



T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**AĞ TRAFİK ATAMA PROBLEMLERİNİN
OPTİMİZASYONU İÇİN NÜMERİK
ALGORİTMALAR: BİR YOL AĞI
TOPOLOJİSİNİN OPTİMİZASYONU**

Pelin GÜVENÇ DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Kasım-2023
BATMAN
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Pelin GÜVENÇ DEMİR tarafından hazırlanan “Ağ trafik atama problemlerinin optimizasyonu için nümerik algoritmalar: Bir yol ağı topolojisinin optimizasyonu” adlı tez çalışması 15/11/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ

.....

Danışman

Doç. Dr. Hasan DALMAN

.....

Üye

Doç. Dr. Veyis TURUT

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Osman PAKMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Pelin GÜVENÇ DEMİR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞ TRAFİK ATAMA PROBLEMLERİNİN OPTİMİZASYONU İÇİN NÜMERİK ALGORİTMALAR: BİR YOL AĞI TOPOLOJİSİNİN OPTİMİZASYONU

Pelin GÜVENÇ DEMİR

**Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Hasan DALMAN

2023, 68 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ

Doç. Dr. Hasan DALMAN

Doç. Dr. Veyis TURUT

Bu tezde, taşıma ağlarında ağ trafik atama problemlerinin optimizasyonuna odaklanarak temelden ileriye ağlar hakkında ayrıntılı bilgi sunulmaktadır. Ayrıca, ağlar için ekstremum koşulları detaylı bir şekilde açıklanmaktadır.

Tezde, statik ağ trafik atama probleminin optimizasyon modeli matematiksel olarak incelenmiştir. Daha sonra, bu modelin Lagrange fonksiyonu kullanılarak optimalite ve KKT koşulları hakkında bilgiler verilmiştir. Ayrıca, optimizasyon probleminin çözümü için Lagrange fonksiyonu temel alınarak bir sinir ağı tasarlanmış ve bu sinir ağının yerel ve Lyapunov kararlılığını ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Oluşturulan sinir ağı, başlangıç koşullarına bağlı bir dinamik sistem olması nedeniyle, Maple 2023 yazılımı kullanılarak başlangıç koşullarına göre çözülmüş ve ardından Python 3 programı kullanılarak nümerik bir çözüm elde edilmiştir. Çözümlerden ağ trafiğinin ve ağ akışlarının zaman içindeki değişimleri de dikkatle incelenmiştir.

Tezde bulgular ve sonuçlar, şekiller aracılığıyla sunulmuş ve sinir ağı temelli çözümün geleneksel yöntemlere kıyasla belirgin bir iyileşme sağladığı gösterilmiştir.

Son olarak, sunulan sinir ağı, statik bir ağın dinamik bir sistem haline getirilmesine imkan tanıdığını da göstermektedir. Ayrıca, zaman içinde trafik akışlarının rotalardaki değişimini ve bağlantılardaki trafik akışlarını tahmin etme yeteneğini artırmaktadır. Bu sonuçlar, tezde sunulan optimizasyon yönteminin tutarlı, öngörülebilir ve etkili sonuçlar sağladığını göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Ağ Trafik Atama, Dinamik Sistemler, Graf Teori, Optimizasyon, Sinir Ağları

ABSTRACT

MS THESIS

NUMERICAL ALGORITHMS FOR OPTIMIZATION OF NETWORK TRAFFIC ASSIGNMENT PROBLEMS: OPTIMIZATION OF A ROAD NETWORK TOPOLOGY

Pelin GÜVENÇ DEMİR

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS**

Advisor: Associate Professor Hasan DALMAN

2023, 68 Pages

Jury

Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ

Assoc. Prof. Dr. Hasan DALMAN

Assoc. Prof. Dr. Veyis TURUT

This thesis provides a comprehensive exploration of networks, covering fundamental concepts to advanced topics with a specific focus on optimizing traffic assignment problems in transport networks. It examines the static network traffic assignment problem through a mathematical optimization model, providing detailed discussions on optimality and Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions using the Lagrange function.

In addition, the thesis proposes a neural network based on the Lagrange function to address the optimization problem. The local and Lyapunov stability of this neural network is thoroughly explained, while the dynamic nature of the neural network is addressed by solving it with Maple 2023 software and obtaining a numerical solution using Python 3. The changes in network traffic and flows over time are carefully analyzed.

Findings and results are presented through figures, demonstrating that the neural network-based solution outperforms traditional methods significantly. Notably, the proposed neural network transforms a static network into a dynamic system, enhancing the capability to predict changes in traffic flows on routes and connections over time. Overall, the optimization method outlined in the thesis consistently delivers predictable and efficient results.

Keywords: Dynamic Systems, Graph Theory, Network Traffic Assignment, Neural Networks, Optimization

ÖNSÖZ

Çalışma sürecinde her türlü yol gösterici olan, olumlu tavırlarıyla beni cesaretlendiren, bilgi birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan beraber çalışmaktan ve öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Doç. Dr. Hasan DALMAN'a teşekkür ederim.

Pelin GÜVENÇ DEMİR
BATMAN-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
3. ÖN BİLGİLER.....	9
3.1. Graf Teorisi: Tanımlar ve Notasyonlar.....	9
3.1.1. Yönlü Graflar	9
3.1.2. Zincir ve Döngü	10
3.1.3. Yol ve Şebeke	11
3.1.4. Erişilebilirlik ve Bağlılık	11
3.1.5. Kesim- Kümesi	11
3.1.6. Yönsüz ve Karmaşık Graflar	12
3.1.7. Ağaç	12
3.2. Akışlar ve Korunum Kanunları.....	13
3.2.1. Bağlantı Akışları ve Kirchhoff Yasası.....	13
3.2.2. Tek Başlangıç-Varış Düzümü İçeren Ağlar	14
3.2.2.1. Bağlantı Akış Modeli.....	14
3.2.2.2. Zincir Akış Modeli.....	16
olacak şekilde yeniden yazılabilir.....	17
3.2.3. Birden Fazla Başlangıç-Varış Düzümleri İçeren Ağlar.....	18
3.2.4. Sıkıştırılabilirlik ve Ayrıştırılabilirlik	20
3.3. Maliyetler ve Fiyatlar.....	21
3.3.1. Bağlantı, Rota ve Ağ Maliyetleri	21
3.3.2. Kapasiteli Ağlar	23
3.4. Ağlarda Ekstremum Koşulları	24
3.4.1. Akışa Bağımlı Maliyetler.....	25
3.4.1.1. Çoklu Ürün Ağ Akış Modeli	25
4. AĞ TRAFİK ATAMA PROBLEMLERİNİN OPTİMİZASYON MODELİ.31	
4.1. Ağ Trafik Atama Problemi ve Optimallik Koşulları.....	31
4.1.1. Kullanıcı Dengesi	31
4.1.2. Kullanıcı Dengesi için Optimizasyon Modeli	32
4.2. Lagrange Fonksiyonu ve Optimallik Koşulları	35
5. TRAFİK ATAMA PROBLEMİNİN OPTİMİZASYONU İÇİN LAGRANGE SİNİR AĞI YÖNTEMİ	38

5.1. Lagrange Sınır Ağı.....	38
6. SAYISAL UYGULAMALAR.....	48
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	63
7.1. Sonuçlar	63
7.2. Öneriler	64
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	68



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$	: Yönlü graf
$\mathcal{N}$	: Sıralı elemanlardan oluşan sonlu bir küme
$\mathcal{A}$	: $\mathcal{N}$ 'nin elemanları arasındaki sıralı çiftlerin kümesi
n	: $\mathcal{N}$ kümesinde bulunan eleman sayısı
l	: $\mathcal{A}$ kümesinde bulunan eleman sayısı
n_i	: $\mathcal{N}$ kümesinin elemanları
(i, j)	: $\mathcal{A}$ kümesinin yönlü bağlantıları
i	: Yönlü bağlantının A düğümü
j	: Yönlü bağlantının B düğümü
$\mathcal{A}'$	: $\mathcal{A}$ bağlantılar kümesinin bir alt kümesi olan kısmi graf
X ve $\overline{X}$	: $\mathcal{N}$ 'in tamamlayıcı düğüm kümeleri
M	: Zincir kümesi
m_j	: M kümesi elemanları
f_{ij}	: (i, j) üzerinden taşınan akış
a_i	: i tarafından üretilen akış
b_i	: i tarafından çekilen akış
E	: Düğüm-bağlantı bağıllık matrisi
f_i	: Başlangıç- varış düğümleri içeren zincirleri
h_j	: Zincir akışları
A	: Bağlantı-zincir bağıllık matrisi
h	: Zincir akış vektörü
T	: Matris transpozu
a	: Kaynak düğümünden varış düğümüne akış kopyası
k	: Kaynak düğümünden varış düğümüne akış
l_i	: Akıştan bağımsız bağlantı maliyeti
$c(l_i)$	: Bağlantı maliyeti

$p(l_i, l_j)$	: Ceza
u_{ij}	: Link kapasitesi
p	: Başlangıç düğümü
q	: Varış düğümü
r	: Rota
C_r^{pq}	: Yolculuk maliyeti
R_{pq}	: Başlangıç-varış çiftindeki zincirlerin indeks kümesi
h_r^{pq}	: Akış deseni
λ_{pq}	: p 'den q 'ya en kısa zincir üzerinde seyahat maliyeti



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 6. 1. Altı adet düğüm, 10 adet bağlantı, 3 merkezi düğüm ve 3 transfer düğümü içeren bir ağ	48
Şekil 6. 2. Bağlantı maliyet fonksiyonu.....	49
Şekil 6. 3. Zincir akışlarının zamanla değişim grafiği	60
Şekil 6. 4. Bağlantı akışlarının zamanla değişim grafiği	60
Şekil 6. 5. Tüm Bağlantı akışlarının zamanla değişim grafiği.....	61
Şekil 6. 6. Tüm zincir akışlarının zamanla değişim grafiği	61



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 6. 1: Optimizasyon Problemi için Kullanıcı Denge Deseni	55
---	----



1. GİRİŞ

Şehir trafik planlama alanında sıkça incelenen bir matematiksel model sınıfı, ağ trafik atama problemleridir. Bu modeller, gerçek dünya problemlerinin özelliklerine ve modelin amacına bağlı olarak çeşitli farklı yönler içerebilir. Ancak hepsinin ortak hedefi, sabit veya değişken bir seyahat talebine sahip yol ağındaki trafik akış desenini tanımlamak, tahmin etmek veya belirlemektir. Trafik akış deseni, genellikle şehir bölgesindeki toplam trafik akışının hoşnutsuzluk veya maliyet gibi bir ölçüsünü içeren önceden belirlenmiş bir performans kriterine göre belirlenir. Sıkça seyahat maliyeti, seyahat süresi ile eşdeğer kabul edilir ve bu terimler genellikle birbirinin yerine kullanılmaktadır (Larsson ve Patriksson, 1995).

Wardrop'un (1952) iki optimallik ilkesi, en yaygın kullanılan iki performans kriteridir. İlk ilke, yoğun trafik ağındaki her kullanıcının kendi seyahat süresini en aza indirme isteği temeline dayanır ve bu nedenle kullanıcı optimumu veya kullanıcı denge ilkesi (ya da deseni) olarak da bilinir. Eğer yol ağındaki bağlantıların seyahat sürelerini tanımlayan fonksiyon integrallenebilir ve monoton ise, Wardrop'un ilk optimallik ilkesi, çözülmesi kolay bir konveks matematiksel programa dönüşür (Dafermos, 1972). Wardrop'un koşulları, ayrılabilir seyahat maliyet fonksiyonları için ilk kez Beckmann vd. (1956) tarafından formüle edilmiştir. Ayrıştırılamaz seyahat maliyet fonksiyonları asimetrik Jacobian matrislere sahiptir ve bu nedenle ortaya çıkan trafik atama problemleri asimetrik olarak adlandırılır. Bu tür problemler genellikle farklı mod akışlarını veya bağlantı seyahat sürelerinin diğer bağlantılardaki trafik akışlarına bağlı olduğu durumları modellemek için ortaya çıkar (Dafermos, 1972) ve örneğin varyasyonel bir eşitsizlik problemi (Smith, 1979 ve Dafermos, 1980), doğrusal olmayan bir tamamlayıcı problem (Aashtiani, 1979 ve Aashtiani ve Magnanti, 1981) veya gap fonksiyonlarının kullanımıyla genellikle çözümü zor, bir matematiksel program (optimizasyon problemi) olarak formüle edilebilir (Hearn vd., 1984).

Wardrop'un ikinci ilkesi olan sistem optimumu (dengesi) ilkesi ise ağda, toplam seyahat süresini veya seyahat maliyetini en aza indirmeyi amaçlar. Seyahat süreleri ayrılabilir, monotonik artan ve konveks ise, bu ilkeye uygun trafik akışları, bir konveks matematiksel programın çözümüyle bulunabilir.

Trafik atama problem modeli, geniş bir ilgi görmüş ve son derece etkili bir çok çözüm yöntemi geliştirilmeye devam edilmektedir. (Trafik atama modelleri ve yöntemleri için detaylar Patriksson, (1994)'de bulunmaktadır). Bu modeli uygulayıcılar

için cazip hale getiren en önemli neden hem basitliği hem de yorumlamaların anlaşılabilir olmasıdır. Ayrıca, pratik uygulamalarda modelin özel yapısı ve büyük boyutu, etkili ve özel amaçlı algoritmalar geliştirmeyi hedefleyen akademik araştırmalar içinde kullanışlıdır.

Temel modelin bir ilkesi, Wardrop koşullarının sürekli durum varsayımıdır; bu nedenle, modelin geçerliliği ve uygulanabilirliği bileşenlerinin kararlılığına (ve elbette bilgisine) büyük ölçüde bağlıdır. Pratik bir uygulamada, ilgili verilerin iyi bir şekilde tahmin edilmesi kolay değildir. Bağlantı seyahat maliyet fonksiyonlarını düşünürsek, tahminleri, bir fonksiyonel biçimin seçimi ve sonuçta elde edilen fonksiyonel parametrelerin kalibrasyonunu içerir. Örneğin, klasik BPR formülü, herhangi bir önemli tıkanıklık etkisine neden olmayan bir bağlantı üzerindeki maksimum akışı ölçen pratik bir kapasite tahminine dayanır; bu kapasitelerin uygun bir şekilde tahmin edilmesi kesinlikle kolay değildir. Dahası, bir bağlantıdaki seyahat süresini önemli ölçüde etkileyen bazı miktarlar öngörülemeyen bir şekilde değişebilir (örneğin, seyahat talebi, hava koşulları ve trafik akışındaki farklı araç türlerinin oranı); bu nedenle, bazı durumlarda model yanlış trafik akışlarına neden olabilir. Eğer pratik açıdan kabul edilemez bir sapma varsa, o zaman gerçek dünya trafik sistemindeki değişiklikleri yakalamak için model geliştirilmelidir. Seyahat talepleri ve seyahat süresi özelliklerindeki değişiklikleri yakalayabilmek için zaman dilimlerinin tanıtılması gibi bir iyileştirmenin örneği mevcuttur. Temel modelin bir başka dezavantajı, kendi yapısında basitliğinin daha karmaşık gerçek dünya trafik problemlerine uygulanamamasıdır. Yine, kesişen bağlantılardaki akışlar arasındaki etkileşimleri veya farklı tipteki araçlar arasındaki etkileşimleri yakalamaz. Bu tür akış ilişkileri, ayrıştırılamayan ve genellikle asimetrik seyahat süresi fonksiyonlarının kullanılmasıyla yakalanabilir. Bu modele ait sınıf, araştırmacılar tarafından teorik ve algoritmik açıdan kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Patriksson, 1994).

Gerçek dünya trafik problemi, doğru bir şekilde tanımlama ve tahmin etme yeteneğini geliştirirken, seyahat süresi fonksiyonlarının değiştirilmesi trafik akışı kısıtlarını (bağlantı kapasiteleri, kavşaklardaki ortak kapasiteler veya iki yönlü yollardaki varlığı gibi) doğal ve uygun bir şekilde içermek için yeterli değildir. Bu yetersizlik, bu kısıtları tanımlamak için uygun seyahat maliyet fonksiyonlarının tahmin edilmesinin zorluğundan kaynaklanmaktadır. Bu ek akış kısıtlarını tanımlamak ve yakalamak için doğal bir alternatif, fiziksel yorumlara sahip yan kısıtları tanıtmaktır. Bu yaklaşım, pratik açıdan faydalı görünmesine rağmen, çok az ilgi görmüştür; bunun

başlıca nedeni, elde edilen modellerin çözümlerinin klasik anlamda Wardrop denge koşulları olarak karakterize edilememesidir. Dahası, yan kısıtların eklenmesiyle temel modelin uygun kümesinin Kartezyen yapısı kaybolur ve bu da hesaplamalı olarak daha yoğun bir model elde edilmesine neden olur. Bu nedenle, bu tezde, kapasiteli trafik atama problemi olarak adlandırılan bir özel yan (kapasite) kısıtlı modeli inceliyoruz. Bu modelin sürekli durum çözümleri, doygun bağlantılardaki seyahat süreleri ve kuyruk bekleme sürelerinin toplamı açısından Wardrop denge akışı olarak nitelendirilir. Yani, bu modeldeki çözümler, bağlantılardaki seyahat süreleri ve kuyruk bekleme süreleri toplamının en küçük olduğu denge akışlarını temsil eder.

Bu tezin temel hedefi, ağ trafik atama problemlerinde kullanıcı denge deseni elde edebilmek için başlangıç koşullarına dayalı sinir dinamik denklemlerden oluşan bir sinir ağı geliştirmektir. Aynı zamanda, bu sinir ağı, Karush-Kuhn-Tucker (KKT) koşullarını karşılayacak şekilde tasarlanacaktır. Sinir ağının nümerik yöntemlerle çözümlerinin kullanıcı denge veya optimumu ile uyumlu olduğu gösterilecektir. Bununla birlikte, sistemin global kararlılığını incelemek amacıyla bir enerji fonksiyonu tanımlanacak ve bu enerji fonksiyonunun sinir ağı için bir Lyapunov fonksiyonu olduğu ve sinir ağının Lyapunov kararlı olduğu matematiksel olarak gösterilecektir. Sinir ağı aynı zamanda başlangıç koşullarına bağlı bir dinamik sistem olduğu için bu sistemin başlangıç noktaları isteğe bağlı olarak seçilecektir. Daha sonra bir nümerik örnek üzerinde sinir ağının çözümleri Euler, Runge Kutta vd., gibi nümerik yöntemler kullanılarak elde edilecektir.

Bu tez, bağlantı akışlarına bağlı bir parçalı fonksiyon yardımıyla modellenen statik ağ trafik atama problemini dinamik bir yapıya dönüştürerek zamanla zincir ve bağlantı akışlarında meydana gelen değişimlerin ağın maliyetini nasıl etkilediğini ortaya koymayı ve ayrıca seyahat süresi ile seyahat maliyeti arasındaki ilişkileri incelemeyi amaçlamaktadır. Bu yeni yaklaşım, sinir ağı temelli bir çözümün ağ trafik atama problemlerinde etkili bir şekilde kullanılabileceğini göstermeyi amaçlamaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Ağ akış problemleri, genellikle rastlanan bir optimizasyon problemi modelini temsil eden, çok yönlü ve yaygın bir matematiksel yapıyı ifade eder. Bu tür problemler, telekomünikasyon, taşımacılık, trafik yönetimi ve büyük sistemlerin analizi ile tasarımı gibi pek çok alanda doğal bir şekilde karşımıza çıkar. Ayrıca, atama, en kısa yol ve seyahat eden satıcı gibi önemli kombinatoriyel problemleri modellemek için de kullanılırlar. Ağ akış problemleri, temelde kaynakları ve ihtiyaçları yansıtan noktaları içerir. Bu noktalar, kaynaklar ile ihtiyaçlar arasında mal veya hizmet akışını sağlamak için kullanılan farklı yollarla birbirine bağlanır ve bazen ara transfer noktalarını içerebilir. Bu kaynaklar, ihtiyaçlar ve transfer noktaları genellikle ağdaki düğümleri temsil ederken, yollar ise bu ağdaki bağlantıları ifade eder.

