygulanmasıdır. Burada ele alınan denklemler, farklı sayısal metotlar kullanılarak da çözülebilir ve elde edilen sonuçlar bu metotlarla karşılaştırılıp yakınsaklık analizleri yapılabilir.

## KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P. (2003). *Singular differential and integral equations with applications*. India: Springer.
- Atkinson, K. E. (1997). *The numerical solution of integral equations of the second kind* (Vol. 4). New York: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511626340
- Avazzadeh, Z., Shafiee, B., & Loghmani, G. (2011). Fractional calculus for solving abel's integral equations using chebyshev polynomials. *Applied Mathematical Sciences*, 5, 2207–2216.
- Capobianco, G., & Conte, D. (2006). An efficient and fast parallel method for abel-type volterra integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 189, 481–493.
- Estrada, R., & Kanwal, R. (2000a). *Singular integral equations*. Berlin: Birkhäuser.
- Estrada, R., & Kanwal, R. P. (2000b). *Singular Integral equations*. Boston: Springer.
- Gorenflo, R., & Vessella, S. (1991a). *Abel integral equations* (Vol. 1461). Berlin: Springer.
- Gorenflo, R., & Vessella, S. (1991b). *Abel integral equations: Analysis and applications* (Vol. 1461). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Jerri, A. (1999). *Introduction to integral equations and applications*. New York: Wiley.
- Kanwal, R. P. (1997). *Linear integral equations*. Boston: Birkhäuser.
- Khan, M., Gondal, M. A., Hussain, I., & Vanani, S. K. (2012). A new comparative study between homotopy analysis transformation method and homotopy perturbation transformation method on semi-Infinite domain. *Mathematical Computation Model*, 55, 1143–1150.
- Kumar, S., Singh, J., Kumar, D., & Kapoor, S. (2013). New homotopy analysis transformation algorithm for solving volterra integral equation. *Ain Shams Engineering Journal*, 5, 243–246.
- Liao, S. (2003). *Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press.
- Liao, S. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computing*, 147(2), 499-513.
- Liao, S. (2009). Notes on the homotopy analysis method: Dome definitions and theorems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4), 983–997.

- Liao, S. J., & Tan, Y. A. (2007). A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations. *Studies in Applied Mathematics*, 119, 297–354.
- Masujima, M. (2005). *Applied mathematical methods in theoretical physics*. Weinheim, Italy: Wiley.
- Pandey, R., Singh, O., & Vineet, S. (2009). Efficient algorithms for solving singular Integral equations of abel type. *Computer Mathematics with Applications*, 57, 664–676.
- Polyanin, A. D., & Manzhirov, A. V. (2008). *Handbook of integral equations*. New York: Chapman Hall/CRC Press. doi: 10.1201/9781420010510
- Rahman, M. (2007). *Integral equations and applications*. India: WIT Press.
- Samad, N., Eisa, Z., & Barzegar, K. H. (2015). Homotopy analysis transformation method for solving first kind abel integral equations. *Ain Shams Engineering Journal*, 7(1), 483-491.
- Singh, O., Singh, V., & Pandey, R. (2010). A stable numerical Inversion of abel's integral equation using almost bernstein operational matrix. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 111, 245–252.
- Singh, P. R., V., & Singh, O. (2009). New stable numerical solutions of singular integral equations of abel type using normalised bernstein polynomials. *Applied Mathematical Sciences*, 3, 241-255.
- Sneddon, I. N. (1966). *Potential theory of mixed boundary value problems*. New York: Wiley.
- Wazwaz. (2011). *Linear and nonlinear integral equations: Methods and applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Wazwaz, A. (1997). *First lecture on integral equations*. Singapore: World Science.
- Wazwaz, A. M. (2009). *Partial differential equations and theory of solitary waves*. Beijing and Berlin: Springer.
- Yousefi, S. A. (2006). Numerical solution of the abel Integral equation using legendre wavelets. *Applied Mathematics and Computation*, 175(1), 574–580.



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Gizem POLAT

**Eğitim Derecesi**      **Okul/Program**      **Mezuniyet Yılı**

Lisans      Amasya Üniversitesi      2019

### Yabancı Dil

İngilizce

### Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. POLAT G. ve ŞAHİN S.(2024) Abel İntegral Denklemlerinin Çözümlerinin İncelenmesi
9. Uluslararası Asya Pasifik Modern Bilimler Kongresi