



**AFİN MATRİS AİLELERİNİN
KARARLILIK BÖLGELERİ ÜZERİNE**

Yüksek Lisans Tezi

Dilan POLATLI HOŞLAN

Eskişehir 2021

AFİN MATRİS AİLELERİNİN KARARLILIK BÖLGELERİ ÜZERİNE

Dilan POLATLI HOŞLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Aralık 2021

ÖZET

Afin Matris Ailelerinin Kararlılık Bölgeleri Üzerine

Dilan POLATLI HOŞLAN

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Aralık 2021

Danışman: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Bu tez çalışmasında Afin matris ailelerinin özdeğerleri kümesinin kompleks düzlemdeki konumları incelenmiştir. Matris özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki yeri, o matrisin belirlediği sistemin asimptotik kararlılığını karakterize etmektedir. Afin polinom ailelerinin kararlılığı probleminde Kenar Teoremi o ailenin gürbüz kararlılığını garanti etmektedir. Afin matrisler ailesinde ise kenarlarının kararlılığından ailenin gürbüz kararlılığı garanti edilemez. Bu çalışmada afin matrisler ailesi için kenar teoreminin geçerli olduğu bir matris ailesi ele alınmıştır. Afin matrisler ailesinin kararlılığı bu matrislerin karakteristik polinomlarının kararlılığına denktir. Özel bir durumda karakteristik polinom ailesi multilinear olarak elde edilebilmektedir. Bu tür matris ailelerine bir örnek verilmiştir. Afin matrisler ailesi verildiğinde bu kümenin gürbüz kararlı olduğu bir Q kutusunun bulunması problemi ele alınmıştır. İncelenen problemlerle ilgili uygulamalar için açıklayıcı örnekler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Hurwitz Kararlılık, Schur Kararlılık, Afin Matrisler Ailesi, Kenar Teoremi, Polinomlar Ailesi

ABSTRACT

ON STABILITY REGIONS OF AFFINE MATRIX FAMILIES

Dilan POLATLI HOŞLAN

Mathematics Program

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, December 2021

Supervisor: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

In this thesis, the location of the set of eigenvalues of the family of affine matrices in the complex plane has been investigated. The location of the matrix eigenvalues in the complex plane characterizes the asymptotic stability of the system determined by that matrix. In the stability problem of affine polynomial families, the Edge Theorem guarantees the robust stability of that family. In affine matrices family, on the other hand, the robust stability of the family cannot be guaranteed from the stability of its edges. In this study, a matrix family for which the edge theorem is valid for affine matrices family is discussed. The stability of the family of affine matrices is equivalent to the stability of the characteristic polynomials of these matrices. In a special case, the characteristic polynomial family can be obtained multilinearly. An example of such matrix families is given. Given the family of affine matrices, the problem of finding a Q box in which this set is robustly stable is addressed. Explanatory examples are given for applications related to the problems discussed.

Keywords: Hurwitz Stability, Schur Stability, Afin Matrices Family, Edge Theorem, Polynomial Family

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında desteğini ve yardımlarını esirgemeyen kendisinden hem yüksek lisans derslerimde hem de tez çalışmamda çok şey öğrendiğim tez danışmanım Prof. Dr. Taner Büyükköroğlu'na, okul dönemimde bana kolaylıklar sağlayan okul müdürüm Kemal Kutluer'e ve her durumda yanımda olan ve beni yürüklendiren eşime teşekkür ederim.

Dilan POLATLI HOŞLAN

Aralık 2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Dilan POLATLI HOŞLAN

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ..	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1 Giriş	1
2 Sürekli ve Kesikli Lineer Sistemler. Kararlılık Bölgeleri	2
2.1 Sürekli sistemlerin kararlılığı	3
2.2 Kesikli sistemlerin kararlılığı	4
3 Belirsiz Lineer Sistemler. Matrisler Politopu	5
3.1 Afin matrisler ailesi	14
3.2 Matrisler politopu	15
3.3 Kenar teoreminin geçerli olmadığı afin matris ailesine bir örnek .	16
3.4 Kenar teoreminin geçerli olduğu afin matrisler ailesi	17
3.5 Karakteristik polinomu multilineer olan afin matrisler ailesi . . .	22
4 Afin Matrisler Ailesinin Gürbüz Kararlı bir Q Kutusunun Belirlenmesi	26
4.1 Gürbüz kararlılık için Q kutusu	26
KAYNAKÇA	35
ÖZGEÇMİŞ	37

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\dot{x}$	: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $dx(t)/dt$
$\text{Re}(\cdot)$	: Bir kompleks sayının gerçel kısmı
$\mathbb{R}^{n \times n}$	: $n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi
A^T	: A matrisinin devriği (transpozesi)
$P > 0$	: $P = P^T$ pozitif belirli matris
conv	: Konveks zarf
$\ \cdot\ $	: Öklid normu
$\text{tr}(A)$	: A Matrisinin izi

1 Giriş

Matrisler, lineer sistemleri temsil etmede ve bu sistemlerin karakterizasyonunu belirlemede önemli rol oynamaktadırlar. Herhangi bir gerçel sayı 1×1 boyutlu bir matristir ve sayı doğrusu üzerinde bu sayının yerini belirleyebilir, işaretini, büyüklüğünü (orijine olan uzaklığını) ifade edebiliriz. Genel durumda, bir matrisi bu şekilde doğrudan ele almak mümkün değildir. O matrisle ilgili sayı doğrusunda ya da düzlemde ele alınabilecek belli niceliklerin tanımlanması gerekmektedir.

Pozitif bir n tam sayısı için $n \times n$ ($n \geq 2$) boyutlu kare matrisler için o matrisi karakterize eden niceliklerden bazıları; matrisin karakteristik polinomu, özdeğerleri, özvektörleri, determinantı örnek olarak verilebilir. Lineer sistemlerin fiziksel uygulamalarında matris girdileri belli sayılar olmayıp, belirsiz parametreler bulundurmaktadır. Bu durumda belirsiz matrisler ailesi ortaya çıkmaktadır. Bir matrisin özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumu o matrisle verilen lineer sistemin kararlılığını tanımlamaktadır. Matrisin özdeğerleri (veya karakteristik polinomunun kökleri) istenilen yaklaşıklıkta, nümerik yöntemlerle hesaplanabilmektedir. Ancak matrisler ailesindeki her bir matrisin özdeğerini hesaplamak mümkün olmamaktadır. Bunun için matrisler ailesi sınıflandırılmakta ve her bir sınıf için teorik sonuçlar yardımıyla matrisler ailesinin kararlılığı ele alınmaktadır.

Bir kare matrisin özdeğeri ve bu özdeğerine karşılık gelen özvektörü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 1.1 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin.

$$Ax = \lambda x$$

denklemini sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A matrisinin bir özdeğeri ve bu λ sayısı için denklemini sağlayan $x \in \mathbb{C}^n$ ($x \neq 0$) vektörüne de A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür denir.

Bir λ sayısı A matrisinin bir özdeğeri ve $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ vektörü de bu λ

özdeğerine karşılık gelen özvektör ise o zaman

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ \lambda x - Ax &= 0 \\ (\lambda I - A)x &= 0 \end{aligned}$$

olacağından $\lambda I - A$ matrisi tekil (singüler) matristir. Bir matrisin tekil olması için gerek ve yeter koşul o matrisin determinantının sıfır olmasıdır. Buna göre $\det(\lambda I - A) = 0$ denklemini sağlayan λ kompleks sayıları A matrisinin özdeğerleridir. Bu determinant

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - E_1(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}E_{n-1}(A)\lambda + (-1)^n E_n(A)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir [1, s. 52]. Burada $k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k(q_1 M_1 + C)$ ile $q_1 M_1 + C$ matrisinin $k \times k$ boyutlu esas minörlerinin $\binom{n}{k}$ tanedir) toplamlarını göstermektedir.

$$p_A(s) = \det[sI - A]$$

n ci dereceden monik bir polinomuna A matrisinin karakteristik polinomu denir.

2 Sürekli ve Kesikli Lineer Sistemler. Kararlılık Bölgeleri

Basit bağlantılı, açık ve reel eksene göre simetrik $D \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin.

Tanım 2.1 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin tüm özdeğerleri D kümesinde ise A matrisine D -kararlı matris denir.

Tanım 2.2 $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ polinomunun tüm kökleri D kümesinde ise $p(s)$ polinomuna D -kararlı polinom denir.

Bu D bölgesinin kompleks düzlemdeki durumuna göre kararlılık bölgeleri ifade edilebilmektedir:

- $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$ ise D -kararlılığa Hurwitz kararlılık,

- $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ise D -kararlılığa Schur kararlılık

denir. Bu tez çalışmasında kararlılık bölgesi olarak Hurwitz ve Schur kararlılık bölgeleri ele alınmaktadır.

2.1 Sürekli sistemlerin kararlılığı

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matris, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

sistemine sürekli lineer sistem denir. Denklem (1) ile verilen sistemin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin tüm özdeğerlerinin gerçel kısmının negatif olmasıdır (her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\text{Re}(\lambda_i) < 0$). Eğer A matrisinin tüm özdeğerleri kompleks düzlemin sol açık yarısında ise $t \rightarrow \infty$ iken sistemin herhangi $x(0)$ başlangıç noktasından başlayan çözümü $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$ olur [2].

Bir $n \times n$ boyutlu A matrisinin tüm özdeğerleri kompleks düzlemin sol açık yarısında ise A matrisine Hurwitz kararlı matris denilir. Bir matrisin özdeğerleri o matrisin karakteristik polinomunun kökleri olduğundan benzer tanım $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ polinomu için de verilmektedir. Eğer $p(s)$ polinomunun tüm kökleri kompleks düzlemin sol açık yarısında ise o polinoma Hurwitz kararlı polinom denir.

