

84009

AFİN İMMERSONLAR

Atakan Tuğkan YAKUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK)

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TC. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI
İBCE/ANKARA**

Şubat 1999

ANKARA

Atakan Tuğkan YAKUT tarafından hazırlanan AFİN IMMERSIONLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onay larım.

Doç. Dr. Baki KARLIĞA
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye : Prof. Dr. Erdoğan ESİN

Üye : Doç. Dr. Baki KARLIĞA

Üye : _____

Üye : _____

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	iv
SİMGELER	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER.....	5
2. 1 Grup Etkisi.....	5
2. 2. Güvenilir(faithful) Etki	5
2. 3. Geçişli(transitive) Etki.....	5
2. 4. Basit Geçişli Etki	6
2. 5. Afin Uzay.....	6
2. 6. Afin Çatı	7
2. 7. Afin Koordinat Sistemi.....	7
2. 8. Afin Koordinat Sistemlerinin Değişimi.....	8
2. 9. Afin Dönüşüm	8
2. 10. Hacim Elementi	9
2. 11. Eşafin(equiafin) Dönüşüm	9
2. 12. Afin Konneksiyon.....	9
2. 13. Eşafin(equiafin) Yapı.....	10
2. 14. Lokal Eşafin(equiafin) Konneksiyon.....	10
2. 15. Lokal Simetrik Afin Konneksiyon.....	10
2. 16. Düzlemsel(flat) Konneksiyon	10
2. 17. Bir Dönüşüm Boyunca Vektör Alanı	11
2. 18. Transversal Vektör Alanı.....	11

2. 19. Tensörel Türev	11
2. 20. Torsiyon Tensör Alanı	12
2. 21. Eğrilik Tensör Alanı	12
2. 22. Ricci Tensör	12
2. 23. Bianchi Özdeşlikleri	13
2. 24. Jeodezik Eğri	13
2. 25. ∇ - Jeodezik Eğri	14
2. 26. Bozulmamış (Non-degenerate) Metrik	14
2. 27. İmmersion(Daldırma)	14
3.1. Afin İmmersionlar için Tanım ve Teoremler.....	15
3.1.1.Tanım (Bir Dönüşüm Boyunca Dağılım)	15
3.1.2. Tanım (Afin İmmersion).....	15
3.1.3. Tanım (Gauss Denklemi).....	16
3.1.4. Tanım (İndirgenmiş konneksiyon)	20
3.1.5. Tanım (Afin Temel Form).....	21
3.1.6. Tanım (Total Jeodezik İmmersion)	22
3.1.7. Tanım (Weingarten Dönüşümü).....	26
3.1.8. Tanım (İndirgenmiş Hacim Elementi).....	34
3.1.9. Tanım (Projektif Denk Konneksiyonlar).....	41
3.1.10. Tanım (Lokal Eşafin(equiafin) Projektif Düzlemsel Konneksiyon)	41
3.1.11. Tanım (Weyl Projektif Eğrilik Tensörü)	42
3.1.12. Tanım (Afin İmmersion üzerindeki Weyl Projektif Eğrilik Tensörü).....	42
3.1.13. Tanım (Codazzi Denklemi)	46
3.1.14. Tanım (Kübik Form).....	46
4. BLASCHKE İMMERSİYONLARI	57

4.1. Tanım ve Teoremler	57
4.1.1. Tanım (Bozulmamış İmmersion).....	57
4.1.2. Tanım.....	57
4.1.3. Tanım (Blaschke Normal Alan).....	64
4.1.4. Tanım (Blaschke Yapısı)	64
4.1.5. Tanım (Blaschke Hiperyüzeyi).....	64
4.1.6. Tanım (Blaschke konneksiyonu).....	65
4.1.7. Tanım (Özlü(Proper)- Özlü olmayan(İmproper) Afın Hiperküre)	67
4.1.8. Tanım (Afin Gauss-Kronecker Eğriliği- Afin Ortalama Eğriliği).	73
4.2. Afın Normal Alanın Bulunması.....	74
4.3. ÖRNEKLER	75
4.3.1. Eliptik paraboloid.....	75
4.3.2. Hiperbolik paraboloid.....	78
4.3.3. Bir fonksiyonun grafiği.....	79
5. AFİN HİPERYÜZEY İMMERSİYONLARIN TRANSVERSAL SİMETRİĞİ	82
5. 1. Hiperyüzey İmmersionunun Transversal Simetriği.....	82
5.1.1. Tanım (Afin Hiperyüzey İmmersionunun Transversal Simetriği)	83
5.2.ÖRNEKLER.....	109
5.2.1. İzometrik olarak immerge edilmiş(daldırılmış) hiperyüzey	109
5.2.2. Afın Silindir	110
5.2.3. Grafik İmmersion.....	114
5.2.4. Merkezil(Centro)afın Hiperyüzey	116
5.2.5. Konormal İmmersion.....	118
6. SONUÇ.....	124
KAYNAKLAR.....	125
ÖZGEÇMİŞ.....	127

AFİN İMMERSIONLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Atakan Tuğkan YAKUT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 1999

ÖZET

Bu çalışmada afin immersionların genel özellikleri verildikten sonra bunların transversal simetrik immersionları incelendi.

Bilim Kodu : 403.0201

Anahtar Kelimeler : Konneksiyon, hacım elementi, afin immersion,
transversal simetri

Sayfa Adedi : 127

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Baki KARLIĞA

AFFINE IMMERSIONS

(M. Sc. Thesis)

Atakan Tuğkan YAKUT

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

FEBRUARY, 1999

ABSTRACT

In this study, the transversally symmetric immersions of affine immersions were examined after affine immersions and their general properties had been given.

Science Code : 403.0201

Key Words : Connection, volume element, affine immersion, transversal symmetry.

Page Number : 127

Adviser : Doç. Dr. Baki KARLIĞA

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana teklif eden ve çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgilerinden faydalanma imkanı veren kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Baki KARLIĞA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. İsmet Altıntaş ve Matematik Bölümü'ndeki tüm elemanlara, yazım aşamasında bana yardımcı olan Fizik Bölümü Araştırma Görevlilerinden İzzettin Yılmaz ve desteklerini benden esirgemeyen Sevgi Sultan ile aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

ŞEKİL	SAYFA NO
Şekil 3.1. Afin Hiperyüzey İmmersiyonu.....	16
Şekil 3.2. Total Jeodezik İmmersiyon	23
Şekil 4.1. Eliptik Paraboloid.....	78
Şekil 4.2. Hiperbolik Paraboloid	79



SİMGELER

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
M^n	n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold
M^{n+1}	(n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir manifold
∇	M^n de indirgenmiş konneksiyon
$\nabla_X Y$	Y nin X e göre kovaryant türevi
Ω	Afin uzay
τ	Konneksiyon 1 formu
S	Afin şekil operatörü
h	Simetrik bilineer form
ξ	Transversal vektör alanı
ω	İndirgenmiş hacim elementi
$\chi(M)$	M manifoldunun vektör alanları kümesi
$T_x(M)$	M nin x deki tanjant uzayı
$\tilde{\nabla}$	M^{n+1} de konneksiyon
D	R^{n+1} de flat konneksiyon
$\tilde{\omega}$	M^{n+1} de hacim elementi
$f_*(X)$	M^{n+1} de f boyunca vektör alanı
$\mathfrak{I}(M)$	M^n deki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

Tzitzeica, 3 boyutlu Öklit uzayındaki bir yüzey için destek fonksiyonunun 4. kuvvetine Gauss eğriliğinin oranının bir afin dönüşüm altında invariant kaldığını ilk defa 1908 de göstermiştir [1]. Tzitzeica her hangi bir S yüzeyi tanımlamış ve bu oranın sabit olduğunu ortaya koymuştur. Bu S-yüzeyler sonuçta o merkezli proper afin küreler olarak adlandırılmıştır. 1916-1923 yılları arasında Blaschke, Pick, Radon, Berwald ve Thomsen kendi aralarında çalışarak Afin Diferensiyel Geometriyi sistematik olarak geliştirmişler ve Blaschke yapmış olduğu çalışmaları *Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie* isimli kitabında toplamıştır [2]. 1924 yılında dikkat çekici bir çalışma Afin yüzeyler üzerine E. Cartan tarafından yapılmıştır [3]. Daha sonra Slebodzinski lokal simetrik afin yüzeyler üzerine çalışmalar yapmıştır [4]. Blaschke açmış olduğu okulda bu konuları anlatırken sonraki 20. ve 30. yıllarda Kubota, Süss, Su Buring, Nakajima yapmış oldukları çalışmaları *Tohoku Mathematical Journal* ve *The Japanese Journal of Mathematic* isimli dergilerde geniş bir şekilde yayınlamışlardır. Eşafin(equiafin) dönüşümlerin grubu altında invariant kalan 3-boyutlu afin uzaydaki yüzeylerin özellikleri klasik afin diferensiyel geometrinin ana konusu olmuştur.

R^3 evrensel uzayı bir D düzlemsel(flat) konneksiyonuna sahiptir. R^3 de paralel hacim elementi olarak alışılmış determinant fonksiyonu göz önüne alınmıştır. Öklit hiperyüzey teorisinden bilindiği üzere eşafin(equiafin) açıdan R^{n+1} de M^n hiperyüzeyinin nasıl oluştuğuna dikkat edilmiştir. R^{n+1} de Öklit metriğini kullanarak M^n ye normal olan , bir birim normal vektör alanı seçilerek X ve Y M^n de vektör alanları olmak üzere R^{n+1} de $D_X Y$ kovaryant türevi alınabilir.

Bu türev;

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N$$

şeklinde bileşenlerine ayrılabilir. Burada $\nabla_X Y$ teğet bileşen ve h ise II. temel formdur. $\nabla_X Y$, M^n üzerinde indirgenmiş Riemann metriğinin Levi-Civita konneksiyonuna göre kovaryant türevidir. Afin durumda ise keyfi bir ξ transversal vektör alanı alınarak, ∇ ve h Öklit uzayında olduğu gibi tanımlanır. h sadece yüzeye bağlı olup ξ nin seçimine bağlı değildir. Eğer $\text{Rank } h = n$ ise bu durumda M^n bir bozulmamış hiperyüzeydir. M^n bozulmamış hiperyüzeyi için ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre θ indirgenmiş hacim elementi

$$\theta(X_1, X_2, \dots, X_n) = \det[X_1, X_2, \dots, X_n, \xi]$$

şeklinde ve paralel olmak üzere, ξ transversal vektör alanı işarete göre tek bir şekilde seçilebilir. Üstelik h bozulmamış metriği hacim elementiyle özdeşdir. Bu temel gerçek 4. bölümdeki Blaschke İmmersionlarında afin normal alanın bulunuşunda gösterilmiştir. Sonuç olarak ξ afin normal alan olarak adlandırılır. Afin şekil operatörü S olmak üzere; $D_X \xi = -SX$ olarak tanımlanmıştır. Böylece M^n üstünde h ve S ile birlikte (∇, θ) eşafin(equiafin) yapısı elde edilir ki bu ise Blaschke yapısı olarak adlandırılır. I özdeşlik dönüşümü ile skalar çarpım sonucu elde edilen S yüzeylerine Afin küre denir. Öklidyen durumun aksine burada afin küreler basitçe belirlenemez. Diğer önemli bir husus ise $C = \nabla h$ kübik formudur ki bu her bir X teğet vektörü için $I_{Zh}(\nabla_X h) = 0$ özelliğini sağlar. Bu özelliğe Apolarity şartı denir. Bir bozulmamış yüzeyin kübik formunun sıfır olması için gerek ve yeter şartın onun bir kuadrik olması gerektiğini Pick ve Berwald klasik teoremlerinde ifade etmiştir. Blaschke ise bir kompakt afin kürenin bir elipsoid olduğunu göstermiştir. Elipsoid afin Gauss eğriliği $K = \det S$ veya afin ortalama eğriliği

$H = \frac{1}{n} \text{İz}S$ sabit olan bir ovaloid olarak da karakterize edilmiştir. 1960 dan 1970 e kadar Afin Diferensiyel Geometri de pek az sayıda çalışma yapılmıştır. Özellikle 1962 de Schirokow un yaptığı çalışmalar oldukça faydalı olmuştur[5]. 1963 de Guggenheimer eşafin(equiafin) homojen yüzeylerin bir sınıflandırılmış listesini gösteren çalışma yapmıştır [6]. 1975 de Spivak afin yüzey teorisinin güzel bir tanıtımını yapmıştır [7]. 1990 da Nomizu ve Sasaki nin birlikte yaptıkları “On a theorem of Chern and Terng on Affine Surfaces” isimli çalışmanın yayınlanmasına kadar Öklidyen ve afin özellikler birlikte ifade ediliyorlardı. Bu çalışmadan sonra bu özellikler birbirinden ayrılmıştır[8].

1982 yılında yapılan Münster Konferansında Nomizu, “Afin diferensiyel geometri nedir?” isimli konuşmasıyla yapısal açıdan Afin diferensiyel geometrinin temelini atarak bozulmamış afin hiperyüzey örneği olarak $SL(n,R)$ tartışıldıktan sonra $SL(2,R)$ üstündeki indirgenmiş konneksiyonun lokal olarak simetrik olduğunu gözlemiş ve buna bağlı olarak non dejenere hiperyüzeylerin indirgenmiş konneksiyonlarının lokal simetrik olması problemini ortaya koymuştur. Verheyen ve Vestraelen $n \geq 3$ için $S = 0$ ise hiperyüzeyin bir fonksiyonun grafiği, $C = 0$ ise hiperyüzeyin bir kuadrik olduğunu göstermiştir[9]. Nomizu-Pinkal bu yapıya daha geniş bir bakış açısı getirmiştir [10]. h sıfıra özdeş ise afin immersionun total jeodezik ve S sıfıra özdeş ise afin immersionun bir immersionun grafiği olduğunu göstermiştir. Bir izometrik immersion bir afin immersion olarak düşünülmüştür. h afin temel formunu dejenere olarak ifade etmek de mümkündür. Bu durumda pek çok klasik sonuç h nın rankı en az 2 olacak şekilde yüksek boyutlara genelleştirilmiştir. $f: R^n \rightarrow R^{n+1}$ şeklindeki afin immersionların yapısı E^n , E^{n+1} Öklidyen uzaylar veya L^n , L^{n+1} Minkowski-Lorentz uzayları arasındaki bütün izometrik immersionlara benzer olarak çalışılabilir.

Gerçekten afin metodun metrik metotlarla çakıştırılabileceği, K. Nomizu - T.Sasaki tarafından yazılan “Affine Differential Geometry” isimli kitabın 4. bölümünden görülebilir. Böylelikle afin metodun metrik metottan daha genel bir metot olduğu anlaşılır.



2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Grup Etkisi

G bir grup, Ω de herhangi bir küme olsun.

$$\Phi : G \rightarrow S_{\Omega}$$

$$g \rightarrow \Phi(g) : \Omega \rightarrow \Omega$$

$$x \rightarrow \Phi(g)(x) = g(x) = gx$$

şeklinde tanımlı Φ homomorfizmine G nin Ω üzerine bir etkisi denir. Φ etkisi (G, Ω, Φ) şeklinde gösterilir[11].

2.2. Güvenilir(faithful) Etki

(G, Ω, Φ) etkisi için Φ homomorfizmi bire bir ise (G, Ω, Φ) etkisine güvenilir etki denir. Diğer bir ifadeyle $e \in G$ olmak üzere $\Phi(e) = Id_{\Omega}$ oluyorsa, (G, Ω, Φ) etkisine güvenilir etki denir [11].

2.3. Geçişli(transitive) Etki

$\forall x, y \in \Omega$ için $g(x) = y$ olacak şekilde $g \in G$ bulunabiliyorsa, (G, Ω, Φ) etkisine geçişli etki denir [11].

2. 4. Basit Geçişli Etki

$\forall x, y \in \Omega$ için $g(x) = y$ olacak şekilde bir tek $g \in G$ bulunabiliyorsa, (G, Ω, Φ) etkisine basit geçişli bir etki denir [11].

2. 4. 1. Teorem

G bir Abelyen grup ise, her hangi bir güvenilir, geçişli etki basit geçişli etkidir.

İspat

[11] de görülebilir.

2. 5. Afin Uzay

Ω bir cümle, V de $\mathfrak{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı

$$\Phi : V \rightarrow S_{\Omega}$$

$$\bar{\xi} \rightarrow \Phi(\bar{\xi})(x) = T_{\bar{\xi}}(x) = x + \bar{\xi}$$

olmak üzere V nin toplamsal grubunu göz önüne alarak elde edilen (V, Ω, Φ) etkisi güvenilir ve geçişli ise Ω cümlesine V ile eşleşen afin uzay denir. $\Phi(\bar{\xi})$ dönüşümleri Ω in ötelemeleri olarak adlandırılır. (V, Ω, Φ) etkisinde $(V, +)$ grubu Abelyen olduğundan 2.4.1. Teorem den (V, Ω, Φ) etkisi basit geçişlidir. O halde $\forall x, y \in \Omega$ için

$$y = \Phi(\Theta(x, y), x)$$

olacak şekilde

$$\Theta : \Omega \times \Omega \rightarrow V$$

$$(x, y) \rightarrow \Theta(x, y) = \overrightarrow{xy}$$

dönüşümü vardır. Θ dönüşümü aşağıdaki iki aksiyomu sağlar. $\forall x, y, z \in \Omega$ için

- (i) $\Theta(x, z) = \Theta(x, y) + \Theta(y, z)$
- (ii) $\Theta_x : y \in \Omega \rightarrow \Theta(x, y) \in V$ dönüşümü bire bir ve örtendir.

Ω afin uzayının boyutu V vektör uzayının boyutu olarak tanımlanır [11].

2. 6. Afin Çatı

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, Ω afin uzayında $(n+1)$ nokta olsun. Eğer $\{\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{x_0 x_2}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}\}$

V vektör uzayı için bir baz oluyorsa, $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine, Ω afin uzayının bir afin çatısı denir [11].

2. 7. Afin Koordinat Sistemi

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ V de bir baz olsun. Her hangi bir $p \in \Omega$ için $\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^n x^i(p) e_i$

şeklinde tek olarak ifade edilir. Burada $\{o, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cümlesine afin koordinat sistemi, $o \in \Omega$ noktasına orjin, $(x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$ reel sayı n -lisine, p nin $\{o, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ koordinat sistemine göre afin koordinatları denir [12].

2. 8. Afin Koordinat Sistemlerinin Değişimi

$\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ ve $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ iki afin koordinat sistemi olsun. Bu iki koordinat sistemi arasındaki değişim

$$y^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j + c^i \quad 1 \leq i \leq n$$

bağıntısı ile verilir[12].

2. 9. Afin Dönüşüm

(V, Ω, Θ) ve (V', Ω', Θ') aynı $\mathfrak{F}$ cismi üzerinde tanımlı iki afin uzay ve

$F : \Omega \rightarrow \Omega'$ bir dönüşüm olsun. F dönüşümü aşağıdaki denk aksiyomlardan birisini sağlıyorsa bu dönüşüme bir afin dönüşüm denir.

- (i) Herhangi bir $x \in \Omega$ için $F \in L(\Omega_x ; \Omega'_{F(x)})$
- (ii) Her $x \in \Omega$ için $F \in L(\Omega_x ; \Omega'_{F(x)})$
- (iii) Herhangi bir $x \in \Omega$ için $\Theta'_{F(x)} \circ F \circ \Theta_x^{-1} \in L(\Omega ; \Omega')$
- (iv) Her $x \in \Omega$ için $\Theta'_{F(x)} \circ F \circ \Theta_x^{-1} \in L(\Omega ; \Omega')$

Burada $\Theta'_{F(x)} \circ F \circ \Theta_x^{-1} \in L(\Omega ; \Omega')$ yalnız F ye bağlıdır ve

$$\vec{F} = \Theta'_{F(x)} \circ F \circ \Theta_x^{-1} = L(F)$$

şeklinde ifade edilir. Afin dönüşümlerin kümesi

$$A(\Omega ; \Omega') = \{F \mid F : \Omega \xrightarrow{\text{Afin}} \Omega'\}$$

ile gösterilir [11].

2. 10. Hacim Elementi

V n -boyutlu vektör uzayı, Ω da V ile eşleşen afin uzay olsun. V üzerinde tanımlı her ω alterne n -formuna Ω da bir hacim elementi denir [12].

2. 11. Eşafin(equiafin) Dönüşüm

f afin dönüşümü Ω afin uzayındaki ω hacim elementini koruyorsa f ye eşafin(equiafin)dir denir [12].

2. 12. Afin Konneksiyon

M n -boyutlu C^∞ manifold olsun.

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde bir afin konneksiyon denir.

$$X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M) \text{ ve } \phi \in \mathfrak{F}(M) \text{ olmak üzere}$$

$$(i) \quad \nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$$

$$(ii) \quad \nabla_{\phi X} Y = \phi \nabla_X Y$$

$$(iii) \quad \nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$$

$$(iv) \quad \nabla_X (\phi Y) = [X\phi]Y + \phi \nabla_X Y \quad [12].$$

2. 13. Eşafin(equiafin) Yapı

M bir manifold ω , M üstünde bir hacim elementi olsun. $\nabla\omega = 0$ ise (∇, ω) ikilisine M üzerinde bir eşafin(equiafin) yapı denir [12].