Ayrıca, bu yolları paylaşan birden fazla "tür" kaynak veya ihtiyaç (ya da "ürünler") söz konusu olabilir. Buna ek olarak, yolların kapasite gibi özellikler üzerinde sınırlamaları ve belirli yolların kullanımıyla ilişkilendirilen maliyetler de göz önüne alınmalıdır. Bu tür senaryolar, genellikle ağ optimizasyon problemleri olarak adlandırılır ve temel amacı kaynakları ihtiyaçlarla en az maliyetle eşleştirmek ve bu süreçte ağ üzerindeki kaynakları en verimli şekilde kullanmaktır. Bu, karar vericilere, kaynak yönetimi ve dağıtımı konusunda kritik kararlar almalarına yardımcı olur ve ağların etkin ve verimli bir şekilde işlemlerini sağlar.

Trafik atama, bir ulaşım ağı veya sistemine yolculuk taleplerinin nasıl dağıtılacağını belirleyen karmaşık bir süreçtir. Bu sürecin temel hedefleri arasında mevcut sistemdeki eksiklikleri değerlendirmek, yapılacak iyileştirmelerin etkilerini anlamak, inşaat öncelikleri belirlemek, alternatif sistem önerilerini test etmek ve tasarım saat hacimlerini sağlamak gibi önemli amaçlar bulunur.

Trafik atama kavramları, 1940'ların başları ve ortası döneminde gelişmeye başlamıştır. Bu dönem, özellikle İkinci Dünya Savaşı sonrası, Amerika Birleşik Devletleri'nde başlangıç-varış noktalarına yönelik ilk araştırmaların yürütüldüğü bir dönem olarak kayda geçmiştir. Bu araştırmalar, bölgeler arasındaki araç hareketlerini belirlemeye odaklanmış ve bu noktalar üzerinde yoğunlaşmıştır.

Trafik atama çalışmaları, seyahat süresi ve maliyet tasarrufları temelinde, mevcut yolların trafiğini tahmin etmek amacıyla analiz edilmiştir. İlk atama modelleri, seyahat süresi ve maliyetin bağlantılardaki akışlardan bağımsız olduğunu varsaymıştır,

bu da sonuçların önerilen yolların ya tüm araçlar tarafından kullanıldığı ya da hiçbir araç tarafından kullanılmadığı durumlarını gösterdiği anlamına gelmektedir. Ancak, bu erken dönem yaklaşımının gerçekçi olmayan sonuçlar ürettiği açığa çıkmıştır. Bunun nedeni, seyahat sürelerinin ve maliyetlerinin akışlarla eş zamanlı olarak arttığını kabul etmemesi ve tüm yolcuların rotalara, tek bir ortalama özellik bazında tahsis edilmesidir (Larsson ve Patriksson, 1995).

Daha sonraki deneysel çalışmalar, rota seçiminin zaman ve mesafe faktörleriyle ilişkilendirilmesine odaklanmıştır. Bu çalışmalar sonucunda Amerikan Eyalet Karayolu Yetkilileri Birliği, gelecekteki kentsel otoyol kullanımını belirlemek için bir standart trafik yönlendirme eğrisi geliştirmiştir. Bu eğriler, benzer iki nokta arasındaki verilere dayanarak oluşturulmuş ve geleneksel rotada taşınması beklenen akışın, hayali bir rota üzerine aktarılan kısmını tahmin etmek amacıyla kullanılmıştır. Bu eğriler, zaman ve mesafe tasarrufu gibi farklı parametreleri içermiştir.

Trafik atama genellikle, önerilen otoyolların ve mevcut rotaların seyahat sürelerine orantılı olarak akışın tahsis edilmesiyle gerçekleştirilir. Ancak, bu yöntem yalnızca mevcut paralel rotalara sahip tek bir yolu ele alabilir. Trafik sıkışıklığını veya bağlantılardaki trafik hacmini göz önünde bulundurmaz. Bu nedenle, yol bağlantılarında trafik etkilerini modellemek için çeşitli seyahat maliyeti fonksiyonları geliştirilmiştir (Branston, 1976). Bu maliyet fonksiyonları, pratikte yaygın olarak kullanılan polinom fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar, herhangi bir akış için sonlu seyahat süreleri sağlar ve yol bağlantılarının trafik hacimlerini sınırsız olarak taşıyabileceği varsayımını içerir. Ancak, gerçekte, yol bağlantılarının trafik akışına yönelik bazı sınırlamaları vardır, bu nedenle modelin tahminleri gerçek değerlerden önemli ölçüde farklılık gösterebilir (Hearn, (1980)). Bu nedenle, model çıktılarını gerçek verilerle daha uyumlu hale getirmek için çeşitli bileşenlerin (seyahat tablosu, hacim gecikme formülleri, vb.) değiştirilmesi sıkça karşılaşılan ve gerçekçi bir uygulamadır.

Atama modellerinin kalitesini artırmak için kullanılabilecek basit bir yöntem, bağlantı akışlarına üst sınırlar dahil etmektir (Daganzo, 1977a ve Daganzo, 1977b). Bu, bağlantıların kapasitelerinin belirlenmesi veya asimptotik seyahat süresi fonksiyonları kullanılarak gerçekleştirilebilir. Asimptotik seyahat süresi fonksiyonları, bir bağlantının akışı üst sınırı yaklaştıkça seyahat süresinin sonsuzluğa gittiğini ifade eder.

İlginç bir şekilde, trafik atama problemlerinin ilk matematiksel modellerinden bazıları, tıkanıklık etkilerini modellemek için bağlantı akışı kapasite kısıtlamalarını

kullanmıştır. Tomlin (1966) ve Jorgensen (1963) gibi araştırmacılar, bu tür kısıtlamaları içeren modelleri önceden incelemişlerdir.

Bağlantı akışı kapasite kısıtlamaları, genellikle trafik kontrol politikalarından veya sıkışıklık sonuçlarından kaynaklanır. Örnek olarak, hız sınırlama düzenlemeleri ve trafik sinyallerinin dönme süreleri verilebilir (Yang ve Yagar, 1994). Bu kısıtlamalar, trafik sistemini kullanan kullanıcılara uygulanan belirli kapasiteleri temsil eder ve genellikle tam olarak bilinirler. Ayrıca, trafik ihlalleri dışında (trafik suçları tarafından) asla ihlal edilemezler. Bu tür kapasite kısıtları, kapasiteli ağlarda durağan durumda kuyrukların oluşmasına neden olabilir. Bu nedenle, bu tür kısıtlamalar, trafik atama modellemesinde trafik akışlarının daha gerçekçi bir şekilde ele alınmasına yardımcı olur ve atama sonuçlarının daha pratik ve güvenilir olmasına katkı sağlar.

İkinci tür kapasite kısıtlamaları, tanımlayıcı bir niteliğe sahiptir ve mevcut trafik koşullarından etkilenir ve değişir. Durağan bir durumda, bağlantı akışları genellikle pratik kapasitelerden çok daha düşüktür. Ancak, yoğun saatlerde bağlantı akışları istikrarsızdır ve sonuç olarak kapasiteler aşılabilmektedir. Bu kapasiteler, dalgalanan bağlantı akışlarının tahmini maksimum ortalama değerleri olarak kabul edilebilir. Bir bağlantı akışı kapasiteyi aştığında, bağlantının çıkışında bir kuyruk oluşurken, akışın kapasitenin altına düştüğü dönemlerde kuyruk çözülür. Açıkça, bu tür bir bağlantı kapasitesi her olası trafik durumu için geçerli değildir; bu nedenle, trafik modeline farklı trafik durumları için farklı kapasite seviyeleri (örneğin, zaman dilimleri gibi) sağlanmalıdır.

Literatürde, kapasite kısıtlı ağ trafik atama problemlerin en iyi çözümlerini bulmaya yönelik çalışmalar günümüzde artarak devam etmektedir. Bir optimizasyon problemi, tekrarlayan bir iterasyon süreci kullanarak dijital bir bilgisayar aracılığıyla çözülmek yerine, ilgili sinir devresinin kurulması ve denge noktasına ulaştıktan sonra düğüm voltajlarının ölçülmesi yoluyla da çözülebilmektedir. Bu tür devreler, özellikle zamanla değişen maliyet fonksiyonlarına sahip çevrimiçi uygulamalarda büyük ilgi uyandırmaktadır. Ancak uzun yıllar boyunca dijital bilgisayarların ilerlemesi nedeniyle, analog hesaplama tekniklerine çok fazla dikkat edilmemiştir. Bununla birlikte, dijital bilgisayarların darboğaz yaratması, insanları alternatif tekniklere yönlendirmekte ve sinir ağlarının başarısı ile çok fonksiyonlu entegre devre tekniklerinin kullanılabilirliği, birçok araştırmacının pratik optimizasyon problemlerinde sinirsel hesaplama

prototiplerini uygulama ve hatta yeni sinirsel hesaplama devreleri geliştirme konusunda ilgisini çekmektedir (Zhang ve Constantinides, 1982).

Hopfield (1984), karesel enerji fonksiyonunun minimum noktasının araştırılmasını sağlayabileceğini öne sürerek bir analog sinir ağı önerisinde bulunmuştur. Bu öneriden sonra, çeşitli sinirsel hesaplama teknikleri geliştirilmiştir (Chua ve Yang, 1988; Rodriguez vd., 1990). Bu tekniklerin çoğu, doğrudan bir azalma (iniş) yaklaşımı ile takip edilmekte ve bu nedenle kısıtsız optimizasyon problemleri için kullanılması daha uygundur. Ancak gerçek dünya problemleri genellikle eşitlik ve/veya eşitsizlik kısıtlarını içermekte olup (genel doğrusal olmayan programlama), bu tür durumlarda ceza yaklaşımı tercih edilmekte ve bu yaklaşım temel alınarak bir azalma modeli oluşturulmalıdır. Kısıtlı problemlerin ceza fonksiyonları kullanılarak azalma algoritmasıyla çözülmesi, Bertsekas (2014) tarafından optimizasyon teorisi alanında kapsamlı bir şekilde anlatılmıştır. Ayrıca, Lagrange Sinir ağı üzerine çalışmalar günümüzde artarak devam etmektedir (Lachhwani, 2020, Wang vd., 2022, Jing vd., 2023, Hu vd., 2023, Ou ve Lin, 2021).

Ağ optimizasyonun trafik atama problemi modellerinde henüz Lagrange sinir ağı sistemi incelenmemiştir. Bu nedenle, bu tezde, doğrusal olmayan ağ trafik atama problemlerini çözebilmek için Lagrange fonksiyonu kullanarak bir sinir ağı formüle edilecektir. Bu yöntem, kısıtlı optimizasyon problemleri için iyi bilinen birinci dereceden optimalite koşullarına ve Lagrange çarpanları yöntemine dayanmaktadır. Bu yöntemde, ceza fonksiyonunun doğrudan azalma yaklaşımı yerine, ağ, mümkünse, optimalite için birinci dereceden gerekli koşulları sağlayan bir nokta arayacaktır. Yani, optimal noktalara eşdeğer noktaları arayacaktır ve ayrıca, KKT koşullarını da sağlayacaktır. Verilen ağ, değişken veya akış nöronları ile Lagrange nöronları olmak üzere iki farklı nöron içermektedir. Değişken nöronları zincirlerde akışı temsil ederken, Lagrange nöronları Lagrange çarpanlarını temsil eder. Ayrıca, elde edilen eşdeğer optimalite koşullarında, değişken nöronları maliyet fonksiyonunun minimum noktasını ararken sinir ağını temsil eden dinamik sistemin denge noktasını sağlayacaktır. Lagrange nöronları ise yolun kısıtları karşılayan tüm noktaların kümesini uygun bölgeye (çözüm bölgesine) yönlendirecektir. Çoğu sinir modelinde, maliyet fonksiyonu genellikle evrensel kararlılık için Lyapunov fonksiyonuna gömülüdür ve bu, uygulanabilir fonksiyonel formu büyük ölçüde sınırlar. Örneğin, Hopfield modelinde genellikle karesel bir maliyet fonksiyonu gereklidir. Lyapunov fonksiyonunu maliyet

fonksiyonundan başarıyla ayırır. Bu nedenle; modeli belirli fonksiyonel formlardan kurtarır ve genel prensiplere odaklanmamızı sağlar.



3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, graflar, yollar, akışlar ve ağla ile ilgili diğer temel kavramlarla ilgili bilgileri vereceğiz. Bu kısımda verilen bilgiler daha detaylı literatürde Potss ve Oliver (1972) tarafından işlenmiştir.

3.1. Graf Teorisi: Tanımlar ve Notasyonlar

3.1.1. Yönlü Graflar

Bir yönlü graf $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Burada $\mathcal{N}$, sırasız elemanlardan oluşan sonlu bir küme ve $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ 'nin elemanları arasındaki sıralı çiftlerin kümesi olarak tanımlanır. $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{A}$ kümelerinde bulunan eleman sayıları sırasıyla n ve l ile gösterilir. $\mathcal{N}$ kümesinin elemanları düğümler olarak adlandırılır ve bu elemanlar $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere i veya n_i ile gösterilir. $\mathcal{A}$ kümesinin elemanları ise bağlantılar (yaylar) veya daha spesifik olarak yönlü bağlantılar olarak adlandırılır. Bağlantılar, (i, j) veya (n_i, n_j) ile gösterilir. Alternatif olarak, i veya $l_i, i=1,2,\dots,l$ şeklinde numaralandırılabilir. Bir grafın içinde iki düğüm aynı veya farklı olabilir. Eğer düğümler aynı ise, o zaman bağlantı bir döngü olarak adlandırılır ve (i, i) veya (n_i, n_i) ile gösterilir.

Bir (i, j) bağlantısının, i ve j düğümlerini birleştirdiği söylenir ve ulaşım uygulamalarında genellikle i bağlantısı A-düğümü ve j bağlantısı B-düğümü olarak adlandırılır.

Bir yönlü graf $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ 'nın kısmi grafı, $\mathcal{A}'$ ile verilen $\mathcal{A}$ bağlantılar kümesinin bir alt kümesi olarak tanımlanır, yani $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ 'dir. Bir alt graf, $\mathcal{N}; \mathcal{A}'$ grafının düğümlerini ve bu düğümlere bağlı bağlantıları silecek şekilde tanımlanabilir. Diğer yandan, ağ uygulamalarında sıklıkla kullanılan iki önemli özel graf türü vardır. Bunlardan ilki, herhangi iki farklı düğümü birleştiren en az bir bağlantı içeren tam graflardır. Yani, $i \in \mathcal{N}$, $j \in \mathcal{N}$, $i \neq j$, $(i, j) \notin \mathcal{A} \Rightarrow (j, i) \in \mathcal{A}$. İkinci özel graf türü ise, düğümler kümesinin birbirini tamamlayan iki farklı düğüm kümesi $X, \bar{X}$ 'e

bölündüğü bir ikili graftır. Yani, $X \cup \bar{X} = \mathcal{N}$ ve $X \cap \bar{X} = \emptyset$. $\mathcal{A}$ kümesi, X 'in düğümlerini $\bar{X}$ 'in düğümlerine bağlayan bağlantıların kümesidir. Yani, $\mathcal{A} = \{(i, j) \mid i \in X, j \in \bar{X}\}$.

Bu cebirsel tanımlamalar, grafların geometrik temsilleri çizildiğinde daha kolay anlaşılır. Bir düğüm, numaralı bir daire şeklinde temsil edilirken yönlü bir bağlantı ok şeklinde bir çizgi ile temsil edilir.

3.1.2. Zincir ve Döngü

Ağlar aracılığıyla rotaları belirlerken, ağın bağlantı yönlerinin izlenmesi gerekenler ve izlenmesinin gerekli olmadığı rotalar arasında ayırım yapmak önemlidir. Bu, tek yönlü yol işaretlerine uymak zorunda olan sürücü ile bunları görmezden gelebilen yaya arasındaki ayrıma benzer. Yaya, yanlış yönde tek yönlü bir sokağa veya çift yönlü bir sokakta yanlış tarafta yürüyebileceği için daha geniş bir rota seçeneğine sahiptir.

Yönlerin önemli olduğu durumlarda, rotalara "zincirler" ve "döngüler" adı verilir. Bir yönlü grafin zinciri aşağıdaki gibi tanımlanır: Eğer $n_1, n_2, \dots, n_r$ farklı düğümler ve $(n_i, n_{i+1}), i = 1, 2, \dots, r-1$ yönlü bağlantılar ise, o zaman dizilim

$$n_1, (n_1, n_2), n_2, \dots, n_{r-1}, (n_{r-1}, n_r), n_r$$

olacak şekilde başlangıç düğümü n_1 'den varış düğümü n_r 'e bir zincir tanımlar. Ayrıca, zincirleri j veya $m_j, j = 1, 2, \dots, m$ ile göstermek ve zincirler kümesini M ile göstermek çalışmalarda kolaylık sağlamaktadır.

Döngü, $n_1 = n_r$ olması dışında zincirle aynı şekilde tanımlanır ve bir sürücü için gidip gelme rotası veya tur rotası olarak kabul edilir. Diğer önemli bir nokta da, bir zincirin düğümlerinin farklı olması gerektiğidir. Bu, bir zincirin bir döngü içermeyeceği anlamına gelir.

3.1.3. Yol ve Şebeke

Bir graf üzerinden ilerlemek istediğimizde, bağlantılar belirli bir sırayı takip etmesi gerekmiyorsa, bu graf üzerinden geçilen yollar ve şebekeler, zincirler ve döngülerle benzerlik gösterirler. Bir yolun matematiksel tanımı şu şekildedir: $n_1, \dots, n_i, \dots, n_r$ farklı düğümler ve (n'_i, n''_{i+1}) bağlantıları varsa, başlangıç düğümü n_1 ile bitiş düğümü n_r arasındaki yol, aşağıdaki sıra ile tanımlanır:

$$n_1, (n'_1, n''_2), n_2, \dots, n_i, (n'_i, n''_{i+1}), n_{i+1}, \dots, n_r,$$

Burada, $n'_i = n_i$ ve $n''_{i+1} = n_{i+1}$ ise, (n'_i, n''_{i+1}) yolun ileriye giden bir bağlantısı ya da $n'_i = n_{i+1}$ ve $n''_{i+1} = n_i$ ise, (n'_i, n''_{i+1}) yolun geriye giden bir bağlantısıdır.

$n_1 = n_r$ olmak üzere bir şebeke, bir yol gibi tanımlanır. Bu tanıma göre, sadece iki düğümü birleştiren tek bir bağlantıdan oluşan yüzeysel bir dizi dahil edilmemesi gerekmektedir.

3.1.4. Erişilebilirlik ve Bağlılık

n_1 ile n_r arasında bir zincirin varlığı, n_r ile n_1 arasında bir zincirin varlığını gerektirmez; ancak n_1 ile n_r arasında bir yolun varlığı, n_r ile n_1 arasında bir yolun varlığını gerektirir. n_r düğümüne farklı bir n_1 düğümünden erişilebilmesi için yalnızca n_1 ile n_r arasında bir zincir olmalıdır. Farklı düğümler n_1 ve n_r sadece bir yol varsa birbirlerine bağlı olarak adlandırılır. İki farklı düğüm bağlı olabilir, ancak bir düğüme diğer düğümünden erişilemez olabilir. Bir yaya, bağlı olduğu herhangi bir düğüme yürüyerek ulaşabilirken, bir sürücü yalnızca erişilebilir düğümlere araçla gidebilir.

Bağlı yönlü bir graf için, tüm farklı düğüm çiftleri birbirine bağlıdır.

3.1.5. Kesim- Kümesi

Kesme-küme, düğüm kümesi $\mathcal{N}$ 'in $(X, \bar{X})$ şeklinde tamamlayıcı kümelerine ayrıldığı durumlarda şu şekilde tanımlanır: $(X, \bar{X}) = \{(i, j) | (i, j) \in \mathcal{A}, i \in X, j \in \bar{X}\}$.

Burada $\mathcal{A}$ kümesi, $(X, \bar{X})$ 'in bir alt kümesidir.

3.1.6. Yönsüz ve Karmaşık Graflar

Yönsüz bir $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ grafi, $\mathcal{A}$ kümesinin öğelerini içerir; bunlar $\mathcal{N}$ düğüm kümesinin öğelerinin sıralanmamış çiftleridir ve genellikle (i, j) veya (j, i) olarak gösterilir. Bu çiftler yönsüz bağlantıları temsil eder ve geometrik bir gösterimde oklara ihtiyaç duyulmaz.

