

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞLARDA ZEDELENEBİLİRLİĞİN AYRIT
ARTIK YAKINLIK İLE ÖLÇÜMÜ



Esin YİĞİT

Temmuz, 2019

İZMİR

AĞLARDA ZEDELENEBİLİRLİĞİN AYRIT ARTIK YAKINLIK İLE ÖLÇÜMÜ

Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

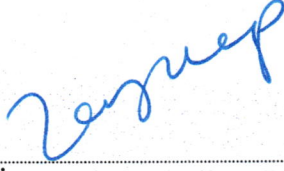
Esin YİĞİT

Temmuz, 2019

İZMİR

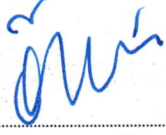
YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

ESİN YİĞİT, tarafından **DR. ÖĞR. ÜYESİ ZEYNEP NİHAN BERBERLER** yönetiminde hazırlanan “**AĞLARDA ZEDELENEBİLİRLİĞİN AYRIT ARTIK YAKINLIK İLE ÖLÇÜMÜ**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



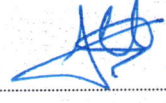
Dr.Öğr. Üyesi Zeynep Nihan BERBERLER

Yönetici



Dr.Öğr. Üyesi A.Özgü KINAY

Jüri Üyesi



Doç. Dr. Tufan TURACI

Jüri Üyesi



Prof.Dr. Kadriye ERTEKİN

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Zeynep Nihan BERBERLER'e, yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan başta Doç. Dr. Murat Erşen BERBERLER olmak üzere tüm bölüm hocalarıma, değerli arkadaşım Gülçin KAYA'ya, bu süreçte maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Esin YİĞİT



AĞLARDA ZEDELENEİİLİRLİĞİN AYRIT ARTIK YAKINLIK İLE ÖLÇÜMÜ

ÖZ

Ağ, merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Zedelenebilirlik, bir ağda, bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla iletişim kesilene kadar ağın gösterdiği dayanma gücüdür. Bir çizge modeli olarak ele alınan ağın zedelenebilirliğinin ölçülmesi için bağlantılılık sayısı ve ayrıt-bağlantılılık sayısı, toughness ve ayrıt-toughness, scattering sayısı ve ayrıt-scattering sayısı, integrity ve ayrıt-integrity, tenacity ve ayrıt-tenacity, rupture derecesi ve ayrıt-rupture derecesi gibi farklı parametreler tanımlanmıştır. Tepe artık yakınlık ve ayrıt artık yakınlık, ağ zedelenebilirlik ölçümü olarak tanımlanmış yeni parametrelerdir.

Bu tezde ilk olarak, ayrıt artık yakınlık parametresinin, literatürde bilinen diğer zedelenebilirlik ölçümlerinden daha hassas olarak ölçüm yaptığı belirtilerek, parametrenin gerekliliği ve avantajları açıklanmıştır. Daha sonra, özel çizge tiplerinin, yol ve tekerlek benzeri çizgelerin ve çizge işlemleri için ayrıt artık yakınlık değerleri hesaplanmıştır. Son olarak, bir çizgenin ayrıt artık yakınlık değerini bulmak için Floyd-Warshall algoritması temel alınarak polinom zamanlı bir algoritma önerilmiştir.

Anahtar kelimeler: Zedelenebilirlik, bağlantılılık, artık yakınlık, yol çizge, çevre çizge, tekerlek çizge, Floyd-Warshall algoritması

MEASURING THE VULNERABILITY IN NETWORKS VIA LINK RESIDUAL CLOSENESS

ABSTRACT

A network is composed of processing nodes and communication links between these nodes. In a network, vulnerability measures the resistance of the network to disruption of operation after the failure of certain stations or communication links. A variety of parameters have been proposed to measure the vulnerability of a network modeled by a graph including connectivity and edge-connectivity, toughness and edge-toughness, scattering number and edge-scattering number, integrity and edge-integrity, tenacity and edge-tenacity, rupture degree and edge-rupture degree. Vertex residual closeness and link residual closeness are novel parameters defined as network vulnerability measures.

In this thesis, firstly it is pointed out that link residual closeness is more sensitive as a measure of graph vulnerability than the other vulnerability measures existing in literature and the need and advantages of the parameter are stated. Then, link residual closeness of specific types of graphs, path and wheel related graphs and graph operations are evaluated. Finally, a polynomial time algorithm based on Floyd-Warshall algorithm is proposed to determine the link residual closeness of a graph.

Keywords: Vulnerability, connectivity, residual closeness, path, cycle, wheel, Floyd-Warshall algorithm

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZ.....	iv
ABSTRACT	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ	ix
BÖLÜM BİR – GİRİŞ	1
BÖLÜM İKİ – TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	3
BÖLÜM ÜÇ – AYRIT ARTIK YAKINLIK.....	5
3.1 Yakınlık, Ayrıt Artık Yakınlık Ve Diğer Zedelenebilirlik Ölçümleri	5
BÖLÜM DÖRT – ÖZEL ÇİZGE TİPLERİNİN AYRIT ARTIK YAKINLIK DEĞERLERİ	16
4.1 Yol Çizge.....	16
4.2 Çevre Çizge	17
4.3 Yıldız Çizge.....	18
4.4 Tekerlek Çizge	18
4.5 İki-Parçalı Tam Çizge	21
BÖLÜM BEŞ – YOL BENZERİ ÇİZGELERİN AYRIT ARTIK YAKINLIK DEĞERLERİ	23
5.1 Düzenli Tırtıl Çizge.....	23
BÖLÜM ALTI – TEKERLEK BENZERİ ÇİZGELERİN AYRIT ARTIK	

YAKINLIK DEĞERLERİ.....	32
6.1 Dişli Çizge.....	32
6.2 Dümen Çizge	38
6.3 Ayçiçeği Çizge	45
6.4 Arkadaşlık Çizgesi	56
BÖLÜM YEDİ – ÇİZGE İŞLEMLERİ VE AYRIT ARTIK YAKINLIK	60
7.1 Çizgelerde Birleşim	60
7.2 Çizgelerde Toplama.....	61
BÖLÜM SEKİZ – AYRIT ARTIK YAKINLIK ALGORİTMASI.....	66
8.1 Floyd-Warshall Algoritması	66
8.2 Ayrıt Artık Yakınlık Algoritması.....	67
BÖLÜM DOKUZ – SONUÇLAR.....	69
KAYNAKLAR.....	70
EKLER.....	72
EK 1: Tez Sonuçlarından Üretilen Çıktılar	72

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1 5 tepeli, 5 ayrıtlı G_1 çizgesi ve 5 tepeli, 5 ayrıtlı G_2 çizgesi	7
Şekil 3.2 P_6 yol çizgesi.....	9
Şekil 3.3 $P_6 \setminus \{e_1\}$ çizgesi.....	10
Şekil 3.4 $P_6 \setminus \{e_2\}$ çizgesi.....	11
Şekil 3.5 $P_6 \setminus \{e_3\}$ çizgesi.....	13
Şekil 3.6 $P_6 \setminus \{e_4\}$ çizgesi.....	13
Şekil 3.7 $P_6 \setminus \{e_5\}$ çizgesi.....	14
Şekil 5.1 $n = 5$ ve $m = 3$ için düzenli tırtıl çizge $T_{n,m}$	23
Şekil 6.1 $n = 6$ için 13 tepeli, 18 ayrıtlı dişli çizge G_n	32
Şekil 6.2 $n = 4$ ve $n = 5$ için dümen çizge H_n	39
Şekil 6.3 $n = 4$ için 9 tepeli, 16 ayrıtlı ayçiçeği çizge SF_n ve $n = 5$ için 11 tepeli, 20 ayrıtlı ayçiçeği çizge SF_n	46
Şekil 6.4 $n = 5$ için arkadaşlık çizgesi f_n	56

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 3.1 G_1 ve G_2 çizgelerinin ayırıt zedelenebilirlik değerleri.....	7
Tablo 4.1 $n < 5$ için değerler	21
Tablo 6.1 $n < 6$ için değerler	45
Tablo 6.2 $n < 6$ için değerler	56



BÖLÜM BİR

GİRİŞ

Sosyal ağlar, teknolojik ağlar (iletişim ağları, internet), bilgi ağları (World Wide Web, dil ağları), biyolojik ağlar (protein-protein etkileşim ağları, yapay sinir ağları, ekolojik ağlar), kimyasal ağlar karmaşık ağlardır. Karmaşık ağların analizi matematik, fizik, biyoloji, sosyal bilimler, bilişim ve diğer teorik ve uygulamalı bilimleri içeren disiplinler arası alanlarda güncel popüler bir konudur.

Ağ, merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Ağ, dıştan gelen etkiler altında kolayca bozulmayacak şekilde, bozulmaya uğraması durumunda da kolayca yeniden yapılandırılabilir şekilde tasarlanmalıdır. Ağın temelini oluşturan topoloji bir çizge ile modellendiğinde, çizgenin tepeler kümesi ağın merkezlerine, çizgenin ayrıtlar kümesi ağın bağlantı hatlarına karşılık gelir.

Zedelenebilirlik, ağ analizinde önemli bir kavramdır. Bir ağın zedelenebilirliği, ağın temelini oluşturan çizgenin sağlamlığının ölçümüdür. Bir ağın zedelenebilirliğinin belirlenmesi için çok sayıda ölçüm tanımlanmıştır. Zedelenebilirlik ölçümleri, ağ tasarımcılarının uygun topolojiyi seçmelerine yardımcı olma açısından gereklidir.

Tepe-bağlantılılık sayısı ve ayrıt-bağlantılılık sayısı tanımlanmış en eski zedelenebilirlik ölçümleridir. Bağlantılılık sayısı önemli bir zedelenebilirlik ölçümüdür ancak bu parametre ağdaki iletişimin kopması sonucu geriye kalan yapıyı dikkate almaz. Bağlantılılık sayısı dışında, toughness ve ayrıt-toughness, scattering sayısı ve ayrıt-scattering sayısı, integrity ve ayrıt-integrity, tenacity ve ayrıt-tenacity, rupture derecesi ve ayrıt-rupture derecesi gibi farklı zedelenebilirlik ölçümleri tanımlanmıştır. Bağlantılılık sayısının aksine bu ölçümler ağda meydana gelen zararın hem maliyetini hem de boyutunu ele alır. Algoritmik açıdan ele alındığında, bağlantılılık sayısı dışında bu ölçümler kullanılarak genel çizgelerin zedelenebilirlik değerlerinin hesaplanması genel olarak NP-zor sınıftır. Dolayısıyla, bu ölçümler karmaşık ağların analizi için etkin bir kullanım sağlamazlar.

Bu ölçümlerde, bir çizgenin zedelenebilirlik değeri geriye kalan çizge bağlantısız olacak şekilde çizgeden tepe veya ayırıt atılarak hesaplanır.

Tepe artık yakınlık (vertex residual closeness) ve ayırıt artık yakınlık (link residual closeness), Dangalchev (2006) tarafından tanımlanmış olan yeni zedelenebilirlik ölçümleridir. Artık yakınlık, çizgedeki herbir tepeyi veya herbir ayırıtı birbirinden bağımsız olarak ele alır. Çizgeden tek bir tepe veya tek bir ayırıt atılması sonucu, geriye kalan çizgenin durumunu bağlantısız olma koşulu olmaksızın inceler. Bir zedelenebilirlik ölçümü olarak artık yakınlık parametresinin gerekliliğini ve avantajlarını açıklamak amacıyla, diğer bilinen zedelenebilirlik ölçümleri ile karşılaştırmalar yapılmış ve artık yakınlık parametresinin diğer ölçümlerden çok daha hassas bir zedelenebilirlik ölçümü olduğu belirtilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, diğer bölümlerde kullanılacak olan genel tanım ve teoremler verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde ayırıt artık yakınlık tanımlanmış ve ayırıt artık yakınlık ile ilgili bilinen sonuçlar verilmiştir. Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümde, sırasıyla, özel çizge tiplerinin, yol ve tekerlek benzeri çizgelerin ayırıt artık yakınlık değerleri araştırılmıştır. Yedinci bölümde, çizge işlemleri için ayırıt artık yakınlık değerleri bulunmuştur. Son olarak, sekizinci bölümde, bir çizgenin ayırıt artık yakınlık değerini bulan polinom zamanlı bir algoritma önerilmiştir.

BÖLÜM İKİ

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, bu tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu tezde, bukle ve katlı ayırıt içermeyen basit yönsüz çizgeler üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 2.1: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin her tepe çifti arasında en az bir yol var ise, G çizgesine birleştirilmiş veya bağlantılı çizge denir.

Tanım 2.2: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G çizgesi, $V(G)$ tepeler kümesi ve $E(G)$ ayrıtlar kümesine sahip olan bir çizge olsun. $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olacak şekilde $V(H)$ tepeler kümesi ve $E(H)$ ayrıtlar kümesine sahip olan H çizgesine, G çizgesinin alt çizgesi denir ve $H \subset G$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinde, herhangi bir v tepesi herhangi bir ayrıt ile bitişik değilse, bu tepeye izole tepe denir.

Tanım 2.4: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Birleştirilmemiş bir çizgenin birleştirilmiş veya izole tepe(ler)den oluşan her bir alt çizgesine çizgenin bileşeni denir.

Tanım 2.5: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinde $v \in V(G)$ olmak üzere, v tepesinin açık komşuluğu $N_G(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$ şeklinde tanımlanır. $S \subseteq V(G)$ olmak üzere S kümesinin açık komşuluğu $N_G(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinde $e \in E(G)$ olmak üzere, $G \setminus \{e\}$ çizgesi, $V(G)$ tepeler kümesine ve $E(G) \setminus \{e\}$ ayrıtlar kümesine sahip olan bir alt çizgedir.

Tanım 2.7: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin herhangi bir v tepesine bitişik olan ayrıtların sayısına v tepesinin derecesi denir ve $deg(v)$ veya $deg_G(v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin tepe derecelerinin toplamı ayrıt sayısının iki katıdır; $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$.

Tanım 2.9: (Buckley ve Harary, 1990) Bir G çizgesinde, herhangi iki tepeyi birbirine bağlayan yollardan en az ayrıta sahip olan yola en kısa yol denir.

Tanım 2.10: (Buckley ve Harary, 1990) Bir G çizgesinde, herhangi iki tepe arasındaki en kısa yolda bulunan ayrıt sayısına iki tepe arasındaki uzaklık denir. $u, v \in V(G)$ olmak üzere, G çizgesinde u ve v tepeleri arasındaki uzaklık $d(u, v)$ veya $d_G(u, v)$ ile gösterilir. u ve v tepelerini birbirine bağlayan bir yol mevcut değil ise $d(u, v) = \infty$ olur.

BÖLÜM ÜÇ

AYRIT ARTIK YAKINLIK

Bu bölümde, ayrıt artık yakınlık parametresi tanımlanmış ve ayrıt artık yakınlık parametresinin diğer bilinen zedelenebilirlik parametrelerinden daha hassas bir ölçüm olduğu belirtilmiştir.

3.1 Yakınlık, Ayrıt Artık Yakınlık Ve Diğer Zedelenebilirlik Ölçümleri

Ağdaki bağlantı hatlarının bozulması durumunda ağın zedelenebilirliğini ölçmek için bağlantılılık sayısı (connectivity), toughness, scattering sayısı, integrity, tenacity ve rupture derecesi gibi ayrıt zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır.

Tanım 3.1: Birleştirilmiş bir G çizgesini birleştirilmemiş bir çizge ya da sadece izole tepelerden oluşan bir çizge haline getirmek için çizgeden atılması gereken en az ayrıt sayısına çizgenin ayrıt bağlantılılık sayısı (edge connectivity) denir ve $k'(G)$ ile gösterilir. Bir G çizgesinin bileşenlerinin sayısı $w(G)$ olmak üzere ayrıt bağlantılılık sayısı,

$$k'(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S| : w(G - S) \geq 2\} \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2: (Chen ve diğer., 1993) G bir çizge ve G çizgesinin ayrıtlarının herhangi bir alt kümesi S kesim küme olsun. $G - S$ çizgesinin bileşenlerinin sayısı $w(G - S)$ olmak üzere, G çizgesinin ayrıt toughness değeri,

$$t'(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{w(G - S) - 1} : S \subset E(G), w(G - S) \geq 2 \right\} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır.

Bir çizgenin ayrıt toughness değerinin hesaplanması NP-zor problemdir (Bauer ve diğer., 1990).

Tanım 3.3: (Aslan, 2014) G bir çizge ve G çizgesinin ayrıtlarının herhangi bir alt kümesi S kesim küme olsun. $G - S$ çizgesinin bileşenlerinin sayısı $w(G - S)$ olmak üzere, G çizgesinin ayrıt scattering sayısı,

$$s'(G) = \max \{w(G - S) - |S| : S \subseteq E(G), w(G - S) > 1\} \quad (3.3)$$

olarak tanımlanır.

Bir çizgenin ayrıt scattering sayısının hesaplanması NP-tam problemdir (Zhang ve diğer., 2002).

Tanım 3.4: (Bagga ve diğer., 1994) G bir çizge ve G çizgesinin ayrıtlarının herhangi bir kümesi S olsun. $G - S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere, G çizgesinin ayrıt integrity değeri,

$$I'(G) = \min \{|S| + m(G - S) : S \subset E(G)\} \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır.

Bir çizgenin ayrıt integrity değerinin hesaplanması NP-zor problemdir (Moazzami, 2011).

Tanım 3.5: (Piazza ve diğer., 1995) G bir çizge ve G çizgesinin ayrıtlarının herhangi bir kümesi S olsun. $G - S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere, G çizgesinin ayrıt tenacity değeri,

$$T'(G) = \min \left\{ \frac{|S| + m(G - S)}{w(G - S)} : S \subseteq E(G), w(G - S) > 1 \right\} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır.

Bir çizgenin ayrıt tenacity değerinin hesaplanması NP-zor problemidir (Mann, 1993).

Tanım 3.6: (Li ve diğer., 2017) G birleştirilmiş bir çizge ve G çizgesinin ayrıtlarının herhangi bir kümesi S olsun. $G - S$ çizgesinin bileşen sayısı $w(G - S)$ ve $G - S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere, tam çizge olmayan bir G çizgesinin ayrıt rupture derecesi,

$$r'(G) = \max\{w(G - S) - |S| - m(G - S) : S \subseteq E(G), w(G - S) > 1\} \quad (3.6)$$

olarak tanımlanır.

