



RECEP TAYYİP
ERDOĞAN
ÜNİVERSİTESİ

**T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**AĞIR KUYRUKLU TALEP YAPISINA SAHİP YARI-MARKOV
ENVANTER SİSTEMLERDE İSTATİSTİKİ TAHMİN EDİCİLER**

(Yüksek Lisans Tezi)

Hamide Selin ÖZ

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK**

**RİZE
2024**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalında, Dr. Öğr. Üyesi Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK danışmanlığında, Hamide Selin ÖZ tarafından hazırlanan *Ağır Kuyruklu Talep Yapısına Sahip Yarı-Markov Envanter Sistemlerde İstatistiki Tahmin Ediciler* adlı bu tez çalışması 09/02/2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliğiyle/oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Ünvanı, Adı SOYADI

İmza

Başkan

:

Prof. Dr. Tülay YAZIR

Üye

:

Dr. Öğr. Üyesi Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

Üye

:

Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENGÜL

ETİK BEYAN

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Ağır Kuyruklu Talep Yapısına Sahip Yarı-Markov Envanter Sistemlerde İstatistiki Tahmin Ediciler” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine / kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılacak bir durumun ortaya çıkması halinde; üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

09/02/2024

(İmza)

Hamide Selin ÖZ

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmanın hazırlanma süreci boyunca fikirlerini, teşviklerini ve yönlendirmelerini benden bir an olsun esirgemeyen, tez konusunun belirlenmesinden sonuç aşamasına kadar her konuda bana rehberlik eden danışman hocam Dr. Öğretim Üyesi Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK' a teşekkür eder, en içten saygı ve minnetlerimi sunarım. Saygıdeğer hocamın, emekleri ve sürekli destekleri olmadan bu çalışma mümkün olamazdı.

Eğitim hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini arkamda hissettiğim annem, babam, kardeşim ve eşime sonsuz teşekkür ederim.

Hamide Selin ÖZ
2024/RİZE

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	VI
ABSTRACT.....	VII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	VIII
NOTASYONLAR	IX
TABLolar LİSTESİ.....	X
ŞEKİLLER LİSTESİ	XI
GİRİŞ	1
1. UÇ DEĞERLER TEORİSİNE GİRİŞ	5
1.1. Tarihçe.....	5
1.2. Sıradışı (Nadir Olaylar).....	6
1.3. Tanımlar ve Temel Özellikler	7
1.4. Bağımsız Aynı Dağılıma Sahip Rasgele Değişkenlerin Toplamları.....	8
1.4.1. Zayıf Büyük Sayılar ve Güçlü Büyük Sayılar Kanunu:	8
1.4.2. Merkezi Limit Teoremi:	9
1.5. Bağımsız Aynı Dağılıma Sahip Rasgele Değişkenlerin Maksimumu	9
1.6. Düzenli Değişen Fonksiyonlar Teorisi:	11
1.7. Maksima İçin Klasik Limit Kuralları.....	14
1.8. Genelleştirilmiş Uç Değerler Dağılımı	20
1.9. Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı.....	22
1.10. Eşik Seviyesini Aşan Değerler (ESAD) Yöntemi.....	26
1.10.1. Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı ile Parametre Tahmini	27
1.10.2. Dağılımların Kuyruklarının En Çok Olabilirlik Metodu İle tahmini ...	30
1.10.3. Eşik Değerinin Belirlenmesi	32
1.10.4. Sonsuz Varyanslı Ağır Kuyruklu Dağılıma Sahip Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri İçin Tahminci (Johansson Tahmincisi)	33
2. s, S TİPLİ KLASİK YARI MARKOV ENVANTER MODELLER	36

2.1. Sürecin Matematiksel Kurulumu, Ergodik Dağılımı ve Ergodik Dağılımının Momentleri için Kesin Formüller.....	38
3. LİTERATÜR ÖZETİ.....	41
4. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	48
4.1. s, S Tipli Envanter Modelin Ergodik Dağılımı İçin Uç Değerler Teorisine Dayalı İstatistiki Tahminci.....	48
4.2. s, S Tipli Envanter Modelin Ergodik Dağılımının n . Mertebeden Momentleri İçin Uç Değerler Teorisine Dayalı İstatistiki Tahminci.....	62
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	71
KAYNAKÇA.....	77



Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Anabilim Dalı : Matematik

Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

Hazırlayan : Hamide Selin ÖZ

Yıl : 2024

Sayfa Sayısı : 81

ÖZET

AĞIR KUYRUKLU TALEP YAPISINA SAHİP YARI-MARKOV ENVANTER SİSTEMLERDE İSTATİSTİKİ TAHMİN EDİCİLER

Envanter sistemleri ile ilgili problemlerde ağır kuyruklu dağılımlar sıklıkla gözlenmektedir. Talep miktarlarını ifade eden rastgele değişkenlerin kuyruklarının envanter sistemleri üzerinde önemli etkileri olduğu bilinmektedir. Beklenmeyen talep dalgalanmalarının bu sistemler üzerindeki uzun vadeli etkilerini tahmin edebilmek için, ağır kuyruklu talep miktarlarına sahip envanter kontrol modelleri istatistiksel olarak analiz edilmelidir.

Bu çalışmanın amacı, tıptan sigorta problemlerine kadar pek çok alanda etkin bir şekilde kullanılan uç değerlerteorisinin istatistiki ve matematiksel sağlam bir araştırma yöntemi olarak envanter sistemlerde kullanılabilirliğini bir uygulama ile ele almaktır. Bu kapsamda, yenileme fonksiyonları için uç değer teorisine dayalı istatistiki tahmin ediciler araştırılacaktır. Talep miktarları uç değerler üretme eğiliminde olan ağır kuyruklu dağılıma sahip yarı Markov bir stok kontrol model ele alınarak modeli ifade eden stokastik sürecin bazı karakteristikleri için uç değer teorisine dayalı istatistiksel tahmin ediciler önerilecektir. Daha sonra bu tahmin edicilerin asimptotik tutarlılık ve asimptotik normallik özellikleri araştırılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Uç değerler teorisi, ağır kuyruklu dağılımlar, yenileme fonksiyonu, istatistiki tahmin ediciler, yarı Markov envanter modeller.

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Mathematics

Thesis Type : Master's Thesis

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

Author : Hamide Selin ÖZ

Year : 2024

Pages : 81

ABSTRACT

STATISTICAL ESTIMATES IN SEMI-MARKOVIAN INVENTORY SYSTEMS WITH HEAVY-TAILED DEMAND STRUCTURE

Heavy-tailed distributions are frequently observed in problems related to inventory systems. It is known that the tails of random variables that express demand quantities have significant effects on inventory systems. In order to predict long term effects of unexpected demand fluctuations on these systems, inventory control models with heavy tailed demand quantities should be analyzed statistically.

The purpose of this study is to examine the applicability of extreme value theory, which has been used effectively in many fields from medicine to insurance problems, to inventory systems as a statistically and mathematically sound research method with an application. In this context, statistical estimators based on extreme value theory for renewal functions will be investigated. A semi-Markovian inventory control model with a heavy-tailed demand, which tends to produce extreme values, will be considered and statistical estimators based on extreme value theory will be proposed for some characteristics of the stochastic process expressing the model. Then, the consistency and asymptotic normality properties of these estimators will be investigated.

Keywords: Extreme value theory, heavy tailed distributions, renewal function, statistical estimates, semi-Markovian inventory models.

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

b.a.d	:	Bağımsız ve aynı dağılıma sahip
d.f	:	Dağılım fonksiyonu
d.d.f	:	Düzenli değişen fonksiyon
ESAD	:	Eşik seviyesini aşan değerler yöntemi
GPĐ	:	Genelleştirilmiş pareto dağılımı
GUD	:	Genelleştirilmiş Uç Değer Dağılımı
GUDT	:	Genelleştirilmiş uç değer teoremi
k.d.f	:	Kümülatif dağılım fonksiyonu
MÇA	:	Maximum çekim alanı
MLT	:	Merkezi limit teoremi
r.d.	:	Rastgele değişken
UDT	:	Uç değer teoremi
y.f.	:	Yenileme fonksiyonu
vd.	:	Ve diğerleri

NOTASYONLAR

$f(x) \sim g(x); x \rightarrow x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
F_n	Ampirik k.d.f
$\bar{F}(x)$	Kuyruk dağılımı, $1 - F(x)$.
$E(X)$	Rastgele değişken X 'in beklenen değeri
$\bar{X}$	$X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenlerinin ampirik ortalaması.
$F(x) * G(x)$	$F(x)$ ve $G(x)$ fonsiyonlarının konvolüsyonu.
$F_I(x)$	$F(x)$ 'in integralenmiş dağılım fonsiyonu
I_A	Bir A kümesinin gösterge fonsiyonu.
$N(\mu, \sigma^2)$	Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal (Gauss) dağılım.
$\xrightarrow{h.h.y.}$	Hemen hemen her yerde yakınsama
$\xrightarrow{d}$	Dağılıma göre yakınsama.
$\xrightarrow{P}$	Olasılıkta yakınsama.
$f(s) = O(g(s)), (s \in S)$	Tüm $s \in S$ için; $ f(s) \leq c g(s) $ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ sabiti vardır.
$f(s) = o(g(s)), (s \rightarrow s_0)$	$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s)}{g(s)} = 0$
$f(s) = O_p(g(s)), (s \rightarrow s_0)$	$P \left[\lim_{s \rightarrow s_0} \left \frac{f(s)}{g(s)} \right \leq M \right] = 1$ "M > 0" olacak şekilde bir sabit vardır
$f(s) = o_p(g(s)), (s \rightarrow s_0)$	$P \left[\lim_{s \rightarrow s_0} \left \frac{f(s)}{g(s)} \right = 0 \right] = 1$

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. Amerika Birleşik Devletleri tarihindeki en büyük kayıplara neden olan 10 felaket olayı	7
Tablo 2. Koşullu Aşanların Ortalaması.....	24



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Eşik Seviyesini Aşan Rasgele Değişkenler ve Aşım Miktarlarının Bir Realizasyonu.....	28
Şekil 2. Klasik (s,S) Tipli Envanter Modelin Bir Realizasyonu.....	37



GİRİŞ

Yaşadığımız fiziksel dünya literatürde sıradışı ya da katastrofik olaylar olarak adlandırılan olaylar ile kuşatılmıştır. Gerçekleşme olasılığı düşük fakat gerçekleştiğinde kayıp değeri olaya maruz kalan kişi veya kurumlar için yüksek olan olaylara katastrofik olaylar denir. Bu olaylar gerek ekonomik ve finansal krizler, gerekse kasırga ve tsunami gibi çevresel felaketler şeklinde kendilerini gösterebilirler. Risk yönetiminin ana konusu olan sıradışı olaylarla tıptan inşaat mühendisliği uygulamalarına, meteorolojiden finansal risk yönetimine ve envanter sistemlere kadar yaşamın birçok alanında karşılaşılmaktadır. Sıra dışı olayların meydana gelme zamanı ve olası etkileri konularında belirsizlik söz konusudur. Bu belirsizliğin belli bir düzeyde tahmin edilebilmesi ve ortadan kaldırılabilmesi için bazı bilimsel yöntemlerin kullanılarak bu olayların meydana gelme dinamiklerinin ve çalışılan sistem üzerindeki etkilerinin anlaşılması gerekmektedir.

Günümüzde sıradışı özellik gösteren olaylara ait verilerin ağır kuyruklu dağılım yapısı gösterdiği bilinmektedir. Olasılık teorisinde ağır kuyruklu dağılımlar üstel dağılım, normal dağılım gibi dağılımlara göre daha ağır kuyruk yapısına sahip dağılımlar olarak tanımlanırlar. Ağır kuyruklu dağılımların kuyruk ağırlıklarına göre sınıflandırılmalarında tehlike hızı fonksiyonu, kuyruk endeksi gibi pek çok farklı faktör rol oynar. Ağır kuyruklu dağılımlar ile hafif (ince) kuyruklu dağılımlar arasındaki temel fark; ince kuyruklu dağılımlarda moment çıkaran fonksiyon sonlu bir değer alırken, ağır kuyruklu dağılımlarda bu değer sonsuz olmasıdır (Asmussen, 2000). Buradan yola çıkarak reel sayılarda tanımlı bir F dağılım fonksiyonu her $\lambda > 0$ için aşağıdaki şartı sağlıyor ise F dağılımına sağdan ağır kuyruklu dağılıma sahiptir denir (Foss, 2011).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} F(dx) = \infty \quad (1)$$

Son zamanlarda sıra dışı olayların olasılığını tespit etme, risk yönetimi, sigorta teorisi ve envanter problemler gibi modern bilimin farklı alanlarında önemli bir çalışma konusu haline gelmiştir. Uç değerler teorisi (UDT) bu tür sıra dışı olayların istatistiksel modellemesi ve uç değerlerden kaynaklanan risklerin matematiksel hesaplaması için gereken sağlam temelleri sağlar.

Bu çalışmanın amacı, uç değerler teorisi kullanılarak yarı Markov (s, S) tipli bir envanter modeli ifade eden $X(t)$ stokastik sürecinin bazı özellikleri için istatistiksel tahminçiler elde etmektir.

Bu amaçla öncelikle yenileme fonksiyonu için uç değer teorisine dayalı farklı türde tahminçiler araştırılmıştır. Bu sürecin bazı temel özellikleri için matematiksel ve kesin formüller kullanılarak, ağır kuyruklu yarı Markov (s, S) tipli envanter modeli ifade eden bir stokastik süreç kurulmuştur. Son olarak $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu ve sürecinin ergodik dağılımının momentleri için yeni tahminçiler önermek amacıyla uç değer teoremi tabanlı yenileme fonksiyonu tahminçilerinin iyi bilinen sonuçları kullanılmıştır örneğin (Bebbington vd., 2007; Embrechts vd., 2001; Gumbell, 1958; Necir vd., 2010; Johansson, 2003; Peng, 2001).

Klasik istatistiğin aksine, ağır kuyruklu dağılımlar ve uç değerler analizi, uç olayların, yani düşük sıklıkta gerçekleşen ancak sonuçları olaya maruz kalan kişi ve kurumların büyük kaybına neden olabilen olayların modellenmesi ile ilgilenir. Bu nedenle uç değer analizinin uygulama alanı ve yöntemleri oldukça çeşitlidir. Uç değerler çalışmaları üzerine bilinen ilk çalışma, Gumbel, 1958 yılında yayınladığı kitabına kadar uzanmaktadır (Gumbel, 1958). Günümüzde aşırı değer analizi, meteoroloji (büyük fırtınalar, yoğun hava kirliliği, şiddetli yağışlar, kasırgalar), finans (risk altındaki değer, gelir dağılımı, güvence), bilgisayar bilimi (ağ trafiği verileri), biyoistatistik, envanter kontrolü (kitaplar ve moda endüstrisi gibi yaratıcı ürünlerdeki talep miktarları) gibi birçok farklı bilimsel alanın ana araçlarından biridir. Uç değerler teorisinin gerçek dünyadaki uygulaması hakkında daha fazla bilgi için, örneğin (Reiss ve Thomas, 2007; Castillo vd., 2005) kaynakları incelenebilir.

Bilindiği gibi extrem olaylara ait bilgiler dağılımların kuyruk kısmında yer alırlar. Bu nedenle uç değer analizi, ağır kuyruklu dağılımlar ve bir örneklemden büyük ölçümün analizi ile yakın ilişkiye sahiptir. Bu konuda daha detaylı bilgi için (Adler vd., 1998; Bektaş Kamışlık, 2017; Bingham vd., 1987; Crovella vd., 1998; Foss vd., 2001; Klüppelberg, 1988; Mikosch, 1999; Resnick, 2006) kaynakları incelenebilir.

Farklı özelliklerinden dolayı ağır kuyruklu dağılımların matematiksel ve istatistiksel analizi için özel yöntemlere ihtiyaç vardır. Ağır kuyruklu dağılımları diğer dağılımlardan ayıran özellikler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Üstel dağılımdan daha yavaş sifıra yaklaşırlar. Üstel dağılım, ağır kuyruklu ve hafif kuyruklu dağılımlar arasındaki bir sınırdır.

- Ağır kuyruklu dağılımlar Cramer kuralları olarak bilinene kurallara uymazlar.
- Her dereceden sonlu momentleri mevcut değildir.