Bir polinomun Hurwitz kararlılığına ilişkin temel teoremler şu şekildedir:

Teorem 2.3 $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ polinomu Hurwitz kararlı ise tüm katsayıları aynı işaretlidir.

Teorem 2.4 Her $i = 0, 1, \dots, n$ için $a_i > 0$ olmak üzere $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ polinomu verilsin. $p(s)$ polinomunun Hurwitz kararlı

olması için gerekli ve yeterli koşul $n \times n$ boyutlu

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

matrisi için $\Delta_1 = a_{n-1}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$, $\dots$, $\Delta_n = \det H(p)$ olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\Delta_i > 0$ olmasıdır.

İkinci ve üçüncü dereceden polinomların Hurwitz kararlılığı Teorem 2.4'in bir sonucu olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

Sonuç 2.5 $p(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2$ ikinci dereceden polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul a_0 , a_1 ve a_2 katsayılarının aynı işaretli olmasıdır.

Sonuç 2.6 $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ olmak üzere $p(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3$ üçüncü dereceden polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ olmasıdır.

2.2 Kesikli sistemlerin kararlılığı

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matris

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

sistemine kesikli lineer sistem denir. Bu sistemin herhangi bir x_0 başlangıç noktasından başlayan çözümü:

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 \Rightarrow x_2 = A^2x_0, \dots, \quad x_k = A^kx_0, \dots$$

olur.

Kesikli sistemlerde, sistemin matrisinin özdeğerlerinin birim diskte olması o sistemin asimptotik kararlılığını karakterize etmektedir. Bir $n \times n$ boyutlu matrisin tüm özdeğerleri kompleks düzlemde açık birim diskte ise (yani $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)) bu A matrisine Schur kararlı matris denir. Benzer tanım $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ polinomu için de verilir. Bir polinomun tüm kökleri kompleks düzlemde açık birim diskte ise o polinoma Schur kararlı polinom denir.

Denklem (2) ile verilen sisteminin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin Schur kararlı olmasıdır. Eğer A matrisi Schur kararlı ise $k \rightarrow \infty$ iken sistemin herhangi x_0 başlangıç noktasından başlayan çözümü $x_k \rightarrow \mathbf{0}$ olur [3].

3 Belirsiz Lineer Sistemler. Matrisler Politopu

$Q \subset \mathbb{R}^m$ kümesi verilsin. Her $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_{ij} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ve $q \in Q$ olmak üzere

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) & \cdots & a_{1n}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) & \cdots & a_{2n}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(q) & a_{n2}(q) & \cdots & a_{nn}(q) \end{bmatrix} \quad (1)$$

matrisini ele alalım. Bu durumda

$$\begin{cases} \dot{x} = A(q)x, & q \in Q \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

lineer sistemine belirsiz lineer sistem denir ve burada $q \in Q$ vektörü belirsizlik parametresi olarak adlandırılır [4, 5].

Denklem (1) formundaki matrislerden oluşan

$$\mathcal{A} = \{A(q) : q \in Q\} \quad (2)$$

kümesine bir matrisler ailesi denir. Eğer Q belirsiz kümesinden alınan her $q \in Q$ için $A(q) \in \mathcal{A}$ matrisleri D -kararlı ise o zaman $\mathcal{A}$ ailesine gürbüz D -kararlı matrisler ailesi denir.

Matrislerde olduğu gibi polinomlar için de benzer tanım şu şekilde ifade edilmektedir: $q \in Q$, $a_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) ve $a_n(q) \neq 0$ (her $q \in Q$) olmak üzere

$$p(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + a_2(q)s^2 + \dots + a_n(q)s^n \quad (3)$$

polinomu verilsin. O zaman

$$P = \{p(s, q) : q \in Q\} \quad (4)$$

kümesine n -nci dereceden polinomlar ailesi denir. Her $q \in Q$ için $p(s, q) \in P$ polinomu D -kararlı ise P polinomlar ailesine gürbüz D -kararlı polinomlar ailesi denir [4, 5].

Bazı önemli polinomlar ailesi türlerini ve bunların gürbüz Hurwitz kararlılığı ile ilgili sonuçları verelim.

Denklem (3) ile verilen polinomların katsayı fonksiyonları $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $a_i(q) = q_i$ ve $q_i^-, q_i^+ \in \mathbb{R}$ ($0 \notin [q_n^-, q_n^+]$) olmak üzere $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ olduğunda (4) polinom ailesine aralık polinom ailesi denir:

$$p(s, q) = [q_0^-, q_0^+] + [q_1^-, q_1^+]s + [q_2^-, q_2^+]s^2 + \dots + [q_n^-, q_n^+]s^n. \quad (5)$$

Aralık polinom ailelerinin gürbüz Hurwitz kararlılığı $Q = [q_0^-, q_0^+] \times [q_1^-, q_1^+] \times \dots \times [q_n^-, q_n^+]$ kutusunun dört özel köşesine karşılık gelen polinomların kararlılığına denktir [4, 6].

$$\begin{aligned} K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \dots, \\ K_2(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \dots, \\ K_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \dots, \\ K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

polinomlarını tanımlayalım. Örneğin

$$p(s, q) = [1, 2] + [3, 4]s + [5, 6]s^2 + [7, 8]s^3 + [9, 10]s^4 + [11, 12]s^5$$

polinomu için $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$, $K_4(s)$ polinomları

$$\begin{aligned} K_1(s) &= 1 + 3s + 6s^2 + 8s^3 + 9s^4 + 11s^5, \\ K_2(s) &= 2 + 4s + 5s^2 + 7s^3 + 10s^4 + 12s^5, \\ K_3(s) &= 2 + 3s + 5s^2 + 8s^3 + 10s^4 + 11s^5, \\ K_4(s) &= 1 + 4s + 6s^2 + 7s^3 + 9s^4 + 12s^5 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1 (Kharitonov Teoremi) [4, 6] *Denklem (5) aralık polinom ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul bu polinom ailesine karşılık gelen ve (6) denklemini ile verilen dört polinomun Hurwitz kararlı olmasıdır.*

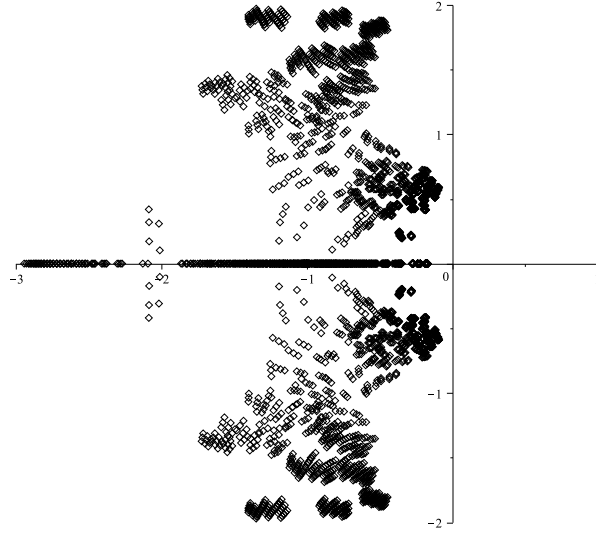
Örnek 3.2 $Q = [0.6, 1.7] \times [3.5, 4.6] \times [7.7, 8.8] \times [8.4, 8.5] \times [3.5, 4.6] \times [0.9, 1.5]$ olmak üzere $q \in Q$ için

$$p(s, q) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 + q_5s^5$$

aralık polinom ailesini ele alalım. Bu aileye karşılık gelen Kharitonov polinomları

$$\begin{aligned} K_1(s) &= 0.9s^5 + 3.5s^4 + 8.5s^3 + 8.8s^2 + 3.5s + 0.6, \\ &\text{kökleri: } -1, -1.15 \pm 1.93j, -2.28 \pm 0.22j, \\ K_2(s) &= 1.5s^5 + 4.6s^4 + 8.4s^3 + 7.7s^2 + 4.6s + 1.7, \\ &\text{kökleri: } -0.81, -0.2 \pm 0.72j, -0.9 \pm 1.26j, \\ K_3(s) &= 0.9s^5 + 4.6s^4 + 8.5s^3 + 7.7s^2 + 3.5s + 1.7, \\ &\text{kökleri: } -2.505, -0.09 \pm 0.58j, -1.21 \pm 0.804j, \\ K_4(s) &= 1.5s^5 + 3.5s^4 + 8.4s^3 + 8.8s^2 + 4.6s + 0.6, \\ &\text{kökleri: } -0.185, -0.44 \pm 1.805j, -0.62 \pm 0.4j \end{aligned}$$

Hurwitz kararlıdır. Kharitonov teoremine göre bu aralık polinom ailesi gürbüz Hurwitz kararlıdır. Şekil 3.1’de Q kümesi gridlenerek elde edilen bazı polinomların köklerinin kompleks düzlemdeki dağılımı görülmektedir.



Şekil 3.1: Örnek 3.2’de verilen Q kümesi gridlenerek elde edilen polinomların köklerinin kompleks düzlemdeki yeri.

Aralık polinom ailesinin gürbüz Schur kararlılığı üzerine Kharitonov Teoremi benzeri bir sonuç yoktur. Eğer aralık ailesinin belli bir terimden sonraki katsayıları sabit ise bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.3 (7)

$$\begin{aligned} p(z, q) &= \sum_{i=0}^n [q_i^-, q_i^+] z^i \\ &= [q_0^-, q_0^+] + [q_1^-, q_1^+] z + [q_2^-, q_2^+] z^2 + \cdots + [q_n^-, q_n^+] z^n \end{aligned}$$

$(0 \notin [q_n^-, q_n^+])$ aralık polinom ailesi verilsin. $0 < \sum_{i=0}^n q_i^-$, $0 < \sum_{i=0}^n q_i^+$ veya $\sum_{i=0}^n q_i^- < 0$, $\sum_{i=0}^n q_i^+ < 0$ olsun. $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \dots, n$ (burada $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ile $\frac{n}{2}$ ’den küçük veya eşit en büyük tamsayı gösterilmektedir) olmak üzere $q_i^- = q_i^+$ olsun. Bu aralık polinom ailesinin gürbüz Schur kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul Q kutusunun her q^k köşesi için $p(z, q^k)$ polinomunun Schur kararlı olmasıdır.