Bir çizgenin ayrıt rupture değerinin hesaplanması NP-zor problemidir (Li ve diğer., 2011).



Şekil 3.1 5 tepeli, 5 ayrıtlı G_1 çizgesi ve 5 tepeli, 5 ayrıtlı G_2 çizgesi

Şekil 3.1'deki G_1 ve G_2 çizgeleri tepe ve ayrıt sayıları aynı olan iki farklı çizgedir. Bu çizgelerin zedelenebilirlik değerleri ayrıt bağlantılılık sayısı, ayrıt toughness, ayrıt scattering sayısı, ayrıt integrity, ayrıt tenacity ve ayrıt rupture derecesi parametreleri kullanılarak hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1 G_1 ve G_2 çizgelerinin ayrıt zedelenebilirlik değerleri

	$k'(G)$	$t'(G)$	$s'(G)$	$I'(G)$	$T'(G)$	$r'(G)$
G_1	1	1	1	5	1,2	-1
G_2	1	1	1	5	1,2	-1

Tablo 3.1’de görüldüğü gibi, tepe ve ayrıt sayıları aynı olan birbirinden farklı G_1 ve G_2 çizgelerinin ayrıt zedelenebilirlik ölçümleri tüm parametreler için aynı sonuçları vermiştir. Bu durumda, ağ topolojisi olarak ele alınan bu iki çizgenin sağlamlığını ölçmek ve bu iki çizgeyi birbirinden ayırt etmek için çok daha hassas bir ölçüme ihtiyaç vardır.

Ayrıt artık yakınlık, Dangalchev (2006) tarafından tanımlanmış olan yeni bir çizge ayrıt zedelenebilirlik ölçümüdür. Ayrıt artık yakınlık, çizgedeki her bir ayrıtı çizgenin diğer ayrıtlarından bağımsız olarak ele alır ve çizgeden tek bir ayrıt atılması sonucu geriye kalan çizgenin durumunu birleştirilmemiş olma koşulu olmadan inceler. Böylece, çizgede iletişimin hızlı ve etkin olmasını sağlayan ayrıt veya ayrıtları belirler. Bir çizgenin ayrıt artık yakınlık değerini veren ayrıt veya ayrıtlar, çizgede hızlı veri dağılımını sağlar.

Tanım 3.7: (Dangalchev, 2006) G bir çizge ve $u \in V(G)$ olsun. u tepesinin G çizgesindeki yakınlık (closeness) değeri,

$$C(u) = \sum_{\substack{v \neq u \\ v \in V(G)}} \frac{1}{2^{d(u,v)}} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.8: (Dangalchev, 2006) Bir G çizgesinin yakınlık değeri,

$$C(G) = \sum_{u \in V(G)} C(u) \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.9: (Dangalchev, 2006) G bir çizge ve $e \in E(G)$ olsun. e ayrıtı, G çizgesinden

atılırsa, geriye kalan alt çizgenin yakınlık (closeness) değeri,

$$C_e = \sum_{u \in V(G \setminus \{e\})} C_e(u) = \sum_{u \in V(G \setminus \{e\})} \sum_{\substack{v \neq u \\ v \in V(G \setminus \{e\})}} \frac{1}{2^{d_e(u,v)}} \quad (3.9)$$

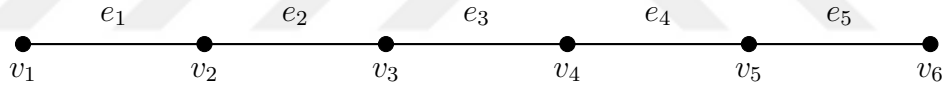
olarak tanımlanır.

Tanım 3.10: (Dangalchev, 2006) G çizgesinin ayırt artık yakınlık (link residual closeness) değeri,

$$R(G) = \min_{e \in E(G)} \{C_e\} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1: P_6 yol çizgesinin yakınlık ve ayırt artık yakınlık değerlerinin hesaplanması:



Şekil 3.2 P_6 yol çizgesi

P_6 yol çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için $\forall v_i \in V(P_6)$ ($1 \leq i \leq 6$) tepesinin P_6 çizgesindeki yakınlık değeri bulunur:

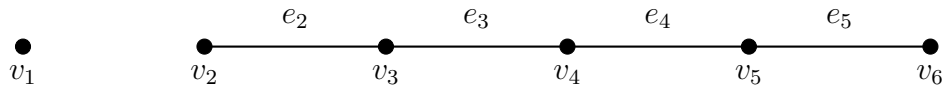
- v_1 tepesi, P_6 çizgesinde v_2 tepesine komşu, v_3 tepesine 2 uzaklıkta, v_4 tepesine 3 uzaklıkta, v_5 tepesine 4 uzaklıkta, v_6 tepesine 5 uzaklıktadır. O halde, v_1 tepesinin yakınlık değeri, $C(v_1) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = 0,96875$ elde edilir.
- v_2 tepesi, P_6 çizgesinde v_1 ve v_3 tepelerine komşu, v_4 tepesine 2 uzaklıkta, v_5 tepesine 3 uzaklıkta ve v_6 tepesine 4 uzaklıktadır. O halde, v_2 tepesinin yakınlık değeri, $C(v_2) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 1,4375$ elde edilir.

- v_3 tepesi, P_6 çizgesinde v_2 ve v_4 tepelerine komşu, v_1 ve v_5 tepelerine 2 uzaklıkta ve v_6 tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, v_3 tepesinin yakınlık değeri, $C(v_3) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1,625$ elde edilir.
- v_4 tepesinin P_6 çizgesindeki yakınlık değeri v_3 tepesine benzer şekilde hesaplanır. O halde, v_4 tepesinin yakınlık değeri, $C(v_4) = 1,625$ elde edilir.
- v_5 tepesinin P_6 çizgesindeki yakınlık değeri v_2 tepesine benzer şekilde hesaplanır. O halde, v_5 tepesinin yakınlık değeri, $C(v_5) = 1,4375$ elde edilir.
- v_6 tepesinin P_6 çizgesindeki yakınlık değeri v_1 tepesine benzer şekilde hesaplanır. O halde, v_6 tepesinin yakınlık değeri, $C(v_6) = 0,96875$ elde edilir.

O halde, P_6 çizgesinin yakınlık değeri, $C(P_6) = \sum_{i=1}^6 C(v_i) = 8,0625$ elde edilir.

P_6 yol çizgesinin ayrıtı artık yakınlık değerinin hesaplanması için beş durum söz konusudur:

Durum 1: e_1 ayrıtı P_6 çizgesinden atılırsa geriye $P_6 \setminus \{e_1\}$ alt çizgesi kalır (Şekil 3.3).



Şekil 3.3 $P_6 \setminus \{e_1\}$ çizgesi

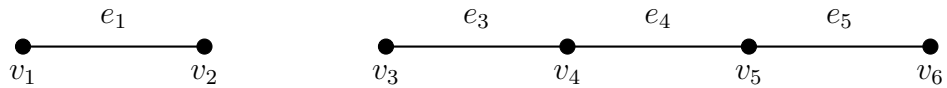
$P_6 \setminus \{e_1\}$ çizgesinde,

- v_1 tepesi izole tepedir ve yakınlık değeri, $C_{e_1}(v_1) = \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} = 0$ elde edilir.

- v_2 tepesi, v_3 tepesine komşu, v_4 tepesine 2 uzaklıkta, v_5 tepesine 3 uzaklıkta, v_6 tepesine 4 uzaklıktadır ve v_1 tepesi ile bağlantısızdır. O halde, v_2 tepesinin yakınlık değeri, $C_{e_1}(v_2) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^\infty} = 0,9375$ elde edilir.
- v_3 tepesi, v_2 ve v_4 tepelerine komşu, v_5 tepesine 2 uzaklıkta, v_6 tepesine 3 uzaklıktadır ve v_1 tepesi ile bağlantısızdır. O halde, v_3 tepesinin yakınlık değeri, $C_{e_1}(v_3) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^\infty} = 1,375$ elde edilir.
- v_4 tepesi, v_3 ve v_5 tepelerine komşu, v_2 ve v_6 tepelerine 2 uzaklıktadır ve v_1 tepesi ile bağlantısızdır. O halde, v_4 tepesinin yakınlık değeri, $C_{e_1}(v_4) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^\infty} = 1,5$ elde edilir.
- v_5 tepesinin yakınlık değeri, v_3 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_1}(v_5) = 1,375$ elde edilir.
- v_6 tepesinin yakınlık değeri, v_2 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_1}(v_6) = 0,9375$ elde edilir.

O halde, e_1 ayrıtı P_6 çizgesinden atılırsa, geriye kalan $P_6 \setminus \{e_1\}$ çizgesinin yakınlık değeri, $C_{e_1} = \sum_i C_{e_1}(v_i) = 6,125$ elde edilir.

Durum 2: e_2 ayrıtı P_6 çizgesinden atılırsa geriye $P_6 \setminus \{e_2\}$ alt çizgesi kalır (Şekil 3.4).



Şekil 3.4 $P_6 \setminus \{e_2\}$ çizgesi

$P_6 \setminus \{e_2\}$ çizgesinde,

- v_1 tepesi, v_2 tepesine komşu, v_3, v_4, v_5 ve v_6 tepeleri ile bağlantısızdır. O halde, v_1 tepesinin yakınlık değeri, $C_{e_2}(v_1) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} = 0,5$ elde edilir.
- v_2 tepesinin yakınlık değeri, v_1 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_2}(v_2) = 0,5$ elde edilir.
- v_3 tepesi, v_4 tepesine komşu, v_5 tepesine 2 uzaklıkta, v_6 tepesine 3 uzaklıktadır, v_1 ve v_2 tepeleri ile bağlantısızdır. O halde, v_3 tepesinin yakınlık değeri, $C_{e_2}(v_3) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} = 0,875$ elde edilir.
- v_4 tepesi, v_3 ve v_5 tepelerine komşu, v_6 tepesine 2 uzaklıkta, v_1 ve v_2 tepeleri ile bağlantısızdır. O halde, v_4 tepesinin yakınlık değeri, $C_{e_2}(v_4) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} = 1,25$ elde edilir.
- v_5 tepesinin yakınlık değeri, v_4 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_2}(v_5) = 1,25$ elde edilir.
- v_6 tepesinin yakınlık değeri, v_3 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_2}(v_6) = 0,875$ elde edilir.

O halde, e_2 ayrıtı P_6 çizgesinden atılırsa, geriye kalan $P_6 \setminus \{e_2\}$ çizgesinin yakınlık değeri, $C_{e_2} = \sum_i C_{e_2}(v_i) = 5,25$ elde edilir.

Durum 3: e_3 ayrıtı P_6 çizgesinden atılırsa, geriye $P_6 \setminus \{e_3\}$ alt çizgesi kalır (Şekil 3.5).

$P_6 \setminus \{e_3\}$ çizgesinde,

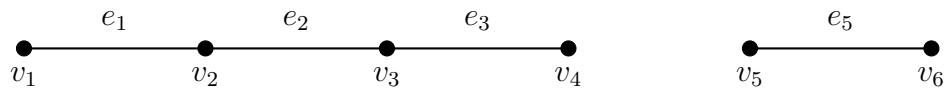


Şekil 3.5 $P_6 \setminus \{e_3\}$ çizgesi

- v_1 tepesi, v_2 tepesine komşu, v_3 tepesine 2 uzaklıkta, v_4 , v_5 ve v_6 tepeleri ile bağlantısızdır. O halde, v_1 tepesinin yakınlık değeri, $C_{e_3}(v_1) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} = 0,75$ elde edilir.
- v_2 tepesi, v_1 ve v_3 tepelerine komşu, v_4 , v_5 ve v_6 tepeleri ile bağlantısızdır. O halde, v_2 tepesinin yakınlık değeri, $C_{e_3}(v_2) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} = 1$ elde edilir.
- v_3 , v_4 ve v_6 tepelerinin yakınlık değerleri, v_1 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_3}(v_3) = C_{e_3}(v_4) = C_{e_3}(v_6) = 0,75$ elde edilir.
- v_5 tepesinin yakınlık değeri, v_2 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_3}(v_5) = 1$ elde edilir.

O halde, e_3 ayrıtı P_6 çizgesinden atılırsa, geriye kalan $P_6 \setminus \{e_3\}$ çizgesinin yakınlık değeri, $C_{e_3} = \sum_i C_{e_3}(v_i) = 5$ elde edilir.

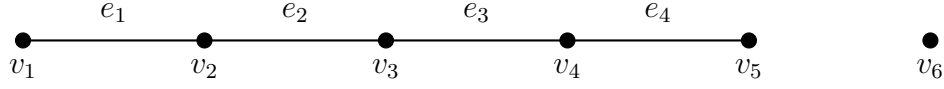
Durum 4: e_4 ayrıtı P_6 çizgesinden atılırsa, geriye $P_6 \setminus \{e_4\}$ alt çizgesi kalır (Şekil 3.6).



Şekil 3.6 $P_6 \setminus \{e_4\}$ çizgesi

$P_6 \setminus \{e_4\}$ çizgesinin yakınlık değeri, Durum 2'ye benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_4} = 5,25$ elde edilir.

Durum 5: e_5 ayrıtı P_6 çizgesinden atılırsa, geriye $P_6 \setminus \{e_5\}$ alt çizgesi kalır (Şekil 3.7).



Şekil 3.7 $P_6 \setminus \{e_5\}$ çizgesi

$P_6 \setminus \{e_5\}$ çizgesinin yakınlık değeri, Durum 1'e benzer şekilde hesaplanır ve $C_{e_5} = 6,125$ elde edilir.

Durum 1, 2, 3, 4 ve 5'ten P_6 çizgesinin ayrıt artık yakınlık değeri, $R(P_6) = \min_i \{C_{e_i}\} = 5$ elde edilir.

Açıklama 3.1: Şekil 3.1'deki tepe ve ayrıt sayıları aynı olan birbirinden farklı G_1 ve G_2 çizgelerinin ayrıt artık yakınlık değerleri, sırasıyla, $R(G_1) = 5$ ve $R(G_2) = 4$ olarak ölçülmüştür.

Yakınlık ve ayrıt artık yakınlık ile ilgili bilinen temel sonuçlar izleyen teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.1: (Aytaç ve Odabaş Berberler, 2017; Aytaç ve Odabaş, 2011; Dangalchev, 2006; Odabaş ve Aytaç, 2013)

- (a) K_n , n tepeli tam çizge olmak üzere, $C(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.
- (b) $K_{1,n-1}$, n tepeli yıldız çizge olmak üzere, $C(K_{1,n-1}) = \frac{(n-1)(n+2)}{4}$.
- (c) P_n , n tepeli yol çizge olmak üzere, $C(P_n) = 2n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}}$.
- (d) C_n , n tepeli çevre çizge olmak üzere, $C(C_n) = \begin{cases} n(2 - \frac{3}{2^{\frac{n}{2}}}), & n \text{ çift ise;} \\ 2n(1 - \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}), & n \text{ tek ise.} \end{cases}$
- (e) F_n , n tepeli yelpaze çizge olmak üzere, $C(F_n) = \frac{n^2+3n-6}{4}$.

(f) $T_{n,m}$, $n(m+1)$ tepeli düzenli tırtıl çizge olmak üzere,

$$C(T_{n,m}) = \frac{(m+2)^2 C(P_n) + mn(m+3)}{4}.$$

Teorem 3.2: (Aytaç ve Odabaş Berberler, 2018) $G_1, G_2, \dots, G_n$ ayrık çizgeler olsun.
 $G = \cup_{i=1}^n G_i$ ise, $C(G) = \sum_{i=1}^n C(G_i)$.

Teorem 3.3: (Dangalchev, 2006) G bir çizge ve $H \subset G$ olmak üzere, $R(H) < R(G)$.

Teorem 3.4: (Dangalchev, 2006) K_n , n ($n > 2$) tepeli tam çizge olmak üzere,

$$R(K_n) = \frac{n(n-1)-1}{2}.$$

BÖLÜM DÖRT

ÖZEL ÇİZGE TİPLERİNİN AYRIT ARTIK YAKINLIK DEĞERLERİ

Bu bölümde, özel çizge tiplerinden yol, çevre, yıldız, tekerlek ve iki-parçalı tam çizge için ayrıt artık yakınlık değerleri hesaplanmıştır.

4.1 Yol Çizge

Teorem 4.1: P_n , n tepeli yol çizge olmak üzere,

$$R(P_n) = \begin{cases} 2n - 8 + \frac{8}{2^{\frac{n}{2}}}, & n \text{ çift ise;} \\ 2n - 8 + \frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

İspat: e_k ($1 \leq k \leq n-1$) ayrıtı, P_n çizgesinin herhangi bir ayrıtı olsun. e_k ayrıtı P_n çizgesinden atılırsa, geriye iki yol çizgenin birleşiminden oluşan $P_i \cup P_j$ ($j = n-i$) alt çizgesi kalır. $P_i \cup P_j$ çizgesinin yakınlık değeri, Teorem 3.2'den, $C_{e_k} = C(P_i \cup P_j) = C(P_i) + C(P_j) + C(P_i) + C(P_{n-i})$ olur. Theorem 3.1(c)'den, $C_{e_k} = \left(2i - 4 + \frac{1}{2^{i-2}}\right) + \left(2(n-i) - 4 + \frac{1}{2^{n-i-2}}\right) = 2n - 8 + \frac{1}{2^{i-2}} + \frac{1}{2^{n-i-2}}$ elde edilir.

