

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİNİN ELİPTİK SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS

Hamit BİÇER

HAZİRAN-2022
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

**ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİNİN ELİPTİK SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

**APPLICATION OF ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD TO ELLIPTIC
BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

YÜKSEK LİSANS

Hamit BİÇER

**HAZİRAN-2022
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

**ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİNİN ELİPTİK SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

**APPLICATION OF ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD TO ELLIPTIC
BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

YÜKSEK LİSANS

Hamit BİÇER

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK

**HAZİRAN-2022
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Adomian Ayrıştırma Yönteminin Eliptik Sınır Değer Problemlerine Uygulanması**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

17/06/2022

.....
Hamit BİÇER

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, tezin yürütülmesindeki yardımlarından dolayı tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK'e teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca benden yardımlarını esirgemeyen babam Enver Biçer ve annem Senem Biçer'e ve kardeşlerime sonsuz minnettarım.

Hamit BİÇER
GÜMÜŞHANE – 2022



ÖZET

Bu tez çalışmasında Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemi ve eliptik ters problem incelenmiştir ve çözümleri elde edilmiştir. Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Adomian ayrıştırma yöntemi üzerine yapılan çalışmalar , eliptik kısmi diferansiyel denklemler (Laplace, Poisson), iyi konumlandırılmış problemler ve Taylor serisi açıklanmıştır.

İkinci bölümde Adomian ayrıştırma yöntemi tanıtılmıştır. Adomian ayrıştırma yönteminin kullanımı ve iki örnek Adomian seri çözümleri ile yaklaşık çözümleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde Adomian polinomları gösterilmiştir. Bu bölümde Adomian yöntemiyle Adomian polinomlarının hesabı, parametre kullanarak Adomian polinomların hesabı, genelleştirilmiş Taylor serisi ile Adomian polinomlarının hesabı ve homotopi pertürbasyon yöntemiyle Adomian polinomlarının hesabı verilmiştir.

Dördüncü bölümde Adomian ayrıştırma yöntemi eliptik kısmi diferansiyel denklemler hakkında yapılan çalışmalar verilmiştir. Adomian ayrıştırma yöntemiyle eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümü ve doğrusal olmayan eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümü birer örnekle gösterilmiştir.

Beşinci bölümde eliptik ters problemlerde Adomian ayrıştırma yöntemi verilmiştir. Bu başlık altında ters problem tanıtılmış, üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler verilmiş ve eliptik ters problemin Adomian ayrıştırma yöntemiyle çözümü verilmiştir.

Altıncı bölümde altında ise bu tez çalışmasının sonuçları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrıştırma Yöntemi, Adomian Polinomları, Adomian Seri Çözümleri, Eliptik Sınır Değer Problemleri, Yaklaşık Çözüm

SUMMARY

In this thesis, the boundary value problem and elliptic inverse problem of elliptic partial differential equations are investigated using the Adomian decomposition method and their solutions are obtained. This thesis consists of six section.

In the first section, studies on Adomian decomposition method, elliptic partial differential equations (Laplace, Poisson), well-positioned problems and Taylor series are explained.

In the second section, the Adomian decomposition method is introduced. The use of the Adomian decomposition method and two sample Adomian serial solutions and their approximate solutions are given.

In the third section, Adomian polynomials are shown. In this section, the calculation of Adomian polynomials with the Adomian method, the calculation of Adomian polynomials using parameters, the calculation of Adomian polynomials with the generalized Taylor series and the calculation of Adomian polynomials with the homotopy perturbation method are given.

In the fourth section, the studies on the elliptic partial differential equations of the Adomian decomposition method are given. The solution of the elliptic partial differential equation and the solution of the nonlinear elliptic partial differential equation with the Adomian decomposition method are shown with an example.

In the fifth section, Adomian decomposition method in elliptic inverse problems is given. Under this title, the inverse problem is introduced, the third-order partial differential equations are given, and the solution of the elliptic inverse problem is given by the Adomian decomposition method.

In the sixth section, the results of this thesis study are given below.

Keywords: Adomian Decomposition Method, Adomian Polynomials, Adomian Series Solutions, Elliptic Boundary Value Problems, Approximate Solution

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
1. GİRİŞ	1
1.1. Eliptik Kısmi Diferensiyel Denklemler	5
1.2. İyi Konumlandırılmış Problemler	7
1.3. Taylor Seri Gösterimleri	9
2. ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ	11
2.1. Değiştirilmiş (Tadil Edilmiş) Ayrıştırma Yöntemi	14
2.2. Seri Açılımı Kullanılan Değiştirilmiş Ayrıştırma Yöntemi	14
3. ADOMİAN POLİNOMLARI	23
3.1. Adomian Yöntemiyle Adomian Polinomlarının Hesabı	23
3.2. Parametre Kullanarak Adomian Polinomlarının Hesabı	24
3.3. Genelleştirilmiş Taylor Serisi Kullanılarak Adomian Polinomlarının Hesabı	26
3.4. Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile Adomian Polinomlarının Hesabı	35
4. ELİPTİK PROBLEMLERDE ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİNİN	
UYGULANMASI	37
5. ELİPTİK TERS PROBLEMLERDE ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ	47
5.1. Ters Problemler	47
5.2. Üçüncü Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler	48
5.3. Eliptik ters problemlere Adomian Ayrıştırma Yönteminin Uygulanması	49
6. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME	56
KAYNAKÇA	58
ÖZGEÇMİŞ	63

1. GİRİŞ

Matematiğin birçok alanı bulunmaktadır. Bu alanlardan günümüzde en çok çalışma yapılan alan uygulamalı matematik alanıdır. Uygulamalı matematik alanındaki problemlerin birçoğu adi diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla modellenerek, bir problem halinde ifade edilebilir. Uygulamalı matematik alanının ve mühendislik bilimlerinin doğrusal ve doğrusal olmayan problemler üzerinde çalışmalar yapması, adi diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemlerin, hususan günümüzde gelişen teknolojilerle ne kadar önem kazandığını göstermektedir. Özellikle son 200 yıldır popülerlik kazanan doğrusal olmayan diferansiyel denklemler matematikçiler için geniş bir çalışma alanı olmuştur. Doğrusal olmayan diferansiyel denklemler yapı bakımından doğrusal denklemlere benzer olsa da denklemin doğrusallıktan doğrusal olmayan denkleme geçmesi denklem içinde trigonometrik üstel vb. terimlerle olur.

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için analitik çözümler yanında sayısal çözümler de ortaya çıkmıştır. Sayısal çözümlere örnek olarak pertürbasyon yöntemi, Tau spektral yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi verilebilir. Doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için yeni yeni ortaya çıkan sayısal çözümler eski usul çözüm olan analitik çözümlere nazaran kolaylık sağlamaktadır (Adomian, 1988a).

Daha önceleri kullanılan yöntemlerde, doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemi çözmek için önce denklem doğrusal hale getirilip, sonra çözüm yapılırken; güncel sayısal yöntemlerle artık denklemler doğrusal hale getirilmeden çözümleri yapılabilir. Böylelikle çözümde hem yapılan adım sayısı azaltıldı hem de denklemlerin çözümleri hızlı bir şekilde sonuca varıldı (Adomian, 1984).

Bu çalışmada incelediğimiz Adomian ayrıştırma yöntemi da sayısal çözümler arasında olup son elli yıldır bize doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde yardımcı olmaktadır.

Adomian ayrıştırma yöntemi 1980'lerde Georgia Üniversitesi uygulamalı matematik anabilim dalı başkanı Ermeni asıllı Amerikalı bilim adamı George Adomian tarafından ortaya atıldı (Ngarhasta vd., 2002). George Adomian kendi adıyla anılan bu yöntemi ilk olarak 1980 de "Stochastic Systems Analysis" adlı kitabında bahsetti (Adomian, 2015). Daha sonra 1983 de "Solving Frontier Problems Physics:

Decomposition Method” adlı kitabında Adomian ayrıştırma yöntemini ve Adomian polinomunu bütün hatlarıyla yazdı (Adomian, 2013).

Adomian ve Bellman 1984’de “Partial Differential Equations: New Methods for Their Treatment and Solution” adlı kitabında kısmi diferansiyel denklemlerin Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözümlerinden bahsetmiş oldu (Bellman ve Adomian, 1984).

1985 yılında, Adomian ve Rach, “On The Solution Of Algebraic Equations By The Decomposition Method” adlı makaleleri ile cebirsel denklemlerin çözümlerinde Adomian ayrıştırma yöntemini göstermişlerdir (Adomian ve Rach, 1985a).

1985’de yine Adomian ve Rach “Application of the Decomposition Method to Inversion of Matrices” adlı makaleleri ile Adomian ayrıştırma yöntemini bir matrisin tersini bulmada kullandılar (Adomian ve Rach, 1985b).

Adomian ve Rach, 1986’da “On Linear and Nonlinear İntegro-Differential Equations” adlı makaleleriyle doğrusal ve doğrusal olmayan integro diferansiyel denklemler için Adomian ayrıştırma yöntemini göstermişlerdir (Adomian ve Rach, 1986).

1988’de yine Adomian, Rach ve Elrod “The Decomposition Method Applied to Stiff Systems” adlı kitaplarında Adomian ayrıştırma yöntemini sert sistemlere uygulanışını açıklamışlardır (Adomian vd., 1985).

1988 yılına gelindiğinde Adomian ayrıştırma yönteminin popülerliği artıyordu ve Adomian, “Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics” adlı kitabı ile bu yöntemi doğrusal olmayan stokastik sistemler teorisine ve fiziğe uygulamalarını ele aldı. Bu kitabında Burger’s denklemine, ısı akışı ve difüzyona, fiziksel sistemde doğrusal olmayan salınımdan, Kdv denklemine kadar birçok konuyu Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözümlerini gösterdi (Adomian, 1988a).

Bellomo ve Sarafyan, 1987’de Adomian ayrıştırma yöntemi ile başka bir yaklaşım yöntemi olan Picard yaklaşım yöntemini “On Adomian's Decomposition Method and Some Comparisons With Picard's Iterative Scheme” adlı makalelerinde kıyaslamışlardır. Adomian ayrıştırma yönteminin, Picard yöntemine göre yinelemelerde (operatörle ilgili) daha az işlem gerektirdiğini göstermişlerdir (Bellomo ve Sarafyan, 1987). Daha sonra 1989’da Cherruault tarafından yazılan “Convergence of Adomian's Method” adlı makalesi Adomian ayrıştırma yönteminin yakınsaklığı hakkındadır. Bu çalışma Adomian ayrıştırma yöntemi ile ardışık terimlerin hesaplanmasındaki kolaylık yanında çözüme hızlı yakınsamanın mümkün olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla bu yeni yöntem matematik dünyasını heyecanlandırmıştır (Cherruault, 1989).

1995’de Cherruault, Adomian, Abbaoui ve Rach yazdıkları “Further Remarks on Convergence of Decomposition Method” adlı makaleleri ile daha önceki yıllarda yapılan Adomian ayrıştırma yönteminin yakınsaklığına yeni bilgiler eklediler (Cherruault vd., 1995).

1996’da Deeba ve Khuri, Adomian ayrıştırma yöntemini “A Decomposition Method for Solving the Nonlinear Klein–Gordon equations” adlı makaleleri ile Klein-Gordon denkleminde uygulanabileceğini göstermiştir (Deeba ve Khuri, 1996a). Yine aynı yıl “The Decomposition Method Applied to Chandrasekhar H-Equation” adlı makaleleri ile Chandrasekhar H-denkleminde de uygulanabileceğini göstermişlerdir (Deeba ve Khuri, 1996b).

1998’de Wazwaz’ın “A Comparison Between Adomian Decomposition Method and Taylor Series Method in the Series Solutions” adlı makalesi ile seri çözümlerin Adomian ayrıştırma yöntemi ile Taylor seri yöntemini karşılaştırdı (Wazwaz, 1998a). Yine aynı sene Wazwaz “A Reliable Technique for Solving the Wave Equation in an Infinite One-Dimensional Medium” adlı makalesinde de Adomian ayrıştırma yöntemini dalga denkleminin sonsuz tek boyutlu ortamda çözümünü inceledi (Wazwaz, 1998b).

1999’da Wazwaz “The Modified Decomposition Method and Padé Approximants for Solving the Thomas–Fermi Equation” adlı makalesinde Adomian ayrıştırma yöntemini Thomas-Fermi denkleminde uygulanabileceğini gösterdi (Wazwaz, 1999).

2001’de Wazwaz ve El-Sayed “A New Modification of the Adomian Decomposition Method for Linear and Nonlinear Operators” yazmış oldukları makale ile Adomian ayrıştırma yöntemini geliştirerek yenilenmiş Adomian ayrıştırma yöntemini ortaya koydular (Wazwaz ve El-Sayed, 2001a).

2001’de Wazwaz “Construction of Soliton Solutions and Periodic Solutions of The Boussinesq Equation by The Modified Decomposition Method” adlı makalesinde yenilenmiş Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak Boussinesq denkleminin soliton ve periyodik çözümlerini gösterdiler (Wazwaz, 2001b).

Adomian ayrıştırma yöntemini 2000 yılında Doğan Kaya, Hasan Bulut ve Mustafa İnç ortak çalışmalarıyla yazdıkları “On the Solution of Oscillatory Problems by the Decomposition Method” adlı makaleleri ile Türkiye’de çalışılmaya başlanan bir konu olmaya başladı. Bu makalede titreşim probleminin analitik ve sayısal çözümleri incelendi (Kaya vd., 2000).

2004’de Sezgin Altun “Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm ve Adomian Ayrıştırma Metotlarının Karşılaştırması” adlı makalesi ile kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde Adomian ayrıştırma

yöntemini incelemiştir. Ayırıştırma yönteminin güvenilirliğini göstermek için kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bazı özel durumları örnek olarak çözülmüştür (Altun, 2004).