Yönsüz bir graf içinde, zincirler, yollar, döngüler ve şebekeler gibi farklı yapılar arasında herhangi bir ayrım yoktur. Erişilebilir ve bağlantılı düğümler aynıdır. Kesim kümesi, yönsüz bir graf için de aynıdır, ancak artık $\mathcal{N}$ düğüm kümesinin $(X, \bar{X})$ veya $(\bar{X}, X)$ şeklinde bölünmüş olduğu kesimler arasında bir ayrım bulunmaz.

Taşıma çalışmalarında, yönsüz graflar, basitlikleri nedeniyle genellikle yönlü grafların yerine tercih edilir. Yönsüz bağlantılar, bir taşıma ağındaki iki yönlü trafiğe izin verir ve her zaman iki zıt yönlü yönlendirilmiş bağlantı olarak kabul edilebilir. Bu, kesim kümesi analizi yapılırken önemlidir, çünkü trafik yönlerinin ayrı ayrı ele alınması gerekir. Uygulamada, yönsüz ve yönlü bağlantılar arasındaki ayrımın dikkatlice yapılması önemlidir. Sıklıkla trafik çalışmalarında, yol üzerindeki akışlar bir veya iki yönlü trafiği belirtmeden alıntılanır, bu da sıkça karışıklığa neden olabilir.

Bazı durumlarda, hem yönlü hem de yönsüz bağlantıların bulunduğu karmaşık graflar kullanılır. Bu tür bir graf, karmaşık graf olarak adlandırılır.

3.1.7. Ağaç

Bir ağaç, $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ grafi ile verilen, hiçbir şebeke içermeyen ve bağlı olan bir graftır. Bu tanım, bağlantıların yönlerinin göz ardı edilebileceği anlamına gelir. Herhangi bir şebeke, iki düğüm arasında iki alternatif yol olduğundan, bir graf sadece her bir çift düğümün tek bir yolla bağlı olduğunda ağaç olarak kabul edilir.

3.2. Akışlar ve Korunum Kanunları

3.2.1. Bağlantı Akışları ve Kirchhoff Yasası

Bu çalışma, araçların, ürünlerin veya yayaların bir grafın bağlantılarıyla ilişkilendirilebileceği yapıları içermektedir. Bu graf, ağ teorisinin bir uygulaması olarak değerlendirilebilir ve özellikle taşımacılık bağlamında bir taşıma ağı olarak adlandırılabilir. Akış terimi, zaman birimine düşen miktarı ifade eder ve bu nedenle oransal bir boyuta sahiptir, bu da çeşitli bağlamlarda farklı anlamlar taşıyabilir.

Elektrik ağlarındaki elektrik akımları, boru ağlarındaki suyun hareketi veya taşıma ağlarındaki trafik akışı gibi fiziksel sistemlerin teorik temelini oluşturan Kirchhoff'un yasası, akışların sabit veya statik koşullar altında ne üretildiğini ne de yok edildiğini ifade eden bir korunum yasasıdır. Bu sabit koşullar, trafik uygulamaları için şehir yol ağı üzerinde rastgele veya gruplar halinde seyahat eden bireysel araçların trafiğin mikroskobik ve stokastik özellikleriyle ilgilenmediği anlamına gelirken, bu bağlamda trafiğin genel makroskopik davranışına odaklanmaktadır. Bu bağlamda, zaman içindeki dalgalanmaların ihmal edildiği belirtilmelidir.

Bir taşıma ağı düğümünün Kirchhoff yasasının yorumu, söz konusu düğümün trafik üreterek veya çekerek çekmediğine bağlı olarak değişkenlik gösterir. Örneğin, ana yol ağındaki ara düğümler, yolcuların birleşebileceği ve alternatif rotaları seçebileceği geçiş noktaları olarak hizmet verirler. Bu bağlamda Kirchhoff'un yasası, bir ara düğümden ayrılan tüm akışların o düğüme giren tüm akışların toplamına eşit olduğunu ifade eder. Diğer yandan, bir merkezi düğüm, yerel sakinlerin başka yerlere seyahat etmek için ürettikleri araç seyahatlerini temsil ederken, bu merkezi düğüme çekilen seyahatleri de içerir. Kirchhoff'un yasası, merkezi düğümden ayrılan tüm akışların merkezde üretilen akışa eşit olduğunu ve merkeze giren tüm akışların merkeze çekilen akışa eşit olduğunu ifade eder.

Bir genel taşıma ağı için, trafik üretebileceği veya çekebileceği düğümleri ayırt etmek için terminolojik olarak $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{A}$ terimlerini kullanacağız. Diğer bağlamlarda, bu düğümler sıklıkla başlangıç noktaları ve varış noktaları olarak adlandırılır. Yönlü bir bağlantı (i, j) üzerinden taşınan akışı f_{ij} ile göstereceğiz. Merkez i tarafından üretilen akışı a_i ile ve merkez i tarafından çekilen akışı b_i ile temsil edeceğiz. Ayrıca, f_{ij} , a_i ,

ve b_i miktarlarının pozitif olduğunu kabul ediyoruz. Yine, düğüm i 'den gelen ve giden bağlantıların kümelerini

$$\begin{aligned} A(i) &= \{j \mid j \in \mathcal{N}, (i, j) \in \mathcal{A}\}, \\ B(i) &= \{j \mid j \in \mathcal{N}, (j, i) \in \mathcal{A}\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ile verebiliriz.

Kirchhoff yasası, yönlü bir taşıma ağı için

$$\begin{cases} \sum_{j \in A(i)} f_{ij} = a_i, \\ \sum_{j \in B(i)} f_{ji} = b_i, \\ \sum_{j \in A(i)} f_{ij} - \sum_{j \in B(i)} f_{ji} = 0, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{eğer } i \text{ bir merkez ise,} \\ &\text{eğer } i \text{ bir ara düğüm ise} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ile ifade edilir. Bu denklemlerin bir çözümünün olabilmesi için, toplam üretim

$$\sum a_i = v$$

ve toplam çekim

$$\sum b_i$$

arasında bir denge olmalıdır. Genellikle bir ağdaki bağlantı sayısı, düğüm sayısının en az iki katı olduğundan, denklem (3.2)'deki bilinmeyen sayısı denklemlerin sayısını aşar ve bu nedenle denklemler sonsuz çözümler içerebilir.

3.2.2. Tek Başlangıç-Varış Düğümü İçeren Ağlar

3.2.2.1. Bağlantı Akış Modeli

Ana yol ağı üzerinde birçok trafik üretici ve çekici merkez bulunur. Ulaşım çalışmalarında, bu tür bir ağdaki trafik, belirli bir başlangıç- varış çifti arasındaki trafiklerin üst üste bindirilmesi olarak analiz edilir. Konu edilen başlangıç- varış çifti dışındaki tüm diğer trafik yok sayıldığında, ana yol ağı iki merkezli tek bir başlangıç- varış ağı haline gelir; biri başlangıç noktası veya orijini, diğeri ise varış noktası veya hedefi temsil eder.

Tek bir Başlangıç (O)- Varış (D) düğümü içeren ağda, kaynağı $i=1$ ve hedefi $i=n$ düğümleri olarak kabul etmek ve kaynağın sıfır çekiciliğe ve üretime sahip olduğunu, hedefin ise sıfır üretime ve çekiciliğe sahip olduğunu kabul etmektir.

Yani kaynak düğümde üretim $g > 0$ ve hedef düğümde çekicilik g vardır. g miktarı, ağın akış değeri olarak adlandırılır. Bu tür bir ağ için korunum denklemleri

$$\sum_{A(1)} f_{1j} = g \quad (3.3)$$

$$\sum_{A(i)} f_{ij} - \sum_{B(i)} f_{ji} = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (3.4)$$

$$-\sum_{B(n)} f_{jn} = -g \quad (3.5)$$

ile ifade edilir.

Teorem 3.2. Kaynağı ve hedefi birbirinden ayıran herhangi bir kesim kümesinin üzerinden geçen net akış, akış değerine eşittir.

İspat: Kaynağı $I \in X$ ve hedefi $n \in \bar{X}$ olan herhangi bir kesim kümesi $(X, \bar{X})$, kaynağı ve hedefi ayırdığı söylenir. Kesim kümesi akışları

$$f(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j) \in (X, \bar{X})} f_{ij}, \quad (3.6)$$

$$f(\bar{X}, X) = \sum_{(j,i) \in (\bar{X}, X)} f_{ji}. \quad (3.7)$$

ile tanımlanır.

Korunum yasaları denklemleri (3.3) ve (3.4), $i \in X$ üzerinde toplandığında

$$g = \sum_{i \in X} \left\{ \sum_{A(i)} f_{ij} - \sum_{B(i)} f_{ji} \right\} \quad (3.8)$$

elde edilir.

Diğer bir ifadeyle;

$$g = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X), \quad (3.9)$$

bulunur. Çünkü (i, j) bağlantıları üzerindeki akışlar, $i \in X$ ve $j \in X$ olduğunda iptal olur. Denklem (3.9) ile verilen eşitlik teoremin matematiksel bir ifadesidir. Kaynak ve hedef düğümleri ayıran kesim kümesine odaklanmamız gerektiğini vurgulamaktır.

(3.3) ve (3.5) ile ifade edilen korunum denklemleri, matris notasyonu ile kısa ve sade bir şekilde gösterilebilir. Ayrıca, düğüm-bağlantı bağıllık matrisi, $n \times l$ boyutunda bir matris olan E ile gösterilir. Bu matris, i düğümüne karşılık gelen satırlar ve bağlantı (j, k) 'ya karşılık gelen sütunları göstermek üzere,

$$E_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{eğer } i = j, \\ -1, & \text{eğer } i = k, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Matris formunda korunum denklemleri (3.3)-(3.5); f , $(l \times 1)$ boyutunda bir bağlantı akış vektörü, g ise $(n \times 1)$ boyutunda ilk elemanı g , son elemanı $-g$ ve diğer tüm elemanları 0 olan bir başlangıç- varış akış vektörü olmak üzere

$$Ef = g \quad (3.10)$$

ile yazılabilir.

Burada f , bağlantı akış deseni veya bağlantı akış trafik deseni olarak adlandırılır.

Düğüm-bağlantı matrisi, graf teorisi açısından önemli birçok özelliğe sahiptir, ancak ulaşım ağlarına uygulamalarda bu kadar önemli değildir.

3.2.2.2. Zincir Akış Modeli

Ulaşım uygulamaları için, tek bir başlangıç- varış ağı üzerindeki akışın önemli bir örneği, başlangıç düğümünden varış düğümüne olan tüm zincir akışlarının üst üste gelmesiyle elde edilir. Bu, ağ akış modelinde, ağın akışını $i = 1, 2, \dots, l$; bağlantı

akışlarını f_i ; başlangıç- varış düğümleri içeren zincirleri $m_j, j=1,2,\dots,m$; ve zincir akışlarını h_j ile belirtebiliriz. Bu ağ için akış değeri, korunum denklemi

$$g = \sum_j h_j \quad (3.11)$$

ile ifade edilir.

Zincir akışları h_j tarafından üretilen f_i bağlantı akışları,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer bağlantı } i, \text{ zincir } m_j \text{ üzerinde ise,} \\ 0, & \text{aksi durumda,} \end{cases} \quad (3.12)$$

ile elde edilir. Bu durumda bağlantı akışı,

$$f_i = \sum_j a_{ij} h_j \quad (3.13)$$

olarak formüle edilebilir.

Ağ için zincir akış formülü, aynı zamanda bağlantı-zincir bağıllık matrisi $\mathbf{A}$ ile tanımlanarak matris formunda da ifade edilebilir. Bu matris, (3.12) ile tanımlanan a_{ij} elemanlarına sahip $l \times m$ boyutlu bir matristir. Buradan, bağlantı akış denklemi (3.13), kompakt formda.

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{h} \quad (3.14)$$

olarak yeniden yazılabilir.

Bu denklemde, $\mathbf{h}$, $m \times 1$ boyutlu bir zincir akış vektörü veya zincir akışı trafik modeli olarak adlandırılır. Ayrıca, $\mathbf{e}$ 'yi, her bir elemanı 1 olan $m \times 1$ boyutlu bir sütun olarak kabul edersek ve matrisin transpozunu T olarak alırsak, denklem (3.11),

$$g = \mathbf{e}^T \mathbf{h} \quad (3.15)$$

olacak şekilde yeniden yazılabilir.

3.2.3. Birden Fazla Başlangıç-Varış Düzgümleri İçeren Ağlar

Tek başlangıç-varış düğümü içeren ağlar, birden fazla başlangıç-varış düğümü içeren ağlara genişletilebilir. Bunu yapabilmek için terimler ve gösterimle bir takım değişiklikler yapmalıyız. Taşıma uygulamaları için, yolcuların, doğru hedeflerine ulaşmasını sağlamak belirli başlangıç-varış akışlarını diğerlerinden ayırmayı gerektirir. Bunu iki farklı şekilde yapabiliriz.

İlk olarak, her bir kaynak düğümünden tüm varış düğümlerine olan akışı bir kopya olarak düşünebilir ve her bir kopya akışını üst simge α ile gösterebiliriz. İkincisi, her bir kaynak düğümünden belirli varış düğümlerine olan başlangıç-varış akışlarını ayrı bir ürün akışı olarak düşünebiliriz, bunu da üst simge k ile gösterebiliriz. Kolaylık olması açısından, çoklu kopya akışları için bağlantı akışlarını ve çoklu ürün akışları için zincir akışlarını kullanırız.

Çoklu kopya akışını tanımlayabilmek için v^α kopyanın O^α noktasından gelen akışı ve v_j^α ise bu kopyanın varış düğüme olan akışını temsil eder.

Tek bir O – D ağı için verilen model,

$$\mathbf{E}\mathbf{f}^\alpha = \mathbf{g}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (3.16)$$

eşitliği ile genişletilir:

Bu denklemde, $\mathbf{E}$, $n \times l$ boyutlu düğüm-bağlantı bağıllık matrisi; $\mathbf{f}^\alpha$, $l \times 1$ boyutlu bağlantı akışı vektörüdür ve bu vektörün elemanları α kopyasının bağlantı akışlarına eşittir. $\mathbf{g}^\alpha$ ise $n \times 1$ boyutlu kopya akış vektörüdür ve elemanları

$$g_i^\alpha = \begin{cases} v_i^\alpha, & \text{eğer } i, \alpha \text{ kopya akışının başlangıcı veya kaynağı ise,} \\ -v_i^\alpha, & \text{eğer } i, \alpha \text{ kopya akışının varışı veya hedefi ise} \\ 0, & \text{diğer durumda.} \end{cases} \quad (3.17)$$

ile tanımlanır:

Toplam bağlantı akışı ve toplam ağ akışı kopya akışlarının birleştirilmesiyle elde edilir. Kopya akışları, başlangıç veya varış düğümlerine göre etiketlenir. Çoklu başlangıç-varış ağı açıklaması için, $k = 1, 2, \dots, q$ olmak üzere $O^{(k)} - D^{(k)}$ tüm olası başlangıç-varış

çiftlerini tanımlar ve $m_j^{(k)}$, $O^{(k)}$ noktasından $D^{(k)}$ noktasına olan zincirleri temsil eder.

Eğer $g^{(k)}$, $O^{(k)}$ noktasından $D^{(k)}$ noktasına olan k . ürün akışı ise ve $h_j^{(k)}$, $m_j^{(k)}$ üzerinde bulunan bir zincir akışı ise, o zaman:

$$g^{(k)} = \sum_j h_j^{(k)} \quad (3.18)$$

olarak elde edilir.

Eğer bağlantılar, $i = 1, 2, \dots, l$ ile gösterilir ve

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{eğer bağlantı } i \text{ zincir } m_j^{(k)} \text{ üzerinde ise,} \\ 0, & \text{diğer durumda,} \end{cases} \quad (3.19)$$

ise o zaman $O^{(k)}$ düğümünden $D^{(k)}$ düğümüne olan bağlantı akışı $f_i^{(k)}$,

$$f_i^{(k)} = \sum_j a_{ij}^{(k)} h_j^{(k)}. \quad (3.20)$$

ile verilen eşitlikle yazılabilir:

Dolayısıyla, toplam ağ akışı

$$v = \sum_k g^{(k)}, \quad (3.21)$$

ile ifade edilir.

Bağlantı i üzerindeki toplam bağlantı akışı f_i ise

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_k f_i^{(k)} \\ &= \sum_k \sum_j a_{ij}^{(k)} h_j^{(k)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

ile hesaplanabilir.

(3.18)-(3.20) eşitlikleri, (3.11)-(3.13) ile verilen ifadelerin genelleştirilmiş ve genişletilmiş formlarıdır.

Ayrıca, (3.18)-(3.20) eşitlikleri matris formda

$$\mathbf{g}^{(k)} = \left(\mathbf{e}^{(k)} \right)^T \mathbf{h}^{(k)} \quad (3.23)$$

olarak ifade edilebilir.

Bu denklemde, $\mathbf{e}^{(k)}$ birim değerlere sahip bir sütundur. Ayrıca, $\mathbf{A}^{(k)}$ bağlantı-zincir matrisi olmak üzere bağlantı akışı (3.20),

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{h}^{(k)} \quad (3.24)$$

olarak yeniden ifade edilebilir:

Diğer yandan; trafik akışında üç tür yolcu vardır:

1. Aynı başlangıç ve varış noktasına sahip olanlar ve tamamen aynı rotayı izleyenler (aynı i, j, k değerlerine sahip).
2. Aynı başlangıç ve varış noktasına sahip olanlar, rotaları farklı olsa da bu belirli yol segmentinde yolcunun rotasıyla örtüşenler (farklı j değerleri için $a_{ij}^{(k)} = 1$, aynı i ve k değerlerine sahip).
3. Farklı başlangıç noktalarına ve/veya varış noktalarına sahip olanlar, rotalarının bu belirli yol segmentinde yolcunun rotasıyla örtüşenler (farklı k değerleri için aynı i , $a_{ij}^{(k)} = 1$ olan).

3.2.4. Sıkıştırılabilirlik ve Ayrıştırılabilirlik

Bazı ulaşım ağı problemlerinde, Kirchhoff yasasından türetilen denklemlerin ötesinde, korunum denklemleri farklı şekillerde de uygulanabilir. Bu durumda, bir ulaşım ağı grafi olan $\mathcal{G}((\mathcal{N}; \mathcal{A}))$, yeni bir ağ olan $\mathcal{G}(\mathcal{N}'; \mathcal{A}')$ oluşturmak için daraltılabilir ya da genişletilebilir. Örnek olarak, $\mathcal{G}((\mathcal{N}; \mathcal{A}))$ içindeki birkaç düğüm ve bağlantı birleştirilerek $\mathcal{G}(\mathcal{N}'; \mathcal{A}')$ oluşturulabilir ve daha küçük bir ağ üzerinde akış analizi yapılabilir. Bu işlem sırasında Kirchhoff yasası her iki ağ için de geçerli

olmalıdır. Bununla birlikte, ayrıca sıkıştırma veya genişletme işlemlerinin gereksinimlerini de yerine getirmelidir:

$$f'_{ij} = \sum f_{ks}$$

sağlanmalıdır. Bu toplam işlemi, $\mathcal{A}$ içindeki bağlantıları içerir ve bu bağlantılar, $\mathcal{A}'$ içindeki (i, j) bağlantıları oluşturmak için birleştirilmiş olmalıdır.

Ağ akışlarının mutlaka sağlanması gereken başka bir temel koşul ise ayrılabilirlik kavramıdır. Yani, bir düğüm ve ona bağlı bağlantıları çıkararak elde edilen bir alt graf olması durumunda, dokunulmamış bağlantılardaki akışların değişmeden kalması gereklidir.

3.3. Maliyetler ve Fiyatlar

3.3.1. Bağlantı, Rota ve Ağ Maliyetleri

Yukarıda, ağ teorisi ve ulaşım ağlarının yapısı ile akış korunum prensibinin temel kavramlarını açıkladık. Pratikte karşımıza çıkan ulaşım problemleri genellikle akışın farklı faktörlere etki ettiği özel durumları içerir. Örneğin, bir yolun geçiş süresi, iki nokta arasındaki mesafe, ürün taşıma maliyeti veya bir ağ bağlantısının kullanım ücreti gibi faktörler bu durumlara örnek olarak verilebilir.