Ayrıt artık yakınlık tanımından,

$$R(P_n) = \min_k \{C_{e_k}\} = \min_i \left\{2n - 8 + \frac{1}{2^{i-2}} + \frac{1}{2^{n-i-2}}\right\} \text{ olur. } i \text{ değerine bağlı}$$

$$f(i) = 2n - 8 + \frac{1}{2^{i-2}} + \frac{1}{2^{n-i-2}} \text{ fonksiyonunun minimum değerini hangi noktada}$$

aldığı bulunur: $f(i) = 2n - 8 + \frac{1}{2^{i-2}} + \frac{1}{2^{n-i-2}} \Rightarrow f'(i) = \ln 2 \left(\frac{1}{2^{n-i-2}} - \frac{1}{2^{i-2}}\right)$.

$$f'(i) = \ln 2 \left(\frac{1}{2^{n-i-2}} - \frac{1}{2^{i-2}}\right) = 0 \Rightarrow i = \frac{n}{2} \text{ elde edilir.}$$

Bulunan köke ikinci türev testi uygulanır. $f''(i) > 0$ eşitsizliğini sağlayan i değeri için $f(i)$ fonksiyonu minimum değerini alır. $f'(i) = \ln 2 \left(\frac{1}{2^{n-i-2}} - \frac{1}{2^{i-2}}\right) \Rightarrow$
 $f''(i) = (\ln 2)^2 \left(\frac{1}{2^{n-i-2}} + \frac{1}{2^{i-2}}\right)$. $i = \frac{n}{2}$ için $f''(i) > 0$ olduğundan, $f(i)$ fonksiyonu $i = \frac{n}{2}$ noktasında minimum değerini alır.

P_n çizgesinin tepe sayısına bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: n çift ise,

$$f(i) = f\left(\frac{n}{2}\right) = 2n - 8 + \frac{8}{2^{\frac{n}{2}}} \quad (4.1)$$

Durum 2: n tek ise, n bir tamsayı olduğundan, iki alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: $i = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ise,

$$f(i) = f\left(\frac{n+1}{2}\right) = 2n - 8 + \frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}} \quad (4.2)$$

Alt Durum 2: $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ise,

$$f(i) = f\left(\frac{n-1}{2}\right) = 2n - 8 + \frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}} \quad (4.3)$$

olur. (4.2) ve (4.3) değerlerinden,

$$f(i) = 2n - 8 + \frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}} \quad (4.4)$$

elde edilir.

$$(4.1) \text{ ve } (4.4) \text{ değerlerinden, } R(P_n) = \begin{cases} 2n - 8 + \frac{8}{2^{\frac{n}{2}}}, & n \text{ çift ise;} \\ 2n - 8 + \frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

olur ve ispat tamamlanır.

4.2 Çevre Çizge

Teorem 4.2: C_n , n tepeli çevre çizge olmak üzere, $R(C_n) = 2n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}}$.

İspat: C_n çizgesinden herhangi bir e_i ($1 \leq i \leq n$) ayrıtı atılırsa, geriye n tepeli yol çizge kalır. O halde, geriye kalan alt çizgenin yakınlık değeri, $C_{e_i} = C(P_n)$ olur. Teorem 3.1(c)'den, $C_{e_i} = 2n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}}$ olur. Ayrıt artık yakınlık tanımından,

$R(C_n) = \min_i \{C_{e_i}\} = \min \left\{ 2n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}} \right\} = 2n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.3 Yıldız Çizge

Teorem 4.3: $K_{1,n-1}$, n tepeli yıldız çizge olmak üzere, $R(K_{1,n-1}) = \frac{(n-2)(n+1)}{4}$.

İspat: $K_{1,n-1}$ çizgesinden herhangi bir e_i ($1 \leq i \leq n-1$) ayrıtı atılırsa, geriye $K_1 \cup K_{1,n-2}$ birleştirilmemiş alt çizgesi kalır. $K_1 \cup K_{1,n-2}$ çizgesinin yakınlık değeri, Teorem 3.2'den, $C_{e_i} = C(K_1 \cup K_{1,n-2}) = C(K_1) + C(K_{1,n-2})$ olur. Teorem 3.1(a) ve 3.1(b)'den, $C_{e_i} = \frac{(n-2)(n+1)}{4}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.4 Tekerlek Çizge

Teorem 4.4: W_n , $n+1$ tepeli tekerlek çizge olmak üzere, $R(W_n) = \frac{n^2+4n+3}{4}$.

İspat: W_n çizgesinden atılacak ayrıta bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: e_i ($1 \leq i \leq n$) ayrıtı, W_n çizgesinin dış çevresine ait herhangi bir ayrıt olsun. e_i ayrıtı, W_n çizgesinden atılırsa, geriye $n+1$ tepeli F_{n+1} yelpaze çizgesi kalır. O halde, $W_n \setminus \{e_i\}$ alt çizgesinin yakınlık değeri, $C_{e_i} = C(F_{n+1})$ olur. Teorem 3.1(e)'den, $C_{e_i} = \frac{n^2+5n-2}{4}$ elde edilir.

Durum 2: f_i ($1 \leq i \leq n$) ayrıtı, W_n çizgesinde, c merkez tepesine bitişik olan herhangi bir ayrıt olsun. f_i ayrıtı, W_n çizgesinden atılırsa, geriye $W_n \setminus \{f_i\}$ alt çizgesi kalır. $W_n \setminus \{f_i\}$ alt çizgesinin yakınlık değerinin hesaplanması için beş alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $W_n \setminus \{f_i\}$ çizgesinde, dış çevrenin $n-1$ tepesine komşu ve diğer tepesine 2 uzaklıktadır. O halde, c merkez tepesinin $W_n \setminus \{f_i\}$

çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{W_n \setminus \{f_i\}}(c) = (n-1)\frac{1}{2^1} + (1)\frac{1}{2^2} = \frac{2n-1}{4} \quad (4.5)$$

olur.

Alt Durum 2: x tepesi, f_i ayrıtının merkez tepeden farklı olan uç tepesi olsun. x tepesi $W_n \setminus \{f_i\}$ alt çizgesinde dış çevrenin 2 tepesine komşu, bu tepelere komşu olan dış çevrenin 2 tepesine ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta ve dış çevrenin geriye kalan $n-5$ tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, x tepesinin $W_n \setminus \{f_i\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{W_n \setminus \{f_i\}}(x) = (2)\frac{1}{2^1} + (3)\frac{1}{2^2} + (n-5)\frac{1}{2^3} = \frac{n+9}{8} \quad (4.6)$$

olur.

Alt Durum 3: y tepesi, x tepesine dış çevrede komşu olan 2 tepeden herhangi biri olsun. y tepesi, $W_n \setminus \{f_i\}$ alt çizgesinde, x tepesi dahil olmak üzere dış çevrenin 2 tepesine ve c merkez tepesine komşu, dış çevrenin geriye kalan $n-3$ tepesine 2 uzaklıktadır. O halde, y tepesinin $W_n \setminus \{f_i\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{W_n \setminus \{f_i\}}(y) = (3)\frac{1}{2^1} + (n-3)\frac{1}{2^2} = \frac{n+3}{4} \quad (4.7)$$

olur.

Alt Durum 4: z tepesi, $W_n \setminus \{f_i\}$ alt çizgesinde x tepesine 2 uzaklıkta olan dış çevrenin 2 tepesinden herhangi biri olsun. z tepesi, $W_n \setminus \{f_i\}$ alt çizgesinde, dış çevrenin 2 tepesine ve c merkez tepesine komşu, dış çevrenin diğer kalan $n-3$ tepesine 2 uzaklıktadır. O halde, z tepesinin $W_n \setminus \{f_i\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{W_n \setminus \{f_i\}}(z) = (3)\frac{1}{2^1} + (n-3)\frac{1}{2^2} = \frac{n+3}{4} \quad (4.8)$$

olur.

Alt Durum 5: t tepesi, $W_n \setminus \{f_i\}$ alt çizgesinde dış çevrenin diğer $n - 5$ tepesinden herhangi biri olsun. t tepesi, $W_n \setminus \{f_i\}$ çizgesinde dış çevrenin 2 tepesine ve c merkez tepesine komşu, dış çevrenin $n - 4$ tepesine 2 uzaklıkta, x tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, t tepesinin $W_n \setminus \{f_i\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{W_n \setminus \{f_i\}}(t) = (3)\frac{1}{2^1} + (n-4)\frac{1}{2^2} + (1)\frac{1}{2^3} = \frac{2n+5}{8} \quad (4.9)$$

olur.

(4.5), (4.6), (4.7), (4.8) ve (4.9) değerlerinden,

$$C_{f_i} = C(W_n \setminus \{f_i\}) \quad (4.10)$$

$$C_{f_i} = C_{W_n \setminus \{f_i\}}(c) + C_{W_n \setminus \{f_i\}}(x) + 2C_{W_n \setminus \{f_i\}}(y) + 2C_{W_n \setminus \{f_i\}}(z) + (n-5)C_{W_n \setminus \{f_i\}}(t) \quad (4.11)$$

$$C_{f_i} = \frac{2n-1}{4} + \frac{n+9}{8} + 2\left(\frac{n+3}{4}\right) + 2\left(\frac{n+3}{4}\right) + (n-5)\left(\frac{2n+5}{8}\right) \quad (4.12)$$

$$C_{f_i} = \frac{n^2 + 4n + 3}{4} \quad (4.13)$$

elde edilir.

Ayrıt artık yakınlık tanımından, $R(W_n) = \min\{C_{e_i}, C_{f_i}\}$ olur. Durum 1 ve Durum 2'den, $R(W_n) = \min\left\{\frac{n^2 + 5n - 2}{4}, \frac{n^2 + 4n + 3}{4}\right\}$ olur.

$\frac{n^2 + 4n + 3}{4} \leq \frac{n^2 + 5n - 2}{4}$ eşitsizliğinin $n \geq 5$ için doğru olduğu açıktır. $n < 5$ için değerler Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1 $n < 5$ için değerler

n	3	4
C_{e_i}	5,5	8,5
C_{f_i}	5,5	8,5
R	5,5	8,5

4.5 İki-Parçalı Tam Çizge

Teorem 4.5: $K_{m,n}$ ($m > 1, n > 1$) $m + n$ tepeli iki-parçalı tam çizge olmak üzere,
 $R(K_{m,n}) = \frac{n^2+m^2+4nm-m-n-3}{4}$.

İspat: $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ ve $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ kümeleri $K_{m,n}$ iki-parçalı tam çizgenin parçalı kümeleri olsun. $e = r_i s_j$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) ayrıtı, $K_{m,n}$ çizgesinden atılırsa geriye $K_{m,n} \setminus \{e\}$ alt çizgesi kalır. $K_{m,n} \setminus \{e\}$ çizgesinin yakınlık değerinin hesaplanması için tepelerine bağlı olarak dört durum söz konusudur:

Durum 1: r_i tepesi, $N_{K_{m,n} \setminus \{e\}}(r_i) = S \setminus \{s_j\}$ kümesinin tepelerine komşu, $R \setminus \{r_i\}$ kümesine ait tepelere 2 uzaklıkta ve s_j tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, r_i tepesinin $K_{m,n} \setminus \{e\}$ çizgesindeki yakınlık değeri, $C_e(r_i) = (n-1)\frac{1}{2^1} + (m-1)\frac{1}{2^2} + (1)\frac{1}{2^3} = \frac{4n+2m-5}{8}$ olur.

Durum 2: s_j tepesi, $N_{K_{m,n} \setminus \{e\}}(s_j) = R \setminus \{r_i\}$ kümesinin tepelerine komşu, $S \setminus \{s_j\}$ kümesine ait tepelere 2 uzaklıkta ve r_i tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, s_j tepesinin $K_{m,n} \setminus \{e\}$ çizgesindeki yakınlık değeri, $C_e(s_j) = (m-1)\frac{1}{2^1} + (n-1)\frac{1}{2^2} + (1)\frac{1}{2^3} = \frac{4m+2n-5}{8}$ olur.

Durum 3: r_t ($1 \leq t \leq m, t \neq i$) tepesi, $N_{K_{m,n} \setminus \{e\}}(r_t) = S$ kümesinin tepelerine komşu ve $R \setminus \{r_t\}$ kümesine ait tepelere 2 uzaklıktadır. O halde, r_t tepesinin $K_{m,n} \setminus \{e\}$ çizgesindeki yakınlık değeri, $C_e(r_t) = (n)\frac{1}{2^1} + (m-1)\frac{1}{2^2} = \frac{2n+m-1}{4}$ olur.

Durum 4: s_k ($1 \leq k \leq n, k \neq j$) tepesi, $N_{K_{m,n} \setminus \{e\}}(s_k) = R$ kümesinin tepelerine

komşu ve $S \setminus \{s_k\}$ kümesine ait tepelere 2 uzaklıktadır. O halde, s_k tepesinin $K_{m,n} \setminus \{e\}$ çizgesindeki yakınlık değeri, $C_e(s_k) = (m)_{\frac{1}{2^1}} + (n-1)_{\frac{1}{2^2}} = \frac{2m+n-1}{4}$ olur.

Durum 1, Durum 2, Durum 3 ve Durum 4'ten,

$$C_e = C(K_{m,n} \setminus \{e\}) \quad (4.14)$$

$$C_e = C_e(r_i) + C_e(s_j) + (m-1)C_e(r_t) + (n-1)C_e(s_k) \quad (4.15)$$

$$C_e = \frac{4n+2m-5}{8} + \frac{4m+2n-5}{8} + (m-1)\left(\frac{2n+m-1}{4}\right) + (n-1)\left(\frac{2m+n-1}{4}\right) \quad (4.16)$$

$$C_e = \frac{n^2 + m^2 + 4nm - m - n - 3}{4} \quad (4.17)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

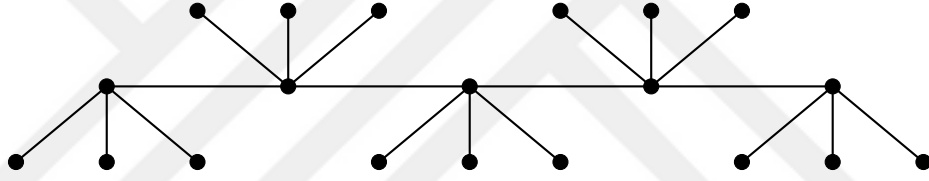
BÖLÜM BEŞ

YOL BENZERİ ÇİZGELERİN AYRIT ARTIK YAKINLIK DEĞERLERİ

Bu bölümde, yol benzeri çizge tipi olan düzenli tırtıl çizge (regular caterpillar) için ayrıt artık yakınlık değeri hesaplanmıştır.

5.1 Düzenli Tırtıl Çizge

Tanım 5.1: P_n , n tepeli yol çizgenin her bir tepesine m adet uç tepe eklenmesi ile elde edilen çizgeye düzenli tırtıl çizge adı verilir ve $T_{n,m}$ ile gösterilir (Gallian, 2012).



Şekil 5.1 $n = 5$ ve $m = 3$ için düzenli tırtıl çizge $T_{n,m}$

Yardımcı Teorem 5.1: (Aytaç ve Odabaş Berberler, 2017) $T_{n,m}$, $n(m + 1)$ tepeli düzenli tırtıl çizge olmak üzere, $C(T_{n,m}) = \frac{(m+2)^2 C(P_n) + nm(m+3)}{4}$.

Yardımcı Teorem 5.2: (Dangalchev, 2011) Bir G çizgesinden, $k \in V(G)$ tepesi atılırsa, geriye kalan alt çizgenin yakınlık değeri, $C(G \setminus \{k\}) = C(G) - 2C_G(k) - \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq i, k} \left(\frac{1}{2^{d(i,j)}} - \frac{1}{2^{d_k(i,j)}} \right)$.

Yardımcı Teorem 5.3: G bir çizge ve $v \in V(G)$, $e \in E(G)$ olsun. Eğer v uç tepesi, e destek ayrıtına bitişik bir tepe ise, o zaman $C_e(G) = C(G) - 2C_G(v)$.

İspat: Eğer e destek ayrıtı G çizgesinden atılırsa, o zaman e ayrıtına bitişik olan v uç

tepesi geriye kalan $G \setminus \{e\}$ alt çizgesinde izole tepe olur. Dolayısıyla,

$$C_e(G) = \sum_i \sum_{j \neq i} 2^{-d_e(i,j)} \quad (5.1)$$

$$C_e(G) = \left(\sum_{i \neq v} \sum_{j \neq i,v} 2^{-d_e(i,j)} \right) + \left(\sum_{i \neq v} (2^{-d_e(i,v)} + 2^{-d_e(v,i)}) \right) \quad (5.2)$$

$$C_e(G) = C_v(G) \quad (5.3)$$

olur. Yardımcı Teorem 5.2'den,

$$C_v(G) = C(G) - 2C_G(v) - \sum_{i \neq v} \sum_{j \neq i,v} (2^{-d(i,j)} - 2^{-d_v(i,j)}) \quad (5.4)$$

$$C_v(G) = C(G) - 2C_G(v) \quad (5.5)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1: $T_{n,m}$, $n(m+1)$ tepeli ($n > 1$) düzenli tırtıl çizge olmak üzere,

$$R(T_{n,m}) = \frac{(m+2)^2 R(P_n) + nm(m+3)}{4} \quad (5.6)$$

İspat: $T_{n,m}$ çizgesinden atılacak ayrıta bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: e_t ($1 \leq t \leq n-1$) ayrıtı $T_{n,m}$ çizgesinde P_n çizgesine ait ayrıtlardan biri olsun. e_t ayrıtı, $T_{n,m}$ çizgesinden atılırsa geriye $G_1 = T_{k,m} \cup T_{j,m}$ ($j = n-k$) alt çizgesi kalır. O halde, Teorem 3.2'den, G_1 alt çizgesinin yakınlık değeri,

$$C_{e_t} = C(G_1) = C(T_{k,m} \cup T_{j,m}) \quad (5.7)$$

$$C_{e_t} = C(T_{k,m}) + C(T_{j,m}) \quad (5.8)$$

$$C_{e_t} = C(T_{k,m}) + C(T_{n-k,m}) \quad (5.9)$$

olur. Yardımcı Teorem 5.1'den,

$$C_{e_t} = \frac{(m+2)^2 C(P_k) + km(m+3)}{4} + \frac{(m+2)^2 C(P_{n-k}) + (n-k)m(m+3)}{4} \quad (5.10)$$

olur. Teorem 3.1(c)'den,

$$C_{e_t} = \frac{(m+2)^2(2n-8 + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{n-k-2}}) + nm(m+3)}{4} \quad (5.11)$$

elde edilir.