2. 14. Lokal Eşafin(equiafin) Konneksiyon

M bir manifold olsun. M nin her bir x noktası civarında $\nabla\omega = 0$ olacak şekilde bir ω hacim elementi var ise ∇ ya lokal eşafin(equiafin)dir denir [16].

2. 15. Lokal Simetrik Afın Konneksiyon

M bir manifold ve ∇ , M üstünde afine konneksiyon olmak üzere; $T = 0$ ve $\nabla R = 0$ ise ∇ ya lokal simetrik afın konneksiyon denir [12].

2. 16. Düzlemsel(flat) Konneksiyon

M manifoldu üzerinde tanımlı ∇ afın konneksiyonunun torsiyon tensörü ve eğrilik tensörü sıfıra özdeş ise, ∇ afın konneksiyonuna düzlemsel(flat) konneksiyon denir [12].

2. 17. Bir Dönüşüm Boyunca Vektör Alanı

M ve $\tilde{M}$ sırasıyla, n ve $(n+p)$ boyutlu diferensiyellenebilir bir manifoldlar ve $f:M \rightarrow \tilde{M}$ bir dönüşüm olsun. $f_*:TM \rightarrow T\tilde{M}$ dönüşümü için $f_*(X), \forall p \in M$ ye bir $f_*|_p(X_p)$ vektörü karşılık getireceğinden $f_*(X)$, f boyunca bir vektör alanı olur [13].

2. 18. Transversal Vektör Alanı

$f: M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü için ξ vektör alanı $f(M)$ ye teğet değilse, ξ ye transversal vektör alanı denir [13].

2. 19. Tensörel Türev

K kontravaryant derecesi r , kovaryant derecesi s , olan (r,s) tipinde tensör alanı ve X bir vektör alanı olsun.

(i) Eğer $K, (0,s)$ tipinde tensör alanı, yani her bir $X \in \chi(M)$ için

$$\chi(M) \times \chi(M) \times \dots \times \chi(M) \xrightarrow{s - \text{linear}} \mathfrak{Z}(M)$$

ise

$$(\nabla_X K)(X_1, X_2, \dots, X_s) = X(K(X_1, X_2, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s K(X_1, X_2, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s)$$

(ii) Eğer $K (1,s)$ tipinde tensör alanı; yani her bir $X \in \chi(M)$ için

$$\chi(M) \times \chi(M) \times \dots \times \chi(M) \xrightarrow{s\text{-linear}} \chi(M)$$

ise

$$(\nabla_X K)(X_1, X_2, \dots, X_s) = \nabla_X (K(X_1, X_2, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s K(X_1, X_2, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s)$$

olur [12].

2. 20. Torsiyon Tensör Alanı

∇ konneksiyonun torsiyon tensör alanı

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

eşitliği ile tanımlanır [12].

2. 21. Eğrilik Tensör Alanı

∇ konneksiyonunun eğrilik tensör alanı

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

eşitliği ile tanımlanır [12].

2. 22. Ricci Tensör

∇ konneksiyonunun Ricci tensörü,

$$\text{Ric}(Y,Z) = \text{İz}\{X \rightarrow R(X,Y)Z\}$$

eşitliği ile tanımlanır [12].

2. 23. Bianchi Özdeşlikleri

∇ konneksiyonu torsiyonsuz ise,

$$(i) \quad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \quad (1.\text{Bianchi özdeşliği})$$

$$(ii) \quad (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0 \quad (2.\text{Bianchi özdeşliği})$$

[13].

2. 23. 1. Teorem

Bir M manifoldu üzerinde ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü R olmak üzere $R(X, Y) = -R(Y, X)$ olur.

İspat

[13] de verilmiştir.

2. 24. Jeodezik Eğri

M diferensiyellenebilir bir manifold ∇ , afin konneksiyon olsun. $a < t < b$ olmak üzere x_t M manifoldu üzerinde C^1 sınıfından bir eğri ve X , x_t boyunca tanımlı teğet vektör alanı için $\nabla_X X = 0$ ise x_t eğrisine jeodezik eğri denir [13].

2. 25. ∇ - Jeodezik Eğri

M diferensiyellenebilir bir manifold ∇ , M üzerinde afin konneksiyon olsun.

γ x_t eğrisi boyunca bir vektör alanı ise $\nabla_{\dot{\gamma}} \gamma = 0$ ise γ ye ∇ - jeodezik eğri denir.

2. 26. Bozulmamış (Non-degenerate) Metrik

M, n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. h , $(0, 2)$ tipinde tensör alanı olmak üzere $\forall Y \in \chi(M)$ için $h(X, Y) = 0$ olacak şekilde $X = 0$ şartını sağlayan $X \in \chi(M)$ varsa, h ya bozulmamış metrik denir [12].

2. 27. İmmersion(Daldırma)

M, N sırasıyla m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f: M \rightarrow N$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer tanım kümesinin her bir noktasında $(\text{rank} f)_p = m$ ise f ye bir immersion denir[20].

3. AFİN İMMERSIONLAR

3.1. Afın İmmersionlar için Tanım ve Teoremler

3.1.1. Tanım (Bir Dönüşüm Boyunca Dağılım)

Her bir $x \in M$ noktasına M_x in bir p boyutlu $N(x)$ alt uzayını karşılık getiren N dönüşümüne M manifoldu üzerinde p boyutlu bir dağılım denir[15] .

3.1.2. Tanım (Afın İmmersion)

M , n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve ∇ , M üzerinde bir afın konneksiyon, $\tilde{M}$, $(n+p)$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ üzerinde bir afın konneksiyon olsun.

$\forall x \in M$ için $T_{f(x)} \tilde{M}$ nin $T_{f(x)} \tilde{M} = f_* (T_x M) \oplus N_x$ olacak şekilde f boyunca p boyutlu diferensiyellenebilir N dağılımı bulunabiliyorsa, $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ immersionuna afın immersion denir.

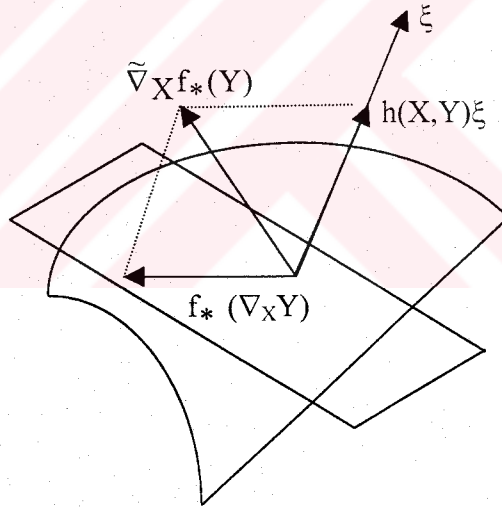
M , $\tilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar, ∇ ve $\tilde{\nabla}$ bunlar üzerinde afın konneksiyonlar olsun. Bu durumda $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afın immersionuna hiperyüzey immersionu denir[10].

3.1.3. Tanım (Gauss Denklemi)

f bir hiperyüzey immersionu olsun. Bu durumda N dağılımı 1-boyutlu olacağından M nin her bir noktası civarında lokal olarak $\xi \in N$ transversal vektör alanı vardır. O zaman $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi \quad (3.1)$$

yazılabilir. (3.1) denkleminde Gauss Denklemi denir[10].



Şekil 3.1. Afin hiperyüzey immersionu

(3.1) eşitliğinin sol tarafı f boyunca $f_*(Y)$ vektör alanının X vektör alanına göre kovaryant türevidir. Sağ tarafındaki ilk terim tanjant bileşen ikinci terimin çarpımına ise transversal bileşen denir.

3.1.1. Teorem

$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi$ eşitliğindeki ∇ , M üzerinde bir afin konneksiyondur.

İspat

(i)

(3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} f_*(\nabla_X Y) &= \tilde{\nabla}_X f_*(Y) - h(X, Y)\xi \\ f_*(\nabla_{X+Y} Z) &= \tilde{\nabla}_{X+Y} f_*(Z) - h(X+Y, Z)\xi \\ &= \tilde{\nabla}_X f_*(Z) + \tilde{\nabla}_Y f_*(Z) - h(X+Y, Z)\xi. \\ \tilde{\nabla}_{X+Y} f_*(Z) &= f_*(\nabla_X Z) + h(X, Z)\xi + f_*(\nabla_Y Z) + h(Y, Z)\xi \end{aligned} \quad (3.2)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{X+Y} f_*(Z) = f_*(\nabla_{X+Y} Z) + h(X+Y, Z)\xi \quad (3.3)$$

(3.2) ve (3.3) denklemlerinden

$$f_*(\nabla_{X+Y} Z) = f_*(\nabla_X Z) + f_*(\nabla_Y Z) \quad (3.4)$$

$$h(X+Y, Z) = h(X, Z) + h(Y, Z) \quad (3.5)$$

elde edilir.

(ii)

$$\begin{aligned}
f_*(\nabla_X(Y+Z)) &= \tilde{\nabla}_X f_*(Y+Z) - h(X, Y+Z)\xi \\
\tilde{\nabla}_X f_*(Y+Z) &= \tilde{\nabla}_X f_*(Y) + \tilde{\nabla}_X f_*(Z) \\
&= f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi + f_*(\nabla_X Z) + h(X, Z)\xi \\
&= f_*(\nabla_X Y) + f_*(\nabla_X Z) + h(X, Y)\xi + h(X, Z)\xi
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y+Z) = f_*(\nabla_X(Y+Z)) + h(X, Y+Z)\xi \tag{3.7}$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) denklemlerinden

$$f_*(\nabla_X(Y+Z)) = f_*(\nabla_X Y) + f_*(\nabla_X Z) \tag{3.8}$$

$$h(X, Y+Z) = h(X, Y) + h(X, Z) \tag{3.9}$$

elde edilir.

(iii)

$$\begin{aligned}
f_*(\nabla_{\phi_X} Y) &= \tilde{\nabla}_{\phi_X} f_*(Y) - h(\phi_X, Y)\xi \\
\tilde{\nabla}_{\phi_X} f_*(Y) &= \phi \tilde{\nabla}_X f_*(Y) \\
&= \phi(f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi) \\
&= \phi f_*(\nabla_X Y) + \phi h(X, Y)\xi
\end{aligned} \tag{3.10}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{\phi_X} f_*(Y) = f_*(\nabla_{\phi_X} Y) + h(\phi_X, Y)\xi \tag{3.11}$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) denklemlerinden

$$f_*(\nabla_{\phi X}) = \phi f_*(\nabla_X Y) \quad (3.12)$$

$$h(\phi X, Y) = \phi h(X, Y) \quad (3.13)$$

elde edilir.

(iv)

$$f_*(\nabla_X \phi Y) = \tilde{\nabla}_X \phi f_*(Y) - h(X, \phi Y)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \phi f_*(Y) &= X[\phi] f_*(Y) + \phi \tilde{\nabla}_X f_*(Y) \\ &= X[\phi] f_*(Y) + \phi (f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi) \\ &= X[\phi] f_*(Y) + \phi f_*(\nabla_X Y) + \phi h(X, Y)\xi \\ &= f_*(X[\phi]Y + \phi \nabla_X Y) + \phi h(X, Y)\xi \end{aligned} \quad (3.14)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X \phi f_*(Y) = f_*(X[\phi]Y + \phi \nabla_X Y) + h(\phi X, Y)\xi \quad (3.15)$$

bulunur. (3.14) ve (3.15) denklemlerinden

$$f_*(\nabla_X \phi Y) = f_*(X[\phi]Y + \phi \nabla_X Y) \quad (3.16)$$

$$\phi h(X, Y) = h(\phi X, Y) \quad (3.17)$$

elde edilir. f_* lokal olarak birebir olduğundan (3.4), (3.8), (3.12), (3.16) eşitliklerinden. ∇ konneksiyonu M üzerinde bir afin konneksiyondur.

3.1.4. Tanım (İndirgenmiş konneksiyon)

$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi$ eşitliğindeki ∇ konneksiyonuna f nin ξ ye göre M üzerine indirgediği afin konneksiyon denir[10].

3.1.2. Teorem

$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi$ şeklinde tanımlı h simetrik bilineer formdur.

İspat

h nın bilineerliği (3.5),(3.9),(3.13),(3.17) denklemlerinden açıktır. h nın simetrikliğini göstermeliyiz. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi$$

$$\tilde{\nabla}_Y f_*(X) = f_*(\nabla_Y X) + h(Y, X)\xi$$

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) - \tilde{\nabla}_Y f_*(X) = f_*(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + h(X, Y)\xi - h(Y, X)\xi$$

ise

$$f_*([X, Y]) = f_*(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + h(X, Y)\xi - h(Y, X)\xi.$$

Tanjant ve transversal kısımlar karşılıklı olarak eşitlenirse,

$$h(X, Y) - h(Y, X) = 0$$

$$h(X, Y) = h(Y, X).$$

olur.

3.1.5. Tanım (Afin Temel Form)

h simetrik bilineer formuna f immersionunun ξ ye göre afin temel formu denir[13].

3.1.3. Teorem

$\tilde{\nabla}$ konneksiyonu torsiyonsuz ise f nin M üzerine indirgeđi ∇ konneksiyonu da torsiyonsuzdur.

İspat

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X f_*(Y) - \tilde{\nabla}_Y f_*(X) - f_*([X, Y]) \\ &= f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi - f_*(\nabla_Y X) - h(Y, X)\xi - f_*([X, Y]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

h , simetrik bilineer olduğundan,

$$f_*(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) = 0$$

f_* lokal olarak birebir olduğundan,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

elde edilir. Bu ise ∇ nın torsiyonsuz olmasıdır.

3.1.6. Tanım (Total Jeodezik İmmersion)

$x \in M$ için (3.1) denkleminde h sıfıra özdeş ise, f ye $x \in M$ noktasında total jeodezik tir denir. $\forall x \in M$ noktasında f total jeodezik ise f ye total jeodezik immersion denir[10].

3.1.4. Teorem

f immersionun total jeodezik olması ξ transversal vektör alanının seçiminden bağımsızdır.

İspat

f total jeodezik ise, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$h(X, Y) = 0.$$

(3.1) denkleminden

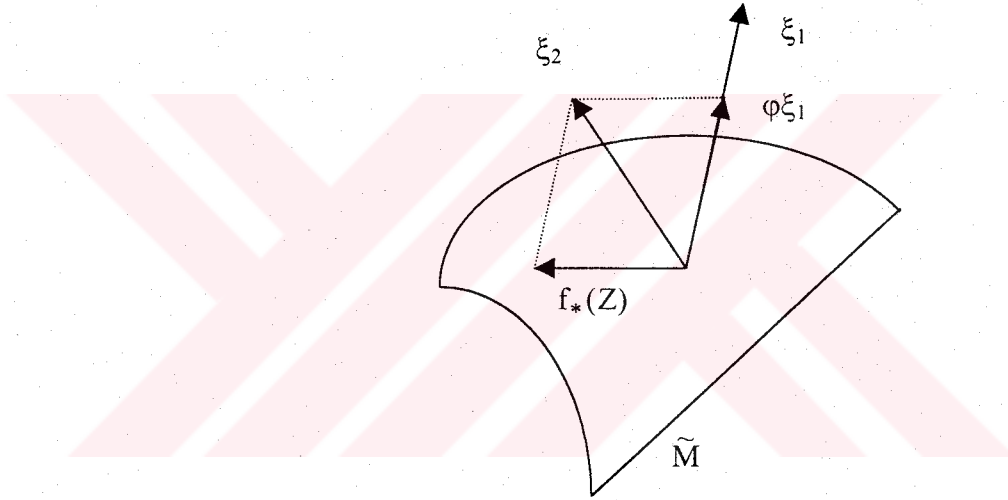
$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y)$$

olur. Bu durumda ξ transversal vektör alanı ne seçilirse seçilsin $\tilde{\nabla}_X f_*(Y)$ değeri M ye teğet olacaktır.

3.1.5. Teorem

$f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ bir afin immersion olsun. ξ_1 ve ξ_2 de f ile eşleştirilmiş iki transversal vektör alanı olsun. $[\xi_1]$ ve $[\xi_2]$ nin doğrultuları sadece total jeodezik parçalar üzerinde farklı olabilir [10].

İspat



Şekil 3.2. Total jeodezik immersion

φ , M üzerinde C^∞ fonksiyon, Z de M ye teğet vektör alanı olmak üzere

$$\xi_2 = \varphi \xi_1 + f_*(Z)$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X f_*(Y) &= f_*(\nabla_X Y) + h_2(X, Y) \xi_2 \\ &= f_*(\nabla_X Y) + h_2(X, Y) (\varphi \xi_1 + f_*(Z)) \\ &= f_*(\nabla_X Y) + h_2(X, Y) f_*(Z) + \varphi h_2(X, Y) \xi_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ayrıca,

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h_1(X, Y)\xi_1 \quad (3.19)$$

(3.18) ve (3.19) denklemleri karşılaştırılırsa

$$f_*(\nabla_X Y) = f_*(\nabla_X Y) + h_2(X, Y)f_*(Z) \quad (3.20)$$

$$\phi h_2(X, Y)\xi_1 = h_1(X, Y)\xi_1.$$

Buradan,

$$h_2(X, Y)f_*(Z) = 0$$

ve

$$\phi h_2(X, Y)\xi_1 = h_1(X, Y)\xi_1. \quad (3.21)$$

Eğer f immersionu $x \in M$ de total jeodezik değilse;

$h_2(X, Y) = 0$ olacak şekilde $X, Y \in \chi(M)$ vardır. (3.21) denkleminde

$$f_*(Z) = 0 \text{ ve } \xi_2 = \phi\xi_1$$

elde edilir. Yine (3.21) denkleminde f immersionu $x \in M$ de total jeodezik ise

$$f_*(Z) \neq 0 \text{ ve } \xi_2 = \phi\xi_1 + f_*(Z)$$

olur.

3.1.6. Teorem

h simetrik bilineer formunun bozulmamış olup olmaması transversal vektör alanının seçiminden bağımsızdır.

İspat

Kabul edelim ki h_1 bozulmamış ve

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h_1(X, Y)\xi_1 \quad (3.22)$$

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h_2(X, Y)\xi_2 \quad (3.23)$$

$$\xi_2 = \varphi \xi_1 + f_*(Z)$$

olsun. (3.22) ve (3.23) eşitliklerinden

$$h_2(X, Y)\xi_2 = h_2(X, Y)f_*(Z) + \varphi h_2(X, Y)\xi_1 = h_1(X, Y)\xi_1$$

eşitlikleri göz önüne alınarak

$$h_2(X, Y)f_*(Z) = 0$$

olur. Bu durumda aşağıdaki iki hal mümkündür.

(i) $f_*(Z) \neq 0$, $h_2(X, Y) = 0$ olması $h_2(X, Y)$ nin de bozulmamış olacağı açıktır.

(ii) $f_*(Z) = 0$, $h_2(X, Y) \neq 0$ olması

$\varphi h_2(X, Y)\xi_1 = h_1(X, Y)\xi_1$ olmasını gerektireceğinden

$$\phi h_2(X, Y) = h_1(X, Y)$$

olur.

h_1 in bozulmamış olması $\phi \neq 0$ olduğundan h_2 nin bozulmamış olmasını gerektirir.

3.1.7. Tanım (Weingarten Dönüşümü)

$f: (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin immersionu için f boyunca lokal transversal vektör alanı ξ ve $X \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_*(S(X)) + \tau(X)\xi \quad (3.24)$$

eşitliğine Afin Weingarten Denklemi, bu denklemdeki S dönüşümüne afin şekil operatörü, τ ya da f immersionu için transversal konneksiyon 1-formu denir[10].

3.1.7. Teorem

$f: (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ bir afin immersion, ξ , f boyunca lokal transversal vektör alanı olsun. $\tilde{R}$, $\tilde{\nabla}$ nin eğrilik tensörü olmak üzere;

- (i) $\text{Tan}[\tilde{R}(X, Y) f_*(Z)] = f_* \{R(X, Y)Z - h(Y, Z)S(X) + h(X, Z)S(X)\}$
- (ii) $\text{Trans}[\tilde{R}(X, Y) f_*(Z)] = (\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) + (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z)$

$$(iii) \quad \text{Tan}[\tilde{R}(X, Y)\xi] = -f_* \{(\nabla_X S)(Y) - \tau(X)S(Y) - (\nabla_Y S)(X) + \tau(Y)S(X)\}$$

$$(iv) \quad \text{Trans}[\tilde{R}(X, Y)\xi] = -h(X, S(Y)) + h(Y, S(X)) + 2d\tau(X, Y).$$

eşitlikleri geçerlidir[10].