Bu teoremle ilgili bir örnek vermeden önce n -nci dereceden bir polinomun Schur kararlılığı ile Hurwitz kararlılığı arasındaki ilişkiyi ifade edelim.

Teorem 3.4 (5) $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ polinomunun Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\tilde{p}(s) = (s-1)^n p\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \quad (7)$$

polinomunun Hurwitz kararlı olmasıdır.

Örnek 3.5 $q = (q_0, q_1, q_2) \in [0.2, 2] \times [0.2, 1] \times [-1, -0.5]$ olmak üzere

$$p(z, q) = q_0 + q_1z + q_2s^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5 \quad (8)$$

aralık polinom ailesi verilsin.

Burada

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 q_i^- &= 0.2 + 0.2 + (-1) + (-1) + 0.1 + 3 = 1.5 > 0 \\ \sum_{i=0}^5 q_i^+ &= 2 + 1 + (-0.5) + (-1) + 0.1 + 3 = 4.6 > 0 \end{aligned}$$

ve $[0.2, 2] \times [0.2, 1] \times [-1, -0.5]$ kutusunun köşe noktaları

$$\begin{aligned} q^1 &= (0.2, 0.2, -1), & q^2 &= (2, 0.2, -1), & q^3 &= (0.2, 1, -1), \\ q^4 &= (2, 1, -1), & q^5 &= (0.2, 0.2, -0.5), & q^6 &= (2, 0.2, -0.5), \\ q^7 &= (0.2, 1, -0.5), & q^8 &= (2, 1, -0.5) \end{aligned}$$

olur. Bu köşe noktalarına karşılık gelen polinomlar:

$$\begin{aligned} p_1(z) &= p(z, q^1) = 0.2 + 0.2z - z^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5, \\ p_2(z) &= p(z, q^2) = 2 + 0.2z - z^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5, \\ p_3(z) &= p(z, q^3) = 0.2 + z - z^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5, \\ p_4(z) &= p(z, q^4) = 2 + z - z^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5, \\ p_5(z) &= p(z, q^5) = 0.2 + 0.2z - 0.5z^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5, \\ p_6(z) &= p(z, q^6) = 2 + 0.2z - 0.5z^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5, \\ p_7(z) &= p(z, q^7) = 0.2 + z - 0.5z^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5, \\ p_8(z) &= p(z, q^8) = 2 + z - 0.5z^2 - z^3 + 0.1z^4 + 3z^5. \end{aligned}$$

Bu $p_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) polinomlarının Schur kararlılığını belirleyebilmek için

$$\tilde{p}_i(s) = (s-1)^5 p_i\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \quad (7) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \text{ polinomlarının Hurwitz kararlılığını}$$

inceleyebiliriz. Bu polinomlar:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1(s) &= 1.5s^5 + 13.7s^4 + 36.6s^3 + 28.2s^2 + 13.1s + 2.9, \\
\tilde{p}_2(s) &= 3.3s^5 + 4.7s^4 + 54.6s^3 + 10.2s^2 + 22.1s + 1.1, \\
\tilde{p}_3(s) &= 2.3s^5 + 11.3s^4 + 38.2s^3 + 29.8s^2 + 10.7s + 3.7, \\
\tilde{p}_4(s) &= 4.1s^5 + 2.3s^4 + 56.2s^3 + 11.8s^2 + 19.7s + 1.9, \\
\tilde{p}_5(s) &= 2s^5 + 13.2s^4 + 35.6s^3 + 29.2s^2 + 13.6s + 2.4, \\
\tilde{p}_6(s) &= 3.8s^5 + 4.2s^4 + 53.6s^3 + 11.2s^2 + 22.6s + 0.6, \\
\tilde{p}_7(s) &= 2.8s^5 + 10.8s^4 + 37.2s^3 + 30.8s^2 + 11.2s + 3.2, \\
\tilde{p}_8(s) &= 4.6s^5 + 1.8s^4 + 55.2s^3 + 12.8s^2 + 20.2s + 1.4
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\tilde{p}_1(s)$ polinomunun tüm katsayıları pozitif ve

$$H(\tilde{p}_1) = \begin{bmatrix} 13.7 & 28.2 & 2.9 & 0 & 0 \\ 1.5 & 36.6 & 13.1 & 0 & 0 \\ 0 & 13.7 & 28.2 & 2.9 & 0 \\ 0 & 1.5 & 36.6 & 13.1 & 0 \\ 0 & 0 & 13.7 & 28.2 & 2.9 \end{bmatrix}$$

şeklinde. $\tilde{p}_i(s)$ polinomlarının her biri için ($i = 1, 2, \dots, 8$) Teorem 2.4'de ifade edilen Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) sayıları aşağıdaki Tablo 3.5'deki gibi hesaplanır.

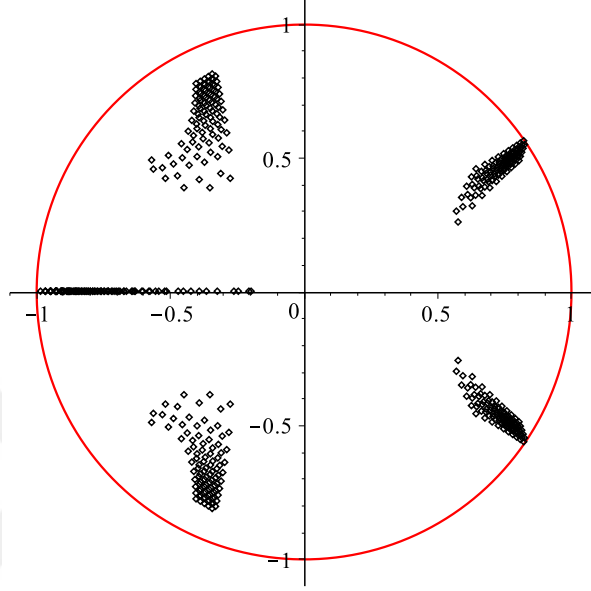
Çizelge 1: $\tilde{p}_i(s)$ polinomları için Teorem 2.4'de ifade edilen Δ_i sayıları.

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
$\tilde{p}_1(s) :$	13.7	459.12	10548.04	90210.09	261609.28
$\tilde{p}_2(s) :$	4.7	222.96	1803.06	26820.60	29502.66
$\tilde{p}_3(s) :$	11.3	363.12	9550.85	51827.30	191761.01
$\tilde{p}_4(s) :$	2.3	80.88	868.08	8757.24	16638.77
$\tilde{p}_5(s) :$	13.2	411.52	9710.08	97735.47	234565.14
$\tilde{p}_6(s) :$	4.2	182.56	1655.58	31756.28	19053.77
$\tilde{p}_7(s) :$	10.8	315.52	8508.41	58738.27	187962.49
$\tilde{p}_8(s) :$	1.8	40.48	464.28	6443.00	9020.21

Burada her bir polinom için $\Delta_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, 5$) olduğundan $\tilde{p}_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) polinomları Hurwitz kararlı ve dolayısıyla $p_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$)

polinomları Schur kararlıdır. Teorem 3.3'e göre (8) aralık polinom ailesi gürbüz Schur kararlıdır.

Şekil 3.2'de $[0.2, 2] \times [0.2, 1] \times [-1, -0.5]$ kutusu gridlenerek elde edilen (8) ailesine ait bazı polinomların kökleri kompleks düzlemde gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Örnek 3.5'de verilen $[0.2, 2] \times [0.2, 1] \times [-1, -0.5]$ kümesi gridlenerek elde edilen polinomların köklerinin kompleks düzlemdeki yeri.

Polinomlar ailesi için ikinci olarak verilebilecek sınıf afin polinomlar ailesidir. Denklem (3) ile verilen polinomların katsayıları q 'nın afin lineer fonksiyonları ise, yani $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $a_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları, $\alpha_i \in \mathbb{R}^m$ sütun vektörü ve $\beta_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a_i(q) = \alpha_i^T q + \beta_i$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa bu durumda (4) polinomlar ailesine afin polinomlar ailesi denir. Afin polinomlar ailesinin gürbüz D -kararlılığı Kenar Teoremi ile karakterize edilmektedir:

Teorem 3.6 (Kenar Teoremi) [8] Denklem (4) ile verilen $P = \{p(s, q) : q \in Q\}$ n -nci dereceden (değişmez dereceli) polinom ailesinin gürbüz D -kararlı

olması için gerek ve yeter koşul Q kutusun köşe noktaları $V = \{q^1, q^2, \dots, q^N\}$ olmak üzere her $q^{i_1}, q^{i_2} \in V$ ikilisi için

$$p_{i_1, i_2}(s, \lambda) = (1 - \lambda)p(s, q^{i_1}) + \lambda p(s, q^{i_2})$$

polinomlarının (segmentlerinin) her $\lambda \in [0, 1]$ için D -kararlı olmasıdır.

Bir afin polinom ailesinin gürbüz Hurwitz kararlılığı problemi ele alındığında Q kutusunun q^{i_1}, q^{i_2} köşe noktaları için

$$[p_{i_1}(s), p_{i_2}(s)] = \{(1 - \lambda)p(s, q^{i_1}) + \lambda p(s, q^{i_2}) : \lambda \in [0, 1]\}$$

kenarının (segmentinin) gürbüz Hurwitz kararlılığını incelemek gerekir. Bunun için de aşağıda verilen Segment Lemma ile bu kenarın gürbüz kararlı olup olmadığı belirlenebilmektedir.

$$p(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n$$

polinomu $\omega \in \mathbb{R}$ ve $j = \sqrt{-1}$ olmak üzere $s = j\omega$ için

$$p(j\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 + \dots),$$

$$p^e(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots,$$

$$p^o(\omega) = a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 + \dots$$

$p(j\omega) = p^e(\omega) + j\omega p^o(\omega)$ şeklinde tek ve çift kısımlarına ayrıştırılır.