Bağlantı maliyeti, akışın bir bağlantı üzerinden geçişi ile ilişkilendirilir ve genellikle $c_{ij}(f_{ij})$ şeklinde ifade edilir. Yani, (i, j) bağlantısından geçen akış f_{ij} ise, toplam bağlantı maliyeti

$$f_{ij}c_{ij}(f_{ij}).$$

ile hesaplanabilir.

Bu gösterim, bağlantı maliyetinin akış miktarına bağlı olarak değişebileceğini ve her bağlantı için farklı olabileceğini gösterir. Ayrıca, tüm akış birimlerinin aynı bağlantı üzerinden geçerken aynı maliyeti gösterdiğini ifade eder.

Bağlantı maliyetinin akışa bağlı olmadığı durumlarda, (i, j) , (n_i, n_j) , i veya l_i ile gösterilen bağlantılar için c_{ij} , $c(n_i, n_j)$, c_i veya $c(l_i)$ gösterimleri de kullanılabilir.

Bir rota üzerindeki birim akışın maliyeti, ağdaki bağlantıların toplam maliyeti olarak tanımlanır. Bu maliyetler, kavşak gecikmeleri veya dönüşler gibi ek faktörleri içerebilir. Özellikle ana yol ağı için, düğümleri geçmenin maliyetleri bağlantı maliyetlerine dahil edilebilir. Eğer düğümleri geçmenin maliyeti belirtilmemişse, başlangıç düğümünden hedef düğüme olan birim akışın rota maliyeti

$$C(n_1, n_r) = \sum_{i=1}^{r-1} c(n_i, n_{i+1}) \quad (3.25)$$

ile verilebilir.

Burada, akışa bağlı olmayan bağlantı maliyetleri varsayılmıştır. Şehir sokak ağları ve diğer ağlar için, kavşak gecikmelerinin önemli olduğu yerlerde daha genel bir rota maliyeti tanımına ihtiyaç vardır. Akışa bağlı olmayan bağlantılar (l_i) ile ilişkilendirilirken, bağlantı maliyeti $c(l_i)$ olarak yazılır ve bağlantılar (l_i) ile (l_j) arasındaki dönüşler için $p(l_i, l_j)$ gösterimi ceza olarak adlandırılır. Kayıpları önlemek ve bazı avantajlar elde etmek için, bir rotanın başlangıcı (l_i) , (l_i) 'nin yönlendirdiği düğüm tarafından temsil edilen kavşağın öbür tarafında bulunur ve benzer şekilde varış noktası da (l_r) 'nin başlangıcı olarak alınır.

Akışın birim zincir akışının üzerindeki bağlantı dizisi $l_1, l_2, \dots, l_r$ üzerindeki rota maliyeti,

$$C(l_1, l_r) = \sum_{i=1}^{r-1} [c(l_i) + p(l_i, l_{i+1})] \quad (3.26)$$

ile tanımlanır:

Son olarak, ağ maliyetini C olarak tanımlarsak, bu maliyeti

$$C = \sum_{(i,j)} f_{ij} c_{ij}(f_{ij}) \quad (3.27)$$

ile hesaplayabiliriz:

Ağda, bağlantı veya dönüş yasakları sonsuz maliyetle temsil edilebilir. Dolayısıyla, bağlantı (i, j) üzerindeki akış yasaklanmışsa, $c_{ij} = \infty$ olarak alabiliriz ve benzer şekilde bağlantı l_i 'den l_j 'ye olan dönüş yasaklanmışsa, $p(l_i, l_j) = \infty$ olarak alabiliriz.

Dönüş cezalı tek bir O-D ağında, bağlantı akışları O-D zincirleri m_j üzerindeki zincir akışlarının üst üste binmesi olarak görülebilir. Akışa bağlı bağlantı maliyeti için j . zincir üzerindeki rota maliyeti C_j , genel olarak tüm zincir akışları $h_1, h_2, \dots, h_m$ 'nin bir fonksiyonu olduğundan farklı zincirler aynı bağlantıları paylaşabilir. Bu nedenle; rota maliyeti

$$C_j(h_1, h_2, \dots, h_m) = C_j(\mathbf{h}) \quad (3.28)$$

ile elde edilir. Ağ maliyeti ise

$$C = \sum_j h_j C_j(\mathbf{h}) = \mathbf{C}^T \mathbf{h} \quad (3.29)$$

ile elde edilir.

Bu tanımların çoklu O-D ağlarına genişletilmesi benzer şekilde kolayca gösterilebilir.

3.3.2. Kapasiteli Ağlar

Yukarıda verilen bilgilere göre, şimdiye kadar bağlantı akışları için herhangi bir üst sınır belirtilmemiştir. Gerçek dünya ulaşım ağları uygulamaları için, bağlantı akışlarının bazı eşitsizlikleri sağlamak zorunda olduğu kapasiteli bir ağı ele almak, daha gerçekçi ağ problemlerini modellemekte kolaylık sağlar: Bu eşitsizlik

$$0 \leq f_{ij} \leq u_{ij} \quad (3.30)$$

ile verilebilir.

Burada, u_{ij} link kapasitelerini ifade eder ve bu değerler küçük bir kayıpla pozitif tam sayılar olarak kabul edilebilir. Gelecekteki bir ağ tasarımında, trafik mühendisleri genellikle yol genişlikleri, şerit sayıları, genişlikler, eğimler, trafik ışıklandırması ve sinyalizasyon gibi faktörlere dayalı olarak kavşakların ve yolların kapasitelerini belirlemek için kılavuz kullanır. Sağlanacak hizmet seviyesine bağlı olarak, bağlantı kapasiteleri seçilir ve tahmini trafik, herhangi bir kapasite sınırını aşıp aşmadığını kontrol ederek gelecekteki ağlar test edilir.

Korunum denklemlerini ve kısıtları sağlayan bir bağlantı akışı kümesine uygun ağ akışı denir. Tek bir O-D noktalarına sahip bir kapasiteli ağ için bağlantı akışları üzerinde kısıtlar matris gösterimiyle

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_{ij} \leq u_{ij} \\ Ef &= g \end{aligned} \tag{3.31}$$

ile ifade edilebilir.

Bir kapasiteli ağ için, $(X, \bar{X})$ ile ayrılan bir kesit için kesme kapasitesi $u(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j) \in (X, \bar{X})} u_{ij}$ ile tanımlanır: Kesme kapasiteleri, ağ akışı için bir üst sınır sağlar. Örneğin, tek bir başlangıç-varış noktasına sahip kapasiteli bir ağı ele alalım ve $(X, \bar{X})$, başlangıç düğümünü varış düğümünden ayıran bir kesit olsun. Bu durumda, bir önceki kısımda verilen net akış teoreminden $g \leq u(X, \bar{X})$ elde edilir. Böylece, $f_{ij} \leq u_{ij} \Rightarrow f(X, \bar{X}) \leq u(X, \bar{X})$ ve $f_{ij} \geq 0 \Rightarrow f(\bar{X}, X) \geq 0$ denklemleri yazılabilir. Buradan, $g = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \leq u(X, \bar{X})$ elde edilir.

3.4. Ağlarda Ekstremum Koşulları

Trafik atama problemleri için Wardrop tarafından öne sürülen iki temel ilke bulunmaktadır: İlk ilke, tüm rotalardaki seyahat sürelerinin eşit olduğunu ve kullanılmayan rotalardaki tek bir aracın seyahat süresinin daha kısa olduğunu savunur.

İkinci ilke ise ortalama seyahat süresinin minimum olması gerektiğini vurgular.

Wardrop, bu iki ilkenin karşılaştırılmasında şu yaklaşımı benimsemiştir: İlk ilke, trafik, sürücülerin yeni bir rota seçerek kendi seyahat sürelerini azaltma fırsatları olmadığı bir denge durumuna ulaşacağından dolayı uygulamada sıkça kullanılır. Öte yandan, ikinci ilke, seyahat sırasında harcanan toplam zamanı en aza indirecek şekilde en verimli olanın seçilmesini ifade eder.

Bu bağlamda, Wardrop, ilk ilkeyi temel alarak optimize edilen trafik desenlerini kullanıcı-dengesi olarak adlandırmış, ikinci ilkeye dayalı olarak optimize edilen trafik desenleri ise "sistem-dengesi" desenler olarak tanımlamıştır.

Bu iki ilkenin uygulanması, tanımlanan ulaşım ağı özelliklerine bağlıdır. Çoğu ağlarda, bazen maliyet yerine seyahat süresi terimlerini kullanarak, ağ üzerindeki en düşük maliyetli rotaların belirlenmesi ve toplam ağ maliyetinin minimize edilmesi gibi iki temel ağ akış problemi ortaya atılmıştır.

Bu nedenle; bu kısımda karmaşık ancak önemli bir durum olan akışa bağlı maliyetlere sahip birden fazla O-D noktası içeren ağın kullanıcı denge desenlerinin elde edilmesine dair bilgiler vereceğiz.

3.4.1. Akışa Bağımlı Maliyetler

Literatürde maliyetlerin akıştan bağımsız olduğunu gösteren çok fazla ağ problem modeli ve bu modellerin çözümü için çok fazla yöntem bulunmaktadır. Fakat, daha gerçekçi trafik atama problemlerini incelemek, trafik akışıyla birlikte seyahat maliyetlerinin artmasına izin vererek trafik sıkışıklığının etkilerini hesaba katmayı gerektirir. Akışa bağımlı maliyetlerin tanıtılması, ekstremum analizini önemli ölçüde karmaşıktır, ancak sonuçta elde edilen akış düzenleri için ilgi çekici sonuçlar verir. Bu kısımda, kullanıcı dengesine dair trafik desenlerini dikkatlice tanımlayan ve bu tür desenler için gerekli ve yeterli koşulları veren teoremi ele alacağız. Analiz yaparken birden fazla O-D noktası içeren ağ durumunu dikkate alacağız. Ayrıca, akışların sürekli olduğunu varsayacağız. Yine bu kısımda, ağlar için çoklu ürün ağ akış modelinin formülünü, işbiriksiz kullanıcılar için denge akış desenleri hakkında bilgiler vereceğiz.

3.4.1.1. Çoklu Ürün Ağ Akış Modeli

Diyelim ki her bir başlangıç merkezi $O^{(k)}$ ile her bir varış merkezi $D^{(k)}$ için bir zincir listemiz var ve çoklu O–D taşıma ağındaki her başlangıç $O^{(k)}$ ile her bir varış $D^{(k)}$ için bir trafik akış talebi $g^{(k)}$ bulunuyor. Temel trafik atama problemi, $g^{(k)}$ 'yi belirli bir maliyet kriterine göre zincirlere atamakla ilgilidir. Uygun zincir akışları $h_j^{(k)}$ birleştirilerek bağlantı akışları f_i 'leri de bulabiliriz. Denklem (3.18) ve denklem (3.20)'de verildiği gibi korunum denklemleri, çoklu ürün ağ akış modelleri içinde benzer şekilde olup

$$g^{(k)} = \sum_j h_j^{(k)} \quad (3.32)$$

$$f_i = \sum_k \sum_j a_{ij}^{(k)} h_j^{(k)} \quad (3.33)$$

$$h_j^{(k)} \geq 0 \quad (3.34)$$

ile ifade edilebilmektedir.

Burada $a_{ij}^{(k)}$, $O^{(k)} - D^{(k)}$ çifti için bağlantı-zincir bağıllık matrisinin elemanlarıdır. Her $O^{(k)} - D^{(k)}$ çifti ve bu çifti birleştiren her bir zincir için k . ürünün ortalama zincir maliyetini

$$C_j^{(k)} = C_j^{(k)}(\mathbf{h}) = \sum_i a_{ij}^{(k)} c_i(f_i), \quad j \in M^{(k)} \quad (3.35)$$

ile tanımlarız.

Bu eşitlikte, h , tüm zincir akışları vektörünü veya zincir akışı trafik desenini temsil ederken, $c_i(f_i)$, i 'inci bağlantı üzerinde tüm ürün akışlarının toplamı olduğunda, i 'inci bağlantıyı kullanan bir sürücünün ortalama maliyetini ifade eder.

Genel olarak vurgulanması gereken diğer bir nokta da, $C_j^{(k)}$ 'nin çoğu zaman $\mathbf{h}$ zincir akış vektörüne bağlı olduğu ve sadece k . ürünle ilişkilendirilen zincir akışlarına bağlı olmadığıdır. Trafik atama problemleri, (3.35) ile verilen yol maliyetleri arasında belirli eşitsizlikleri karşılayan kullanıcı denge akış desenlerini bulma ve ayrıca (3.36) ile verilen toplam maliyet fonksiyonunu kısıtlar altında minimize eden sistem denge desenleri bulmayı içerir:

$$C = C(\mathbf{h}) = \sum_i f_i c_i(f_i)$$

$$\text{Kısıtlar: } \begin{cases} g^{(k)} = \sum_j h_j^{(k)}, \\ h_j^{(k)} \geq 0, \\ f_i = \sum_k \sum_j a_{ij}^{(k)} h_j^{(k)} \end{cases} \quad (3.36)$$

3.4.1.2. Ağlarda İşbirliksiz Kullanıcılar için Denge Desenleri

Kullanıcılar tarafından optimize edilen trafik desenleri ile ulaştırma ağı kullanıcılarının kendi rota maliyetlerini diğer kullanıcıların etkisinden bağımsız bir şekilde minimize etmeye çalıştığı denge desenlerini veya kısaca, kullanıcı denge desenlerini analiz etmek önemlidir. Bu kısımda, bunları açıklayacağız.

$O^{(k)}$ ve $D^{(k)}$ noktalarından çıkan r ve s olarak etiketlenmiş farklı iki zincir akışını düşünelim. Birincisi, $h_r^{(k)} > 0$ ve $h_s^{(k)} \geq 0$ olan bir h zincir akış desenine karşılık gelirken, ikincisi ise

$$\left. \begin{aligned} h_r'^{(k)} &= h_r^{(k)} - \varepsilon \geq 0 \\ h_s'^{(k)} &= h_s^{(k)} + \varepsilon > 0 \end{aligned} \right\}, r, s \in M^{(k)} \quad (3.37)$$

ile verilen bir akış deseni $\mathbf{h}'$ ile eşleşir.

(3.37) ile verilen bir akış deseni, diğer tüm $h_j'^{(k)} = h_j^{(k)}$ ve $0 < \varepsilon \leq h_r^{(k)}$ şeklindedir.

Burada, bağlantı akış desenleri f ve f' 'dir. Yani, ε akışı r zincirinden başka bir s zincirine yeniden atanmıştır. Bu yeniden atama işlemi, $\mathbf{h}' \geq 0$ ve (3.32) ile verilen eşitlik koşulunun sağlandığı bir durumda gerçekleşir.

Orijinal akış deseni için zincir maliyetleri, (3.35) zincir maliyeti kullanılarak

$$C_r^{(k)} = C_r^{(k)}(\mathbf{h}) = \sum_i c_i(f_i) a_{ir}^{(k)} \quad (3.38)$$

$$C_s^{(k)} = C_s^{(k)}(\mathbf{h}) = \sum_i c_i(f_i) a_{is}^{(k)} \quad (3.39)$$

ile elde edilir.

Benzer şekilde, tırnaklı işaretli gösterimler için

$$C_r^{(k)} = C_r^{(k)}(\mathbf{h}') = \sum_i c_i(f_i') a_{ir}^{(k)} \quad (3.40)$$

$$C_s'^{(k)} = C_s^{(k)}(\mathbf{h}') = \sum_i c_i(f_i') a_{is}^{(k)} \quad (3.41)$$

eşitlikleri geçerlidir:

(3.40) ve (3.41) ile verilen tırnak işaretli bağlantı akışlarını aşağıdaki gibi yorumlayabiliriz:

1. Bağlantı i , zincir r üzerinde bulunurken zincir s üzerinde bulunmuyorsa, yani $a_{lr}^{(k)} = 1$ ve $a_{is}^{(k)} = 0$ ise, o zaman $f_i' = f_i - \varepsilon$ olur.

2. Bağlantı i , zincir r ve s içinde, yani $a_{lr}^{(k)} = 1$ ve $a_{is}^{(k)} = 1$ ise, o zaman $f_i' = f_i$ olur.

3. Bağlantı i , zincir r üzerinde bulunmayıp zincir s üzerinde bulunuyor ise, yani $a_{lr}^{(k)} = 0$ ve $a_{is}^{(k)} = 1$ ise, o zaman $f_i' = f_i + \varepsilon$ olur.

Başka bir deyişle, yeniden atanmış akış ε 'nın r ve s zincirleri üzerindeki etkisi, her iki zincire ortak olan bağlantılarda birbirini iptal etmektir. Bir kullanıcı tarafından optimize edilmiş trafik deseni, r ve s zincirleri için (k sabit), her uygun $\varepsilon > 0$ ve her ürün k için

$$C_r^{(k)} = C_r^{(k)}(\mathbf{h}) \leq C_s^{(k)}(\mathbf{h}') = C_s'^{(k)} \quad r, s \in M^{(k)} \quad (3.42)$$

sağlandığında elde edilmiş olur:

(3.42) ile verilen eşitsizliklerin anlamı şudur. Belirli bir rota (zincir r) kullanmakta olan bir grup yolcu düşünün. Özellikle bu, zincir akışının kesin olarak pozitif olduğu anlamına gelir. Herhangi bir yolcunun yeniden atanması için (aynı $O-D$ çiftini birleştiren) r zincirinden s zincirine geçerken yeni trafik düzenlemesi altında her s için elde edilen ortalama maliyet, eski trafik düzenlemesi altında r zincirinin ortalama maliyetinden büyük veya eşit ise bir kullanıcı denge trafik deseni h elde edilmiştir.

r ve s zincirlerinin maliyetleri karşılaştırılırken, $\mathbf{M}^{(k)}$ kümesinde yolları kullanmayan yolcu akışları sabit tutulur ve akış değişkenlerinin sürekli kabul edilir. Bu nedenle, tanımladığımız kullanıcı dengesi, karşılaştırmaların verilen bir $O-D$ çifti arasındaki zincirlerle sınırlı olduğu yerel koşulları karşılamalıdır. Belirli bir $O-D$ çifti arasındaki zincirlerle sınırlı olması nedeniyle potansiyel olarak bu tür eşitsizliklerin sonsuz sayıda olabileceğini ve sadece denklem (3.42)'de verilen eşitsizlikte farklı r ve s zincirlerini karşılaştırmakla kalmayıp aynı zamanda farklı akış desenleri h ve h' de karşılaştırdığımızı belirtmek faydalı olabilir.

Bu çalışmada, $f_i c_i(f_i)$ 'nin kesin olarak konveks ve artan olduğunu varsayarak bir akış deseninin (3.42) ile verilen eşitsizlikleri sağlayan bir kullanıcı-denge deseni olması için gerekli ve yeterli koşullara ait teoremleri aşağıda vereceğiz.

Teorem 3.1. (Kullanıcı Dengesi): Kullanıcı denge akış deseni $\mathbf{h}$ ise ve her bir ürün için $O^{(k)}$ ile $D^{(k)}$ arasındaki zincirlerin sıralamasını belirleyen bir $1, 2, \dots, p, p+1, \dots, m_k$ sıralaması bulunuyorsa, o zaman

$$\begin{aligned} C_1^{(k)}(\mathbf{h}) &= C_2^{(k)}(\mathbf{h}) = \dots = C_p^{(k)}(\mathbf{h}) \leq C_{p+1}^{(k)}(\mathbf{h}) \dots \leq C_{m_k}^{(k)}(\mathbf{h}) \\ h_1^{(k)} &> 0; \quad h_2^{(k)} > 0; \quad \dots h_p^{(k)} > 0; \quad h_{p+1}^{(k)} = 0 \dots h_{m_k}^{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

koşulları sağlanır.

Bunu, daha basit bir şekilde ifade edecek olursak, koşul (3.43), herhangi bir O-D (başlangıç-varış) çifti arasındaki zincirleri biri akışa sahip, diğeri akışa sahip olmayan zincirler olmak üzere iki alt kümeye ayrılabilceği anlamına gelir. İlk alt kümedeki zincirlerin maliyetleri, ikinci alt kümedeki zincirlerin maliyetlerine eşit veya onlardan küçüktür. $\mathbf{h}$ akışının kesin pozitif olması sıfır olduğu durumlardan daha az maliyetlidir.