İspat

$$\tilde{R}(X, Y) f_*(Z) = \text{Tan}(\tilde{R}(X, Y) f_*(Z)) + \text{Trans}[\tilde{R}(X, Y) f_*(Z)].$$

$$\tilde{R}(X, Y) f_*(Z) = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y f_*(Z) - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X f_*(Z) - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} f_*(Z) \quad (3.25)$$

$$\tilde{\nabla}_Y f_*(Z) = f_*(\nabla_Y Z) + h(Y, Z)\xi$$

eşitliğinin her iki yanına $\tilde{\nabla}_X$ uygulanırsa

$$\tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y f_*(Z)) = \tilde{\nabla}_X(f_*(\nabla_Y Z) + h(Y, Z)\xi)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y f_*(Z) &= f_*(\nabla_X \nabla_Y Z) + h(X, \nabla_Y Z)\xi + (\nabla_X h)(Y, Z)\xi + h(\nabla_X Y, Z)\xi \\ &\quad + h(Y, \nabla_X Z)\xi + h(Y, Z)(-f_*(S(X)) + \tau(X)\xi) \\ &= f_*(\nabla_X \nabla_Y Z) - h(Y, Z)f_*(S(X)) + \{h(X, \nabla_Y Z) \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y, Z) + h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z) + \tau(X)h(Y, Z)\}\xi \end{aligned} \quad (3.26)$$

Benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Z) = f_*(\nabla_X Z) + h(X, Z)\xi$$

eşitliğinin her iki yanına $\tilde{\nabla}_Y$ uygulanırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X f_*(Z) &= f_*(\nabla_Y \nabla_X Z) - h(X, Z) f_*(S(Y)) + \{ h(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad + (\nabla_Y h)(X, Z) + h(\nabla_Y X, Z) + h(X, \nabla_Y Z) + \tau(Y) h(X, Z) \} \xi \end{aligned} \quad (3.27)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{[X, Y]} f_*(Z) &= f_*(\nabla_{[X, Y]} Z) + h([X, Y], Z)\xi \\ \tilde{\nabla}_{[X, Y]} f_*(Z) &= f_*(\nabla_{[X, Y]} Z) + h(\nabla_X Y, Z)\xi - h(\nabla_Y X, Z)\xi \end{aligned} \quad (3.28)$$

olur. (3.26), (3.27), (3.28) de bulunan değerler (3.25) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y) f_*(Z) &= f_*(R(X, Y)Z - h(Y, Z)S(X) + h(X, Z)S(X)) + \{ (\nabla_X h)(Y, Z) \\ &\quad + \tau(X)h(Y, Z) + (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z) \} \xi. \end{aligned} \quad (3.29)$$

(3.29) denkleminde tanjant ve transversal kısımlar göz önüne alınırsa;

$$\text{Tan}[\tilde{R}(X, Y) f_*(Z)] = f_*(R(X, Y)Z - h(Y, Z)S(X) + h(X, Z)S(X))$$

ve

$$\begin{aligned} \text{Trans}[\tilde{R}(X, Y) f_*(Z)] &= (\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) + (\nabla_Y h)(X, Z) \\ &\quad + \tau(Y)h(X, Z) \end{aligned}$$

olur. Bu ise (i) ve (ii) nin ispatıdır.

Şimdi,

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = \text{Tan}[\tilde{R}(X, Y)\xi] + \text{Trans}[\tilde{R}(X, Y)\xi]$$

ve

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi \quad (3.30)$$

ifadeleri göz önüne alınarak

$$\tilde{\nabla}_Y \xi = -f_*(S(Y)) + \tau(Y)\xi$$

eşitliğin her iki tarafına $\tilde{\nabla}_X$ uygulanırsa;

$$\tilde{\nabla}_X (\tilde{\nabla}_Y \xi) = \tilde{\nabla}_X (-f_*(S(Y)) + \tau(Y)\xi)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi &= -f_*(\nabla_X S(Y) - \tau(Y)S(X)) - \{h(X, S(Y)) - X[\tau(Y)] - \tau(Y)\tau(X)\}\xi \end{aligned} \quad (3.31)$$

Benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_*(S(X)) + \tau(X)\xi$$

eşitliğinde her iki tarafa $\tilde{\nabla}_Y$ uygulanırsa;

$$\tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X \xi) = \tilde{\nabla}_Y(-f_*(S(X)) + \tau(X)\xi)$$

$$\tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X \xi) = -f_*(\nabla_Y S(X) - \tau(X)S(Y)) - \{h(Y, S(X)) - Y[\tau(X)] - \tau(X)\tau(Y)\}\xi \quad (3.32)$$

Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi = -f_*(S[X,Y]) + \tau([X,Y])\xi \quad (3.33)$$

olur.

(3.31), (3.32), (3.33) de bulunan değerler (3.30) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X,Y)\xi = & \{-f_*(\nabla_X S(Y) - \tau(Y)S(X)) + f_*(\nabla_Y S(X) + \tau(X)S(Y)) + f_*(S[X,Y])\} + \\ & \{-h(X, S(Y)) + X[\tau(Y)] + \tau(Y)\tau(X) + h(Y, S(X)) - Y[\tau(X)] \\ & - \tau(X)\tau(Y) - \tau([X,Y])\}\xi \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. (3.34) denkleminde tanjant ve transversal kısımlar göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \text{Tan}[\tilde{R}(X,Y)\xi] &= -f_*(\nabla_X S(Y) - \tau(Y)S(X)) + f_*(\nabla_Y S(X) + \tau(X)S(Y)) \\ &\quad + f_*(S[X,Y]) \\ &= f_*\{-(\nabla_X S(Y) - \tau(Y)S(X)) + (\nabla_Y S(X) + \tau(X)S(Y)) \\ &\quad + S[X,Y]\} \end{aligned}$$

$$= f_* \{ -(\nabla_X S)(Y) - \tau(Y)S(X) + (\nabla_Y S)(X) + \tau(X)S(Y) \}$$

$$= f_* \{ -(\nabla_X S)(Y) + \tau(X)S(Y) + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X) \}$$

ve

$$\begin{aligned} \text{Trans}[\tilde{R}(X, Y)\xi] &= \{ -h(X, S(Y)) + X[\tau(Y)] + \tau(Y)\tau(X) + h(Y, S(X)) \\ &\quad - Y[\tau(X)] - \tau(X)\tau(Y) - \tau([X, Y]) \} \xi \\ &= -h(X, S(Y)) + h(Y, S(X)) + 2d\tau(X, Y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise (iii) ve (iv) nin ispatıdır.

3.1.8. Teorem

M manifoldu üzerinde tanımlanan ∇ konneksiyonunun simetrik olması için gerek ve yeter şart, M nin her bir noktası civarında bir ω paralel hacim elementinin var olmasıdır[16].

İspat

∇ konneksiyonunun Ricci tensörü simetrik olsun. 2.23.1. Teorem ve I. Bianchi özdeşliğinden

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(X, Z)Y = 0$$

$$R(X, Y)Z - R(X, Z)Y = -R(Y, Z)X$$

eşitlikleri göz önüne alınarak

$$R(X, Y)Z = A_{(Y, Z)}(X)$$

$$R(Y, Z)X = B_{(Y, Z)}(X)$$

dönüşümü yapılırsa

$$A_{(Y, Z)}(X) - A_{(Z, Y)}(X) = -R(Y, Z)X$$

$$\dot{\text{Iz}}(A_{(Y, Z)}(X) - A_{(Z, Y)}(X)) = -\dot{\text{Iz}}B_{(Y, Z)}$$

$$\text{Ric}(Y, Z) - \text{Ric}(Z, Y) = -\dot{\text{Iz}}B_{(Y, Z)}$$

$$\text{Ric}(Y, Z) - \text{Ric}(Z, Y) = -\dot{\text{Iz}}R(Y, Z) \quad (3.35)$$

bulunur. (3.35) eşitliği ve hipotezden $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\dot{\text{Iz}}R(Y, Z) = 0$$

olur. ω , M manifoldu üzerinde lokal hacim elementi olsun.

$$\nabla_X \omega = \tau(X)\omega.$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)\omega &= \nabla_X \nabla_Y \omega - \nabla_Y \nabla_X \omega - \nabla_{[X, Y]}\omega \\ &= \nabla_X \tau(Y)\omega - \nabla_Y \tau(X)\omega - \tau([X, Y])\omega \\ &= X[\tau(Y)]\omega + \tau(X)\tau(Y)\omega - Y[\tau(X)]\omega - \tau(Y)\tau(X)\omega - \tau([X, Y])\omega \\ &= 2d\tau(X, Y)\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\dot{\text{Iz}}R(X, Y))\omega &= \dot{\text{Iz}}(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})\omega \\ &= \dot{\text{Iz}}([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})\omega \\ &= \dot{\text{Iz}}(X[\tau(Y)]\omega - Y[\tau(X)]\omega - \tau([X, Y])\omega) \\ &= 2d\tau(X, Y)\omega \\ &= (\dot{\text{Iz}}R(X, Y))\omega. \end{aligned}$$

∇ konneksiyonunun Ricci tensörü simetrik olduğundan ve (3.35) eşitliğinden

$$\text{İz}R(Y, Z) = 2d\tau(X, Y)\omega = 0$$

$\omega \neq 0$ olduğundan

$$d\tau(X, Y) = 0$$

veya

$$d\tau = 0$$

bulunur. Tersine

$$\nabla\omega = 0 \text{ olsun.}$$

$$\text{İz}R(Y, Z) = 0 \text{ ise } d\tau = 0$$

olur. Bu taktirde

$$\nabla\phi\omega = 0$$

olacak şekilde diferensiyellenebilir bir ϕ fonksiyonu vardır.

$$\begin{aligned} \nabla_X\phi\omega &= X[\phi]\omega + \phi\nabla_X\omega \\ &= X[\phi]\omega + \phi\tau(X)\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\frac{X[\phi]}{\phi}\omega = -\tau(X)\omega$$

$$d(\log\phi)(X)\omega = -\tau(X)\omega$$

$$d \log\phi = -\tau$$

elde edilir.

O halde $\phi\omega$, ∇ ya göre paraleldir.

$$\text{Ric}(Y, Z) - \text{Ric}(Z, Y) = -\text{İz}R(Y, Z)$$

ve $d\tau = 0$ olduğundan

$$\text{Ric}(Y, Z) = \text{Ric}(Z, Y) .$$

Bu ise ∇ konneksiyonunun Ricci tensörünün simetrik olmasıdır.

3.1.8. Tanım (İndirgenmiş Hacim Elementi)

$(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ bir eşafin(equiafin) yapı ve $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin immersion ve ξ, f boyunca eşleştirilmiş transversal vektör alanı ise, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $\chi(M)$ de bir baz olmak üzere M üzerinde indirgenmiş ω hacim elementi,

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi)$$

şeklinde tanımlanır [10].

3.1.9. Teorem

$(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ bir eşafin(equiafin) yapı ve $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin immersion ise $\nabla_X \omega = \tau(X)\omega$.

İspat

$(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ eşafin(equiafin) ise

$$\tilde{\nabla} \tilde{\omega} = 0.$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_X \tilde{\omega})(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi) &= X \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, \tilde{\nabla}_X f_*(X_i), \dots, f_*(X_n), \xi) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \tilde{\nabla}_X \xi). \end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$X \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi) = X \omega(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X f_*(X_i) = f_*(\nabla_X X_i) + h(X, X_i) \xi$$

olduğundan

$$\tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, \tilde{\nabla}_X f_*(X_i), \dots, f_*(X_n), \xi) = \omega(X_1, X_2, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_n)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \tilde{\nabla}_X \xi) &= \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), -f_* S(X)) \\ &\quad + \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \tau(X) \xi). \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), f_* S(X)) = 0$$

olduğundan

$$\tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \tau(X) \xi) = \tau(X) \omega(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\nabla_X \omega(X_1, X_2, \dots, X_n) &= X\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^n \omega(X_1, X_2, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_n) \\ &= \tau(X)\omega(X_1, X_2, \dots, X_n)\end{aligned}$$

ve

$$\nabla_X \omega(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tau(X)\omega(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

veya

$$\nabla_X \omega = \tau(X)\omega$$

elde edilir.

3.1.10. Teorem

(M, ∇) eşafin(equiafin) yapı ise $\tau = 0$.

İspat

(M, ∇) eşafin(equiafin) yapı ise $\nabla\omega = 0$ olacak şekilde $\omega \neq 0$ alterne n-formu vardır.

$\nabla\omega = 0$ ise $\forall X \in \chi(M)$ için $\nabla_X \omega = 0$ elde edilir.

$\nabla_X \omega = \tau(X)\omega$ ve $\omega \neq 0$ olduğundan

$\tau(X) = 0$ ve $\forall X \in \chi(M)$ için $\tau(X) = 0$ olduğundan

$\tau = 0$.

3.1.11. Teorem

(M, ∇, ω) nın eşafin(equiafin) yapı olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır.

İspat

3.1.10. Teorem ve eşafin(equiafin) yapı tanımından açıktır.

3.1.12. Teorem

(M, ∇, ω) ve $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ eşafin(equiafin) yapılar ve $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin immersion ise, ξ transversal vektör alanı eşafin(equiafin) olacak şekilde seçilebilir.

İspat

$f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin immersion ise M üzerinde ω hacim elementi

$\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi)$ ile tanımlıdır. $Z \in \chi(M)$ ve ϕ , M üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere ξ_2 transversal vektör alanı $\xi_2 = f_*(Z) + \phi \xi_1$ şeklinde değişsin. f , M üzerinde hiçbir yerde total jeodezik değilse, 3.1.5. Teorem den $\xi_2 = \phi \xi_1$ değeri göz önüne alındığında,

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi_2) = \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \phi \xi_1)$$

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \phi \xi_1)$$

$$= \varphi \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi_1)$$

olduğundan

$$\varphi = \omega(X_1, X_2, \dots, X_n) / \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi_1)$$

elde edilir.

3.1.13. Teorem

Bir merkezil-afin hiperyüzey üzerinde

- (i) $R(X, Y)Z = h(Y, Z)X - h(X, Z)Y,$
- (ii) $\text{Ric}(Y, Z) = (n-1)h(Y, Z).$

İspat

$f : M \rightarrow R^{n+1}$ afin immersionu için R^{n+1} deki afin konneksiyon D olmak üzere; D konneksiyonu düzlemsel (flat) dir. f immersionu merkezil (centro) afin olduğundan

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)(-x).$$

alabiliriz. D konneksiyonu düzlemsel (flat) olduğundan

$$D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z = 0$$

$$\begin{aligned} D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z &= R(X, Y)Z - h(Y, Z)X + h(X, Z)Y \\ &\quad + \{ (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \}(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Teğetsel ve transversal kısımlar ayrı ayrı eşitlenirse

$$R(X, Y)Z - h(Y, Z)X + h(X, Z)Y = 0 \quad (3.35)$$

$$(\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) = 0 \quad (3.36)$$

bulunur. (3.35) denkleminde R eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = h(Y, Z)X - h(X, Z)Y$$

bulunur. Ricci tensörün tanımı (3.35) denklemine uygulanırsa

$$\text{Ric}(Y, Z) = \text{İz}\{X \rightarrow R(X, Y)Z\}$$

$$\text{İz}(R(X, Y)Z) = \text{İz}(h(Y, Z)X - h(X, Z)Y)$$

$$\begin{aligned} \text{Ric}(Y, Z) &= n h(Y, Z) - h(Y, Z) \\ &= (n - 1)h(Y, Z) \end{aligned}$$

bulunur.

3.1.14. Teorem

$f : M \rightarrow R^{n+1}$ afın immersion olsun. M üzerinde indirgenmiş ∇ ve $\bar{\nabla}$ afın konneksiyonları arasında

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \rho(X)Y + \rho(Y)X$$

şeklinde bir bağıntı vardır[17].

İspat

M üzerinde pozitif tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon λ olsun.

$$\bar{M} = \{ \bar{x} : \bar{x} = \lambda x, x \in M \}$$

yeni bir hiperyüzey olmak üzere

$$f: x \in M \rightarrow f(x) = \bar{x} = \lambda x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

şeklinde tanımlanırsa $Y \in \chi(M)$ için f immersionu

$$\begin{aligned} f_*(Y) &= D_Y(\bar{x}) \\ &= Y[\lambda]x + \lambda Y \end{aligned}$$

özellikindeki bir immersiondur.

$$\begin{aligned} D_X f_*(Y) &= D_X(Y[\lambda]x + \lambda Y) \\ &= XY[\lambda]x + Y[\lambda]X + X[\lambda]Y + \lambda(D_X Y) \\ &= XY[\lambda]x + Y[\lambda]X + X[\lambda]Y + \lambda(\nabla_X Y) + \lambda h(X, Y)(-x) \\ &= Y[\lambda]X + X[\lambda]Y + \lambda(\nabla_X Y) \pmod{\bar{x}} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Diğer taraftan $\bar{\nabla}$ konneksiyonu f tarafından $\bar{M}$ üzerine indirgenmiş afin konneksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} D_X f_*(Y) &= f_*(\bar{\nabla}_X Y) + \bar{h}(X, Y)(-\bar{x}) \\ &= (\bar{\nabla}_X Y)\lambda x + \lambda \bar{\nabla}_X Y + \bar{h}(X, Y)(-\bar{x}) \\ &= \lambda(\bar{\nabla}_X Y) \pmod{\bar{x}}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

(3.37) ve (3.38) denklemlerinden

$$\lambda(\bar{\nabla}_X Y) = Y[\lambda]X + X[\lambda]Y + \lambda(\nabla_X Y)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\lambda} X[\lambda]Y + \frac{1}{\lambda} Y[\lambda]X$$

$\rho = d(\log \lambda)$ 1-form olmak üzere

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \rho(X)Y + \rho(Y)X \quad (3.39)$$

elde edilir.

3.1.9. Tanım (Projektif Denk Konneksiyonlar)

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde torsiyonsuz, lokal eşafin(equiafin) iki konneksiyon ∇ ve $\bar{\nabla}$ olmak üzere (3.39) eşitliğini sağlayacak şekilde bir ρ 1-formu varsa bu iki konneksiyona projektif denktir denir[18].

3.1.10. Tanım (Lokal Eşafin(equiafin) Projektif Düzlemsel Konneksiyon)

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üstünde indirgenmiş ∇ konneksiyonunun $\bar{\nabla}$ düzlemsel(flat) afın konneksiyonuna projektif değişimi varsa, ∇ lokal eşafin(equiafin) konneksiyonuna projektif düzlemsel(flat) dir denir [18].

3.1.11. Tanım (Weyl Projektif Eğrilik Tensörü)

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üstünde ∇ konneksiyonunun Weyl projektif eğrilik tensörü

$$W(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-1} [\text{Ric}(Y, Z)X - \text{Ric}(X, Z)Y]$$

ile tanımlanır [12].

- $\frac{1}{n-1} [\text{Ric}(Y, Z)] = \gamma(Y, Z)$

olmak üzere

$$W(X, Y)Z = R(X, Y)Z - [\gamma(Y, Z)X - \gamma(X, Z)Y]$$

şeklin de de yazılabilir.

3.1.12. Tanım (Afin İmmersion üzerindeki Weyl Projektif Eğrilik Tensörü)

$f: (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin immersion ise

$$\tilde{W}(X, Y)f_*(Z) = \tilde{R}(X, Y)f_*(Z) - \tilde{\gamma}(Y, Z)f_*(X) + \tilde{\gamma}(X, Z)f_*(Y)$$

özellikindeki $\tilde{W}(X, Y)f_*(Z)$ tensörüne $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun f üzerindeki Weyl projektif eğrilik tensörü denir[12].

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $\tilde{W}(X, Y)f_*(Z) = 0$ ise $\tilde{\nabla}$, f üzerinde projektif düzlemsel(flat) dir denir. $\tilde{R}(X, Y)f_*(Z)$ nin tanımından

$$\tilde{\text{Ric}}(Y, Z) = \text{İz}\{X \rightarrow \tilde{R}(X, Y)f_*(Z)\},$$

$$\gamma = \frac{1}{n-1} \text{Ric} \text{ ve } \tilde{\gamma} = \frac{1}{n-1} \tilde{\text{Ric}} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}(X, Y)f_*(Z) &= (W(X, Y)Z - \gamma(Y, Z)X + \gamma(X, Z)Y - h(Y, Z)S(X) \\ &\quad + h(X, Z)S(Y) - \tilde{\gamma}(Y, Z)X + \tilde{\gamma}(X, Z)Y) + \{(\nabla_X h)(Y, Z) \\ &\quad - (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(X)h(Y, Z) - \tau(Y)h(X, Z)\}\xi \end{aligned}$$

olur[10].