Durum 2: e_{ij} ($1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m$) ayrıtı, $T_{n,m}$ çizgesinde u_{ij} ($1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m$) uç tepesine bitişik olan bir destek ayrıtı olsun. Eğer e_{ij} ayrıtı, $T_{n,m}$ çizgesinden atılırsa geriye birleştirilmemiş $G_2 = (T_{n,m} \setminus \{u_{ij}\}) \cup \{u_{ij}\}$ alt çizgesi kalır. Yardımcı Teorem 5.3'ten,

$$C_{e_{ij}} = C(G_2) = C(T_{n,m}) - 2C_{T_{n,m}}(u_{ij}) \quad (5.12)$$

olur.

Ayrıt artık yakınlık tanımından,

$$R(T_{n,m}) = \min\{C_{e_t}, C_{e_{ij}}\} = \min\{\min_t\{C_{e_t}\}, \min_{i,j}\{C_{e_{ij}}\}\} \text{ olur.}$$

(5.2) değerinden,

$$\min_t\{C_{e_t}\} = \min_k \left\{ \frac{(m+2)^2(2n-8 + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{n-k-2}}) + nm(m+3)}{4} \right\} \text{ olur. } k \text{ değerine bağlı,}$$

$$f(k) = \frac{(m+2)^2(2n-8 + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{n-k-2}}) + nm(m+3)}{4} \text{ fonksiyonunun minimum değerini hangi}$$

noktada aldığı bulunur:

$$f(k) = \frac{(m+2)^2(2n-8 + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{n-k-2}}) + nm(m+3)}{4} \Rightarrow$$

$$f'(k) = \frac{(m+2)^2(\ln 2)}{4} \left(\frac{1}{2^{n-k-2}} - \frac{1}{2^{k-2}} \right).$$

$$f'(k) = \frac{(m+2)^2(\ln 2)}{4} \left(\frac{1}{2^{n-k-2}} - \frac{1}{2^{k-2}} \right) = 0 \Rightarrow k = \frac{n}{2} \text{ elde edilir.}$$

Bulunan köke ikinci türev testi uygulanır. $f''(k) > 0$ eşitsizliğini sağlayan k değeri için $f(k)$ fonksiyonu minimum değerini alır.

$$f'(k) = \frac{(m+2)^2(\ln 2)}{4} \left(\frac{1}{2^{n-k-2}} - \frac{1}{2^{k-2}} \right) \Rightarrow f''(k) = \frac{(m+2)^2(\ln 2)^2}{4} \left(\frac{1}{2^{n-k-2}} + \frac{1}{2^{k-2}} \right).$$

$k = \frac{n}{2}$ için $f''(k) > 0$ olduğundan, $f(k)$ fonksiyonu $k = \frac{n}{2}$ noktasında minimum değerini alır.

$T_{n,m}$ çizgesinin tepe sayısına bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: n çift ise,

$$f(k) = f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(m+2)^2(2n-8 + \frac{8}{2^{\frac{n}{2}}}) + nm(m+3)}{4} \quad (5.13)$$

olur.

Durum 2: n tek ise, iki alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ise,

$$f(k) = f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{(m+2)^2(2n-8 + \frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}}) + nm(m+3)}{4} \quad (5.14)$$

olur.

Alt Durum 2: $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ise,

$$f(k) = f\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{(m+2)^2(2n-8+\frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}}) + nm(m+3)}{4} \quad (5.15)$$

olur.

(5.14) ve (5.15) değerlerinden,

$$f(k) = \frac{(m+2)^2(2n-8+\frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}}) + nm(m+3)}{4} \quad (5.16)$$

elde edilir.

Teorem 4.1, (5.13) ve (5.16) değerlerinden,

$$\min_t \{C_{et}\} = \frac{(m+2)^2 R(P_n) + nm(m+3)}{4} \quad (5.17)$$

olur.

(5.12) değerinden,

$$\min_{i,j} \{C_{e_{ij}}\} = \min \{C(T_{n,m}) - 2C_{T_{n,m}}(u_{i,j})\} = C(T_{n,m}) - 2 \max_{i,j} \{C_{T_{n,m}}(u_{i,j})\}$$

olur. O halde, $\max_{i,j} \{C_{T_{n,m}}(u_{i,j})\} = C(u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil j})$ ($n > 2$) olduğu açıktır. O halde,

$$\max_{i,j} \{C_{T_{n,m}}(u_{i,j})\} = \begin{cases} (1)\frac{1}{2^1} + (m+1)\frac{1}{2^2} + (2m+2)(\sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^i}) \\ + (2m+1)\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}} + (m)\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+2}}, & n \text{ çift ise;} \\ (1)\frac{1}{2^1} + (m+1)\frac{1}{2^2} + (2m+2)(\sum_{i=3}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{1}{2^i}) \\ + (2m)\frac{1}{2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil+1}}, & n \text{ tek ise.} \end{cases} \quad (5.18)$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \text{ sonlu geometrik seri formülü kullanılarak,}$$

$$\max_{i,j}\{C_{T_{n,m}}(u_{ij})\} = \begin{cases} (1)\frac{1}{2^1} + (m+1)\frac{1}{2^2} \\ + (2m+2)\left(\frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-3}}\right)\right) \\ + (2m+1)\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}} + (m)\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+2}}, & n \text{ çift ise;} \\ (1)\frac{1}{2^1} + (m+1)\frac{1}{2^2} \\ + (2m+2)\left(\frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}-3}}\right)\right) \\ + (2m)\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}+1}}, & n \text{ tek ise.} \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\max_{i,j}\{C_{T_{n,m}}(u_{ij})\} = \begin{cases} (1)\frac{1}{2^1} + (m+1)\frac{1}{2^2} + (2m+2)\frac{1}{2^3}\left(\frac{\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-2}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) \\ + (2m+1)\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}} + (m)\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+2}}, & n \text{ çift ise;} \\ (1)\frac{1}{2^1} + (m+1)\frac{1}{2^2} + (2m+2)\frac{1}{2^3}\left(\frac{\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}-2}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) \\ + (2m)\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}+1}}, & n \text{ tek ise.} \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\max_{i,j}\{C_{T_{n,m}}(u_{ij})\} = \begin{cases} \frac{2^{\frac{n}{2}}(3m+5) - 3m - 6}{2^{\frac{n}{2}+2}}, & n \text{ çift ise;} \\ \frac{3m+5 - 2^{\frac{-n+3}{2}}(m+2)}{4}, & n \text{ tek ise.} \end{cases} \quad (5.21)$$

elde edilir.

O halde,

$$\min_{i,j}\{C_{e_{ij}}\} = \begin{cases} C(T_{n,m}) - \frac{2^{\frac{n}{2}}(3m+5) - 3m - 6}{2^{\frac{n}{2}+1}}, & n \text{ çift ise;} \\ C(T_{n,m}) - \frac{3m+5 - 2^{\frac{-n+3}{2}}(m+2)}{2}, & n \text{ tek ise.} \end{cases} \quad (5.22)$$

elde edilir.

$R(T_{n,m}) = \min\{\min_t\{C_{e_t}\}, \min_{i,j}\{C_{e_{ij}}\}\}$ değerini bulmak için (5.17) ve (5.22) değerlerine bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: n çift ise, $\min_t\{C_{e_t}\} \leq \min_{i,j}\{C_{e_{ij}}\}$ olsun. O halde (5.17) ve (5.22) değerlerinden,

$$\frac{(m+2)^2 R(P_n) + nm(m+3)}{4} \leq \frac{C(T_{n,m}) - 2^{\frac{n}{2}}(3m+5) - 3m - 6}{2^{\frac{n}{2}+1}} \text{ olur.}$$

Teorem 4.1 ve Yardımcı Teorem 5.1'den,

$$\frac{(m+2)^2(2n - 8 + \frac{8}{2^{\frac{n}{2}}}) + nm(m+3)}{4} \leq \frac{(m+2)^2 C(P_n) + mn(m+3)}{4} - \frac{2^{\frac{n}{2}}(3m+5) - 3m - 6}{2^{\frac{n}{2}+1}} \text{ olur.}$$

Teorem 3.1(c)'den,

$$\frac{(m+2)^2(2n - 8 + \frac{8}{2^{\frac{n}{2}}}) + nm(m+3)}{4} \leq \frac{(m+2)^2(2n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}}) + mn(m+3)}{4} - \frac{2^{\frac{n}{2}}(3m+5) - 3m - 6}{2^{\frac{n}{2}+1}} \quad (5.23)$$

$$\frac{(m+2)^2(-4 + 2^{3-\frac{n}{2}} - 2^{2-n})}{4} \leq -\frac{3m+5}{2} + \frac{3(m+2)}{2^{\frac{n}{2}+1}} \quad (5.24)$$

$$-2^{\frac{n}{2}+1}(m+2)^2 + 4(m+2)^2 - 2^{1-\frac{n}{2}}(m+2)^2 \leq -2^{\frac{n}{2}}(3m+5) + 3(m+2) \quad (5.25)$$

$$2^{\frac{n}{2}}(-2m^2 - 5m - 3) - 2^{1-\frac{n}{2}}(m^2 + 4m + 4) \leq -4m^2 - 13m - 10 \quad (5.26)$$

$$-m^2(2^{\frac{n}{2}+1} + 2^{1-\frac{n}{2}}) - m(5 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 2^{3-\frac{n}{2}}) - (3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 2^{3-\frac{n}{2}}) < -4m^2 - 13m - 10 \quad (5.27)$$

olur. (5.27) eşitsizliğinin, $n \geq 2$ için doğru olduğu açıktır.

Durum 2: n tek ise, $\min_t \{C_{et}\} \leq \min_{i,j} \{C_{eij}\}$ olsun. O halde (5.17) ve (5.22) değerlerinden,

$$\frac{(m+2)^2 R(P_n) + nm(m+3)}{4} \leq C(T_{n,m}) - \frac{3m+5 - 2^{\frac{-n+3}{2}}(m+2)}{2} \quad (5.28)$$

olur.

Teorem 4.1 ve Yardımcı Teorem 5.1'den,

$$\frac{(m+2)^2(2n-8 + \frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}}) + nm(m+3)}{4} \leq \frac{(m+2)^2 C(P_n) + mn(m+3)}{4} - \frac{3m+5 - 2^{\frac{-n+3}{2}}(m+2)}{2} \quad (5.29)$$

Teorem 3.1(c)'den,

$$\frac{(m+2)^2(2n-8 + \frac{6}{2^{\frac{n-1}{2}}}) + nm(m+3)}{4} \leq \frac{(m+2)^2(2n-4 + 2^{2-n}) + mn(m+3)}{4} - \frac{3m+5 - 2^{\frac{-n+3}{2}}(m+2)}{2} \quad (5.30)$$

$$(m+2)^2(-4 + 6 \cdot 2^{\frac{1-n}{2}} - 2^{2-n}) \leq 6m+10 - 2^{\frac{-n+5}{2}}(m+2) \quad (5.31)$$

$$m^2(-4 + 6 \cdot 2^{\frac{1-n}{2}} - 2^{-n} \cdot 4) + m(-16 + 2^{\frac{1-n}{2}} \cdot 24 - 2^{-n} \cdot 16) + (-16 + 2^{\frac{1-n}{2}} \cdot 24 - 2^{-n} \cdot 16) \leq m(6 - 2^{\frac{-n+5}{2}} + 10 - 2^{\frac{-n+7}{2}}) \quad (5.32)$$

elde edilir. (5.32) eşitsizliğinin $n \geq 1$ için doğru olduğu açıktır.

O halde, Durum 1 ve Durum 2'den,

$$R(T_{n,m}) = \min\{\min_t\{C_{e_t}\}, \min_{i,j}\{C_{e_{ij}}\}\} = \min_t\{C_{e_t}\} \quad (5.33)$$

$$R(T_{n,m}) = \frac{(m+2)^2 R(P_n) + nm(m+3)}{4} \quad (5.34)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.



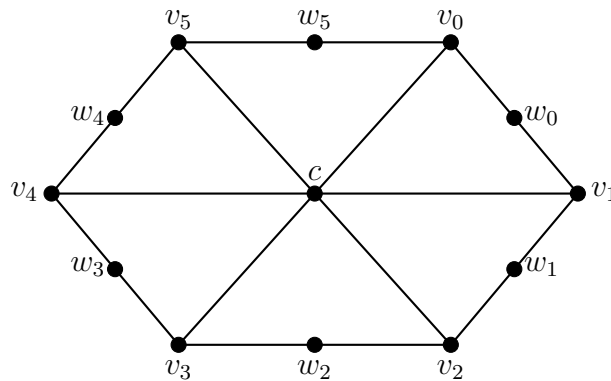
BÖLÜM ALTI

TEKERLEK BENZERİ ÇİZGELERİN AYRIT ARTIK YAKINLIK DEĞERLERİ

Bu bölümde, tekerlek benzeri çizgeler olan dişli çizge (gear graph), dümen çizge (helm graph), ayçiçeği çizge (sunflower graph) ve arkadaşlık çizge (friendship graph) için ayrıt artık yakınlık değerleri hesaplanmıştır.

6.1 Dişli Çizge

Tanım 6.1: W_n tekerlek çizgenin dış çevresinde birbirine komşu olan her tepe çifti arasına bir tepe eklenmesiyle elde edilen çizgeye dişli çizge denir ve G_n ile gösterilir (Gallian, 2012). G_n çizgesi, $2n + 1$ tepe ve $3n$ ayrıta sahiptir. G_n çizgesinin dış çevresinde, tepe derecesi 2 olan n tepe ve tepe derecesi 3 olan n tepe olmak üzere, toplam $2n$ tepe vardır. c tepesi, G_n çizgesinin merkez tepesi olmak üzere, $\deg(c) = n$ olur. $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ tepeleri derecesi 2 olan tepeler ve $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ tepeleri derecesi 3 olan tepeler olsun. w_i tepesi ($0 \leq i \leq n - 1$) v_i ve v_{i+1} ($(i + 1) \bmod(n)$) tepelerine komşudur.



Şekil 6.1 $n = 6$ için 13 tepeli, 18 ayrıtlı dişli çizge G_n

Teorem 6.1: $G_n, 2n + 1$ tepeli dişli çizge olmak üzere,

$$R(G_n) = \begin{cases} \frac{9n^2 + 49n - 18}{16}, & n = 3 \text{ ise;} \\ \frac{9n^2 + 40n + 18}{16}, & n > 3 \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.1)$$

İspat: G_n çizgesinden atılacak ayrıta bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: $v_i c$ ayrıtı ($0 \leq i \leq n - 1$) G_n çizgesinden atılırsa, geriye kalan $G_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinin yakınlık değerinin hesaplanması için altı alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $N_{G_n \setminus \{v_i c\}}(c) = \{v_p \mid \forall p \neq i, 0 \leq p \leq n - 1\}$ kümesinde bulunan $n - 1$ tepeye komşu, tepe derecesi 2 olan n tepeye 2 uzaklıkta ve v_i tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, c merkez tepesinin $G_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{v_i c\}}(c) = (n - 1) \frac{1}{2^1} + (n) \frac{1}{2^2} + (1) \frac{1}{2^3} = \frac{6n - 3}{8} \quad (6.2)$$

olur.

Alt Durum 2: v_i tepesi, $N_{G_n \setminus \{v_i c\}}(v_i) = \{w_i, w_{i-1}\} ((i - 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan 2 tepeye komşu, v_{i-1} ve v_{i+1} ($(i - 1) \bmod(n)$ ve $(i + 1) \bmod(n)$) tepelerine 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan iki tepeye ve c merkez tepesine 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 3 olan $n - 3$ tepeye 4 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan $n - 4$ tepeye 5 uzaklıktadır. O halde, v_i tepesinin $G_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{v_i c\}}(v_i) = (2) \frac{1}{2^1} + (2) \frac{1}{2^2} + (3) \frac{1}{2^3} + (n - 3) \frac{1}{2^4} + (n - 4) \frac{1}{2^5} = \frac{3n + 50}{32} \quad (6.3)$$

olur.

Alt Durum 3: w_j tepesi ($j = i, i - 1, i - 2, i + 1$ ve $(j) \bmod(n)$), tepe derecesi 3 olan 2 tepeye komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, tepe derecesi 3 olan $n - 2$ tepeye 3 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan $n - 3$ tepeye 4

uzaklıktadır. O halde, w_j tepesinin $G_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{v_i c\}}(w_j) = (2)\frac{1}{2^1} + (3)\frac{1}{2^2} + (n-2)\frac{1}{2^3} + (n-3)\frac{1}{2^4} = \frac{3n+21}{16} \quad (6.4)$$

olur.

Alt Durum 4: v_k tepesi ($k = i-1, i+1$ ve $(k) \bmod(n)$), $N_{G_n \setminus \{v_i c\}}(v_k) = \{w_{k-1}, w_k, c\}$ ($(k-1) \bmod(n)$) kümesinde bulunan tepelere komşu, dış çevrede bulunan tepe derecesi 3 olan $n-1$ tepeye 2 uzaklıkta ve tepe derecesi 2 olan $n-2$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_k tepesinin $G_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{v_i c\}}(v_k) = (3)\frac{1}{2^1} + (n-1)\frac{1}{2^2} + (n-2)\frac{1}{2^3} = \frac{3n+8}{8} \quad (6.5)$$

olur.

Alt Durum 5: v_t tepesi ($\forall t \neq i, k$ ve $(t) \bmod(n)$), $G_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde tepe derecesi 3 olan, geriye kalan diğer $n-3$ tepeden biri olsun. v_t tepesi, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye ve c merkez tepesine komşu, dış çevrede bulunan tepe derecesi 3 olan $n-2$ tepeye 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan $n-2$ tepeye 3 uzaklıkta, v_i tepesine 4 uzaklıktadır. O halde, v_t tepesinin $G_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{v_i c\}}(v_t) = (3)\frac{1}{2^1} + (n-2)\frac{1}{2^2} + (n-2)\frac{1}{2^3} + (1)\frac{1}{2^4} = \frac{6n+13}{16} \quad (6.6)$$

olur.

Alt Durum 6: w_m tepesi ($\forall m \neq j$ ve $(m) \bmod(n)$), $G_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde tepe derecesi 2 olan geriye kalan diğer $n-4$ tepeden biri olsun. w_m tepesi, tepe derecesi 3 olan 2 tepeye komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, tepe derecesi 3 olan $n-3$ tepeye 3 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan $n-3$ tepeye 4 uzaklıkta, v_i tepesine 5 uzaklıktadır. O halde, w_m tepesinin $G_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki

yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{G_n \setminus \{v_i c\}}(w_m) &= (2)\frac{1}{2^1} + (3)\frac{1}{2^2} + (n-3)\frac{1}{2^3} + (n-3)\frac{1}{2^4} + (1)\frac{1}{2^5} \\ &= \frac{6n+39}{32} \end{aligned} \quad (6.7)$$

olur.