Örneğin, merkezi limit teoremi, örneklem büyüklüğü arttıkça rastgele değişkenlerin orijinal dağılımından bağımsız olarak, örneklem ortalamasının Normal (Gauss) dağılımına zayıf bir şekilde yakınsadığını belirtir. Varyansın sonlu olduğu durumlarda merkezi limit teoremi bilinen dağılımların çoğu için geçerlidir. Bu nedenle, hafif kuyruklu dağılımların şekli, deneysel verilerle, özellikle de ortalama bir değer etrafında kümelenmiş verilerle çok uyumludur. Örneğin Türkiye'de yetişkin kadınların ortalama boyu 1,60 cm' dir. Her bireyin boyu nadiren bu değerden çok fazla sapmaktadır ve günlük yaşamda sıkça karşılaşılan bu tür verilerin dağılımı, beklenen değer ve varyans ile iyi karakterize edilmektedir. Kısacası, tüm bu örnekleri temel olarak üreten süreçler, merkezi limit teoremini sağlayan genel bir sınıfa dahil edilir.

Günümüzde normal dağılım varsayımından sapan birçok olay olduğu bilinmektedir. Özellikle son 15 yılda sosyal, biyolojik ve teknolojik sistemlerin modellenmesinde aşırı değerler içeren ve normal dağılım varsayımını sağlamayan çok sayıda veri olduğu gözlemlenmiştir. Bazı durumlarda, bu tür verileri temsil eden dağılımların varyansları veya ilk momentleri sonsuz olabilir, bu nedenle beklenen değer ve varyans bu verileri karakterize etmek için yeterli değildir.

Uç değer analizi, araştırılan modele göre iki farklı şekilde ele alınmaktadır. Bu yaklaşımlar toplamaların dalgalanması (fluctuations of sums) ve maksimumun dalgalanması (fluctuations of maxima) olarak bilinir (Embrechts vd., 2001). İlk yaklaşım, bağımsız rasgele değişkenlerin toplamaları ile ilgili temel teorileri ele alır. Bu yaklaşımda ağır kuyruklu dağılımlara sahip rasgele değişkenler için güçlü büyük sayılar kanununa benzer sonuçlar elde edilir. Bu durumda, verilerdeki aşırı uçları ele almak için klasik parametrik olmayan tahmin teknikleri ve ampirik dağılım ve ampirik momentler üzerine kurulu büyük örneklem yöntemi, kullanılır. Tahminde zorluğa neden olan faktör, aşırı değerler üreten dağılımların çoğunluğunun merkezi limit teoremini sağlamamasıdır. Merkezi limit teoreminin, asimptotik normallik ve güven aralıkları elde edilirken tahmin problemlerinin ana aracı olduğu iyi bilinmektedir. Bununla birlikte, asimptotik dağılımı elde etmek için Grubel ve Pitts, 1993

alışmasında tanıtılan ve Bebbington, 2007 çalışmasında yenileme fonksiyonunun tahmininde kullanılan başka bir yöntem daha vardır (Grübel ve Pitts, 1993; Bebbington, 2007). Bu yaklaşımda merkezi limit teoremi yerine, alfa kararlı rasgele değışkenlerin kararlı dağılımları ve çekim alanları kullanılmaktadır.

Son zamanlarda genel olarak güven aralıkları oluşturmak için, basit formüllere ve bir tür asimptotik normallik özelliğine sahip tahminciler daha çok tercih edilmektedir (Necir vd., 2010). Bu ihtiyaçtan dolayı klasik parametrik olmayan tahmin yöntemlerinin ve ESAD (Eşik Seviyesini Aşan değerler) tabanlı yarı parametrik tahmin yöntemleri öne sürülmüştür. Bu yöntem ilk olarak hidrolojistler tarafından bulunmuştur. ESAD metodunda belli bir eşik seviyesini aşan değerler aşağıda tanımlı verilen genelleştirilmiş Pareto dağılımı ile modellenirler:

$$G_{\sigma,\gamma}(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{\gamma - \mu}{\sigma}\right) x\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (2)$$

Bu tez çalışmasında ESAD tabanlı tahmin yöntemi ele alınacaktır. Toplamdaki dalgalanmaları ele alan ilk yöntemden farklı olarak ESAD yöntemi bir örneklemden maksimumların dalgalanmalarının incelenmesi üzerine kurulmuştur. Bu yaklaşım, dağılımın kuyruk kısmındaki sınırlı gözlemler nedeniyle özel yöntemler gerektirir. Örneğin, ilk yöntemde yenileme fonksiyonu genellikle ampirik bir dağılım fonksiyonu veya örnek istatistiklere dayanan ağırlıklı tahminciler aracılığıyla tahmin edilir. ESAD yöntemi, Balkema De Haan, 1974 yılında sabit bir eşik üzerindeki aşan değerlerin koşullu dağılımının genelleştirilmiş Pareto dağılımı ile yaklaşık olarak belirlendiğini söyleyen çalışmasının sonuçlarına dayanmaktadır (Balkema De Haan, 1974). Bu yöntem, herhangi bir bilinmeyen dağılımın kuyruklarının doğru bir şekilde modellenmesine olanak tanıyarak yarı parametrik istatistiksel çıkarımı ağır kuyruklu veriler için daha spesifik hale getirir. Bu tez çalışmasında ESAD tabanlı tahmin yöntemi hakkında daha detaylı bilgi verilip literatür taraması yapılacak, ayrıca bu yöntemin (s, S) tipli envanter modelini tanımlayan stokastik süreç $X(t)$ üzerine uygulanması araştırılacaktır.

1. UÇ DEĞERLER TEORİSİNE GİRİŞ

1.1. Tarihçe

Uç değer dağılımları üzerine ilk tarihsel araştırma Kotz ve Nadarajah, 2000 yılında yapmıştır (Kotz ve Nadarajah, 2000). Daha modern bir kavram olan en büyük değer dağılımı ilk olarak Von Bortkiewicz, 1922 yılında tanımlanmıştır (Von Bortkiewicz, 1922). Frechet, 1927 yılında maksimum sıra istatistikleri için olası bir limit dağılımı belirlemiş ve bir sonraki yıl Fisher Tippett, 1928 bu dağılımların sadece üç tipte olabileceğini göstermiştir (Frechet, 1927; Fisher Tippett, 1928). Von Mises, 1936 yılında bu türlerin her birine yakınsamalar için yeterli koşulları sunmuş ve Gnedenko, 1943 yılında zayıf yakınsama için gerekli ve yeterli koşullarla birlikte uç değer teorisinin temelini oluşturmuştur (Von Mises, 1936; Gnedenko, 1943). 1930' ların sonları ve 1940' larda, pratik uygulamalarla ilgilenen bir dizi makale yayınlanmıştır (Weibull, 1939; Gumbel, 1958). Kotz ve Nadarajah, 2000 yılında belirttiği gibi, uç değer analizi literatürü artık çok büyük ve çok hızlı bir şekilde büyümektedir (Kotz ve Nadarajah, 2000). Bu kapsamlı literatür, uç değer dağılımları ve süreçlerinin güvenilir bir yöntem olarak uygulanabilirliğine bir kanıt olarak hizmet ederken, aynı zamanda ne yazık ki çeşitli yayınlar; araştırmacılar arasındaki koordinasyon eksikliğine ve ortaya çıkan sonuçların tekrarlanmasına neden olmuştur. Bu koordinasyon eksikliği, uç değer teorisini nokta süreçlerinin yakınsaması ile ilişkilendiren Pickands, 1971 yılında dile getirmiştir (Pickands, 1971). Sonrasında Pickands, 1975 yılında geliştirilen istatistiksel yaklaşım olan eşik seviyelerine dayalı yöntemde genelleştirilmiş Pareto dağılımı, hidrologlar tarafından yaygın olarak kullanılır (Pickands, 1975). Bununla beraber Weissman, 1978 yılında sıra istatistiklerine dayanan farklı yöntemler önerilmiştir (Weissman, 1978). Bu yöntemler daha sonra Davidson ve Smith, 1990 yılında geliştirilmiştir (Davidson ve Smith, 1990). Galambos, 1978 yılında yayınlanan monografisi özellikle istatistiksel modellere adanmış ve aynı zamanda çok değişkenli uç değerler teorisini de ele alan ilk referans kitaplarından biridir (Galambos, 1978). Bunu sabit dizileri ele alan ve uç değer teorisi için referans olan Leadbetter vd., 1983 yılında yayınladıkları çalışmalarıyla takip etmektedir (Leadbetter vd., 1983). Bu tez çalışmasında uç değer teorisi ve uygulamaları ile ilgili bazı temel kavramlar sunulmaktadır. Bu kavramlar,

mevcut çok sayıda referans kitapta bulunabilir. Bunların arasında (Leadbetter vd., 1983; Tiago de Oliveira, 1984; Resnick, 1987; Embrechts vd., 2001; Klüppelberg ve Mikosch, 1997; Kotz ve Nadarajah, 2000; Reiss ve Thomas, 2001; Coles, 2001; Finkenstadt ve Rootzen, 2004; Beirlant vd., 2005 ve Haan ve Ferreira, 2006) bulunmaktadır.

1.2. Sıradışı (Nadir Olaylar)

Nadir olaylar genellikle aşağıdaki üç özelliğe sahip olan olayları niteleyen bir kavramdır:

1. Çok nadir karşılaşılan olaylardır.
2. Büyük etkileri olur.
3. İstatistiksel olarak beklenmedik olaylardır.

Adından da anlaşılacağı üzere sıra dışı olaylar ekstrem durumlardır, yani gerçekleşme şansı çok azdır. Fakat son zamanlarda sıra dışı olayların gözlemlendiği durumlar önemli ölçüde artmıştır. Sıra dışı olayların toplum üzerindeki etkisi uzun ve derindir. Bu tür olayların nedenlerini araştırmak ve bunlara karşı korunmak için planlar geliştirmekle kalmayıp, ortaya çıkan büyük mali kaybın da telafi edilmesi gerekmektedir. Sıra dışı olayların etkisinin azaltılmasına yönelik mali planlar oluşturulmuştur. Örneğin son yıllarda, sigorta sektöründe mülk kazası riskinin büyüklüğü önemli bir araştırma konusu haline gelmiştir. Geleneksel olarak sigortacılar felaket riskine karşı korunmak için reasürans satın alırlar. 5 milyar dolardan fazla sigortalı kayba neden olan felaket durumlarında ise büyük çoğunluk reasürans kapsamında değildir. Tablo 1. Amerika Birleşik Devletleri tarihindeki en büyük kayıplara neden olan 10 felaket olayını listelemektedir.

Tablo 1. Amerika Birleşik Devletleri tarihindeki en büyük kayıplara neden olan 10 felaket olayı

Yıl	Kadaströfik olaylar	Yaklaşık kayıp miktarı (milyon dolar cinsinden)
1989	Hugo Kasırgası	4.2
1992	Andrey Kasırgası	15.5
1993	Midwest Kar Fırtınası	1.8
1994	Northridge Depremi	12.5
1995	Opal Kasırgası	2.1
1998	Georges Kasırgası	3.0
1999	Floyd Kasırgası	2.0
2001	St.Louis Dolu Fırtınası	1.9
2001	Allison Tropik Fırtınası	2.5
2001	Yangın ve Patlamalar	20.3

1.3. Tanımlar ve Temel Özellikler

Bu kısımda olasılık teorisi ve çıkarımsal istatistikteki genel tanımlara yer verilecektir.

Tanım 1.3.1. Ω örnek uzay, $\mathfrak{F}$, Ω örnek uzayının alt kümeleri üzerine kurulmuş bir sigma cebir ve P bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ üçlüsüne olasılık uzayı denir.

Tanım 1.3.2. $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay; $(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ reel sayılar üzerinde bir Borel sigma cebir olsun. Her $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ için $\{\omega: X(\omega) \in B\} \subseteq \mathcal{A}$ şartı sağlanıyor ise, $(\Omega, \mathcal{A})$ 'da tanımlanan $X = X(\omega)$ reel değerli fonksiyonuna bir rasgele değişkendir denir.

Tanım 1.3.3. X bir rasgele değişken olsun.

$$F_X(x) = P\{\omega: X(\omega) \leq x\}, x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu denir. X rasgele değişkeninin kuyruk dağılımı ise

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \quad (4)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.3.4. Aynı $F(X_i \in B_i \subseteq \mathbb{R}, B_i \text{ sonlu bir küme})$ dağılımına sahip $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri her $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ için

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n) \quad (5)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1)F(x_2) \dots F(x_n) \quad (6)$$

şartını sağlıyor ise bu rasgele değişkenlere bağımsız ve aynı dağılıma sahiptir denir.

Tanım 1.3.5. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ bir örneklem olsun.

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

biçiminde tanımlı fonksiyona ampirik birikimli ya da örneklem birikimli dağılım fonksiyonu denir.

1.4. Bağımsız Aynı Dağılıma Sahip Rasgele Değişkenlerin Toplamları

Tanım 1.4.1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenlerinin bir dizisi olsun. Her $n > 1$ tamsayısı için $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ toplamı tanımlansın.

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} \quad (8)$$

örneklem ortalaması ya da ampirik ortalama olarak adlandırılır.

1.4.1. Zayıf Büyük Sayılar ve Güçlü Büyük Sayılar Kanunu:

Teorem 1.4.1.1. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir örneklemini olsun ve $E(X_1) < \infty$ olsun. Bu durumda;

$$\text{Zayıf büyük sayılar kanunu: } \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu, \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

$$\text{Güçlü büyük sayılar kanunu: } \bar{X}_n \xrightarrow{h.h.y.} \mu, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

sağlanır.

Güçlü büyük sayılar kanununun F_n ampirik dağılımına uygulanması ile aşağıdaki sonuca ulaşılır: Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$F_n(x) \xrightarrow{h.h.y.} F(x), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

1.4.2. Merkezi Limit Teoremi:

Teorem 1.4.2.1. $\{X_i\}$, $i \geq 1$ bağımsız aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi, $\mu = E(X) < \infty$ ve $Var(X) = \sigma^2 < \infty$ olsun. Ayrıca $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olarak tanımlansın. $\phi(z)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) = \phi(z) \quad (12)$$

dir.

Merkezi limit teoremi $\{X_i\}$, $i \geq 1$ rasgele değişkenlerinin kendi dağılımları hangi dağılım olursa olsun, örneklem büyüklüğü “ n ” arttıkça örneklem ortalamasının dağılımının ortalaması μ ve varyansı σ^2/n olan normal dağılıma zayıf anlamda yakınsadığını söyler. Merkezi limit teoreminin geçerli olması için gerekli şart varyansın sonlu olması şartıdır. Eğer sonlu varyans şartı sağlanmaz ise merkezi limit teoremi geçerli olmayacaktır.

1.5. Bağımsız Aynı Dağılıma Sahip Rasgele Değişkenlerin Maksimumu

$X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olarak ele alınacaktır. Bu kısımda özellikle ilgilendiğimiz konu $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ örneklemının maksiması olarak adlandırılan

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

olacaktır. M_n ’nin dağılımına geçmeden önce bu kısımda kullanılacak bazı tanımları verelim:

Tanım 1.5.1. F bir birikimli dağılım fonksiyonu olsun. F 'nin üst (sağ) uç noktası ve sol uç noktası sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x^+ = \sup \{x \in \mathbb{R}: F(x) < 1\}, \quad x^- = \inf \{x \in \mathbb{R}: F(x) > 0\} \quad (13)$$

Tanım 1.5.2. $X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Örneklemenin maksimumu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_1 = X_1, \quad M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad n \geq 2. \quad (14)$$

Maksimumun tanımını kullanarak, minima için karşılık gelen sonuç aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n). \quad (15)$$

x^+ ve x^- değerlerinin, sırasıyla F ile ilişkili X rasgele değişkeninin mümkün olan maksimum ve minimum değerleri olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla, eğer X rasgele değişkeni üstten sınırsız ve alttan sınırsız bir rasgele değişken ise sırası ile, $x^+ = +\infty$ ve $x^- = -\infty$ dır. Ayrıca temel olasılık kuralları kullanılarak kolaylıkla görülür ki

$$P(M_n \leq x) = [F(x)]^n, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (16)$$

ve

$$M_n \xrightarrow{h.h.y.} x^+ \quad (17)$$

dir.

Yine de bu sonuç bir dağılımın uç değerlerine dair çok fazla bilgi vermemektedir. Özellikle maksimumların büyüklüklerinin sıralaması hakkında daha geniş bilgi zayıf yakınsama teoremleri tarafından sağlanmaktadır. Bu da uç değerler teorisinin özüdür.