3.1.15.Yardımcı Teorem

$\tilde{\nabla}$ konneksiyonu f üzerinde projektif düzlemsel(flat) ise

$$\begin{aligned} W(X, Y)Z &= \gamma(Y, Z)X - \gamma(X, Z)Y + \tilde{\gamma}(Y, Z)X - \tilde{\gamma}(X, Z)Y + h(Y, Z)S(X) \\ &\quad - h(X, Z)S(Y). \end{aligned}$$

İspat

$$\begin{aligned} \tilde{W}(X, Y)f_*(Z) &= (W(X, Y)Z - \gamma(Y, Z)X + \gamma(X, Z)Y - h(Y, Z)S(X) \\ &\quad + h(X, Z)S(Y) - \tilde{\gamma}(Y, Z)X + \tilde{\gamma}(X, Z)Y) = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

ve

$$(\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(X)h(Y, Z) - \tau(Y)h(X, Z) = 0 \quad (3.41)$$

olur.

f_* lokal olarak birebir olduğundan

$$\begin{aligned} W(X, Y)Z - \gamma(Y, Z)X + \gamma(X, Z)Y - h(Y, Z)S(X) + h(X, Z)S(Y) - \tilde{\gamma}(Y, Z)X \\ + \tilde{\gamma}(X, Z)Y = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} W(X, Y)Z = \gamma(Y, Z)X - \gamma(X, Z)Y + h(Y, Z)S(X) - h(X, Z)S(Y) + \tilde{\gamma}(Y, Z)X \\ - \tilde{\gamma}(X, Z)Y. \end{aligned}$$

3.1.1. Sonuç

$\tilde{\nabla}$ f üzerinde ve ∇ da M üzerinde projektif düzlemsel(flat) ise

$$R(X, Y)Z = \tilde{\gamma}(Y, Z)X - \tilde{\gamma}(X, Z)Y + h(Y, Z)S(X) - h(X, Z)S(Y)$$

olur.

İspat

3.1.15. Yardımcı Teorem den açıktır.

3.1.2. Sonuç

$\tilde{\nabla}$ konneksiyonu f üzerinde projektif düzlemsel(flat) ve ∇ da M üzerinde projektif düzlemsel(flat) ise

$$\text{Ric}(Y, Z) = (n-1) \tilde{\gamma}(Y, Z) + h(Y, Z)\dot{\text{Iz}}S - h(S(Y), Z).$$

İspat

3.1.1. Sonuç tan

$$\begin{aligned} \text{Ric}(Y, Z) &= \dot{\text{Iz}}\{X \rightarrow R(X, Y)Z\} \\ &= \dot{\text{Iz}}\{ \tilde{\gamma}(Y, Z)X - \tilde{\gamma}(X, Z)Y + h(Y, Z)S(X) - h(X, Z)S(Y) \} \\ &= (n-1) \tilde{\gamma}(Y, Z) + \dot{\text{Iz}}(h(Y, Z)S(X) - h(X, Z)S(Y)) \\ &= (n-1) \tilde{\gamma}(Y, Z) + h(Y, Z)\dot{\text{Iz}}S - h(S(Y), Z) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

3.1.3. Sonuç

$\tilde{\nabla}$ konneksiyonu f üzerinde projektif düzlemsel(flat) ve ∇ , M üzerinde projektif düzlemsel(flat) ve ayrıca $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu düzlemsel(flat) ise

$$\text{Ric}(Y, Z) = h(Y, Z)\dot{\text{Iz}}S - h(S(Y), Z).$$

İspat

3.1.2. Sonuç tan $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu düzlemsel(flat) ise

$$\tilde{R}(X, Y)f_*(Z) = 0$$

olacağından $\tilde{\gamma} = 0$ ve

$$\text{Ric}(Y, Z) = h(Y, Z)\tilde{I}zS - h(S(Y), Z)$$

elde edilir.

3.1.4. Sonuç

$(\tilde{M}, \tilde{V})$ projektif düzlemsel (flat) ise,

$$(\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z) \quad (3.42)$$

İspat

(3.41) denkleminde açıktır.

3.1.13. Tanım (Codazzi Denklemi)

$$(\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) - \tau(Y)h(X, Z) = 0$$

ifadesine h için Codazzi denklemi denir[10].

3.1.14. Tanım (Kübik Form)

$$C(X, Y, Z) = (\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z)$$

ifadesine afin immersionun kübik formu denir[12].

3.1.16. Teorem

Afin immersionun C kübik formu herhangi iki yere göre simetriktir[12].

İspat

h için Codazzi denkleminde ;

$$C(X, Y, Z) = C(Y, X, Z)$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$C(Y, Z, X) = (\nabla_Y h)(Z, X) + \tau(Y)h(Z, X)$$

$$C(X, Z, Y) = (\nabla_X h)(Z, Y) + \tau(X)h(Z, Y)$$

$$C(Z, X, Y) = (\nabla_Z h)(X, Y) + \tau(Z)h(X, Y)$$

$$C(Z, Y, X) = (\nabla_Z h)(Y, X) + \tau(Z)h(Y, X)$$

eėitlikleri gz nne alınarak ;

$$C(X, Y, Z) = X[h(Y, Z)] - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

ve h simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} C(X, Y, Z) &= X[h(Z, Y)] - h(Z, \nabla_X Y) - h(\nabla_X Z, Y) \\ &= C(X, Z, Y) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$C(Y, X, Z) = Y[h(X, Z)] - h(\nabla_Y X, Z) - h(X, \nabla_Y Z)$$

$$\begin{aligned}
&= Y[h(Z, X)] - h(Z, \nabla_Y X) - h(\nabla_Y Z, X) \\
&= C(Y, Z, X)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$C(X, Y, Z) = C(X, Z, Y) = C(Y, X, Z) = C(Y, Z, X)$$

ve

$$C(X, Y, Z) = C(Y, X, Z)$$

olduğundan

$$C(X, Z, Y) = C(Z, X, Y)$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
C(Z, X, Y) &= Z[h(X, Y)] - h(\nabla_Z X, Y) - h(X, \nabla_Z Y) \\
&= Z[h(Y, X)] - h(Y, \nabla_Z X) - h(\nabla_Z Y, X) \\
&= C(Z, Y, X)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$C(X, Y, Z) = C(X, Z, Y) = C(Y, X, Z) = C(Y, Z, X) = C(Z, Y, X) = C(Z, X, Y).$$

Bu afin immersionun C kübik formunun simetrik olduğunu gösterir.

3.1.17. Teorem

(M, ∇, ω) ve $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ eşafin(equiafin) yapılar, $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin immersion, ξ transversal alanı eşafin(equiafin) ise

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z).$$

İspat

ξ eşafin(equiafin) ise $\tau = 0$ ve 3.1.4. Sonuç tan

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z)$$

olur.

3.1.18. Teorem

(M, ∇, ω) , $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ eşafin(equiafin), ξ transversal vektör alanı şafin(equiafin) iken $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ projektif düzlemsel(flat) ise

$$(\nabla_Y S)(X) - \tilde{\gamma}(Y, \xi)X = (\nabla_X S)(Y) - \tilde{\gamma}(X, \xi)Y.$$

İspat

$$\tilde{\omega}(X, Y)\xi = \tilde{R}(X, Y)\xi - \tilde{\gamma}(Y, \xi)X + \tilde{\gamma}(X, \xi)Y$$

$\tilde{\nabla}$ projektif düzlemsel(flat) ise $\tilde{\omega} = 0$.

$\tilde{\omega} = 0$ olması

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = \tilde{\gamma}(Y, \xi)X - \tilde{\gamma}(X, \xi)Y \quad (3.43)$$

olmasını gerektirir.

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi$$

denkleminden

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi &= \tilde{\nabla}_X (-f_*(S(Y)) + \tau(Y)\xi) \\ &= \tilde{\nabla}_X (-f_*(S(Y))) + \tilde{\nabla}_X (\tau(Y)\xi) \\ &= -f_*(\nabla_X S(Y)) - h(X, S(Y))\xi + X[\tau(Y)]\xi + \tau(Y)\tilde{\nabla}_X \xi \\ &= -f_*(\nabla_X S(Y) + \tau(Y)S(X)) - \{h(X, S(Y)) - X[\tau(Y)] - \tau(Y)\tau(X)\}\xi \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi = -f_*(\nabla_Y S(X) + \tau(X)S(Y)) - \{h(Y, S(X)) - Y[\tau(X)] - \tau(X)\tau(Y)\}\xi$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi = -f_*(S[X, Y]) + \tau([X, Y])\xi.$$

(3.34) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)\xi &= f_*(-(\nabla_X S)(Y) + \tau(X)S(Y) + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X)) \\ &\quad + (-h(X, S(Y)) + h(Y, S(X)) + 2d\tau(X, Y))\xi \end{aligned} \quad (3.44)$$

ve ξ transversal vektör alanı eşafin(equiafin) olduğundan

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)\xi &= f_*(-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X)) \\ &\quad + (-h(X, S(Y)) + h(Y, S(X)))\end{aligned}$$

olur. $\tilde{\nabla}$ projektif düzlemsel (flat) olduğundan

$$\text{Tan } \tilde{R}(X, Y)\xi = 0 \text{ ve } \text{trans } \tilde{R}(X, Y)\xi = 0$$

ve buradan da

$$-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X) = 0 \quad (3.45)$$

bulunur. (3.43) denkleminde

$$(\nabla_Y S)(X) - (\nabla_X S)(Y) = \tilde{\gamma}(Y, \xi)X - \tilde{\gamma}(X, \xi)Y$$

veya

$$(\nabla_Y S)(X) - \tilde{\gamma}(Y, \xi)X = (\nabla_X S)(Y) - \tilde{\gamma}(X, \xi)Y \quad (3.46)$$

elde edilir.

3.1.19. Teorem

(M, ∇, ω) , $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ eşafin(equiafin), ξ transversal vektör alanı eşafin(equiafin) iken $\tilde{\nabla}$ düzlemsel (flat) ise

- (i) $(\nabla_Y S)(X) = (\nabla_X S)(Y)$
- (ii) $h(S(X), Y) = h(X, S(Y))$.

İspat

(i)

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = \tilde{\gamma}(Y, \xi)X - \tilde{\gamma}(X, \xi)Y$$

eşitliğinden $\tilde{\nabla}$ düzlemsel(flat) ise

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = 0.$$

3.1.18. Teorem den

$$(\nabla_Y S)(X) - (\nabla_X S)(Y) = \tilde{\gamma}(Y, \xi)X - \tilde{\gamma}(X, \xi)Y$$

ve (3.44) denkleminde de

$$(\nabla_Y S)(X) - (\nabla_X S)(Y) = 0$$

olduğundan

$$(\nabla_Y S)(X) = (\nabla_X S)(Y)$$

olur.

(ii)

(3.44) denkleminde;

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)\xi = & f_*(-(\nabla_X S)(Y) + \tau(X)S(Y) + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X)) \\ & + (-h(X, S(Y)) + h(Y, S(X)) + 2d\tau(X, Y))\xi \end{aligned}$$

olduğundan ve $\tilde{\nabla}$ düzlemsel(flat) olduğundan,

$$\text{Trans } \tilde{R}(X, Y)\xi = 0.$$

$$-h(X, S(Y)) + h(Y, S(X)) + 2d\tau(X, Y) = 0$$

elde edilir. ξ transversal vektör alanı eşafin(equiafin) olduğundan

$$h(S(X), Y) = h(X, S(Y))$$

olur.

3.1.20. Teorem

$f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin immersion olsun. Z , M üzerinde tanjant vektör alanı ve ϕ , M üzerinde C^∞ fonksiyon olmak üzere ξ_1 transversal vektör alanı $\xi_2 = f_*(Z) + \phi\xi_1$ şeklinde değiştiğinde, afin temel form, indirgenmiş afin konneksiyon, konneksiyon 1-formu ve afin şekil operatörü arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$(i) \quad h_2 = \frac{1}{\phi} h_1$$

$$(ii) \quad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{\phi} h_1(X, Y)Z$$

$$(iii) \quad \tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{\phi} h_1(Z, \cdot) + d\log|\phi|$$

$$(iv) \quad S_2 = \phi S_1 - \nabla Z + \tau_2(\cdot)Z$$

Burada $h_1(Z, \cdot), \nabla, \tau_2(\cdot)Z$ şeklinde tanımlı ifadelerin X üzerinde aldığı değerler sırasıyla $h_1(Z, X), \nabla_X, \tau_2(X)Z$ dir[12].

İspat

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h_1(X, Y)\xi_1 \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X f_*(Y) &= f_*(\bar{\nabla}_X Y) + h_2(X, Y)\xi_2 \\ &= f_*(\bar{\nabla}_X Y) + h_2(X, Y) f_*(Z) + h_2(X, Y)\phi\xi_1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

(3.47) ve (3.48) denklemlerinden transversal kısımlar karşılaştırılırsa

(i)

$$\begin{aligned} h_1(X, Y)\xi_1 &= h_2(X, Y)\phi\xi_1 \\ &= \phi h_2(X, Y)\xi_1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$h_2 = \frac{1}{\phi} h_1$$

elde edilir.

Yine (3.47) ve (3.48) denklemlerinden tanjant kısımlar karşılaştırılırsa

(ii)

$$f_*(\nabla_X Y) = f_*(\bar{\nabla}_X Y + h_2(X, Y)Z)$$

bulunur.

(i) den dolayı

$$f_*(\nabla_X Y) = f_*(\bar{\nabla}_X Y + \frac{1}{\phi} h_1(X, Y) Z)$$

f_* lokal olarak birebir olduğundan

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \frac{1}{\phi} h_1(X, Y) Z$$

elde edilir.

(iii)

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \xi_2 &= \tilde{\nabla}_X (f_*(Z) + \phi \xi_1) \\ &= f_*(\nabla_X Z) + h_1(X, Z) \xi_1 + X[\phi] \xi_1 + \phi(-f_*(S_1(X)) + \tau_1(X) \xi_1) \\ &= f_*(\nabla_X Z - \phi S_1(X)) + (h_1(X, Z) + X[\phi] + \phi \tau_1(X)) \xi_1 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \xi_2 &= -f_*(S_2(X) + \tau_2(X) \xi_2) \\ &= -f_*(S_2(X) + \tau_2(X) f_*(Z) + \phi \tau_2(X) \xi_1) \end{aligned} \quad (3.50)$$

(3.49) ve (3.50) denklemlerinden transversal kısımlar karşılaştırılırsa

$$\phi \tau_2(X) = h_1(X, Z) + X[\phi] + \phi \tau_1(X)$$

$$\tau_2(X) = \tau_1(X) + \frac{1}{\phi} h_1(X, Z) + \frac{X[\phi]}{\phi}$$

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{\phi} h_1(X, Z) + d\log|\phi|$$

elde edilir.

(iv)

(3.48) ve (3.49) denklemlerinden tanjant kısımlar karşılaştırılırsa

$$f_*(-S_2(X) + \tau_2(X)Z) = f_*(\nabla_X Z - \phi S_1(X))$$

f_* lokal olarak bire-bir olduğundan

$$-S_2(X) + \tau_2(X)Z = \nabla_X Z - \phi S_1(X)$$

Buradan

$$S_2(X) = \phi S_1(X) - \nabla_X Z + \tau_2(X)Z$$

ve

$$S_2 = \phi S_1 - \nabla_X Z + \tau_2(\cdot)Z$$

elde edilir.

4. BLASCHKE İMMERSİYONLARI

4.1. Tanım ve Teoremler

3.1.20 Teorem (i) den açıktır ki, h afin temel formunun rankı ξ transversal vektör alanının seçiminden bağımsızdır. Blaschke immersionlarında $\tilde{\nabla}$ afin konneksiyonu olarak D , $\tilde{M}$ yerine R^{n+1} alınacaktır.

4.1.1. Tanım (Bozulmamış İmmersion)

h afin temel formun rankı hiperyüzey immersionunun rankı olarak tanımlanır. h bozulmamış ise hiperyüzey immersionu da bozulmamıştır denir[12].

4.1.2. Tanım

$f : M \rightarrow R^{n+1}$ bozulmamış hiperyüzey immersionu olsun. R^{n+1} de hacim elementi determinant fonksiyonu olarak tanımlansın.

ξ transversal vektör alanı keyfi seçilerek, M üzerinde h afin temel formu, ∇ indirgenmiş afin konneksiyonu ve θ indirgenmiş hacim elementi belirlenir. ξ transversal vektör alanı uygun hale getirilerek aşağıdaki iki şart sağlanır.

(I) (∇, θ) eşafin(equiafin) yapıdır. Yani; $\nabla \theta = 0$.

(II) Bozulmamış h metriğinin ω_h hacim elementi ile θ hacim elementi çakışır[10].

4.1.1.Yardımcı Teorem

$\phi \neq 0$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve h , 2. dereceden simetrik kovaryant tensör olmak üzere

$$(i) \quad \bar{\theta} = \phi\theta \text{ ise}$$

$$\det_{\bar{\theta}} h = \phi^{-2} \det_{\theta} h.$$

$$(ii) \quad \phi \neq 0 \text{ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve}$$

$$\bar{h} = \phi^{-1}h \text{ ise}$$

$$\det_{\theta} \bar{h} = \phi^{-n} \det_{\theta} h.$$

$$(iii) \quad \bar{\theta} = \phi\theta \text{ ve } \bar{h} = \phi^{-1}h \text{ ise}$$

$$\det_{\bar{\theta}} \bar{h} = \phi^{-(n+2)} \det_{\theta} h.$$

İspat

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, θ için unimodüler bir baz olsun. Yani; $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$ olsun.

$$(i) \quad \bar{\theta} = \phi\theta \text{ için } \theta(X_1, X_2, \dots, X_n) = \phi\theta(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) = 1$$

olduğundan

$\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n\}$ de $\bar{\theta}$ için ünimodüler baz ise

$$\bar{\theta}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) = \phi\theta(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$$

$$= \theta(\phi \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$$

$$= \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

olduğundan ve θ n-formu için bir tek $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ unimodüler baz bulunabildiğinden

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{\phi} X_1, \bar{X}_i = X_i, \quad 2 \leq i \leq n$$

bulunur.

$\det_{\bar{\theta}} h = \det[h_{ij}] = |h(\bar{X}_i, \bar{X}_j)|$ eşitliğinden

$$\det_{\bar{\theta}} h = |h(\bar{X}_i, \bar{X}_j)| = \begin{vmatrix} h(\bar{X}_1, \bar{X}_1) & h(\bar{X}_1, \bar{X}_2) & \dots & h(\bar{X}_1, \bar{X}_n) \\ h(\bar{X}_2, \bar{X}_1) & h(\bar{X}_2, \bar{X}_2) & \dots & h(\bar{X}_2, \bar{X}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(\bar{X}_n, \bar{X}_1) & h(\bar{X}_n, \bar{X}_2) & \dots & h(\bar{X}_n, \bar{X}_n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} h(\frac{1}{\phi} X_1, \frac{1}{\phi} X_1) & h(\frac{1}{\phi} X_1, \bar{X}_2) & \dots & h(\frac{1}{\phi} X_1, \bar{X}_n) \\ h(\frac{1}{\phi} X_1, \bar{X}_2) & h(\bar{X}_2, \bar{X}_2) & \dots & h(\bar{X}_2, \bar{X}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(\frac{1}{\phi} X_1, \bar{X}_n) & h(\bar{X}_2, \bar{X}_n) & \dots & h(\bar{X}_n, \bar{X}_n) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\phi^2} \begin{vmatrix} h(X_1, X_1) & h(X_1, X_2) & \dots & h(X_1, X_n) \\ h(X_2, X_1) & h(X_2, X_2) & \dots & h(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(X_n, X_1) & h(X_n, X_2) & \dots & h(X_n, X_n) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\phi^2} \det_{\theta} h$$

$$= \phi^{-2} \det_{\theta} h$$

elde edilir.

(ii)

$$\bar{h} = \phi^{-1} h$$

ise

$$\det_{\theta} \bar{h} = |\bar{h}(X_i, X_j)|$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{h}(X_1, X_1) & \bar{h}(X_1, X_2) & \dots & \bar{h}(X_1, X_n) \\ \bar{h}(X_2, X_1) & \bar{h}(X_2, X_2) & \dots & \bar{h}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{h}(X_n, X_1) & \bar{h}(X_n, X_2) & \dots & \bar{h}(X_n, X_n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\phi} h(X_1, X_1) & \frac{1}{\phi} h(X_1, X_2) & \dots & \frac{1}{\phi} h(X_1, X_n) \\ \frac{1}{\phi} h(X_2, X_1) & \frac{1}{\phi} h(X_2, X_2) & \dots & \frac{1}{\phi} h(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\phi} h(X_n, X_1) & \frac{1}{\phi} h(X_n, X_2) & \dots & \frac{1}{\phi} h(X_n, X_n) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\phi^n} |h(X_i, X_j)|$$

$$= \phi^{-n} \det_{\theta} h.$$

elde edilir.

(iii)

$$\bar{\theta} = \phi \theta \text{ ve } \bar{h} = \phi^{-1} h$$

ise

$$\det_{\bar{\theta}} \bar{h} = \phi^{-(n+2)} \det_{\theta} h$$

olduğu (i) ve (ii) den açıktır.

4.1.2. Teorem

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ bozulmamış hiperyüzey immersionu olsun. Her $x_0 \in M$ noktası için 4.1.2. Tanım (I), (II) şartlarını sağlayacak şekilde x_0 in bir komşuluğunda işaretli olarak tanımlanmış bir tek ξ transversal vektör alanı vardır[12].

İspat

θ ve h aynı bir $x_0 \in M$ noktası komşuluğunda tanımlanmış hacim elementi ve bozulmamış metrik olsun. 2. dereceden h simetrik kovaryant tensörünün θ ya bağlı determinanı $\det_\theta h$ ve $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, θ için unimodüler bir baz olsun.