(6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) ve (6.7) değerlerinden, $G_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesinin yakınlık değeri,

$$C_{v_i c} = C(G_n \setminus \{v_i c\}) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} C_{v_i c} &= C_{v_i c}(c) + C_{v_i c}(v_i) + 4C_{v_i c}(w_j) + 2C_{v_i c}(v_k) + (n-3)C_{v_i c}(v_t) + \\ &\quad (n-4)C_{v_i c}(w_m) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} C_{v_i c} &= \frac{6n-3}{8} + \frac{3n+50}{32} + (4)\left(\frac{3n+21}{16}\right) + (2)\left(\frac{3n+8}{8}\right) + \\ &\quad (n-3)\left(\frac{6n+13}{16}\right) + (n-4)\left(\frac{6n+39}{32}\right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$C_{v_i c} = \frac{9n^2 + 40n + 18}{16} \quad (6.11)$$

elde edilir.

Durum 2: f ayrıtı ($f = v_i w_i$ veya $f = w_i v_{i+1}$) $((i+1) \bmod(n))$ dış çevreye ait bir ayrıtı olmak üzere, f ayrıtı G_n çizgesinden atılırsa, geriye $G_n \setminus \{f\}$ alt çizgesi kalır. $G_n \setminus \{f\}$ çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için tepelerine bağlı olarak altı alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, dış çevrenin tepe derecesi 3 olan tüm tepelerine komşu, tepe derecesi 2 olan tüm tepelerine 2 uzaklıktadır. O halde, c merkez tepesinin

$G_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{f\}}(c) = (n) \frac{1}{2^1} + (n) \frac{1}{2^2} = \frac{3n}{4} \quad (6.12)$$

olur.

Alt Durum 2: v_j tepesi ($j = i$ veya $j = i + 1$ ve $(j) \bmod(n)$), dış çevreye ait tepe derecesi 3 olan bir tepe olsun. v_j tepesi, $N_{G_n \setminus \{f\}}(v_j) = \{c, w_t\}$ $\left(t = \begin{cases} i-1, & j = i \text{ ise;} \\ i+1, & j = i+1 \text{ ise.} \end{cases} \right)$ $((t) \bmod(n))$ kümesindeki 2 tepeye komşu, tepe derecesi 3 olan $n - 1$ tepeye 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan $n - 1$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_j tepesinin $G_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{f\}}(v_j) = (2) \frac{1}{2^1} + (n-1) \frac{1}{2^2} + (n-1) \frac{1}{2^3} = \frac{3n+5}{8} \quad (6.13)$$

olur.

Alt Durum 3: v_k tepesi ($\forall k \neq j$) $((k) \bmod(n))$, $G_n \setminus \{f\}$ alt çizgesinde tepe derecesi olan geriye kalan diğer $n - 1$ tepeden biri olsun. v_k tepesi $N_{G_n \setminus \{f\}}(v_k) = \{w_k, w_{k-1}, c\}$ $((k-1) \bmod(n))$ kümesindeki 3 tepeye komşu, dış çevreye ait tepe derecesi 3 olan $n - 1$ tepeye 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan $n - 2$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_k tepesinin $G_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{f\}}(v_k) = (3) \frac{1}{2^1} + (n-1) \frac{1}{2^2} + (n-2) \frac{1}{2^3} = \frac{3n+8}{8} \quad (6.14)$$

olur.

Alt Durum 4: w_i tepesi, dış çevrede bulunan tepe derecesi 2 olan bir tepe olmak üzere, v_i veya v_{i+1} $((i+1) \bmod(n))$ tepesine komşu, w_{i-1} $((i-1) \bmod(n))$ veya w_{i+1} $((i+1) \bmod(n))$ tepesine ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, dış çevreye ait tepe derecesi 3 olan geriye kalan diğer $n - 1$ tepeye 3 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan geriye kalan diğer $n - 2$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_i tepesinin $G_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık

değeri,

$$C_{G_n \setminus \{f\}}(w_i) = (1)\frac{1}{2^1} + (2)\frac{1}{2^2} + (n-1)\frac{1}{2^3} + (n-2)\frac{1}{2^4} = \frac{3n+12}{16} \quad (6.15)$$

olur.

Alt Durum 5: w_p tepesi $\left(p = \begin{cases} i-1, & f = v_i w_i \quad \text{ise;} \\ i+1, & f = w_i v_{i+1} \quad \text{ise.} \end{cases} \right) ((p) \bmod(n))$, dış çevreye ait tepe derecesi 2 olan bir tepe olmak üzere, $N_{G_n \setminus \{f\}}(w_p) = \{v_p, v_{p+1}\}$ kümesinde bulunan 2 tepeye komşu, dış çevrede bulunan tepe derecesi 2 olan w_r tepesine $\left(r = \begin{cases} p-1, & f = v_i w_i \quad \text{ise;} \\ p+1, & f = w_i v_{i+1} \quad \text{ise.} \end{cases} \right) ((r) \bmod(n))$ ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, dış çevrede bulunan tepe derecesi 3 olan geriye kalan diğer $n-2$ tepeye 3 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan geriye kalan diğer $n-2$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_p tepesinin $G_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{f\}}(w_p) = (2)\frac{1}{2^1} + (2)\frac{1}{2^2} + (n-2)\frac{1}{2^3} + (n-2)\frac{1}{2^4} = \frac{3n+18}{16} \quad (6.16)$$

olur.

Alt Durum 6: w_m tepesi $((m) \bmod(n))$, dış çevrede bulunan tepe derecesi 2 olan geriye kalan diğer $n-2$ tepeden herhangi biri olsun. w_m tepesi, $G_n \setminus \{f\}$ alt çizgesinde $N_{G_n \setminus \{f\}}(w_m) = \{v_m, v_{m+1}\} ((m+1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan 2 tepeye komşu, $w_{m-1}, v_{m+1} ((m-1) \bmod(n), (m+1) \bmod(n))$ ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, dış çevrede bulunan geriye kalan diğer tepe derecesi 3 olan $n-2$ tepeye 3 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan $n-3$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_m tepesinin $G_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{G_n \setminus \{f\}}(w_m) = (2)\frac{1}{2^1} + (3)\frac{1}{2^2} + (n-2)\frac{1}{2^3} + (n-3)\frac{1}{2^4} = \frac{3n+21}{16} \quad (6.17)$$

olur.

(6.12), (6.13), (6.14), (6.15), (6.16) ve (6.17) değerlerinden,

$$C_f = C(G_n \setminus \{f\}) \quad (6.18)$$

$$C_f = C_f(c) + C_f(v_j) + (n-1)C_f(v_k) + C_f(w_i) + C_f(w_p) + (n-2)C_f(w_m) \quad (6.19)$$

$$C_f = \frac{3n}{4} + \frac{3n+5}{8} + (n-1)\left(\frac{3n+8}{8}\right) + \frac{3n+12}{16} + \frac{3n+18}{16} + (n-2)\left(\frac{3n+21}{16}\right) \quad (6.20)$$

$$C_f = \frac{9n^2 + 49n - 18}{16} \quad (6.21)$$

elde edilir. Ayrıt artık yakınlık tanımından, $R(G_n) = \min\{C_{v_i c}, C_f\}$ olur. Durum 1 ve Durum 2'den, $R(G_n) = \min\left\{\frac{9n^2 + 40n + 18}{16}, \frac{9n^2 + 49n - 18}{16}\right\}$ olur.

$\frac{9n^2 + 40n + 18}{16} \leq \frac{9n^2 + 49n - 18}{16}$ eşitsizliğinin $n \geq 4$ için doğru olduğu açıktır. Böylece,

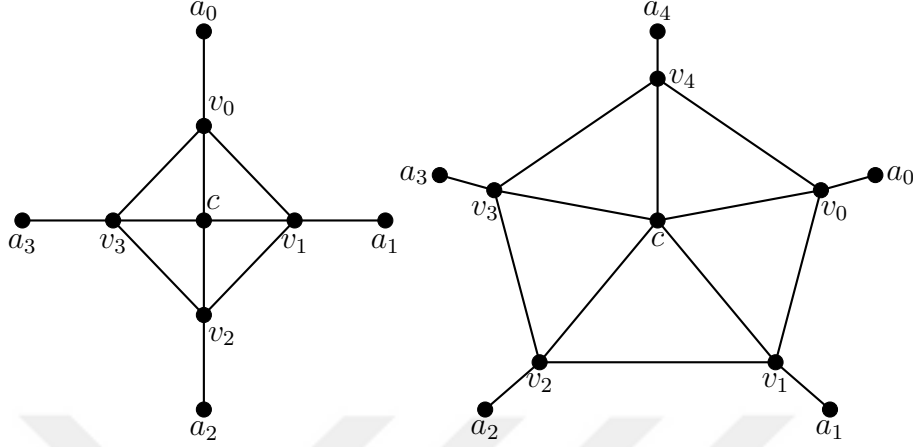
$$R(G_n) = \begin{cases} \frac{9n^2 + 49n - 18}{16}, & n = 3 \quad \text{ise;} \\ \frac{9n^2 + 40n + 18}{16}, & n > 3 \quad \text{ise.} \end{cases} \quad (6.22)$$

olur ve ispat tamamlanır.

6.2 Dümen Çizge

Tanım 6.2: W_n tekerlek çizgenin dış çevresindeki her bir tepeye bir uç tepe eklenmesi ile elde edilen çizgeye dümen çizge denir ve H_n ile gösterilir (Gallian, 2012). H_n çizgesi $V(H_n) = \{v_i \mid 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{a_i \mid 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{c\}$ tepeler kümesi ve $E(H_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i a_i \mid 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i c \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ $((i+1)(\text{mod}(n)))$ ayrıtlar kümesine sahiptir (Javaid and Shokat, 2008). v_i destek tepe

$(0 \leq i \leq n-1)$ için $\deg(v_i) = 4$, a_i uç tepe $(0 \leq i \leq n-1)$ için $\deg(a_i) = 1$ ve c tepesi, H_n çizgesinin merkez tepesi olmak üzere, $\deg(c) = n$ olur.



Şekil 6.2 $n = 4$ ve $n = 5$ için dümen çizge H_n

Yardımcı Teorem 6.1: (Aytaç ve Odabaş Berberler, 2017) H_n , $2n + 1$ tepeli dümen çizge olmak üzere, $C(H_n) = \frac{n(9n+49)}{16}$ olur.

Yardımcı Teorem 6.2: (Aytaç ve Odabaş Berberler, 2017) a tepesi, H_n dümen çizgesinin bir uç tepesi olmak üzere, $C_{H_n}(a) = \frac{3n+15}{16}$ olur.

Teorem 6.2: H_n ($n \geq 5$), $2n + 1$ tepeli dümen çizge olmak üzere,

$$R(H_n) = \begin{cases} \frac{9n^2 + 43n - 30}{16}, & n < 21 \quad \text{ise;} \\ \frac{9n^2 + 40n + 33}{16}, & n \geq 21 \quad \text{ise.} \end{cases} \quad (6.23)$$

İspat: H_n çizgesinden atılacak olan ayrıta bağlı olarak üç durum söz konusudur:

Durum 1: $v_i v_{i+1}$ ayrıtı $(0 \leq i \leq n-1; (i+1) \bmod(n))$, H_n çizgesinden atılırsa geriye $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesi kalır. $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için, ayrıtlarına bağlı olarak beş alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinde, $N_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(c) = \{v_k \mid \forall k, 0 \leq k \leq n-1\}$ kümesinde bulunan destek tepelere komşu, dolayısıyla uç tepelere

2 uzaklıktadır. O halde, c merkez tepesinin, $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(c) = (n) \frac{1}{2^1} + (n) \frac{1}{2^2} = \frac{3n}{4} \quad (6.24)$$

olur.

Alt Durum 2: v_t tepesi ($t = i$ veya $t = i + 1$) $((t) \bmod(n))$,

$$N_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(v_t) = \{c, a_i, v_p\} \left(p = \begin{cases} t-1, & t = i \text{ ise;} \\ t+1, & t = i+1 \text{ ise.} \end{cases} \right) ((p) \bmod(n))$$

kümesinde bulunan tepelere komşu, a_p uç tepesine ve geriye kalan diğer $n - 2$ destek tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer $n - 2$ uç tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_t tepesinin $N_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(v_t) = (3) \frac{1}{2^1} + (1 + (n - 2)) \frac{1}{2^2} + (n - 2) \frac{1}{2^3} = \frac{3n + 8}{8} \quad (6.25)$$

olur.

Alt Durum 3: v_j tepesi ($\forall j \neq t$ ve $(j) \bmod(n)$), $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinde geriye kalan $n - 2$ destek tepeden biri olsun. v_j tepesi

$N_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(v_j) = \{c, a_j, v_{j-1}, v_{j+1}\} ((j-1) \bmod(n), (j+1) \bmod(n))$ kümesindeki tepelere komşu, a_{j-1} ve a_{j+1} uç tepelerine ve geriye kalan diğer $n - 3$ destek tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer $n - 3$ uç tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_j tepesinin $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(v_j) = (4) \frac{1}{2^1} + (2 + (n - 3)) \frac{1}{2^2} + (n - 3) \frac{1}{2^3} = \frac{3n + 11}{8} \quad (6.26)$$

olur.

Alt Durum 4: a_t ($t = i, i + 1$ ve $(t) \bmod(n)$) uç tepesi, $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinde v_t destek tepesine komşudur. O halde, Alt Durum 2'den yararlanılarak a_t tepesinin

$H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(a_t) &= (1)\frac{1}{2^1} + (2)\frac{1}{2^2} + (1 + (n-2))\frac{1}{2^3} + (n-2)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n+12}{16} \end{aligned} \quad (6.27)$$

olur.

Alt Durum 5: a_j ($\forall j \neq t$ ve $(j) \bmod(n)$) uç tepesi, $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinde v_j destek tepesine komşudur. O halde, Alt Durum 3'ten yararlanılarak, a_j tepesinin $H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(a_j) &= (1)\frac{1}{2^1} + (3)\frac{1}{2^2} + (2 + (n-3))\frac{1}{2^3} + (n-3)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n+15}{16} \end{aligned} \quad (6.28)$$

olur.

(6.24), (6.25), (6.26), (6.27) ve (6.28) değerlerinden,

$$C_{v_i v_{i+1}} = C(H_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}) \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} C_{v_i v_{i+1}} &= C_{v_i v_{i+1}}(c) + 2C_{v_i v_{i+1}}(v_t) + (n-2)C_{v_i v_{i+1}}(v_j) + 2C_{v_i v_{i+1}}(a_t) \\ &\quad + (n-2)C_{v_i v_{i+1}}(a_j) \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$C_{v_i v_{i+1}} = \frac{9n^2 + 49n - 18}{16} \quad (6.31)$$

elde edilir.

Durum 2: $v_i c$ ($0 \leq i \leq n-1$) ayrıtı, H_n çizgesinden atılırsa geriye $H_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesi kalır. $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için, tepelerine bağlı olarak yedi alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $N_{H_n \setminus \{v_i c\}}(c) = \{v_p \mid \forall p \neq i, 0 \leq p \leq n-1\}$

kümesinde bulunan tepelere komşu, $n - 1$ uç tepeye ve v_i destek tepeye 2 uzaklıkta, a_i uç tepesine 3 uzaklıktadır. O halde c merkez tepesinin, $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{H_n \setminus \{v_i c\}}(c) = (n - 1) \frac{1}{2^1} + ((n - 1) + 1) \frac{1}{2^2} + (1) \frac{1}{2^3} = \frac{6n - 3}{8} \quad (6.32)$$

olur.

Alt Durum 2: v_i destek tepesi, $H_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde $N_{H_n \setminus \{v_i c\}}(v_i) = \{a_i, v_{i-1}, v_{i+1}\} ((i - 1) \bmod(n), (i + 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, v_{i-2} ve v_{i+2} $((i - 2) \bmod(n), (i + 2) \bmod(n))$ destek tepeleri, a_{i-1} ve a_{i+1} uç tepeleri ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, a_{i-2} ve a_{i+2} uç tepeleri ve geriye kalan diğer $n - 5$ destek tepeye 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer $n - 5$ uç tepeye 4 uzaklıktadır. O halde v_i tepesinin, $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{H_n \setminus \{v_i c\}}(v_i) = (3) \frac{1}{2^1} + (5) \frac{1}{2^2} + (2 + (n - 5)) \frac{1}{2^3} + (n - 5) \frac{1}{2^4} = \frac{3n + 33}{16} \quad (6.33)$$

olur.

Alt Durum 3: a_i uç tepesi, $H_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde v_i destek tepesine komşudur. O halde, Alt Durum 2'den yararlanılarak, a_i tepesinin, $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{H_n \setminus \{v_i c\}}(a_i) &= (1) \frac{1}{2^1} + (2) \frac{1}{2^2} + (5) \frac{1}{2^3} + (2 + (n - 5)) \frac{1}{2^4} + (n - 5) \frac{1}{2^5} \\ &= \frac{3n + 41}{32} \end{aligned} \quad (6.34)$$

olur.

Alt Durum 4: v_k destek tepesi ($k = i - 2, i - 1, i + 1, i + 2; (k) \bmod(n)$), $H_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde $N_{H_n \setminus \{v_i c\}}(v_k) = \{c, a_k, v_{k+1}, v_{k-1}\} ((k + 1) \bmod(n), (k - 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, a_{k+1} ve a_{k-1} uç tepelerine ve geriye kalan diğer $n - 3$ destek tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer $n - 3$ uç tepeye 3 uzaklıktadır. O

halde, v_k tepesinin, $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{H_n \setminus \{v_i c\}}(v_k) = (4)\frac{1}{2^1} + (2 + (n - 3))\frac{1}{2^2} + (n - 3)\frac{1}{2^3} = \frac{3n + 11}{8} \quad (6.35)$$

olur.