2014 yılında Muhammed Yiğider, Gökçe Dilek Küçük ve Ercan Çelik “Numerical Solutions of Fractional Partial Differential-Algebraic Equation by Adomian Decomposition Method and Multivariate Pade Approximation” adlı makalelerinde Adomian ayırıştırma yöntemini ve çok değişkenli Pade yöntemi ile kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini gösterdiler (Küçük vd., 2004).

2016 yılında Rach, Duan ve Wazwaz “Solution of Higher-Order, Multipoint, Nonlinear Boundary Value Problems with High-Order Robin-Type Boundary Conditions by the Adomian Decomposition Method” adlı makalelerinde yüksek mertebeli çok noktalı doğrusal olmayan problemlerde yüksek mertebeli Robin sınır değer problemlerine uygulamasını Adomian ayırıştırma yöntemiyle göstermişlerdir (Rach vd., 2016).

2020 yılında Ahu Ercan tarafından yazılan “Adomian Decomposition Method for Solving Nonlinear Fractional Sturm Liouville Problem” adlı makalesinde kesirli Sturm-Liouville probleminin çözümünde Adomian ayırıştırma yöntemi gösterildi (Ercan, 2020).

2021 de Rashid, Kubra, Guirao yazdıkları “Construction of an Approximate Analytical Solution for Multi-Dimensional Fractional Zakharov–Kuznetsov Equation Via Aboodh Adomian Decomposition Method” adlı makalelerinde Aboodh dönüşümünü Adomian ayırıştırma yöntemi ile birlikte kullanıp Zakharov–Kuznetsov denklemi için yaklaşık bulmaya çalıştılar (Rashid vd., 2021).

2021 yılında S. Noeigdam, D. Sidorov, A. Wazwaz, N. Sidorov, V. Sizikov ortak makaleleri olan “The Numerical Validation of the Adomian Decomposition Method for Solving Volterra Integral Equation with Discontinuous Kernels Using the CESTAC Method” adlı makalelerinde Adomian ayırıştırma yönteminden elde edilen doğrusal ve doğrusal olmayan formlarda süreksiz çekirdekli Volterra integral denkleminin sayısal sonuçlarını doğrulamak için yeni bir yöntem ve araç sundular (Noeigdam vd., 2021).

2021 yılında A. Ali, Z. Gul, W. A. Khan, S. Ahmed ve S. Zeb “Investigation Of Fractional Order Sine-Gordon Equation Using Laplace Adomian Decomposition Method” adlı makalelerinde doğrusal olmayan kesir mertebeli sinüs-Gordon denkleminin çözümünü Adomian ayırıştırma yönteminden faydalananarak gösterdiler (Ali vd., 2021).

2021 yılında Mustafa Türkyılmazoğlu “Nonlinear Problems via a Convergence Accelerated Decomposition Method of Adomian” adlı makalesinde Adomian’ın yakınsama hızlandırılmalı ayırıştırma yöntemi ile doğrusal olmayan problemlere uygulamasını gösterdi (Türkyılmazoğlu, 2021).

1.1. Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemler

Kısmi diferansiyel denklemler üç tip olarak sınıflandırılır. $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$ ve $C = C(x, y)$ katsayı fonksiyonları x ve y değişkenlerine bağlı verilmiş olsun. x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olan bir u değişkeni için ikinci mertebeden

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (\text{Eşitlik 1})$$

kısmi diferansiyel denklemi verildiğinde eğer (x, y) noktasında

$B^2 - 4AC < 0$ denklemi eliptik

$B^2 - 4AC = 0$ denklemi parabolik

$B^2 - 4AC > 0$ denklemi hiperbolik

olarak isimlendirilir.

Eliptik denklemler genellikle zamanla değişmeyen fiziksel denklem sistemlerini modeller. Yani “potansiyel” adı verilen bir büyüklüğün değişimidir. Potansiyel, bir büyüklüğün değişimini ölçer. Örneğin sıcaklık bir potansiyel büyüklüktür. Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin iki standart gösterimi vardır. Bunlar Laplace denklemi ve Poisson denklemleridir (Adil, 2022)

m boyutlu reel uzayda $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, (m \geq 2)$ olmak üzere $u(x)$ fonksiyonu için

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0 \quad (\text{Eşitlik 2})$$

şeklinde verilen homojen doğrusal eliptik kısmi diferansiyel denkleme **Laplace denklemi** denir.

m boyutlu reel uzayda $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, (m \geq 2)$ olmak üzere $u(x)$ fonksiyonu ve belirli bir $\rho(x)$ fonksiyonu için,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = \rho(x) \quad (\text{Eşitlik 3})$$

şeklinde verilen homojen olmayan doğrusal eliptik diferansiyel denkleme **Poisson denklemi** denir.

Sınır Şartları

Kısmı diferansiyel denklemler çeşitli tip sınır şartlar ile verilir. Sınır şartları u cinsinden verilmişse bu sınır şartına Dirichlet tipi sınır şartı, u 'nun gradyanı cinsinden verilmişse bu sınır şartına Neumann tipi sınır şartı, hem u hem de gradyanı birlikte verilmişse bu sınır şartına da Robin şartı denir.

Dirichlet Şartı

Bu şart k uzunluğundaki bir boyutlu cisim için $0 < x < k$ ve a, b sabitler olacak şekilde $u(0) = a$, $u(k) = b$ biçimindedir. Eğer $0 < x < k_1$ ve $0 < y < k_2$ olan bir dikdörgensel bölge için ise a, b, c, d sabitler olacak şekilde sınır şartlar

$$u(0, y) = a$$

$$u(k_1, y) = b$$

$$u(x, 0) = c$$

$$u(x, k_2) = d$$

biçiminde gösterilir.

Neumann Şartı

Yine k uzunluğundaki bir boyutlu cisim için $0 < x < k$ ve a, b sabitler olacak şekilde Neumann sınır şartları $u_x(0, t) = a$, $u_x(k, t) = b$ biçiminde gösterilir.

Robin Şartı

Bağımlı değişken u ve onun türevini içeren belli bir bölgenin sınırında aldığı değerlerin doğrusal bileşimiyle oluşan sınır şartıdır. Burada yine bir boyutlu k

uzunluğundaki cisim için ve a, b sabitler olacak şekilde $u_x(0, t) + hu(0, t) = a, u_x(k, t) + gu(k, t) = b$ biçimde gösterilir.

1.2. İyi Konumlandırılmış Problemler

Kısmi diferansiyel denklemler türlerine göre doğal olarak belirlenen sınır şartlarıyla gelir. Hiperbolik ve parabolik kısmi diferansiyel denklemler başlangıç sınır koşulları ve sade başlangıç koşulları alırken, eliptik kısmi diferansiyel denklemler sınır şartlarıyla eşleşir.

Hadamard'a göre, eğer bir problemin

- a) en az bir çözümü var ise,
- b) çözümü tek (eşsiz) ise,
- c) çözümü verilere ve parametrelere sürekli olarak bağlıysa iyi konumlandırılmıştır (veya doğru kurulmuştur).

(a)'nın anlamı açıktır.

(b) bir problemin çözümünün tek (eşsiz) olması: Bazen bir çözümün tek olduğu söylendiğinde "belirli bir fonksiyon sınıfı içinde tek" olduğu kastedilir. Örneğin, bir problemin birden fazla çözümü olsun, fakat bunlardan sadece biri sınırlı olsun. Bu durumda sınırlı fonksiyonlar uzayında çözümün tek olduğu söylenir.

(c) bir problemin çözümünün verilere ve parametrelere sürekli olarak bağlı olması: Başlangıç veya sınır fonksiyonlarında (uygun normlara göre) yapılan "küçük" değişikliklerin veya parametre değerlerindeki yapılan küçük değişikliklerin çözümde de (bazı uygun normlara göre) "küçük" değişikliklerle sonuçlanmasıdır.

İyi konumlandırılmış bir problem kavramı, uygulamalı matematikte önemlidir. Eğer bir başlangıç-sınır değer problemi (P) bazı fiziksel süreçler hakkında tahminlerde bulunmak için kullanılıyorsa, (P)'nin bir çözüme sahip olması istenir. Ayrıca çözümün tekliğinden emin olmak istersiniz. Çözüm, sürekli olarak veri ve parametrelere bağlıysa, yapılan tahminlerde ölçümdeki küçük hataların büyük hatalara sebebiyet verebilecek olmasından endişe edilmesi gerekmez.

Kısmi diferansiyel denklemlerin klasik teorisi neredeyse tamamen iyi konumlandırılmış problemlerle ilgili olsa dahi kötü konumlandırılmış problemler de matematiksel ve bilimsel olarak ilginç olabilir.

$\| \cdot \|$, V doğrusal uzayı üzerinde bir norm olsun. Belirli bir t zamanında $u(x, t)$ 'nin normunu x 'in bir fonksiyonu biçiminde $\|u(t)\|$ olarak yazacağız. Örneğin, t zamanında u 'nın $L^{-1}(B)$ normu

$$\| u(t) \| = \int_B |u(t)| dx \quad (\text{Eşitlik 4})$$

Örnek 1.1 $0 < \varepsilon < 1$ ve $\| \cdot \|$, $C(R)$ üzerindeki maksimum norm olsun. Aşağıda verilen problemin

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

bir çözümü $u(x, t) = 0$ 'dır.

Başlangıç şartında yapılan küçük bir değişiklikle verilen aşağıdaki problemin

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \end{cases}$$

çözümü ise

$$v(x, t) = \varepsilon^2 \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sinh\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \quad (\text{Eşitlik 5})$$

fonksiyonudur. u ve v 'nin aynı denklemi sağladığına, aynı başlangıç konumuna sahip olduğuna ve zamana göre türevlerinin başlangıçta çok yakın olduğuna dikkat edelim:

$$\| v_t(0) - u_t(0) \| = \varepsilon \quad (\text{Eşitlik 6})$$

bununla birlikte

$$\| v(t) - u(t) \| = \varepsilon^2 \left| \sinh\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right|, \quad (\text{Eşitlik 7})$$

farklarının normu ve bu üstel olarak büyüktür.

Bu nedenle, (zamanın pozitif olduğu varsayımı altında) ilk verilerde çok küçük bir değişiklik, çözümde büyük değişikliğe sebebiyet verir. Bunu açıklamak zor değildir. v çözümü zamana bağlı olmasına rağmen, zamandan bağımsız problemler ile ilgili olan eliptik bir denklemi (Laplace problemi) sağlar. Eliptik denklemin başlangıç koşulları ile eşleştirilmesi kötü konumlandırılmış bir problemi verdi.

Laplace operatörünü (hiperbolik) dalga operatörü ile değiştirdiğimizi varsayalım. Artık problemimiz

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

olur. Ve çözümü ise $u(x, t) = 0$, dır. Eliptik problemdekiyle benzer biçimde başlangıç şartında yapılan küçük bir değişiklikle elde edilen

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \end{cases}$$

problemin çözümü

$$v(x, t) = \varepsilon^2 \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \quad (\text{Eşitlik 8})$$

ile verilir. Bu durumda,

$$\|v(t) - u(t)\| = \varepsilon^2 \left| \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right| \leq \varepsilon^2, \quad (\text{Eşitlik 9})$$

Böylece herhangi pozitif bir zamanda ilk verilerdeki küçük değişiklik, çözümde küçük bir değişikliğe yol açar. Bu beklenen bir durumdur. Çünkü başlangıç değer problemi dalga denklemi için iyi konumlandırılmıştır.

(a)'yı belirlemek oldukça zor olabilir. (b) ve (c)'yi ispatlamak, özellikle doğrusal problemler için genellikle daha kolaydır (Well-Posed Problems, 2022).

1.3. Taylor Seri Gösterimleri

Tanım 1.1 (u_n) , $n \in \mathbb{Z}^+$ bir dizi olsun. Bu dizinin terimlerinin sonsuz toplamına **seri** denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

Tanım 1.2 Tanım kümesindeki bir x_0 noktasında tüm mertebelerden türeve sahip bir $f = f(x)$ fonksiyonu için

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

şeklindeki kuvvet serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki Taylor serisi denir.

Teorem 1.1 Eğer f fonksiyonu $|x - x_0| = R$ aralığının içinde analitik ise bu durumda

$$D_R(x_0) = \{x: |x - x_0| < R\}$$

açık aralığında bulunan her x için f fonksiyonun Taylor serisi f fonksiyonuna yakınsar, $\forall x \in D_R(x_0)$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

yazılır. Ayrıca $0 < r < R$ olacak şekilde bir r sayısı için $\overline{D_R(x_0)} = \{x: |x - x_0| \leq r\}$ kapalı yuvarında seri düzgün yakınsaktır. Özel olarak $x_0 = 0$ noktasındaki Taylor serisine

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Maclaurin serisi denir (Taylor seri gösterimleri, 2022).

2. ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ

Matematikte, temel bilim ve mühendislik alanlarında ortaya çıkmış problemleri çözmek için birden fazla çözüm yöntemleri ortaya çıkmıştır. Bu problemleri “öncelikle bir denkleme dönüştürmek ve daha sonra çözüm” olmak üzere iki adım halinde yol izlenmiştir. Bu problemleri denklemler yapmak için önce bir diferansiyel denkleme dönüştürmek problemin çözümü için önemli bir adımdır. Bu denklemleri çözmek için ise analitik ve sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Son yıllarda geliştirilen Adomian polinomları ve Adomian ayrıştırma yöntemi bir sayısal çözüm yöntemidir.

Bu yöntem bize doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözülmesinde farklı bir yaklaşımla bakmamızı sağlamaktadır. Biz bu bölümde Adomian ayrıştırma polinomlarının ve yönteminin kullanılışını ve bazı diferansiyel denklemlere uygulanışını inceleyeceğiz.