Teorem 3.7 (Segment Lemma) [5, 9] $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomları dereceleri aynı olan gerçel katsayılı iki Hurwitz kararlı polinom olsunlar. $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti gürbüz Hurwitz kararlı olmaması için gerek ve yeter koşul

$$p_1^e(\omega)p_2^o(\omega) - p_1^o(\omega)p_2^e(\omega) = 0 \quad (9)$$

denkleminin en az bir $\omega > 0$ kökünün olması ve bu ω için

$$p_1^e(\omega)p_2^e(\omega) < 0 \text{ veya } p_1^o(\omega)p_2^o(\omega) < 0 \quad (10)$$

olmasıdır.

Örnek 3.8 $q = (q_1, q_2) \in Q = [-2, 4] \times [-1, 7]$ için

$$p(s, q) = 3q_1 - q_2 + 20 + (q_1 + 3q_2 + 40)s + (q_1 + q_2 + 23)s^2 + (q_1 + 11)s^3$$

afin polinom ailesinin gürbüz Hurwitz kararlılığını araştıralım. Q kutusunun köşeleri $q^1 = (-2, -1)$, $q^2 = (4, -1)$, $q^3 = (-2, 7)$ ve $q^4 = (4, 7)$ noktalarıdır.

Bu köşe noktaları için

$$p_1(s) = p(s, q^1) = 15 + 35s + 20s^2 + 9s^3$$

$$p_2(s) = p(s, q^2) = 33 + 41s + 26s^2 + 15s^3$$

$$p_3(s) = p(s, q^3) = 7 + 59s + 28s^2 + 9s^3$$

$$p_4(s) = p(s, q^4) = 25 + 65s + 34s^2 + 15s^3$$

olur. Burada $[p_1(s), p_2(s)]$, $[p_1(s), p_3(s)]$, $[p_1(s), p_4(s)]$, $[p_2(s), p_3(s)]$, $[p_2(s), p_4(s)]$ ve $[p_3(s), p_4(s)]$ segmentlerinin gürbüz Hurwitz kararlılığı Theorem 3.7 ile verilen koşullar kullanılarak belirlenir.

$p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$ ve $p_4(s)$ polinomlarının tek ve çift kısımları

$$p_1(j\omega) = p_1^e(\omega) + j\omega p_1^o(\omega) = 15 - 20\omega^2 + j\omega(35 - 9\omega^2)$$

$$p_2(j\omega) = p_2^e(\omega) + j\omega p_2^o(\omega) = 33 - 26\omega^2 + j\omega(41 - 15\omega^2)$$

$$p_3(j\omega) = p_3^e(\omega) + j\omega p_3^o(\omega) = 7 - 28\omega^2 + j\omega(59 - 9\omega^2)$$

$$p_4(j\omega) = p_4^e(\omega) + j\omega p_4^o(\omega) = 25 - 34\omega^2 + j\omega(65 - 15\omega^2)$$

olur.

$[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti için (9) denklemi

$$p_1^e(\omega)p_2^o(\omega) - p_1^o(\omega)p_2^e(\omega) = 66\omega^4 + 162\omega^2 - 540 = 0$$

ve bu denklemin pozitif kökü $\omega = 1.373056863$ olarak hesaplanır. Bu kök için

$$p_1^e(\omega)p_2^e(\omega) = 363.6 > 0 \text{ ve } p_1^o(\omega)p_2^o(\omega) = 229.3 > 0$$

olur. Theorem 3.7'e göre $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti gürbüz Hurwitz kararlıdır.

Diğer segmentler için denklem (9) çözülür ve (10) eşitsizlikleri hesaplanırsa

$$[p_1(s), p_3(s)] : p_1^e(\omega)p_3^o(\omega) - p_1^o(\omega)p_3^e(\omega) = -72\omega^4 - 272\omega^2 + 640 = 0,$$

$$\omega = 1.280831,$$

$$p_1^e(\omega)p_3^e(\omega) = 693.4 > 0, \quad p_1^o(\omega)p_3^o(\omega) = 895.1 > 0$$

$$[p_1(s), p_4(s)] : p_1^e(\omega)p_4^o(\omega) - p_1^o(\omega)p_4^e(\omega) = -6\omega^4 - 110\omega^2 + 100 = 0,$$

$$\omega = 0.931662,$$

$$p_1^e(\omega)p_4^e(\omega) = 10.6 > 0, \quad p_1^o(\omega)p_4^o(\omega) = 1413.2 > 0$$

$$[p_2(s), p_3(s)] : p_2^e(\omega)p_3^o(\omega) - p_2^o(\omega)p_3^e(\omega) = -186\omega^4 - 578\omega^2 + 1660 = 0,$$

$$\omega = 1.346687,$$

$$p_2^e(\omega)p_3^e(\omega) = 619.6 > 0, \quad p_2^o(\omega)p_3^o(\omega) = 588.8 > 0$$

$$[p_2(s), p_4(s)] : p_2^e(\omega)p_4^o(\omega) - p_2^o(\omega)p_4^e(\omega) = -120\omega^4 - 416\omega^2 + 1120 = 0,$$

$$\omega = 1.333860,$$

$$p_2^e(\omega)p_4^e(\omega) = 470.5 > 0, \quad p_2^o(\omega)p_4^o(\omega) = 548.3 > 0$$

$$[p_3(s), p_4(s)] : p_3^e(\omega)p_4^o(\omega) - p_3^o(\omega)p_4^e(\omega) = 114\omega^4 + 306\omega^2 - 1020 = 0,$$

$$\omega = 1.391546,$$

$$p_3^e(\omega)p_4^e(\omega) = 1928.3 > 0, \quad p_3^o(\omega)p_4^o(\omega) = 1494.6 > 0$$

bulunur. Teorem 3.7'ye göre bu segmentler gürbüz Hurwitz kararlıdır. Kenar Teoremine (Teorem 3.6) göre bu afin polinomlar ailesi gürbüz Hurwitz kararlıdır.

Afin polinomlar ailesinin gürbüz D -kararlılığı karakterize eden Kenar Teoremi (Teorem 3.6) afin matris aileleri için geçerli değildir.

3.1 Afin matrisler ailesi

$\mathcal{A}$ matris ailesindeki $A(q)$ (1) matrisleri $q \in Q \subset \mathbb{R}^m$ parametresine afin lineer olarak bağlı ise, yani $a_{ij} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^m$ sütun vektörü ve $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a_{ij}(q) = \alpha_{ij}^T q + \beta_{ij}$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa o zaman $\mathcal{A}$ (2) matrisler ailesi afin matrisler ailesi olarak adlandırılır

$$\mathcal{A} = \{A(q) : q \in Q\}.$$

Bir afin matris ailesi $\{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ matrisleri $n \times n$ boyutlu matrisler olmak üzere

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \dots + q_m A_m$$

afin lineer toplam şeklinde ifade edilebilir.

Örneğin $q = (q_1, q_2) \in Q = [-1, 3] \times [1, 2]$ için

$$\begin{aligned} A(q) &= \begin{bmatrix} 3q_1 - 2q_2 + 1 & q_1 - q_2 - 2 & q_1 + 2q_2 \\ q_2 - 3 & q_1 + q_2 + 2 & q_1 - q_2 \\ -q_1 + q_2 + 4 & q_2 - 1 & q_1 + 4q_2 - 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix} + q_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

3.2 Matrisler politopu

$A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$A = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_N A_N$$

toplamına $A_1, A_2, \dots, A_N$ matrislerinin bir konveks kombinasyonu denir. Bu A_i ($i = 1, 2, \dots, N$) matrislerinin tüm konveks kombinasyonlarından oluşan afin matrisler ailesi

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \\ &= \{A = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_N A_N : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N\} \end{aligned}$$

matrisler politopu olarak adlandırılır. Burada $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ kümesine $\mathcal{A}$ politopunun üretici denir.

3.3 Kenar teoreminin geçerli olmadığı afin matris ailesine bir örnek

Bu örnekte M_1, M_2, M_3 matrisleri 3×3 boyutlu Hurwitz kararlı matrisler için

$$\mathcal{A} = \{M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0\}$$

matris politopunun tüm kenarları, yani

$$\begin{aligned} [M_1, M_2] &= \{\alpha M_1 + (1 - \alpha) M_2 : \alpha \in [0, 1]\}, \\ [M_1, M_3] &= \{\alpha M_1 + (1 - \alpha) M_3 : \alpha \in [0, 1]\}, \\ [M_2, M_3] &= \{\alpha M_2 + (1 - \alpha) M_3 : \alpha \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

segmentleri gürbüz Hurwitz kararlı olmasına rağmen $\mathcal{A}$ afin matrisler ailesinde Hurwitz kararlı olmayan bir matris bulunmaktadır. Dolayısı ile afin polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığı için verilen Kenar Teoremi (Teorem 3.6) koşulları sağlandığı halde bu afin matrisler ailesi gürbüz kararlı değildir. Bu karşıt örnek [10] çalışmasında verilmiştir. Şimdi bu örneği inceleyelim.