Uç değerler teorisinin temel analitik aracı düzenli değişen fonksiyonlar ile tanımlanan dağılımlardır. Dolayısı ile uç değerler teorisi ile ilgili kavramlara geçmeden önce uç değerler teorisinde sıklıkla kullanılan ve bu teorisinin mantığının ve

sonuçlarının daha iyi anlaşılmasını sağlayacak olan düzenli değişen fonksiyonlardan bahsedeceğiz.

1.6. Düzenli Değişen Fonksiyonlar Teorisi:

Tanım 1.6.1. Düzenli Değişen Fonksiyonlar: f pozitif ve ölçülebilir bir fonksiyon, ayrıca f fonksiyonu herhangi bir $A > 0$ için $[A, \infty)$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer her $t > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^\alpha \quad (18)$$

olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut ise, f fonksiyonuna sonsuzda $\alpha \in \mathbb{R}$ indeksi ile düzenli değişen fonksiyondur denir ve $f \in RV(\alpha)$ ile gösterilir (Embrechts vd., 1997).

Tanım 1.6.2. Yavaş Değişen Fonksiyonlar: L pozitif ve ölçülebilir bir fonksiyon, ayrıca L fonksiyonu herhangi bir $A > 0$ için $[A, \infty)$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer her $t > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

şartı sağlanıyor ise, L fonksiyonuna sonsuzda yavaş değişen fonksiyondur denir. Yavaş değişen fonksiyonlar sınıfı S ile ifade edilir (Embrechts vd., 1997).

Örnek 1.6.1. Yavaş değişen fonksiyonların tipik örnekleri pozitif sabitler, sonsuzda pozitif bir sayıya yakınsayan fonksiyonlar ve logaritma fonksiyonudur (Embrechts vd., 1997). Yavaş değişen fonksiyonlar, tanımından da görüleceği üzere “0” indeksi ile düzenli değişen fonksiyonlardır.

Düzenli değişen fonksiyonlar ile ilgili pek çok önemli çalışma literatürde mevcuttur (Adler vd., 1998; Alexander vd., 2015; Asmussen, 2000; Beirlant vd., 2001; Bingham vd., 1987; Coles, 2001; Embrechts vd., 2001). Bu kısımda düzenli değişen fonksiyonların temel özellikleri ile ilgili ispatsız olarak verilen teoremler, çalışmanın ilerleyen aşamalarında kullanılacaktır.

Teorem 1.6.1 $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olsun. f düzenli değişen bir fonksiyondur ancak ve ancak f aşağıdaki gösterime sahiptir

$$f(x) = x^\alpha L(x), \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (19)$$

(Embrechts vd., 1997).

Teorem 1.6.2. Gösterim Teoremi: $[x_0, \infty)$ aralığında pozitif ölçülebilir bir L fonksiyonu yavaş değişen fonksiyondur ancak ve ancak, L fonksiyonu (20) gösterimine sahiptir:

$$L(x) = c(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon(y)}{y} dy \right\} \quad (20)$$

burada, $c(\cdot)$ fonksiyonu, $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in (0, \infty)$ olacak biçimde ölçülebilir, negatif olmayan bir fonksiyondur (Embrechts vd., 1997). Ayrıca $\varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ dır.

Sonuç 1.6.1. $\varepsilon(x)$ ve $c(x)$ Teorem 1.6.2.'de belirtilen şartları sağlasın. Bu durumda her düzenli değişen fonksiyon

$$f(x) = x^\alpha c(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon(y)}{y} dy \right\} \quad (21)$$

biçiminde bir gösterime sahiptir.

Sonuç 1.6.2. Düzenli değişen fonksiyonların tanımından f , α indeksi ile düzenli değişen bir fonksiyon olmak üzere, $x \rightarrow \infty$ iken

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} \infty, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (22)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 1.6.3. L, L_1 ve L_2 yavaş değişen fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $(L(x))^\alpha$ yavaş değişen fonksiyondur.

(ii) $L_1(x).L_2(x)$ ve $L_1(x) + L_2(x)$ yavaş değişen fonksiyondur. Ayrıca eğer $\lim_{x \rightarrow \infty} L_2(x) = \infty$ ise bu durumda $L_1(L_2(x))$ yavaş değişen fonksiyondur.

(iii) Her $\alpha > 0$ için $x^\alpha L(x) \rightarrow \infty$ ve $x^{-\alpha} L(x) \rightarrow 0$ dır.

(Mikosh, 1999)

Teorem 1.6.4.

(i) Eğer $f(x) \in RV(\alpha)$ ise $f(x)^p \in RV(\alpha p)$ dır.

(ii) $f_i \in RV(\alpha_i)$, ($i = 1, 2$) ve $f_2(x) \rightarrow \infty$, ($x \rightarrow \infty$) ise $f_1(f_2(x)) \in RV(\alpha_1. \alpha_2)$ dır (Mikosh, 1999).

Düzenli değişen fonksiyonlar ile ilgili en önemli teoremlerden biri de aşağıda ifadesi verilen Karamata Teoremi' dir. Karamata Teoremi düzenli değişen fonksiyon içeren integrallerin çözülebilmesi için çok önemli bir teoremdir. Karamata Teoremi'ne göre düzenli değişen fonksiyonların integralleri de düzenli değişen fonksiyonlardır.

Daha açık bir ifade ile düzenli değişen fonksiyonları integrallerken düzenli değişen fonksiyonun yavaş değişen kısmı integral dışına çıkarılabilir. Burada önemli noktalardan biri, yavaş değişen fonksiyonların reel sayıların bütün sonlu alt aralıklarında sonlu olduklarıdır. Bu özellikten dolayı kolayca görülebilir ki düzenli değişen fonksiyonlar da reel sayıların sonlu her alt aralığında sonludur.

Teorem 1.6.5. Karamata Teoremi: $x_0 \geq 0$ olmak üzere; $L(x)$, $[x_0, \infty)$ aralığında tanımlı herhangi bir yavaş değişen bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur:

(i) $\alpha > -1$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x t^\alpha L(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(x) \quad (23)$$

dir.

(ii) $\alpha < -1$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty t^\alpha L(t) dt \sim -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(x) \quad (24)$$

dir (Mikosh, 1999).

Teorem 1.6.6. $\alpha > -1$ olmak üzere; $R(t)$, α indeksi ile düzenli değişen herhangi bir fonksiyon olsun. Her $t \geq A$ için

$$\int_A^\infty R(t) dt = \infty \quad (25)$$

sağlanır (Mikosh, 1999).

Teorem 1.6.7. $L(x)$, $(0, \infty)$ aralığında tanımlı yavaş değişen ve $(0, \infty)$ aralığının her alt aralığında sonlu bir fonksiyon olsun. Ayrıca verilen reel değerli herhangi bir f fonksiyonu ve $n \geq 0$ için

$$\int_0^\beta t^{-n} f(t) dt$$

integrali mevcut olsun. Bu durumda; $x \rightarrow \infty$ için

$$\int_0^\beta f(t) L(xt) dt \sim L(x) \int_0^\beta f(t) dt \quad (26)$$

asimptotik ilişkisi doğrudur (Mikosh, 1999).

Tahmin problemlerinde birikimli dağılım fonksiyonu F' nin tam şekli genellikle bilinmemektedir. Literatürde M_n , $n \rightarrow \infty$ davranışları için bazı limit kuralları mevcuttur. Ancak bu konudaki literatür pratik uygulama için çok fazla geniştir. Uygulamadaki zorluk, asimptotik yöntemlere dayalı bir yaklaşım geliştirilmesine neden olmuştur. Burada spesifik olarak $n \rightarrow \infty$ durumunda M_n için olası limit dağılımlarının neler olabileceğini göreceğiz. Daha sonra bu dağılım ailelerini n 'nin büyük değerleri için M_n 'nin dağılımına yaklaşım için kullanacağız.

1.7. Maksima İçin Klasik Limit Kuralları

Bu kısımdaki temel soru $n \rightarrow \infty$ olduğunda örneklem maksimumu M_n 'nin limit dağılımının ne olduğu sorusudur. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \mathcal{H}$$

olacak şekilde F den bağımsız bir $\mathcal{H}$ dağılımı bulunabilir mi?

Bu durumda, M_n dağılımı, orijinal F dağılımının şeklinin bilinmemesi durumunda bile, doğrudan $\mathcal{H}$ ailesi kullanılarak tahmin edilebilir. Burada merkezi limit teoremi taklit edilerek aşağıdaki soruya cevap aranabilir:

Uygun $c_n > 0$ ve $d_n \in \mathbb{R}$ sabitleri için;

$$P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) \rightarrow \mathcal{H}_\gamma(x) \quad (27)$$

olacak şekilde bir $\mathcal{H}_\gamma(x)$ fonksiyonu bulunabilir mi? Eğer bulunabilirse bu fonksiyonun şekli nasıldır?

Tanım 1.7.1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Ayrıca $M_1 = X_1, M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n), n \geq 2$ olsun. Eğer

$$P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) \xrightarrow{d} \mathcal{H}_\gamma(x) \quad (28)$$

şartını sağlayan $c_n > 0$ ve $d_n \in \mathbb{R}$ dizileri mevcut ise bu durumda X_1 rasgele değişkeni $\mathcal{H}_\gamma$ dağılımının maksimum çekim alanındadır denir ve $X \in MC, A(\mathcal{H}_\gamma)$ ile gösterilir (Fisher-Tippet, 1928).

Burada $c_n > 0$ ve $d_n \in \mathbb{R}$ sabitlerine normalleştirme sabitleri denir. Burada ikinci problem $\mathcal{H}_\gamma$ dağılımın şeklinin belirlenmesidir.

Teorem 1.7.1. Fisher-Tippet Teoremi: $X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Ayrıca $M_1 = X_1, M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n), n \geq 2$ olsun. Eğer;

$$P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) \xrightarrow{d} \mathcal{H}_\gamma(x) \quad (29)$$

olacak şekilde bir $\mathcal{H}_\gamma(x)$ var ise bu dağılım aşağıdaki formdadır:

$$\mathcal{H}_\gamma(x) = \exp\left\{-(1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} \quad (30)$$

burada eğer $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 + \gamma x > 0$ ve $\gamma = 0$ ise eşitliğin sağ tarafı $\exp(-e^{-x})$ tir. $\mathcal{H}_\gamma(x)$ literatürde genelleştirilmiş uç değerler dağılımı olarak adlandırılır (Fisher-Tippet, 1928).

Tanım 1.7.2. γ parametresi uç değer indeksi olarak tanımlanır ve X rasgele değişkeninin şeklini belirler. $\alpha = 1/\gamma$ kuyruk indeksi olarak tanımlanır (Fisher-Tippet, 1928).

Tahmin problemlerinde k.d.f. (kümülatif dağılım fonksiyonu) 'nin tam şekli genellikle bilinmemektedir. Literatürde M_n , $n \rightarrow \infty$ davranışları için bazı sınırlar mevcuttur. Ancak bu konudaki literatür pratik uygulama için çok geniştir. Uygulamadaki zorluk, asimptotik yaklaşıma dayalı bir yöntem izlenmesine yol açmaktadır. Asimptotik yaklaşım basitçe $n \rightarrow \infty$ için M_n ' nin olası sınır dağılımları ile ilgilenir.

$H_\gamma(x)$ sınıfı farklı özelliklere sahip farklı dağılım ailelerini içerir. γ şekil parametresinin durumuna göre bu sınıfı aşağıdaki gibi üç ayrı grupta inceleyebiliriz:

a) $\gamma > 0$ için $H_\gamma\left(\frac{(x-1)}{\gamma}\right)$ kullanılır ve $\alpha = \frac{1}{\gamma} > 0$ için

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad (31)$$

biçiminde tanımlanır. $\phi_\alpha(x)$ sınıfına Frechet dağılım sınıfı denir.

b) $\gamma = 0$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (32)$$

dağılımı elde edilir. Bu dağılıma Gumbel dağılımı denir.

c) $\gamma < 0$ olsun. Bu durumda $\mathcal{H}_\gamma(-(x+1)/\gamma)$ kullanılır ve $\alpha = -\frac{1}{\gamma} > 0$ için

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x^\alpha)\}, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

dağılımı elde edilir. $\psi_\alpha(x)$ dağılımına Weibull dağılımı denir.

Not 1.7.1. Daha önce belirtildiği gibi γ şekil parametresidir ve dağılımın kuyruğunun sifıra doğru bozunması (sifıra yaklaşımı) hakkında bilgi verir. Buna göre;

1. (Frechet durumu): $\gamma > 0$ olduğunda $\phi_\alpha(x)$ ağır kuyruklu bir dağılımdır. Bu sınıf Pareto, Burr, Cauchy, $\alpha < 2$ ile kararlı dağılımlar, loggamma dağılımı, log lojistik dağılım aileleri gibi dağılımları içerir. Bu dağılım sınıfı hakkında daha fazla bilgi için bkz: Beirlant ve Teugels, 1987; Adler vd., 1998; Beirlant vd., 2001; Bingham vd., 1987.

2. (Gumbell durumu): $\gamma = 0$ olduğunda hafif kuyruklu dağılım elde edilir. Bu sınıfa örnek olarak normal, üstel, gama ve log-normal dağılımları verebiliriz.

3. (Weibull durumu): $\gamma < 0$ olduğunda kısa kuyruklu bir dağılım elde edilir. Bu tür dağılımların sonlu üst sınırı vardır. Bu sınıfa örnek olarak (0,1) cinsinden tekdüze dağılım ve beta dağılımları verilebilir.

Örnek 1.7.1. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bağımsız rasgele değişkenlerin bir dizisi ve $X_1 \sim Par(\theta, k)$ olsun. Bu durumda $F(x) = 1 - \left(\frac{k}{k+x}\right)^\theta$, $x \geq 0$, $\theta, k > 0$ olduğunu biliyoruz.

$$c_n = \frac{k n^{1/\theta}}{\theta}, \quad d_n = k (n^{1/\theta} - 1) \quad (34)$$

seçilirse:

$$\begin{aligned} F^n(c_n x + d_n) &= \left(1 - \left(\frac{k}{k + \frac{xk n^{\frac{1}{\theta}}}{\theta} + k(n^{\frac{1}{\theta}} - 1)} \right)^\theta \right)^n \\ &= \left(1 - \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\theta(1+\frac{x}{\theta})}}} \right)^\theta \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{\left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-\theta}}{n} \right) \\ &= \left(1 - \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\theta(1+\frac{x}{\theta})}}} \right)^\theta \right)^n \end{aligned} \quad (35)$$

elde edilir. Bu durumda $F \in MDA \left(\mathcal{H}_{\frac{1}{\theta}} \right)$ dır.

Yukarıdaki tartışmalar sonucunda merkezi limit teoremi, genelleştirilmiş merkezi limit teoremi ve uç değerler teoreminin (Fisher Tippet teoremi) sonuçlarını şu şekilde ortaya koyabiliriz:

Merkezi limit teoremi:

X_n koşulları: Bağımsız aynı dağılıma sahip ve ikinci moment sonlu.

S_n : Rasgele değişkenlerin toplamı.

Limit dağılımı: Normal dağılım

Uç değer Teoremi (Fisher Tippet Teoremi)

X_n koşulları: Bağımsız aynı dağılıma sahip.

S_n :Örneklemin maksiması.

Limit dağılımı: Genelleştirilmiş uç değerler dağılımı.

Önerme 1.7.1. F dağılım fonksiyonu $c_n > 0$ ve $d_n \in \mathbb{R}$ sabitleri ile bir $\mathcal{H}_\gamma$ uç değer dağılımının maksimum çekim alanındadır ancak ve ancak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n \bar{F}(c_n x + d_n)\} = -\ln[\mathcal{H}_\gamma(x)], x \in \mathbb{R}, \bar{F} = 1 - F. \quad (36)$$

(Embrechts v.d.,1997)

Önerme 1.7.1. ile verilen karakterizasyon önermesi bir dağılım fonksiyonu F 'in maksimumunun üç özel sınırlayıcı yasadandır birine sahip olması için gerekli ve yeterli koşulları vermektedir. Bu önerme Frechet ve Weibull durumu için düzenli değişen fonksiyonlar kavramı kullanılarak elde edilmiştir (son durumda küçük bir modifikasyon gereklidir). Gumbel durumunda ise hızlı değişen fonksiyonların kullanılması gerekmektedir. Bundan sonraki kısımda üç durum için farklı karakterizasyon teoremleri sunacağız. Bu teoremler ve ispatları (Embrechts vd.; 1997) kaynağında bulunabilir.