İspat: Bu koşulun yeterli olduğunu göstermek için, herhangi bir zincir akışının zincir $r, (1 \leq r \leq p \leq m_k)$ 'den zincir $s, (1 \leq s \leq m_k)$ 'e olan yeniden atanmasının (3.42) ile verilen eşitsizlikleri sağladığını göstermeliyiz. Zincir akış seçimi ile koşul (3.43) kullanılarak

$$C_r^{(k)}(\mathbf{h}) \leq C_s^{(k)}(\mathbf{h}), \quad 1 \leq r \leq p \quad (3.44)$$

elde edilir. Toplam bağlantı maliyetlerinin kesin konveks olduğu varsayımı

$$c_i(f_i') > c_i(f_i), \quad \forall f_i' > f_i \quad (3.45)$$

eşitsizliğini sağlar.

Bir akış deseni olan (3.37)'nin uygun yeniden atamasının, akışta kesin bir artışa sahip zincir s 'de en az bir bağlantıda sağladığından

$$C_s^{(k)}(\mathbf{h}') = \sum_i c_i(f_i') a_{is}^{(k)} > C_s^{(k)}(\mathbf{h}) = \sum_i c_i(f_i) a_{is}^{(k)} \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.44) ve (3.46) eşitsizlikleri kullanılarak

$$C_r^{(k)}(\mathbf{h}) < C_s^{(k)}(\mathbf{h}') \quad (3.47)$$

kesin eşitsizliği elde edilir:

Bu, (3.43) ile verilen kullanıcı denge akış modelinin tanımını sağlar.

Diğer yandan, koşulun gerek şartlarını göstermek için, koşulun sağlanmadığını varsayalım, böylece zincir maliyetleri açısından

$$C_r^{(k)}(\mathbf{h}) > C_s^{(k)}(\mathbf{h}), \quad h_r^{(k)} > 0 \quad (3.48)$$

koşulunu sağlayan r ve s zincirlerinin olduğunu kabul edelim.

Bu koşul kullanılarak, trafik modelinin bir kullanıcı denge deseni olmadığı sonucunu çıkarabiliriz.

Toplam bağlantı maliyetlerinin kesin olarak konveks olduğu varsayımı, ortalama zincir maliyetlerinin akışın sürekli bir fonksiyonu olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, eşitsizlik (3.42)'den zincir r 'den zincir s 'ye yeterince küçük bir akışın yeniden atamasını seçebiliriz. Böylece

$$C_r^{(k)}(\mathbf{h}) > C_s^{(k)}(\mathbf{h}') > C_s^{(k)}(\mathbf{h}) \quad (3.49)$$

elde ederiz.

Ancak bu, kullanıcı denge akış modelinin tanımı (3. 43) ile çelişir. Böylece, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4. AĞ TRAFİK ATAMA PROBLEMLERİNİN OPTİMİZASYON MODELİ

4.1. Ağ Trafik Atama Problemi ve Optimallik Koşulları

Bu kısımda, ağ trafik atama problemleri için genelleştirilmiş optimizasyon modeli ve optimallik koşulları incelenmektedir. Bu kısımda yer alan bilgiler, Patriksson tarafından 1994'de detaylı olarak işlenmiştir. İlgilenen araştırmacılar daha fazla bilgi için çalışmayı inceleyebilirler.

4.1.1. Kullanıcı Dengesi

Kullanıcı denge koşullarını matematiksel olarak formüle etmek için uygun bir akış deseni ve rastgele bir $(p, q) \in S$ başlangıç-varış çifti olduğunu varsayalım. p başlangıç düğümünden q varış düğümüne bir r zinciri (rotası) üzerinde yolculuk maliyetini (süresini) C_r^{pq} ile ifade edelim. Ayrıca, başlangıç- varış noktaları arasında bulunan zincirlerin ilk l adedinin pozitif akışlar taşıdığını varsayalım.

Ağ akışları için kullanıcı denge durumu

$$C_1^{pq} = C_2^{pq} = \dots = C_l^{pq} \quad (4.1)$$

ile verilir. Diğer bir ifadeyle; (4.1) koşulu sağlandığında, ağ akışı kullanıcı denge durumundadır.

Daha önceki bölüm, (Teorem 3.1'de ifade edildiği gibi) O–D çifti içinde kullanılmayan $(l+1, \dots)$ adet zincir, kullanılan zincirlerin seyahat sürelerinden en az biri kadar büyük seyahat süresine sahip olmalıdır.

R_{pq} , $(p, q) \in S$ başlangıç-varış çiftindeki zincirlerin indeks kümesi, h_r^{pq} zincirde bulunan akış deseni ve λ_{pq} ise p 'den q 'ya en kısa zincir üzerinde seyahat maliyeti veya süresi olarak tanımlanırsa, Wardrop kullanıcı denge koşullarından, her $(p, q) \in S$ çiftleri için

$$\begin{aligned} h_r^{pq} &> 0, & C_r^{pq} &= \lambda_{pq}, & \forall r \in \mathcal{R}_{pq}, \\ h_r^{pq} &= 0, & C_r^{pq} &\geq \lambda_{pq}, & \forall r \in \mathcal{R}_{pq}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir.

Burada λ_{pq} , Lagrange fonksiyonunun Lagrange çarpanıdır, ve ağ trafik atama problemleri için bir kullanıcı dengesidir.

Buna göre, $\mathbf{h}$ rota (zincir) akış vektörü için problemin uygunluk kısıtlarını da içererek, kullanıcı denge koşulları

$$h_r^{pq} (C_r^{pq} - \lambda_{pq}) = 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_{pq}, \forall (p, q) \in \mathcal{S} \quad (4.3)$$

$$C_r^{pq} - \lambda_{pq} \geq 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_{pq}, \forall (p, q) \in \mathcal{S} \quad (4.4)$$

$$\sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} = d_{pq}, \quad \forall (p, q) \in \mathcal{S} \quad (4.5)$$

$$h_r^{pq} \geq 0, \forall r \in \mathcal{R}_{pq}, \quad \forall (p, q) \in \mathcal{S} \quad (4.6)$$

$$\lambda_{pq} \geq 0, \quad \forall (p, q) \in \mathcal{S} \quad (4.7)$$

ile verilir.

(4.3) ve (4.4) ile verilen denklemler, problemin uygunluk kısıtlarını sağlarken diğer denklemler ise rota akışlarının ve buna karşılık gelen seyahat maliyetinin negatif olmamasını sağlar. Bu denklemler, ağ trafik atama probleminin optimizasyon modeli için optimallik koşulları veya kullanıcı dengesi olduğunu not etmek gerekir.

4.1.2. Kullanıcı Dengesi için Optimizasyon Modeli

Bilindiği kadarıyla trafik atama problemi için Wardrop prensipleri temel alınarak yapılan ilk optimizasyon modeli Prager tarafından 1954'de verilmiştir. Prager'ın optimizasyon modeli, trafik akışlarını elektrik akımları ile benzerlik kurarak oluşturmaktadır. Ancak bu optimizasyon problemi, trafik akışlarını incelemek için kısıtlayıcı varsayımlar içermektedir.

Bu kısımda verilen optimizasyon problem modelinin amaç fonksiyonları, toplam bağlantı akışlarına dayanmaktadır. Rota (Zincir) ve bağlantı akışları ile bunlarla ilişkilendirilen seyahat süreleri, aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

Ürün bağlantı akışları f_a^{pq} , verilen rota akışları h_r^{pq} 'e bağlı olacak şekilde

$$f_a^{pq} = \sum_{r \in \mathcal{R}} \delta_{ra}^{pq} h_r^{pq}, \quad \forall (p, q) \in S, \forall a \in \mathcal{A} \quad (4.8)$$

ile tanımlanır.

Ayrıca, G ağı için bağlantı-rota bağıllılık matrisi

$$\delta_{ra}^{pq} = \begin{cases} 1, & \text{rota } r \in \mathcal{R}_{pq} \text{ bağlantı } \forall a \in A' \text{ y} \text{ kullanıyorsa} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.9)$$

ile temsil edilir.

Toplam bağlantı akışları f_a ,

$$f_a = \sum_{(p,q) \in S} f_a^{pq}, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (4.10)$$

ile elde edilir.

$\delta_{ra}^{pq} = \Delta^T$ alınarak (4.8) ve (4.10) bağlantı akışları, matris formda

$$\mathbf{f} = \Delta \mathbf{h} \quad (4.11)$$

olacak şekilde yeniden ifade edilir.

Rota maliyetlerindeki bağlantı ekleme varsayımı nedeniyle, bağlantılardaki seyahat maliyetleri rota maliyetleriyle birlikte

$$C_r^{pq}(\mathbf{h}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ra}^{pq} c_a(f_a), \quad \forall r \in \mathcal{R}_{pq}, \forall (p, q) \in S \quad (4.12)$$

yazılabilir.

Matris formda,

$$\mathbf{c}(\mathbf{h}) = \Delta^T \mathbf{c}(\mathbf{f}) \quad (4.13)$$

ile temsil edilir.

Ayrıca, ağ trafik atama optimizasyon problemi, Wardrop koşullarına uygun bir şekilde modellenmelidir.

Bu koşullar;

1. Ağ tam bağlantılıdır, yani her bir başlangıç-varış (O-D) çifti $(p, q) \in S$ en az bir zincir birleştirir, yani $|R_{pq}| \geq 1$ olmalıdır.
2. Varış noktasında talep d_{pq} , her $(p, q) \in S$ için sıfırdan büyük veya sıfıra eşit olmalıdır.
3. Seyahat süresi fonksiyonu $t_a : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_{++}$, $\forall a \in A$ için pozitif ve sürekli bir fonksiyon, yani, konveks bir fonksiyon olmalıdır.

ile verilir. Bu koşullar, trafik ağının belirli özelliklerini içerir ve trafik ağı optimizasyon probleminin matematiksel olarak modellenmesinde olmazsa olmazlardır.

Böylece, ağ trafik atama probleminin optimizasyon modeli

$$\min Z(\mathbf{f}) = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} c_a(s) ds \quad (4.14)$$

amaç fonksiyonu ve

$$\left\{ \begin{array}{l} h_r^{pq} \geq 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_{pq}, \quad \forall (p, q) \in S \\ \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} = d_{pq}, \quad \forall (p, q) \in S \\ \sum_{(p, q) \in S} \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} \delta_{ra}^{pq} h_r^{pq} = f_a, \quad \forall a \in A \end{array} \right. \quad (4.15)$$

kısıtları ile verilir.

Burada, $\mathcal{A}$: tüm yolların kümesini, $\mathcal{R}_{pq}$: başlangıç-varış düğümü (p, q) için kullanılan yolların kümesini, $c_a(s)$: yolun maliyetini belirleyen amaç fonksiyonunu (amaç fonksiyonu seyahat süresi olarak alınırsa $t_a(s)$ minimize edilecek zaman fonksiyonunu), d_{pq} : başlangıç-varış düğümü (p, q) için akış talebini, f_a : rota veya zincir a üzerindeki trafiği, h_r^{pq} : (p, q) düğümü arasındaki r rotası veya zinciri üzerindeki trafiği veya akışı, ve δ_{ra}^{pq} : (p, q) düğümleri üzerinde r rotası üzerindeki trafik akışının olup olmadığını temsil eder.

Bu model, verilen koşullar altında en uygun trafik atamasını elde etmeyi amaçlar.

Teorem 4.1, bu optimizasyon probleminin kullanıcı denge koşullarını elde etmemizi sağlar. Diğer bir ifadeyle; (4.14)-(4.15) ile verilen ağ trafik atama optimizasyon probleminin kullanıcı denge koşulları (4.3)- (4.7)'nin elde edilmesini sağlar.

4.2. Lagrange Fonksiyonu ve Optimallik Koşulları

Teorem 4.1 (Eşdeğer optimizasyon formülasyonu veya optimallik koşulu): Yukarıda açıklanan, 3 adet varsayımın sağlandığını kabul edelim. Amaç fonksiyonu (4.14) ve kısıtlar (4.15) ile tanımlanan ağ trafik atama optimizasyon probleminin birinci dereceden optimallik koşulları, kullanıcı denge koşulları olan (4.3)- (4.7) ile verilen ifadelerle eşdeğerdir.

İspat: Yukarıda verilen optimizasyon probleminde, problemin kısıtları (4.15), $\lambda = (\lambda_{pq})$ çarpanı ile ilişkilendirilirse, (4.14) ve (4.15) ile tanımlanan ağ trafik atama optimizasyon problemi için Lagrange fonksiyonu,

$$L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Z(\mathbf{f}(\mathbf{h})) + \sum_{(p,q) \in S} \lambda_{pq} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \quad (4.16)$$

olarak elde edilir.

Lagrange fonksiyonunun $(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ değişkenlerine göre kısmi türevleri alınarak durağan nokta koşullarını

$$\frac{\partial h_r^{pq}}{\partial h_r^{pq}} \frac{\partial L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial h_r^{pq}} = 0, \quad \forall r \in R_{pq}, \forall (p, q) \in S \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial h_r^{pq}} \geq 0, \quad \forall r \in R_{pq}, \forall (p, q) \in S \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{pq}} = 0, \quad \forall (p, q) \in S \quad (4.19)$$

$$h_r^{pq} \geq 0, \quad \forall r \in R_{pq}, \forall (p, q) \in S. \quad (4.20)$$

olarak elde ederiz.

Lagrange fonksiyonu (4.16), $\mathbf{f}$ vektörüne bağlı olup $\mathbf{f}$ vektörü de $\mathbf{h}$ vektörüne bağlı olduğundan zincir kuralı yardımıyla Lagrange fonksiyonunun ilk terimi olan amaç fonksiyonu (4.14)'ün türevini

$$\frac{\partial Z(\mathbf{f}(\mathbf{h}))}{\partial h_r^{pq}} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\partial Z}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial h_r^{pq}} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ra}^{pq} c_a(f_a) = C_r^{pq}(\mathbf{h}) \quad (4.21)$$

olarak elde ederiz.

Daha sonra, Lagrange fonksiyonu (4.16), rota akış vektörü $\mathbf{h}$ 'a göre kısmi türevi alınarak ve amaç fonksiyonunun türevi (4.21) bu türevde yerine yazılarak Lagrange fonksiyonunun zincir akışlarına göre kısmi türevi

$$\frac{\partial L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial h_r^{pq}} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\partial Z}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial h_r^{pq}} - \lambda_{pq} = 0 \quad (4.22)$$

olarak elde edilir. Kısmi türev (4.22), KKT koşullarında yer alan durağan noktalar koşuluna denk gelir.

Durağan noktalar koşulu (4.22), kısmi türev (4.21) kullanılarak

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ra}^{pq} c_a(f_a) - \lambda_{pq} = 0$$

olarak yeniden yazılabilir.

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ra}^{pq} c_a(f_a) = C_r^{pq}(\mathbf{h})$$

olduğundan dolayı

$$\lambda_{pq} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ra}^{pq} c_a(f_a) = C_r^{pq}(\mathbf{h}) \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir.

Lagrange fonksiyonu (4.16), $\lambda_{pq} \geq 0$ olmasını gerektirdiğinden ağ trafik atama optimizasyon probleminin kullanıcı dengesi.

$$\begin{cases} C_r^{pq}(\mathbf{h}), & \lambda_{pq} = 0 \\ C_r^{pq}(\mathbf{h}) - \lambda_{pq}, & \lambda_{pq} > 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

olarak elde edilir.

Böylece, kullanıcı dengesi (4.24), kullanıcı denge koşulları (4.3)-(4.7) ile verilen ifadelerle eş değer olduğu ispatlanmış olur.

Bu tip yaklaşımlar literatürde mevcuttur ve bizlere yerel kullanıcı denge noktalarını verirler. Ayrıca verilen optimizasyon probleminin uygun çözüm bölgelerinde çok fazla yerel kullanıcı denge noktası mevcuttur. Bu nedenle, trafik atama probleminin optimizasyon modelinin global kullanıcı denge noktasını elde edebilmek için Lagrange sınır ağı oluşturmaya çalışacağız. Amaç fonksiyonu (4.14) ve problemin kısıtları (4.15) ile statik yapıda verilen ağ trafik atama optimizasyon modelini dinamik sisteme dönüştürerek bağlantı ve zincir akışlarında meydana gelen değişimleri zamanla nasıl hareket ettiğini analiz edebileceğiz.

5. TRAFİK ATAMA PROBLEMİNİN OPİMİZASYONU İÇİN LAGRANGE SINIR AĞI YÖNTEMİ

Bu bölümde, ağ trafik atama problemi, Lagrange fonksiyonu yardımıyla KKT koşullarını sağlayan ve sinir diferansiyel denklemlerinden oluşan bir sinir ağına dönüştürülecektir. Lagrange sinir ağı, Zhang ve Constantinides tarafından 1992 yılında lineer olmayan optimizasyon problemleri için detaylıca incelenmiştir. Bu yöntem kullanılarak, ağ trafik atama probleminin kullanıcı denge çözümü elde edilmeye çalışılmıştır (bakınız, Dalman, 2023). Bu kısımda ağ trafik atama problemlerinin kullanıcı denge çözümlerini elde etmek için bir takım teorik bilgiler ve eksikliklerin giderilmesi amaçlanmaktadır.

5.1. Lagrange Sinir Ağı

Denklem (4.16) ile verilen Lagrange fonksiyonunun değişkenleri $(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ olup ve bu değişkenlere göre gradyenleri alınarak (4.22) ile ifade edilen durağan noktalar koşulunun denklemleri elde edilir. Bu durağan noktalar koşulunun denklemi

$$\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla_{\mathbf{h}} Z(\mathbf{f}(\mathbf{h})) + \nabla_{\mathbf{h}} \left(\sum_{(p,q) \in S} \lambda_{pq} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \right) = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{h}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) = 0 \quad (5.2)$$

olacak şekilde yeniden yazabilir:

(5.1) ve (5.2) ile verilen denklem sisteminin çözümü, kullanıcı dengesi koşulu olan (4.24)'e karşılık gelmektedir. Çünkü (5.1) ve (5.2) ile verilen denklem sistemi, (4.17)-(4-20) ile ifade edilen Lagrange fonksiyonunun KKT koşullarının durağan noktalar koşullarının aynısıdır. Diğer bir ifadeyle, (4.3)-(4.7) ile ifade edilen kullanıcı dengesini sağlarlar.

Burada, amacımız (5.1) ve (5.2) ile verilen sistemin çözümünü sağlayan ve ayrıca, (4.24) ile tanımlanan kullanıcı denge noktasına hızlı ve kararlı bir şekilde ulaşacak sinir ağı tasarlamaktır. Literatürde, sinir ağının geçici davranışları

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \lambda) \quad (5.3)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}, \lambda) \quad (5.4)$$

ile tanımlanmaktadır.

Eğer, (5.3) ve (5.4) ile tanımlanan ağ fiziksel olarak kararlı ise denge noktaları $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ 'yı veren denklemleri:

$$\left(\frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) (\mathbf{h}^*, \lambda^*) = 0 \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} \right) (\mathbf{h}^*, \lambda^*) = 0 \quad (5.6)$$

ile temsil edebiliriz.

(5.5) ve (5.6) ile tanımlanan dinamik sistemden elde edilen çözümler, (5.1) ve (5.2) ile tanımlanan cebirsel denklem sisteminden elde edilen çözümler gibi ağ trafik atama optimizasyon problemi (4.14) ve (4.15) için bir Lagrange çözümü sağlar.

Tanım 5.1 (5.3) ve (5.4) ile tanımlanan sinir ağı açık bir şekilde yazılırsa,

$$\frac{dh_r^{pq}}{dt} = -\sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\partial Z}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial h_r^{pq}} + \lambda_{pq} \frac{d\lambda_{pq}}{dh_r^{pq}} \quad (5.7)$$

$$\frac{d\lambda_{pq}}{dt} = \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \quad (5.8)$$

ile ifade edilen Lagrange sinir ağı elde edilir.

.

Lagrange sinir ağı, h_r^{pq} nöron aktiviteleri olarak fiziksel bir anlam taşımaktadır. Ayrıca, bu ağda bulunan nöronlar, rota akış nöronları $\mathbf{h}$ ve Lagrange nöronları λ olarak da tanımlanabilir.