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin. Bu matrislerin karakteristik polinomları

$$\begin{aligned} p_{M_1}(s) &= \det(sI - M_1) = 0.9 + 1.8s + 1.9s^2 + s^3, \\ p_{M_2}(s) &= \det(sI - M_2) = 0.9 + 1.8s + 1.9s^2 + s^3, \\ p_{M_3}(s) &= \det(sI - M_3) = 1.9 + 2.8s + 1.9s^2 + s^3 \end{aligned}$$

ve bu polinomların her biri için Sonuç 2.6'de verilen $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ koşulu sağlanmaktadır. Bu polinomlar, dolayısıyla M_1, M_2 ve M_3 matrisleri Hurwitz kararlıdır. Bu polinomlar $(s + 1)$ ortak çarpanına sahiptir:

$$\begin{aligned} p_{M_1}(s) &= (s + 1)(0.9 + 0.9s + s^2), \\ p_{M_2}(s) &= (s + 1)(0.9 + 0.9s + s^2), \\ p_{M_3}(s) &= (s + 1)(1.9 + 0.9s + s^2). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ matrisler politopunun kenarları olan $[M_1, M_2], [M_1, M_3], [M_2, M_3]$ segmenlerinin kararlılığını inceleyelim.

$[M_1, M_2]$ segmentinin kararlılığı için $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere bu segmentin karakteristik polinomu

$$\det[sI - \{\alpha M_1 + (1 - \alpha)M_2\}] = (s + 1)(s^2 + 0.9s + 2\alpha^2 - \alpha + 0.9)$$

olur ve $\alpha \in [0, 1]$ için $0.4 < 2\alpha^2 - \alpha + 0.9$ olduğundan ikinci dereceden çarpan Hurwitz kararlıdır (Sonuç 2.5). Dolayısıyla her $\alpha \in [0, 1]$ için $[M_1, M_2]$ segmenti (kenarı) Hurwitz kararlıdır.

Benzer şekilde $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\det[sI - \{\alpha M_1 + (1 - \alpha)M_3\}] = (s + 1)(s^2 + 0.9s + 5\alpha^2 - 6\alpha + 1.9)$$

ve

$$\det[sI - \{\alpha M_1 + (1 - \alpha)M_3\}] = (s + 1)(s^2 + 0.9s + 5\alpha^2 - 6\alpha + 1.9)$$

$0.1 < 5\alpha^2 - 6\alpha + 1.9$ olur ve buna göre ikinci dereceden bu polinomlar Hurwitz kararlıdır. $\mathcal{A}$ politopunun kenarları Hurwitz kararlıdır.

Diğer taraftan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ için M_1 , M_2 ve M_3 matrislerinin konveks kombinasyonu

$$\frac{1}{3}M_1 + \frac{1}{3}M_2 + \frac{1}{3}M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

olur. Bu matrisin özdeğerleri -1 , -1 ve 0.1 'dir ve Hurwitz kararlı değildir. Buna göre $\mathcal{A}$ afin matris ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olmadığı sonucu elde edilmiş olur.

3.4 Kenar teoreminin geçerli olduğu afin matrisler ailesi

Yukarıda (Bölüm 3.3) görüldüğü üzere afin matrisler ailesindeki tüm kenarlar Hurwitz kararlı olduğu halde afin matrisler ailesi gürbüz kararlı olmayabilmektedir.

$A_1, A_2, \dots, A_N$ matrisleri $n \times n$ boyutlu Hurwitz kararlı matrisler olsun. $\mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ matrisler politopunu ele alalım. Bu matris politopunun üreteç kümesindeki matrislerin ikişer ikişer farklarının rankı 1, yani

$$i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j \text{ için } \text{rank}(A_i - A_j) = 1$$

ise $\mathcal{A}$ matrisler politopu (afin matris ailesi) için Kenar Teoremi'nin geçerli olduğu [12] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada verilen sonucu ifade etmeden önce rankı 1 olan matrisleri karakterize etmemize imkân veren aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.9 [1, s. 13] *A matrisi $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. $\text{rank}(A) = 1$ olması için gerek ve yeter $A = x.y^T$ olacak şekilde sıfırdan farklı $x \in \mathbb{R}^m$ ve $y \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin varolmasıdır.*

$A_1, A_2, \dots, A_N$ matrisleri için $\text{rank}(A_i - A_j) = 1$ ise Teorem 3.9'ye göre öyle $n \times n$ boyutlu A_0 matrisi ve öyle $x \in \mathbb{R}^n$ ve $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$ vektörleri vardır ki $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$A_i = A_0 + x.y_i^T \quad (11)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 3.10 (12) *$A_1, A_2, \dots, A_N$ matrisleri $n \times n$ boyutlu D -kararlı matrisler ve her $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ($i \neq j$) için $\text{rank}(A_i - A_j) = 1$ olsun. $\mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ matrisler politopunun gürbüz D -kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ($i \neq j$) için $\text{conv}\{A_i, A_j\} = [A_i, A_j]$ matris segmentlerinin D -kararlı olmasıdır.*

Kanıt. $\Rightarrow$: $\mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ gürbüz D -kararlı olsun. Bu durumda $\text{conv}\{A_i, A_j\}$ segmentlerinin D -kararlı olduğu açıktır.

$\Leftarrow$: $A \in \mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ alalım. Bu durumda $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ ve $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) koşullarını sağlayan öyle α_i skalerleri vardır ki

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_N A_N$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (11)'daki ifadeler burada yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_N A_N \\
&= \alpha_1 (A_0 + x \cdot y_1^T) + \alpha_2 (A_0 + x \cdot y_2^T) + \cdots + \alpha_N (A_0 + x \cdot y_N^T) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N) A_0 + x \cdot (\alpha_1 y_1^T + \alpha_2 y_2^T + \cdots + \alpha_N y_N^T) \\
&= A_0 + x \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T
\end{aligned}$$

elde edilir. A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
p_A(s) &= \det(sI - A) \\
&= \det(sI - A_0 - x \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T) \\
&= \det([sI - A_0][I - \{sI - A_0\}^{-1} \cdot x \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T]) \\
&= \det(sI - A_0) \det(I - [sI - A_0]^{-1} \cdot x \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T)
\end{aligned}$$

olur.

$S \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ve I_k ($k \in \mathbb{N}$) $k \times k$ boyutlu birim matris olmak üzere

$$\det(I_m - ST) = \det(I_n - TS) \text{ olur.}$$

$(I - [sI - A_0]^{-1} \cdot x)_{n \times 1}$ ve $\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T)_{1 \times n}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
p_A(s) &= \det(sI - A_0) \det(I_n - [sI - A_0]^{-1} \cdot x \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T) \\
&= \det(sI - A_0) \det(I_1 - \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T \right] [sI - A_0]^{-1} \cdot x) \\
&= \det(sI - A_0) \cdot \left(1 - \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T \right] [sI - A_0]^{-1} \cdot x \right) \\
&= \det(sI - A_0) - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T \det(sI - A_0) [sI - A_0]^{-1} \cdot x \right)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Tekil olmayan bir B matrisi için

$$\text{adj}(B) = \det(B) \cdot B^{-1}$$

olduğundan

$$p_A(s) = \det(sI - A_0) - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^T \text{adj}(sI - A_0) \cdot x \right)$$

şeklinde yazılır. Burada $p_i(s) = y_i^T \text{adj}(sI - A_0) \cdot x$ dersek

$$p_A(s) = p_{A_0} - (\alpha_1 p_1(s) + \alpha_2 p_2(s) + \cdots + \alpha_N p_N(s))$$

olur.

$$\begin{aligned} p_A(s) &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)p_{A_0}(s) - (\alpha_1 p_1(s) + \alpha_2 p_2(s) + \dots + \alpha_N p_N(s)) \\ &= \alpha_1[p_{A_0}(s) - p_1(s)] + \alpha_2[p_{A_0}(s) - p_2(s)] + \dots + \alpha_N[p_{A_0}(s) - p_N(s)] \end{aligned}$$

olur. $\hat{p}_i(s) = p_{A_0}(s) - p_i(s)$ diyecek olursak

$$p_A(s) \in \text{conv}\{\hat{p}_1(s), \hat{p}_2(s), \dots, \hat{p}_N(s)\}$$

olarak elde edilmiş olur. $\text{conv}\{\hat{p}_1(s), \hat{p}_2(s), \dots, \hat{p}_N(s)\}$ politopunun gürbüz D -kararlılığı Teorem 3.6'ya göre bu politopun kenarlarının D -kararlılığına denktir.

Örnek 3.11

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \\ -5 & 7 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisleri için $\text{rank}(A_1 - A_2) = 1$, $\text{rank}(A_1 - A_3) = 1$ ve $\text{rank}(A_2 - A_3) = 1$ 'dir.

$$[A_1, A_2] = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2 = \begin{bmatrix} -5 + 2\alpha & 4 - \alpha & 1 \\ 3 - 4\alpha & -7 + 2\alpha & 2 \\ -5 + 6\alpha & 7 - 3\alpha & -4 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

olur ve bu segmentin karakteristik polinomu

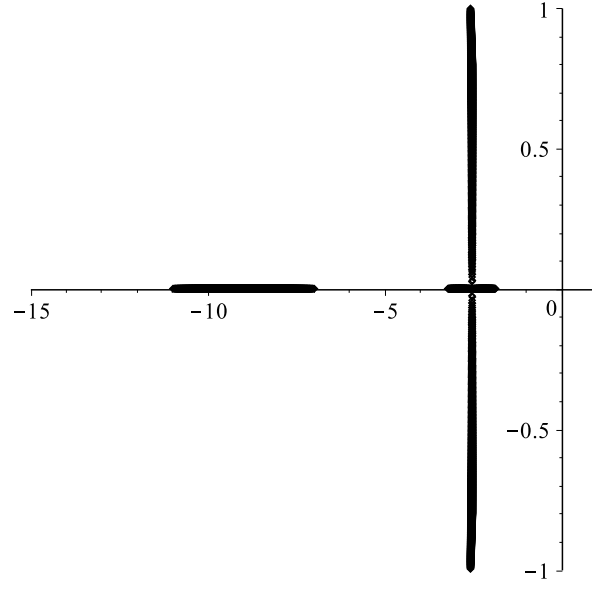
$$p_{12}(s, \alpha) = s^3 + (16 - 4\alpha)s^2 + (62 - 21\alpha)s + 76 - 35\alpha$$

olarak hesaplanır. Bu polinomun tüm katsayıları $\alpha \in [0, 1]$ için pozitifdir ve

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_0 a_3 &= (62 - 21\alpha)(16 - 4\alpha) - (76 - 35\alpha) \\ &= 84\alpha^2 - 549\alpha + 916 \geq 451 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

olduğundan Sonuç 2.6'e göre $p_{12}(s, \alpha)$ polinomu her $\alpha \in [0, 1]$ için Hurwitz kararlıdır. Buna göre $[A_1, A_2]$ segmenti Hurwitz kararlıdır.

$$[A_1, A_3] = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 4 - \alpha & 1 \\ 3 & -7 + 2\alpha & 2 \\ -5 & 7 - 3\alpha & -4 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1]$$



Şekil 3.3: Örnek 3.11’de verilen matris ailesinin özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki yeri.

olur.