Teorem 1.7.2. Φ_α İçin Maksimum Çekim Alanı: $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olsun. F dağılım fonksiyonu $\alpha > 0$ için Φ_α nın maksimum çekim alanındadır ancak ve ancak

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x) \quad (37)$$

dır. Φ_α nın maksimum çekim alanında bulunan bütün F dağılımlarının sağ uç noktaları sonsuzdur yani her $F \in M\check{C}A(\Phi_\alpha)$ için $x^+ = \infty$. $M\check{C}A(\Phi_\alpha)$ sınıfı $-\alpha$ indeksi ile bütün düzenli değişen dağılımları kapsayan bir sınıftır. Yani $F \in M\check{C}A(\Phi_\alpha)$ için

$$\bar{F}(x) \rightarrow x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty \quad (38)$$

Bu dağılımlar Pareto-tipli dağılımlar olarak adlandırılırlar (Embrechts v.d.,1997).

Teorem 1.7.3. Ψ_α için Maksimum Çekim Alanı: $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olsun. F dağılım fonksiyonu $\alpha > 0$ için Ψ_α nın maksimum çekim alanında ancak ve ancak $x^+ < \infty$ ve

$$1 - F(x^+ - x^{-1}) = x^{-\alpha} L(x). \quad (39)$$

dır (Embrechts v.d.,1997).

Teorem 1.7.4. Λ İçin Maksimum Çekim Alanı: $x^+ \leq \infty$ olmak üzere F dağılım fonksiyonu Λ nın maksimum çekim alanında ancak ve ancak, öyle bir $z < x^+$ vardır ki F aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x^+. \quad (40)$$

Burada c ve g sırası ile $c(x) \rightarrow c > 0$ ve $g(x) \rightarrow 1$, $x \rightarrow x^+$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlardır. Ayrıca $a(x)$, $\lim_{x \rightarrow x^+} a'(x) = 0$ olacak şekilde, Lebesgue ölçüsüne göre pozitif sürekli bir fonksiyondur (Embrechts v.d.,1997).

Yukarda verilmiş olan karakterizasyon teoremlerindeki koşullar pratikte uygulanması zor olan koşullardır. Von Mises, 1936 yılında pratik amaçlar için kullanılabilecek koşullar sunmuştur. Bu koşullar her üç limit durumu için aşağıda verilmiştir (Von Mises, 1936).

Sonuç 1.7.1. Φ_α Maksimum Çekim Alanı İçin Von Mises Koşulları: F , aşağıdaki şartları sağlayan sürekli bir dağılım fonksiyonu olsun;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0, \quad (41)$$

Bu durumda $F \in M\check{C}A(\Phi_\alpha)$ dır (Von Mises, 1936).

Sonuç 1.7.2. Ψ_α Maksimum Çekim Alanı İçin Von Mises Koşulları: F sürekli bir dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu da f olsun. Ayrıca f her sonlu (z, x^+) aralığında pozitif olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x^-} \frac{(x^+ - x)f(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0, \quad (42)$$

oluyorsa $F \in M\check{C}A(\Psi(\alpha))$ dır (Von Mises, 1936).

Sonuç 1.7.3. Λ Maksimum Çekim Alanı İçin Von Mises Koşulları: F bir dağılım fonksiyonu ve $x^+ \leq \infty$ olsun.

Eğer, c herhangi bir sabit, $a(x)$, $\lim_{x \rightarrow x^+} a'(x) = 0$ olacak şekilde Lebesgue ölçüsüne göre sürekli bir fonksiyonken, F aşağıdaki gibi ifade edilebiliyor ise

$$\bar{F}(x) = c \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, z < x < x^+ \quad (43)$$

Bu durumda $F \in M\check{C}A(\Lambda)$ dır (Von Mises, 1936).

1.8. Genelleştirilmiş Uç Değerler Dağılımı

Fisher-Tippet'in temel teoremine göre, maksimumların olası limit dağılım fonksiyonlarının üç farklı türden olduğunu gördük. Önceki bölümde bunlardan bazılarını inceledik ve uç ekstrem değer (uç değer) dağılım fonksiyonu arasında büyük benzerlikler bulunduğunu görmüş olduk. Aslında bu uç dağılım fonksiyonu, farklı bir parametrelendirme kullanılarak Genelleştirilmiş Uç Değer (GUD) dağılımı olarak bilinen tek bir dağılım ailesinde özetlenebilir. Bu birleştirme fikri ile ilgili ayrıntılar (Von Mises, 1936 ve Jenkinson, 1955) kaynaklarında bulunabilir. Bu kısımda genel bir çerçeve çizmeye çalışacağız.

Tanım 1.8.1. Genelleştirilmiş Uç Değerler Dağılımı (GUD): Genelleştirilmiş uç değerler dağılımı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp[-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}], & \gamma \neq 0 \\ \exp[-\exp(-x)], & \gamma = 0 \end{cases} \quad (44)$$

burada $1 + \gamma x > 0$ dır. Yani aşağıdaki üç durumdan biri sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned} x &> -\gamma^{-1}, \quad \gamma > 0 \\ x &< -\gamma^{-1}, \quad \gamma < 0 \\ x &\in \mathbb{R}, \quad \gamma = 0. \end{aligned}$$

Bu durumda H_γ genelleştirilmiş uç değerler dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$h_\gamma(x) = \begin{cases} (1 + \gamma x)^{-(1+\frac{1}{\gamma})} \exp[-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}], & \gamma \neq 0 \\ \exp[-(x + \exp(-x))], & \gamma = 0 \end{cases} \quad (45)$$

(Embrechts v.d.,1997).

Önceki bölümde her bir standart uç değer dağılım fonksiyonu için Frechet, Gumbell ve Weibull karakterizasyon özelliklerini ayrı ayrı sunmuştuk. Birleştirmeden sonra, maksima için üç limit kanununun tümünü içeren global bir karakterizasyon verilebilir. Dikkat edilecek olursa H_γ 'nın maksimum çekim alanı üç standart uç değer dağılım fonksiyonunun maksimum çekim alanıyla aynı şekilde oluşturulmaktadır. Aslında genelleştirilmiş uç değer analizini karakterize edecek iki form mevcuttur.

Teorem 1.8.1. Genelleştirilmiş Uç Değer Dağılımı İçin 1. Karakterizasyon: F bir dağılım fonksiyonu olsun. $a(x)$ pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $x^+ \leq \infty$ olmak üzere her $1 + \gamma x > 0$ için $F \in M\check{C}A(H_\gamma)$ dır ancak ve ancak

$$\lim_{u \rightarrow x^-} \frac{\bar{F}(u + xa(u))}{\bar{F}(u)} = \begin{cases} (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}, & \gamma \neq 0 \\ e^{-x}, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (46)$$

tır (Embrechts v.d.,1997).

Teorem 1.8.2. Genelleştirilmiş Uç Değer Dağılımı İçin 2. Karakterizasyon: F bir dağılım fonksiyonu olsun. $x^+ \leq \infty$ olmak üzere her $y > 0$, $y \neq 1$ ve x için $F \in M\mathcal{C}A(H_\gamma)$ dır ancak ve ancak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} = \begin{cases} \frac{x^\gamma - 1}{y^\gamma - 1}, & \gamma \neq 0 \\ \frac{\ln x}{\ln y}, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (47)$$

tır. Burada $U(t) = \bar{F}(1 - t^{-1})$, $t > 0$ olur (Embrechts v.d.,1997).

Bu teoremler uç değerler teorisinin temel sonuçlarındandır. Bu sonuca göre eğer F dağılımı Teorem 1.8.1. veya Teorem 1.8.2. ile verilmiş olan şartlardan herhangi birini sağlamıyor ise bu durumda bu durumda maksimum rasgele değişkeni olarak verilmiş olan M_n herhangi bir dağılıma yakınsamıyor demektir.

Uç değerler teorisinde kullanılan bir diğer dağılım ise Genelleştirilmiş Pareto Dağılımıdır (kısaca GPD olarak göstereceğiz). Uç değer teorisi ile teorik bağlantısının yanı sıra GPD, pratik uygulamalarda yaygın olarak uç noktalarda istatistiksel çıkarım yapmak için kullanılmaktadır. Bu kısımda GPD ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

1.9. Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı

Uç değerler teorisi ile ilgili pek çok çalışma GPD temelli yapılmaktadır. Bunun nedenlerini bu kısmın ilerleyen bölümlerinde açıklamaya çalışacağız.

Tanım 1.9.1. Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı: Genelleştirilmiş Pareto dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}, & \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-x}, & \gamma = 0 \end{cases} : \begin{matrix} x \geq 0; \gamma \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{1}{\gamma}; \gamma < 0 \end{matrix} \quad (48)$$

GPD için olasılık yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$g_\gamma(x) = \begin{cases} (1 + \gamma x)^{-(1+\frac{1}{\gamma})}, & \gamma \neq 0 \\ e^{-x}, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (49)$$

$G_\gamma(x)$ ' e standart genelleştirilmiş Pareto dağılımı denir. $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $\beta > 0$ için x argümanını $(x - \gamma)/\beta$ ile değiştirilerek ilgili konum ölçeği ailesi elde dileyebilir. $G_{\gamma,0,\beta}$ özel durumu uç değeri istatistikinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu özel durumun birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \gamma \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad x \in D(\gamma, \beta) \quad (50)$$

burada

$$x \in D(\gamma, \beta) = \begin{cases} [0, \infty), & \gamma \geq 0 \\ [0, -\beta/\gamma], & \gamma < 0 \end{cases} \quad (51)$$

biçimindedir (Embrechts v.d.,1997).

Genelleştirilmiş Pareto dağılımı, uç değeri teorisinin pratikteki en önemli dağılımlarından biridir. Bunun nedeni yeterince büyük bir t_n eşik değeri için, rastgele değişken X ' in t_n eşiği üzerinde kalan eşik değerini aşan değeri dağılımının genelleştirilmiş Pareto dağılımı kullanılarak tahmin edilmesidir. Bu durumu daha somut olarak anlatabilmek için aşağıdaki tanım ve teoremlere ihtiyaç vardır:

Tanım 1.9.2. X , dağılım fonksiyonu F ve sağ bitiş noktası (uç noktası) x^+ olan bir rastgele değişken olsun. Herhangi bir sabit $t_n < x^+$ için

$$F_{t_n}(x) = P(X - t_n \leq x | X > t_n) = 1 - \frac{\bar{F}(x + t_n)}{\bar{F}(t_n)}, \quad x \geq 0 \quad (52)$$

biçiminde tanımlanan dağılım fonksiyonuna “koşullu aşkın değeri dağılım fonksiyonu” denir.

Tanım 1.9.3. 1.9.2 tanımı kullanılarak

$$e(t_n) = E(X - t_n | X > t_n) \quad (53)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona koşullu aşkınların ortalaması denir. Aşağıdaki tabloda uç değeri teorisinde sık kullanılan bazı dağılımların koşullu aşkınlarının ortalaması verilmiştir.

Tablo 2. Koşullu Aşanların Ortalaması

Dağılım İsmi	Kuyruk $\bar{F}$ veya o.y.f f	Koşullu aşanların ortalaması fonksiyonu.
Pareto	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x}\right)^\alpha$	$\frac{k+t_n}{\alpha-1}$
Burr	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x^\tau}\right)^\alpha$	$\frac{t_n}{\alpha\tau-1}(1+o(1))$
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-(\ln x - \mu)^2/(2\sigma)^2}$	$\frac{\beta^2 t_n}{\ln t_n - \mu}(1+o(1))$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-c x^\tau}$	$\frac{t_n^{1-\tau}}{c\tau}(1+o(1))$
Loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta (\ln x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-1}$	$\frac{t_n}{\alpha-1}(1+o(1))$

Eşik değeri aşmaları, birçok alanda, farklı uygulamalara göre farklı adlarla anılan önemli bir araçtır. Örneğin $F_{t_n}(x)$ ' ye güvenilirlik teorisinde aşırı ömür veya kalan ömür dağılımı denir. Bu çalışmada $F_{t_n}(x)$, klasik (s, S) tipli envanter modelin ergodik dağılımı ve ergodik momentleri için eşik seviyesini aşan değerler yöntemine dayalı tahminci bulmak için kullanılacaktır. Genelleştirilmiş Pareto dağılımı yüksek bir eşik seviyesini aşan değerlerin koşullu aşım dağılımları için limit dağılımıdır. Aşan değerlerin koşullu aşım dağılımları ile genelleştirilmiş Pareto dağılımı arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 1.9.1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler ve bu rasgele değişkenlere ait dağılım fonksiyonu F olsun.

$1 + \gamma x > 0$ için

$$H_\gamma(x) = \exp\{-[1 + \gamma x]^{-1/\gamma}\} \quad (54)$$

dır. $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminin maksiması olan M_n için limit dağılımıdır. Bu durumda yeterince büyük bir t_n eşik değeri için eşik değerini aşan koşullu dağılım genelleştirilmiş Pareto dağılımı kullanılarak yaklaşık olarak belirlenebilir:

$$F_{t_n}(x) = P(X - t_n \leq x | X > t_n) \sim G_\gamma(x) \quad (55)$$

(Pickands, 1975).

Pareto dağılımı, pratikteki farklı uygulamalarda faydalı olan birçok önemli özelliğe sahiptir örneğin bkz. (Embrechts v.d., 1997; Reiss ve Thomas, 2007). Bu tez çalışmasında parametre tahmini yapabilmek için genelleştirilmiş Pareto dağılımının beklenen değerini hesaplamamız gerekmektedir. Bu nedenle de koşullu aşanların ortalaması olan $e(t_n)$ hesaplaması için partik bir yaklaşıma ihtiyacımız vardır.

Önerme 1.9.1. Koşullu aşanların ortalaması fonksiyonunun hesaplanması: X pozitif bir rasgele değişken olsun ve F, X e ait dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$e(t_n) = \frac{\int_{t_n}^{x^+} (x - t_n) dF(x)}{\bar{F}(t_n)} = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_t^x \bar{F}(x) dx, \quad 0 < t_n < x^+ \quad (56)$$

dır.

Önerme 1.9.1. 'den şu sonuç çıkarılabilir: Her sürekli dağılım fonksiyonu koşullu aşanların ortalama fonksiyonu $e(t_n)$ aracılığı ile tek türlü belirlenebilir. Örneğin, $\alpha > 1$ için $\bar{F} \in RV(-\alpha)$ olsun. Karamata Teoremi kullanılarak $t_n \rightarrow \infty$ durumunda $e(t_n) \sim t_n/(\alpha - 1)$ olduğu görülebilir (Embrechts vd., 1997) . Tablo 2.'de iyi bilinen bazı dağılımlar için koşullu aşanların ortalaması fonksiyonları özetlenmiştir. Aşağıdaki önerme genelleştirilmiş Pareto dağılımının önemli olasılık karakteristiklerini vermektedir.

Önerme 1.9.2.

a) $X, \xi \in \mathbb{R}$ ve $\beta > 0$ parametreleri ile Genelleştirilmiş Pareto dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Ayrıca $\xi < 1$ ve $E(X) < \infty$ olsun. Bu durumda koşullu aşanların ortalaması fonksiyonu lineerdir ve $t_n < x^+$ için

$$e(t_n) = \frac{\beta + \xi t_n}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi t_n > 0 \quad (57)$$

dır.

b) $X, \xi \in \mathbb{R}$ ve $\beta > 0$ parametreleri ile Genelleştirilmiş Pareto dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu durumda

$$1. E \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma} X \right)^{-r} = \frac{1}{\gamma^r}, \quad r > -1/\gamma \quad (58)$$

$$2. E \left(\ln \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma} X \right) \right)^k = \gamma^k k!, \quad k \in \mathbb{N} \quad (59)$$

$$3. E \left(X \left(G_{\gamma, \sigma}(X) \right)^r \right) = \frac{\sigma}{(r+1-\gamma)(r+1)}, \frac{r+1}{|\gamma|} > 0 \quad (60)$$

c) $\xi < 1/r$ ve $r \in \mathbb{N}$ için

$$E(X^r) = \frac{\beta^r \Gamma(\xi^{-1} - r)}{\xi^{r+1} \Gamma(1 + \xi^{-1})} r! \quad (61)$$

dır.

d) N , *Poisson* (λ) dağılımına sahip olsun. Ayrıca $\{X_n\}$; ξ , β parametreleri ile bağımsız aynı genelleştirilmiş Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. $M_N = \max(X_1, X_2, \dots, X_N)$ ise bu durumda;

$$P(M_N \leq x) = \exp \left\{ -\lambda \left(1 + \xi \frac{x}{\beta} \right)^{-1/\xi} \right\} \quad (62)$$

dır.