Sınır değer problemlerinin çoğu doğrusal değildir ve doğrusal olmayan problemlerin çoğunda analitik çözümü bulmak oldukça zordur. Bu nedenle problemin yaklaşık çözümü için yeni yaklaşımlar gerekmektedir. Bu çalışmada bu yaklaşımlardan Adomian ayrıştırma yöntemi ele alınacaktır (Adomian, 1988a).

Adomian ayrıştırma yöntemi, 1980’li yılların başında Amerikalı bilim adamı G. Adomian tarafından tasarlanmış daha sonra Yves Cherruault ve ekibi tarafından geliştirilmiştir. Yöntem, seri biçiminde bir çözüm elde edebilmek için yapılan çalışmalara dayanır. Bu yöntem sayesinde doğrusal ve doğrusal olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemleri, integral ve integro-diferansiyel denklemleri, tıpta, biyolojide, mühendislik ve fizikte ortaya çıkan problemleri çözmek mümkündür (Şahin, 2015).

$$Fu = g \quad (\text{Eşitlik 10})$$

denklemini inceleyelim. Bu denklemde F doğrusal ve doğrusal olmayan terimler içeren bir diferansiyel operatördür. L doğrusal operatör olmak üzere Lu doğrusal terimi olsun. Bu halde L operatörünün tersi kolaylıkla bulunacaktır. Bu durum her zaman karşımıza çıkan bir durum değildir. Lu ile Fu ifadesinin doğrusal kısmının en yüksek mertebeden türevinin terimini göstermek üzere

$$Fu = Lu + Ru + Nu = g \quad (\text{Eşitlik 11})$$

şeklinde gösterelim. L türevi kolay alınan bir doğrusal operatör, R doğrusal operatörün doğrusal kalanı, N diferansiyel denklemde doğrusal olmayan kısım olarak (Eşitlik 11) denklemi şeklinde yazalım. Buradan (Eşitlik 11) denklemine L^{-1} ters operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu + L^{-1}Ru + L^{-1}Nu = L^{-1}g \quad (\text{Eşitlik 12})$$

şimdi (Eşitlik 12) denklemine $L^{-1}Lu$ yalnız bırakırsak

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (\text{Eşitlik 13})$$

eşitliğini elde ederiz. (Eşitlik 13) denklemine doğrusal olmayan Nu , A_n Adomian polinomları cinsinden

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2 \dots u_n) \quad (\text{Eşitlik 14})$$

seri açılımı biçiminde yazabiliriz. Burada A_n polinomları Adomian polinomlarıdır (Adomian, 2013).

$Fu = g$ denklemine L operatörünün $L = \frac{\partial^n}{\partial t^n}$ ile tanımlandığını dolayısıyla L^{-1} ters operatörünün sıfırdan t 'ye n defa integral alma işlemi içerdiğini yani $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t \dots \int_0^t (\cdot) \partial t^n$ olduğunu kabul edelim. Bu denklem ile verilen $\left(\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} \right)_{t=0} = u^{(k)}(0,x)$, $k = 0, \dots, n-1$) n tane şart bir başlangıç değer problemi tanımlar. Ayrıca

$$L^{-1}Lu = u(t,x) - u(0,x) - tu'(0,x) - \dots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n-1)}(0,x) \quad (\text{Eşitlik 15})$$

olur. Bu durumda (Eşitlik 13) denkleminin sol tarafı yukarıdaki gibi olur. Şimdi (Eşitlik 15) eşitliğini, (Eşitlik 13) denklemine yerine yazarak

$$\begin{aligned} u(t,x) - u(0,x) - tu'(0,x) - \dots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n-1)}(0,x) \\ = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 16})$$

elde edilir.

$$f(t, x) = u(0, x) + tu'(0, x) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n-1)}(0, x) + L^{-1}g \quad (\text{Eşitlik 17})$$

olarak tanımlanır ve bu (Eşitlik 16) da kullanılırsa

$$u(t, x) = f(t, x) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (\text{Eşitlik 18})$$

şeklinde bulunur. Ayırıştırılmış seri çözüm fonksiyonu,

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) \quad (\text{Eşitlik 19})$$

şeklinde gösterilir. Bu seri çözümü ve (Eşitlik 14) denklemi, (Eşitlik 18) denkleminde yazılacak olursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) = f(t, x) - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{Eşitlik 20})$$

elde edilir. Buradan (Eşitlik 20) eşitliğinden

$$u_0(t, x) = f(t, x)$$

$$u_1(t, x) = -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0)$$

$$u_2(t, x) = -L^{-1}(Ru_1) - L^{-1}(A_1)$$

$$u_3(t, x) = -L^{-1}(Ru_2) - L^{-1}(A_2)$$

$\vdots$

yani

$$u_0 = f(t, x),$$

$$u_n(t, x) = -L^{-1}(Ru_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}), n \geq 1$$

eşit olduğu kabul edilip, indirgeme bağıntısı ile u_n terimleri hesaplanır, sonrasında (Eşitlik 19) eşitliği kullanılıp çözüm bulunur (Cherruault, 1989; Kaya ve İnan, 2005).

2.1. Değiştirilmiş (Tadil Edilmiş) Ayrıştırma Yöntemi

Wazwaz, Adomian tarafından yapılan varsayımları değiştirmiştir. (Eşitlik 18)'e kadar aynı işlemler yapılır. Farklı olarak, değiştirilmiş biçimde (Eşitlik 18) denkleminin sağ tarafında bulunan f fonksiyonunun f_0 ve f_1 olarak iki parçaya ayrılabilceği ve

$$f(t, x) = f_0(t, x) + f_1(t, x)$$

biçiminde yazılabileceği kabul edilir. Bu yöntemde birinci parça f_0 'ın u_0 'a atanması ve ikinci parça f_1 'in ise u_1 'in tanımında diğer terimlere eklenmesi temel alınır. u fonksiyonunun diğer bileşenleri u_n 'ler ($n \geq 2$) için atamalar klasik yöntemle aynı şekilde yapılır. Böylelikle

$$u_0 = f_0(t, x),$$

$$u_1 = f_1(t, x) - L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0),$$

$$u_n(t, x) = -L^{-1}(Ru_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}), n \geq 2$$

olarak hesaplanır (Wazwaz ve Sayed, 2001).

2.2. Seri Açılımı Kullanılan Değiştirilmiş Ayrıştırma Yöntemi

Wazwaz ve El-Sayed 2001 yılındaki çalışmalarında değiştirilmiş ayrıştırma yöntemini geliştirerek (Eşitlik 18) denkleminin sağ tarafında bulunan f fonksiyonunun seri açılımını

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t, x)$$

kullandılar. Özel olarak bu seri Taylor serisi olarak seçilebilir. Bu yöntemde yineleme denklemleri ise

$$u_0 = f_0(t, x),$$

$$u_n = f_n(t, x) - L^{-1}(Ru_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}), \quad n \geq 1$$

olarak alınır (Wazwaz ve Sayed, 2001).

Örnek 2.1 Bir $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemi ve verilen başlangıç şartları sağlasın:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = -\sin(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$$

Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunu 6. dereceden yaklaşık çözümünü bulalım.

Çözüm: Bu doğrusal homojen olmayan başlangıç değer probleminin analitik çözümünün

$$u(x) = \cos(x)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi yöntemin uygulamasın ve sayısal çözümü bulmak için x 'nin ikinci mertebeden türevini L operatörü olarak gösterelim ve ters operatörü yazalım.

$$L_x(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot), \quad L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx^2$$

şimdi denklemi

$$L_x u + u' + u = -\sin(x)$$

şekline getirip denklemin her iki tarafına da L_x^{-1} operatörü uygulanırsa

$$L_x^{-1} L_x u + L_x^{-1}(u' + u) = L_x^{-1}(-\sin(x))$$

elde edilir. Burada $L_x^{-1} L_x u$ nin açılımı

$$L_x^{-1}L_x u = u(x) - u(0) - xu'(0)$$

şeklindedir. Şimdi $u(x) - u(0) - xu'(0)$ ifadesini denklemde yerine yazarsak çözmemiz gereken denklem

$$u(x) - u(0) - xu'(0) = -L_x^{-1}(u' + u) + L_x^{-1}(-\sin(x))$$

şeklinde olur. Burada $u(0)$ ve $u'(0)$ değerlerini denkleme yazarsak

$$u(x) - 1 - x \cdot 0 = -L_x^{-1}(u' + u) + L_x^{-1}(-\sin(x))$$

ve

$$u(x) - 1 = -L_x^{-1}(u' + u) + L_x^{-1}(-\sin(x))$$

olur. Öncelikle $L_x^{-1}(-\sin(x))$ ifadesini hesaplayalım.

$$L_x^{-1}(-\sin(x)) = \int_0^x \int_0^x -\sin(x) dx^2$$

$$L_x^{-1}(-\sin(x)) = \sin(x) - x$$

şeklinde olur. Şimdi bulduğumuz $L_x^{-1}(-\sin(x))$ denklemde yerine yazarak çözüme başlayabiliriz.

$$u(x) = -L_x^{-1}(u' + u) + 1 + \sin(x) - x$$

denklemini

$$f(x) = 1 + \sin(x) - x$$

olarak tanımlanırsa

$$u(x) = -L_x^{-1}(u' + u) + f(x)$$

biçiminde ifade edilir. Yaklaşık çözüm elde etmek için $f(x)$ 'in Taylor açılımının

$$1 + \sin(x) - x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

ilk üç terimini alıp yerine yazarsak

$$u(x) = -L_x^{-1}(u' + u) + \left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$$

elde edilir. Burada

$$f(x) \cong 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

fonksiyonu

$$f_0(x) = 1,$$

$$f_1(x) = 0,$$

$$f_2(x) = -\frac{x^3}{3!},$$

$$f_3(x) = \frac{x^5}{5!}$$

olacak şekilde dört bileşene ayrılırsa

$$f(x) \cong f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

yaklaşım fonksiyonu elde edilir. Bu bileşenler

$$u_0 = f_0(x),$$

$$u_1 = f_1(x) - L_x^{-1}(u'_0 + u_0)$$

$$u_2 = f_2(x) - L_x^{-1}(u'_1 + u_1)$$

$$u_3 = f_3(x) - L_x^{-1}(u_2' + u_2)$$

yineleme denklemlerinde kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilir. Bu denklemler ile

$$u_0 = 1$$

ve

$$u_1 = 0 - L_x^{-1}(u_0' + u_0)$$

$$= -L_x^{-1}((1)' + 1)$$

$$= -L_x^{-1}(1)$$

$$= \int_0^x \int_0^x 1 dx^2$$

$$u_1 = -\frac{x^2}{2!}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz u_1 'den u_2 yi bulmak için aşağıdaki işlemleri yapılarak u_2

$$u_2 = f_2(x) - L_x^{-1}(u_1' + u_1)$$

$$= -\frac{x^3}{3!} - L_x^{-1}(u_1' + u_1)$$

$$= -\frac{x^3}{3!} - L_x^{-1}\left(\left(-\frac{x^2}{2!}\right)' - \frac{x^2}{2!}\right)$$

$$= -\frac{x^3}{3!} - L_x^{-1}\left(-x - \frac{x^2}{2!}\right)$$

$$= -\frac{x^3}{3!} - \int_0^x \int_0^x \left(-x - \frac{x^2}{2!}\right) dx^2$$

$$= -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$u_2 = \frac{x^4}{4!}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz u_2 'den u_3 yi bulmak için aşağıdaki işlemleri yapılarak u_3

$$u_3 = f_3(x) - L_x^{-1}(u_2' + u_2)$$

$$= \frac{x^5}{5!} - L_x^{-1}(u_2' + u_2)$$

$$= \frac{x^5}{5!} - L_x^{-1}\left(\left(\frac{x^4}{4!}\right)' + \frac{x^4}{4!}\right)$$

$$= \frac{x^5}{5!} - L_x^{-1}\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

$$= \frac{x^5}{5!} - \left(\frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right)$$

$$u_3 = -\frac{x^6}{6!}$$

olarak bulunur. Böylelikle yaklaşık çözüm

$$u(x) \cong u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

$$u(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.2 Bir $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemini ve verilen başlangıç şartları sağlasın:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = -\sin(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$$

Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun analitik çözümünü bulalım.

Çözüm: Analitik çözümü elde etmek için bir önceki örneğin çözümünden farklı olarak

$$f(x) = 1 + \sin(x) - x$$

fonksiyonunun Taylor serisi

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

açılımını yeniden düzenleyerek

$$f_0(x) = 1,$$

$$f_1(x) = 0,$$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, n \geq 2$$

olarak parçalara ayıralım. Bu bileşenler

$$u_0 = f_0(x),$$

$$u_1 = f_1(x) - L_x^{-1}(u'_0 + u_0)$$

$$u_n = f_n(x) - L_x^{-1}(u'_{n-1} + u_{n-1}), n \geq 2$$

yineleme denklemlerinde kullanılarak çözüm aranacaktır. Tümevarım yöntemiyle

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

olduğunu gösterelim. Burada da bir önceki örnekte olduğu gibi

$$u_0 = 1,$$

$$u_1 = -\frac{x^2}{2!},$$

$$u_2 = \frac{x^4}{4!},$$

$$u_3 = -\frac{x^6}{6!}$$

eşittir. $n = k$ için

$$u_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kabul edelim. Şimdi $n = k + 1$ için

$$u_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2}$$

$$u_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$u_{k+1} = f_{k+1}(x) - L_x^{-1}(u'_k + u_k)$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} - L_x^{-1} \left[\left(\frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right)' + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right]$$

$$= \cancel{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}} - \cancel{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2}$$

$$u_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2} .$$

Tümevarım ile

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

eşit olduğu gösterildi. Böylelikle analitik çözüm

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$u = \cos(x)$$

olarak bulunur.