Sinir ağının dinamik sürecinde, Lagrange nöronları yörüngeyi kısıtların (uygun çözümlerin) sağlandığı bölgeye yönlendirirken, değişken nöronları da $L(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonunu minimize etmeye çalışır.

Lagrange fonksiyonunun ağın yörüngesi boyunca $\mathbf{h}$ 'a bağlı zamanla azalması

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL(\mathbf{h}, \lambda)}{dt} \right|_{\lambda=\text{sabit}} &= \frac{\partial L(\mathbf{h}, \lambda)}{\partial h_r^{pq}} \frac{dh_r^{pq}}{dt} \\ &= -\frac{dh_r^{pq}}{dt} \frac{dh_r^{pq}}{dt} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

ile gösterilebilir.

Diğer yandan; optimal çözümün eyer noktası özelliği nedeniyle sinir ağı geometrik olarak

$$L(\mathbf{h}^*, \lambda) \leq L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) \leq L(\mathbf{h}, \lambda^*) \quad (5.10)$$

alınabilir.

Burada (5.10) ile verilen eşitsizlikler sağlanıyorsa $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ noktaları, $L(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonu için eyer noktası özelliklerini sağlar. Bu da herhangi bir başlangıç noktasından başlandığında (5.7) ve (5.8) ile tanımlanan Lagrange sinir ağının eyer noktasına yakınsadığını gösterir. Ayrıca eyer noktası özelliği sağlanıyorsa optimallik koşulları için de yeter şart elde edilmiş olur.

Teorem 5.1 (Sinir Ağının Yerel Kararlılığı): $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ noktaları, $L(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonunun bir durağan noktası olsun. $\nabla_{\mathbf{h}\mathbf{h}}^2 L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) > 0$ ve $\mathbf{h}^*$ bir regüler nokta olarak kabul edilsin. (5.3) ve (5.4) ile tanımlanan sinir ağının çözümünden elde edilen $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ denge noktaları asimptotik kararlı noktalardır.

İspat: Verilen teoreme göre, $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ noktaları, $L(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonunun bir durağan noktası ise,

$$\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) = 0 \text{ ve } \nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) = 0 \quad (5.11)$$

yazılabilir.

Bu sistemi doğrusal hale dönüştürmek ve $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ noktasının yakın civarlarındaki davranışını görebilmek için Taylor serisini kullanabiliriz.

Birinci mertebeden yaklaşım yaparak, $L(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonunu doğrusal hale dönüştürelim. Yaklaşık olarak $L(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonunu

$$L(\mathbf{h}, \lambda) \approx L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) + \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}^*) + \nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) \cdot (\lambda - \lambda^*) \quad (5.12)$$

ile yazılabilir.

Şimdi, $\mathbf{h} - \mathbf{h}^*$ ve $\lambda - \lambda^*$ ifadelerini $\delta\mathbf{h}$ ve $\delta\lambda$ olarak alalım. (5.12) ile verilen Lagrange fonksiyonunun bir yaklaşımını

$$L(\mathbf{h}, \lambda) \approx L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) + \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) \cdot \delta\mathbf{h} + \nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) \cdot \delta\lambda \quad (5.13)$$

ile yeniden ifade edelim.

Bu (5.13) fonksiyonu kullanılarak, $\delta\mathbf{h}$ ve $\delta\lambda$ 'nın zamana göre değişimlerini

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\mathbf{h}}{dt} &= -\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) \delta\mathbf{h} \\ \frac{d\delta\lambda}{dt} &= \nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) \cdot \delta\lambda \end{aligned} \quad (5.14)$$

ile yazalım.

Bu ifadeler, kompakt ve vektörel formda

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{h} \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) & 0 \\ 0 & \nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{h} \\ \delta\lambda \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

ile gösterilebilir. Burada, $[\delta\mathbf{h} \ \delta\lambda]^T$ vektörü $\delta\mathbf{h}$ ve $\delta\lambda$ 'nın birleşimidir.

(5.15) eşitliğini daha sade bir şekilde yazmak için,

$$\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) = \mathbf{A} \text{ ve } \nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}^*, \lambda^*) = \mathbf{B}$$

olarak alalım. Bu durumda, (5.15) ile verilen ifade

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{h} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{h} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

olarak elde edilir.

(5.16) ile verilen eşitlik bir doğrusal denklem sistemidir. Bu tip doğrusal denklem sistemlerinin çözümü genellikle

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{h}(t) \\ \delta \pi(t) \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{h}(0) \\ \delta \pi(0) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

ile ifade edilir.

Çözüm (5.17) ifadesinin sağ tarafı bir üstel matrisi temsil etmektedir. Teorem 5.1'den $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ noktası durağan bir nokta ise

$$\delta \mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(0) - \mathbf{h}^* = 0$$

ve

$$\delta \lambda(0) = \lambda(0) - \lambda^* = 0$$

olmak zorundadır. Bu durumda (5.17),

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{h}(t) \\ \delta \lambda(t) \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

olarak yeniden yazılabilir.

Diğer bir ifadeyle,

$$\delta \mathbf{h}(t) = \mathbf{h}(t) - \mathbf{h}^* = 0$$

ve

$$\delta\lambda(t) = \lambda(t) - \lambda^* = 0$$

elde edilir.

Bu da göstermektedir ki, sinir ağı, $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ denge noktasına asimptotik olarak yaklaşır.

Sinir ağları, optimizasyon problemlerine yönelik kullanıldığında genellikle ağın küresel kararlılığını incelemek önemlidir. Küresel kararlılık, ağın herhangi bir başlangıç noktasından itibaren salınım veya kaosa düşmeyeceği anlamına gelir. Bu durum, başlangıç durumunu keyfi olarak seçerek her zaman en iyi optimal çözümü elde etme imkanı sunar.

Diferansiyel veya fark denklemleriyle tanımlanan karmaşık sistemlerde, kararlılık genellikle denklemleri basitçe çözerek ve sistemin zaman içinde nasıl evrildiğini inceleyerek anlaşılır. Ancak yüksek boyutlu doğrusal olmayan sistemler için bu genellikle mümkün değildir.

Diğer bir yaklaşım ise sistem için bir Lyapunov fonksiyonu bulmaktır. Lyapunov yaklaşımı, dinamik bir sistemin global kararlılığını kanıtlamak için bir yol sunar. Eğer bir Lyapunov fonksiyonu bulunamazsa, sistem hakkında herhangi bir sonuca varmak zor olabilir. Lyapunov fonksiyonu, sistem durum değişkenlerini gerçel sayılara haritalar ve zamanla azalır. Bu fonksiyonun kontrol teorisinde genellikle bir kuadratik form içerdiği görülür.

Smale (1974), doğrusal olmayan dinamik sistemlerde yakınsama hızını özdeğer işaretlerine bağlamaktadır. Eğer sistemin Jakobiyeni negatif gerçel kısımlara sahip özdeğerlere sahipse, sistem üstel bir hızda yakınsar. Kararlılık, denge noktasına yakın bir yerde hiçbir özdeğerin pozitif gerçel kısma sahip olmadığını gösterir. Gerçel kısımların sıfır olması, sistemin Hessian matrisinin çözümsüz olduğu durumu yani determinantının sıfır olduğu durumu ifade edebilir. Asimptotik kararlılık ise tüm özdeğerlerin negatif gerçel kısımlara sahip olduğunu ve dolayısıyla dinamik sistemin üstel ve hızlı bir şekilde yakınsadığını gösterir.

Bir Lyapunov fonksiyonu genellikle bir fiziksel sistemin enerjisini ölçer. Hopfield (1982), bu sinir ağı yorumunu popülerleştirmiştir. Sistem durum değişkenlerinin (veya hızlarının) kuadratik bir formda yaklaşık olarak sistemin (potansiyel veya kinetik) enerjisini ölçer. Lyapunov fonksiyonu sonsuza kadar azalır; en azından alt sınırına ulaşmıyorsa durmalıdır. Durdurma noktası, sistem denge noktasını temsil eder. Ayrıca, durdurma noktası, sinir ağı dinamik sistemlerinde programlanabilirlik noktasını temsil eder. Bu, desen bilgisinin öğrenme veya hatırlama, ya da kombinatorial optimizasyon probleminin çözümüne karşılık gelir (Kosko, 1992).

Özetle; global kararlılık analizi için en etkili yaklaşımlardan biri Lyapunov yöntemidir ve bu yöntemde kritik adım, sistem için uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulmaktır. Bu nedenle; (5.3) ve (5.4) ile tanımlanan sinir ağı modelinin kararlılığı için bir Lyapunov fonksiyonu tanımlaya çalışalım.

Tanım 5.2. (5.3) ve (5.4) ile ifade edilen sistem için $\mathbf{h}$ ve λ parametrelerine bağlı bir enerji fonksiyonu

$$\begin{aligned} E(\mathbf{h}, \lambda) &= \frac{1}{2} |\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \lambda, \mu)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}, \lambda, \mu)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{\mu} L(\mathbf{h}, \lambda, \mu)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \nabla_{\mathbf{h}} Z(\mathbf{f}(\mathbf{h})) + \nabla_{\mathbf{h}} \left(\sum_{(p,q) \in S} \lambda_{pq} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \right) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

ile tanımlanabiliriz.

Bu tanımda, $E(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonu, $\mathbf{h}$ ve λ parametrelerinin gradyenlerinin öklid normlarının karelerinin yarısı ile hesaplanır.

Dolayısıyla, $E(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonu, $L(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonunun gradyenlerinin normlarının enerji veya kararlılık ölçüsünü temsil eder. Ayrıca bu fonksiyon konvekslik ve düzgünlük koşulları altında bir Lyapunov fonksiyonudur.

Teorem 5.2. (Hesse matrisi) $\nabla_{\mathbf{h}\mathbf{h}}^2 L(\mathbf{h}, \lambda)$ ağın dinamik alanında pozitif tanımlı (veya herhangi bir $\mathbf{h}$ noktasında $\nabla_{\mathbf{h}\mathbf{h}}^2 L(\mathbf{h}, \lambda)$ kesin pozitif tanımlı) bir matris olsun. Bu durumda enerji fonksiyonu $\mathbf{E}(\mathbf{h}, \lambda)$, zamanla azalır veya sabitlenir. Böylece, $(\mathbf{h}^*, \lambda^*)$ denge noktaları Langrange fonksiyonu $L(\mathbf{h}, \lambda)$ 'ın bir durağan noktası olup, sinir ağı belirli bir denge noktasına asimptotik olarak yaklaşır. Diğer bir ifadeyle verilen enerji fonksiyonu bir Lyapunov fonksiyonu olup sinir ağı Lyapunov kararlıdır.

İspat: İlk olarak, $\mathbf{E}(\mathbf{h}, \lambda)$ fonksiyonunun zamana göre kısmi türevi

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \lambda)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}, \lambda)|^2 \right) \quad (5.20)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{E}}{d\mathbf{h}} \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{E}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) \quad (5.21)$$

olarak yazılabilir.

Enerji fonksiyonunun zamana göre kısmi türevi ise

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \left[\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \lambda)^T \nabla_{\mathbf{h}} (\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \lambda)) + \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)^T \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \lambda) \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \right] \frac{dh}{dt} \\ & + \nabla_{\lambda} L(\mathbf{h}, \lambda) + \nabla_{\lambda} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)^T \frac{d\lambda}{dt} \end{aligned} \quad (5.22)$$

olarak elde edilir.

(5.3) ve (5.4) ile verilen sistem kullanarak (5.22) ile ifade edilen enerji fonksiyonunun zaman göre kısmi türevini

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} = & -\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})^T \left(\nabla_{\mathbf{h}\mathbf{h}}^2 L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \right) \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \\
& - \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)^T \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \\
& + \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})^T \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)^T \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

ile yeniden yazabiliriz.

Eğer bu denklemde,

$$\left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)^T \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$$

bir skaler ve

$$\begin{aligned}
& \left[\left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)^T \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right) \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \right]^T \\
& = \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})^T \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)^T \left(d_{pq} - \sum_{r \in \mathcal{R}_{pq}} h_r^{pq} \right)
\end{aligned}$$

ise enerji fonksiyonun zamana göre türevi

$$\frac{dE}{dt} = -\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})^T \left(\nabla_{\mathbf{h}\mathbf{h}}^2 L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \right) \nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{5.24}$$

olarak elde edilir.

Böylece, (5.24.)’de elde edilen ifadenin hesse matrisi $\nabla_{\mathbf{h}\mathbf{h}}^2 L(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, ağı dinamik

alanında kesin pozitif tanımlı ise $\frac{dE}{dt}$ daima negatiftir.

Ayrıca, $E(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \geq 0$ olup alttan sınırlıdır. Bu nedenle; $E(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ verilen sinir ağı için bir Lyapunov fonksiyonu olup verilen sinir ağı Lyapunov kararlıdır.

Sonuç olarak, $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}^*$ yaklaşırken eyer noktası özelliğinden $\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \lambda) = 0$ değerini alır. Bu nedenle; $\frac{d\mathbf{E}}{dt} = 0$ olduğunda, son eşitlikten ve hesse matrisinin pozitifliğinden $\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}^*, \lambda) = 0$ yazılabilir. Ayrıca, denklem (5.3)'den $\frac{d\mathbf{h}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{h}} L(\mathbf{h}, \lambda) = 0$ olup $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}^*$ 'a yaklaştığı ispatlanabilir.



6. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde, çoklu başlangıç- varış (O-D) noktalarını içeren bir trafik ağı için kullanıcı dengesini veya kullanıcı optimal noktaları elde etmeye çalışacağız.

Bu ağ (Jorgensen, 1963), toplamda altı düğüm ve on bağlantı veya yay içermektedir. Matematiksel olarak,

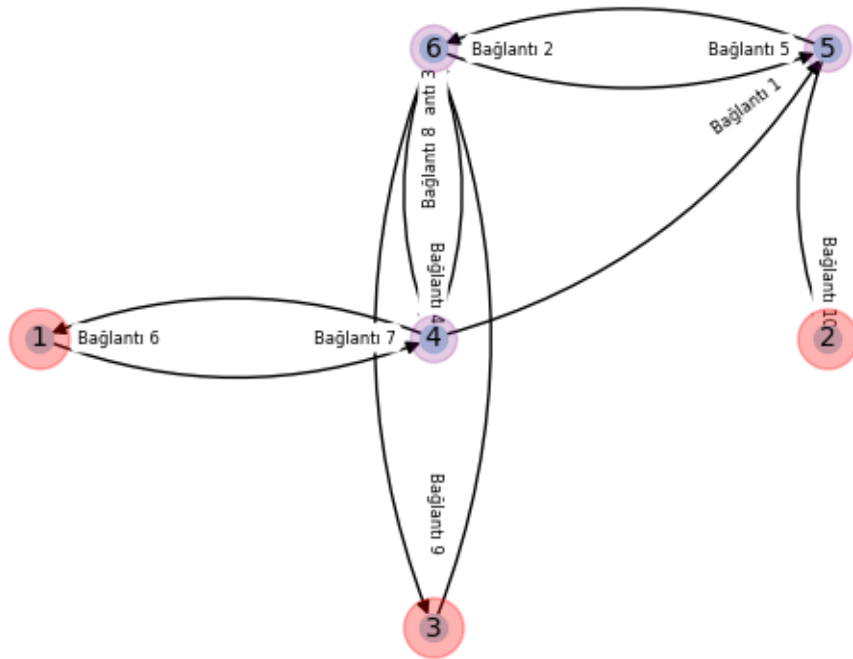
$$N = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

düğüm ve

$$A = \{(1, 4), (4, 1), (4, 5), (5, 2), (4, 6), (6, 3), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (3, 6)\}$$

bağlantılarından oluşmaktadır.

Ayrıca, (1, 2, 3) düğümleri O-D düğüm çifti olarak kabul edilirken, geri kalan üç düğüm transfer düğümü veya ara düğüm olarak adlandırılır. Bu ağın görsel temsili Şekil 6.1'de sunulmuştur. Pembe düğümler merkezi noktaları temsil ederken, mor düğümler transfer noktalarını temsil eder.



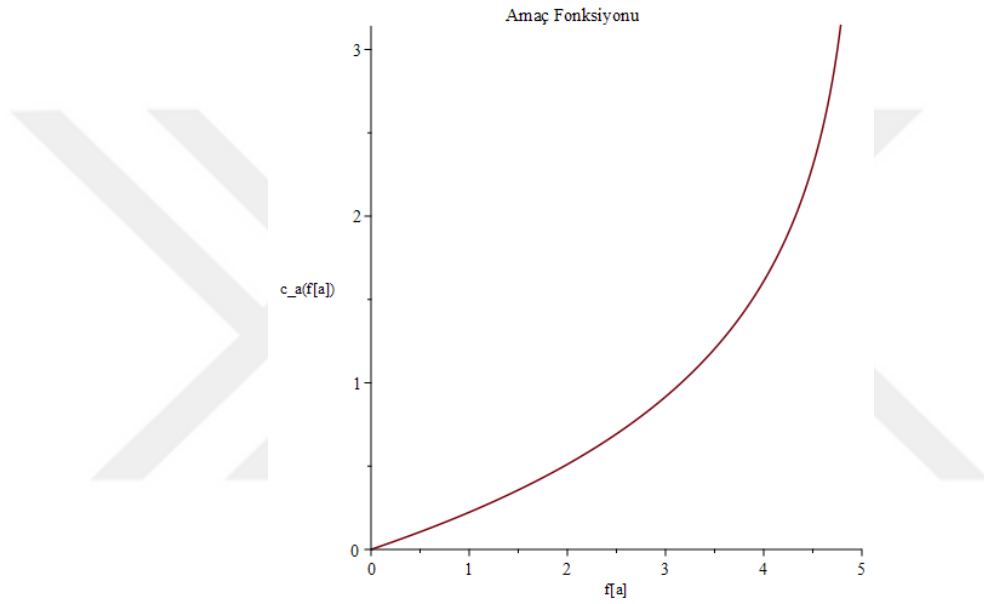
Şekil 6. 1. Altı adet düğüm, 10 adet bağlantı, 3 merkezi düğüm ve 3 transfer düğümü içeren bir ağ

Bu ağın bağlantı maliyetleri

$$\begin{cases} c_a(f_a) = \frac{1}{5-f_a}, & 0 \leq f_a < 5, \quad a = 1, \dots, 5 \\ c_a(f_a) = 0, & a = 6, \dots, 10 \end{cases} \quad (6.1)$$

parçalı fonksiyonu olarak verilmektedir:

Maliyet fonksiyonu konveks ve sürekli artan bir fonksiyon olduğundan dolayı problemin optimal çözümü var ve tektir. (6.1)'de tanımlanan fonksiyonun grafiği Şekil 6.2'de verilmektedir.



Şekil 6. 2. Bağlantı maliyet fonksiyonu

Başlangıç- varış O-D çiftlerini aşağıdaki şekilde numaralandıralım:

$O^{(12)} - D^{(12)}$: Düğüm 1'den Düğüm 2'ye yapılan seyahatler,

$O^{(13)} - D^{(13)}$: Düğüm 1'den Düğüm 3'e yapılan seyahatler,

$O^{(31)} - D^{(31)}$: Düğüm 3'ten Düğüm 1'e yapılan seyahatler,

$O^{(32)} - D^{(32)}$: Düğüm 3'ten Düğüm 2'ye yapılan seyahatler.

O-D seyahat (akış) taleplerini

$$d_{12} = 3, \quad d_{13} = 6, \quad d_{31} = 2, \quad d_{32} = 5 \quad (6.2)$$

olarak alalım.

Şekil 6.1'den, bu dört ürünün (zincirin) karşılık geldiği yedi zincir akışı, her bir zincir kümesi içindeki farklı bağlantı numaraları alınarak

$$\begin{cases} M^{(12)} = \{h_1^{(12)} = (7,1,10); h_2^{(12)} = (7,3,5,10)\} \\ M^{(13)} = \{h_1^{(13)} = (7,1,2,9); h_2^{(13)} = (7,3,9)\} \\ M^{(31)} = \{h_1^{(31)} = (8,4,6)\} \\ M^{(32)} = \{h_1^{(32)} = (8,4,1,10); h_2^{(32)} = (8,5,10)\} \end{cases} \quad (6.3)$$

olarak elde edilir.