Aşağıdaki teorem Balkema ve De Haan, 1974 yılında ve Pickands, 1975 yılında bağımsız olarak aynı zamanda ortaya atılmıştır ve uç değer analizi için önemli istatistiksel araçlardan biridir (Balkema ve De Haan, 1974; Pickands, 1975).

Teorem 1.9.2. GPD Yaklaşımı: Her $\xi \in \mathbb{R}$, ve pozitif fonksiyon β için birikimli dağılım fonksiyonu F, H_ξ 'nin çekim alanındadır ancak ve ancak

$$\lim_{t_n \rightarrow x^+} \sup_{0 < y < t_n - x^+} |F_{t_n} - G_{\xi, \beta(t_n)}(y)| = 0 \quad (63)$$

1.10. Eşik Seviyesini Aşan Değerler (ESAD) Yöntemi

Bu kısma kadar yalnızca uç değerler teorisi ve ağır kuyruklu dağılımlar ile ilgili bazı olasılıksal sonuçlarla ilgilendik. Bu bölümde, bu çalışmada daha sonra kullanılacak olan bazı ileri teknikleri ve pratik örnekleri inceleyeceğiz. ESAD

prosedürü özel bir metodoloji olup, kuyruk indeksi tahmini ve yüksek kantil tahmininde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metod, GPD kullanılarak seçilmiş yüksek bir eşik üzerindeki aşanların dağılımı için bir yaklaşım elde edilmesi temeline dayanmaktadır. Dolayısı ile buradaki temel fikir Teorem 1.9.1.'in sonuçları ile yakından ilgilidir.

ESAD yönteminin işleyişi temel olarak aşağıdaki biçimde olmaktadır:

1. Adım: $X_1, X_2, \dots, X_N$ den oluşan bir örneklem için yüksek bir t_n değeri seçilir. Bu araştırmada t_n değeri bağımsız aynı dağılıma sahip talep rasgele değişkenleri için belirlenecektir. Seçilen t_n eşik değerini aşan gözlem değerlerin $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{N_{t_n}}}$ sayısı N_{t_n} biçiminde aşağıdaki gibi gösterilir:

$$N_{t_n} = \#(\{X_i > t_n: 1 \leq i \leq n\}),$$

Ayrıca eşik seviyesini aşan değerler $Y_j = X_{i_j} - t \geq 0$ olarak gösterilir (Mikosch vd.,1997).

2. Adım: Eşik seviyesini aşan değerler $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_{t_n}}$ için Genelleştirilmiş Pareto dağılımına uydurularak (β) ölçek, ve (λ) şekil parametresi için $\hat{\beta}, \hat{\lambda}$ tahmin değerleri hesaplanır.

1.10.1. Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı ile Parametre Tahmini

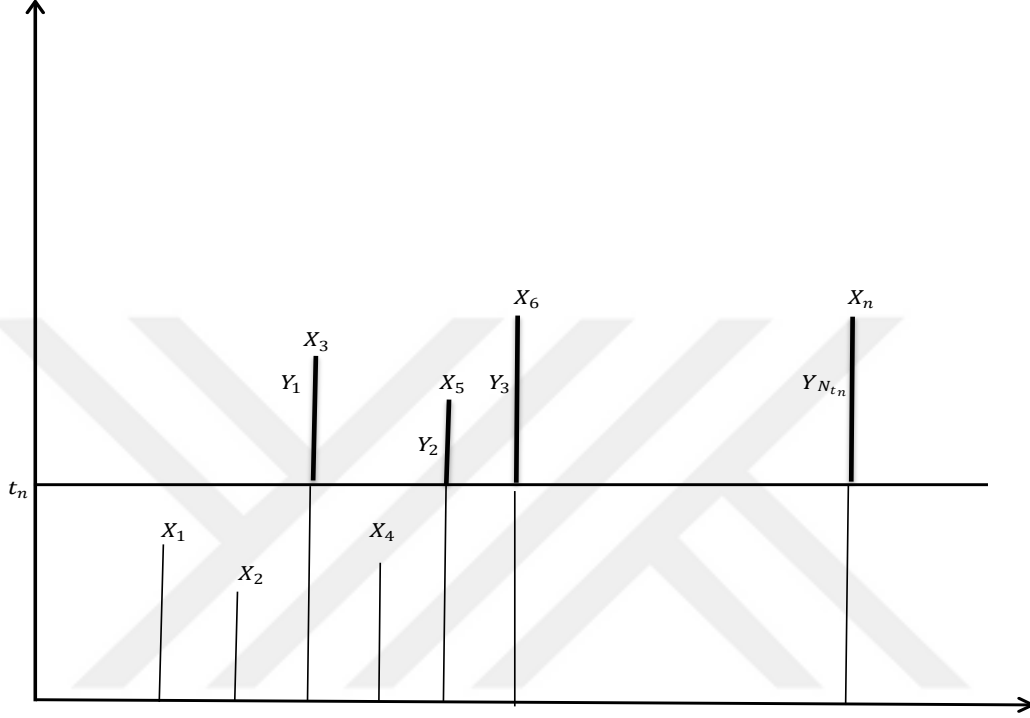
Ağır kuyruklu dağılımlara ilişkin parametre ve moment tahmini için literatürde önerilen farklı yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler ya verilerin genelleştirilmiş uç değer dağılımından geldiği ya da verilerin dağılımının bir başka dağılımın maksimum çekim alanına ait olduğu varsayımına dayanmaktadır. (ESAD) yaklaşımı ise hidrolojistler tarafından önerilmiş, seçilen yeterince büyük bir eşik değerinin aşılmasına dayanan alternatif bir tekniktir. Bu tekniğin kullanımındaki temel amaç aşağıda açıklanmıştır:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız aynı dağılıma sahip dağılım fonksiyonu $F \in M\mathcal{C}A(H_\xi)$ olan rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Öncelikle uygun bir t_n eşik değeri belirlenir. $N_{t_n}, X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri tarafından t_n eşik seviyesini aşan rasgele değişkenlerin sayısı olsun. Bu durumda

$$N_{t_n} = \#\{i: i = 1, 2, \dots, n, X_i > t_n\} \quad (64)$$

olur.

Aşım miktarları ise $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_{t_n}}$ ile gösterilecektir. Aşağıdaki figürde t_n eşik seviyesini aşan rasgele değişkenler ve aşım miktarlarının bir realizasyonu görülmektedir.



Şekil 1. Eşik Seviyesini Aşan Rasgele Değişkenler ve Aşım Miktarlarının Bir Realizasyonu

Bu durumda aşım dağılımını veren $F_{t_n}(x)$ bir koşullu dağılım fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{t_n}(x) = P(X - t_n \leq x \mid X > t_n), \quad x \geq 0.$$

$$= 1 - \frac{\bar{F}(x + t_n)}{\bar{F}(t_n)} \quad (65)$$

$x = y + t_n$ dönüşümü ile (65) ilişkisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\bar{F}(x) = \bar{F}_{t_n}(x - t_n)\bar{F}(t_n), \quad t_n < x < x^+. \quad (66)$$

Dolayısı ile burada $\bar{F}(x)$ in tahmini için koşullu $\bar{F}_{t_n}(x - t_n)$ dağılımı ve $\bar{F}(t_n)$ kuyruk dağılımı için tahmincilere ihtiyaç vardır. ξ ve β parametrelerini tahmin etmek için genelleştirilmiş Pareto dağılımı'nı aşım dağılımlarına uydurmak GPD yaklaşımının temel fikridir. Genelleştirilmiş Pareto dağılımı'nın tanımını tekrar hatırlayalım:

$$\bar{G}_{\xi, \beta} = f(x) = \begin{cases} \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ e^{-x/\beta}, & \xi = 0 \end{cases}, \quad x \in D(\xi, \beta)$$

$$(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty), & \xi \geq 0 \\ [0, -\beta/\xi], & \xi < 0 \end{cases}$$

Teorem 1.10.1.1. $\bar{F}_{t_n}(x)$ için limit dağılımı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\lim_{t_n \rightarrow x^+} \sup_{0 < x < x^+ - t_n} |\bar{F}_{t_n}(x) - \bar{G}_{\xi, \beta(t_n)}(x)| = 0. \quad (67)$$

(67) sonucundan yola çıkarak aşağıdaki denklik elde edilir:

$$\bar{F}_{t_n}(x) \approx \bar{G}_{\xi, \beta(t_n)}(x) \quad (68)$$

$N_{t_n}, X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri tarafından t_n eşik seviyesini aşan rasgele değişkenlerin sayısı olduğu için $N_{t_n} \sim \text{Bin}(n, p_n)$, $p_n = P(X_1 > t_n)$ olacaktır. Dolayısı ile $p_n = \bar{F}(t_n)$ için doğal tahmin edici:

$$\hat{p}_n = \hat{\bar{F}}(t_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > t_n\}} = \frac{N_{t_n}}{n}. \quad (69)$$

biçimindedir (Mikosh, 1999). Hatırlanacak olur ise $y = x - t_n$ için;

$$\bar{F}(x) = \bar{F}_{t_n}(y)\bar{F}(t_n), \quad t_n < x < x^+$$

idi. Bu durumda $\bar{F}(x)$ in tahmini için geriye sadece $\bar{F}_{t_n}(y)$ nin uygun bir tahminicisini bulmak kalır.

1.10.2. Dağılımların Kuyruklarının En Çok Olabilirlik Metodu İle tahmini

Eşik seviyesini aşan değerler için GPD dağılımının kuyruğu ve beklenen değeri için parameter tahmininde kullanılan farklı yöntemler mevcuttur. Bunlar sırası ile:

1. Pickand belirleyicisi,
2. En çok olabilirlik yöntemi,
3. Momentler yöntemi,
4. Olası ağırlıklı momentler yöntemi,
5. Temel yüzdesel yöntem.

Bu yöntemler içinde literatürde en etkili kullanılan yöntem en çok olabilirlik yöntemidir. Bu kısımda en çok olabilirlik yöntemi ile parameter tahmini üzerinde durulacaktır.

Bir önceki kısımda Genelleştirilmiş Pareto dağılımı ile aşım dağılımı fonksiyonu $F_{t_n}(x)$ arasındaki ilişkiden bahsetmiştik. Parametre tahmini de bu ilişki ile yakından ilgilidir. Bir önceki bölümde verilmiş olan (68) ilişkisi kullanılarak yeterince büyük bir t_n eşik değeri için $\bar{F}_{t_n}(y)$ ' in tahmincisi aşağıdaki gibi önerilir:

$$\hat{\bar{F}}_{t_n}(y) = \bar{G}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y) \quad (70)$$

Burada $G_{\xi, \beta}$ genelleştirilmiş Pareto dağılımıdır ve, $\hat{\xi} = \hat{\xi}_{N_{t_n}}$, $\hat{\beta} = \hat{\beta}_{N_{t_n}}$ tahmincileri $G_{\xi, \beta}$ dağılımının parametreleri için önerilmiş olan tahmincilerdir. Bu durumda yeterince büyük bir t_n değeri ve $y > 0$ için $\bar{F}(t_n + y)$ kuyruk dağılımının tahmincisi aşağıdaki formdadır:

$$\hat{\bar{F}}(t_n + y) = \frac{N_{t_n}}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{y}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\xi}} \quad (71)$$

Bu yöntem eşik seviyesini aşan değerler (ESAD) yöntemi olarak bilinir. Bu yöntem literatürde sık kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemle çalışmak için aşağıdaki değişkenlere ihtiyacımız vardır:

1. Güvenilir bir model.
2. Yeterince büyük bir t_n eşik seviyesi.
3. $\hat{\xi}$ ve $\hat{\beta}$ tahminçileri.

$\hat{\xi}$ ve $\hat{\beta}$ tahminçileri için Smith, 1982 yılında aşağıdaki şekilde açıklanmış olan maksimum olabilirlik tahmin yöntemi geliştirilmiştir (Smith, 1982).

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ bağımsız (ξ, β) parametreleri ile aynı GPD dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$f(x) = \frac{\xi}{\beta} \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}, \quad x \in D(\xi, \beta) \quad (72)$$

dır. Bu durumda $\beta \neq 0$ için en çok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L((\xi, \beta) | X) = \prod_{j=1}^{N_{t_n}} \left[\frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\xi X_j}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \right] \quad (73)$$

Buradan log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$l((\xi, \beta); X) = -n \ln \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{\xi}{\beta} X_i\right) \quad (74)$$

Dikkat edilecek olursa yukardaki formülde X_i rasgele değişkenleri $X_i \in D(\xi, \beta)$ şartını sağlar. Bu durumda $\xi > -\frac{1}{2}$ için en çok olabilirlik denklemi ξ, β 'ya göre çözülebilir. $l((\xi, \beta) | X)$ 'nın ξ, β 'ya göre kısmi türevleri alınır aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\frac{1}{\beta^2} \sum_{j=1}^{N_{t_n}} \ln \left(1 + \frac{\xi x_j}{\beta}\right) - \sum_{i=1}^{N_{t_n}} \frac{x_i}{\beta + \xi x_i} = 0, \quad (75)$$

$$-N_{t_n} + (1 + \xi) \sum_{i=1}^{N_{t_n}} \frac{x_i}{\beta + \xi x_i} = 0, \quad (76)$$

$x_1, x_2, \dots, x_{N_{t_n}}, X_1, X_2, \dots, X_{N_{t_n}}$ 'in bir realizasyonudur. $(\hat{\xi}_{N_{t_n}}, \hat{\beta}_{N_{t_n}})$ en çok olabilirlik tahmincileri üstteki sistemin bir çözümüdür. Burada (75)'in açık bir çözümü yoktur. Bu nedenle $(\hat{\xi}_{N_{t_n}}, \hat{\beta}_{N_{t_n}})$ in hesaplanabilmesi için nümerik metodlar kullanılmalıdır. Smith, 1982 yılında yayınlanan çalışmasında $(\hat{\xi}_{N_{t_n}}, \hat{\beta}_{N_{t_n}})$ ' in asimptotik normalliği gösterilmiştir (Smith, 1982). Özel olarak $\xi > -1/2$ için

$$\sqrt{N_{t_n}} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{N_{t_n}} - \xi \\ \hat{\beta}_{N_{t_n}} - \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N_2(0, \mathbb{Q}^{-1}), \quad N_{t_n} \rightarrow \infty \quad (77)$$

olduğunu göstermiştir. Burada

$$\mathbb{Q}^{-1} = (1 + \xi) \begin{pmatrix} 1 + \xi & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (78)$$

dır ve $N_2(\epsilon, w)$ ortalama vektörü ϵ ve covaryans matrisi w olan iki değişkenli normal dağılımdır.

1.10.3. Eşik Değerinin Belirlenmesi

$(\hat{\xi}_{N_{t_n}}, \hat{\beta}_{N_{t_n}})$ parametre tahmincileri dışında ESAD yöntemi ile çalışırken diğer bir önemli nokta eşik seviyesinin belirlenmesidir. t_n eşik seviyesinin seçimi konusunda farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. Optimum eşiği seçerken dikkate alınması gereken iki önemli faktör vardır. Eğer t_n 'yi çok yüksek seçersek çok az aşım elde ederiz ve bu da yüksek varyans tahmincisi ile sonuçlanır. Tersine, çok küçük t_n için tahminciler yanlı hale gelir. Pratikte en yaygın kullanılan yöntemlerden biri GPD için ortalama aşım fonksiyonu $e(t_n)$ 'nin doğrusallığına dayanan yöntemdir.

$\xi \in \mathbb{R}$ ve $\beta > 0$ parametreleriyle Pareto dağılımına sahip bir X rasgele değişkeni için

$$e(t_n) = \frac{\beta + \xi t_n}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi t_n > 0 \quad (79)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısı ile ortalama aşım dağılımı fonksiyonunun lineer olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda bir $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminin ampirik ortalama aşım dağılımı aşağıdaki gibidir:

$$e_n(t_n) = \frac{1}{N_{t_n}} \sum_{i \in \Delta(t_n)} (X_i - t_n), \quad t_n > 0 \quad (80)$$

Burada

$$N_{t_n} = \text{card}\{i: i = 1, 2, \dots, n, X_i > t_n\} = \text{card } \Delta(t_n) \quad (81)$$

dir. $e(t_n)$ 'nin lineer oluşu t_n eşik değerinin seçimi için şu şekilde bir yaklaşım sunmaktadır: Öyle bir $t_n > 0$ seçilsin ki; $e_n(t_n)$ her $x > t_n$ için yaklaşık olarak lineer olsun. Böylece t_n değerinin seçimi pratik bir uygulama halini almıştır. Bu çalışmada sonsuz varyansa sahip düzenli olarak değişen rastgele değişkenin ortalamasının ESAD tabanlı tahmincisi için Johansson tarafından önerilen eşiği (t_n) kullanacağız (Johansson, 2003).