3. ADOMIAN POLİNOMLARI

Adomian ayrıştırma yönteminin tanıtıldığı bölümde doğrusal adi diferansiyel denklemlerin bu yöntemle nasıl çözüleceği verilmişti. Bu kısımda doğrusal olmayan denklemlerde yöntemin uygulanabilmesi için Adomian polinomlarını inceleyeceğiz. Doğrusal olmayan denklemlerde u bilinmeyen fonksiyonu sonsuz bir seri toplamı şeklinde ifade edilirken, $u^2, u^3, u \cos u, ue^u, uu_x, uu_{xx}$ gibi doğrusal olmayan terimler, özel bir gösterim olan Adomian polinomları ile ifade edilir. Burada doğrusal olmayan terimleri daha önce $N(u)$ ile (Eşitlik 14) de göstermiştik. $N(u)$ ifadesi bir fonksiyon olarak yeteri kadar düzgün olduğu ve bu ifadenin

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{Eşitlik 21})$$

biçiminde A_n Adomian polinomlarının seri toplamına eşit olduğu kabul edilecektir. A_0 polinomu u_0 fonksiyonuna; A_1 polinomu u_0, u_1 fonksiyonlarına; A_2 polinomu u_0, u_1, u_2 fonksiyonlarına; A_n polinomu ise $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ fonksiyonlarına bağlıdır.

3.1. Adomian Yöntemiyle Adomian Polinomlarının Hesabı

George Adomian kendi ismiyle anılan A_n Adomian polinomlarını aşağıdaki gibi verilen $C(k, n)$ ler ile hesaplanışını vermiştir. A_n , Adomian polinomları

$$A_n = \sum_{k=1}^n \left(C(k, n) \left(\frac{d^k N}{du^k} \right)_{u=u_0} \right), \quad n \geq 1 \quad (\text{Eşitlik 22})$$

ve $A_0 = N(u_0)$ ile bulunur. Burada $C(k, n)$ 'ler

$$C(k, n) = \sum_{\substack{k_j \in \mathbb{N}_0, \\ k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = k, \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + nk_n = n}} \left(\prod_{j=1,2,\dots,n} \frac{1}{k_j!} u_j^{k_j} \right) \quad (\text{Eşitlik 23})$$

formülü ile hesaplanır (Adomian 2014).

Örnek 3.1 $C(2,3)$ polinomunu hesaplayalım

$n = 3, k = 2$ dir ve k_j leri $k_1 + k_2 + k_3 = 2$ ve $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3$ olacak şekilde seçilmelidir.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{k_1}{1} & \frac{k_2}{1} & \frac{k_3}{0} & \frac{k_1+k_2+k_3}{2} & \frac{k_1+2k_2+3k_3}{3} \end{array}$$

$$C(2,3) = u_1 u_2$$

biçiminde hesaplanır.

Örnek 3.2 $C(2,4)$ polinomunu hesaplayalım

$n = 4, k = 2$ dir ve k_j leri $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2$ ve $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 4$ olacak şekilde seçilmelidir.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{k_1}{1} & \frac{k_2}{0} & \frac{k_3}{1} & \frac{k_4}{0} & \frac{\sum k_j}{2} & \frac{\sum j k_j}{4} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

$$C(2,3) = \left(\frac{1}{1!} u_1 \cdot \frac{1}{1!} u_3 \right) + \frac{1}{2!} u_2^2$$

$$C(2,3) = u_1 u_3 + \frac{1}{2!} u_2^2$$

biçiminde hesaplanır.

3.2. Parametre Kullanarak Adomian Polinomlarının Hesabı

Biazar ve arkadaşları ile Zhu ve arkadaşları A_n polinomlarını hesaplamak için λ parametresini kullanmışlardır. A_n polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \right) \left[N \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} \quad (\text{Eşitlik 24})$$

biçiminde yazılır. Problem çözümlerine daha iyi sayısal yaklaşımlar bulmak için ayrıştırma serisinin adım sayısı artırılmalıdır. (Eşitlik 24) genel formülü ayrıştırma serisinin adım sayısının çoğaltılmasında bize avantaj sağlar. Şimdi (Eşitlik 24) eşitliğinden ilk dört polinomun hesabı verilecektir.

$$A_0 = \frac{1}{0!} [N(\lambda^0 u_0)]_{\lambda=0},$$

$$A_0 = N(u_0),$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \frac{d^1}{d\lambda^1} \left[N \left(\sum_{k=0}^1 \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{d\lambda} [N(\lambda^0 u_0 + \lambda^1 u_1)]_{\lambda=0}$$

$$= u_1 N'(u_0 + \lambda u_1)_{\lambda=0},$$

$$A_1 = u_1 N'(u_0),$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[N \left(\sum_{k=0}^2 \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} [N(u_0 + \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2)]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{d}{d\lambda} [(u_1 + 2\lambda u_2) N'(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!} [(2u_2) N'(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)$$

$$+ (u_1 + 2\lambda u_2) N''(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2) (u_1 + 2\lambda u_2)]_{\lambda=0},$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} u_1^2 N''(u_0) + u_2 N'(u_0),$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} [N(\sum_{k=0}^3 \lambda^k u_k)]_{\lambda=0}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} [N(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3)]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!} \frac{d^2}{d\lambda^2} [(u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3) N'(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3)]_{\lambda=0}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{3!} \frac{d}{d\lambda} [(2u_2 + 6\lambda u_3)N'(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3) \\
&\quad + (u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3)^2 N''(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{3!} [(6u_3)N'(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3) + \\
&\quad + 3(u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3)(2u_2 + 6\lambda u_3) \times N''(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3) \\
&\quad + (u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3)^3 N'''(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3)]_{\lambda=0} \\
A_3 &= \frac{1}{3!} [6u_3 N'(u_0) + 6u_1 u_2 N''(u_0) + u_1^3 N'''(u_0)]_{\lambda=0},
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Biazar vd., 2003; Zhu vd., 2005).

3.3. Genelleştirilmiş Taylor Serisi Kullanılarak Adomian Polinomlarının Hesabı

$N(u)$ teriminin Adomian polinomlarını bulmak için bir başka bakış açısı ise Duan vd. öne sürdükleri Taylor seri yönteminin bir genelleştirmesini kullanmaktır. Burada kullanılan genelleştirmede Taylor serisi bir noktada değil bir u fonksiyonu komşuluğunda yazılır. Adomian polinomları doğrusal olmayan $N(u)$ teriminin u_0 civarında u fonksiyonuna göre Taylor seri açılımı kullanılarak hesaplanır. Burada açılımdaki terimler $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ fonksiyonunun $u_0, u_1, \dots$ bileşenlerinin alt indisleri ile üsler çarpımlarının toplamaları eşit olacak şekilde gruplanır (Duan vd., 2012).

$$\begin{aligned}
N(u) &= N(\sum_{k=0}^{\infty} u_k) \\
&= N(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k) \\
N(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{d^n N}{du^n} \right)_{u=u_0} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} u_k)^n \right] \\
N(u) &= N(u_0) + \left(\frac{dN}{du} \right)_{u=u_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{d^2 N}{du^2} \right)_{u=u_0} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} u_k)^2 + \dots + \\
&\quad \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n N}{du^n} \right)_{u=u_0} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} u_k)^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(u) &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \\
&= N(u_0) + (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots)N'(u_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}(u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + u_2^2 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3 + \dots)N''(u_0) \\
&\quad + \frac{1}{3!}(u_1^3 + 3u_1^2u_2 + 3u_1u_2^2 + 3u_1^2u_3 + \dots)N'''(u_0) + \\
&\quad + \frac{1}{4!}(u_1^4 + 4u_1^3u_2 + \dots)N^{(4)}(u_0) + \\
&\quad + \frac{1}{5!}(u_1^5 + \dots)N^{(5)}(u_0) + \dots
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Adomian polinomları ise gruptama yapılarak

$$A_0 = N(u_0)$$

$$A_1 = u_1 \left(\frac{dN}{du} \right)_{u=u_0}$$

$$A_2 = u_2 \left(\frac{dN}{du} \right)_{u=u_0} + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2N}{du^2} \right)_{u=u_0}$$

$$A_3 = u_3 \cdot \left(\frac{dN}{du} \right)_{u=u_0} + u_1u_2 \cdot \left(\frac{d^2N}{du^2} \right)_{u=u_0} + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \cdot \left(\frac{d^3N}{du^3} \right)_{u=u_0}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= u_4 \cdot \left(\frac{dN}{du} \right)_{u=u_0} + \left(\frac{u_2^2}{2!} + u_1u_3 \right) \cdot \left(\frac{d^2N}{du^2} \right)_{u=u_0} + \left(\frac{u_1^2u_2}{2!} \right) \cdot \left(\frac{d^3N}{du^3} \right)_{u=u_0} \\
&\quad + \frac{u_1^4}{4!} \left(\frac{d^4N}{du^4} \right)_{u=u_0}
\end{aligned}$$

⋮

biçiminde verilir.

Örnek 3.3 Üstel bir ifadenin Adomian polinomlarını gösterelim. Örneğimiz

$$Nu = F(u) = e^{au+b}$$

şeklinde olsun. Öncelikle verilen $F(u)$ 'yu bir seri şeklinde tanımlayalım.

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$A_0 = F(u_0) = e^{au_0+b}$$

$$F(u) = e^{a(u_0+u_1+u_2+\dots)+b}$$

şimdi denklemini iki çarpan olarak yazarsak aşağıdaki gibi

$$F(u) = (e^{au_0+b}).e^{a(u_1+u_2+\dots)}$$

olur. Şimdi de burada ikinci çarpan olan $e^{a(u_1+u_2+\dots)}$ ifadenin Taylor seri açılımını yaparsak

$$F(u) = e^{au_0+b} \left(1 + a(u_1 + u_2 + \dots) + \frac{a^2}{2!}(u_1 + u_2 + \dots)^2 + \dots \right)$$

haline gelmiş olur. Buradan da e^{au_0+b} ile her bir terimi çarparsak $F(u)$

$$\begin{aligned} F(u) &= e^{au_0+b} + au_1e^{au_0+b} + \left(au_2 + \frac{a^2}{2!}u_1^2 \right) e^{au_0+b} \\ &\quad + \left(au_3 + a^2u_1u_2 + \frac{a^3}{3!}u_1^3 \right) e^{au_0+b} + \dots \end{aligned}$$

şeklinde olur. Şimdi de her bir polinomu aşağıdaki gibi

$$A_0 = e^{au_0+b}$$

$$A_1 = au_1e^{au_0+b}$$

$$A_2 = \left(au_2 + \frac{a^2}{2!}u_1^2 \right) e^{au_0+b}$$

$$A_3 = \left(au_3 + a^2u_1u_2 + \frac{a^3}{3!}u_1^3 \right) e^{au_0+b}$$

⋮

gösterilir.

Örnek 3.4 Trigonometrik bir denklemin Adomian polinomlarını gösterelim. Örneğimizi

$$F(u) = \sin(au + b)$$

şeklinde belirleyelim. Yine burada birinci örnek gibi verilen $F(u)$ 'yu bir seri şeklinde tanımlayalım.

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$\begin{aligned} A_0 &= F(u_0) = \sin[(au_0 + b) + a(u_1 + u_2 + \dots)] \\ F(u) &= \sin[(au_0 + b) + a(u_1 + u_2 + \dots)] \end{aligned}$$

sinüs toplam-fark formüllerinden

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \sin(au_0 + b) \cos[a(u_1 + u_2 + \dots)] \\ &\quad + \cos(au_0 + b) \sin[a(u_1 + u_2 + \dots)] \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $\cos[a(u_1 + u_2 + \dots)]$ ifadesi ile $\sin[a(u_1 + u_2 + \dots)]$ ifadelerinin Taylor seri açılımlarını yazarak

$$\begin{aligned} F(u) &= \sin(au_0 + b) \left\{ 1 - \frac{a^2}{2!} (u_1 + u_2 + \dots)^2 + \frac{a^4}{4!} (u_1 + u_2 + \dots)^4 \dots \right\} \\ &\quad + \cos(au_0 + b) \left\{ a(u_1 + u_2 + \dots) - \frac{a^3}{3!} (u_1 + u_2 + \dots)^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

şeklinde gösterebilir. Şimdi birkaç terimi açarak

$$\begin{aligned} F(u) &= \sin(au_0 + b) \left\{ 1 - \frac{a^2}{2!} u_1^2 - 2 \frac{a^2}{2!} u_1 u_2 \dots \right\} \\ &\quad + \cos(au_0 + b) \left\{ au_1 + au_2 + au_3 - \frac{a^3}{3!} u_1^3 \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(u) = & \sin(au_0 + b) + a \cos(au_0 + b)u_1 \\
& + \left(-\frac{a^2}{2!}\sin(au_0 + b)u_1^2 + a \cos(au_0 + b)u_2\right) \\
& + \left(-a^2 \sin(au_0 + b)u_1u_2 + a \cos(au_0 + b)u_3 - \frac{a^3}{3!}\cos(au_0 + b)u_1^3\right) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan ilk üç polinomu aşağıdaki gibi

$$A_0 = \sin(au_0 + b)$$

$$A_1 = a \cos(au_0 + b)u_1$$

$$A_2 = \left(-\frac{a^2}{2!}\sin(au_0 + b)u_1^2 + a \cos(au_0 + b)u_2\right)$$

$$A_3 = \left(-a^2 \sin(au_0 + b)u_1u_2 + a \cos(au_0 + b)u_3 - \frac{a^3}{3!}\cos(au_0 + b)u_1^3\right)$$

$\vdots$

gösterilir.