Alt Durum 5: a_k uç tepesi ($k = i - 2, i - 1, i + 1, i + 2; (k) \bmod(n)$), $H_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde v_k destek tepesine komşudur. O halde, Alt Durum 4'ten yararlanılarak, a_k tepesinin, $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{H_n \setminus \{v_i c\}}(a_k) = (1)\frac{1}{2^1} + (3)\frac{1}{2^2} + (2 + (n - 3))\frac{1}{2^3} + (n - 3)\frac{1}{2^4} = \frac{3n + 15}{16} \quad (6.36)$$

olur.

Alt Durum 6: v_j tepesi ($\forall j \neq i, k$ ve $(j) \bmod(n)$), $H_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde geriye kalan diğer $n - 5$ destek tepeden biri olsun. v_j tepesi, $N_{H_n \setminus \{v_i c\}}(v_j) = \{c, a_j, v_{j-1}, v_{j+1}\} ((j - 1) \bmod(n), (j + 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, a_{j-1} ve a_{j+1} uç tepelerine ve geriye kalan diğer $n - 4$ destek tepeye 2 uzaklıkta, $n - 4$ uç tepeye ve v_i destek tepesine 3 uzaklıkta, a_i uç tepesine 4 uzaklıktadır. O halde, v_j tepesinin, $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{H_n \setminus \{v_i c\}}(v_j) &= (4)\frac{1}{2^1} + (2 + (n - 4))\frac{1}{2^2} + ((n - 4) + 1)\frac{1}{2^3} + (1)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{6n + 19}{16} \end{aligned} \quad (6.37)$$

olur.

Alt Durum 7: $a_j ((j) \bmod(n))$ tepesi, $H_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde geriye kalan diğer $n - 5$ uç tepeden biri olsun. a_j tepesi, $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesinde v_j destek tepesine komşudur. O halde, Alt Durum 6'dan yararlanılarak a_j tepesinin, $H_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık

değeri,

$$\begin{aligned} C_{H_n \setminus \{v_i c\}}(a_j) &= (1)\frac{1}{2^1} + (3)\frac{1}{2^2} + (2 + (n-4))\frac{1}{2^3} + ((n-4) + 1)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{6n+27}{32} \end{aligned} \quad (6.38)$$

olur.

(6.32), (6.33), (6.34), (6.35), (6.36), (6.37) ve (6.38) değerlerinden,

$$C_{v_i c} = C(H_n \setminus \{v_i c\}) \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} C_{v_i c} &= C_{v_i c}(c) + C_{v_i c}(v_i) + C_{v_i c}(a_i) + 4C_{v_i c}(v_k) + 4C_{v_i c}(a_k) \\ &\quad + (n-5)C_{v_i c}(v_j) + (n-5)C_{v_i c}(a_j) \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$C_{v_i c} = \frac{9n^2 + 40n + 33}{16} \quad (6.41)$$

elde edilir.

Durum 3: $v_i a_i$ ($0 \leq i \leq n-1$) ayrıtı, H_n çizgesinden atılırsa, a_i uç tepesi $v_i a_i$ destek ayrıtına bitişik bir tepe olduğundan, Yardımcı Teorem 5.3'ten, $C_{v_i a_i} = C(H_n) - 2C_{H_n}(a_i)$ olur. Yardımcı Teorem 6.1 ve Yardımcı Teorem 6.2'den,

$$C_{v_i a_i} = \frac{n(9n+49)}{16} - 2\left(\frac{3n+15}{16}\right) = \frac{9n^2 + 43n - 30}{16} \text{ elde edilir.}$$

Ayrıt artık yakınlık tanımından, $R(H_n) = \min\{C_{v_i v_{i+1}}, C_{v_i c}, C_{v_i a_i}\}$ olur.

Durum 1, Durum 2 ve Durum 3'ten,

$$R(H_n) = \min \left\{ \frac{9n^2 + 49n - 18}{16}, \frac{9n^2 + 40n + 33}{16}, \frac{9n^2 + 43n - 30}{16} \right\} \text{ olur.}$$

$$\frac{9n^2 + 40n + 33}{16} < \frac{9n^2 + 49n - 18}{16} \text{ eşitsizliğinin } n > 5 \text{ için doğru olduğu}$$

açıktır.

$\frac{9n^2 + 40n + 33}{16} \leq \frac{9n^2 + 43n - 30}{16}$ eşitsizliğinin $n \geq 21$ için doğru olduğu açıktır.

$\frac{9n^2 + 43n - 30}{16} < \frac{9n^2 + 49n - 18}{16}$ eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır.

Böylece,

$$R(H_n) = \begin{cases} \frac{9n^2 + 43n - 30}{16}, & 6 \leq n < 21 \text{ ise;} \\ \frac{9n^2 + 40n + 33}{16}, & n \geq 21 \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.42)$$

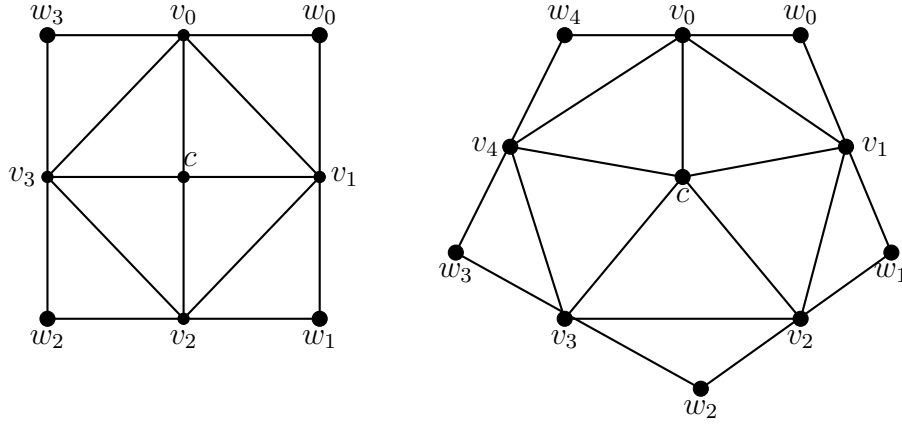
olur. $n < 6$ için değerler Tablo 6.1’de verilmiştir.

Tablo 6.1 $n < 6$ için değerler

n	3	4	5
$C_{v_i v_{i+1}}$	13,125	20,125	28,25
$C_{v_i c}$	13,5	20,5	28,625
$C_{v_i a_i}$	11,25	17,875	25,625
R	11,25	17,875	25,625

6.3 Ayçiçeği Çizge

Tanım 6.3: W_n tekerlek çizgeye $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ olmak üzere, n adet ek tepe eklenir. Ardından, w_i tepesi ($0 \leq i \leq n-1$) ile, W_n çizgesinin dış çevresindeki v_i ve v_{i+1} tepeleri ($0 \leq i \leq n-1, (i+1) \bmod(n)$) arasına birer ayrıt eklenmesi elde edilen çizgeye ayçiçeği çizge denir ve SF_n ile gösterilir (Gallian, 2012). SF_n çizgesi $2n+1$ tepe ve $4n$ ayrıta sahiptir. w_i tepesi ($0 \leq i \leq n-1$) için $\deg(w_i) = 2$, v_i tepesi ($0 \leq i \leq n-1$) için $\deg(v_i) = 5$ ve c tepesi, SF_n çizgesinin merkez tepesi olmak üzere $\deg(c) = n$ olur.



Şekil 6.3 $n = 4$ için 9 tepeli, 16 ayrıtlı ayçiçeği çizge SF_n ve $n = 5$ için 11 tepeli, 20 ayrıtlı ayçiçeği çizge SF_n

Teorem 6.3: SF_n ($n > 5$), $2n + 1$ tepeli ayçiçeği çizge olmak üzere,

$$R(SF_n) = \begin{cases} \frac{9n^2 + 61n + 24}{16}, & n > 6 \text{ ise;} \\ \frac{9n^2 + 67n - 18}{16}, & n = 6 \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.43)$$

İspat: SF_n çizgesinden atılacak olan ayrıta bağlı olarak üç durum söz konusudur:

Durum 1: $v_i c$ ($0 \leq i \leq n - 1$) ayrıtı, SF_n çizgesinden atılırsa geriye $SF_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesi kalır. $SF_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için, tepelerine bağlı olarak altı alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $SF_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde, $N_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(c) = \{v_m \mid \forall m \neq i, 0 \leq m \leq n - 1\}$ kümesinde bulunan $n - 1$ tepeye komşu, v_i tepesine ve geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan n tepeye 2 uzaklıktadır. O halde c tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(c) = (n - 1) \frac{1}{2^1} + (1 + n) \frac{1}{2^2} = \frac{3n - 1}{4} \quad (6.44)$$

olur.

Alt Durum 2: v_i tepesi, $SF_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye,

tepe derecesi 2 olan 2 tepeye komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye ve tepe derecesi 5 olan $n - 5$ tepeye 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 6$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde v_i tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(v_i) &= (2 + 2) \frac{1}{2^1} + (2 + 2 + 1) \frac{1}{2^2} + (2 + (n - 5)) \frac{1}{2^3} + (n - 6) \frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n + 40}{16} \end{aligned} \quad (6.45)$$

olur.

Alt Durum 3: v_j ($j = i - 2, i - 1, i + 1, i + 2; (j) \bmod(n)$) tepesi $SF_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye ve c merkez tepesine komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye ve geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 3$ tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 4$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_j tepesinin $SF_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(v_j) &= (2 + 2 + 1) \frac{1}{2^1} + (2 + (n - 3)) \frac{1}{2^2} + (n - 4) \frac{1}{2^3} \\ &= \frac{3n + 14}{8} \end{aligned} \quad (6.46)$$

olur.

Alt Durum 4: v_k ($\forall k \neq i, j$ ve $(k) \bmod(n)$) tepesi, $SF_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 5$ tepeden biri olsun. v_k tepesi, $N_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(v_k) = \{c, v_{k-1}, v_{k+1}, w_{k-1}, w_{k+1}\} ((k + 1) \bmod(n), (k - 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, tepe derecesi 5 olan $n - 4$ tepeye 2 uzaklıkta, v_i tepesine 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 4$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_k tepesinin $SF_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(v_k) &= (2 + 2 + 1) \frac{1}{2^1} + (2 + (n - 4)) \frac{1}{2^2} + (1 + (n - 4)) \frac{1}{2^3} \\ &= \frac{3n + 13}{8} \end{aligned} \quad (6.47)$$

olur.

Alt Durum 5: w_t ($t = i - 3, i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2; (t) \bmod(n)$) tepesi, $SF_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde $N_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(w_t) = \{v_t, v_{t+1}\} ((t + 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye ve tepe derecesi 5 olan $n - 4$ tepeye 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 5$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_t tepesinin $SF_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(w_t) &= (2)\frac{1}{2^1} + (2 + 2 + 1)\frac{1}{2^2} + (2 + (n - 4))\frac{1}{2^3} + (n - 5)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n + 27}{16} \end{aligned} \quad (6.48)$$

olur.

Alt Durum 6: w_p ($\forall p \neq t$ ve $(p) \bmod(n)$) tepesi, $SF_n \setminus \{v_i c\}$ alt çizgesinde geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 6$ tepeden biri olsun. w_p tepesi, $N_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(w_p) = \{v_p, v_{p+1}\} ((p + 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, tepe derecesi 5 olan $n - 5$ tepeye 3 uzaklıkta, v_i tepesine ve geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 5$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_p tepesinin $SF_n \setminus \{v_i c\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i c\}}(w_p) &= (2)\frac{1}{2^1} + (2 + 2 + 1)\frac{1}{2^2} + (2 + (n - 5))\frac{1}{2^3} + (1 + (n - 5))\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n + 26}{16} \end{aligned} \quad (6.49)$$

olur.

(6.44), (6.45), (6.46), (6.47), (6.48) ve (6.49) değerlerinden,

$$C_{v_i c} = C(SF_n \setminus \{v_i c\}) \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} C_{v_i c} = & C_{v_i c}(c) + C_{v_i c}(v_i) + 4C_{v_i c}(v_j) + (n-5)C_{v_i c}(v_k) + 6C_{v_i c}(w_t) \\ & + (n-6)C_{v_i c}(w_p) \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} C_{v_i c} = & \frac{3n-1}{4} + \frac{3n+40}{16} + 4\left(\frac{3n+14}{8}\right) + (n-5)\left(\frac{3n+13}{8}\right) \\ & + 6\left(\frac{3n+27}{16}\right) + (n-6)\left(\frac{3n+26}{16}\right) \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$C_{v_i c} = \frac{9n^2 + 61n + 24}{16} \quad (6.53)$$

elde edilir.

Durum 2: $v_i v_{i+1}$ ($0 \leq i \leq n-1$; $(i+1) \bmod(n)$) ayrıtı, SF_n çizgesinden atılırsa geriye kalan $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için, tepelerine bağlı olarak beş alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinde, tepe derecesi 5 olan tüm tepelere komşu, tepe derecesi 2 olan tüm tepelere 2 uzaklıktadır. O halde, c tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(c) = (n)\frac{1}{2^1} + (n)\frac{1}{2^2} = \frac{3n}{4} \quad (6.54)$$

olur.

Alt Durum 2: v_j ($j = i, i+1$; $(j) \bmod(n)$) tepesi, $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinde, tepe derecesi 5 olan 1 tepeye, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, c merkez tepesine komşu, tepe derecesi 2 olan 1 tepeye, tepe derecesi 5 olan $n-2$ tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n-3$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde v_j tepesinin,

$SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(v_j) &= (1 + 2 + 1) \frac{1}{2^1} + (1 + (n - 2)) \frac{1}{2^2} + (n - 3) \frac{1}{2^3} \\ &= \frac{3n + 11}{8} \end{aligned} \quad (6.55)$$

olur.

Alt Durum 3: v_t ($\forall t \neq i, i + 1$ ve $(t) \bmod(n)$) tepesi, $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinde geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 2$ tepeden herhangi biri olsun. v_t tepesi, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, c merkez tepesine komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 3$ tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 4$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde v_t tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(v_t) &= (2 + 2 + 1) \frac{1}{2^1} + ((n - 3) + 2) \frac{1}{2^2} + (n - 4) \frac{1}{2^3} \\ &= \frac{3n + 14}{8} \end{aligned} \quad (6.56)$$

olur.

Alt Durum 4: w_p ($p = i + 1, i - 1$; $(p) \bmod(n)$) tepesi, $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt çizgesinde, $N_{SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(w_p) = \{v_p, v_{p+1}\} ((p + 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, tepe derecesi 5 olan 1 tepeye, c merkez tepesine 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 1 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 3$ tepeye 3 uzaklıkta, geriye kalan tepe derecesi 2 olan $n - 4$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_p tepesinin $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(w_p) &= (2) \frac{1}{2^1} + (2 + 1 + 1) \frac{1}{2^2} + (1 + (n - 3)) \frac{1}{2^3} + (n - 4) \frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n + 24}{16} \end{aligned} \quad (6.57)$$

olur.

Alt Durum 5: w_k ($\forall k \neq i + 1, i - 1$ ve $(k) \bmod(n)$) tepesi, $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ alt

çizgesinde geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 2$ tepeden herhangi biri olsun. w_k tepesi, $N_{SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(w_k) = \{v_i, v_{i+1}\}$ kümesinde bulunan tepelere komşu, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye ve c merkez tepesine 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 4$ tepeye 3 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan $n - 5$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_k tepesinin $SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}}(w_k) &= (2)\frac{1}{2^1} + (2 + 2 + 1)\frac{1}{2^2} + (2 + (n - 4))\frac{1}{2^3} + (n - 5)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n + 27}{16} \end{aligned} \quad (6.58)$$

olur.

(6.54), (6.55), (6.56), (6.57) ve (6.58) değerlerinden,

$$C_{v_i v_{i+1}} = C(SF_n \setminus \{v_i v_{i+1}\}) \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} C_{v_i v_{i+1}} &= C_{v_i v_{i+1}}(c) + 2C_{v_i v_{i+1}}(v_j) + (n - 2)C_{v_i v_{i+1}}(v_t) + 2C_{v_i v_{i+1}}(w_p) \\ &\quad + (n - 2)C_{v_i v_{i+1}}(w_k) \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} C_{v_i v_{i+1}} &= \frac{3n}{4} + 2\left(\frac{3n + 11}{8}\right) + (n - 2)\left(\frac{3n + 14}{8}\right) + 2\left(\frac{3n + 24}{16}\right) \\ &\quad + (n - 2)\left(\frac{3n + 27}{16}\right) \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$C_{v_i v_{i+1}} = \frac{9n^2 + 67n - 18}{16} \quad (6.62)$$

elde edilir.

Durum 3: $v_i w_j$ ($0 \leq i, j \leq n - 1, j = i$ veya $j = i - 1$) ayrıtı, SF_n çizgesinden atılırsa, geriye kalan $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için tepelerine bağlı olarak sekiz alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinde, tepe derecesi 5 olan tüm

tepelere komşu, tepe derecesi 2 olan tüm tepelere 2 uzaklıktadır. O halde, c tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(c) = (n) \frac{1}{2^1} + (n) \frac{1}{2^2} = \frac{3n}{4} \quad (6.63)$$

olur.

Alt Durum 2: v_i tepesi, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinde, c merkez tepesine, tepe derecesi 2 olan 1 tepeye, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye komşu, tepe derecesi 2 olan 3 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 3$ tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 4$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_i tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(v_i) = (4) \frac{1}{2^1} + ((n - 3) + 3) \frac{1}{2^2} + (n - 4) \frac{1}{2^3} = \frac{3n + 12}{8} \quad (6.64)$$

olur.

Alt Durum 3: $v_k \left(k = \begin{cases} i - 1, & j = i \text{ ise;} \\ i + 1, & j = i - 1 \text{ ise.} \end{cases} \right) ((k) \bmod(n))$ tepesi $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinde, c merkez tepesine, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye komşu, tepe derecesi 2 olan 1 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 3$ tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 3$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_k tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(v_k) = (5) \frac{1}{2^1} + ((n - 3) + 1) \frac{1}{2^2} + (n - 3) \frac{1}{2^3} = \frac{3n + 13}{8} \quad (6.65)$$

olur.