1.10.4. Sonsuz Varyanslı Ağır Kuyruklu Dağılıma Sahip Rasgele

Değişkenin Beklenen Değeri İçin Tahminci (Johansson Tahmincisi)

Bu çalışmanın temel amacı, (s, S) tipi bir envanter modeli tanımlayan $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımın momentleri için (ESAD) tabanlı tahmin edicinin elde edilmesidir. Sürecin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımın momentleri için kesin formüller, talep dağılımının yenileme fonksiyonunu ve birinci momentini içerir. Bu nedenle sonsuz varyanslı ağır kuyruklu dağılıma sahip bir rasgele değişkenin beklenen değeri için ESAD tabanlı yaklaşıma ihtiyacımız vardır. Bu kısımda çalışmanın sonraki kısımlarında hem yenileme fonksiyonunun tahmini hem de talep rasgele değişkenlerinin parametrelerinin tahmininde kullanacağımız ESAD

tabanlı tahminci üzerinde durulacaktır. Bu tahminci Johansson, 2003 tarafından önerilmiştir (Johansson, 2003).

$$\bar{F}(x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} \left(1 + x^{-\delta} L(x)\right) \quad (82)$$

olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{t_n} x dF(x) + \int_{t_n}^{\infty} x dF(x) \\ &= \int_0^{t_n} x dF(x) - \int_0^{\infty} (t + t_n) d\bar{F}(t + t_n) \\ &= \mu_n^* + \tau_n \end{aligned} \quad (83)$$

olacaktır. μ için alternatif bir tahminci Johansson, 2003 çalışmasında aşağıdaki gibi önerilmiştir:

$$\hat{\mu}_n^{(j)} = \int_0^{t_n} x dF_n(x) - \int_0^{\infty} (t + t_n) d\hat{\bar{F}}(t + t_n) \quad (84)$$

(Johansson, 2003). Burada F_n , $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminin ampirik dağılımıdır ve $\hat{\bar{F}}(t_n)$; $\bar{F}(t_n)$ kuyruk dağılımına ait tahmincidir. (84) ün son terimini integrallenerek

$$\hat{\mu}_n^{(j)} = \hat{\mu}_n^* + \hat{\tau}_n \quad (85)$$

tahmincisi elde edilir. Burada

$$\hat{\mu}_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i 1\{X_i \leq t_n\}, \hat{\tau}_n = \hat{p}_n \left(t_n + \frac{\hat{\beta}_n}{1 - \hat{\xi}_n} \right), \quad (86)$$

dir. Ayrıca $\hat{p}_n = (\sum_{i=1}^n 1\{X_i \geq t_n\})/n$, $p_n = P(X \geq t_n)$ nin tahmincisi, $\hat{\xi}_n$, $\hat{\beta}_n$ ise sırası ile genelleştirilmiş Pareto dağılımına ait ξ , β parametrelerinin tahmincileridir.



2. (s, S) TIPLİ KLASİK YARI MARKOV ENVANTER MODELLER

Stok kontrolünde amaç; hemstoklama için gerekli maliyetini en aza indirmek hem de talebi karşılayacak kadar stok bulundurmayı sağlayacak optimal sistemi kurmaktır.

(s, S) tipli envanter model son yıllarda bir çok çalışmaya konu olmuştur. Varolan literatürün çoğunluğu talep rastgele değişkenlerinin hafif kuyruklu dağılım yapısına sahip olduğunu kabul etmektedir. Bu tez çalışmasında farklı olarak talep rastgele değişkenlerinin ağır kuyruklu dağılıma sahip olduğu durum çalışılacaktır.

(s, S) tipli envanter modeller içinde en yaygın kullanılanı klasik (s, S) tipli envanter modelidir. Klasik (s, S) tipli envanter model şu şekilde açıklanabilir: Bir şirket, ani yüksek talep miktarlarını da göz önüne alarak en uygun envanter politikasını belirlemeye çalışsın. Bu durumda $X(t)$ süreci herhangi bir t anında bu şirketin deposunun stok seviyesini temsil etmektedir. Bu şirket klasik (s, S) tipli envanter modelile stok kontrolü sağlamak istediğinde sistemi oluşturan elemanlar notasyonel olarak aşağıdaki gibidir:

$X(t)$: t anında bir depodaki stok seviyesi,

η_n : Talep miktarlarını temsil eden rasgele değişkenler,

ξ_n : Talepler arasında geçen süreyi temsil eden rasgele değişkenler,

s : Stok kontrol seviyesi,

S : Maksimum stok seviyesi,

τ_n : Stok seviyesinin s seviyesinin altına düştüğü ilk an,

N_1 : Stok seviyesinin s seviyesinin altına düştüğü ana kadar gerekli talep sayısı.

$X(t)$ klasik (s, S) tipli envanter modele göre çalışan fabrikanın deposundaki stok seviyesinin zaman göre değişimini yani herhangi bir t anında depodaki stok seviyesini gösterebilir. Depodaki ($X(t)$) stok seviyesi $t = 0$ başlangıç anında $X(0) = S$ olarak kabul edilir. (S maksimum stok seviyesidir). Depoya rasgele $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ anlarında rasgele $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ miktarı kadar talep gelmektedir. Dolayısı ile depodaki stok seviyesi her bir T_i anında $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ miktarı kadar azalmaktadır. Bu durum stok seviyesi $X(t)$, s stok kontrol seviyesinin altına inene kadar devam eder (burada $0 < s < S < \infty$ dır). Dolayısı ile depodaki stok seviyesinin değişimi aşağıdaki gibi olur:

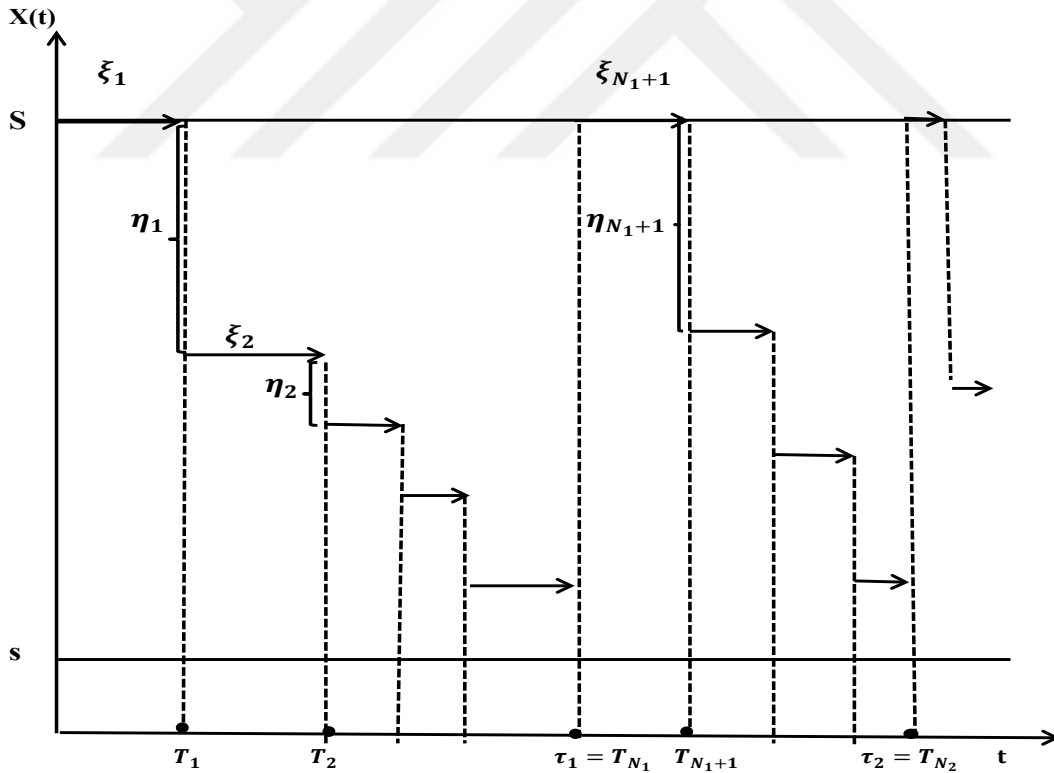
$$X_1 = S - \eta_1, \quad X_2 = S - (\eta_1 + \eta_2), \quad \dots, \quad X_n = S - \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Burada η_n rasgele değişkeni n. talep miktarını gösterir.

ξ_n rasgele değişkenleri (n – 1). ve n. talepler arasında geçen süreyi gösterebilir. Bu durumda n. talep gelinceye kadar geçen toplam zaman

$$T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

olarak tanımlanır. Stok seviyesindeki bu değişim, sistemin stok kontrol seviyesi ‘s’ nin altına ilk düştüğü an olan τ_1 anına kadar devam eder. τ_1 anında sistem deponun alabileceği maksimum stok miktarı olan ‘S’ seviyesine kadar doldurulur. İkinci periyot maksimum stok miktarı ‘S’ ile başlar ve birinci periyoda benzer şekilde devam eder. Şekil 2.’de klasik (s,S) tipli stok kontrol modelin bir realizasyonu görülmektedir.



Şekil 2. Klasik (s,S) Tipli Envanter Modelin Bir Realizasyonu.

2.1. Sürecin Matematiksel Kurulumu, Ergodik Dağılımı ve Ergodik Dağılımının Momentleri için Kesin Formüller

$\{\xi_n\}$, ve $\{\eta_n\}$ $n \geq 1$ aynı $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız rasgele değişkenlerin dizisi olsun. ξ_n ve η_n rasgele değişkenleri pozitif değerler alırken ξ_n, η_n rasgele değişkenleri kendi aralarında da bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir ayrıca dağılım fonksiyonları sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}; \quad F(x) = P\{\eta_1 \leq x\}.$$

ξ_n, η_n başlangıç rasgele değişkenleri aracılığı ile T_n ve Y_n yenileme dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad n \geq 1, \quad T_0 = Y_0 = 0.$$

$\{N_n\}$ tam değerli rasgele değişken dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın $N_0 = 0$ ve

$$N_{n+1} = \inf\{k \geq N_n + 1 : S - (Y_k - Y_{N_n}) < s\}$$

$n \geq 1$ dir. burada $N_1, \{Y_n\}$ tarafından “s” seviyesini ilk geçiş zamanı olan τ_1 anına kadar gerekli talep sayısıdır. Ayrıca

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i; \quad n \geq 1$$

olmak üzere $\nu(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}, t > 0$ tanımlansın. Bu durumda, depodaki stok miktarının değişimini gösteren $X(t)$ süreci aşağıdaki gibi inşaa edilir:

$$X(t) = S - (Y_{\nu(t)} - Y_{N_n}), \quad \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (87)$$

Bu çalışmanın amacı, $\beta \equiv S - s$ yeterince büyük iken yani $\beta \rightarrow \infty$ durumunda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının momentleri için

UDT' ye dayalı tahminçiler önermektedir. Sürecin uzun süre çalışması durumunda, yani $t \rightarrow \infty$ iken öncelikle sürecin dağılımını ve momentlerini bulabilmek için sürecin ergodik olup olmadığının bilinmesi gerekmektedir.

(87) ifadesi ile matematiksel kurulumu verilmiş olan $X(t)$ sürecinin ergodiklik koşulları ve bu koşullar altında genel ergodiklik teoreminin şartlarını sağladığı Khaniyev ve Atalay, 2010 yılında çalışmasında gösterilmiştir (Khaniyev ve Atalay, 2010). Ayrıca talep rasgele değişkenlerinin hem sonlu varyanslı hem de sonsuz varyanslı ağır kuyruklu bir dağılıma sahip olduğu durum için sürecin belli koşullar altında ergodik olduğu Bektaş Kamışlık, 2017 yılında çalışmasında gösterilmiştir (Bektaş Kamışlık, 2017).

Teorem 2.1.1. $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ $n \geq 1$ başlangıç rasgele değişkenleri aşağıdaki koşulları sağlasın;

i. $0 < E(\xi_1) < \infty$,

ii. $0 < E(\eta_1) < \infty$,

iii. $\{\eta_i\}$, $i \geq 1$ aritmetik olmayan rasgele değişkenlerdir (Bektaş Kamışlık, 2017).

Yukarıda belirtilen koşullar altında $X(t)$ süreci ergodiktir.

Teorem 2.1.2. $X(t)$ süreci Teorem 2.1.1.'in koşullarını sağlıyor olsun. $X(t)$ sürecin inergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ ile gösterilsin.

$Q_X(t) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq x\}$ ve $x \in [s, S)$ olsun. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının kesin formülü aşağıdaki formda yazılır:

$$Q_X(x) = 1 - \frac{U(S - x)}{U(S - s)}, \quad (88)$$

burada $s \leq x \leq S$ olur ve $U(x)$, $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur ve

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \quad (89)$$

dır. $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali aşağıdaki gibi ifade edilsin:

$$W_\beta(t) = \frac{1}{\beta} (X(t) - s). \quad (90)$$

$W_\beta(t)$ sürecin inergodik dağılım fonksiyonunun kesin hali aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$$Q_{W_\beta}(t) = 1 - \frac{U(\beta(1-x))}{U(\beta)}, \quad (91)$$

burada $\beta \equiv S - s \rightarrow \infty$ dır.

Bazı rasgele değişken sınıfları için $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen $U(x)$ yenileme fonksiyonunun kesin formunu bulunabilmektedir. Fakat pek çok dağılımın yenileme fonksiyonunun kesin formu bulunamamaktadır. Bu nedenle literatürdeki genel eğilim $U(x)$ yenileme fonksiyonu için asimptotik açılımlar kullanmanındaha uygun olacağı yönündedir. Böylece kesin formüllere en yakın sonuçları elde edilebilmektedir.

Sürecin diğer önemli karakteristiklerinden biri de ergodik dağılım fonksiyonunun n . mertebeden momentleridir. $\bar{X}(t) = X(t) - s$ biçiminde tanımlandığında $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n . mertebeden momentlerinin kesin formülü

$$E(\bar{X}^n) = \frac{n U_n(\beta)}{U(\beta)} \quad (92)$$

olarak verilmiştir. Burada

$$U_n(\beta) \equiv \beta^{n-1} * U(\beta) \equiv \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} U(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (93)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Ayrıca $U(t)$, $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ talep rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur.

3. LİTERATÜR ÖZETİ

Yenileme fonksiyonu, birçok farklı stokastik modeli araştırmak için önemli bir araçtır. Bu nedenle, yenileme fonksiyonları, yarı Markov envanter modellerinin özelliklerinin asimptotik ve istatistiksel analizi için de çok önemlidir. Bu kısımda yenileme fonksiyonlarının asimptotik açılımları ve bu fonksiyonlar için önerilen istatistiksel tahminciler hakkında kapsamlı bir literatür taraması sunulacaktır.

Önce yenileme fonksiyonunun temel unsurlarını açıklamamız gerekmektedir. $X_1, X_2, \dots$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı negatif olmayan rasgele değişkenler ve F aritmetik olmayan dağılım fonksiyonu olsun.

Tüm $n \geq 1$ için; $S_0 = 0$ ve $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olsun. $U(t)$ yenileme fonksiyonu

$$U(t) = E \left(\sum_{k=0}^{\infty} I_{\{S_k \leq t\}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(t) \quad (94)$$

şeklinde tanımlansın.

Burada F^{*k} , F dağılım fonksiyonunun k . konvülyasyonudur. Burada görüldüğü gibi yenileme fonksiyonu genel olarak kesin şekli tam olarak bilinmeyen bir F dağılımına bağlıdır. Bu nedenle $U(t)$ hakkında bilgi elde etmek ve somut problemlerde kullanmak için ya $U(t)$ fonksiyonunun tahmincileri ya da asimptotik özellikleri kullanılır. Yenileme fonksiyonu ile ilgili tahmin problemleri (hem parametrik olmayan hem de yarı parametrik yaklaşımlar), yenileme fonksiyonunun limit teoremleri ve asimptotik özellikleri ile yakından ilişkilidir. Yenilenme fonksiyonunun bazı önemli asimptotik özellikleri Teorem 3.1 ile verilmiştir:

Teorem 3.1. $\{N(t), t > 0\}$, bağımsız ve aynı dağılıma sahip varışlar arası zamanları gösteren $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişkenlerinin oluşturduğu yenileme süreci olsun.