Örnek 3.5 Trigonometrik bir denklemin Adomian polinomlarını gösterelim.

Örneğimizi

$$F(u) = \cos(au + b)$$

şeklinde belirleyelim. Yine burada birinci örnek gibi verilen $F(u)$ 'yu bir seri şeklinde tanımlayalım

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$A_0 = F(u_0) = \cos[(au_0 + b) + a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

$$F = \cos[(au_0 + b) + a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

cosinüs toplam-fark formüllerinden

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \cos(au_0 + b) \cos[a(u_1 + u_2 + \dots)] \\ &\quad - \sin(au_0 + b) \sin[a(u_1 + u_2 + \dots)] \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $\cos[a(u_1 + u_2 + \dots)]$ ifadesi ile $\sin[a(u_1 + u_2 + \dots)]$ ifadelerinin Taylor seri açılımları

$$\begin{aligned} F(u) &= \cos(au_0 + b) \left\{ 1 - \frac{a^2}{2!} (u_1 + u_2 + \dots)^2 + \frac{a^4}{4!} (u_1 + u_2 + \dots)^4 \dots \right\} \\ &\quad - \sin(au_0 + b) \left\{ a(u_1 + u_2 + \dots) - \frac{a^3}{3!} (u_1 + u_2 + \dots)^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi birkaç terimi açarak

$$\begin{aligned} F(u) &= \cos(au_0 + b) \left\{ 1 - \frac{a^2}{2!} u_1^2 - 2 \frac{a^2}{2!} u_1 u_2 \dots \right\} \\ &\quad - \sin(au_0 + b) \left\{ au_1 + au_2 + au_3 - \frac{a^3}{3!} u_1^3 \dots \right\} + \dots \end{aligned}$$

bu hale getirmiş olduk. Buradan ilk üç polinomu aşağıdaki gibi

$$A_0 = \cos(au_0 + b)$$

$$A_1 = -a \sin(au_0 + b) u_1$$

$$A_2 = -\frac{a^2}{2!} \cos(au_0 + b) u_1^2 - a \sin(au_0 + b) u_2$$

$$A_3 = -a^2 \cos(au_0 + b) u_1 u_2 - a \sin(au_0 + b) u_3 - \frac{a^3}{3!} \sin(au_0 + b) u_1^3$$

⋮

olarak elde edilir. Benzer şekilde diğer trigonometrik denklemlerin de Adomian polinomları gösterilebilir.

Örnek 3.6 Hiperbolik bir denklemin Adomian polinomlarını gösterelim. Örneğimizi

$$F(u) = \sinh(au + b)$$

şeklinde belirleyelim. Yine burada birinci örnek gibi verilen $F(u)$ 'yu bir seri şeklinde tanımlayalım

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$A_0 = F(u_0) = \sinh[(au_0 + b) + a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

$$F(u) = \sinh[(au_0 + b) + a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

sinüs hiperbolik toplam-fark formüllerinden

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

$$F(u) = \sinh(au_0 + b) \cosh[a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

$$+ \cosh(au_0 + b) \sinh[a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $\cosh[a(u_1 + u_2 + \dots)]$ ifadesi ile $\sinh[a(u_1 + u_2 + \dots)]$ ifadelerinin Taylor seri açılımları

$$F(u) = \sinh(au_0 + b) \left\{ 1 + \frac{a^2}{2!} (u_1 + u_2 + \dots)^2 + \frac{a^4}{4!} (u_1 + u_2 + \dots)^4 \dots \right\}$$

$$+ \cosh(au_0 + b) \left\{ a(u_1 + u_2 + \dots) + \frac{a^3}{3!} (u_1 + u_2 + \dots)^3 + \dots \right\}$$

ile gösterebilir. Şimdi birkaç terimi açarak

$$F(u) = \sinh(au_0 + b) \left[1 + \frac{a^2}{2!} (u_1^2 + 2u_1 u_2 + \dots) \dots \right]$$

$$+ \cosh(au_0 + b) \left[a(u_1 + u_2 + \dots) + \frac{a^3}{3!} u_1^3 + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
F(u) = & \sinh(au_0 + b) + a \cosh(au_0 + b) u_1 \\
& + \left(\frac{a^2}{2!} \sinh(au_0 + b) u_1^2 + a \cosh(au_0 + b) u_2 \right) \\
& + (a^2 \sinh(au_0 + b) u_1 u_2 + a \cosh(au_0 + b) u_3 \\
& + \frac{a^3}{3!} \cosh(au_0 + b) u_1^3) + \dots
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan ilk üç polinomu aşağıdaki gibi

$$A_0 = \sinh(au_0 + b)$$

$$A_1 = a \cosh(au_0 + b) u_1$$

$$A_2 = \frac{a^2}{2!} \sinh(au_0 + b) u_1^2 + a \cosh(au_0 + b) u_2$$

$$A_3 = a^2 \sinh(au_0 + b) u_1 u_2 + a \cosh(au_0 + b) u_3 + \frac{a^3}{3!} \cosh(au_0 + b) u_1^3$$

⋮

elde edilir.

Örnek 3.7 Hiperbolik bir denklemin Adomian polinomlarını gösterelim. Örneğimizi

$$F(u) = \cosh(au + b)$$

şeklinde belirleyelim. Yine burada birinci örnek gibi verilen $F(u)$ 'yu bir seri şeklinde yazalım

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$A_0 = F(u_0) = \cosh[(au_0 + b) + a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

$$F(u) = \cosh[(au_0 + b) + a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

cosinüs hiperbolik toplam-fark formüllerinden

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

$$F(u) = \cosh(au_0 + b) \cosh[a(u_1 + u_2 + \dots)] \\ + \sinh(au_0 + b) \sinh[a(u_1 + u_2 + \dots)]$$

yazabilir. Buradan $\cosh[a(u_1 + u_2 + \dots)]$ ifadesi ile $\sinh[a(u_1 + u_2 + \dots)]$ ifadelerinin Taylor seri açılımları

$$F(u) = \cosh(au_0 + b) \left\{ 1 + \frac{a^2}{2!} (u_1 + u_2 + \dots)^2 + \frac{a^4}{4!} (u_1 + u_2 + \dots)^4 \dots \right\} \\ + \sinh(au_0 + b) \left\{ a(u_1 + u_2 + \dots) + \frac{a^3}{3!} (u_1 + u_2 + \dots)^3 + \dots \right\}$$

olarak yazılabilir. Şimdi birkaç terimi açarak

$$F(u) = \cosh(au_0 + b) + a \sinh(au_0 + b) u_1 \\ + \left[\frac{a^2}{2!} \cosh(au_0 + b) u_1^2 + a \sinh(au_0 + b) u_2 \right] \\ + \left(\frac{a^2}{2!} 2u_1 u_2 \cosh(au_0 + b) + a \sinh(au_0 + b) u_3 \right. \\ \left. + \frac{a^3}{3!} \sinh(au_0 + b) u_1^3 \right) + \dots$$

bulunur. Buradan ilk üç polinomu aşağıdaki gibi

$$A_0 = \cosh(au_0 + b)$$

$$A_1 = a \sinh(au_0 + b) u_1$$

$$A_2 = \frac{a^2}{2!} \cosh(au_0 + b) u_1^2 + a \sinh(au_0 + b) u_2$$

$$A_3 = \frac{a^2}{2!} 2u_1 u_2 \cosh(au_0 + b) + a \sinh(au_0 + b) u_3 + \frac{a^3}{3!} \sinh(au_0 + b) u_1^3$$

⋮

elde edilir. Benzer şekilde diğer hiperbolik denklemlerin de Adomian polinomları gösterilebilir.

Örnek 3.8 Doğrusal olmayan bir denklemin Adomian polinomlarını gösterelim. Örneğimizi

$$F(u) = u^2 u_x$$

olarak seçelim. Burada u^2 ve u_x ifadeleri aşağıdaki gibi yazılırsa

$$F(u) = (u_0 + u_1 + u_2 + \dots)^2 (u_{0_x} + u_{1_x} + u_{2_x} + u_{3_x} + \dots)$$

$$F(u) = (u_0^2 + 2u_0 u_1 + u_1^2 + 2u_0 u_2 + u_2^2 + u_1 u_2 + \dots) \cdot (u_{0_x} + u_{1_x} + u_{2_x} + u_{3_x} + \dots)$$

$F(u)$ 'nin son hali aşağıdaki gibi olur.

$$F(u) = u_0^2 u_{0_x} + u_0^2 u_{1_x} + 2u_0 u_1 u_{0_x} + u_0^2 u_{2_x} + 2u_0 u_1 u_{1_x} + u_1^2 u_{0_x} + 2u_0 u_2 u_{0_x} + u_1^2 u_{1_x}$$

Buradan Adomian polinomları

$$A_0 = u_0^2 u_{0_x}$$

$$A_1 = u_0^2 u_{1_x} + 2u_0 u_1 u_{0_x}$$

$$A_2 = u_0^2 u_{2_x} + 2u_0 u_1 u_{1_x} + 2u_0 u_2 u_{0_x} + u_1^2 u_{0_x}$$

$\vdots$

olarak elde edilir.

3.4. Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile Adomian Polinomlarının Hesabı

Bu yöntemle Adomian polinomlarının hesabı bir örnek ile anlatılacaktır.

$N(u) = u^2$ doğrusal olmayan ifadenin Adomian polinomlarının hesaplanacağı düşünölsün. Öncelikle aşağıdaki biçimde bir homotopi oluşturalım:

$$H(G, p) = G - pu^2 = 0 \quad (\text{Eşitlik 25})$$

Burada $p = 0$ alındığında $G = 0$ olur, $p = 1$ alındığında $G = u^2$ olur.

$$u(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n p^n \quad (\text{Eşitlik 26})$$

eşitliğini (Eşitlik 25) denklemin de yerine yazarak

$$H(G, p) = \underbrace{(\sum_{n=0}^{\infty} B_n p^n)}_G - p(\sum_{n=0}^{\infty} u_n p^n)^2 = 0 \quad (\text{Eşitlik 27})$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} p(\sum_{n=0}^{\infty} u_n p^n)^2 &= p(u_0 + u_1 p + u_2 p^2 + \dots)^2 \\ &= p(u_0^2 + 2u_0 u_1 p + u_1^2 p^2 + 2u_0 u_2 p^2) \\ &= u_0^2 p + 2u_0 u_1 p^2 + (u_1^2 + 2u_0 u_2) p^3 \\ (\sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n) - u_0^2 p + 2u_0 u_1 p^2 + (u_1^2 + 2u_0 u_2) p^3 &= 0 \quad (\text{Eşitlik 28}) \end{aligned}$$

yazılabilir. p 'nin aynı kuvvetlerini bir araya toplayıp katsayılarını sıfıra eşitlersek

$$B_0 p^0 = 0 \Rightarrow B_0 = 0$$

$$(B_1 - u_0^2) p = 0 \Rightarrow B_1 - u_0^2 = 0 \Rightarrow B_1 = u_0^2$$

$$(B_2 - 2u_0 u_1) p^2 = 0 \Rightarrow B_2 - 2u_0 u_1 = 0 \Rightarrow B_2 = 2u_0 u_1$$

$$[B_3 - (u_1^2 + 2u_0 u_2)] p^3 = 0 \Rightarrow B_3 - (u_1^2 + 2u_0 u_2) = 0 \Rightarrow B_3 = u_1^2 + 2u_0 u_2$$

bulunur. Buradan

$A_0 = B_1$ olup $A_0 = u_0^2$ $A_1 = B_2$ olup $A_1 = 2u_0 u_1$ $A_2 = B_3$ olup $A_2 = u_1^2 + 2u_0 u_2$ olarak elde edilir.

4. ELİPTİK PROBLEMLERDE ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

1988 yılında Adomian “A Review Of The Decomposition Method İn Applied Mathematics” adlı makalesiyle eliptik tip diferansiyel denklemlerin Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözümlerini gösterdi (Adomian, 1988b).

1993 yılında Gabet “The Decomposition Method And Linear Partial Differential Equations” adlı makalesiyle doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini gösterdi (Gabet 1993).

1994 yılında Adomian “Solving Frontier Problems Of Physics: The Decomposition Method” adlı kitabında fiziğin sınır değer problemlerinin çözümlerini Adomian ayrıştırma yöntemiyle gösterdi (Adomian, 2013).

2002 yılında Olivares “Analytical Approximants Of Time-Dependent Partial Differential Equations With Tau Methods” adlı çalışmasında Tau spektral yöntemleri ve Adomian ayrıştırma yöntemini, bir dikdörtgenin dört tarafında tanımlanan sınır koşulları ile zamana bağlı herhangi bir kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümüne hızlı bir şekilde yaklaşmak için birlikte kullanmıştır (Olivares, 2002).

2003 yılında Olivares “Analytic Solution Of Partial Differential Equations With Adomian's Decomposition” adlı makalesinde Adomian ayrıştırması yöntemi ile kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü gösterdi (Olivares, 2003a).

Yine 2003 yılında Olivares “Analytical Solution Of Nonlinear Partial Differential Equations Of Physics” adlı makalesinde fiziğin doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin analitik çözümü için Adomian ayrıştırma yöntemini kullandı (Olivares, 2003b).

Örnek 4.1 Bir $u(t, x)$ bilinmeyen fonksiyonu aşağıdaki eliptik kısmi diferansiyel denklemi ve şartları sağlasın:

$$u_{tt} + u_{xx} = (-18t - 45) \sin(3x), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0, x) = 5 \sin(3x), \quad u(1, x) = 7 \sin(3x)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = 0$$

Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak $u(t, x)$ bilinmeyen fonksiyonunu bulalım.