Bu problemde, hesaplamalarda kolaylık sağlaması açısından başlangıç varış noktalarını

$O_1 - D_1$: Düğüm 1'den Düğüm 2'ye yapılan seyahatler,

$O_2 - D_2$: Düğüm 1'den Düğüm 3'e yapılan seyahatler,

$O_3 - D_3$: Düğüm 3'ten Düğüm 1'e yapılan seyahatler,

$O_4 - D_4$: Düğüm 3'ten Düğüm 2'ye yapılan seyahatler.

ile yeniden yazabiliriz.

Benzer şekilde, denklem (6.2) ile ifade edilen O-D seyahat talebi için gösterimleri

$$d_1 = 3, \quad d_2 = 6, \quad d_3 = 2, \quad d_4 = 5 \quad (6.4)$$

ile yazalım.

Zincirleri ise,

$$\begin{cases} M_1 = \{h_{11} = (7,1,10); h_{21} = (7,3,5,10)\} \\ M_2 = \{h_{12} = (7,1,2,9); h_{22} = (7,3,9)\} \\ M_3 = \{h_{13} = (8,4,6)\} \\ M_4 = \{h_{14} = (8,4,1,10); h_{24} = (8,5,10)\} \end{cases} \quad (6.5)$$

ile yeniden ifade edelim.

(6.5) ile verilen zincir kümesinin M_1 zincirinde, zincir akışı(rota) h_{11} 'in ilk indeksi M_1 zinciri için birinci rota, ikinci indeksi ise düğüm 1'den düğüm 2'ye yapılan seyahatleri belirtmektedir. Zincir akışı h_{21} ise düğüm 1'den düğüm 2'ye yapılan seyahatler için ikinci bir rota olduğunu göstermektedir.

Bu zincirleri Şekil 6.1'de, başlangıç ve varış noktalarını belirledikten sonra o noktaların hangi bağlantıları bağladığını bulmak yeterlidir. Burada rotalar yazılırken Şekil 6.1'de bağlantıların sayılarını dikkate aldığımızı belirtmek gerekir.

Ağ, (6.6)'da ile ifade edilen zincir akışlarını, korunum denklemlerini veya başka bir ifadeyle başlangıç- varış seyahat taleplerini sağlamalıdır:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11} + h_{21} = 3, \\ h_{12} + h_{22} = 6, \\ h_{13} = 2, \\ h_{14} + h_{24} = 5, \\ h_{11} \geq 0, h_{21} \geq 0, h_{12} \geq 0, h_{22} \geq 0, \\ h_{13} \geq 0, h_{14} \geq 0, h_{24} \geq 0. \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Diğer kısıtlar ise ön tanımlı bağlantı akışlarıdır.

(6.1) ile tanımlanan amaç fonksiyonunda, bağlantı 1'den bağlantı 5'e kadar olan akışlar ağın maliyetini etkilemez. Ayrıca bağlantı akış kısıtlarımızı

	h_{11}	h_{21}	h_{12}	h_{22}	h_{13}	h_{14}	h_{24}
Bağlantı 1	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0
Bağlantı 2	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Bağlantı 3	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
Bağlantı 4	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0
Bağlantı 5	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

olacak şekilde bağlantı-zincir akış bağıllık matrisi kullanarak elde edilebiliriz.

Bu matris, hangi zincir akışı üzerinde hangi bağlantının olduğunu göstermektedir. Kolaylık açısından bu matrisin soldan sağa doğru verilen bağlantı numaralarının karşısında değeri 1 olan zincir akışlarının toplamı bağlantı akışını verir. Örneğin,

Bağlantı 1'i f_1 ile gösterelim. Böylece f_1 için bağlantı akış denklemi yukarıdaki matris kullanılarak

$$h_{11} + h_{12} + h_{14} = f_1$$

ile verilir. Bu şekilde ağın maliyetini etkileyen tüm bağlantı akış kısıtları

$$\begin{cases} h_{11} + h_{12} + h_{14} &= f_1, \\ h_{12} &= f_2, \\ h_{21} + h_{22} &= f_3, \\ h_{13} + h_{14} &= f_4, \\ h_{21} + h_{24} &= f_5. \end{cases} \quad (6.7)$$

ile ifade edilebilir.

Şimdi, (4.14) ile ifade edilen amaç fonksiyonuna eş değer olacak şekilde bir optimizasyon problemi elde etmek için (6.1) ile tanımlanan amaç fonksiyonunu düzenlemeye çalışalım.

Parçalı fonksiyon (6.1)'de, ilk 5 bağlantı akış içermektedir. Sonraki akışlar, amaç fonksiyonunun doğası gereği maliyeti etkilemediği için her bir bağlantının maliyetini matematiksel olarak

$$c_a(f_a) \cong \frac{1}{f_a} \int_0^{f_a} \frac{1}{5-s} ds, \quad a=1,2,\dots,5 \quad (6.8)$$

ile gösterebiliriz.

Bağlantı maliyeti (6.8), $5-s=u$ ve $ds=-du$ değişken dönüşümü yapılarak

$$c_a(f_a) \cong \frac{1}{f_a} \left(-[\ln |5-s|]_0^{f_a} \right) = \frac{1}{f_a} \ln \frac{5}{5-f_a}, \quad a=1,2,\dots,5 \quad (6.9)$$

ile yeniden yazılabilir.

Ayrıca, bağlantı $a=6,\dots,10$ için

$$c_a(f_a) \cong \int_0^{f_a} \frac{1}{5-s} ds \cong 0, \quad a = 6, \dots, 10 \quad (6.10)$$

elde edilir.

Çünkü, bağlantı $a = 6, \dots, 10$ için herhangi bir maliyet söz konusu değildir. Bu nedenle amaç fonksiyonunun değerini etkilemeyeceğini tekrar vurgulayalım.

Böylece (6.10) kullanılarak toplam ağ maliyet fonksiyonunu

$$\begin{aligned} Z(h) &= \sum_{a=1}^5 \ln \frac{5}{5-f_a}, \quad a = 1, 2, \dots, 5 \\ &= \ln \prod_{a=1}^5 \frac{5}{5-f_a}, \quad a = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned} \quad (6.11)$$

ile elde edilir.

Bu durumda, akış (seyahat) talepleri (6.4), zincir akış denklemleri (6.6), bağlantı akış denklemleri (6.7) ve maliyet fonksiyonu (6.11) kullanılarak (4.14) ve (4.15) ile ifade edilen ağ trafik optimizasyon problem modeline karşılık gelen optimizasyon problemi matematiksel olarak

$$\begin{aligned} \min Z(\mathbf{h}) &\cong \sum_{a=1}^5 \int_0^{f_a} \frac{1}{5-s} ds \\ &= \ln \prod_{a=1}^5 \frac{5}{5-f_a}, \quad a = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$Kısıtlar : \begin{cases} \begin{cases} h_{11} + h_{21} = 3, \\ h_{12} + h_{22} = 6, \\ h_{13} = 2, \\ h_{14} + h_{24} = 5, \\ h_{11} \geq 0, h_{21} \geq 0, h_{12} \geq 0, h_{22} \geq 0, \\ h_{13} \geq 0, h_{14} \geq 0, h_{24} \geq 0. \end{cases} & \begin{cases} h_{11} + h_{12} + h_{14} = f_1, \\ h_{12} = f_2, \\ h_{21} + h_{22} = f_3, \\ h_{13} + h_{14} = f_4, \\ h_{21} + h_{24} = f_5. \end{cases} \end{cases} \quad (6.13)$$

ile verilir.

(6.12) ve (6.13) ile verilen doğrusal olmayan optimizasyon probleminde, amaç fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için bağlantı akışları $f_a \ll 5$ olmak zorundadır.

Bu nedenle problem yan taraf kısıtları içeren bir kapasiteli optimizasyon problemine dönüşmektedir. Bu tür problemler genel olarak bağlantı akışlarında meydana gelen hacmi veya trafiği temsil etmek ve ağda gerçekçi tahminler elde edebilmek için kullanılmaktadır.

Böylece, bağlantı akışlarının sınırlandırılması da problemin kısıtlarına eklenerek (6.12) ve (6.13) ile verilen ağ trafik atama optimizasyon problemi

$$\begin{aligned}
 \min Z(\mathbf{h}) &\cong \sum_{a=1}^5 \int_0^{f_a} \frac{1}{5-s} ds \\
 &= \ln \prod_{a=1}^5 \frac{5}{5-f_a}, \quad a=1,2,\dots,5
 \end{aligned}$$

$$\text{Kısıtlar : } \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} h_{11} + h_{21} = 3, \\ h_{12} + h_{22} = 6, \\ h_{13} = 2, \\ h_{14} + h_{24} = 5, \\ h_{11} \geq 0, h_{21} \geq 0, h_{12} \geq 0, h_{22} \geq 0, \\ h_{13} \geq 0, h_{14} \geq 0, h_{24} \geq 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{11} + h_{12} + h_{14} = f_1, \\ h_{12} = f_2, \\ h_{21} + h_{22} = f_3, \\ h_{13} + h_{14} = f_4, \\ h_{21} + h_{24} = f_5. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

$$f_1 \leq 4.999, f_2 \leq 4.999, f_3 \leq 4.999, f_4 \leq 4.999, f_5 \leq 4.999.$$

olarak yeniden yazılabilir.

Bu problemde, bağlantı akış değerleri $f_a, (a=1,2,\dots,5)$, 5'den küçük olması gerektiği ve optimizasyon problemlerinde kısıtlar, küçük ve büyük formunda gösterilemediği için bağlantı akışlarında kapasiteler 4.999 olarak alınmıştır.

$f_a, (a=1,2,\dots,5)$ amaç fonksiyonunda yerine yazıldıktan sonra denklem (6.14) ile verilen optimizasyon problemi Maple 2023 yazılımı üzerinde bir optimizasyon programı yazılarak çözülmüş ve elde edilen değerler Tablo 6.1'de verilmiştir.

Tablo 6.1'de verilen değerlerden birinci ürün M_1 zincirinde, zincir akış değerleri $h_{11} > 0$, $h_{21} = 0$ olduğu görülmektedir.

Burada kullanıcı, maliyet daha az olduğu için h_{11} rotasını tercih etmiştir. h_{21} zincir akış değeri sıfır olduğu için kullanıcının bu rotayı tercih etmemektedir.

Dolayısıyla bu rotada maliyet daha fazladır.

Tablo 6. 1: Optimizasyon Problemi için Kullanıcı Denge Deseni

Bağlantı Maliyeti $c_a(f_a)$	Bağlantı Akış Değerleri f_a	Zincir Akış Değerleri	Toplam Maliyet $C(h)$
$c_1 f_1 = 2.6368$	$f_1 = 4.6420$	$h_{11} = 3$	9.0587
$c_2 f_2 = 0.3082$	$f_2 = 1.3262$	$h_{12} = 1.3262$	
$c_3 f_3 = 2.7297$	$f_3 = 4.6738$	$h_{13} = 2$	
$c_4 f_4 = 0.6221$	$f_4 = 2.3159$	$h_{14} = 0.3159$	
$c_5 f_5 = 2.97620$	$f_5 = 4.6842$	$h_{21} = 0$	
		$h_{22} = 4.6738$	
		$h_{24} = 4.6842$	

Benzer şekilde Tablo 6.1’den aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$h_{11} > 0, h_{21} = 0 \text{ ve } C_{11} < C_{21},$$

ve

$$h_{21} > 0, h_{22} > 0 \text{ ve } C_{21} = C_{22}.$$

Ön tanımlı $f_a, a = 1, 2, \dots, 5$ fonksiyonları yerine yazılarak (6.14) ile verilen optimizasyon probleminin amaç fonksiyonu.

$$\min Z(h) \cong \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & f_1 \leq 0 \\ -\ln(5-f_1)+\ln(5) & f_1 < 5 \\ \text{undefined} & f_1 = 5 \\ 0 & 5 < f_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & f_2 \leq 0 \\ -\ln(5-f_2)+\ln(5) & f_2 < 5 \\ \text{undefined} & f_2 = 5 \\ 0 & 5 < f_2 \end{array} \right) \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & f_3 \leq 0 \\ -\ln(5-f_3)+\ln(5) & f_3 < 5 \\ \text{undefined} & f_3 = 5 \\ 0 & 5 < f_3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & f_4 \leq 0 \\ -\ln(5-f_4)+\ln(5) & f_4 < 5 \\ \text{undefined} & f_4 = 5 \\ 0 & 5 < f_4 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & f_5 \leq 0 \\ -\ln(5-f_5)+\ln(5) & f_5 < 5 \\ \text{undefined} & f_5 = 5 \\ 0 & 5 < f_5 \end{array} \right) \right) \quad (6.15)$$

olarak yeniden yazılabilir.

(6.15) ile verilen amaç fonksiyonu, (6.14) ile verilen optimizasyon probleminde yerine yazılarak bu optimizasyon problemi için bir Lagrange fonksiyonu

$$\begin{aligned}
L(y, \lambda, \eta) = & \left\{ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & h_{11} + h_{12} + h_{14} \leq 0 \\ -\ln(5 - h_{11} - h_{12} - h_{14}) + \ln(5) & h_{11} + h_{12} + h_{14} < 5 \\ \text{undefined} & h_{11} + h_{12} + h_{14} = 5 \\ 0 & 5 < h_{11} + h_{12} + h_{14} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h_{12} \leq 0 \\ -\ln(5 - h_{12}) + \ln(5) & h_{12} < 5 \\ \text{undefined} & h_{12} = 5 \\ 0 & 5 < h_{12} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & h_{21} + h_{22} \leq 0 \\ -\ln(5 - h_{21} - h_{22}) + \ln(5) & h_{21} + h_{22} < 5 \\ \text{undefined} & h_{21} + h_{22} = 5 \\ 0 & 5 < h_{21} + h_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h_{13} + h_{14} \leq 0 \\ -\ln(5 - h_{13} - h_{14}) + \ln(5) & h_{13} + h_{14} < 5 \\ \text{undefined} & h_{13} + h_{14} = 5 \\ 0 & 5 < h_{13} + h_{14} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & h_{21} + h_{24} \leq 0 \\ -\ln(5 - h_{21} - h_{24}) + \ln(5) & h_{21} + h_{24} < 5 \\ \text{undefined} & h_{21} + h_{24} = 5 \\ 0 & 5 < h_{21} + h_{24} \end{pmatrix} + \lambda_1(h_{11} + h_{21} - 3) - \lambda_2(h_{12} + h_{22} - 6) - \lambda_3(h_{13} - 2) \\ & - \lambda_4(h_{14} + h_{24} - 5) - \nu_1(h_{11} + h_{12} + h_{14} - 4.999) - \nu_2(h_{12} - 4.999) - \nu_3(h_{21} + h_{22} - 4.999) - \nu_4(h_{13} + h_{14} - 4.999) - \nu_5(h_{21} + h_{24} - 4.999) \end{aligned} \right\} \quad (6.18)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Daha sonra, Lagrange fonksiyonu (6.18)'in tüm değişkenlerine göre kısmi türevi alınarak denklem (5.1) ve denklem (5.2) ile tanımlanan, durağan noktalar koşullarına denk gelen denklem sistemi

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{11}}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{12}}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{13}}, \\
& \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{14}}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{21}}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{22}}, \\
& \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{23}}, \\
& \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \lambda_3}, \\
& \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \lambda_4}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_1}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_2}, \\
& \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_3}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_4}, \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_5}, \quad (6.19)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca, (6.19) ile verilen denklem sistemindeki tüm türevler sıfıra eşitlenerek ve (6.14) ile verilen problemin kısıtları da bu sisteme dahil edildikten sonra herhangi bir doğrusal olmayan çözücü yardımı ile çözümler elde edilebilir. Fakat, başlangıç noktalarını dikkatli bir şekilde seçmek gerekmektedir. Ayrıca, bilgisayarların işlemci hızları ve kapasiteleri düşük olduğundan böyle bir denklem sistemini çözmek veya güvenilir sonuç elde etmek pek kolay olmayabilir.

Bu nedenle, daha hızlı ve güvenilir bir çözüm elde edebilmek amacıyla optimizasyon probleminin (6.19) ile ifade edilen durağan noktalar koşullarını sağlayan ve aynı zamanda, (5.3) ile (5.4)'e karşılık gelen sınır ağı (6.20)'deki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_{11}}{\partial t} &= -\frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{11}}, & \frac{\partial h_{12}}{\partial t} &= -\frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{12}}, & \frac{\partial h_{13}}{\partial t} &= -\frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{13}}, \\
 \frac{\partial h_{14}}{\partial t} &= -\frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{14}}, & \frac{\partial h_{21}}{\partial t} &= -\frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{21}}, & \frac{\partial h_{22}}{\partial t} &= -\frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{22}}, \\
 \frac{\partial h_{23}}{\partial t} &= -\frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial h_{23}}, \\
 \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} &= -\frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \lambda_1}, & \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} &= \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \lambda_2}, & \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} &= \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \lambda_3}, \\
 \frac{\partial \lambda_4}{\partial t} &= \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \lambda_4}, & \frac{\partial \nu_1}{\partial t} &= \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_1}, & \frac{\partial \nu_2}{\partial t} &= \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_2}, \\
 \frac{\partial \nu_3}{\partial t} &= \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_3}, & \frac{\partial \nu_4}{\partial t} &= \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_4}, & \frac{\partial \nu_5}{\partial t} &= \frac{\partial L(h, \lambda, \nu)}{\partial \nu_5}.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Bu sistem 18 adet bilinmeyen ve 18 adet denklemden oluşmaktadır. Maple 2023 programı yardımıyla bu sınır ağının (6.21) ve (6.22) ile ifade edilen başlangıç koşullarına bağlı sayısal çözümü aşağıdaki gibi elde edilmiştir..

$$\begin{aligned}
 h_{11}(t) &= t \left(\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & h_{11} < -h_{12} - h_{14} \\ \text{undefined} & h_{11} = -h_{12} - h_{14} \\ 1 & h_{11} < 5 - h_{12} - h_{14} \\ -5 + h_{11} + h_{12} + h_{14} & h_{11} = 5 - h_{12} - h_{14} \\ \text{undefined} & h_{11} = 5 - h_{12} - h_{14} \\ 0 & 5 - h_{12} - h_{14} < h_{11} \end{array} \right) + \lambda 1 + \nu 1 \right) \right) \\
 h_{12}(t) &= t \left(\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & h_{12} < -h_{11} - h_{14} \\ \text{undefined} & h_{12} = -h_{11} - h_{14} \\ 1 & h_{12} < -h_{11} - h_{14} + 5 \\ -5 + h_{11} + h_{12} + h_{14} & h_{12} = -h_{11} - h_{14} + 5 \\ \text{undefined} & h_{12} = -h_{11} - h_{14} + 5 \\ 0 & -h_{11} - h_{14} + 5 < h_{12} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & h_{12} < 0 \\ \text{undefined} & h_{12} = 0 \\ 1 & h_{12} < 5 \\ -5 + h_{12} & h_{12} = 5 \\ \text{undefined} & h_{12} = 5 \\ 0 & 5 < h_{12} \end{array} \right) + \lambda 2 + \nu 1 + \nu 2 \right) \right),
 \end{aligned}$$

$$h_{13}(t) = t \left(\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & h_{13} < -h_{14} \\ \text{undefined} & h_{13} = -h_{14} \\ \frac{1}{h_{14} + h_{13} - 5} & h_{13} < 5 - h_{14} \\ \text{undefined} & h_{13} = 5 - h_{14} \\ 0 & 5 - h_{14} < h_{13} \end{array} \right) + \lambda 3 + \nu 4 \right),$$

$$h_{14}(t) = t \left(\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & h_{14} < -h_{11} - h_{12} \\ \text{undefined} & h_{14} = -h_{11} - h_{12} \\ \frac{1}{-5 + h_{11} + h_{12} + h_{14}} & h_{14} < -h_{11} - h_{12} + 5 \\ \text{undefined} & h_{14} = -h_{11} - h_{12} + 5 \\ 0 & -h_{11} - h_{12} + 5 < h_{14} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & h_{14} < -h_{13} \\ \text{undefined} & h_{14} = -h_{13} \\ \frac{1}{h_{14} + h_{13} - 5} & h_{14} < -h_{13} + 5 \\ \text{undefined} & h_{14} = -h_{13} + 5 \\ 0 & -h_{13} + 5 < h_{14} \end{array} \right) + \lambda 4 + \nu 1 + \nu 4 \right),$$

$$h_{21}(t) = t \left(\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & h_{21} < -h_{22} \\ \text{undefined} & h_{21} = -h_{22} \\ \frac{1}{-5 + h_{21} + h_{22}} & h_{21} < 5 - h_{22} \\ \text{undefined} & h_{21} = 5 - h_{22} \\ 0 & 5 - h_{22} < h_{21} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & h_{21} < -h_{24} \\ \text{undefined} & h_{21} = -h_{24} \\ \frac{1}{h_{21} + h_{24} - 5} & h_{21} < 5 - h_{24} \\ \text{undefined} & h_{21} = 5 - h_{24} \\ 0 & 5 - h_{24} < h_{21} \end{array} \right) + \lambda 1 + \nu 3 + \nu 5 \right),$$

$$h_{22}(t) = t \left(\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & h_{22} < -h_{21} \\ \text{undefined} & h_{22} = -h_{21} \\ \frac{1}{-5 + h_{21} + h_{22}} & h_{22} < -h_{21} + 5 \\ \text{undefined} & h_{22} = -h_{21} + 5 \\ 0 & -h_{21} + 5 < h_{22} \end{array} \right) + \lambda 2 + \nu 3 \right),$$

$$h_{24}(t) = t \left(\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & h_{24} < -h_{21} \\ \text{undefined} & h_{24} = -h_{21} \\ \frac{1}{h_{21} + h_{24} - 5} & h_{24} < -h_{21} + 5 \\ \text{undefined} & h_{24} = -h_{21} + 5 \\ 0 & -h_{21} + 5 < h_{24} \end{array} \right) + \lambda 4 + \nu 5 \right).$$

$$\begin{aligned}
\lambda 1(t) &= t(-h_{11} - h_{21} + 3.0), \\
\lambda 2(t) &= t(6.0 - h_{12} - h_{22}), \\
\lambda 3(t) &= t(2.0 - 1.0h_{13}), \\
\lambda 4(t) &= t(5.0 - h_{14} - h_{24}), \\
\nu 1(t) &= (-h_{11} - h_{12} - h_{14} + 4.999)t, \\
\nu 2(t) &= -h_{12}t + 4.999000000t, \\
\nu 3(t) &= (-h_{21} - h_{22} + 4.999)t, \\
\nu 4(t) &= (-h_{13} - h_{14} + 4.999)t, \\
\nu 5(t) &= (-h_{21} - h_{24} + 4.999)t,
\end{aligned}$$