1. Ortalama için asimptotik sonuç: Eğer $\mu = E[X_i] < \infty$ ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad (95)$$

dir.

2. Varyans için asimptotik sonuç: Eğer $\mu = E[X_i] < \infty$ ve $\sigma^2 = Var[X_i] < \infty$ ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Var[N(t)]}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3} \quad (96)$$

dir.

3. Yenileme sürecinin asimptotik normalliği: $E[X^2] < \infty$ ise aşağıdaki dağılıma göre yakınsama sağlanır:

$$\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (97)$$

Teorem 3.2. F sonlu μ ortalamalı ve sonlu σ^2 varyanslı aritmetik olmayan bir rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda yenileme fonksiyonu $U(t)$ için aşağıdaki yaklaşım elde edilir:

$$U(t) \sim \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2}, t \rightarrow \infty \quad (98)$$

Yenileme fonksiyonunun istatistiksel tahmincisi literatürde çeşitli şekillerde ele alınmıştır. Frees, 1986 yılında $U(t)$ için parametrik olmayan iki tahminci önermiştir (Frees, 1986). İlk olarak, (94) ile verilmiş olan eşitliğin sağ tarafındaki $F^{*k}(t)$ yerine onun yansız bir tahmincisini kullanmış ve yenileme fonksiyonu için aşağıdaki tahminciyi önermiştir:

$$\hat{U}_n(t) = \sum_{k=0}^m F_n^{(k)}(t) \quad (99)$$

Burada $F_n^{(k)}(t) = \binom{n}{k} \sum I_{\{X_{i_1} + \dots + X_{i_k} \leq t\}}$ dır. Frees, 1986 herhangi bir t sabiti için $\hat{U}_n(t)$ 'nin $U(t)$ için güçlü bir şekilde tutarlı tahminci olduğunu göstermiştir. Ayrıca

Frees, 1986 yılında $\sqrt{n}(\hat{U}_n(t) - U(t))$ 'nın herhangi bir sabit $t > 0$ için asiptotik olarak normal bir dağılıma sahip olduğunu kanıtlamaktadır (Frees, 1986). Frees, 1986 yılında önerilen ikinci tahminci, (99) 'in sağ tarafındaki F yerine onun $X_1, \dots, X_n$ rasgele değişkenlerine dayalı ampirik dağılım fonksiyonunun kullanılması ile elde edilmiştir (Frees, 1986). Bu yaklaşım aşağıdaki tahminciyi verir.

$$\tilde{U}_n(t) = \sum_{k=0}^m F_n^{*k}(t). \quad (100)$$

Frees, 1986 yılında (99) tahmincisi için elde ettiği asimptotik sonuçların (100) tahmincisi için de geçerli olduğunu kanıtlamıştır (Frees, 1986). F , sonlu ortalama μ ve sonlu varyans σ^2 ile aritmetik olmadığında, Feller, 1971 yılında $U(t)$ için önemli bir asimptotik açılım aşağıdaki gibi önerilmiştir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) - \frac{t}{\mu_1} = \frac{\sigma^2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{2} \quad (101)$$

(Feller, 1971).

Frees, 1986 yılında (101) asimptotik açılımını referans alarak t yeterince büyük olduğunda $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız aynı dağılıma sahip sonlu μ ortalamalı ve sonlu σ^2 varyanslı rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için $U(t)$ nin parametrik olmayan bir tahmincisini aşağıdaki gibi önermiştir:

$$\hat{U}(t) = \frac{t}{\hat{\mu}_1} + \frac{\hat{\mu}_2}{2\hat{\mu}_1^2} \quad (102)$$

(Frees, 1986). Burada $\hat{\mu}_n$, $n = 1, 2$ olmak üzere X_i , $i \geq 1$ talep rasgele değişkenlerinin n . dereceden momentleri için istatistiksel tahmincidir (Frees, 1986). Frees, 1986 yılında (102) tahmincisinin küçük t değerleri için tutarlı olmadığını kanıtlamıştır (Frees, 1986). ancak bu tahmincinin büyük t 'ler için istatistiksel özellikleri Frees, 1986 yılında yayınlanan çalışmasında araştırılmamıştır. Bu tahmincinin istatistiksel özellikleri ilk olarak Gökpınar, 2016 yılında yapılan çalışmada araştırılmıştır

(Gökpınar, 2016). Ayrıca Frees, 1986 yılında çalışmasında yenileme fonksiyonu için U ve V istatistiğine dayanan parametrik olmayan tahminçiler önermiştir (Frees, 1986). Schneider vd., 1990 yılında yenileme fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahminci önermiş ve tahmincilerini Frees, 1986 yılında önerdiği tahmincilerle karşılaştırmıştır (Schneider vd., 1990; Frees, 1986). Frees, 1986 yılında çalışmasında önerdiği tahminciye benzer histogram tipi bir tahminci Markovich ve Krieger, 2000 yılında önerilmiştir (Frees, 1986; Markovich ve Krieger, 2000). Markovich ve Krieger, 2000 yılında ayrıca bir parametrik terim artı düzeltme olmayan bir terimden oluşan yarı parametrik bir tahminciyi de bu çalışmalarında önermişlerdir (Markovich ve Krieger, 2000). Zhao ve Subba Rao, 1997 yılında yenileme fonksiyonu için yeni bir tahminciyi yenileme denklemini çözerek elde etmişlerdir (Zhao ve Subba Rao, 1997).

Sonlu varyanslı alt-üstel rasgele değişkenlerin yarattığı yenileme fonksiyonu için bir diğer önemli asimptotik açılım Geluk ve Frenk, 2011 yılında birinci ve ikinci momentler vasıtasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{\eta}(x) - \frac{x}{\mu} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} = -\frac{1}{\mu_1} \int_x^{\infty} \bar{F}_l(t) dt + O(\bar{F}_l(x)) \quad (103)$$

(Geluk ve Frenk, 2011). Burada, $\bar{F}_l(x)$ integralenmiş kuyruk fonksiyonudur ve şu şekilde tanımlanır;

$$\bar{F}_l(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_x^{\infty} \bar{F}(y) dy, \quad x > 0 \quad (104)$$

Kaasik, 2009 yılında integralenmiş kuyruk dağılımı, $\bar{F}_l(x)$ için aşağıdaki ampirik tahminciyi önermiştir:

$$\bar{F}_l^n(x) = \frac{\int_x^{\infty} \bar{F}_n(y) dy}{\bar{X}}, \quad x > 0. \quad (105)$$

(Kaasik, 2009).

Kaasik, 2009 yılında ayrıca bu tahmincinin $\bar{F}_l(x)$ için tutarlı bir tahminci olduğunu göstermiştir (Kaasik, 2009). (107) asimptotik açılımında $\bar{F}_l(x)$, μ ve μ_2

yerine bunların ampirik tahmincileri kullanılarak sonlu varyanslı ile alt üstel dağılıma sahip rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için aşağıdaki tahminci önerilebilir:

$$U_{\eta}^n(x) = \frac{x}{\bar{X}} + \frac{\bar{X}_2}{2\bar{X}^2} - \frac{1}{\bar{X}} \int_x^{\infty} \bar{F}_n(y) dy, \quad x \rightarrow \infty. \quad (106)$$

$E(X^2) = \infty$ durumu için Sgibnev, 1981 yılında $U(t)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik sonucu elde etmiştir:

$$U(t) - \frac{t}{\mu_1} \sim \frac{1}{\mu_1^2} \int_0^t \left(\int_y^{\infty} \bar{F}(x) dx \right) dy, \quad (107)$$

(Sgibnev, 1981). Burada $\bar{F} = 1 - F$, F dağılımının kuyruğudur. F ise $U(t)$ yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenlere ait dağılım fonksiyonudur. Bu asimptotik sonuç kullanılarak $E(X^2) = \infty$ durumunda Bebbington vd., 2007 yılında $U(t)$ yenileme fonksiyonunun parametrik olmayan tahmin edicisi

$$U_n(t) = \frac{t}{\hat{\mu}_1} + \frac{1}{\hat{\mu}_1^2} \int_0^t \left(\int_y^{\infty} \bar{F}_n(x) dx \right) dy \quad (108)$$

biçiminde elde edilmiştir (Bebbington vd., 2007). Burada $\hat{\mu}_1$, F dağılımının birinci örneklem ortalamasını temsil eder. Bebbington vd., 2007 yılında elde edilen bu sonuç, F dağılım fonksiyonu $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ indeksi ile S_{α} nın kararlılık çekim alanında olduğunda $U(t)$ için güven aralıklarının elde edilmesine de olanak sağlamıştır (Bebbington vd., 2007).

Farz edelim ki $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenleri kuyruk dağılımı aşağıdaki gibi verilmiş olan F dağılım fonksiyonuna sahip olsunlar:

$$\bar{F}(x) = c x^{-\frac{1}{\lambda}} \left(1 + x^{-\delta} L(x) \right), \quad \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right), \quad \delta > 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (109)$$

burada $c > 0$ bir sabit sayı ve $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyondur. Yani her $t > 0$ için

$$\frac{L(tx)}{L(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty$$

şartı sağlanır. Dikkat edilecek olur ise $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ için $E(X) < \infty$ ve $E(X^2) = \infty$ dır. $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ durumunda bu tip dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için asimptotik sonuç Teugels, 1968 yılında aşağıdaki gibi elde etmiştir:

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \sim \frac{\lambda^2 t^2 \bar{F}(t)}{\mu^2 (1 - \lambda)(2\lambda - 1)}, \quad t \rightarrow \infty \quad (110)$$

(Teugels, 1968).

Johansson, 2003 yılında çalışmasında kuyruk dağılımı (109) biçiminde verilmiş olan dağılımların beklenen değeri için bir tahminci önermiştir (Johansson, 2003). t_n önceden belirlenmiş bir eşik seviyesi olmak üzere Johansson, 2003 yılında önerilmiş olan eşik seviyesini aşan değerler yöntemine dayalı tahminci aşağıdaki biçimdedir (Johansson, 2003):

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i 1\{\eta_i \leq t_n\} + \hat{p}_n \left(t_n + \frac{\hat{\beta}_n}{1 - \hat{\xi}_n} \right) = \hat{\mu}'_n + \hat{\tau}'_n \quad (111)$$

burada

$$\mu = \int_0^{t_n} v dF(v) + \int_{t_n}^{\infty} v dF(v) = \mu'_n + \tau'_n. \quad (112)$$

dır. Johansson, 2003 yılında μ için önerilmiş olan (111) tahmincisini kullanarak Necir vd., 2010 yılında yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenlerin kuyruk dağılımı (109) biçiminde olduğunda $U(t)$ yenileme fonksiyonu için yarı parametrik istatistiksel bir tahminci elde edilmiştir (Necir vd., 2010). Necir vd., 2010 yılında önerilen alternatif tahminci aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\hat{U}_n(t_n) = \frac{t_n}{\hat{\mu}_n^{(j)}} + \frac{\widehat{\lambda}_n^2 t_n^2 \hat{p}_n}{\hat{\mu}_n^{(j)^2} (1 - \hat{\lambda}_n)(2\hat{\lambda}_n - 1)} \quad (113)$$

(Necir vd., 2010).

Literatürde (s, S) tipli yarı Markov envanter modellerin ergodik dağılım fonksiyonu ve dağılım fonksiyonunun momentleri için istatistiksel tahmin problemi kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve Frees, 1986 tarafından önerilen istatistiksel araçlar kullanılarak bazı farklı tahminçiler önerilmiştir (Frees, 1986; Gökpınar, 2016). Daha geniş literatürdeki çok sayıda mevcut çalışma, talep rasgele değişkenlerinin hafif kuyruklu olduğu durumu incelemiştir. Ancak daha önce belirttiğimiz gibi, hafif kuyruklu talep varsayımı, taleplerde beklenmedik ani değişiklikler olduğunda, her zaman tatmin edici değildir. Bu nedenle taleplerin istikrarlı olmadığı sektörlerde envanter sistemleri modellenirken ağır kuyruklu dağılımların kullanılması gerekmektedir.

Literatürde ağır kuyruklu taleplere sahip (s, S) tipli envanter modellerin ergodik dağılımları ve ergodik dağılımlarının momentleri pek çok çalışmada incelenmiş ve bu modeli ifade eden sürecin sayısal karakteristikleri için çeşitli asimptotik açılımlar ve yaklaşımlar elde edilmiştir (Bektaş Kamışlık, 2017). Ancak dikkate alınan sistemlerin istatistiksel özelliklerine ilişkin bir takım soruların yanıtlanması gerekmektedir. Bildiğimiz kadarıyla, daha önce hiçbir çalışma ağır kuyruklu talep rastgele değişkenlerinin (s, S) tipi envanter modeli üzerindeki etkisini istatistiksel olarak ele almamıştır. Bu tezin temel amacı, yarı Markov envanter modeli ifade eden sürecin istatistiksel özelliklerini, literatürde önerilen bazı farklı yaklaşımları kullanarak, ağır kuyruklu ve sonsuz varyanslı talep yapıları ile araştırmaktır. Temel motivasyonumuz önceki literatürden farklı olarak, talep rasgele değişkenlerinin kuyruk dağılımları (109) formunda düzenli değişen, sonsuz varyanslı, ağır kuyruklu bir dağılıma sahip olduğunda (s, S) tipli yarı Markov envanter modeli ifade eden $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının momentleri için eşik seviyesini aşan değerler yöntemine dayalı bir tahminci önermek ve bu tahmincinin istatistiksel özelliklerini incelemektir.

4. YAPILAN ÇALIŞMALAR

4.1. (s, S) Tipli Envanter Modelin Ergodik Dağılımı İçin Uç Değerler Teorisine Dayalı İstatistikî Tahminci

Kısım 2.1. de $X(t)$ sürecinin belirli koşullar altında ergodik olduğu gösterilmiş ergodik dağılım fonksiyonunun kesin şekli aşağıdaki gibi sunulmuştur:

$$Q_x(x) = 1 - \frac{U(S-x)}{U(S-s)}, \quad s \leq x \leq S, \quad (114)$$

burada $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$, $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ dizisi tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur. (114) denkleminde $W_x \equiv \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Q_{W_x}(t) = 1 - \frac{U(t(1-x))}{U(t)}, \quad s \leq x \leq S, \quad t \equiv S-s$$

Üstel, Erlang gibi bazı özel dağılımlar dışında yenileme fonksiyonunun kesin şeklinin elde edilmesinin kolay olmadığı bilinmektedir. Bundan dolayı yarı Markov envanter modelini bazı özelliklerini bulabilmek için asimptotik yaklaşımların kullanılması gerekmektedir. Bu tez çalışmasında Kısım 2. de çalışma prensibi ve kurulumu verilmiş olan (s, S) tipli yarı Markov envanter modelin talep rasgele değişkenleri dizisi $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ 'ni oluşturan η rasgele değişkenlerinin aşağıda ifade edilen, düzenli olarak değişen dağılım fonksiyonuna sahip olduğu varsayılacaktır:

$$\bar{F}(x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} \left(1 + x^{-\delta} L(x)\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (115)$$

burada $\xi \in (1/2, 1)$, $\delta > 0$ ve $c > 0$ reel sabit olmak üzere $L(x)$ yavaş değişen fonksiyondur. Ayrıca $L(x)$, $\delta > 0$ için yavaş değiştiğinden $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + x^{-\delta} L(x) = 1$ olur. Dolayısıyla $1 + x^{-\delta} L(x)$ yavaş değişir. $L_1(x) = 1 + x^{-\delta} L(x)$ diyelim. Bu durumda $\bar{F}(x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} \left(1 + x^{-\delta} L(x)\right)$ kuyruk indeksi $-1/\xi$ ile $\xi \in (1/2, 1)$ için

düzenli olarak değişen dağılım fonksiyonudur, bu şartkar altında $F(x)$ sonsuz varyansa sahiptir.