Bu segmentin karakteristik polinomu

$$p_{13}(s, \alpha) = s^3 + (16 - 2\alpha)s^2 + (62 - 9\alpha)s + 76 - 9\alpha$$

olur ve polinomun tüm katsayıları $\alpha \in [0, 1]$ için pozitifdir.

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_0a_3 &= (62 - 9\alpha)(16 - 2\alpha) - (76 - 9\alpha) \\ &= 18\alpha^2 - 259\alpha + 916 \geq 675 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

olduğundan Sonuç 2.6’e göre $p_{13}(s, \alpha)$ polinomu her $\alpha \in [0, 1]$ için Hurwitz kararlıdır. Buna göre $[A_1, A_3]$ segmentinin Hurwitz kararlı olduğu görülür.

$$[A_2, A_3] = (1 - \alpha)A_2 + \alpha A_3 = \begin{bmatrix} -3 - 2\alpha & 3 & 1 \\ -1 + 4\alpha & -5 & 2 \\ 1 - 6\alpha & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

şeklinde elde edilir ve bu segmentin karakteristik polinomu

$$p_{23}(s, \alpha) = s^3 + (12 + 2\alpha)s^2 + (41 + 12\alpha)s + 41 + 26\alpha$$

olur. Tüm katsayıları $\alpha \in [0, 1]$ için pozitif olan bu polinomunda

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_0 a_3 &= (41 + 12\alpha)(12 + 2\alpha) - (41 + 26\alpha) \\ &= 24\alpha^2 + 200\alpha + 451 \geq 451 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

olduğundan Sonuç 2.6'e göre $p_{23}(s, \alpha)$ polinomu her $\alpha \in [0, 1]$ için Hurwitz kararlıdır. Bu sonuca göre $[A_2, A_3]$ segmenti Hurwitz kararlıdır.

İkişer ikişer farkları rankı 1 olan bu A_1, A_2 ve A_3 matrisleri için $\mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, A_3\}$ matrisler politopunun tüm kenarları Hurwitz kararlıdır. Teorem 3.10'a göre $\mathcal{A}$ matrisler politopu gürbüz Hurwitz kararlıdır.

3.5 Karakteristik polinomu multilineer olan afin matrisler ailesi

Bir $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_m) \mapsto f(q)$ fonksiyonu her bir q_i bileşenine göre ($i = 1, 2, \dots, m$) afin lineer ise f fonksiyonuna multilineer fonksiyon denir.

Örneğin; $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(q_1, q_2, q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3 - q_2 q_3 + 2$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} f(q_1, q_2, q_3) &= q_1(q_2 + q_2 q_3) - q_2 q_3 + 2 \\ &= q_2(q_1 + q_1 q_3 - q_3) + 2 \\ &= q_3(q_1 q_2 - q_2) + q_1 q_2 + 2 \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu multilineer bir fonksiyondur.

$Q \subset \mathbb{R}^m$ belirsizlik kümesi için $a_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) katsayı fonksiyonları multilineer ise

$$\mathcal{P} = \{p(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + a_2(q)s^2 + \dots + a_n(q)s^n : q \in Q\} \quad (12)$$

polinom ailesine multilineer polinomlar ailesi denir.

$\mathcal{P}$ multilineer polinomlar ailesinin gürbüz kararlık problemi için Kenar Teoremi (Teorem 3.6) geçerli değildir.

$Q \subset \mathbb{R}^m$ bir kutu ve $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ multilineer fonksiyon olsun. f fonksiyonu Q kutusu üzerinde minimum ve maksimum değerlerini Q kutusunun köşe noktalarında alır [4, s. 245]. Bu özellik yardımıyla multilineer polinomlar ailesinin gürbüz D -kararlılığı problemi için algoritmalar verilebilir. Multilineer

polinomlar ailesinin gürbüz Schur ve Hurwitz kararlılığı problemi için [11] çalışmasında verilen yöntemler kullanılabilir.

Bu bölümde karakteristik polinomu multiliner polinomlar olan bir matrisler ailesini ele alacağız.

$M_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrislerinin rankı 1 olmak üzere $q = (q_1, q_2, \dots, q_k) \in \mathbb{R}^k$ için

$$M(q) = M_0 + q_1 M_1 + q_2 M_2 + \dots + q_k M_k \quad (13)$$

afin matrisler ailesini verilsin. Bu matris ailesinin karakteristik polinomlarının multilinear polinomlar ailesi olduğu [5, s. 510]'da kanıtlanmıştır. Burada bu sonucun farklı bir kanıtını vereceğiz.

Teorem 3.12 [5, s. 510] *Denklem (13) ile verilen $M(q)$ matrisler ailesinin karakteristik polinomları bir multiliner polinomlar ailesidir.*

Kanıt. $M(q) = M_0 + q_1 M_1 + q_2 M_2 + \dots + q_k M_k$ matrisinin $p(s, q) = \det(sI - M(q)) = a_0(q) + a_1(q)s + \dots + a_n(q)s^n$ karakteristik polinomunun multiliner olduğunu, yani $a_i(q)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) katsayı fonksiyonlarının her bir $q_1, q_2, \dots, q_l$ bileşenine göre afin lineer olduğunu göstereceğiz.

q_1 bileşeni dışında diğer bileşenleri sabit alalım. Bu durumda $C = M_0 + q_2 M_2 + \dots + q_k M_k$ olmak üzere

$$M(q) = q_1 M_1 + C$$

olur.

$$\begin{aligned} p(s, q) &= \det(sI - M(q)) \\ &= s^n - E_1(q_1 M_1 + C)s^{n-1} + E_2(q_1 M_1 + C)s^{n-2} + \dots + (-1)^n E_n(q_1 M_1 + C) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir [1, s. 52]. Burada $k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k(q_1 M_1 + C)$ ile $q_1 M_1 + C$ matrisinin $k \times k$ boyutlu esas minörlerinin toplam- larını göstermektedir.

M_1 matrisinin rankı 1 olduğundan M_1 matrisin tüm sütunları lineer bağımlıdır. $u \in \mathbb{R}^n$ ve $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ sabit sayılar olmak üzere M_1 matrisi

$$M_1 = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \beta_1 u & \beta_2 u & \cdots & \beta_n u \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $q_1 M_1 + C$ matrisinin $k \times k$ boyutlu esas minörleri

$$\det [q_1 \beta_1 \tilde{u} + \tilde{c}_1, q_1 \beta_2 \tilde{u} + \tilde{c}_2, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] \quad (14)$$

şeklindedir. Burada $\tilde{u}, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_k$ k -boyutlu sütun matrisleridir. Determinant fonksiyonunun lineerlik özelliğinden (14) determinanı

$$\begin{aligned} \det [q_1 \beta_1 \tilde{u} + \tilde{c}_1, q_1 \beta_2 \tilde{u} + \tilde{c}_2, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] = \\ q_1 \beta_1 \det [\tilde{u}, q_1 \beta_2 \tilde{u} + \tilde{c}_2, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] + \det [\tilde{c}_1, q_1 \beta_2 \tilde{u} + \tilde{c}_2, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] = \\ q_1^2 \beta_1 \beta_2 \det [\tilde{u}, \tilde{u}, q_1 \beta_3 \tilde{u} + \tilde{c}_3, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] + \\ q_1 \beta_1 \det [\tilde{u}, \tilde{c}_2, q_1 \beta_3 \tilde{u} + \tilde{c}_3, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] + \\ q_1 \beta_2 \det [\tilde{c}_1, \tilde{u}, q_1 \beta_3 \tilde{u} + \tilde{c}_3, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] + \\ \det [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, q_1 \beta_3 \tilde{u} + \tilde{c}_3, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] = \dots \end{aligned} \quad (15)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu işleme devam edildiğinde $m \geq 2$ için q^m 'li terimlerde determinant içerisindeki matrisin m tane sütununu u vektörü oluşturacağından bu determinantlar sıfır olur. Buna göre (15) denklemini ile verilen determinant

$$\det [q_1 \beta_1 \tilde{u} + \tilde{c}_1, q_1 \beta_2 \tilde{u} + \tilde{c}_2, \dots, q_1 \beta_k \tilde{u} + \tilde{c}_k] = q_1 \left(\begin{array}{c} \text{sütunlarından} \\ \text{bir tanesi } \beta_i u \\ \text{olan matrislerin} \\ \text{determinantları} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{sütunlarında} \\ u \text{ vektörü olmayan} \\ \text{matrislerin} \\ \text{determinantları} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \quad (16)$$

şeklinde ifade edilir.