Çözüm: Çözüm için öncelikle x, t nin türevlerini operatör olarak gösterelim ve ters operatörü yazalım.

$$L_x(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.), \quad L_t(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.), \quad L_t^{-1}(.) = \int_0^t \int_0^t (.) dt^2$$

Şimdi denklemi operatör cinsinden

$$L_t u + L_x u = (-18t - 45) \sin(3x)$$

şeklinde yazıp denklemin her iki tarafına da L_t^{-1} operatörü uygulanırsa

$$L_t^{-1} L_t u + L_t^{-1} L_x u = L_t^{-1} ((-18t - 45) \sin(3x))$$

yazılabilir. Burada $L_t^{-1} L_t u$ gösteriminin açık ifadesi

$$L_t^{-1} L_t u = u(t, x) - u(0, x) - t u_t(0, x)$$

şeklindedir.

Şimdi $u(t, x) - u(0, x) - t u_t(0, x)$ ifadesini denklemde yerine yazarsak çözmemiz gereken denklem

$$u(t, x) - u(0, x) - t u_t(0, x) = -L_t^{-1} (L_x u + (18t + 45) \sin(3x))$$

şeklinde olur. Burada $t = 1$ için

$$u(1, x) - u(0, x) - u_t(0, x) = -L_t^{-1} (L_x u + (18t + 45) \sin(3x))_{t=1}$$

olup $u(1, x)$, $u(0, x)$ değerlerini yerine yazarsak

$$7 \sin(3x) - 5 \sin(3x) - u_t(0, x) = -L_t^{-1} (L_x u + (18t + 45) \sin(3x))_{t=1}$$

bulunur. Buradan

$$2 \sin(3x) - u_t(0, x) = -L_t^{-1}(L_x u + (18t + 45) \sin(3x))_{t=1}$$

denklemin çözümünü incelemeliyiz. $u_t(0, x)$ 'i

$$u_t(0, x) = 2 \sin(3x) + L_t^{-1}(L_x u + (18t + 45) \sin(3x))_{t=1}$$

şeklinde bulup bunu

$$u(t, x) = u(0, x) + u_t(0, x) - L_t^{-1}(L_x u + (18t + 45) \sin(3x))$$

denkleminde yazarsak

$$u(t, x) = 5 \sin(3x) + t(2 \sin(3x) + L_t^{-1}(L_x u + (18t + 45) \sin(3x))_{t=1}) - L_t^{-1}(L_x u + (18t + 45) \sin(3x))$$

olarak bulunur. Burada u_0

$$u_0 = 5 \sin(3x) + 2t \sin(3x)$$

şeklinde belirleyebiliriz.

$$u_0 = (5 + 2t) \sin(3x)$$

Şimdi u_1 'i bulmak için bulduğumuz u_0 'ı kullanıp denklemde yazarsak

$$u_1 = tL_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))_{t=1} + L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x)) + tL_t^{-1}(L_x u_0)_{t=1} - L_t^{-1}(L_x u_0)$$

şeklinde olur. Burada öncelikle $L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))$ çözümünü ele alalım

$$L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x)) = \sin(3x) \int_0^t \int_0^t (18t + 45) dt$$

$$= \sin(3x) \int_0^t (9t^2 + 45t)_0^t dt$$

$$= \sin(3x) \left(3t^3 + \frac{45t^2}{2} \right)_0^t$$

$$L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x)) = \sin(3x) \left(3t^3 + \frac{45t^2}{2} \right)$$

olarak yazılabilir. Şimdi de $L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))_{t=1}$ çözümünü bulmak için yukarıda bulduğumuz $L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))$ ifadesinde $t = 1$ yazarsak $L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))_{t=1}$ 'in çözümü

$$L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))_{t=1} = \sin(3x) \int_0^1 \int_0^t (18t + 45) dt$$

$$= \sin(3x) \int_0^1 (9t^2 + 45t)_0^t dt$$

$$= \sin(3x) \left(3t^3 + \frac{45t^2}{2} \right)_0^1$$

$$L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))_{t=1} = \frac{51}{2} \sin(3x)$$

şeklinde olur. Şimdi $L_t^{-1}(L_x u_0)$ 'i

$$L_t^{-1}(L_x u_0) = -9 \sin(3x) \int_0^t \int_0^t (2t + 5) dt$$

$$= -9 \sin(3x) \int_0^t (t^2 + 5t)_0^t dt$$

$$= -9 \sin(3x) \left(\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} \right)_0^t$$

$$= -9 \sin(3x) \left(\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} \right)$$

$$L_t^{-1}(L_x u_0) = -9(2t + 5) \sin(3x)$$

şeklinde bulunur. Buradan $L_t^{-1}(L_x u_0)_{t=1}$

$$\begin{aligned} L_t^{-1}(L_x u_0)_{t=1} &= -9 \sin(3x) \int_0^1 \int_0^t (2t + 5) dt \\ &= -9 \sin(3x) \int_0^1 (t^2 + 5t)_0^t dt \\ &= -9 \sin(3x) \left(\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} \right)_0^1 \end{aligned}$$

$$L_t^{-1}(L_x u_0)_{t=1} = -9 \left(\frac{17}{6} \right) \sin(3x)$$

olarak bulunur. Bulunan $L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))_{t=1}$, $L_t^{-1}((18t + 45) \sin(3x))$, $L_t^{-1}(L_x u_0)_{t=1}$, $L_t^{-1}(L_x u_0)$ terimleri u_1 de yazılırsa

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{51t}{2} \sin(3x) - \left(3t^3 + \frac{45t^2}{2} \right) \sin(3x) - 9t \left(\frac{17}{6} \right) \sin(3x) \\ &\quad + 9 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} \right) \sin(3x) \\ u_1 &= \frac{51t}{2} \sin(3x) - 3t^3 \sin(3x) - \frac{45t^2}{2} \sin(3x) - \frac{51t}{2} \sin(3x) + 3t^3 \sin(3x) \\ &\quad + \frac{45t^2}{2} \sin(3x) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan 1. ve 4. terimler, 2. ve 5. terimler, 3. ve 6. terimler birbirini yok edeceklerdir.

Böylece

$$u_1 = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla u_1' den sonraki terimlerde sıfır olacağından çözüm

$$u_0 = (2t + 5) \sin(3x)$$

şeklinde olur. Buradan da verilen problemin çözümü

$$u = u_0 = (2t + 5) \sin(3x)$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2 Bir $u(t, x)$ bilinmeyen fonksiyonu aşağıdaki eliptik kısmi diferansiyel denklemi ve şartları sağlasın:

$$u_{tt} + u_{xx} = (u_x)^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 5,$$

$$u(0, x) = x \quad u_t(0, x) = 0$$

Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak $u(t, x)$ bilinmeyen fonksiyonunu bulalım (Rach vd. 2016).

Çözüm: Çözüm için öncelikle x, t nin türevlerini operatör olarak gösterelim ve ters operatörü yazalım.

$$L_x(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.), \quad L_t(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.), \quad L_t^{-1}(.) = \int_0^t \int_0^t (.) dt^2 .$$

Şimdi denklemi

$$L_t u + L_x u = (u_x)^2 + 1$$

biçiminde yazıp denklemin her iki tarafına L_t^{-1} operatörü uygulanırsa

$$L_t^{-1} L_t u + L_t^{-1} L_x u = L_t^{-1} ((u_x)^2) + L_t^{-1} (1)$$

yazılabilir. Burada $L_t^{-1} L_t u$ gösteriminin açık ifadesi

$$L_t^{-1} L_t u = u(t, x) - u(0, x) - t u_t(0, x)$$

şeklindedir. Şimdi bulunan $L_t^{-1} L_t u = u(t, x) - u(0, x) - t u_t(0, x)$ denklemde yerine yazılırsa çözülmesi gereken denklem

$$u(t, x) - u(0, x) - tu_t(0, x) = L_t^{-1}(-L_x u + (u_x)^2) + L_t^{-1}(1)$$

şeklinde olur. Problemde verilen $u(0, x)$, $tu_t(0, x)$ değerleri yerine yazılırsa

$$u(t, x) - x - 0 = L_t^{-1}(-L_x u + (u_x)^2) + L_t^{-1}(1)$$

$$u(t, x) = L_t^{-1}(-L_x u + (u_x)^2) + L_t^{-1}(1) + x$$

olur. Öncelikle denklemin çözümü için $L_t^{-1}(1)$ değerini hesaplayalım

$$\begin{aligned} L_t^{-1}(1) &= \int_0^t \int_0^t 1 dt^2 \\ &= \int_0^t t dt \\ &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Burada bulunan $L_t^{-1}(1)$ $u(t, x)$ de yazarsak

$$u(t, x) = L_t^{-1}(-L_x u + (u_x)^2) + \frac{t^2}{2} + x$$

haline gelir. Buradan öncelikle $(u_x)^2$ 'nin açılımı

$$\begin{aligned} (u_x)^2 &= (u_{0_x} + u_{1_x} + u_{2_x} + \dots)^2 \\ &= (u_{0_x})^2 + 2u_{0_x}u_{1_x} + 2u_{0_x}u_{2_x} + (u_{1_x})^2 + \dots \end{aligned}$$

yazıldıktan sonra Adomian polinomları aşağıdaki gibi

$$A_0 = (u_{0_x})^2$$

$$A_1 = 2u_{0_x}u_{1_x}$$

$$A_2 = 2u_{0_x}u_{2_x} + (u_{1_x})^2$$

⋮

yazılır. Şimdi

$$u(t, x) = L_t^{-1}(-L_x u + (u_x)^2) + \frac{t^2}{2} + x$$

denkleminde u_0 'ı

$$u_0 = \frac{t^2}{2} + x$$

$$u_{0_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t^2}{2} + x \right)$$

$$u_{0_x} = 1$$

seçerek A_0 Adomian polinomu

$$A_0 = (1)^2$$

$$A_0 = 1$$

olarak bulunur. Şimdi bulunan A_0 Adomian polinomunu kullanmak için denklemi daha genel olarak

$$u_{n+1}(t, x) = L_t^{-1}(-L_x u_n + A_n)$$

şeklinde gösterelim. Şimdi $n = 0$ için u_1 denklemini yazalım

$$u_1 = L_t^{-1}(-L_x u_0 + A_0).$$

Burada u_1 'i bulmak için önce $-L_x u_0$ 'ı bulalım.

$$-L_x u_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t^2}{2} + x \right)$$

$$-L_x u_0 = \frac{\partial}{\partial x} (1)$$

$$-L_x u_0 = 0$$

olarak bulunur. Şimdi $-L_x u_0$ ve daha önce bulunan A_0

$$u_1 = L_t^{-1}(-L_x u_0 + A_0)$$

denkleminde yerine yazıldığında u_1 fonksiyonu

$$u_1 = L_t^{-1}(1)$$

$$= \int_0^t \int_0^t 1 dt^2$$

$$= \int_0^t t dt$$

$$u_1 = \frac{t^2}{2}$$

olarak bulunur. Buradan

$$u_{1_x} = 0$$

olduğu açıktır. Burada bulunan u_1 'den A_1 Adomian polinomu

$$A_1 = 2u_{0_x} u_{1_x}$$

$$A_1 = 2.1.0$$

$$A_1 = 0$$

bulunur. Şimdi u_2 'yi $-L_x u_1$ ve A_1 ile aşağıdaki gibi

$$u_2 = L_t^{-1}(-L_x u_1 + A_1)$$

yazalım. A_1 yukarıda hesapladık şimdi $-L_x u_1$ hesaplayıp değerleri u_2 de yazalım.

$$-L_x u_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t^2}{2} \right)$$

$$-L_x u_1 = 0$$

olarak bulunur. Buradan

$$u_2 = L_t^{-1}(0)$$

$$u_2 = 0$$

olarak bulunur. $u_2 = 0$ olmasından dolayı A_2 polinomuda $A_2 = 0$ olur. Bundan sonraki terimler 0 eşit olur. $u(t, x)$ çözümü

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0 + u_1 \\ &= \frac{t^2}{2} + x + \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$$u(t, x) = t^2 + x$$

olarak bulunur.

5. ELİPTİK TERS PROBLEMLERDE ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ

5.1. Ters Problemler

Ters problemler teorisi, 1900'lü yıllardan başlayarak günümüze gelen ve her geçen gün bilimde ve teknolojide popülerliği artar bir hale gelmiştir. Ters problemler direkt problemlerin karşıtıdır. Ters problemlerin birçok alanda uygulamaları vardır. Bunlar fizik, tıp, astronomi, kimya gibi matematiğin kullanıldığı birçok alanda uygulamaları görülür.

Ters problemleri önemli kılan sebep, çalışılan bilim alanında meydana gelebilecek etkenlerdir. Zira bu problemlerin çözümleri incelenen ortama ait yoğunluk, dalga yayılım hızı, elastisite parametreleri, iletkenlik, elektriksel ve manyetik geçirgenlik gibi önemli fiziksel özellikler hakkında bilgi vermektedir.

Direkt problemler, ortada olan bir problemin sebepten başlayarak sonucun bulunması ile problem çözülürken ters problemlerde hali hazırda bulunan sonuçlardan sebebin belirlenmesi problemi olarak söylenebilir. Örneğin, grip olan bir hastada ortaya çıkabilecek belirtilerin neler olduğunun saptanması bir direkt problemdir, diğer taraftan yüksek ateş, burun akıntısı ve halsizlik şikayetleri olan bir kişinin hastalığının teşhisi ise bir ters problemdir. Bu belirtiler farklı sağlık sorunlarından kaynaklanabileceğinden böyle bir problemin çözümünün tek olmadığı açıktır (Gölgeleyen ve Kaytmaz, 2016).