Alt Durum 4: v_t ($\forall t \neq i, k$) ve $((t) \bmod(n))$ tepesi, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinde, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 2$ tepeden herhangi biri olsun. v_t tepesi, $N_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(v_t) = \{c, v_{t-1}, v_{t+1}, w_t, w_{t-1}\} ((t-1) \bmod(n), (t+1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi

5 olan $n - 3$ tepeye 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 4$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v_t tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(v_t) = (5)\frac{1}{2^1} + ((n - 3) + 2)\frac{1}{2^2} + (n - 4)\frac{1}{2^3} = \frac{3n + 14}{8} \quad (6.66)$$

olur.

Alt Durum 5: w_j tepesi, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinde, tepe derecesi 5 olan 1 tepeye komşu, c merkez tepesine, tepe derecesi 2 olan 1 tepeye, biri v_i tepesi olmak üzere tepe derecesi 5 olan 2 tepeye 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 3$ tepeye 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 4$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_j tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(w_j) &= (1)\frac{1}{2^1} + (4)\frac{1}{2^2} + ((n - 3) + 2)\frac{1}{2^3} + (n - 4)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n + 18}{16} \end{aligned} \quad (6.67)$$

olur.

Alt Durum 6: $w_m \left(m = \begin{cases} j - 1, & j = i \text{ ise;} \\ i, & j = i - 1 \text{ ise.} \end{cases} \right) ((m) \bmod(n))$ tepesi, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinde, $N_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(w_m) = \{v_m, v_{m+1}\} ((m + 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, c merkez tepesine, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye, tepe derecesi 2 olan 1 tepeye 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 3 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n - 4$ tepeye 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n - 5$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_m tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(w_m) &= (2)\frac{1}{2^1} + (4)\frac{1}{2^2} + ((n - 4) + 3)\frac{1}{2^3} + (n - 5)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n + 25}{16} \end{aligned} \quad (6.68)$$

olur.

Alt Durum 7: $w_p \left(p = \begin{cases} j-2, & j=i \text{ ise;} \\ i+1, & j=i-1 \text{ ise.} \end{cases} \right) ((p) \bmod(n))$ tepesi, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinde, $N_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(w_p) = \{v_p, v_{p+1}\} ((p+1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan tepelere komşu, c merkez tepesi, tepe derecesi 5 olan 2 tepe, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 1 tepe, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n-4$ tepeye 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n-4$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_p tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(w_p) &= (2)\frac{1}{2^1} + (5)\frac{1}{2^2} + ((n-4)+1)\frac{1}{2^3} + (n-4)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n+26}{16} \end{aligned} \quad (6.69)$$

olur.

Alt Durum 8: $w_r (\forall r \neq j, m, p \text{ ve } (r) \bmod(n))$ tepesi, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ alt çizgesinde, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n-3$ tepeden herhangi biri olsun. w_r tepesi, $N_{SF \setminus \{v_i w_j\}}(w_r) = \{v_r, v_{r+1}\} ((r+1) \bmod(n))$ kümesindeki tepelere komşu, c merkez tepesine, tepe derecesi 5 olan 2 tepeye, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye 2 uzaklıkta, tepe derecesi 2 olan 2 tepeye, geriye kalan diğer tepe derecesi 5 olan $n-4$ tepeye 3 uzaklıkta, geriye kalan diğer tepe derecesi 2 olan $n-5$ tepeye 4 uzaklıktadır. O halde, w_r tepesinin, $SF_n \setminus \{v_i w_j\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$\begin{aligned} C_{SF_n \setminus \{v_i w_j\}}(w_r) &= (2)\frac{1}{2^1} + (5)\frac{1}{2^2} + ((n-4)+2)\frac{1}{2^3} + (n-5)\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3n+27}{16} \end{aligned} \quad (6.70)$$

olur.

(6.63), (6.64), (6.65), (6.66), (6.67), (6.68), (6.69) ve (6.70) değerlerinden,

$$C_{v_i w_j} = C(SF_n \setminus \{v_i w_j\}) \quad (6.71)$$

$$C_{v_i w_j} = C_{v_i w_j}(c) + C_{v_i w_j}(v_i) + C_{v_i w_j}(v_k) + (n-2)C_{v_i w_j}(v_t) + C_{v_i w_j}(w_j) + \\ C_{v_i w_j}(w_m) + C_{v_i w_j}(w_p) + (n-3)C_{v_i w_j}(w_r) \quad (6.72)$$

$$C_{v_i w_j} = \frac{3n}{4} + \frac{3n+12}{8} + \frac{3n+13}{8} + (n-2)\left(\frac{3n+14}{8}\right) + \frac{3n+18}{16} + \\ \frac{3n+25}{16} + \frac{3n+26}{16} + (n-3)\left(\frac{3n+27}{16}\right) \quad (6.73)$$

$$C_{v_i w_j} = \frac{9n^2 + 67n - 18}{16} \quad (6.74)$$

elde edilir.

Ayrıt artık yakınlık tanımından, $R(SF_n) = \min\{C_{v_i c}, C_{v_i v_{i+1}}, C_{v_i w_j}\}$ olur.

Durum 1, Durum 2 ve Durum 3'ten,

$$R(SF_n) = \min \left\{ \frac{9n^2 + 61n + 24}{16}, \frac{9n^2 + 67n - 18}{16}, \frac{9n^2 + 67n - 18}{16} \right\} \text{ olur.}$$

$\frac{9n^2 + 61n + 24}{16} \leq \frac{9n^2 + 67n - 18}{16}$ eşitsizliğinin $n \geq 7$ için doğru olduğu açıktır. O halde,

$$R(SF_n) = \begin{cases} \frac{9n^2 + 61n + 24}{16}, & n > 6 \text{ ise;} \\ \frac{9n^2 + 67n - 18}{16}, & n = 6 \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.75)$$

olur ve ispat tamamlanır.

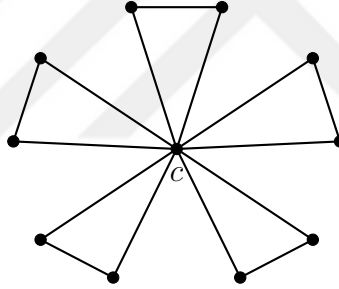
$n < 6$ için değerler Tablo 6.2'de verilmiştir.

Tablo 6.2 $n < 6$ için değerler

n	3	4	5
$C_{v_i c}$	16	30	34,5
$C_{v_i v_{i+1}}$	16	24,5	33,875
$C_{v_i w_j}$	15,75	24,5	33,875
R	15,75	24,5	33,875

6.4 Arkadaşlık Çizgesi

Tanım 6.4: n adet C_3 çevre çizgenin ortak bir tepeyi paylaşmasıyla elde edilen çizgeye arkadaşlık çizgesi denir ve f_n ile gösterilir (Gallian, 2012). f_n çizgesinin merkez tepesi c tepesi olmak üzere, $\deg(c) = 2n$ olur. f_n çizgesindeki diğer $2n$ tepenin derecesi 2 olur.



Şekil 6.4 $n = 5$ için arkadaşlık çizgesi f_n

Teorem 6.4: f_n , $2n + 1$ tepeli arkadaşlık çizgesi olmak üzere,

$$R(f_n) = \frac{n(2n + 3)}{2}. \quad (6.76)$$

İspat: f_n çizgesinden atılacak ayrıta bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: $e = cv$ ayrıtı f_n çizgesinde, c merkez tepesine bitişik olan çevreye ait ayrıtlardan herhangi biri olsun. e ayrıtı, f_n çizgesinden atılırsa, geriye kalan $f_n \setminus \{e\}$ alt çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için tepelerine bağlı olarak dört alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $f_n \setminus \{e\}$ alt çizgesinde $2n - 1$ tepeye komşu, v tepesine 2 uzaklıktadır. O halde, c tepesinin $f_n \setminus \{e\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{f_n \setminus \{e\}}(c) = (2n - 1) \frac{1}{2^1} + (1) \frac{1}{2^2} = \frac{4n - 1}{4} \quad (6.77)$$

olur.

Alt Durum 2: v tepesi, $f_n \setminus \{e\}$ alt çizgesinde tepe derecesi 2 olan u tepesine komşu, c merkez tepesine 2 uzaklıkta, geriye kalan diğer $2n - 2$ tepeye 3 uzaklıktadır. O halde, v tepesinin $f_n \setminus \{e\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{f_n \setminus \{e\}}(v) = (1) \frac{1}{2^1} + (1) \frac{1}{2^2} + (2n - 2) \frac{1}{2^3} = \frac{n + 2}{4} \quad (6.78)$$

olur.

Alt Durum 3: u tepesi, $f_n \setminus \{e\}$ alt çizgesinde biri c merkez tepesi olmak üzere çevrenin 2 tepesine komşu, alt çizgede geriye kalan diğer $2n - 2$ tepeye 2 uzaklıktadır. O halde, u tepesinin $f_n \setminus \{e\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{f_n \setminus \{e\}}(u) = (2) \frac{1}{2^1} + (2n - 2) \frac{1}{2^2} = \frac{n + 1}{2} \quad (6.79)$$

olur.

Alt Durum 4: w tepesi, $f_n \setminus \{e\}$ alt çizgesinde geriye kalan diğer $n - 1$ çevrede bulunan, c merkez tepesinden farklı herhangi bir tepe olsun. w tepesi, ait olduğu çevrede, c merkez tepesi de dahil olmak üzere 2 tepeye komşu, diğer çevrelerde bulunan $2n - 3$ tepeye 2 uzaklıkta, v tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, w tepesinin $f_n \setminus \{e\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{f_n \setminus \{e\}}(w) = (2) \frac{1}{2^1} + (2n - 3) \frac{1}{2^2} + (1) \frac{1}{2^3} = \frac{4n + 3}{8} \quad (6.80)$$

olur.

(6.77), (6.78), (6.79) ve (6.80) değerlerinden,

$$C_e = C(f_n \setminus \{e\}) = C_e(c) + C_e(v) + C_e(u) + 2(n-1)C_e(w) \quad (6.81)$$

$$C_e = \frac{4n-1}{4} + \frac{n+2}{4} + \frac{n+1}{2} + (2(n-1))\left(\frac{4n+3}{8}\right) = \frac{n(2n+3)}{2} \quad (6.82)$$

elde edilir.

Durum 2: f ayrıtı, f_n çizgesinde uç noktalarından biri c merkez tepesi olmayan çevreye ait ayrıtlardan herhangi biri olsun. f ayrıtı, f_n çizgesinden atılırsa, geriye kalan $f_n \setminus \{f\}$ alt çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için üç alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: c merkez tepesi, $f_n \setminus \{f\}$ alt çizgesinde, n çevrenin geriye kalan diğer tüm tepelerine komşudur. O halde, c tepesinin, $f_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{f_n \setminus \{f\}}(c) = (2n)\frac{1}{2^1} = n \quad (6.83)$$

olur.

Alt Durum 2: v tepesi, f ayrıtının iki uç tepesinden herhangi biri olmak üzere, $f_n \setminus \{f\}$ alt çizgesinde, c merkez tepeye komşu, geriye kalan diğer tüm tepelere 2 uzaklıktadır. O halde, v tepesinin, $f_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{f_n \setminus \{f\}}(v) = (1)\frac{1}{2^1} + (2(n-1) + 1)\frac{1}{2^2} = \frac{n+1}{2} \quad (6.84)$$

olur.

Alt Durum 3: u tepesi, $f_n \setminus \{f\}$ alt çizgesinde, c merkez tepesinden farklı geriye kalan diğer $n-1$ çevreye ait tepelerden herhangi biri olmak üzere, biri c merkez tepesi olmak üzere, ait olduğu çevrede 2 tepeye komşu, alt çizgede geriye kalan diğer tepelere 2 uzaklıktadır. O halde, u tepesinin, $f_n \setminus \{f\}$ çizgesindeki yakınlık değeri,

$$C_{f_n \setminus \{f\}}(u) = (2)\frac{1}{2^1} + (2(n-1))\frac{1}{2^2} = \frac{n+1}{2} \quad (6.85)$$

olur.

(6.83), (6.84) ve (6.85) değerlerinden,

$$C_f = C(f_n \setminus \{f\}) = C_f(c) + 2C_f(v) + 2(n-1)C_f(u) \quad (6.86)$$

$$C_f = n + 2\left(\frac{2n+1}{4}\right) + 2(n-1)\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{2n^2 + 4n - 1}{2} \quad (6.87)$$

elde edilir.

Ayrıt artık yakınlık tanımından, $R(f_n) = \min\{C_e, C_f\}$ olur.

Durum 1 ve Durum 2'den, $R(f_n) = \min\left\{\frac{n(2n+3)}{2}, \frac{2n^2 + 4n - 1}{2}\right\}$ olur.

$\frac{n(2n+3)}{2} \leq \frac{2n^2 + 4n - 1}{2}$ eşitsizliğinin $n \geq 1$ için doğru olduğu açıktır. O halde, $R(f_n) = \frac{n(2n+3)}{2}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM YEDİ

ÇİZGE İŞLEMLERİ VE AYRIT ARTIK YAKINLIK

Bu bölümde, çizge işlemlerinden birleşim ve toplama işlemi ele alınmış, birleşim ve toplama işlemi sonucunda elde edilen çizgelerin ayrıt artık yakınlık değerleri hesaplanmıştır.

7.1 Çizgelerde Birleşim

Tanım 7.1: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G_1 ve G_2 ayrık tepe kümelerine sahip olan iki çizge olsun. G_1 ve G_2 çizgelerinin birleşim işlemi sonucunda elde edilen $G = G_1 \cup G_2$ çizgesi, $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ tepe kümesi ve $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ ayrık kümesine sahiptir.

Teorem 7.1: $G_1, G_2, \dots, G_n$ ayrık çizgeler olsun. $G = \cup_{i=1}^n G_i$ ise,

$$R(G) = \min\{R(G_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n C(G_k)\} \quad (1 \leq j, k \leq n) \quad (7.1)$$

İspat: $e \in E(G_j)$ ($1 \leq j \leq n$) ayrıtı, G çizgesindeki bileşenlerden herhangi birine ait olan bir ayrıt olsun. e ayrıtı, G çizgesinden atılırsa, geriye $G \setminus \{e\}$ alt çizgesi kalır.

Teorem 3.2'den $G \setminus \{e\}$ çizgesinin yakınlık değeri,

$C(G \setminus \{e\}) = C(G_j \setminus \{e\}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n C(G_k)$ olur. Ayrıt artık yakınlık tanımından,

$$R(G) = \min\{C_e(G_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n C(G_k)\} \quad (1 \leq j \leq n) \quad (7.2)$$

$$R(G) = \min\{\min_t\{C_{et}(G_j)\} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n C(G_k)\} \quad (1 \leq j \leq n; 1 \leq t \leq |E(G_j)|) \quad (7.3)$$

$$R(G) = \min\{R(G_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n C(G_k)\} \quad (7.4)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

7.2 Çizgelerde Toplama

Tanım 7.2: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G_1 ve G_2 ayrık tepe kümelerine sahip olan iki çizge olsun. G_1 ve G_2 çizgelerinin toplama işlemi sonucunda elde edilen $G = G_1 + G_2$ çizgesi, $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ tepeler kümesi ve $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u, v) | u \in V(G_1) \text{ ve } v \in V(G_2)\}$ ayrıtlar kümesine sahiptir.

Teorem 7.2: G_1, n_1 ($n_1 > 1$) tepeli ve m_1 ayrıtlı, G_2, n_2 ($n_2 > 1$) tepeli ve m_2 ayrıtlı iki ayrık çizge olmak üzere,

$$R(G_1 + G_2) = \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2 - n_1 - n_2 + 2m_1 + 2m_2 - 2}{4} \quad (7.5)$$

İspat: $G_1 + G_2$ çizgesinden atılacak ayrıta bağlı olarak üç durum söz konusudur:

Durum 1: $e = uv$ ayrıtı $u \in V(G_1)$ ve $v \in V(G_2)$ olmak üzere, $G_1 + G_2$ çizgesinde, G_1 ve G_2 çizgeleri arasında bulunan ayrıtlardan herhangi biri olsun. e ayrıtı, $G_1 + G_2$ çizgesinden atılırsa, geriye kalan $G_1 + G_2 \setminus \{e\}$ alt çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için dört alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: $u \in V(G_1)$ tepesi, $G_1 + G_2 \setminus \{e\}$ alt çizgesinde, $|N_{G_1+G_2 \setminus \{e\}}(u)| = \deg_{G_1}(u) + (n_2 - 1)$ tepeye komşudur, G_1 çizgesinin geriye kalan $n_1 - 1 - \deg_{G_1}(u)$ tepesine ve v tepesine 2 uzaklıktadır. O halde,

$$C_e(u) = (\deg_{G_1}(u) + n_2 - 1) \frac{1}{2^1} + (n_1 - 1 - \deg_{G_1}(u) + 1) \frac{1}{2^2} \quad (7.6)$$

$$C_e(u) = \frac{n_1 + 2n_2 - 2 + \deg_{G_1}(u)}{4} \quad (7.7)$$

olur.

Alt Durum 2: $w \in V(G_1)$ tepesi, $G_1 + G_2 \setminus \{e\}$ alt çizgesinde, G_1 çizgesinin u tepesinden farklı herhangi bir tepesi olsun. w tepesi $G_1 + G_2 \setminus \{e\}$ alt çizgesinde $|N_{G_1+G_2 \setminus \{e\}}(w)| = \deg_{G_1}(w) + n_2$ tepeye komşudur. G_1 çizgesinin geriye kalan $n_1 - 1 - \deg_{G_1}(w)$ tepesine 2 uzaklıktadır. O halde,

$$C_e(w) = (\deg_{G_1}(w) + n_2) \frac{1}{2^1} + (n_1 - 1 - \deg_{G_1}(w)) \frac{1}{2^2} \quad (7.8)$$

$$C_e(w) = \frac{n_1 + 2n_2 - 1 + \deg_{G_1}(w)}{4} \quad (7.9)$$

olur.

Alt Durum 3: $v \in V(G_2)$ tepesi için, Alt Durum 1'e benzer şekilde,

$$C_e(v) = (\deg_{G_2}(v) + n_1 - 1) \frac{1}{2^1} + (n_2 - 1 - \deg_{G_2}(v) + 1) \frac{1}{2^2} \quad (7.10)$$

$$C_e(v) = \frac{2n_1 + n_2 - 2 + \deg_{G_2}(v)}{4} \quad (7.11)$$

olur.