Eğer $h_{ij} = h(X_i, X_j)$ ise, bu durumda $[h_{ij}]$ matrisinin determinanı $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ unimodüler bazının seçiminden bağımsızdır. Bu determinant $\det_\theta h$ ile gösterilsin. Keyfi ξ transversal vektör alanı için ∇ , θ ve h mevcuttur. ω_h hacim elementi

$$\omega_h(X_1, X_2, \dots, X_n) = |\det[h_{ij}]|^{1/2}.$$

O zaman $|\det_\theta h| = 1$ olduğu zaman $\omega_h = \theta$ olur. Yani;

$$\begin{aligned} \omega_h(X_1, X_2, \dots, X_n) = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n) &\Leftrightarrow |\det[h_{ij}]|^{1/2} = |\det_\theta h| \\ &\Leftrightarrow \det_\theta h = 1. \end{aligned}$$

Şimdi Z , bir tanjant vektör alanı ve ϕ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere ξ transversal vektör alanı $\xi_2 = \phi \xi_1 + f_*(Z)$ şeklinde değişsin.

3.1.20. Teorem den $h_2 = \frac{1}{\phi} h_1$ eşitliği göz önüne alınarak

$$\theta(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi)$$

ve

$$\xi_2 = \phi \xi_1 + f_*(Z)$$

için

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), f_*(Z)) + \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \phi\xi) \\
&= \phi \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi) \\
&= \phi \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\bar{\theta} = \phi \theta$$

elde edilir. 4.1.1. Yardımcı Teorem (iii) den $\det_{\bar{\theta}} \bar{h} = \phi^{-(n+2)} \det_{\theta} h$ bulunur.

Böylece $\phi = |\det_{\theta} h|^{1/n+2}$ olması halinde $\omega_{\bar{h}} = \bar{\theta}$ olur. Z tanjant vektör alanı hiçbir şarta bağlı değildi. Şimdi ξ_2 nin 4.1.2. Tanım (II) şartını sağlamasıyla Z tanjant vektör alanı (I) şartını sağlayacak şekilde seçilir. 3.1.20. Teorem (iii) den

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{\phi} h_1(Z, \cdot) + d \log |\phi|. \quad (4.1)$$

h bozulmamış olduğundan, Z transversal vektör alanı (4.1) denkleminin sağ tarafı sıfır olacak şekilde seçilebilir. Bu durumda ξ_2 transversal vektör alanı (I) ve (II) şartlarının ikisini de sağlar. Şimdi ξ_1 ve ξ_2 transversal vektör alanları (I) ve (II) şartlarını sağlasın. Bu durumda;

$$|\det_{\theta} h| = 1 = |\det_{\bar{\theta}} \bar{h}|.$$

Böylece 4.1.1. Yardımcı Teorem (iii) den $|\phi| = 1$ elde edilir. Yani $\phi = \mp 1$. ξ_1 ve ξ_2 transversal vektör alanları için (II) şartından dolayı $\tau_1 = \tau_2 = 0$. $\phi = \mp 1$ olduğundan $\tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{\phi} h_1(Z, \cdot) + d\log|\phi|$ eşitliğinde $Z = 0$ olmak zorundadır. Böylece $\xi_2 = \mp \xi_1$ elde edilir. Bu ise ξ_2 nin işarete bağlı olarak tek olduğunu gösterir.

4.1.3.Tanım (Blaschke Normal Alan)

4.1.2. Tanımdan (I) ve (II) şartlarını sağlayan ξ transversal alanına Afin Normal Alan veya Blaschke Normal Alan denir. Blaschke Normal Alanı lokal bir şekilde işarete bağlı olarak tek türlü belirlenir[12].

4.1.4.Tanım (Blaschke Yapısı)

ξ Afin Normal alanının tespit edilmesiyle ∇ , indirgenmiş afin konneksiyonu, h , afin temel form ve S , afin şekil operatörü (3.1) ve (3.24) denklemlerinden belirlenir. Böylece elde edilen (∇, h, S) yapısına M hiperyüzeyi üzerinde Blaschke Yapısı denir[12].

4.1.5.Tanım (Blaschke Hiperyüzeyi)

ξ afin normal vektör alanı olmak üzere, $f : (M, \nabla) \rightarrow (R^{n+1}, D)$ afin immersionuna Blaschke İmmersionu denir. M ye Blaschke Hiperyüzeyi denir[12].

4.1.6.Tanım (Blaschke konneksiyonu)

∇ , indirgenmiş afin konneksiyonuna Blaschke konneksiyonu denir[12].

4.1.1.Sonuç

4.1.1. Teorem den açıktır ki, Blascke Yapısı eşafin(equiafin) transformasyonlar altında invaryant kalır. M bozulmamış hiperyüzeyi yönlendirilebilirse ξ , Afin Normal Alanı, M üzerinde global olarak tanımlanır ve bu ξ nin işaretine bağlıdır. ξ nin yönü M nin yönü olarak tanımlanır.

4.1.2. Teorem

M, Blaschke hiperyüzeyi için aşağıdaki temel denklemler doğrudur.

$$(i) \quad R(X, Y)(Z) = h(Y, Z)S(X) - h(X, Z)S(Y) \quad ; \text{ Gauss denklemi}$$

$$(ii) \quad (\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) \quad ; h \text{ için Codazzi denklemi}$$

$$(iii) \quad (\nabla_X S)(Y) = (\nabla_Y S)(X) \quad ; S \text{ için Codazzi denklemi:}$$

$$(iv) \quad h(S(X), Y) = h(X, S(Y)) \quad ; \text{ Ricci denklemi}$$

$$(v) \quad \nabla \theta = 0 \quad ; \text{ Eşafin(equiafin) Şartı}$$

$$(vi) \quad \theta = \omega_h \quad ; \text{ Hacim Şartı}$$

$$(vii) \quad : \quad \nabla \omega_h = 0 . \quad ; \text{ Apolarity Şartı}$$

İspat

3.1.7. Teorem ve 4.1.2. Tanım (I), (II) şartlarından açıktır.

4.1.3. Teorem

(∇, h, S) Blaschke Yapısı ve $(n \geq 2)$ olmak üzere bir bozulmamış hiperyüzey için;

- (i) $S = 0$ olması için gerek ve yeter şart $R = 0$ olmasıdır.
- (ii) $\text{Ric}(Y, Z) = h(Y, Z)\text{İz}S - h(S(Y), Z)$ ile tanımlanan Ricci tensörü için $\text{Ric} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $S = 0$ olmasıdır.
- (iii) λ , bir skalar fonksiyon olmak üzere; $S = \lambda I$ ise, λ sabittir.

İspat

(i)

$S = 0$ ise 4.1.2. Teorem (i) den dolayı $R = 0$.

Tersine $R = 0$ olsun. Bu taktirde h ya bağlı $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ortonormal bazı için $h(X_i, X_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $\varepsilon_i = \mp 1$. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere herhangi bir i için $k \neq i$ alınırsa $0 = h(X_k, X_k)S(X_i) = \varepsilon_k S(X_i)$ olduğundan $\varepsilon_k \neq 0$ olması $S(X_i) = 0$ olmasını gerektirir. $\forall i$ için bu işlem tekrar edilerek $S = 0$ elde edilir.

(ii)

$S = 0$ ise Ricci tensörün tanımından $\text{Ric} = 0$.

Tersine $\text{Ric} = 0$ olsun. Her Z için $h(\nabla_Z S(Y) - S(Y), Z) = 0$ ve h bozulmamış olduğundan her Y için $S(Y) = (\nabla_Z S)Y$ bulunur. Buradan $S = (\nabla_Z S)I_n$ Her iki yanın ∇_Z i alınarak ;

$$\nabla_Z S = n \nabla_Z S \text{ veya } (n-1) \nabla_Z S = 0 \text{ veyahutta } \nabla_Z S = 0$$

olur.

(iii)

4.1.2. Teorem (iii) den dolayı

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(Y) &= \nabla_X(S(Y) - S(\nabla_X Y)) \\ &= X[\lambda]Y + \lambda(\nabla_X Y) - \lambda(\nabla_X Y) \\ &= X[\lambda]Y. \end{aligned}$$

Yine 4.1.2. Teorem (iii) ,S için Codazzi denkleminde X ve Y de simetrik olduğundan

$$X[\lambda]Y = Y[\lambda]X.$$

O halde her X için $X[\lambda] = 0$ elde edilir. Bu ise λ nın sabit olmasıdır.

4.1.7. Tanım (Özlü(Proper)- Özlü olmayan(Improper) Afin Hiperküre)

$S = 0$ ise M Blaschke hiperyüzeyine, improper afin hiperküre denir.

λ . sıfırdan farklı sabit bir skalar ve $S = \lambda I$ ise M Blaschke hiperyüzeyine, proper afin hiperküre denir[12].

4.1.3. Teorem

- (i) M , Blaschke hiperyüzeyi improper afin hiperküre ise , afin normaller $\mathbb{R}^{n+1}$ de paraleldir.
- (ii) Eğer M , Blaschke hiperyüzeyi proper afin hiperküre ise; afin normaller $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir merkez(center)noktasında birleşirler.

İspat

(i)

$D_x \xi = -f_*(S(X)) = 0$ olduğundan aşıkardır.

(ii)

$S(X) = \lambda X$ olsun. $x \in M \rightarrow y = f(x) + \frac{1}{\lambda} \xi$ dönüşümü göz önüne alınırsa herbir $X \in T_x(M)$ için

$$\begin{aligned}
 D_x y &= f_*(X) + \frac{1}{\lambda} D_x \xi \\
 &= f_*(X) + \frac{1}{\lambda} f_*(S(X)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Bu ise gösterir ki y sabit bir noktadır. Bu noktaya y_0 denecek olursa afin normaller y_0 da birleşirler.

4.1.4. Teorem

- (i) Afın Normaller $\mathbb{R}^{n+1}$ de paralel ise , M, Blaschke Hiperyüzeyi bir İmproper Afın hiperküre dir.
- (ii) Afın normaller $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir noktada birleşirlerse, bu taktirde M, Blaschke Hiperyüzeyi proper afın hiperküredir.

İspat

(i)

Afın normaller $\mathbb{R}^{n+1}$ de paralel ise bu taktirde M üzerinde $\lambda\xi$ paralel vektör alanı olacak şekilde sıfır olmayan bir λ diferensiyellenebilir fonksiyonu bulunabilir.

O halde

$$\begin{aligned} D_X(\lambda\xi) &= X[\lambda]\xi - \lambda f_*(S(X)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$S(X) = 0 \text{ ve } S = 0$$

elde edilir.

(ii)

Afin normaller R^{n+1} de bir noktada birleşirlerse bu taktirde $x \in M$ noktasının seçilişinden bağımsız, $y = f(x) + \lambda \xi$ olacak şekilde bir λ diferensiyellenebilir fonksiyonu bulunabilir. Böylece her bir $X \in T_x(M)$ için

$$f_*(X) + X[\lambda]\xi - \lambda f_*(S(X)) = 0$$

bulunur. O halde

$$S(X) = \frac{1}{\lambda} X$$

elde edilirki bu ise M nin proper afin hiperküre olmasıdır.

4.1.5. Teorem

$f : M \rightarrow R^{n+1}$ Blaschke Yapısı ile birlikte bir bozulmamış immersion olsun. f nin bir Afin Hiperküre olması için gerek ve yeter şart M üzerinde her ∇ -jeodeziğin R^{n+1} de belirli bir 2-düzlem üstünde yatmasıdır.

İspat

f bir afin hiperküre olsun. $S = \lambda I$ ve $0 \leq t \leq c$, ($c \geq 0$) olmak üzere x_t ,

∇ -jeodezik olsun. Her bir t için Σ_t düzlemi, $\xi_t = \xi_{x_t}$ ve $f_*(\bar{x}_t)$ vektörleri tarafından gerilen $f(x_t)$ noktası boyunca 2-düzlem olsun. Yani;

$$x : [0, c] \rightarrow M \xrightarrow{f} R^{n+1} \text{ ve } f \circ x : [0, c] \rightarrow R^{n+1}$$

$$\Sigma_t = \{ f(x_t) + x_1(t) f_*(\bar{x}_t) + x_2(t) \xi_t \mid 0 \leq t \leq c \}$$

şeklinde ifade edilirse Σ_t düzlemi, $f_*(\bar{x}_t)$ ve ξ_t vektörleri tarafından gerilir.

Buradan

$$\overrightarrow{f(x_t)y} = x_1(t) f_*(\bar{x}_t) + x_2(t)\xi_t$$

denkleminde

$$y = f(x_t) + x_1(t) f_*(\bar{x}_t) + x_2(t)\xi_t$$

elde edilir. Ayrıca

$$x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \bar{x}_t$$

olduğundan

$$D_{x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} f_*(x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)) = f_*(\nabla_{x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} (x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right))) + h(x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right))\xi \quad (4.1)$$

$$D_{\bar{x}_t} \xi = -\lambda f_*(\bar{x}_t) \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2) denklemlerinden

$$D_{\bar{x}_t} f_*(\bar{x}_t) \in S_p\{f_*(\bar{x}_t), \xi_t\}$$

$$D_{\bar{x}_t} \xi \in S_p\{f_*(\bar{x}_t), \xi_t\}$$

elde edilir. O halde bu denklemlerin her ikisinde Σ_t düzlemine aittir. Böylece Σ_t , R^{n+1} de paraleldir. Buradan x_t jeodeziği, x_0 boyunca Σ_0 2-düzleminde yatar. Tersine $h(X_0, X_0) \neq 0$ olacak şekilde $X_0 \in T_{X_0}(M)$ olsun. x_t jeodeziği (x_0, X_0) başlangıç şartıyla göz önüne alındığı taktirde hipotezden x_t jeodeziğini içeren bir Σ_0 düzlemi vardır. O halde ξ_t için

$$D_{x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} f_*\left(x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = h(\bar{x}_t, \bar{x}_t)\xi_t.$$

$h(\bar{x}_t, \bar{x}_t) \neq 0$ olduğundan ξ_t , Σ_0 düzlemine paraleldir. Çünkü $D_t \bar{x}_t$ paraleldir. Özellikle Σ_0 düzlemi ξ_{X_0} ve $f_*(X_0)$ vektörleri tarafından gerilir.

$D_t \xi_t \big|_{t=0} = -f_*(S(X_0))$, Σ_0 düzleminde yattığından λ, μ skalarlar olmak üzere

$$f_*(S(X_0)) = \lambda f_*(X_0) + \mu \xi_0.$$

Böylece $SX_0 = \lambda X_0$ ve $\mu = 0$ elde edilir ve λ, X_0 ın seçilişinden bağımsızdır. O halde $S = \lambda I$ bulunurki, bu ise f nin afin hiperküre olmasıdır.

4.1 6. Teorem

V , n -boyutlu reel vektör uzayı ve h , V üzerinde tanımlı iç çarpım olsun. λ , X e bağlı bir skalar ve $h(X, X) \neq 0$ olmak üzere S lineer endomorfizmi $SX = \lambda X$ özelliğine sahip olsun. Bu durumda, λ sabit olmak üzere

$$S = \lambda I$$

dır.

İspat

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, V de h ya bağlı bir ortonormal baz olsun. hipotezden ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere $SX_i = \lambda_i X_i$ olacak şekilde λ_i skalarları vardır. Şimdi λ_i lerin hepsinin eşit olduğunu göstermek gerekir. $i \neq j$ olması durumunda $Z = X_i + 2X_j$ eşitliği h ya bağlı olarak sıfır değildir. Yani $h(Z, Z) \neq 0$ olması ve hipotezden $SZ = \lambda Z$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} SZ &= S(X_i + 2X_j) \\ &= \lambda_i X_i + 2\lambda_j X_j \\ &= \lambda(X_i + 2X_j) \end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınarak lineer bağımsızlıktan $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$ elde edilir.

4.1.2. Sonuç

Eğer x_0 noktası Afın hiperkürenin bir noktası ise, $X_0 \neq 0$ ve $X_0 \in T_{X_0}(M)$ olmak üzere (x_0, X_0) başlangıç şartlı geodezik, X_0 ve ξ_0 tarafından gerilen Σ_0 düzlemine aittir.

4.1.8. Tanım (Afin Gauss-Kronecker Eğriliği- Afin Ortalama Eğriliği)

Bir M Blaschke hiperyüzeyinin Afin Gauss-Kronecker Eğriliği $K = \det S$ ile,

Afin ortalama eğriliği $H = \frac{1}{n} \text{İz } S$ ile tanımlanır[12].

4.2. Afin Normal Alanın Bulunması

- (1) Keyfi bir ξ transversal vektör alanı seçilerek τ konneksiyon bir formu hesaplanır.
- (2) $\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi$, Gauss denkleminde ξ için h afin temel formu belirlenir. h nın bozulmamış olup olmadığı kontrol edilir. Blaschke immersionlarında $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu yerine R^{n+1} in D düzlemsel konneksiyonu kullanılır.
- (3) $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n) = \det[f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi]$ eşitliğinden ξ için θ indirgenmiş hacim elementi belirlenir.
- (4) $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$ olacak şekilde $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ unimodüler baz seçilerek $h_{ij} = h(X_i, X_j)$ için $\det[h_{ij}] = \det_\theta h$ hesaplanır.
- (5) $\phi = |\det_\theta h|^{1/n+2}$ alınarak, $\tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{\phi} h_1(Z, \cdot) + d\log|\phi|$ denkleminde $\tau_1 + \frac{1}{\phi} h_1(Z, \cdot) + d\log|\phi| = 0$ eşitliğiyle Z tanjant vektör alanı belirlenerek $\xi_2 = \phi\xi_1 + f_*(Z)$ dönüşümü ile ξ_2 bulunur. Eğer $\tau_1 = 0$ ise her X için $h(Z, X) = -X[\phi]$ olur.
- (6) ξ_2 Afin Normal bulunduktan sonra $h_2 = \frac{1}{\phi} h_1$ afin metrik, S afin şekil operatörü ve ∇ indirgenmiş konneksiyon hesaplanır.

4.3. ÖRNEKLER

4.3.1. Eliptik paraboloid

$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ fonksiyonunun grafiği, $f : M = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ immersionu olarak göz önüne alınsın.

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(x^2 + y^2)) \in \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{R}^2$ üstünde $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ koordinat vektör alanları için

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = (1, 0, x)$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = (0, 1, y).$$

$\xi = (0, 0, 1)$ keyfi transversal vektör alanı için

$$D_{\frac{\partial}{\partial x}} \xi = -f_*(S(X)) + \tau(X) \xi$$

denklemden

$$(0, 0, 0) = -f_*(S(X)) + \tau(X)(0, 0, 1)$$

elde edilir. Buradan $\tau = 0$ ve $S = 0$ bulunur.

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ unimodüler bir bazdır. Şimdi

$$D_{\frac{\partial}{\partial x}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = (0, 0, 1) = \xi$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial y}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = (0, 0, 1) = \xi$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial x}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = (0, 0, 0) = D_{\frac{\partial}{\partial y}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Buradan

$$D_{\frac{\partial}{\partial x}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = f_*\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}\right) + h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\xi$$

$$(0, 0, 1) = f_*\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}\right) + h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)(0, 0, 1)$$

denklemden

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0 \text{ ve } h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 1$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}(\frac{\partial}{\partial y}) = 0$ ve $h(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) = 1$

elde edilir. Yine

$$D_{\frac{\partial}{\partial x}} f_*(\frac{\partial}{\partial y}) = f_*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}) + h(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})\xi$$

$$(0, 0, 0) = f_*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}) + h(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})(0, 0, 1)$$

denklemden

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(\frac{\partial}{\partial y}) = 0 \text{ ve } h(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 0$$

Benzer şekilde

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}(\frac{\partial}{\partial x}) = 0 \text{ ve } h(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}) = 0$$

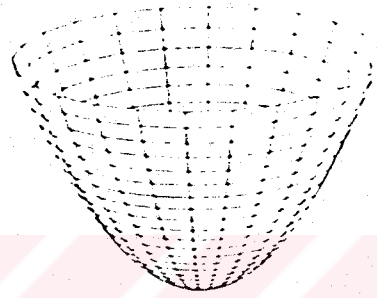
elde edilir. Böylece

$$\det_{\theta} h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

bulunur. ξ afin normaldir. $\phi = 1$ ve $Z = 0$ dır. $S = 0$ ve f improper afin küredir. ∇ indirgenmiş konneksiyonu düzlemsel ve $\{x, y\}$, ∇ için düzlemsel koordinat sistemidir. Afin metrik pozitif tanımlıdır. İşareti $(+, +)$ dır. Bu örnek

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^n, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x^i)^2)$$

n- boyutlu eliptik paraboloidde genelleştirilebilir.



Şekil 4.1. Eliptik paraboloid

4.3.2. Hiperbolik paraboloid

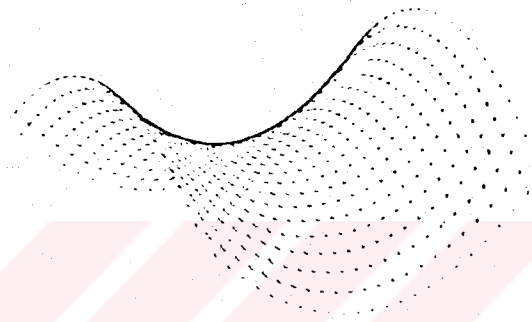
$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ fonksiyonunun grafiği $f : M = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ immersionu olarak göz önüne alınsın.