Matematiksel fizikte direkt problem; denklem, bölge ve koşullar verildiğinde denklemin ve koşulları sağlayan çözümün bulunması problemi olarak tanımlanır. Burada amaç, belli bir anda bölgenin belli bir noktasındaki fiziksel alanı veya süreci tanımlayan (elektromanyetik, akustik, sismik vb.) bir fonksiyonun bulunmasıdır. Ayrıca bu problemlerde ortamın özelliklerinin, fiziksel sürecin başlangıç anındaki durumunun ve/veya sınırdaki sağlanan özelliklerin bilindiği kabul edilir. Diğer yandan sıklıkla ortamın özelliklerinin bilinmediği durumlarla da karşılaşmaktadır. Bu da direkt problemin çözümü hakkında verilen ek bilgi yardımıyla ilgili denklemin katsayılarının belirlenmesi ters problemi olarak karşımıza çıkmaktadır (Amirov, 2014).

Literatürde ters problemlerle ilgili çok sayıda çalışma vardır. (Isakov, 2006), (Samarskii ve Vabishchevich, 2007) ile (Kabanikhin, 2011) bu çalışmalara örnek olarak verilebilir.

Eliptik denklemler için farklı üst belirli sınır değer problemler ve onların yaklaşımları (Orlovsky, 2013), (Orlovsky ve Piskarev, 2013), (Ashyralyev ve Dedetürk, 2013), makalelerinde incelenmiştir.

(Ashyralyev ve Dedetürk, 2013) makalesinde bir H Hilbert uzayında bilinmeyen $p \in H$ elemanı ve u fonksiyonu için

$$\begin{cases} -u_{tt}(t) + Au(t) = f(t) + p, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, u(T) = \psi, & u(\lambda) = \zeta, \lambda \in (0, T) \end{cases}$$

formundaki Dirichlet tipi ters eliptik problemin çözümü için kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir. Orlovsky, Banach uzayında bu problem ile ilgili varlık teklik teoremini (Orlovskii, 2008) makalesinde vermiştir.

Eliptik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemleri (Ashyralyev ve Öztürk, 2012) ve (Ashyralyev ve Tetikoğlu, 2012) makalelerinde çalışılmıştır. (Ashyralyev ve Akyuz, 2016), (Ashyralyev ve Akyuz, 2018) çalışmalarında Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri araştırılmıştır.

5.2. Üçüncü Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler

x, y bağımsız değişkenlere bağlı $b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, e_0$ fonksiyonları verilsin.

$$L(u) = \sum_{i=0}^3 b_i \frac{\partial^3 u}{(\partial x)^{3-i} (\partial y)^i} + \sum_{i=0}^2 c_i \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^{2-i} (\partial y)^i} + d_0 \frac{\partial u}{\partial x} + d_1 \frac{\partial u}{\partial y} + e_0 u \quad (\text{Eşitlik 29})$$

operatörü tanımlansın. Eğer $(x, y) \in G$ için

$$b_0 p^3 + b_1 p^2 q + b_2 p q^2 + b_3 q^3 = 0 \quad (\text{Eşitlik 30})$$

denklemini bir tek tekrarsız $\frac{p}{q}$ reel oranı belirlerse, üçüncü mertebeden doğrusal $L(u) = 0$ kısmi diferansiyel denkleminin G kümesinde kompozittir denir. G kümesinde (Eşitlik 29) denklemini kompozit bir denklem ise (Eşitlik 29) denkleminin çözümü var ve tektir (Davis, 1952).

5.3. Eliptik ters problemlere Adomian Ayırıştırma Yönteminin Uygulanması

Bu kısımda eliptik ters problemlerin çözümünde Adomian ayırıştırma yönteminin nasıl uygulanabileceği üzerine bir örnek verilecektir.

Örnek 5.1 Bir $u(t, x)$ bilinmeyen fonksiyonu ve $p(x)$ kaynak fonksiyonu aşağıdaki eliptik kısmi diferansiyel denklemi ve şartları sağlasınlar:

$$u_{tt} + u_{xx} = 24xt + p(x), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\begin{aligned} u(0, x) &= 6x^3 + 12x + 18, & u(t, -1) &= 0 \\ u(1, x) &= 10x^3 + 20x + 30, & u(t, 1) &= 24t + 36 \\ u(2, x) &= 14x^3 + 28x + 42 \end{aligned}$$

Adomian ayırıştırma yöntemi kullanılarak $u(t, x)$ bilinmeyen fonksiyonunu ve $p(x)$ kaynak fonksiyonunu bulalım.

Çözüm: İlk önce verilen denklemi t ye göre 1 kere türevini alalım.

$$u_{ttt} + u_{xxt} = 24x.$$

Burada

$$L_t(.) = \frac{\partial}{\partial t^3}(.), \quad L_t^{-1}(.) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t (.) dt^3$$

şeklinde yazılırsa denklem

$$L_t u + u_{xxt} = 24x$$

olarak ifade edilebilir. Denklemin her iki tarafına da L_t^{-1} operatörü uygulanırsa

$$L_t^{-1} L_t u + L_t^{-1}(u_{xxt}) = L_t^{-1}(24x)$$

yazılabilir. Öncelikle $L_t^{-1}(24x)$ terimini hesaplayalım

$$L_t^{-1}(24x) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t (24x) dt^3$$

$$= \int_0^t \int_0^t 24x(t)_0^t dt^2$$

$$= \int_0^t \int_0^t 24xt dt^2$$

$$= \int_0^t 24x \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^t dt$$

$$= \int_0^t 12xt^2 dt$$

$$= 12x \left(\frac{t^3}{3} \right)_0^t$$

$$L_t^{-1}(24x) = 4xt^3.$$

Bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazıldığında

$$L_t^{-1}L_t u = -L_t^{-1}(u_{xxt}) + 4xt^3$$

olduğu görülür. Şimdi $L_t^{-1}L_t u$ yerine

$$L_t^{-1}L_t u = u(t, x) - u(0, x) - tu_t(0, x) - \frac{t^2}{2}u_{tt}(0, x)$$

açılımını yazarsak

$$u(t, x) - u(0, x) - tu_t(0, x) - \frac{t^2}{2}u_{tt}(0, x) = -L_t^{-1}(u_{xxt}) + 4xt^3$$

olur. Şimdi $u(0, x) = 6x^3 + 12x + 18$ ifadesini denklemde yerine yazalım.

$$u(t, x) - (6x^3 + 12x + 18) - tu_t(0, x) - \frac{t^2}{2}u_{tt}(0, x) = -L_t^{-1}(u_{xxt}) + 4xt^3.$$

Buradan

$$u(t, x) - tu_t(0, x) - \frac{t^2}{2}u_{tt}(0, x) = -L_t^{-1}(u_{xxt}) + 4xt^3 + (6x^3 + 12x + 18)$$

şeklinde yazılır. Daha sonra $t = 1$ ve $t = 2$ için şartları yazarsak

$$\begin{cases} u(1, t) - u_t(0, x) - \frac{1}{2}u_{tt}(0, x) = & -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} + 4x(t^3)_{t=1} \\ & + (6x^3 + 12x + 18) \\ u(2, t) - 2u_t(0, x) - 2u_{tt}(0, x) = & -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} + 4x(t^3)_{t=2} \\ & + (6x^3 + 12x + 18) \end{cases}$$

gibi iki denklem elde edilir. Buradan $4xt^3$ te t yerine 1 ve 2 yazıp $u(1, t)$ ve $u(2, t)$ şartlarını yazarsak

$$\begin{cases} 10x^3 + 20x + 30 - u_t(0, x) - \frac{1}{2}u_{tt}(0, x) = & -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} \\ & + 6x^3 + 16x + 18 \\ 14x^3 + 28x + 42 - 2u_t(0, x) - 2u_{tt}(0, x) = & -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} \\ & + 6x^3 + 44x + 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u_t(0, x) - \frac{1}{2}u_{tt}(0, x) = & -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} + 6x^3 + 16x + 18 \\ & -(10x^3 + 20x + 30) \\ -2u_t(0, x) - 2u_{tt}(0, x) = & -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} + 6x^3 + 44x + 18 \\ & -(14x^3 + 28x + 42) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u_t(0, x) - \frac{1}{2}u_{tt}(0, x) = & -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} - 4x^3 - 4x - 12 \\ -2u_t(0, x) - 2u_{tt}(0, x) = & -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} - 8x^3 + 16x - 24 \end{cases}$$

olarak 2 denklem bulunur. Şimdi denklemlerdeki $u_t(0, x)$, $u_{tt}(0, x)$ terimlerini bulmak için yok etme yöntemini kullanalım.

Öncelikle 1. Denklemini (-2) ile çarpalım

$$2u_t(0, x) + u_{tt}(0, x) = 2L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} + 8x^3 + 8x + 24$$

$$-2u_t(0, x) - 2u_{tt}(0, x) = -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} - 8x^3 + 16x - 24$$

çarpma işleminden sonra taraf tarafa toplarsak $u_{tt}(0, x)$

$$u_{tt}(0, x) = -2L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} + L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} - 24x$$

olarak bulunur. Daha sonra 1. Denklemini (-4) ile çarpalım.

$$4u_t(0, x) + 2u_{tt}(0, x) = 4L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} + 16x^3 + 16x + 48$$

$$-2u_t(0, x) - 2u_{tt}(0, x) = -L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} - 8x^3 + 16x - 24$$

çarpma işleminden sonra taraf tarafa toplarsak $u_t(0, x)$ i

$$u_t(0, x) = 2L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} - \frac{1}{2}L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} + 4x^3 + 16x + 12$$

olarak buluruz. Şimdi bulduğumuz $u_t(0, x)$ ve $u_{tt}(0, x)$ ifadelerini

$$u(t, x) - u(0, x) - tu_t(0, x) - \frac{t^2}{2}u_{tt}(0, x) = -L_t^{-1}(u_{xxt}) + 4xt^3$$

denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u(t, x) &= 6x^3 + 12x + 18 \\ &+ t \left[2L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} - \frac{1}{2}L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} + 4x^3 + 16x + 12 \right] \\ &+ \frac{t^2}{2} [-2L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} + L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} - 24x] - L_t^{-1}(u_{xxt}) + 4xt^3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u(t, x) &= 6x^3 + 12x + 18 + 4tx^3 + 16tx + 12t - 12t^2x + 4t^3x \\ &+ t \left[2L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} - \frac{1}{2}L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2} \right] \\ &+ \frac{t^2}{2} [-2L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=1} + L_t^{-1}(u_{xxt})_{t=2}] - L_t^{-1}(u_{xxt}) \end{aligned}$$

buluruz. Buradan

$$u_0 = 6x^3 + 12x + 18 + 16tx + 12t - 12t^2x + 4t^3x$$

seçersek

$$u_{0_{xxt}} = 0$$

olur. Böylece

$$L_t^{-1}(u_{0_{xxt}}) = 0, \quad L_t^{-1}(u_{0_{xxt}})_{t=1} = 0, \quad L_t^{-1}(u_{0_{xxt}})_{t=2} = 0$$

olarak elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} u_1 &= 4tx^3 + t \left[2L_t^{-1}(u_{0_{xxt}})_{t=1} - \frac{1}{2}L_t^{-1}(u_{0_{xxt}})_{t=2} \right] \\ &\quad + \frac{t^2}{2} \left[-2L_t^{-1}(u_{0_{xxt}})_{t=1} + L_t^{-1}(u_{0_{xxt}})_{t=2} \right] - L_t^{-1}(u_{0_{xxt}}) \end{aligned}$$

$$u_1 = 4tx^3 + t \left[2L_t^{-1}0 - \frac{1}{2}L_t^{-1}0 \right] + \frac{t^2}{2} \left[-2L_t^{-1}0 + L_t^{-1}0 \right] - L_t^{-1}0$$

$$u_1 = 4tx^3$$

olarak bulunur. Buradan

$$u_{1_{xxt}} = 24x$$

olur. Buradan

$$L_t^{-1}(u_{1_{xxt}}) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t (24x) dt^3$$

$$= 24x \int_0^t \int_0^t (t)_0^t dt^2$$

$$= 24x \int_0^t \int_0^t t dt^2$$

$$= 24x \int_0^t \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^t dt^2$$

$$= 24x \int_0^t \frac{t^2}{2} dt$$

$$= 24x \left(\frac{t^3}{6} \right)_0^t$$

$$L_t^{-1}(u_{1_{xxt}}) = 4xt^3$$

bulunur. Ayrıca

$$L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})_{t=1} = 4x, \quad L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})_{t=2} = 32x$$

olarak belirlenir. u_2 ise

$$u_2 = t \left[2L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})_{t=1} - \frac{1}{2}L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})_{t=2} \right] \\ + \frac{t^2}{2} \left[-2L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})_{t=1} + L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})_{t=2} \right] - L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})$$

olarak hesaplanır. Yukarıda belirlenen $L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})$, $L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})_{t=1}$ ve $L_t^{-1}(u_{1_{xxt}})_{t=2}$ ifadeler denklemde yazıldığında

$$u_2 = t \left[2.4x - \frac{1}{2} \cdot 32x \right] + \frac{t^2}{2} [-2.4x + 32x] - 4xt^3 \\ u_2 = -8xt + 12xt^2 - 4xt^3$$

olarak bulunur. Buradan

$$u_{2_{xxt}} = 0$$

olduğu görülür ve

$$L_t^{-1}(u_{2_{xxt}}) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t 0 \, dt^3$$

$$L_t^{-1}(u_{2_{xxt}}) = 0$$

bulunur. Böylece

$$L_t^{-1}(u_{2_{xxt}})_{t=1} = 0, \quad L_t^{-1}(u_{2_{xxt}})_{t=2} = 0$$

elde edilir. Bu da $u_3 = u_4 = \dots = u_n = 0$ olacağını gösterir ve u çözümü

$$u = u_0 + u_1 + u_2$$

$$u = 6x^3 + 12x + 18 + 16tx + 12t - 12t^2x + 4t^3x + 4tx^3 \\ - 8tx + 12t^2x - 4t^3x$$

$$u = 6x^3 + 12x + 18 + 12t + 8tx + 4tx^3$$

$$u = (x^3 + 2x + 3)(4t + 6)$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi $p(x)$ çözümü incelerse

$$u_{tt} + u_{xx} = 24xt + p(x)$$

$$p(x) = u_{tt} + u_{xx} - 24xt$$

$$u_{tt} = 0, \quad u_{xx} = 6x(4t + 6)$$

$$p(x) = 24xt + 36x - 24xt$$

$$p(x) = 36x$$

olarak bulunur. O halde çözüm

$$(u(t, x), p(x)) = ((x^3 + 2x + 3)(4t + 6), 36x)$$

olarak elde edilir.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında giriş kısmında Adomian yöntemiyle ilgili yapılan bazı çalışmalar verilmiştir. Giriş kısmının altında eliptik kısmi diferansiyel denklem, sınır koşulları, iyi tanımlı problemin nasıl oluşturulduğu ve Taylor serileri verilmiştir. Daha sonra Adomian ayrıştırma yöntemi tanıtılmıştır. Sonrasında sırasıyla Adomian polinomlarının hesaplanması, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemi çözümleri, Adomian ayrıştırma yöntemi ile ters eliptik kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümleri incelenmiştir.