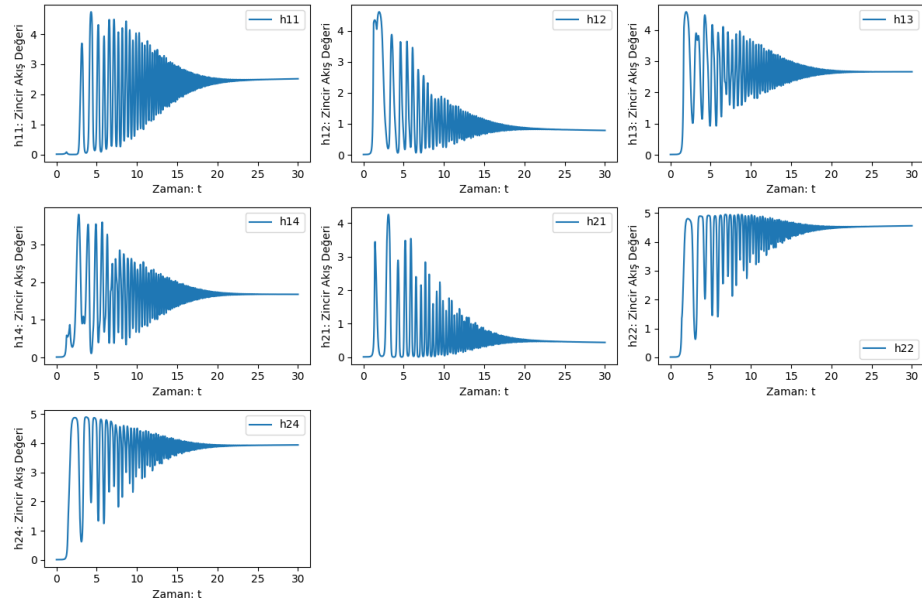
$$\begin{aligned}
y_{11}(0) &= 0, y_{12}(0) = 0, y_{13}(0) = 0, y_{14}(0) = 0, \\
y_{21}(0) &= 0, y_{22}(0) = 0, y_{24}(0) = 0,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

ve

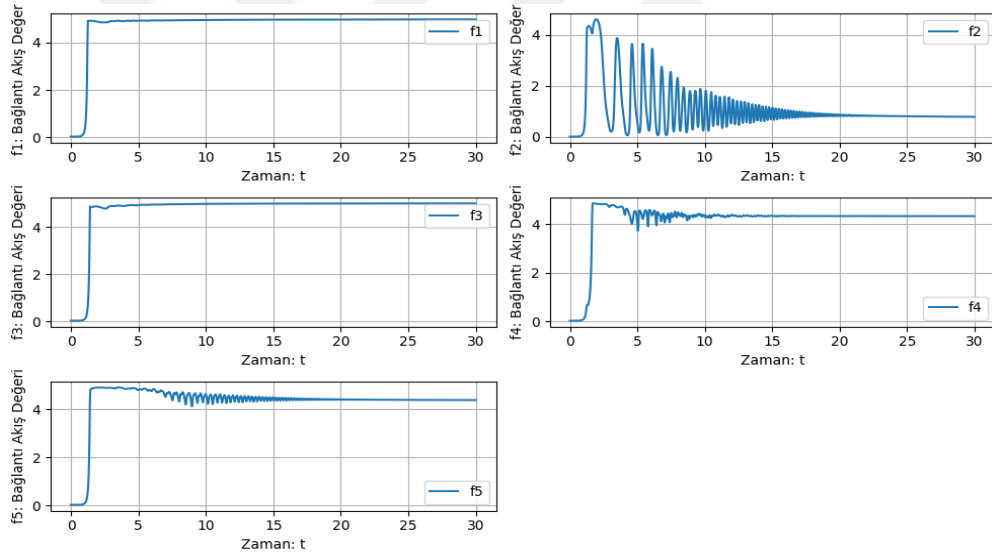
$$\begin{aligned}
\lambda_1(0) &= 0, \lambda_2(0) = 0, \lambda_3(0) = 0, \lambda_4(0) = 0, \eta_1(0) = 0, \\
\eta_2(0) &= 0, \eta_3(0) = 0, \eta_4(0) = 0, \eta_5(0) = 0,
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Daha sonra bu sistem, (6.21) ve (6.22) ile verilen başlangıç koşullarına bağlı olacak şekilde, HP, AMD Pro A10- 8700B R6, 1.8 Ghz bilgisayarda, 0 ile 30 zaman adımı aralığında, t zaman adım sayısı 1000 eş parçaya bölünerek çözülmüştür. Daha sonra, bu sinir ağı, denklem (6.21) ve denklem (6.22) başlangıç koşulları ile birlikte bir adi diferansiyel denklem çözücü ile nümerik olarak Python 3 programı üzerinde çözülmüştür.

Zincir ve bağlantı akışlarında zamanla meydana gelen değişim sırasıyla Şekil 6.3 ve Şekil 6.4'de verilmiştir. Tüm zincir ve bağlantı akışlarının zamanla değişim grafiği sırasıyla Şekil 6.5 ve Şekil 6.6'da verilmiştir.



Şekil 6. 3. Zincir akışlarının zamanla değişimi



Şekil 6. 4. Bağlantı akışlarının zamanla değişimi

0 ile 30 zaman aralığında sistemin denge çözümleri

$$h_{11} = 2.5171, h_{12} = 0.7852, h_{21} = 0.4416, h_{22} = 4.5551$$

$$h_{13} = 2.6597, h_{14} = 1.6797, h_{24} = 3.9390$$

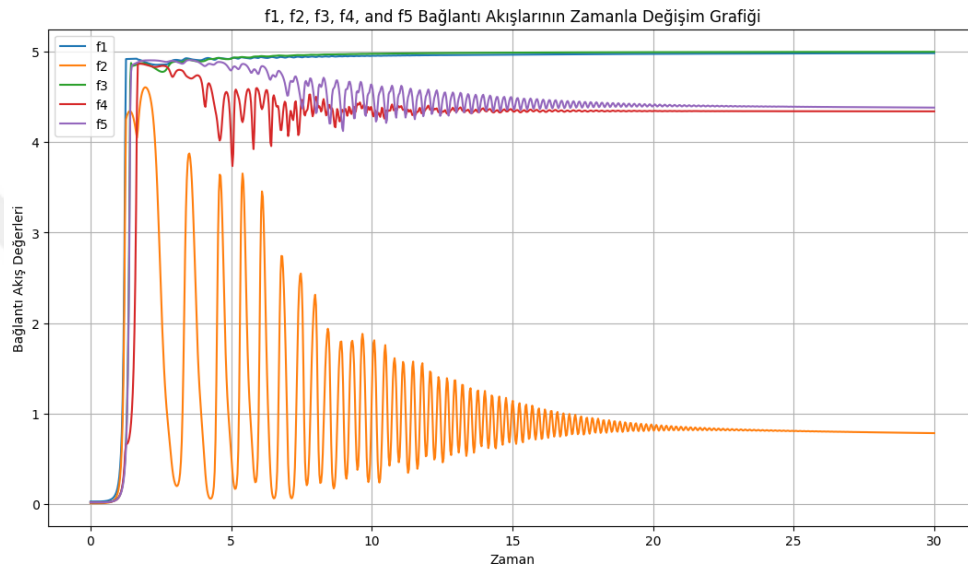
olarak elde edilmiştir.

h zincir akış değerleri, bağlantı akış denklemleri f 'de yerine yazıldığında bağlantı akış değerleri.

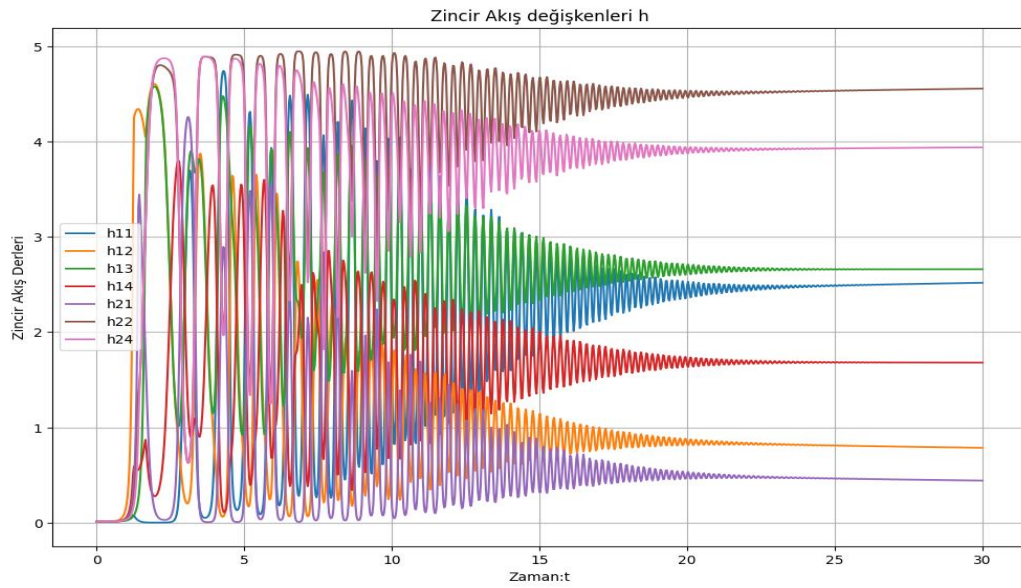
$$f_1 = 4.9820, f_2 = 0.7852, f_3 = 4.9967, f_4 = 4.3393, f_5 = 4.3806.$$

olarak elde edilmiştir

Ayrıca, optimizasyon probleminin amaç fonksiyonu $\min Z(h) = 17.2419$ olarak elde edilmiştir.



Şekil 6. 5. Tüm Bağlantı akışlarının zamanla değişimi



Şekil 6. 6. Tüm zincir akışlarının zamanla değişimi

Yukarıda sunulan grafiklerden de anlaşılacağı üzere, belirli bir süre sonrasında zincir akışları ve bağlantı akışları sabitlenir. Ayrıca, eğimde kalmadığı için sistem denge halini alır ve kararlılık sağlanır.



7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

7.1. Sonuçlar

Bu tezde taşıma ağlarına dair temel bilgiler sunulmuş ve ağlar için ekstremum koşulları açıklanmıştır. Kullanıcı denge deseni için statik ağ trafik atama probleminin optimizasyon modeli matematiksel olarak detaylı bir şekilde incelenmiştir. Yine, ağ trafik atama probleminin optimizasyonunda Lagrange fonksiyonu kullanılarak elde edilen optimalite yani, KKT koşulları ayrıca sunulmuştur.

Optimizasyon problemi için Lagrange fonksiyonu oluşturulmuş ve bu fonksiyonun değişkenlerinin gradyanı kullanılarak bir sinir ağı tasarlanmıştır. Ayrıca, bu sinir ağının yerel ve Lyapunov kararlılığı ayrıntılarıyla incelenmiştir. Oluşturulan sinir ağı, başlangıç koşullarına bağlı olan sinir denklemlerden oluşan bir dinamik sistem olarak açıklanmıştır. Bu dinamik sistem Maple 2023 üzerinde çözülmüş ve elde edilen çözüm, Python 3 programı üzerinde simüle edilmiştir.

Şekil 6.2 - Şekil 6.6 ile sunulan zincir akışları ve bağlantı akışlarına ait grafikler, verilen dinamik sistemde, zincir akışları ve bağlantı akışlarının probleminin amaç fonksiyonunu tanımsız yapmayacak şekilde akışını sürdürdüğü ve sonrasında zamanla denge noktasına ulaştığını göstermiştir.

Son olarak, başlangıçta statik olarak modellenmiş bir ağın, zamanla bağlantılar ve rotalarındaki trafik tahminlerinin mümkün olmadığı bir durum ele alınmıştır. Ancak, sunulan sinir ağı sayesinde, ağ dinamik bir sistem haline dönüştürülmüştür. Zamanla hangi rotalarda trafik miktarının arttığı ve hangi zaman adımında hangi bağlantılarda trafik oluştuğu tahmin edilebilir hale gelmiştir.

Bu gelişmeler, trafik ağındaki sürücüler için önemli avantajlar sağlamaktadır. Artık sürücüler, trafik yoğunluğunu göz önünde bulundurarak hangi zaman diliminde hangi rotalarda veya bağlantılarda trafik oluştuğunu önceden görebilmektedir. Bu bilgiler ışığında, sürücüler, varacakları noktaya minimum zaman ve minimum maliyetle ulaşabilmek için kendi rotalarını veya bağlantılarını seçebilme esnekliğine sahip olurlar.

Bu dinamik sistem, trafik akışını daha etkili bir şekilde yönetme ve sürücülere daha iyi bir seyahat deneyimi sunma potansiyeli taşımaktadır.

7.2. Öneriler

Bu tezde ele alınan atama problemi, kesirli ve parçalı bir fonksiyon olduğundan optimizasyon probleminde bağlantı akışlarını doğal olarak sınırlayan bir kapasiteye sahiptir. Bu da bağlantılarda, kapasiteyi aşan bir trafik hacmi olamayacağını göstermektedir. Ayrıca, problemde sistemin denge desenini elde etmek yerine her kullanıcının kendi denge desenini seçme olanağı olduğundan dolayı ele alınan problem işbirliksiz oyunların bir örneğini de temsil etmektedir. Bu tip problemleri algoritmik açıdan çözmek hesaplama karmaşıklığı nedeniyle çok daha zordur.

Yine elde edilen sinir ağı, yüksek hassasiyet gerektiren hesaplamalar içerdiğinden dolayı, problemin başlangıç koşulları ve kullanılan nümerik yöntemin dikkatli bir şekilde seçilmesini gerektirmektedir.

KAYNAKLAR

- Aashtiani, H. Z., Magnanti, T. L. (1981), Equilibria on a congested transportation network, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 2, 213–226.
- Beckmann, M., McGuire, C. B., Winsten, C. B., (1956), *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press.
- Bertsekas, D. P., (2014), *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*, New York: Academic Press.
- Branston, D., (1976), Link capacity functions: A review, *Transportation Research*, 10(4), 223-236.
- Chua, L. O., Yang, L., (1988), Cellular neural networks: Theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(10), 1257-1272.
- Daganzo, C. F., (1977a), On the traffic assignment problem with flow-dependent costs—I, *Transportation Research*, 11, 433–437.
- Daganzo, C. F., (1977b), On the traffic assignment problem with flow-dependent costs—II, *Transportation Research*, 11, 439–441.
- Dafermos, S. C., (1972), The traffic assignment problem for multiclass-user transportation networks, *Transportation Science*, 6(1), 73-87.
- Dafermos, S., (1980), Traffic equilibrium and variational inequalities, *Transportation Science*, 14(1), 42-54.
- Dalman, H., (2023), Capacitated Network Traffic Assignment using Lagrange Neural Networks, *European Journal of Technique (EJT)*, 13(2), 81-87.
- Hearn, D. W., Lawphongpanich, S., Nguyen, S., (1984), Convex programming formulations of the asymmetric traffic assignment problem, *Transportation Research*, 18B, 357–365.
- Smale, S. (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic press, New York, USA.
- Hopfield, J. J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the national academy of sciences*, 79(8), 2554-2558.
- Hopfield, J. J., (1984), Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81(10), 3088-3092.
- Hu, K., Xiong, W., Wang, Y., Shi, Z. L., Cheng, G., So, H. C., Wang, Z., (2023), Lagrange programming neural network for robust passive elliptic positioning, *Journal of the Franklin Institute*, 360(16), 12150-12169.

- Jing, Y., Fan, X., Li, J., So, H. C., Leung, C. S., (2023), Phase Retrieval via Lagrange Programming Neural Network, *Digital Signal Processing*, 104231.
- Jorgensen, N. O., (1963), Some aspects of the urban traffic assignment problem, Graduate Report, *Institute of Transportation and Traffic Engineering, University of California*, Berkeley, CA.
- Kosko, B. (1992). Neural networks and fuzzy systems: a dynamical approach to machine intelligence. *Prentice Hall*, London, UK.
- Lachhwani, K., (2020), Application of neural network models for mathematical programming problems: A state of art review, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 27, 171-182.
- Larsson, T., Patriksson, M., (1995), An augmented Lagrangean dual algorithm for link capacity side-constrained traffic assignment problems, *Transportation Research Part B: Methodological*, 29(6), 433-455.
- Patriksson, M., (1994), The Traffic Assignment Problem: Models and Methods, *Courier Dover Publications*, New York, USA.
- Potts, R. B., & Oliver, R. M., (1972), *Flows in transportation networks*. Academic press, New York, USA.
- Prager, W., (1954), Problems of traffic and transportation, *Proceedings, Symposium on Operations Research in Business and Industry*, Kansas City, MO, 106-113.
- Rodriguez-Vazquez, A., Dominguez-Castro, R., Rueda, A., Huertas, J. L., Sanchez-Sinencio, E., (1990), Nonlinear switched capacitor 'neural' networks for optimization problems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 37(3), 384-398.
- Ou, Y., Lin, H., (2021), A neurodynamic approach to zero-one quadratic programming, *Numerical Algorithms*, 1-24.
- Smith, M. J., (1979), The existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria, *Transportation Research Part B: Methodological*, 13(4), 295-304.
- Tomlin, J. A., (1966), Minimum-cost multicommodity network flows, *Operations Research*, 14, 45-51.
- Wang, H., Feng, R., Leung, C. S., Chan, H. P., Constantinides, A. G., (2022), A Lagrange programming neural network approach with an ℓ_0 -norm sparsity measurement for sparse recovery and its circuit realization, *Mathematics*, 10(24), 4801.
- Wardrop, J. G., (1952), Road paper: Some theoretical aspects of road traffic research, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1(3), 325-362.

- Yang, H., Yagar, S., (1994), Traffic assignment and traffic control in general freeway-arterial corridor systems, *Transportation Research Part B: Methodological*, 28(6), 463-486.
- Zhang, S., Constantinides, A. G., (1992), Lagrange programming neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 39(7), 441-452.