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)) \in \mathbb{R}^3$$

ile tanımlansın. 4.1.1. Örnek teki işlemler aynen tekrarlanırsa Afın metriğin işareti (+, -) olan bir İmproper afın küre elde edilir. Bu örneğin n-boyuta genelleştirilmesi, Afın metriğin işareti (p, n-p) olmak üzere

$$F(x^1, x^2, \dots, x^n) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^n (x^i)^2 \right)$$

kuadratik fonksiyonu olarak bulunur.



Şekil 4.2. Hiperbolik paraboloid

4.3.3. Bir fonksiyonun grafiği

$x^{n+1} = F(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\mathbb{R}^n$ nin bir G tanım bölgesi üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere ;

$$f : (x^1, x^2, \dots, x^n) \in G \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^n, F(x^1, x^2, \dots, x^n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

immersionu göz önüne alınarak 4.1.1. Örnek deki gibi keyfi bir transversal vektör alanı $\xi_1 = (0, 0, \dots, 1)$ olarak seçilsin.

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \xi_1 = 0 \text{ olduğundan } \tau = 0.$$

$\frac{\partial}{\partial x^j}$ koordinat vektör alanı ve $F_j = \frac{\partial F}{\partial x^j}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= (0, 0, \dots, 1, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^j}) \\ &= (0, 0, \dots, 1, \dots, F_j) . \end{aligned}$$

O halde

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = f_*\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \xi_1$$

$$F_{ij} \xi_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \xi_1$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0 \quad \text{ve} \quad h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = F_{ij} .$$

Böylece f immersionunun bozulmamış olması için gerek ve yeter şart

$\det [F_{ij}] \neq 0$ olmasıdır. Burada $\det_\theta h$ aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \det \left[f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \dots, f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right), \xi_1 \right] = 1$$

ve

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = F_{ij} .$$

Böylece $\phi = |\det[F_{ij}]|^{1/n+2}$ olarak bulunur.

Son olarak $\frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n h_{ij} Z^j = 0$ denklemi çözülerek Z tanjant vektör alanı

$$Z = \sum_{i=1}^n Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

olarak bulunur. $[F^{ij}]$, $[F_{ij}]$ matrisinin ters matrisi ve $\phi = |\det[F_{ij}]|^{1/n+2}$ olmak üzere, ξ_2 afin normali

$$\xi_2 = - \sum_{k,i=1}^n (F^{ki} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}) f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) + \phi \xi_1$$

olarak bulunur.

5. AFİN HİPERYÜZEY İMMERSIONLARIN TRANSVERSAL SİMETRİĞİ

5. 1. Hiperyüzey İmmersionunun Transversal Simetriği

5. 1.1 Teorem

$\tilde{M}$ afin uzay ve $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin hiperyüzey immersionu ξ , f ile eşleşen transversal vektör alanı ξ ye göre f nin Şekil Operatörü $S \neq \frac{1}{2}I_n$ olmak üzere $g : M \rightarrow \tilde{M}$, $g(x) = f(x) - 2\xi_x$ immersionu da bir afin hiperyüzey immersionudur.

İspat

ξ transversal vektör alanının g hiperyüzey immersionu için de transversal vektör alanı olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g_*(Y) &= f_*(Y) - \tilde{\nabla}_Y \xi \\ &= f_*(Y) + 2f_*(S(Y)) - 2\tau(Y)\xi \\ &= f_*((I + 2S)(Y)) - 2\tau(Y)\xi \end{aligned}$$

bulunur. $g_*(Y)$ ve ξ lineer bağımsızdır.

$$c_1 g_*(Y) + c_2 \xi = 0$$

$$c_1 (f_*(Y) + 2f_*(S(Y)) - 2\tau(Y)\xi) + c_2 \xi = 0$$

$$c_1 (f_*(I + 2S)Y) + (-2c_1 \tau(Y) + c_2) \xi = 0.$$

f afin hiperyüzey immersionu ve f_* lokal olarak birebir olduğundan,

$$c_1 (I + 2S)Y = 0 \text{ ve } (I + 2S)Y \neq 0$$

olması

$$c_1 = 0$$

olmasını gerektirir.

$$c_1 = 0 \text{ ise } c_2 = 0$$

elde edilir.

5.1.1. Tanım (Afin Hiperyüzey İmmersionunun Transversal Simetriği)

$f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin hiperyüzey immersionu için 5.1.1. Teorem deki $g : (M, \nabla') \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ afin hiperyüzey immersionuna ξ transversal vektör alanına göre f hiperyüzey immersionunun transversal simetriği denir. Burada

$$(I + 2S)(Y) \in \text{Ker}(I + 2S) \text{ ve } \text{Ker}(I + 2S) = \{X \in \chi(M) \mid S(X) = -\frac{1}{2}X\}$$

g nin tanımından $\text{Ker}(I + 2S) = \{0\}$.

$$\text{Boy} \chi(M) = \text{boy}(\text{Im}(I + 2S)) + \text{boy} \text{Ker}(I + 2S)$$

$$n = \text{boy}(\text{Im}(I + 2S))$$

$I + 2S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dönüşümü regüler bir dönüşümdür.

f hiperyüzey immersionu olduğundan

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_* (\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi$$

ve g transversal hiperyüzey immersionu olduğundan

$$\tilde{\nabla}_X g_*(Y) = g_* (\nabla'_X Y) + h'(X, Y)\xi .$$

$$\begin{aligned} g_* (\nabla'_X Y) &= f_* (\nabla'_X Y) - 2\tilde{\nabla}_{\nabla'_X Y}\xi \\ &= f_* (\nabla'_X Y) + 2f_*(S(\nabla'_X Y)) - 2\tau(\nabla'_X Y)\xi \\ &= f_* ((I + 2S)\nabla'_X Y) - 2\tau(\nabla'_X Y)\xi. \end{aligned}$$

elde edilir.

5.1.2. Teorem

$f, g : M \rightarrow \tilde{M}$, 5.1.1 Teorem deki afin hiperyüzey immersionları olsun. f nin şekil operatörü S , konneksiyon bir formu τ , g nin şekil operatörü S' , konneksiyon bir formu τ' olmak üzere bunlar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$(i) \quad \tau' = \tau (I - 2S')$$

$$(ii) \quad S' = S (I - 2S') \text{ veya } S = (I + 2S)S' .$$

İspat

(i)

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_*(S(X)) + \tau(X)\xi \quad (5.1)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -g_*(S'(X)) + \tau'(X)\xi \quad (5.2)$$

(5. 1) ve (5. 2) denklemlerinden

$$-f_*(S(X)) + \tau(X)\xi = -g_*(S'(X)) + \tau'(X)\xi \quad (5.3)$$

(5. 3) denkleminde

$$g_*(S'(X)) = f_*(S'(X)) + 2S(S'(X)) - 2\tau(S'(X))\xi$$

elde edilir. Bu değer (5. 3) denkleminde yerine yazılırsa

$$-f_*(S(X)) + \tau(X)\xi = -f_*(S'(X)) + 2S(S'(X)) + (\tau'(X) + 2\tau(S'(X)))\xi \quad (5. 4)$$

elde edilir. (5. 4) denkleminde transversal kısımlar karşılaştırılırsa

$$\tau(X) = \tau'(X) + 2\tau(S'(X))$$

$$\tau'(X) = \tau(X) - 2\tau(S'(X))$$

$\forall X \in (M)$ için

$$\tau' = \tau - 2\tau S'$$

$$\tau' = \tau(I - 2S')$$

elde edilir.

(ii)

(5. 4) denkleminde tanjant kısımlar karşılaştırılırsa

$$-f_*(S(X)) = -f_*((S'(X)) + 2S(S'(X)))$$

ve f_* lokal olarak birebir olduğundan

$$S(X) = S'(X) + 2S(S'(X))$$

$$S = S' + 2S S'$$

$$S = (I + 2S) S' \tag{5.5}$$

veya

$$S' = S(I - 2S') \tag{5.6}$$

elde edilir.

5.1.1 Sonuç

$$(I + 2S)^{-1} = I - 2S'.$$

İspat

$$(I + 2S)(I - 2S') = I + 2(-2SS' + S - S')$$

$$= I + 2[S(I - 2S') - S']$$

eşitliğinden ve (5.6) denkleminde

$$\begin{aligned} (I + 2S)(I - 2S') &= I + 2[S(I - 2S') - S(I - 2S')] \\ &= I \end{aligned} \quad (5.8)$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} (I - 2S')(I + 2S) &= I + 2S - 2S' - 4S'S \\ &= I + 2[-S'(I + 2S) + S] \end{aligned}$$

(5.5) denkleminde

$$(I - 2S')(I + 2S) = I \quad (5.9)$$

bulunur. (5.8) ve (5.9) denklemlerinden

$$(I + 2S)^{-1} = (I - 2S')$$

elde edilir.

5.1.3. Teorem

$f, g : M \rightarrow \tilde{M}$, 5.1.1. Teorem deki afin hiperyüzey immersionları olsun. f nin M üzerine indirgediği ∇ konneksiyonu ile g nin M üzerine indirgediği ∇' konneksiyonu için

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + 2(I + 2S)^{-1}((\nabla_X S)(Y) + \tau(Y)S(X))$$

bağıntısı vardır.

İspat

$g(x) = f(x) - 2\xi$ olmak üzere $\forall Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g_*(Y) &= f_*(Y) - \tilde{\nabla}_Y \xi \\ &= f_*(Y) + 2f_*(S(Y)) - 2\tau(Y)\xi \\ &= f_*((I + 2S)(Y)) - 2\tau(Y)\xi. \end{aligned}$$

$\forall Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X g_*(Y) &= g_*(\nabla'_X Y) + h'(X, Y)\xi \\ \tilde{\nabla}_X g_*(Y) &= \tilde{\nabla}_X (f_*(Y) - 2\tilde{\nabla}_Y \xi) \\ &= \tilde{\nabla}_X (f_*(Y) + 2f_*(S(Y)) - 2\tau(Y)\xi) \\ &= \tilde{\nabla}_X f_*(Y) + 2\tilde{\nabla}_X f_*(S(Y)) - 2\tilde{\nabla}_X (\tau(Y)\xi) \\ &= f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi + 2(f_*(\nabla_X S)(Y)) + 2h(X, S(Y))\xi \\ &\quad - 2X[\tau(Y)]\xi + 2\tau(Y)f_*(S(X)) - 2\tau(Y)\tau(X)\xi \\ &= f_*(\nabla_X Y + 2(\nabla_X S)(Y) + 2\tau(Y)S(X)) + (h(X, Y) + 2h(X, S(Y)) \\ &\quad - 2X[\tau(Y)] - 2\tau(Y)\tau(X))\xi \end{aligned} \tag{5.10}$$

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} g_*(\nabla'_X Y) &= f_*(\nabla'_X Y) - 2\tilde{\nabla}_{\nabla'_X Y} \xi \\ &= f_*(\nabla'_X Y) + 2f_*(S(\nabla'_X Y)) - 2\tau(\nabla'_X Y)\xi \end{aligned}$$

$$= f_*((I + 2S) \nabla'_X Y) - 2\tau(\nabla'_X Y)\xi$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X g_*(Y) &= g_* (\nabla'_X Y) + h'(X, Y)\xi \\ &= f_*((\nabla'_X Y) + 2S(\nabla'_X Y)) + (h'(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))\xi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

(5.10) ve (5.11) denklemlerinden f_* lokal olarak birebir olduğundan

$$\begin{aligned} (\nabla'_X Y) + 2S(\nabla'_X Y) &= \nabla_X Y + 2(\nabla_X S(Y) + 2\tau(Y)S(X)) \\ &= \nabla_X Y + 2(\nabla_X S)(Y) + 2S(\nabla_X Y) + 2\tau(Y)S(X). \end{aligned}$$

Buradan

$$(I + 2S) (\nabla'_X Y) = (I + 2S) \nabla_X Y + 2(\nabla_X S)(Y) + 2\tau(Y)S(X)$$

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + 2(I + 2S)^{-1}((\nabla_X S)(Y) + 2\tau(Y)S(X))$$

elde edilir.

5.1.4. Teorem

$f, g : M \rightarrow \tilde{M}$, 5.1.1. Teorem deki afin hiperyüzey immersionları olsun. h, f için simetrik bilineer form ve h', g için simetrik bilineer form olmak üzere

$$\begin{aligned} h'(X, Y) &= h(X, (I + 2S)(Y)) + \\ &\quad 2\{2\tau[(I + 2S)^{-1}((\nabla_X S)(Y) + 2\tau(Y)S(X))] - (\nabla_X \tau)(Y) - \tau(Y)\tau(X)\}. \end{aligned}$$

İspat

5.1.3. Teorem, (5.10) ve (5.11) denklemlerinden transversal kısımlar eşitlenirse,

$$h'(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y) = h(X, Y) + 2h(X, S(Y)) - 2X[\tau(Y)] - 2\tau(Y)\tau(X)$$

elde edilir. Buradan,

$$h'(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y) = h(X, Y) + 2h(X, S(Y)) - 2(\nabla_X \tau)(Y) - 2\tau(\nabla_X Y) - 2\tau(Y)\tau(X)$$

$$h'(X, Y) = h(X, (I+2S)Y) + 2\{\tau(\nabla'_X Y - \nabla_X Y) - (\nabla_X \tau)(Y) - \tau(Y)\tau(X)\}$$

5.1. 2. Teorem ve 5.1.3. Teorem den

$$h'(X, Y) = h(X, (I+2S)Y) + 2\{2\tau[(I+2S)^{-1}((\nabla_X S)(Y) + 2\tau(Y)S(X))] - (\nabla_X \tau)(Y) - \tau(Y)\tau(X)\}$$

elde edilir.

5.1.5. Teorem

$g : M \rightarrow \tilde{M}$, 5.1.1. Teorem deki afın hiperyüzey immersionu ve ∇' konneksiyonunun eğrilik tensörü R' olmak üzere

$$(i) \quad \text{Tan } \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) = g_*(R'(X, Y)Z - (h'(Y, Z)S'(X) - h'(X, Z)S'(Y)))$$

- (ii) $\text{Trans } \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z)$
 $= \{ (\nabla'_X h')(Y, Z) + \tau'(X)h'(Y, Z) - (\nabla'_Y h')(X, Z) - \tau'(Y)h'(X, Z) \}$
- (iii) $\text{Tan } \tilde{R}_g(X, Y)\xi = -(\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)$
- (iv) $\text{Trans } \tilde{R}_g(X, Y)\xi = -h'(X, S'(Y)) + h'(S'(X), Y) + 2d\tau'(X, Y)$

İspat

g immersionunda afin immersion olduğundan 3.1.7. Teorem den açıktır.

5.1.6. Teorem

$f, g : M \rightarrow \tilde{M}$, 5.1.1. Teorem deki afin hiperyüzey immersionları ve ∇ ile ∇' konneksiyonlarının eğrilik tensörleri sırası ile R ve R' olmak üzere

- (i) $\text{tan } \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) = (I+2S)^{-1}R(X, Y)(I+2S)(Z) - h(Y, (I+2S)Z)(I+2S)^{-1}S(X)$
 $+ h(X, (I+2S)Z)(I+2S)^{-1}S(Y)$
 $- 2\tau(Z)(I+2S)^{-1}(\text{tan } \tilde{R}(X, Y)\xi)$
- (ii) $\text{trans } \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) = (\nabla_X h)(Y, (I+2S)Z) + \tau(X)h(Y, (I+2S)Z)$
 $- (\nabla_Y h)(X, (I+2S)Z) + \tau(Y)h(X, (I+2S)Z)$
 $- 2\tau(Z) \text{tan } \tilde{R}(X, Y)\xi + 2\tau(\text{tan } \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z))$
- (iii) $\text{tan } \tilde{R}_g(X, Y)\xi = (I+2S)^{-1} \text{tan } \tilde{R}_f(X, Y)\xi$
- (iv) $\text{trans } \tilde{R}_g(X, Y)\xi = \text{trans } \tilde{R}_f(X, Y)\xi + 2\tau \tilde{R}_g(X, Y)\xi.$

İspat

$$\begin{aligned}\tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) &= g_* \{ R'(X, Y)Z - (h'(Y, Z)S'(X) - h'(X, Z)S'(Y)) \} + \\ &\quad \{ (\nabla'_X h')(Y, Z) + \tau'(X)h'(Y, Z) - (\nabla'_Y h')(X, Z) - \tau'(Y)h'(X, Z) \} \\ &\quad (5.12)\end{aligned}$$

(5.12) denkleminde

$$\begin{aligned}g_* \{ R'(X, Y)Z - (h'(Y, Z)S'(X) - h'(X, Z)S'(Y)) \} &= \\ f_* \{ R'(X, Y)Z - (h'(Y, Z)S'(X) - h'(X, Z)S'(Y)) \} & \\ -2\tilde{\nabla}_{[R'(X, Y)Z - h'(Y, Z)S'(X) + h'(X, Z)S'(Y)]}\xi & \\ = f_* \{ R'(X, Y)Z - (h'(Y, Z)S'(X) - h'(X, Z)S'(Y)) \} -2\tilde{\nabla}_{R'(X, Y)Z}\xi & \\ + 2\tilde{\nabla}_{h'(Y, Z)S'(X)}\xi - 2\tilde{\nabla}_{h'(X, Z)S'(Y)}\xi &\quad (5.13)\end{aligned}$$

(5.13) denkleminde

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{R'(X, Y)Z}\xi &= -f_*(S(R'(X, Y)Z)) + \tau(R'(X, Y)Z)\xi \\ \tilde{\nabla}_{h'(Y, Z)S'(X)}\xi &= -f_*(S(h'(Y, Z)S'(X))) + \tau(h'(Y, Z)S'(X))\xi \\ \tilde{\nabla}_{h'(X, Z)S'(Y)}\xi &= -f_*(S(h'(X, Z)S'(Y))) + \tau(h'(X, Z)S'(Y))\xi\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler (5.13) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$g_* \{ R'(X, Y)Z - (h'(Y, Z)S'(X) - h'(X, Z)S'(Y)) \} =$$

$$\begin{aligned}
& f_* \{ R'(X, Y)Z - (h'(Y, Z)S'(X) - h'(X, Z)S'(Y)) + 2S(R'(X, Y)Z) \\
& - 2S(h'(Y, Z)S'(X)) + 2S(h'(X, Z)S'(Y)) \} - 2\tau(R'(X, Y)Z)\xi + 2\tau(h'(Y, Z)S'(X))\xi \\
& - 2\tau(h'(X, Z)S'(Y))\xi
\end{aligned} \tag{5.14}$$

(5.14) denklemi (5.12) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) &= f_* \{ R'(X, Y)Z - (h'(Y, Z)S'(X) - h'(X, Z)S'(Y)) + 2S(R'(X, Y)Z) \\
& - 2S(h'(Y, Z)S'(X)) + 2S(h'(X, Z)S'(Y)) \} + \\
& \{ (\nabla'_X h')(Y, Z) + \tau'(X)h'(Y, Z) - (\nabla'_Y h')(X, Z) - \tau'(Y)h'(X, Z) \\
& - 2\tau(R'(X, Y)Z) + 2\tau(h'(Y, Z)S'(X)) - 2\tau(h'(X, Z)S'(Y)) \} \xi
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Diğer taraftan

$$\tilde{R}(X, Y)\{f_*(Z) + 2f_*(S(Z)) - 2\tau(Z)\xi\} = \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y)\{f_*(Z) + 2f_*(S(Z)) - 2\tau(Z)\xi\} &= f_* \{ R(X, Y)Z - h(Y, Z)S(X) + h(X, Z)S(Y) \} \\
& + \{ (\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) - \tau(Y)h(X, Z) \} \xi \\
& + 2f_* \{ R(X, Y)S(Z) - h(Y, S(Z))S(X) + h(X, S(Z))S(Y) \} \\
& + 2\{ (\nabla_X h)(Y, S(Z)) + \tau(X)h(Y, S(Z)) - (\nabla_Y h)(X, S(Z)) + \tau(Y)h(X, S(Z)) \} \xi \\
& - 2\tau(Z)f_* \{ -(\nabla_X S)(Y) + \tau(X)S(Y) + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X) \} \\
& - 2\tau(Z)\{-h(X, S(Y)) + h(S(X), Y) + 2d\tau(X, Y)\}\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) = & f_* \{ R(X, Y)Z + 2R(X, Y)S(Z) - h(Y, Z)S(X) - 2h(Y, S(Z))S(X) + h(X, Z)S(Y) + \\
& 2h(X, S(Z))S(Y) + 2\tau(Z)(\nabla_X S)(Y) - 2\tau(Z)\tau(X)S(Y) - 2\tau(Z)(\nabla_Y S)(X) \\
& + 2\tau(Z)\tau(Y)S(X) \} + \{ (\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) - \tau(Y)h(X, Z) \\
& + 2(\nabla_X h)(Y, S(Z)) + 2\tau(X)h(Y, S(Z)) - 2(\nabla_Y h)(X, S(Z)) + 2\tau(Y)h(X, S(Z)) \\
& + 2\tau(Z)h(X, S(Y)) - 2\tau(Z)h(S(X), Y) - 2\tau(Z)d\tau(X, Y) \} \xi
\end{aligned} \quad (5.16)$$

elde edilir. (5.15) ve (5.16) denklemlerinden tanjant kısımlar karşılaştırılırsa;
 f_* lokal olarak birebir olduğundan

$$\begin{aligned}
(I + 2S)R'(X, Y)Z - (I + 2S)[h'(Y, Z)S'(X) - (I + 2S)h'(X, Z)S'(Y)] = \\
R(X, Y)((I + 2S)Z) - h(Y, (I + 2S)Z)S(X) + h(X, (I + 2S)Z)S(Y) \\
+ 2\tau(Z)\{(\nabla_X S)(Y) - \tau(X)S(Y) - (\nabla_Y S)(X) + \tau(Y)S(X)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
(I + 2S)(R'(X, Y)Z - h'(Y, Z)S'(X) + h'(X, Z)S'(Y)) = \\
R(X, Y)((I + 2S)Z) - h(Y, (I + 2S)Z)S(X) \\
+ h(X, (I + 2S)Z)S(Y) - 2\tau(Z) \tan \tilde{R}(X, Y)\xi.
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\tan \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) = (I + 2S)^{-1}R(X, Y)((I + 2S)Z) - h(Y, (I + 2S)Z)(I + 2S)^{-1}S(X) \\
h(X, (I + 2S)Z)(I + 2S)^{-1}S(Y) - 2\tau(Z)(I + 2S)^{-1} \tan \tilde{R}(X, Y)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (i) nin ispatıdır.