$E_k(q_1 M_1 + C)$ katsayı fonksiyonu (16) şeklindeki determinantların toplamından oluştuğu için q_1 'e göre afin lineerdir. q_1 için yapılan bu işlemler sırasıyla q_2 , $q_3, \dots, q_k$ için yapıldığında bu katsayı fonksiyonlarının bu bileşenlere göre de multilineer olduğu görülür. Buna göre $p(s, q) = \det(sI - M(q))$ polinomu multilineer katsayılı bir polinomdur.

Örnek 3.13

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin.

Burada $\text{rank}(M_1) = \text{rank}(M_2) = \text{rank}(M_3) = 1$ 'dir. $q \in \mathbb{R}^3$ için

$$M(q) = M_0 + q_1 M_1 + q_2 M_2 + q_3 M_3$$

matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p(s, q) = \det[sI - M(q)] &= s^3 + (-2q_1 + q_2 + 4q_3 - 8)s^2 + \\ & (4q_1q_2 - 9q_1q_3 - 16q_1 - 47q_2 - 28q_3 - 8)s - \\ & 97q_1q_2 - 43q_1q_3 - 39q_1 + 232q_2 - 92q_3 + 129 \end{aligned}$$

multilineer polinomudur.

Örnek 3.14

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -29 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 17 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 18 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin. $\text{rank}(E) = 2$ 'dir. $q \in \mathbb{R}$ için

$$M(q) = M_0 + qE = \begin{bmatrix} q+1 & 17q+1 & 3q-29 \\ 2q+2 & 4q+1 & 6q+2 \\ 6q+1 & 7q+1 & 18q+1 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik polinomu

$$p(s, q) = \det[sI - M(q)] = s^3 + (-23q - 3)s^2 + (161q + 28)s + 190q + 30$$

afin katsayılı polinom olur.

Örnek 3.14, lineer toplamdaki matrislerin ranklarının 1 olmaması durumunda da afin matris ailesinin karakteristik polinomunun multilineer polinom olabileceğini göstermektedir.

4 Afin Matrisler Ailesinin Gürbüz Kararlı bir Q Kutusunun Belirlenmesi

Boyutu $n \times n$ olan D -kararlı matrislerin kümesi açık, konveks olmayan bir kümedir. D -kararlı bir $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verildiğinde $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $Q = [q_1^-, q_1^+] \times \dots \times [q_m^-, q_m^+] \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere

$$\mathcal{A} = \{A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \dots + q_m A_m : q = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in Q\} \quad (1)$$

afin matrisler ailesi gürbüz D -kararlı olacak şekilde bir Q kutusunun belirlenmesi problemi önem taşımaktadır [4, 5, 13].

4.1 Gürbüz kararlılık için Q kutusu

Bu bölümde (1) afin matrisler ailesi gürbüz Hurwitz kararlı olacak şekilde maksimal Q kutusunu belirlemeye yönelik [13]'de verilen sonuçları ele alacağız. Bu sonuçlar Kronecker matris çarpımı, toplamı ve özdeğer özellikleri kullanılarak verilmiştir.

Tanım 4.1 $S \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisleri verilsin. S ile T matrisinin Kronecker çarpımı

$$S \otimes T = \begin{bmatrix} s_{11}T & s_{12}T & \cdots & s_{1l}T \\ s_{21}T & s_{22}T & \cdots & s_{2l}T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k1}T & s_{k2}T & \cdots & s_{kl}T \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. $S \otimes T$ matrisinin boyutu $km \times ln$ 'dir.

Tanım 4.2 $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrisleri verilsin. U ile V matrisinin Kronecker toplamı

$$U \oplus V = U \otimes I_m + I_n \otimes V$$

şeklinde tanımlanır. $U \oplus V$ matrisinin boyutu $nm \times nm$ 'dir.

Teorem 4.3 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve B matrisinin özdeğerleri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ olsun. Bu durumda $A \oplus B$ matrisinin özdeğerleri $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\lambda_i + \mu_j$ toplamlarından oluşur.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi Hurwitz kararlı olsun. A matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatiftir: $\lambda_i < 0$ $i = 1, 2, \dots, n$.

$K[A] = A \oplus A$ diyelim. Eğer A matrisi Hurwitz kararlı ise $K[A]$ matrisi de Hurwitz kararlı olur.

Teorem 4.4 [13, s. 40] $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz kararlı, $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $Q = [q_1^-, q_1^+] \times \cdots \times [q_m^-, q_m^+] \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere

$$\mathcal{A} = \{A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \cdots + q_m A_m : q = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in Q\}$$

afin matrisler ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $q \in Q$ için

$$\det \left(I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i] \right) > 0$$

olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$: her $q \in Q$ için $A(q)$ Hurwitz kararlı olsun. Bu durumda her $q \in Q$ için $K[A(q)]$ matrisleri de Hurwitz kararlıdır. $p(\lambda) = \det(\lambda I - K[A(q)])$ karakteristik polinomu her $q \in Q$ için Hurwitz kararlı olur ve

$$p(0) = (-1)^{n^2} \det(K[A(q)]) > 0$$

olur. Diğer taraftan

$$K[A(q)] = K[A_0] + \sum_{i=1}^m q_i K[A_i],$$

ve $\det(K[A_0]) \neq 0$ ($K[A_0]$ Hurwitz kararlı) olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &< (-1)^{n^2} \det(K[A(q)]) \\ &= (-1)^{n^2} \det(K[A_0] + \sum_{i=1}^m q_i K[A_i]) \\ &= (-1)^{n^2} \det(K[A_0] \{I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i]\}) \\ &= (-1)^{n^2} \det(K[A_0]) \det(I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i]) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $K[A_0]$ Hurwitz kararlı matristir ve $0 < (-1)^{n^2} \det(K[A_0])$ olur. Buna göre her $q \in Q$ için

$$0 < \det \left(I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i] \right).$$

$\Leftarrow$: Her $q \in Q$ için

$$0 < \det \left(I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i] \right)$$

olsun. $\mathcal{A}$ afin matrisler ailesinin gürbüz kararlı olmadığını varsayalım. O zaman öyle $q^* \in Q$ vardır ki $A(q^*)$ Hurwitz kararlı değildir, yani en az bir λ_{i_*} özdeğeri için $\text{Re}(\lambda_{i_*}) \geq 0$ olur. Özdeğerlerin parametreye sürekli bağlılığı teoremine ([4, s. 52]) göre öyle $\tilde{q} \in Q$ vardır ki $A(\tilde{q})$ matrisinin kompleks düzlemde imajiner eksen üzerinde en az bir özdeğeri vardır. Bu özdeğer $\lambda = 0$ ise $K[A(\tilde{q})]$ matrisinin de bir özdeğeri 0 olur. Eğer bu özdeğer pür imajiner, yani $0 < \omega \in \mathbb{R}$ için $j\omega$ ise $-j\omega$ da $A(\tilde{q})$ matrisinin bir özdeğeri. Bu durumda da $K[A(\tilde{q})]$ matrisinin bir özdeğeri 0 olur. Her $q \in Q$ için

$$0 < \det \left(I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i] \right).$$

$K[A_0]$ Hurwitz kararlı olduğundan her $q \in Q$ için

$$\begin{aligned} 0 &< (-1)^{n^2} \det(K[A_0]) \det(I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i]) \\ &= (-1)^{n^2} \det(K[A(q)]) \end{aligned} \quad (2)$$

olmalıdır. Ancak $\det(K[A(\tilde{q})]) = 0$ olacağından bu durum (2) eşitsizliği ile çelişmektedir. Bu nedenle $\mathcal{A}$ afin matrisler ailesi gürbüz Hurwitz kararlıdır.

Teorem 4.5 [13, s. 41] $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz kararlı matris olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin.

$$0 < \mu < \frac{1}{\rho\{(\sum_{i=1}^m |K[A_0])^{-1} K[A_i]|\}}$$

için $Q = \{q = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m : -\mu \leq q_i \leq \mu\}$ kutusunu alalım. Bu durumda

$$\mathcal{A} = \{A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \dots + q_m A_m : q \in Q\}$$

afin matrisler ailesi gürbüz Hurwitz kararlıdır.

Kanıt. $Q \subset \mathbb{R}^m$ bir kutu ve $q \in Q$ alalım.

$B(q) = (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i]$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1(q), \lambda_2(q), \dots, \lambda_r(q)$ ($r = n^2$) olsun. O zaman $I + B(q)$ matrisinin özdeğerleri $1 + \lambda_1(q), 1 + \lambda_2(q), \dots, 1 + \lambda_r(q)$ olur.

Eğer her $q \in Q$ için

$$\rho\left\{(K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m q_i K[A_i]\right\} = \max\{|\lambda_1(q)|, |\lambda_2(q)|, \dots, |\lambda_r(q)|\} < 1$$

ise bu durumda her $q \in Q$ için

$$0 < \det\left[I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m K[A_i]\right]$$

olur ki bu da her $q \in Q$ için $A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \dots + q_m A_m$ matrislerinin Hurwitz kararlı olmasını gerektirir (Teorem 4.4).

$C_0 = K[A_0]$, $C_i = K[A_i]$ ($i = 1, 2, \dots, m$) diyelim. O zaman

$$\begin{aligned} \rho \left(C_0^{-1} \sum_{i=1}^m q_i C_i \right) &= \rho \left(\sum_{i=1}^m q_i C_0^{-1} C_i \right) \\ &\leq \rho \left(\sum_{i=1}^m |q_i C_0^{-1} C_i| \right) \\ &\leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} |q_i| \rho \left(\sum_{i=1}^m |C_0^{-1} C_i| \right) \end{aligned}$$

olacağından $\mu = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} |q_i|$ diyecek olursak

$$\mu \cdot \rho \left(\sum_{i=1}^m |C_0^{-1} C_i| \right) < 1$$

eşitsizliğinden

$$\mu < \frac{1}{\rho \left(\sum_{i=1}^m |C_0^{-1} C_i| \right)}$$

olarak alınırsa her $q \in Q = [-\mu, \mu]^m$ için

$$0 < \det \left[I + (K[A_0])^{-1} \sum_{i=1}^m K[A_i] \right]$$

olur. Teorem 4.4'e göre

$$\mathcal{A} = \{A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \dots + q_m A_m : q \in Q\}$$

gülbüz Hurwitz karardır.