Alt Durum 4: $k \in V(G_2)$ tepesi, $G_1 + G_2 \setminus \{e\}$ alt çizgesinde, G_2 çizgesinin v tepesinden farklı herhangi bir tepesi olmak üzere, Alt Durum 2'ye benzer olarak,

$$C_e(k) = (\deg_{G_2}(k) + n_1) \frac{1}{2^1} + (n_2 - 1 - \deg_{G_2}(k)) \frac{1}{2^2} \quad (7.12)$$

$$C_e(k) = \frac{2n_1 + n_2 - 1 + \deg_{G_2}(k)}{4} \quad (7.13)$$

olur.

Alt Durum 1, 2, 3, 4'ten,

$$C_e = C_e(u) + (n_1 - 1)C_e(w) + C_e(v) + (n_2 - 1)C_e(k) \quad (7.14)$$

$$C_e = n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2 - n_1 - n_2 - 2 + (deg_{G_1}(u) + \sum_{\forall w \neq u} deg_{G_1}(w)) \\ + (deg_{G_2}(v) + \sum_{\forall k \neq v} deg_{G_2}(k)) \quad (7.15)$$

elde edilir.

Tanım 2.8'den, $C_e = \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2 - n_1 - n_2 + 2m_1 + 2m_2 - 2}{4}$ olur.

Durum 2: $f = xy$ ayrıtı $x, y \in V(G_1)$ olmak üzere, $G_1 + G_2$ çizgesinde, G_1 çizgesine ait herhangi bir ayrıt olsun. f ayrıtı, $G_1 + G_2$ çizgesinden atılırsa, geriye kalan $G_1 + G_2 \setminus \{f\}$ alt çizgesinin yakınlık değerini hesaplamak için dört alt durum söz konusudur:

Alt Durum 1: $x \in V(G_1)$ tepesi, $G_1 + G_2 \setminus \{f\}$ alt çizgesinde, $|N_{G_1+G_2 \setminus \{f\}}(x)| = n_2 + deg_{G_1}(x) - 1$ tepeye komşudur ve y tepesi de dahil olmak üzere G_1 çizgesinin geriye kalan $n_1 - 1 - (deg_{G_1}(x) - 1)$ tepesine 2 uzaklıktadır. O halde,

$$C_f(x) = (n_2 + deg_{G_1}(x) - 1) \frac{1}{2^1} + (n_1 - 1 - (deg_{G_1}(x) - 1)) \frac{1}{2^2} \quad (7.16)$$

$$C_f(x) = \frac{n_1 + 2n_2 - 2 + deg_{G_1}(x)}{4} \quad (7.17)$$

olur.

Alt Durum 2: $y \in V(G_1)$ tepesi için, Alt Durum 1'e benzer şekilde,

$$C_f(y) = \frac{n_1 + 2n_2 + deg_{G_1}(y) - 2}{4} \quad (7.18)$$

elde edilir.

Alt Durum 3: $z \in V(G_1)$ tepesi, $G_1 + G_2 \setminus \{f\}$ alt çizgesinde, x ve y tepelerinden farklı herhangi bir tepe olsun. z tepesi, $|N_{G_1+G_2 \setminus \{f\}}(z)| = n_2 + deg_{G_1}(z)$ tepeye komşudur ve G_1 çizgesinde geriye kalan

diğer $n_1 - 1 - \deg_{G_1}(z)$ tepeye 2 uzaklıktadır. O halde,

$$C_f(z) = (n_2 + \deg_{G_1}(z))\frac{1}{2^1} + (n_1 - 1 - \deg_{G_1}(z))\frac{1}{2^2} \quad (7.19)$$

$$C_f(z) = \frac{n_1 + 2n_2 - 1 + \deg_{G_1}(z)}{4} \quad (7.20)$$

olur.

Alt Durum 4: $t \in V(G_2)$ tepesi, $G_1 + G_2 \setminus \{f\}$ alt çizgesinde G_2 çizgesine ait herhangi bir tepe olsun. t tepesi, $|N_{G_1+G_2 \setminus \{f\}}(t)| = n_1 + \deg_{G_2}(t)$ tepeye komşudur ve G_2 çizgesinin geriye kalan $n_2 - 1 - (\deg_{G_2}(t))$ tepesine 2 uzaklıktadır. O halde

$$C_f(t) = (n_1 + \deg_{G_2}(t))\frac{1}{2^1} + (n_2 - 1 - \deg_{G_2}(t))\frac{1}{2^2} \quad (7.21)$$

$$C_f(t) = \frac{2n_1 + n_2 - 1 + \deg_{G_2}(t)}{4} \quad (7.22)$$

olur.

Alt Durum 1, 2, 3, 4'ten,

$$C_f = C_f(x) + C_f(y)(n_1 - 2)C_f(z) + (n_2)C_f(t) \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} C_f = & n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2 - n_1 - n_2 - 2 + \deg_{G_1}(x) + \deg_{G_1}(y) \\ & + \sum_{\forall z \neq x,y} \deg_{G_1}(z) + \sum_{\forall t} \deg_{G_2}(t) \end{aligned} \quad (7.24)$$

olur. Tanım 2.8'den, $C_f = \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2 - n_1 - n_2 + 2m_1 + 2m_2 - 2}{4}$ elde edilir.

Durum 3: g ayrıtı, $G_1 + G_2$ çizgesinde, G_2 çizgesine ait bir ayrıtı olsun. g ayrıtı, $G_1 + G_2$ çizgesinden atılırsa, geriye kalan $G_1 + G_2 \setminus \{g\}$ alt çizgesinin yakınlık değeri Durum 2'ye benzer şekilde hesaplanır ve

$$C_g = \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2 - n_1 - n_2 + 2m_1 + 2m_2 - 2}{4} \quad \text{elde edilir.}$$

Durum 1, Durum 2, Durum 3 ve ayrıt artık yakınlık tanımından,

$$R(G_1 + G_2) = \min\{C_e, C_f, C_g\} = \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2 - n_1 - n_2 + 2m_1 + 2m_2 - 2}{4}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.



BÖLÜM SEKİZ

AYRIT ARTIK YAKINLIK ALGORİTMASI

Bu bölümde, bir çizgenin ayrıt artık yakınlık değerinin hesaplanması için literatürde mevcut olan Floyd-Warshall algoritmasından yararlanılarak polinom zamanlı bir algoritma tasarlanmıştır.

8.1 Floyd-Warshall Algoritması

Floyd-Warshall algoritması, ayrıtları ağırlıklandırılmış yönlü ve negatif çevre içermeyen bir çizgenin tüm tepe çiftleri arasındaki en kısa yolları hesaplamak için kullanılan bir algoritmadır (Floyd, 1962). Bu algoritma, n tepeli çizgeler için $O(n^3)$ zaman karmaşıklığına sahiptir.

Algoritma 1 SHORTEST PATH, ROBERT W. FLOYD

```
procedure shortest path ( $m, n$ ); value  $n$ ; integer  $n$ ; array  $m$ ;  
comment Initially  $m[i, j]$  is the length of a direct link from point  $i$  of a network to  
point  $j$ . If no direct link exists,  $m[i, j]$  is initially  $_{10}10$ . At completion,  $m[i, j]$  is  
the length of the shortest path from  $i$  to  $j$ . If none exists,  $m[i, j]$  is  $_{10}10$ . Reference:  
WARSHALL, S. A theorem on Boolean matrices. J, ACM 9(1962), 11-12;  
begin  
  integer  $i, j, k$ ; real  $inf, s$ ;  $inf := _{10}10$ ;  
  for  $i := 1$  step 1 until  $n$  do  
    for  $j := 1$  step 1 until  $n$  do  
      if  $m[j, i] < inf$  then  
        for  $k := 1$  step 1 until  $n$  do  
          if  $m[i, k] < inf$  then  
            begin  $s := m[j, i] + m[i, k]$ ;  
            if  $s < m[j, k]$  then  $m[j, k] := s$   
          end  
        end  
      end  
    end  
  end shortest path
```

8.2 Ayırıt Artık Yakınlık Algoritması

n tepeli bir çizgenin ayırıt artık yakınlık değerinin hesaplanması için Floyd-Warshall algoritması kullanılarak bir algoritma tasarlanmıştır. Ayırıt artık yakınlık algoritması, çizgede bulunan her bir ayırıtı diğer ayırıtlardan bağımsız olarak ele alır ve bu ayırıtın çizgeden atılması sonucu geriye kalan alt çizgenin yakınlık değerini hesaplar. G çizgesinin komşuluk matrisi,

$$A[i, j] = \begin{cases} 1, & i \text{ ve } j \text{ tepeleri } G \text{ çizgesinde birbirine komşu ise;} \\ 0, & i = j \text{ veya } i \text{ ve } j \text{ tepeleri } G \text{ çizgesinde birbirine komşu değil ise.} \end{cases}$$

olmak üzere, G çizgesinden uç tepeleri u ve v olan bir $e = uv$ ayırıtı atıldıktan sonra, geriye kalan $G \setminus \{e\}$ alt çizgesi için

$$d[i, j] = \begin{cases} 1, & G \setminus \{e\} \text{ çizgesinde } i \text{ ve } j \text{ tepeleri birbirine komşu ise;} \\ 0, & i = j \text{ ise;} \\ \infty, & G \setminus \{e\} \text{ çizgesinde } i \text{ ve } j \text{ tepeleri birbirine komşu değil ise.} \end{cases}$$

matrisi oluşturulur. d matrisi üzerinde Floyd-Warshall algoritması çalıştırılarak $G \setminus \{e\}$ çizgesi için uzaklık matrisi elde edilir. d uzaklık matrisi kullanılarak $G \setminus \{e\}$ çizgesinin yakınlık değeri hesaplanır ve bu değer $yakınlık_G \setminus \{e\}$ değişkeninde tutulur. G çizgesinden atılan ilk $e = uv$ ayırıtı için bu ayırıtın uç noktaları $tepe1$ ve $tepe2$ değişkenlerinde, $G \setminus \{e\}$ çizgesinin yakınlık değeri min değişkeninde saklanır. G çizgesinden ayırıt atma işlemi, çizgede mevcut olan sıradaki $e = uv$ ayırıtı ile devam eder ve bu ayırıt için de ilk ayırıtı uygulanan adımlar tekrarlanır. Algoritma çıktı olarak çizgenin ayırıt artık yakınlık değerini ve bu değere sahip olan ayırıtı verir. Ayırıt artık yakınlık algoritması polinom zamanlı bir algoritmadır ve n tepeli bir çizge için $O(n^5)$ zaman karmaşıklığına sahiptir.

Algoritma 2 Ayırt Artık Yakınlık Algoritması

A : array[1.. n ,1.. n] of boolean;
 d : array[1.. n ,1.. n] of nonnegative integer;
 $i, j, k, u, v, n, tepe1, tepe2$: nonnegative integer;
 $yakinlik_G \setminus \{e\}$, min: real;
begin
 $min \leftarrow \infty$
 for $i \leftarrow 1$ to n **do**
 for $j \leftarrow 1$ to n **do** read $A[i, j]$;
 end for
 end for
 for $u \leftarrow 1$ to n **do**
 for $v \leftarrow u + 1$ to n **do**
 if ($A[u, v]$) = 1 **then**
 begin
 ($A[u, v]$) = 0;
 ($A[v, u]$) = 0;
 for $i \leftarrow 1$ to n **do**
 for $j \leftarrow 1$ to n **do**
 if $i = j$ **then** $d[i, j] \leftarrow 0$
 else if ($A[i, j]$) = 1 **then** $d[i, j] \leftarrow 1$
 else $d[i, j] \leftarrow \infty$;
 end if
 end for
 end for
 for $k \leftarrow 1$ to n **do**
 for $i \leftarrow 1$ to n **do**
 for $j \leftarrow 1$ to n **do**
 if $d[i, k] + d[k, j] < d[i, j]$ **then**
 $d[i, j] \leftarrow d[i, k] + d[k, j]$;
 end if
 end for
 end for
 end for
 $yakinlik_G \setminus \{e\} \leftarrow 0$;
 for $i \leftarrow 1$ to n **do**
 for $j \leftarrow 1$ to n **do**
 if $i \neq j$ and $d[i, j] \neq \infty$ **then**
 $yakinlik_G \setminus \{e\} \leftarrow$
 $yakinlik_G \setminus \{e\} + 1/2^{d[i, j]}$;
 end if
 end for
 end for
 if $yakinlik_G \setminus \{e\} < min$ **then**
 begin
 $min \leftarrow yakinlik_G \setminus \{e\}$;
 $tepe1 \leftarrow u$;
 $tepe2 \leftarrow v$;
 end
 end if
 $A[u, v] = 1$;
 $A[v, u] = 1$;
 end
 end if
 end for
 print('R(G) =', min , 'e :', $tepe1$, '-', $tepe2$);
end for
end

BÖLÜM DOKUZ

SONUÇLAR

Bu tezde, yeni bir ağ zedelenebilirlik ölçümü olan ayrıt artık yakınlık parametresi çalışılmıştır. Ayrıt artık yakınlık parametresinin tanımı yapılmış ve parametre ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıt artık yakınlık parametresinin, daha önce tanımlanmış olan ayrıt zedelenebilirlik parametrelerinden daha hassas bir ölçüm olduğu belirtilmiştir. Temel çizge sınıfları için ayrıt artık yakınlık değerleri hesaplanmıştır. Çizge işlemlerinden birleşim ve toplama için ayrıt artık yakınlık değerleri bulunmuştur.

Temel çizge tiplerinin ayrıt artık yakınlık değerlerinin hesaplanması önemlidir. Her çizge başka bir çizgenin alt çizgesi olduğundan temel çizge tipleri için bulunan sonuçlardan kompleks çizgelerin ayrıt artık yakınlık değerlerinin hesaplanması için yararlanılır.

Ayrıt artık yakınlık, çizgenin ayrıt-bağlantılılık sayısı ile doğrudan ilişkili değildir. Çizgenin ayrıt artık yakınlık değerini veren ayrıt(lar), çizgenin ayrıt-bağlantılılık değerini veren ayrıt(lar) olmayabilir. Bu durum için dümen çizge H_n ($n \geq 21$) örnek çizgedir.

Yıldız çizge $K_{1,n-1}$, tekerlek çizge W_n , dişli çizge G_n ($n > 3$), dümen çizge H_n ($n \geq 21$), ayçiçeği çizge SF_n ($n > 6$) ve arkadaşlık çizgesi f_n için ayrıt artık yakınlık değerini veren ayrıtlar, bu çizgelerin merkez tepelerine bitişik olan ayrıtlardır; dolayısıyla merkezle bağlantılı olan ayrıtlar bu çizgelerde iletişimin hızlı ve etkin olmasını sağlayan ayrıtlardır.

Son bölümde ise, bir çizgenin ayrıt artık yakınlık değerini bulan polinom zamanlı bir algoritma önerilmiştir.

KAYNAKLAR

- Aslan, E. (2014). A measure of graphs vulnerability: Edge scattering number. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 4, 53-60.
- Aytaç, A ve Odabaş Berberler, Z. N. (2011). Residual closeness in wheels and related networks. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 22(5), 1229-1240.
- Aytaç, A ve Odabaş Berberler, Z. N. (2017). Residual closeness for helm and sunflower graphs. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 7(2), 209-220.
- Aytaç, A ve Odabaş Berberler, Z. N. (2017). Robustness of regular caterpillars. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 28(7), 835-841.
- Aytaç, A ve Odabaş Berberler, Z. N. (2018). Network robustness and residual closeness. *RAIRO Operations Research*, 52, 839-847.
- Bagga, K. S., Beineke, L. W. ve Pippert, R. E. (1994). Edge integrity: a survey. *Discrete Mathematics*, 124, 3-12.
- Bauer, D., Hakimi, S. L. ve Schmeichel, E. (1990). Recognizing tough graphs is NP-hard. *Discrete Applied Mathematics*, 28, 191-195.
- Buckley, F. ve Harary, F. (1990). *Distance in graphs*. California: Addison-Wesley.
- Chartrand, G. ve Lesniak, L. (1996). *Graphs and digraphs*. London: CRC Press.
- Chen, C. C., Koh, K. M. ve Peng, Y. H. (1993). On the higher-order edge toughness of a graph. *Discrete Mathematics*, 111, 113-123.
- Dangalchev, C. (2006). Residual closeness in networks. *Physica A*, 365(2), 556-564.
- Dangalchev, C. (2011). Residual closeness and generalized closeness. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 22(8), 1939-1948.
- Floyd, R. W. (1962). Algorithm 97: Shortest path. *Communication of the ACM*, 5(6), 345.

- Gallian, J. A. (2012). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 19, DS6.
- Javaid, I. ve Shokat, S. (2008). On the partition dimension of some wheel related graphs. *Journal of Prime Research in Mathematics*, 4, 154-164.
- Li, F., Ye, Q. ve Li, X. (2011). Tenacity and rupture degree of permutation graphs of complete bipartite graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 34(3), 423-434.
- Li, F., Ye, Q. ve Sun, Y. (2017). On edge-rupture degree of graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 292, 282-293.
- Mann, D. E. (1993). *The tenacity of trees*. Phd thesis, Northeastern University, Boston.
- Moazzami, D. (2011). An algorithm for the computation of edge integrity. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 6(11), 507-516.
- Odabaş, Z. N. ve Aytaç, A. (2013). Residual closeness in cycles and related networks. *Fundamenta Informaticae*, 124(3), 297-307.
- Piazza, L. B., Roberts, F. S. ve Stueckle, S. K. (1995). Edge-tenacious networks. *Networks*, 25, 7-17.
- Zhang, S., Li, X. ve Han, X. (2002). Computing the scattering number of graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 79(2), 179-187.

EKLER

EK 1: Tez Sonuçlarından Üretilen Çıktılar

Berberler, Z. N. ve Yiğit, E. (2017). Computing the link vulnerability of networks in polynomial time. In *I. International University Industry Cooperation, R&D and Innovation Congress*, 18-19 December, Manisa, Turkey, 92.

Berberler, Z. N. ve Yiğit, E. (2018). Link vulnerability in networks. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 29 (3), 447-456.

Yiğit, E. ve Berberler, Z. N. (2019). A note on the link residual closeness of graphs under join operation. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 30 (3), 417-423.

Yiğit, E. ve Berberler, Z. N. Link failure in wheel type networks. *International Journal of Modern Physics C*, <https://doi.org/10.1142/S0129183119500724>.