(5.15) ve (5.16) denklemlerinden transversal kısımlar karşılaştırılırsa;

$$\begin{aligned}
& (\nabla'_X h')(Y, Z) + \tau'(X)h'(Y, Z) - (\nabla'_Y h')(X, Z) - \tau'(Y)h'(X, Z) - 2\tau(R'(X, Y)Z) \\
& + 2\tau((h'(Y, Z)S'(X)) - 2\tau h'(X, Z)S'(Y)) = \\
& (\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) - \tau(Y)h(X, Z) + \\
& 2(\nabla_X h)(Y, S(Z)) + 2\tau(X)h(Y, S(Z)) - 2(\nabla_Y h)(X, S(Z)) + 2\tau(Y)h(X, S(Z)) \\
& + 2\tau(Z)h(X, S(Y)) - 2\tau(Z)h(S(X), Y) - 2\tau(Z)d\tau(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
\text{trans } \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) - 2\tau(\tan \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z)) = \\
(\nabla_X h)(Y, (I + 2S)Z) + \tau(X)h(Y, (I + 2S)Z) - \\
(\nabla_Y h)(X, (I + 2S)Z) - \tau(Y)h(X, (I + 2S)Z) - 2\tau(Z)\text{trans } \tilde{R}(X, Y)\xi
\end{aligned}$$

bulunur ki, buradan da

$$\begin{aligned}
\text{trans } \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z) = 2\tau(\tan \tilde{R}_g(X, Y)g_*(Z)) - 2\tau(Z)\text{trans } \tilde{R}(X, Y)\xi \\
+ (\nabla_X h)(Y, (I + 2S)Z) + \tau(X)h(Y, (I + 2S)Z) \\
- (\nabla_Y h)(X, (I + 2S)Z) - \tau(Y)h(X, (I + 2S)Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (ii) nin ispatıdır. Şimdi

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_g(X, Y)\xi = g_*((\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)) \\
+ (-h'(X, S'(Y)) + h'(S'(X), Y) + 2d\tau(X, Y))\xi
\end{aligned}$$

denkleminde

$$g_*((\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)) =$$

$$\begin{aligned}
& f_* (-(\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)) \\
& \quad - 2\tilde{\nabla}_{(-\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)} \xi = \\
& f_* (-(\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)) - 2\tilde{\nabla}_{(-\nabla'_X S')(Y)} \xi \\
& - 2\tilde{\nabla}_{\tau'(X)S'(Y)} \xi - 2\tilde{\nabla}_{(\nabla'_Y S')(X)} \xi - 2\tilde{\nabla}_{-\tau'(Y)S'(X)} \xi \quad (5.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
-2\tilde{\nabla}_{(-\nabla'_X S')(Y)} \xi &= -2f_*(S((\nabla'_X S')(Y))) + 2\tau((\nabla'_X S')(Y))\xi \\
-2\tilde{\nabla}_{\tau'(X)S'(Y)} \xi &= 2f_*(S(\tau'(X)S'(Y))) - 2\tau(\tau'(X)S'(Y))\xi \\
-2\tilde{\nabla}_{(\nabla'_Y S')(X)} \xi &= 2f_*(S((\nabla'_Y S')(X))) - 2\tau((\nabla'_Y S')(X))\xi \\
-2\tilde{\nabla}_{-\tau'(Y)S'(X)} \xi &= -2f_*(S(\tau'(Y)S'(X))) + 2\tau(\tau'(Y)S'(X))\xi
\end{aligned}$$

değerleri (5.17) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& g_* (-(\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)) \\
& = f_* (-(\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)) \\
& \quad - 2S((\nabla'_X S')(Y)) + 2S(\tau'(X)S'(Y)) + 2S((\nabla'_Y S')(X)) - 2S(\tau'(Y)S'(X)) \\
& \quad + (-h'(X, S'(Y)) + h'(S'(X), Y) + 2d\tau'(X, Y) \\
& \quad + 2\tau(\nabla'_X S')(Y) - 2\tau(\tau'(X)S'(Y)) - 2\tau(\nabla'_Y S')(X) + 2\tau(\tau'(Y)S'(X)))\xi \\
& = f_* (-(I+2S)(\nabla'_X S')(Y) + (I+2S)(\tau'(X)S'(Y)) + \\
& \quad (I+2S)(\nabla'_Y S')(X) - (I+2S)(\tau'(Y)S'(X))) + \{(-h'(X, S'(Y)) + h'(S'(X), Y) + \\
& \quad 2d\tau'(X, Y) + 2\tau((\nabla'_X S')(Y) - (\tau'(X)S'(Y)) - (\nabla'_Y S')(X) + (\tau'(Y)S'(X)))\}\xi \\
& \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\tilde{R}_f(X, Y)\xi &= f_*(-(\nabla_X S)(Y) + \tau(X)S(Y) + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X)) \\ &\quad (-h(X, S(Y)) + h(S(X), Y) + 2d\tau(X, Y))\xi\end{aligned}\quad (5.19)$$

(5.18) ve (5.19) denklemlerinden tanjant kısımlar karşılaştırılırsa f_* lokal olarak birebir olduğundan

$$\begin{aligned}(I+2S)(-(\nabla'_X S')(Y) + (\tau'(X)S'(Y)) + (\nabla'_Y S')(X) - (\tau'(Y)S'(X))) \\ = -(\nabla_X S)(Y) + \tau(X)S(Y) + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(I+2S)\tan \tilde{R}_g(X, Y)\xi = \tan \tilde{R}_f(X, Y)\xi$$

ve

$$\tan \tilde{R}_g(X, Y)\xi = (I+2S)^{-1} \tan \tilde{R}_f(X, Y)\xi$$

elde edilir. (5.18) ve (5.19) denklemlerinden transversal kısımlar karşılaştırılırsa

$$\text{trans } \tilde{R}_g(X, Y)\xi - 2\tau \tilde{R}_g(X, Y)\xi = \text{trans } \tilde{R}_f(X, Y)\xi$$

$$\text{trans } \tilde{R}_g(X, Y)\xi = \text{trans } \tilde{R}_f(X, Y)\xi + 2\tau \tilde{R}_g(X, Y)\xi$$

elde edilir. Bu ise (iv) nin ispatıdır.

5.1.7. Teorem

$f, g : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, 5.1.1. Teorem deki iki afin immersion olsun. ξ_1 ve ξ_2 , f ve g ile eşleştirilmiş transversal vektör alanları olsun. $g(x) = f(x) - 2\xi_x$ olmak üzere $[\xi_1]$ ve $[\xi_2]$ doğrultuları sadece h, h' nin özdeş sıfır olduğu kümede farklı olabilir.

İspat

$Z \in \chi(M)$ ve Z, M ye teğet vektör alanı ve ϕ, M üstünde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere;

$$\xi_2 = f_*(Z) + \phi \xi_1,$$

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h_2(X, Y) \xi_2$$

ve

3.1.5 Teorem den $h_2(X, Y) f_*(Z) = 0$ ve $\phi h_2(X, Y) = h_1(X, Y)$.

Şimdi

$$\tilde{\nabla}_X g_*(Y) = g_*(\nabla'_X Y) + h'_2(X, Y) \xi'_2 \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} g_*(\nabla'_X Y) &= f_*(\nabla'_X Y) - 2\tilde{\nabla}_{\nabla'_X Y} \xi'_2 \\ &= f_*(\nabla'_X Y) + 2f_*(S(\nabla'_X Y)) - 2\tau(\nabla'_X Y) \xi'_2 \\ &= f_*((I + 2S)\nabla'_X Y) - 2\tau(\nabla'_X Y) \xi'_2. \end{aligned}$$

O halde (5.20) denklemi

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X g_*(Y) &= f_*((I+2S)\nabla'_X Y) + (h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))\xi'_2 \\
&= f_*((I+2S)\nabla'_X Y + (h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))(I+2S)Z) \\
&\quad + (h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))(\phi - 2\tau(Z))\xi_1
\end{aligned} \tag{5.21}$$

şeklini alır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\xi'_2 &= g_*(Z) + \phi\xi_1 \\
\xi'_2 &= f_*(Z) - 2\tilde{\nabla}_Z \xi_1 + \phi\xi_1 \\
&= f_*(Z) + 2f_*(S(Z)) - 2\tau(Z)\xi_1 + \phi\xi_1 \\
&= f_*((I+2S)Z) + (\phi - 2\tau(Z))\xi_1.
\end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X g_*(Y) &= f_*((I+2S)\nabla'_X Y) + (h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))(I+2S)f_*(Z) \\
&\quad + (h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))(\phi - 2\tau(Z))\xi_1
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem

$$\tilde{\nabla}_X g_*(Y) = f_*((I+2S)\nabla'_X Y) - (2\tau(\nabla'_X Y) - h'_1(X, Y))\xi_1$$

denklemini ile karşılaştırılırsa

$$f_*((I+2S)\nabla'_X Y) = f_*((I+2S)\nabla'_X Y) + (h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))(I+2S)f_*(Z)$$

ve

$$h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))(\phi - 2\tau(Z))\xi_1 = h'_1(X, Y)\xi_1 - 2\tau(\nabla'_X Y)$$

bulunur. O halde

$$(h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y)(I+2S)f_*(Z)) = 0$$

ve

$$(\phi - 2\tau(Z))(h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))\xi_1 = (h'_1(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y))\xi_1$$

elde edilir. Eğer g , total geodezik değilse

$$h'_2(X, Y) - 2\tau(\nabla'_X Y) \neq 0 \text{ ve } (I+2S)f_*(Z) = 0 \text{ olacak şekilde } X, Y \in \chi(M)$$

vardır. O halde

$$\xi_2 = (\phi - 2\tau(Z))\xi_1$$

elde edilir.

5.1.8. Teorem

$f, g : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, 5.1.1. Teorem deki iki afin immersion olsun. f için ξ transversal vektör alanı $\xi_2 = f_*(Z) + \phi\xi_1$ şeklinde değiştiğinde g için ξ transversal vektör alanı $\xi'_2 = g_*(Z) + \phi\xi_1$ şeklinde değişiyorsa; bu durumda

$$\xi'_2 = \xi_2 - 2\tilde{\nabla}_Z \xi_1$$

elde edilir.

İspat

$\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g_*(X) &= f_*(X) - 2\tilde{\nabla}_X \xi_1 \\ &= f_*(X) + 2f_*(S(X)) - 2\tau(X)\xi_1 \end{aligned}$$

ise

$$f_*(X) = g_*(X) - 2f_*(S(X)) + 2\tau(X)\xi_1$$

elde edilir.

$$\xi_2 = f_*(Z) + \phi\xi_1$$

denklemden

$$\begin{aligned} \xi_2 &= g_*(Z) - 2f_*(S(Z)) + 2\tau(Z)\xi_1 + \\ &= g_*(Z) + \phi\xi_1 + 2(-f_*(S(Z)) + 2\tau(Z)\xi_1). \end{aligned}$$

Buradan

$$\xi_2 = \xi'_2 + 2\tilde{\nabla}_Z \xi_1$$

elde edilir. O halde

$$\xi'_2 = \xi_2 - 2\tilde{\nabla}_Z \xi_1$$

elde edilir.

5.1.9. Teorem

$f, g : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, 5.1.1. Teorem deki iki afin immersion olsun. ξ transversal vektör alanına göre g nin afin temel formu h' , afin şekil operatörü S' , g nin M üzerine indirgediği afin konneksiyon ∇' ve konneksiyon bir formu τ' olmak üzere $\xi'_2 = g_*(Z) + \phi \xi_1$ olduğunda,

- (i) $h'_2 = \frac{1}{\phi} h'_1$
- (ii) $\bar{\nabla}'_X Y = \nabla'_X Y - \frac{1}{\phi} h'_1(X, Y)Z$
- (iii) $\tau'_2 = \tau'_1 + \frac{1}{\phi} h'_1(Z, \cdot) + d\log|\phi|$
- (iv) $S'_2 = \phi S'_1 - \nabla'_X Z + \tau'_2(\cdot)Z$.

İspat

3.1.20. Teorem den açıktır.

5.1.2. Sonuç

$f, g : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, 5.1.1 Teorem deki afin immersionlar olmak üzere; ξ_2 ye göre afin temel formu $h'_2(X, Y)$, f nin ξ_1 e göre afin temel formu $h_1(X, Y)$ ve konneksiyon bir formu τ_1 ise

$$h'_2(X, Y) = \frac{1}{\phi} (h_1(X, (I + 2S)Y) - 2(\nabla_X \tau_1)(Y) - 2\tau_1(X)\tau_1(Y) + 4\tau_1(I + 2S)^{-1}((\nabla_X S)(Y) - \tau_1(Y)S(X)))$$

g için h'_2 afin temel formunun f için h_1 afin temel formu cinsinden değeridir.

İspat

3.1.20. Teorem ve 5.1.9. Teorem den açıktır.

5.1.3. Sonuç

$f, g : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, 5.1.1. Teorem deki afin immersionlar olmak üzere g için indirgenmiş konneksiyon $\bar{\nabla}'$, f için indirgenmiş konneksiyon ∇ ise

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}'_X Y = & \nabla_X Y + 2(I + 2S)^{-1} ((\nabla_X S)(Y) + \tau_1(Y)S(X)) \\ & - \frac{1}{\phi} \{ h_1(X, (I + 2S)Y)Z - 2(\nabla_X \tau_1)(Y)Z - 2\tau_1(X)\tau_1(Y)Z + \\ & 4(I + 2S)^{-1} ((\nabla_X S)(Y) + \tau_1(Y)S(X)Z) \} \end{aligned}$$

g afin immersionu için $\bar{\nabla}'$ indirgenmiş konneksiyonunun f immersionu için ∇ indirgenmiş konneksiyonu cinsinden değeridir.

İspat

3.1.20. Teorem ve 5.1.9. Teorem den açıktır.

5.1.4. Sonuç

$f, g : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, 5.1.1. Teorem deki afin immersionlar olmak üzere; g için afin temel formu τ'_2 , f için afin temel form τ_1 ise

$$\begin{aligned}\tau'_2(X) = & (I+2S)^{-1}\tau_1(X) + \frac{1}{\phi} (h_1(Z, (I+2S)X) - 2(\nabla_Z \tau_1)(X) - 2\tau_1(Z)\tau_1(X) \\ & + 4\tau_1(I+2S)^{-1}((\nabla_X S)(X) + \tau_1(Z)S(X)) + d\log|\phi|)\end{aligned}$$

g immersionu için afin temel formun f için afin temel form cinsinden değeridir.

İspat

3.1.20. Teorem ve 5.1.9. Teorem den açıktır.

5.1.5. Sonuç

f, g : (M, ∇) $\rightarrow$ ($\tilde{M}, \tilde{\nabla}$), 5.1.1. Teorem deki afin immersionlar olmak üzere; g immersionu için afin şekil operatörü S'_2 ve f immersionu için afin şekil operatörü S ise

$$\begin{aligned}S'_2(X) = & \phi(I+2S)^{-1}S(X) - \nabla_X Z - 2(I+2S)((\nabla_X S)(Z) + \tau(Z)S(X)) \\ & + \{(I+2S)^{-1}\tau_1(X) + (h_1(Z, (I+2S)X) - 2(\nabla_Z \tau_1)(X) - 2\tau_1(Z)\tau_1(X) \\ & + 4\tau_1(I+2S)^{-1}((\nabla_Z S)(X) + \tau_1(Z)S(X))\}Z\end{aligned}$$

g immersionu için S'_2 şekil operatörünün f immersionu için S şekil operatörü cinsinden değeridir.

İspat

3.1. 2. Teorem (ii) , 3.1.20. Teorem ve 5.1.9. Teorem den açıktır.

5.1.10. Teorem

$f, g : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, 5.1.1. Teorem deki iki afin immersion olsun. f immersionu için indirgenmiş hacim elementi ω_f ve g immersionu için hacim elementi ω_g ise;

$$\omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \det(I+2S)\omega_f(X_1, X_2, \dots, X_n) .$$

İspat

f, ξ transversal vektör alanlı afin immersion olduğundan

$$\omega_f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(f_*(X_1), f_*(X_2), \dots, f_*(X_n), \xi) .$$

Benzer şekilde g immersionu da ξ transversal vektör alanlı afin immersion olduğundan

$$\omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), \xi) .$$

$\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g_*(X) &= f_*(X) - 2\tilde{\nabla}_X \xi \\ &= f_*(X) + 2f_*(S(X)) - 2\tau(X)\xi \\ &= f_*(I+2S)(X) - 2\tau(X)\xi. \end{aligned}$$

Buradan

$$\omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(f_*(I+2S)(X_1) - 2\tau(X_1)\xi, f_*(I+2S)(X_2) - 2\tau(X_2)\xi, \dots, f_*(I+2S)(X_n) - 2\tau(X_n)\xi, \xi).$$

$\tilde{\omega}$, $(n+1)$ -alterne form olduğundan

$$\begin{aligned}\omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \tilde{\omega}(\tilde{\nabla}_X(I+2S)(X_1), f_*(I+2S)(X_2), \dots, f_*(I+2S)(X_n), \xi) \\ &= \omega_f((I+2S)(X_1), (I+2S)(X_2), \dots, (I+2S)(X_n))\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\omega(AX_1, AX_2, \dots, AX_n) = |A|\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad [19]$$

olduğundan

$$\omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \det(I+2S)\omega_f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

elde edilir.

5.1.11. Teorem

$g : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, 5.1.1. Teorem deki afin immersion olsun. g immersionu için hacim elementi ω' ve konneksiyon bir formu τ' olmak üzere;

$$\nabla'_X \omega_g = \tau'(X)\omega_g.$$

İspat

$\tilde{\omega}$ hacim elementi paralel olduğundan $\tilde{\nabla}_X \tilde{\omega} = 0$.

O halde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_X \tilde{\omega}(g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), \xi) &= X \tilde{\omega}(g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), \xi) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}(g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, \tilde{\nabla}_X g_*(X_i), \dots, g_*(X_n), \xi) \\
 &\quad - \tilde{\omega}(g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), \tilde{\nabla}_X \xi) \\
 &= X \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}(g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(\nabla_X X_i) + h(X, X_i), \dots, g_*(X_n), \xi) \\
 &\quad - \tilde{\omega}(g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), -f_*(S(X)) + \tau'(X)\xi) \\
 &= X \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^n \omega_g(X_1, X_2, \dots, \nabla'_X X_i, \dots, X_n) \\
 &\quad - \tau'(X) \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) \\
 &= \nabla'_X \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) - \tau'(X) \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğundan $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla'_X \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) - \tau'(X) \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

ve

$$\nabla'_X \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tau'(X) \omega_g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

elde edilir. Buradan,

$$\nabla'_X \omega_g = \tau'(X) \omega_g$$

bulunur.



5.2.ÖRNEKLER

5.2.1. İzometrik olarak immerse edilmiş(daldırılmış) hiperyüzey

(M, ρ) n -boyutlu, $(\tilde{M}, \tilde{\rho})$ $(n+1)$ - boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere sırasıyla ∇ ve $\tilde{\nabla}$ da M ve $\tilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonları olsun. Eğer $f: (M, \rho) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\rho})$ izometrik immersion ise, $f: (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ dönüşümü, birim normal vektör alanı lokal olarak verilen ξ transversal vektör alanı olarak göz önüne alınırsa bir afin immersiyondur.