Örnek 4.6

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(A_0 Hurwitz kararlı) matrisleri için $q = (q_1, q_2)$ olmak üzere

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 = \begin{bmatrix} -q_1 - 3q_2 + 1 & q_1 + q_2 + 2 \\ q_1 + 2q_2 - 3 & 2q_1 - q_2 - 2 \end{bmatrix}$$

afin matrisler ailesini ele alalım.

$$K[A_0] = A_0 \otimes I + I \otimes A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

$$K[A_1] = A_1 \otimes I + I \otimes A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$K[A_2] = A_2 \otimes I + I \otimes A_2 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$(M = |(K[A_0])^{-1}K[A_1]| + |(K[A_0])^{-1}K[A_2]| = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 9/2 & 3 & 0 & 3/2 \\ 9/2 & 0 & 3 & 3/2 \\ 27/4 & 3 & 3 & 11/4 \end{bmatrix})$$

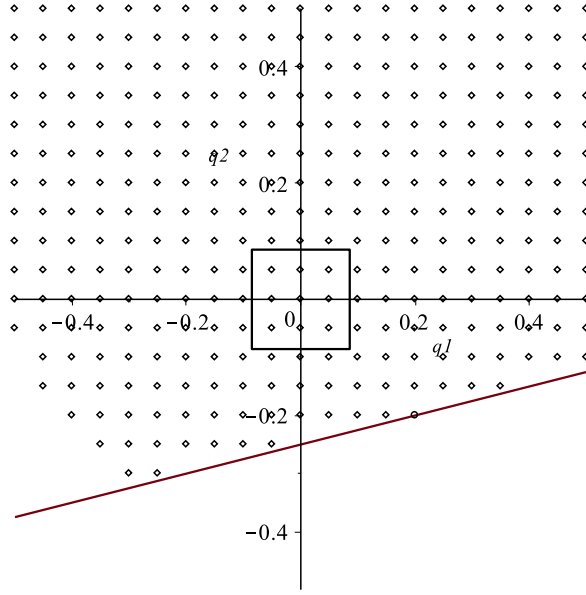
olur ve ve

$$\begin{aligned} \rho(M) &= \max\{3, 11.682, |-0.466 + 0.651j|, |-0.466 - 0.651j|\} \\ &= \max\{3, 11.682, 0.801\} = 11.682 \end{aligned}$$

olduğundan $\mu < \frac{1}{11.682} = 0.085$ için

$$\mathcal{A} = \{A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 : q = (q_1, q_2) \in [-\mu, \mu] \times [-\mu, \mu]\}$$

afin matrisler ailesi Teorem 4.5'a göre gürbüz kararlıdır.



Şekil 4.1: Örnek 4.6’de verilen $A(q)$ matrislerinin Hurwitz kararlı olduğu bazı (q_1, q_2) noktaları ve $[-0.08, 0.08] \times [-0.08, 0.08]$ kutusu.

Teorem 4.5’de $\mathcal{A}$ afin matrisler ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olduğu bir Q kutusu verilmektedir. A_0 Hurwitz kararlı olmak üzere matrisler uzayında merkezi A_0 olan ve belirsizlik parametrelerinin bir kürede bulunduğu bir matrisler ailesini ele alalım. Bu ailenin gürbüz Hurwitz kararlı olmasına ilişkin bir sonuç [5]’de yer almaktadır. Burada, [5]’teki bu yöntemle matris ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olduğu küre formundaki belirsizlik kümesinin elde edilişi verilmektedir.

$A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz kararlı matris olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin. $q = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m$ için

$$\mathcal{A} = \{A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \dots + q_m A_m : \|q\| \leq R\}$$

afin matrisler ailesi gürbüz Hurwitz kararlı olacak şekilde $0 < R$ sayısı şu şekilde belirlenebilmektedir.

A_0 Hurwitz kararlı olduğundan $Q > 0$ için

$$A_0^T P + P A_0 = -Q$$

(Lyapunov denklemi) olacak şekilde $P > 0$ vardır [2].

Teorem 4.7 [5, s. 519] $i = 1, 2, \dots, m$ için $\mu_i = \|A_i^T P + P A_i\|_2$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^m q_i^2 < \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m}$$

eşitsizliğini sağlayan $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ için $A(q)$ Hurwitz karardır (burada $\sigma_{\min}(B)$, B matrisinin modülü en küçük özdeğerini göstermektedir).

Örnek 4.6'teki matrisleri tekrar ele alalım.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = I \text{ alalım. } P = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \text{ matrisi için } A_0^T P + P A_0 = -Q \text{ denklemi}$$

$$\begin{bmatrix} 2x - 6y & 2x - y - 3z \\ 2x - y - 3z & 4y - 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olur ve çözümü

$$P = \begin{bmatrix} 17/8 & 7/8 \\ 7/8 & 9/8 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\mu_1 = \|A_1^T P + P A_1\| = 8.907,$$

$$\mu_2 = \|A_2^T P + P A_2\| = 9.345$$

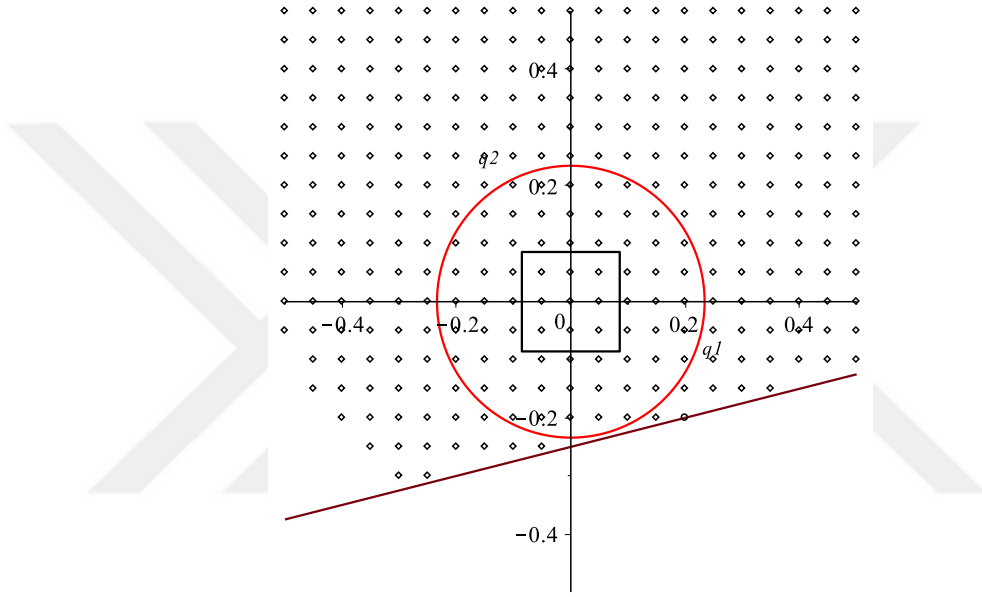
olarak hesaplanır. Buna göre

$$q_1^2 + q_2^2 < \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{1}{18.253} = 0.054.$$

Eğer $R < \sqrt{0.054} = 0.234$ alınırsa $\|q\| = \|(q_1, q_2)\| \leq R$ için

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 = \begin{bmatrix} -q_1 - 3q_2 + 1 & q_1 + q_2 + 2 \\ q_1 + 2q_2 - 3 & 2q_1 - q_2 - 2 \end{bmatrix}$$

matrisi Hurwitz karardır.



Şekil 4.2: Örnek 4.6’de verilen $A(q)$ matrislerinin Hurwitz kararlı olduğu bazı (q_1, q_2) noktaları, $[-0.08, 0.08] \times [-0.08, 0.08]$ kutusu ve $R = 0.234$ yarıçaplı çember.

KAYNAKÇA

- [1] R. A. Horn, C. R. Johnson *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, (2013)
- [2] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, (2001)
- [3] B. Nicoletta, R. Carli, L. Schenato, *Lyapunov Theory for Discrete Time Systems*, Universita degli studi di Padova - Technical Report, (2001)
- [4] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear systems*, Macmillan, (1994)
- [5] S.P. Bhattacharyya, H.Chapellat, L.H.Keel, *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, (1995)
- [6] V. L. Kharitonov, *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*, Differential Uravnen, vol. 14, pp. 2086–2088, (1978)
- [7] C. V. Hollot, A. C. Bartlett, *Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-31, pp. 355-356, (1986)
- [8] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, L. Huang, *Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges*, Mathematics of Control, Signals and Systems, vol. 1, pp. 61-71, (1988)
- [9] V. Dzhafarov, T. Büyükköroğlu *An algorithm for segment stability*, Mathematical and Computational Applications, vol. 8, no.1, pp.111–118, (2003)
- [10] B. R. Barmish, M. Fu, S. Saleh, *Stability of a Polytope of Matrices: Counterexamples*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 33, no.6, pp.569–572, (1988)

- [11] H. Akyar, T. Büyükköroğlu, V. Dzhafarov, *On stability of parametrized families of polynomials and matrices*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2010, Article ID 687951, 16 pages, (2010)
- [12] J. Collado, R. Lozano, *Necessary and sufficient conditions for robust stability of the convex-hull of matrices with rank-one uncertainty*, Proceedings of the 2000 American Control Conference, ACC (IEEE Cat. No.00CH36334), pp. 4316–4317, (2000)
- [13] R.K. Yedavalli, *Robust Control of Uncertain Dynamic Systems: A Linear State Space Approach*, Springer, (2014)



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Dilan POLATLI HOŞLAN

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi:

- 2008-2013, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