İkinci bölümde Adomian ayrıştırma yöntemi gösterilmiştir. Verilen bilgilerden sonra Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak tek değişkenli Cauchy sınır koşullu bir eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümü gösterilmiştir.

Üçüncü bölüm altında şu çalışmalar verilmiştir;

1) Adomian yöntemiyle, Adomian polinomlarının nasıl hesaplandığı iki örnekle gösterilmiştir.

2) Parametre kullanılarak Adomian polinomlarının hesaplanmasının nasıl yapılacağı gösterilmiştir.

3) Wazwaz'ın tanıttığı doğrusal olmayan ifadelerin (örneğin: üstel, trigonometrik, hiperbolik ifadelerin) Adomian polinomlarının hesaplanması verilmiştir. Ayrıca verilen eliptik kısmi diferansiyel denklemin Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözümünde Taylor seri açılımı kullanılması gösterilmiştir.

4) Homotopi pertürbasyon yöntemiyle Adomian polinomlarının hesaplanması verilmiş ve bir örnek ile gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde eliptik kısmi diferansiyel denklem problemlerinde Adomian ayrıştırma yönteminin uygulamaları hakkında yapılan çalışmalar verilmiştir. Yine bu bölümde iki tane eliptik kısmi diferansiyel denklemin Adomian ayrıştırma yöntemiyle çözümü verilmiştir. Birinci örnekte doğrusal ve Dirichlet şartlı bir eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümü verilmiştir. İkinci örnekte ise doğrusal olmayan ve Karışık sınır koşulu bir eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümü verilmiştir.

Son bölümde ise Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, ters eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümü incelenmiştir. Burada ters eliptik problemin çözümü verilmeden önce üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü açıklanmıştır. Verilen yardımcı bilgilerle ikinci mertebeden doğrusal ve homojen olmayan bir eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümü için verilen denklem üçüncü

mertebeğe çıkarılıp özölmüştür. Yapılan bu işlemler farklı sınır koşullarında farklı eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için katkı sağlayacaktır.

Genel olarak Adomian ayrıştırma yöntemi ikinci, üçüncü mertebeden doğrusal veya doğrusal olmayan, homojen veya homojen olmayan eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin veya ters eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin özümleğinde kullanılabilir olduğu gösterilmiştir.



KAYNAKÇA

- Adil, M. (2009) Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü. 10 Mart, 2022 tarihinde https://web.itu.edu.tr/yukselen/HM504/HM504_Index.html adresinden erişildi.
- Adomian, G. (1984). Convergent series solution of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 11(2), 225-230.
- Adomian, G. (1988a). *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics*. Heidelberg; Berlin, Almanya: Springer Science and Business Media, 224.
- Adomian, G. (1988b). A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135(2), 501-544.
- Adomian, G. (2013). *Solving Frontier Problems of Physics: the Decomposition Method*. Heidelberg; Berlin, Almanya: Springer Science and Business Media, 367.
- Adomian, G. (2014). *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. Cambridge, Massachusetts; London, England: Academic press, 304.
- Adomian, G. (2015). *Applied Stochastic Processes*. Cambridge, Massachusetts; London, England: Academic press Academic press, 304.
- Adomian, G. ve Rach, R. (1985a). On the solution of algebraic equations by the decomposition method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 105(1), 141-166.
- Adomian, G. ve Rach, R. (1985b). Application of the decomposition method to inversion of matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 108(2), 409-421.
- Adomian, G. ve Rach, R. (1986). On linear and nonlinear integro-differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 113(1), 199-201.
- Adomian, G., Rach, R. ve Elrod, M. (1988). The decomposition method applied to stiff systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 30(3), 271-276.
- Ali, A., Gul, Z., Khan, W. A., Ahmad, S. ve Zeb, S. (2021). Investigation of fractional order sine-Gordon equation using Laplace Adomian decomposition method. *Fractals*, 29(05), 2150121.
- Altun, S. (2004). *Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde iki boyutlu diferansiyel dönüşüm ve adomian ayrıştırma metotlarının karşılaştırması. Yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.*
- Amirov, A. K. (2014). *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*. Genthiner; Berlin, Almanya; De Gruyter, 201.

- Ashyralyev, C. ve Dedetürk, M. (2013). A finite difference method for the inverse elliptic problem with the Dirichlet condition. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 1(2), 132-155.
- Ashyralyev, C. ve Akyüz, G. (2016). Stability estimates for solution of Bitsadze-Samarskii type inverse elliptic problem with Dirichlet conditions. *AIP Conference Proceedings* 1759(1), s. 020129.
- Ashyralyev, C. ve Akyuz, G. (2018). Finite difference method for Bitsadze-Samarskii type overdetermined elliptic problem with Dirichlet conditions. *Filomat*, 32(3), 859-872.
- Ashyralyev, A. ve Oztürk, E. (2012). On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-posedness, *Applied Mathematics and Computation*, 219, 3, 1093-1107.
- Ashyralyev, A. ve Tetikoglu, O. (2012). FS: FDM for elliptic equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet conditions. *Abstract Applied Analyss*, 1-22.
- Bellman, N. D. ve Adomian, G. (1984). *Partial Differential Equations: New Methods for Their Treatment and Solution*. Heidelberg; Berlin, Almanya: Springer Science and Business Media, 290.
- Bellomo, N. ve Sarafyan, D. (1987). On Adomian's decomposition method and some comparisons with Picard's iterative scheme. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 123(2), 389-400.
- Biazar, J., Babolian, E., Kember, G., Nouri, A. ve Islam, R. (2003). An alternate algorithm for computing Adomian polynomials in special cases. *Applied Mathematics and Computation*, 138(2-3), 523-529.
- Cherruault, Y. (1989). Convergence of Adomian's method. *Kybernetes*, 18(2), 31-38.
- Cherruault, Y., Adomian, G., Abbaoui, K. ve Rach, R. (1995). Further remarks on convergence of decomposition method. *International Journal of Bio-Medical Computing*, 38(1), 89-93.
- Davis, R. B. (1952). A boundary value problem for third-order linear partial differential equations of composite type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(5), 751-756.
- Deeba, E. Y. ve Khuri, S. A. (1996). A decomposition method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation. *Journal of Computational Physics*, 124(2), 442-448.
- Deeba, E. Y. ve Khuri, S. A. (1996). The decomposition method applied to Chandrasekhar H-equation. *Applied Mathematics and Computation*, 77(1), 67-78.

- Duan, J. S., Rach, R., Baleanu, D. ve Wazwaz, A. M. (2012). A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations. *Communications in Fractional Calculus*, 3(2), 73-99.
- Ercan, A. (2020). Adomian decomposition method for solving nonlinear fractional sturm-liouville problem. *Cumhuriyet Science Journal*, 41(1), 169-175.
- Gabet, L. (1993). The decomposition method and linear partial differential equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(6), 11-22.
- García-Olivares, A. (2002). Analytical approximants of time-dependent partial differential equations with tau methods. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61(1), 35-45.
- García-Olivares, A. (2003a). Analytic solution of partial differential equations with Adomian's decomposition. *Kybernetes*, 32(3), 354-368.
- García-Olivares, A. (2003b). Analytical solution of nonlinear partial differential equations of physics. *Kybernetes*, 32(4), 548-560.
- Gölgeleyen, İ. ve Kaytmaz, Ö. (2016). Ters ve Kötü Konulmuş Problemler Teorisinin Bilim ve Teknolojideki Bazı Uygulamaları. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1), 230-237.
- Isakov, V. (2006). *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Heidelberg; Berlin, Almanya: Springer, 283.
- Kabanikhin, S. I. (2011). *Inverse and Ill-Posed problems: Theory and Applications*. Genthiner; Berlin, Almanya; De Gruyter, 456.
- Kaya, D. ve İnan, I. E. (2005). A convergence analysis of the ADM and an application. *Applied Mathematics and Computation*, 161(3), 1015-1025.
- Kaya, D., Bulut, H. ve İnç, M. (2000). On the solution of oscillatory problems by the decomposition method. *Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 12(2), 229-234.
- Küçük, G. D., Yiğider, M. ve Çelik, E. (2014). Numerical solutions of fractional partial differential-algebraic equation by Adomian decomposition method and Multivariate Pade approximation. *British Journal of Applied Science and Technology*, 4(25), 3653-3664.
- Ngarhasta, N. Some, B., Abbaoui, K. ve Cherruault, Y. (2002). New numerical study of adomian method applied to a diffusion model. *Kybernetes*, 31(1), 61-75.
- Noeiaghdam, S., Sidorov, D., Wazwaz, A. M., Sidorov, N. ve Sizikov, V. (2021). The Numerical Validation of the Adomian Decomposition Method for Solving Volterra

- Integral Equation with Discontinuous Kernels Using the CESTAC Method. *Mathematics*, 9(3), 260.
- Orlovskii, D. G. (2008). Inverse Dirichlet problem for an equation of elliptic type. *Differential Equations*, 44(1), 124-134.
- Orlovsky, D. G. (2013). Inverse problem for elliptic equation in a Banach space with Bitsadze–Samarsky boundary value conditions. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21(1), 141-157.
- Orlovskii, D. G. ve Piskarev, S. I. (2013). Approximation of the Bitsadze-Samarskii inverse problem for an elliptic equation with the Dirichlet conditions. *Differential Equations*, 49(7), 895-907.
- Rach, R., Duan, J. S. ve Wazwaz, A. M. (2016). Solution of higherorder, multipoint, nonlinear boundary value problems with high-order robin-type boundary conditions by the adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 10(4), 1231-1242.
- Rashid, S., Kubra, K. T. ve Guirao, J. L. G. (2021). Construction of an approximate analytical solution for multi-dimensional fractional Zakharov–Kuznetsov equation via Aboodh Adomian decomposition method. *Symmetry*, 13(8), 1542.
- Samarskii, A. A. ve Vabishchevich, P.N. (2007). *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics, Inverse and Ill-posed problems series*. Genthiner; Berlin, Almanya; De Gruyter 438.
- Şahin, İ. (2015). *Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin birleştirilmiş diferensiyel transform ve Adomian yöntemiyle çözümü. Yüksek lisans tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Rize.*
- Taylor seri gösterimleri Ankara Üniversitesi Açık Ders Malzemeleri, erişimi 15 Mart, 2022 <https://acikders.ankara.edu.tr/mod/resource/view.php?id=1044> adresinden erişildi.
- Türkyılmazoğlu, M. (2021). Nonlinear problems via a convergence accelerated decomposition method of Adomian. *Computer Modeling In Engineering and Sciences*, 127(1), 1-22.
- Wazwaz, A. M. (1998). A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions. *Applied Mathematics and Computation*, 97(1), 37-44.
- Wazwaz, A. M. (1998). A reliable technique for solving the wave equation in an infinite one-dimensional medium. *Applied Mathematics and Computation*, 92(1), 1-7.

- Wazwaz, A. M. (1999). The modified decomposition method and Padé approximants for solving the Thomas–Fermi equation. *Applied Mathematics and Computation*, 105(1), 11-19.
- Wazwaz, A. M. (2001). Construction of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method. *Chaos, Solitons ve Fractals*, 12(8), 1549-1556.
- Wazwaz, A. M. ve El-Sayed, S. M. (2001). A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators. *Applied Mathematics and computation*, 122(3), 393-405.
- Well-Posed Problems, University Of Nebraska–Lincoln College of Arts ve Sciences Department Of Mathematics, erişimi 03 Şubat, 2022, <https://www.math.unl.edu/~scohn1/8423/wellposed.pdf> adresinden erişildi.
- Zhu, Y., Chang, Q. ve Wu, S. (2005). A new algorithm for calculating Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 402-416.

ÖZGEÇMİŞ

Hamit Biçer ilk ve orta öğretiminin Ağrı Patnos'ta 75. Yıl İlkokulunda, Cengiz Çıkrık İlkokulunda ve İstanbul Esenyurt Sonnur Yalnız İlkokulu olmak üzere üç okulda okudu. Lise eğitimini Ali Kul çok programlı lisesi, Esenyurt Anadolu lisesi ve Açık öğretim lisesinde okudu. 2014-2018 yılları arası Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümünü birincilikle bitirdi. 2019 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında tezli yüksek lisans programına yerleşti.