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi$$

Gauss denklemi göz önüne alınırsa

$$N_x = \{\xi \in T_x(M) \mid \rho(\xi, X) = 0, X \in \chi(M)\}$$

$f: M \rightarrow \tilde{M}$ ise $\tilde{\rho}(f_*(X), N) = 0$ ve f izometrik olduğundan

$$\tilde{\rho}(f_*(X), f_*(Y)) = \rho(X, Y).$$

$\chi(\tilde{M}) = f_*(\chi(M)) \oplus S_p(N_x)$ olduğundan $\{f_*(X), N\}$ lineer bağımsız ve $N \notin f_*(\chi(M))$. Bu durumda

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + \rho(X, Y)N$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{f_*(X)} f_*(Y) &= f_*(\nabla_X Y) + \tilde{\rho}(f_*(X), f_*(Y))N \\ &= f_*(\nabla_X Y) + \rho(X, Y)N. \end{aligned}$$

O halde

$$h(X, Y) = \tilde{\rho}(f_*(X), f_*(Y)) = \rho(X, Y) \text{ ve}$$

$$\tilde{\nabla}_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)N$$

bulunur ki, bu da f nin izometrik olarak immerse edilmiş bir afin hiperyüzey olduğunu gösterir.

5.2.2. Afin Silindir

R^{n+1} de bir $\gamma(t)$ eğrisinin her bir noktası boyunca geçen $R^{n-1}(t)$ $(n-1)$ -afin uzaylarının paralel ailesi tarafından üretilmiş hiperyüzeye R^{n+1} de bir afin silindir denir. Afin silindir immersionu şu şekilde tanımlanır.

$\gamma(t)$, R^{n+1} de düzgün bir eğri ve $\xi(t)$, $\gamma(t)$ eğrisi boyunca vektör alanı ve R^{n-1} , R^{n+1} de $(n-1)$ -afin uzay olsun. R^{n+1} de bütün $(n-1)$ paralel uzaylar göz önüne alınsın ve bir $p \in R^{n+1}$ noktası boyunca $R^{n-1}(p)$ ile gösterilsin. Bu durumda

- (i) $\gamma'(t)$, $\xi(t)$ ve $R^{n-1}(\gamma(t))$ lineer bağımsız,
- (ii) $\gamma''(t) = \rho(t)\xi(t)$, ($\rho(t) = \rho$ belirli diferensiyellenebilir bir fonksiyon) olsun.

$f: R^n \rightarrow R^{n+1}$ dönüşümü için $R^n = R \times R^{n-1}$ olmak üzere $t \in R$ ve $y \in R^{n-1}$ için R^n nin her bir noktası (t, y) şeklinde ifade edilsin. Bu durumda

$f(t, y) = \gamma(t) + y$ bir immersiondur. $X \in \chi(R^n)$ için

$$f_*(X) = (X[\gamma_1(t) + y_1], \dots, X[\gamma_{n-1}(t) + y_{n-1}])$$

$$t, y \in R^n \text{ için } S_p \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right\} = \chi(R^n).$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} [f_1], \frac{\partial}{\partial t} [f_2], \dots, \frac{\partial}{\partial t} [f_{n+1}] \right) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_{n+1}(t))$$

ve

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i} [\gamma_1(t) + y_1], \dots, \frac{\partial}{\partial y^i} [\gamma_i(t) + y_i], \dots, \frac{\partial}{\partial y^i} [\gamma_{n+1}(t) + y_{n+1}] \right) = f_* \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \frac{\partial}{\partial y^i}$$

O halde

$$\begin{aligned} X &= X_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} X_i \frac{\partial}{\partial y^i} \\ f_*(X) &= X_0 f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} X_i f_* \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) \\ f_*(X) &= X_0 \gamma'(t) + \sum_{i=1}^{n-1} X_i \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) \\ &= X_0 \gamma'(t) + (X_1, \dots, X_{n-1}, 0, 0) \\ &= X_0 \gamma'(t) + \bar{X}. \end{aligned}$$

Şimdi (i) şartından dolayı $\{f_*(X), \xi\}$ lineer bağımsızdır.

$$c_1 f_*(X) + c_2 \xi = 0$$

$$c_1 (X_0 \gamma'(t) + \bar{X}) + c_2 \xi = 0 \text{ ve}$$

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \gamma'(t)$$

$$c_1 \gamma'(t) + c_2 \xi = 0.$$

$c_1\gamma'(t) = 0$ ise $\gamma'(t) \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ dır. O halde buradan $c_2\xi = 0$ ise $\xi \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ dır. Bu ise $\{f_*(X), \xi\}$ nin lineer bağımsız olduğunu gösterir. O halde

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = f_*\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}\right) + h\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\xi(t).$$

Buradan $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$ olduğundan

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = h\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\xi(t)$$

ve (i) şartından dolayı $h\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \rho(t)$ olduğundan

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \rho(t)\xi(t)$$

elde edilir. Yani

$$\tilde{\nabla}_t f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \tilde{\nabla}_t \gamma'(t) = \gamma''(t) = \rho(t)\xi(t)$$

bulunur.

5.2.1. Sonuç

5.2.2. Örnek gereğince özel olarak $\rho(t) = 1$ ve $\gamma'' = \xi$ alınırsa γ'' ile γ''' lineer bağımsız olurlar. Bu durumda buna proper afin silindir denir. O halde

$$\tilde{\nabla}_t \xi = \tilde{\nabla}_t \xi(t) = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \xi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -f_* \left(S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) + \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma''.$$

Burada daima $S \neq 0$, aynı şekilde $h \neq 0$ olur.

5.2.2. Sonuç

Afın silindir immersionunun transversal simetriği de yine bir afın silindir immersionudur.

İspat

5.2.2. Örnek ten $f(t, y) = \gamma(t) + y$.

$$\begin{aligned} g(t, y) &= f(t, y) - 2\xi(t) \\ &= \gamma(t) + y - 2\xi(t) \\ &= \gamma(t) - 2\xi(t) + y. \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(t) - 2\xi(t) \text{ ise}$$

$g(t, y) = \bar{\gamma}(t) + y$ elde edilir ki $\bar{\gamma}(t)$, $\gamma(t)$ nin transversal simetriğidir. O halde

$\{\bar{\gamma}'(t), \xi(t), R^{n-1}(\bar{\gamma}(t))\}$ lineer bağımsızdır. $f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \gamma'(t)$,

$$\begin{aligned} g_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) &= \bar{\gamma}'(t) \\ &= \gamma'(t) - 2 \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \xi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \gamma'(t) - 2 \left(-f_* \left(S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \right) - 2\tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma'(t) + 2f_*(S(\frac{\partial}{\partial t})) - 2\tau(\frac{\partial}{\partial t})\xi \\
&= f_*(\frac{\partial}{\partial t}) + 2f_*(S(\frac{\partial}{\partial t})) - 2\tau(\frac{\partial}{\partial t})\xi \\
&= f_*[(I + 2S)(\frac{\partial}{\partial t})] - 2\tau(\frac{\partial}{\partial t})\xi
\end{aligned}$$

elde edilir ki 5.2.2. Örnek ten f immersionu bir afin silindir immersionu olduğundan g transversal simetriği de bir afin silindir immersionudur.

5.2.3. Grafik İmmersion

(M, ∇) bir afin manifold ve ∇ düzlemsel konneksiyon olmak üzere $\varphi: (M, \nabla) \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir afin immersion olsun. Bu φ immersionu $\forall p \in M$ noktasının bir U açık komşuluğunu $\mathbb{R}^n$ de $\varphi(p)$ noktasının bir V açık komşuluğuna karşılık getiren ve konneksiyonu koruyan bir diffeomorfizmdir. Şimdi $\mathbb{R}^{n+1}$ de H hiperdüzlemi $H = \mathbb{R}^n$ ve ξ , H ya transversal, paralel vektör alanı olsun. Bu durumda $\tilde{\nabla}_X \xi = 0$ olur. Herhangi bir $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dönüşümü $x \in M$ için $f(x) = \varphi(x) + F(x)\xi$ şeklinde tanımlandığında

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \rightarrow f(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n, F(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

olur. $\forall Y \in \chi(M)$ için

$$f_*(Y) = \varphi_*(Y) + (dF)(Y)\xi.$$

O halde f bir immersiyondur. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X f_*(Y) &= \tilde{\nabla}_X(\varphi_*(Y)) + \tilde{\nabla}_X((Y[F])\xi) \\ &= \varphi_*(\nabla_X Y) + X[Y[F]]\xi + Y[F] \tilde{\nabla}_X \xi \\ &= \varphi_*(\nabla_X Y) + X[Y[F]]\xi\end{aligned}\quad (5.22).$$

$\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ve φ konneksiyonu koruyan dönüşüm olduğundan

$$\varphi_*(\nabla_X Y) = D_{\varphi_*(X)}\varphi_*(Y) = \tilde{\nabla}_X \varphi_*(Y)$$

eşitliği elde edilir ve transversal bileşen yoktur. Yani $h(X, Y)\xi = 0$. O halde

$$f_*(Y) = \varphi_*(Y) + (dF)(Y)\xi$$

denkleminde

$$\begin{aligned}f_*(\nabla_X Y) &= \varphi_*(\nabla_X Y) + \nabla_X Y[F]\xi \\ \varphi_*(\nabla_X Y) &= f_*(\nabla_X Y) - \nabla_X Y[F]\xi\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu değer (5.22) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X f_*(Y) &= f_*(\nabla_X Y) + X[Y[F]]\xi - \nabla_X Y[F]\xi \\ &= f_*(\nabla_X Y) + (X[Y[F]] - \nabla_X Y[F])\xi\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f , $h(X, Y) = X[Y[F]] - \nabla_X Y[F]$ transversal bileşenli bir afin immersiyondur. Bu ise F nin H Hessian ı ile çakışır. Böylece H Hessian ı

bozulmamış ise f de bozulmamıştır. Son olarak $\tilde{\nabla}_X \xi = 0$ olduğundan $S = 0$ bulunur.

5.2.3. Sonuç

f grafik immersion iken f nin transversal simetriği de grafik immersiondur.

İspat

$f(x) = \varphi(x) + F(x)\xi$ dönüşümü için f nin transversal simetriği

$g(x) = f(x) - 2\xi$. O halde

$g(x) = \varphi(x) + (F(x) - 2)\xi$.

$\forall Y \in \chi(M)$ için

$$g_*(Y) = \varphi_*(Y) + (dF)(Y)\xi - 2\tilde{\nabla}_Y \xi$$

elde edilir. ξ, R^{n+1} de paralel olduğundan $\tilde{\nabla}_X \xi = 0$ bulunur. O halde

$$g_*(Y) = \varphi_*(Y) + (dF)(Y)\xi = f_*(Y).$$

Bu ise f nin transversal simetriği olan g nin de grafik immersion olmasıdır.

5.2.4. Merkezil(Centro)afin Hiperyüzey

$f: M \rightarrow R^{n+1} - \{0\}$ bir immerse edilmiş hiperyüzey olsun. R^{n+1} de o a bağlı

$\overline{of(x)}$ yer vektörü $f(x) \in R^{n+1}$ noktasında daima $f(M)$ ye transversal ise f ye

merkezil afin hiperyüzey immersionu denir. Buna göre $\xi = -\overline{of(x)}$ seçilirse

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_*(S(X)) + \tau(X)\xi$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X (\overline{\text{of}(x)}) &= -f_*(S(X)) + \tau(X)\xi \\ &= -f_*(S(X)) + \tau(X)(-\overline{\text{of}(x)})\xi\end{aligned}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X (-f(x)) = -f_*(X)$$

olduğundan

$$f_*(X) = f_*(S(X))$$

ve

$$\tau(X) = 0$$

bulunur.

5.2.4. Sonuç

Merkezi afın hiperyüzey immersionunun transversal simetriği de merkezi hiperyüzey immersionudur.

İspat

$$\tilde{\nabla}_X (-f) = -f_*(X) = \tilde{\nabla}_X \xi = -g_*(S'(X)) + \tau'(X)\xi \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}g_*(S'(X)) &= f_*(S'(X)) - 2\nabla_{S'(X)} \xi \\ &= f_*(S'(X)) - 2(-f_*(S'(X)) + \tau(S'(X))\xi) \\ &= 3f_*(S'(X)) - 2\tau(S'(X))\xi\end{aligned}$$

ve f merkezi afın olduğundan $\tau = 0$ ve $g_*(S'(X)) = 3f_*(S'(X))$ olur. Bu (5.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$-f_*(X) = -3 f_*(S'(X)) + \tau'(X)\xi$$

ve

$$f_*(X) = 3 f_*(S'(X)), \tau' = 0$$

$$S'(X) = \frac{1}{3}X, S' = \frac{1}{3}I$$

olur. O halde g merkezli afindir.

5.2.5. Konormal Immersion

$f : (M, \nabla, \omega) \rightarrow R^{n+1}$ bir bozulmamış eşafin (equiafin) yapı, ξ transversal vektör alanı eşafin(equiafin) olsun. f bir afin immersion ve R_{n+1} vektör uzayı R^{n+1} uzayına dual uzay olsun. $v : M \rightarrow R_{n+1} - \{0\}$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$\forall x \in M$ için $v_x \in R_{n+1}$ olduğunda $\forall X \in \chi(M)$ için

$$v_x(\xi_x) = 1 \text{ ve } v_x(f_*(X)) = 0 \quad (5.24)$$

olur. Bu şekilde tanımlı v_x dönüşümüne $x \in M$ noktasında konormal vektör denir. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, y a bağlı $\chi(M)$ de ünimodüler bir baz, $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$ ise $Y \in \chi(R^{n+1})$ için

$$v(Y) = \det[f_*(X_1), f_*(X_2), \dots, f_*(X_n), Y].$$

$$\begin{aligned} Y[v(f_*(X))] &= (\tilde{\nabla}_Y v)(f_*(X)) + v(\tilde{\nabla}_Y f_*(X)) \\ &= v_*(Y)(f_*(X)) + v(f_* \nabla_Y X) + h(Y, X)\xi \end{aligned}$$

$$= \nu_*(Y)(f_*(X)) + \nu(f_* \nabla_Y X) + h(Y, X)\nu(\xi)$$

(5.24) den

$$\begin{aligned} 0 &= \nu_*(Y)(f_*(X)) + h(Y, X) \\ \nu_*(Y)(f_*(X)) &= -h(Y, X) \end{aligned} \quad (5.25)$$

ν nün immersion olduğunu göstermek için $Y \in \chi(M)$ ve $\nu_*(Y) = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman (5.25) den $\forall X \in \chi(M)$ için $h(Y, X) = 0$ ve h bozulmamış olduğundan, $Y = 0$ olur. O halde ν_* 1-1 dir. Yani ν bir immersiondur.

5.2.6. Sonuç

Konormal afin immersionun transversal simetriği de yine bir konormal afin immersiondur.

İspat

f bir immersion, g de f immersionunun transversal simetriği olsun.

$Y \in \chi(\mathbb{R}^{n+1})$ için

$$\nu(Y) = \det[f_*(X_1), f_*(X_2), \dots, f_*(X_n), Y]$$

ve

$$\bar{\nu}(Y) = \det[g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), Y]$$

denklemlerinden

$$\begin{aligned}\bar{v}(\xi) &= \det[g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), \xi] \\ &= \theta_g(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \bar{v}(\xi) &= \det[f_*(I+2S)(X_1), f_*(I+2S)(X_2), \dots, f_*(I+2S)(X_n), \xi] \\ &= \theta_f((I+2S)X_1, (I+2S)X_2, \dots, (I+2S)X_n).\end{aligned}$$

θ_f alterne n-lineer n-form olduğundan

$$\bar{v}(\xi) = |I+2S| \theta_f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\bar{v}(\xi) = |I+2S| v(\xi) \tag{5.26}$$

bulunur. $(I+2S)$ regüler bir dönüşüm ve v konormal immersion olduğundan $\bar{v}$ da bir konormal immersiondur.

5.2.7. Sonuç

Bir f immersionunun transversal simetriği ile kendisinin, konormal immersionlarının çakışık olması için gerek ve yeter şart $|I+2S| = 1$ olmasıdır.

İspat

$v = \bar{v}$ ise $|I+2S| = 1$ olur.

Tersine $|I+2S| = 1$ olsun. (5.26) eşitliğinden

$$\bar{v}(\xi) = v(\xi) \tag{5.27}$$

olur. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ g için ünimodüler baz olsun. $Y \in \chi(R^{n+1})$ için

$$Y = f_*(X) + \lambda_{n+1}\xi$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{v}(Y) &= \det[g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), Y] \\ &= \det[g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), f_*(X) + \lambda_{n+1}\xi] \\ &= \det[g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), \lambda_{n+1}\xi] \\ &= \lambda_{n+1} \det[g_*(X_1), g_*(X_2), \dots, g_*(X_n), \xi] \\ &= \lambda_{n+1} \bar{v}(\xi) \end{aligned} \tag{5.28}$$

$\{X^1_1, X^1_2, \dots, X^1_n\}$ f için ünimodüler baz olsun.

$$v(Y) = \det[f_*(X^1_1), f_*(X^1_2), \dots, f_*(X^1_n), Y]$$

$Y = f_*(X) + \lambda_{n+1}\xi$ eşitliğinden

$$v(Y) = \lambda_{n+1} \det[f_*(X^1_1), f_*(X^1_2), \dots, f_*(X^1_n), \xi]$$

$$v(Y) = \lambda_{n+1} v(\xi) \tag{5.29}$$

bulunur.

(5.27), (5.28) ve (5.29) denklemlerinden

$$\bar{v}(Y) = v(Y)$$

elde edilir. O halde;

$$\bar{v} = v.$$

5.2.8. Sonuç

f için ünimodular bir bazın g için ünimodüler olması için gerek ve yeter şart $\det(I+2S) = 1$ olmasıdır.

İspat

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ bazı için

$$\theta_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = |I+2S| \theta_f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (5.30)$$

$$\theta_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = |I+2S| = 1.$$

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ bazı hem f için hemde g için ünimodüler baz olsun. (5.30)

denkleminde

$$|I+2S| = 1$$

elde edilir.

Tersine

$$|I+2S| = 1$$

ise

(5.30) denkleminde

$$\theta_g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \theta_f(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

elde edilir. Bu ise $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ bazının ünimodüler olmasıdır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir afin immersiyonun Blaschke immersiyonu ile bunların transversal simetrik immersiyonlarının Blaschke immersiyonları arasındaki ilişkiler incelenebilir.

Bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.



KAYNAKLAR

1. Tzitzeica, G., Sur une nouvelle classe de surfaces, **Rend. Circ. Mat. Palermo**, 25(1908), 180-187; 28 (1909), 210-216.
2. Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie II , Affine Differentialgeometrie, **Springer, Berlin**, 1923.
3. Cartan, E., Sur la connexion affine des surfaces, **C. R. Acad. Sci. Paris**, 178(1924), 292-295.
4. Slobodzinski, W., Sur quelques problemes de la theorie des surfaces de l'espace affine, **Prace Mat. Fiz.**, 46(1939), 291-345.
5. Schirokow, P.A. and Schirokow, A.P., Affine Differentialgeometrie, **Teubner, Leibzig**, 1962.
6. Guggenheimer, H., Differential Geometry, **McGraw-Hill, New York** 1963.
7. Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, I-V, **Publish or Perish, Berkeley, California**, 1970-1975.
8. Nomizu, K. and Sasaki, T., On a theorem of Chern and Terng on affine surfaces, **Manuscripta Math.**, 73(1991), 39-44.
9. Verheyen, P. and Verstraelen, L., Locally symmetric affine hypersurfaces, **Proc. Amer. Math.Soc.**, 93(1985), 101-105.
10. Nomizu, K. and Pinkall, U., On the geometry of affine immersions, **Math. Z.**, 195(1987), 165-178.
11. Berger, M. Geometry I, **Springer-Verlag, Berlin, Hidelberg**, 1987.
12. Nomizu, K. and Sasaki, T., Affine Differential Geometry: geometry of affine immersions. **Cambridge University Press**, 1994
13. Dillen, F., Locally symmetric complex affine hypersurfaces, **J. Geom.**, 33(1988), 27-38.

14. Kobayashi, S., and Nomizu, K. Foundation of Differential Geometry. Vol I. **Interscience Publisher John Wiley and Sons. New York-London, 1963.**
15. Bishop, R.L., and Goldberg, S.I., Tensor Analysis on manifolds. **Dover Publications, Inc., New York, 1980.**
16. Nomizu, K. and Simon, U., Notes on conjugate connections, Geometry and Topology of Submanifolds, IV, ed. by F. Dillen and L. Verstraelen, **World Scientific, Signapore, 1992, 152-172.**
17. Nomizu, K. and Pinkall, U., On a certain class of homogeneous projectively flat manifolds, **Tohoku Math. J.**, 39(1987), 407-427.
18. Tanaka, N., Projective connections and projective transformations, **Nagoya Math. J.**, 11(1957), 1-24.
19. Flanders, H. Local Theory of affine hypersurfaces, **J. Analyse Math.**, 15 (1965), 353-387.
20. Brickel, F., Clark, R. S., 1970, Differentiable Manifolds, **VRN Company, London**

ÖZGEÇMİŞ

Atakan T. YAKUT, 1971 yılında Pınarbaşı'nda doğdu. Orta öğrenimini Kayseri Lisesinde tamamladı. 1992 yılında Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Halen Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