Bu tez çalışmasında ele alınacak olan tahminci problemine geçmeden önce ele alınan klasik yarı Markov envanter modelinin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik yaklaşım elde edilmesi gerekmektedir. Modeli ifade eden $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının kesin ifadesi talep rasgele değişkenleri tarafından üretilmiş yenileme fonksiyonu cinsinden verilmiştir. Bu nedenle, sonsuz varyanslı ağır kuyruklu, düzenli değişen dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için asimptotik bir yaklaşıma ihtiyacımız vardır. $F(\cdot)$, $(0, \infty)$ üzerinde bir c.d.f. olsun ve $\bar{F}(\cdot)$, $1 < \alpha = 1/\xi < 2$ indeksi ile düzenli değişen bir fonksiyon olsun. Geluk, 1992 yılında bu şartlar altında $U(t) = E(N(t)) = \sum_k^\infty F^{*k}(t)$ yenileme fonksiyonu için asimptotik yaklaşımı şu şekilde vermiştir:

$$U(t) - \frac{t}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} \int_0^t \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds = O\left(t^4 (\bar{F}(t))^2 \bar{F}(t^2 \bar{F}(t))\right) \quad (116)$$

(Geluk, 1992). (116) ile verilen asimptotik yaklaşım, talep rasgele değişkenleri sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip olduğunda yarı Markov (s, S) tipli envanter modelinin ergodik dağılım fonksiyonunu elde etmek için kullanılmıştır (Bektaş Kamışlık, 2019). Bu çalışmanın sonuçları olarak, sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun kesin ifadesi için (115) formülü ve (116) asimptotik yaklaşımının birlikte kullanılmasıyla $Q_{W_x}(t)$ asimptotik açılımı aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$Q_{W_a}(t) = (1 - a) - \frac{G(at)}{\mu t} + \frac{a G(t)}{\mu t} + O\left(t^3 \bar{F}(t)^2 \bar{F}(t^2 \bar{F}(t))\right) \quad (117)$$

burada $0 < a = (1 - x) < 1$, $\mu = E(\eta_1)$ olmak üzere;

$$G(t) = \int_0^t \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds \quad (118)$$

dir.

Şimdi uygun bir t_n eşik değeri üzerinde kalan aşımaların dağılımını F_{t_n} ile gösterelim. F_{t_n} için limit dağılımı Teorem 1.9.1. ile verilmiştir (Balkema de Haan, 1974; Pickands, 1975). Teorem 1.9.1'e göre, F_{t_n} şekil parametresi $\xi > 0$ ve ölçek parametresi $\beta = t_n$, olan genelleştirilmiş Pareto dağılımı ile yaklaşık olarak hesaplanır. Farz edelim ki $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu

$$\bar{F}(x) = P(\eta_1 > x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} (1 + x^{-\delta} L(x)) \quad (119)$$

olsun. t_n önceden belirlenmiş bir eşik seviyesi olmak üzere, $n \rightarrow \infty$ olduğunda sonsuza yaklaşsın (bu çalışmada (Johansson, 2003) tarafından önerilen eşik seviyesi kullanılacaktır). Böylece F_{t_n} tanımı kullanılarak

$$\bar{F}_{t_n}(y) = P(\eta_1 - t_n > y | \eta_1 > t_n) = \bar{F}(t_n + y) / \bar{F}(t_n) \quad (120)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\bar{F}_{t_n}(y) = \left(1 + \frac{y}{t_n}\right)^{-1/\xi} \frac{1 + (t_n + y)^{-\delta} L(t_n + y)}{1 + t_n^{-\delta} L(t_n)} \quad (121)$$

olur.

$E(\eta_1) = \mu$ 'nin istatistiki tahmincisi, Johansson, 2003 yılında tarafından şu şekilde önerilmiştir:

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i 1\{\eta_i \leq t_n\} + \hat{p}_n \left(t_n + \frac{\hat{\beta}_n}{1 - \hat{\xi}_n} \right) = \hat{\mu}'_n + \hat{\tau}'_n \quad (122)$$

(Johansson, 2003). Burada

$$\mu = \int_0^{t_n} v dF(v) + \int_{t_n}^{\infty} v dF(v) = \mu'_n + \tau'_n \quad (123)$$

dir. $G(t_n)$ çift katlı integrali şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
G(t_n) &= \int_0^{t_n} \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds \\
&= t_n \int_{t_n}^\infty \bar{F}(v) dv + \int_0^{t_n} v \bar{F}(v) dv \\
&= \frac{t_n^2}{2} \bar{F}(t_n) + \int_0^{t_n} \frac{v^2}{2} dF(v) + t_n \int_{t_n}^\infty \bar{F}(v) dv. \quad (124)
\end{aligned}$$

burada $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{\eta_i \leq x\}$, F için ampirik tahmin edicidir. Ek olarak t_n eşik seviyesinin üzerinde kalan aşımaların sayısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N = \text{card} \{ \eta_i : \eta_i > t_n : 1 \leq i \leq n \} \quad (125)$$

$N \sim \text{Bin}(p_n, n)$ ve $\bar{F}_{t_n} = p_n = P[\eta_1 > t_n]$ olduğu açıktır. Bu durumda $\bar{F}(t_n)$ için doğal tahmin edici $\hat{p}_n = \frac{N}{n}$ olacaktır. Böylece daha önce açıklamış olduğumuz ESAD yöntemindeki enstrümanlar kullanılarak $\hat{\bar{F}}(t_n + y)$ için aşağıdaki tahmin edici elde edilir.

$$\hat{\bar{F}}(t_n + y) = \hat{\bar{F}}(t_n) \hat{\bar{F}}_{t_n}(y) = \hat{p}_n \bar{G}_{\hat{\xi}_n, \hat{\beta}_n}(y) \quad (126)$$

$\bar{F}$ kuyruk dağılımının tahmin edicisi için olarak $\bar{G}_{\hat{\xi}_n, \hat{\beta}_n}$ kullanılırsa ve (124) eşitliğinin sağ tarafı göz önünde bulundurulursa, $G(t_n)$ için aşağıdaki tahmin edici elde edilir.

$$\hat{G}(t_n) = \hat{p}_n \frac{t_n^2}{2} + \frac{1}{2n} \sum_i^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\} + \frac{t_n \hat{p}_n \hat{\beta}_n}{1 - \hat{\xi}} \quad (127)$$

burada $\hat{\xi}$ ve $\hat{\beta}_n$ genelleştirilmiş Pareto dağılımının parametreleri için tahmin edicilerdir, $\hat{\beta}_n = t_n \hat{\xi}$ olur. Şimdi $G(at_n)$ için bir tahmin edici bulmamız gerekmektedir. t_n 'nin önceden belirlenmiş bir eşik seviyesi olduğunu ve $0 < a < 1$ 'in bir sabit olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla t_n 'i a ile çarparak eşik seviyesini aşağı

çekmiş oluyoruz. $\bar{F}(x) = P(\eta_1 > x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} (1 + x^{-\delta} L(x))$ düzenli değişen dağılımının tanımına göre şunu biliyoruz: $\bar{F}(a t_n) = a^{-1/\xi} \bar{F}(t_n)$.

$N_1(t_n)$, $a t_n$ 'yi aşan η_i 'lerin sayısı olarak tanımlansın. Yani;

$$N_1 = \text{card}\{\eta_i: \eta_i > a t_n: 1 \leq i \leq n\}$$

N_1 , $\text{Bin}(p_{n_1}, n)$ parametreleriyle binom dağılımı gibi davranır ve $p_{n_1} = \bar{F}(a t_n) = a^{-1/\xi} \bar{F}(t_n) = a^{-1/\xi} p_n$ olur. $\hat{p}_{n_1} = N_1/n$, p_{n_1} için doğal tahmin edicidir. Burada $N_1 = a^{-1/\xi} N$ olur.

$\bar{F}_{a t_n}(y) = P[\eta_1 - a t_n > y \mid \eta_1 > t_n]$ şeklinde tanımlansın (123) de " t_n " eşik seviyesini " $a t_n$ " ile değiştirirsek, $\beta_{n_1} = a t_n$; $\xi = a \beta_n$ olmak üzere; aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\sup_{y>0} |F_{a t_n}(y) - G_{\xi, \beta_{n_1}}(y)| = O(a^{-\delta} t_n^{-\delta} L(a t_n)) = O(t_n^{-\delta} L(t_n))$$

Böylelikle $G(a t_n)$ için aşağıdaki tahmin ediciyi elde ederiz:

$$\hat{G}(a t_n) = \hat{p}_{n_1} \frac{a^2 t_n^2}{2} + \frac{1}{2n} \sum_i^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq a t_n\} + \frac{t_n \hat{p}_{n_1} \hat{\beta}_{n_1}}{1 - \xi} \quad (128)$$

(117) 'de (127) ve (128) 'i kullanarak $Q_{W_a}(t)$ sürecinin ergodik dağılımı için ESAD yaklaşımına dayalı istatistiki tahminciyi aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\hat{Q}_{W_a}(t_n) = (1 - a) - \frac{\hat{G}(a t_n)}{\hat{\mu}_n t_n} + \frac{a \hat{G}(t_n)}{\hat{\mu}_n t_n} \quad (129)$$

Bir sonraki adımda $\hat{Q}_{W_a}(t_n)$ tahmincisinin tutarlılığını ve asimptotik davranışını inceleyeceğiz. Bunun için Johansson, 2003 yılında yayınladığı çalışmasında elde edilmiş olan aşağıdaki önermeye ihtiyacımız vardır.

Önerme 4.1.1. $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ pozitif bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu

$\bar{F}(x) = P(\eta_1 > x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} (1 + x^{-\delta} L(x))$ olsun. Ayrıca $p_n = \bar{F}(t_n)$, $t_n = O\left(n^{\frac{\alpha\xi}{4}}\right)$ olmak üzere, $N = \text{card}\{\eta_i: \eta_i > t_n\} = \text{Bin}(n, p_n)$ $\alpha \in \left(\frac{1}{1+2\delta\xi}, 1\right)$, $\delta > 0$, $\xi \in (0,1)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \Phi_n(t_1, t_2, t_3, t_4) \\ &= E \left[\exp \left\{ it_1 \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} (\hat{\mu}'_n - \mu'_n) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + i\sqrt{n} p_n(t_2, t_3) \left(\frac{\hat{\beta}_n}{\beta} - 1 \right) i t_4 \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p_n)}{\sqrt{p_n(1-p_n)}} \right\} \right] \\ & \rightarrow \exp \left\{ -\frac{t_1^2}{2} - \frac{1}{2} (t_2, t_3) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} - \frac{t_4^2}{2} \right\} (1 + o_P(1)) \end{aligned} \quad (130)$$

burada

$$\begin{aligned} \hat{\mu}'_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i 1\{\eta_i \leq t_n\}, \mu'_n = \int_0^{t_n} v dF(v), \gamma_n^2 = \text{var}(\eta_1 1\{\eta_1 \leq t_n\}), \hat{p}_n = \\ N/n \text{ ve } \Sigma^{-1} &= (1 + \xi) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 + \xi \end{pmatrix} \text{ olur (Johansson, 2003).} \end{aligned}$$

Tutarlılığı göstermek için, aşağıdaki ampitik ilişkiyi kanıtlamamız gerekmektedir:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n) &= \frac{a \hat{G}(t_n)}{\hat{\mu}_n t_n} - \frac{a G(t_n)}{\mu t_n} + \frac{G(at_n)}{\mu t_n} - \frac{\hat{G}(at_n)}{\hat{\mu}_n t_n} \\ &= o_P(1), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (131)$$

(131) bağıntısını elde etmek için aşağıdaki varsayımları ispatlamamız gerekir.

Varsayım 4.1.1. Önerme 4.1.1. koşulları altında her $k \geq 1$ için aşağıdaki asimptotik ilişkiler doğrudur:

- i) $(\hat{\mu}_n - \mu)^k = o_P(1)$
- ii) $\frac{\hat{G}(at_n) - G(at_n)}{t_n} = o_P(1)$

$$iii) \frac{\hat{G}(t_n) - G(t_n)}{t_n} = o_P(1), n \rightarrow \infty. \quad (132)$$

(Johansson, 2003).

İspat: Önerme 4.1.1. 'ye göre

$$i) (\hat{\mu}_n - \mu) = O(\gamma_n/\sqrt{n})$$

$$ii) \alpha \in (1/(1 + 2\delta\xi), 1), \delta > 0 \text{ ve } \xi \in (0, 1) \text{ için } \gamma_n^2 = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}(\xi - \frac{1}{2})}\right)$$

asimptotik ilişkileri vardır. Dolayısıyla

$$(\hat{\mu}_n - \mu) = O\left(n^{\frac{\alpha}{4}(\xi - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}\right), (\hat{\mu}_n - \mu)^k = O\left(n^{\frac{k\alpha}{4}(\xi - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}\right) \quad (133)$$

elde edilir.

Varsayımlara göre $k \geq 1$ için $\frac{k\alpha}{4}\left(\xi - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} < 0$ olduğu görülür ve

$$(\hat{\mu}_n - \mu)^k = O\left(n^{\frac{k\alpha}{4}(\xi - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}\right) = o_P(1) \quad (134)$$

elde edilir. Bu durumda:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{G}(at_n) - G(at_n)}{t_n} &= \left\{ \left[\frac{a^2 t_n^2 \hat{p}_{n_1}}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\} + \frac{a t_n \hat{p}_{n_1} \hat{\beta}_{n_1}}{1 - \hat{\xi}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_0^{at_n} \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds \right] \right\} \\ &= \frac{1}{t_n} \left\{ \left[\frac{a^2 t_n^2 \hat{p}_{n_1}}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\} + \frac{a t_n \hat{p}_{n_1} \hat{\beta}_{n_1}}{1 - \hat{\xi}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{a^2 t_n^2 p_{n_1}}{2} + \frac{1}{2} E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\}) + at_n \int_{at_n}^\infty \bar{F}(v) dv \right] \right\} \\ &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{t_n} \quad (135) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_1}{t_n} &= \frac{a^2 t_n}{2} (\hat{p}_{n_1} - p_{n_1}) \\ &+ \frac{1}{2t_n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\} - E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\}) \right]\end{aligned}\quad (136)$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_2}{t_n} &= \left[\frac{a p_{n_1} \beta_{n_1}}{(1-\xi)} - a \int_{at_n}^{\infty} \bar{F}(v) dv \right] + \left[\frac{a \hat{p}_{n_1} \hat{\beta}_{n_1}}{(1-\hat{\xi})} - \frac{a p_{n_1} \beta_{n_1}}{(1-\xi)} \right] \\ &= \left[\frac{a p_{n_1} \beta_{n_1}}{(1-\xi)} - a \int_{at_n}^{\infty} \bar{F}(v) dv \right] + \frac{a \beta_{n_1}}{(1-\xi)} + \frac{a \hat{p}_{n_1}}{(1-\xi)} (\hat{\beta}_{n_1} - \beta_{n_1}) \\ &+ \left(\frac{a \hat{p}_{n_1} \hat{\beta}_{n_1}}{(1-\xi)(1-\hat{\xi})} (\hat{\xi} - \xi) \right)\end{aligned}\quad (137)$$

dir. Diğer taraftan $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\} - E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\})$ değerinin sonlu olduğu ve Önerme 4.1.1. 'nin varsayımlarından, $t_n^{-1} = O\left(n^{-\frac{\alpha\xi}{4}}\right)$ olduğu göz önünde bulundurulursa:

$$\frac{1}{2t_n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\} - E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\}) \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (138)$$

olur. Merkezi limit teoremine göre;

$$(\hat{p}_{n_1} - p_{n_1}) = O_P\left(\sqrt{\frac{p_{n_1}}{n}}\right); \quad p_{n_1} = P(\eta_1 > a t_n) = a^{-1/\xi} p_n = a^{-\frac{1}{\xi}} c(1 + o(1)) n^{-\frac{\alpha}{4}}.$$

dır. Dolayısıyla $t_n(\hat{p}_{n_1} - p_{n_1}) = O\left(n^{\frac{\alpha}{4}(\xi - \frac{1}{2}) - 1/2}\right) = o_P(1)$ olur. Sonuç olarak $\frac{\Delta_1}{t_n} = o_P(1)$ elde edilir. Şimdi $\frac{\Delta_2}{t_n} = o_P(1)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. İlk olarak, (124) ün birinci terimini elde edeceğiz.

$$\int_{at_n}^{\infty} \bar{F}(v) dv = \frac{p_{n_1} \beta_{n_1}}{1-\xi} \left(1 - a^{-\delta} t_n^{-\delta} L(t_n) + O\left(at_n^{-\delta} L(at_n)\right) \right)$$

$$= a \left(\frac{p_{n_1} \beta_{n_1}}{1 - \xi} - \int_{at_n}^{\infty} \bar{F}(v) dv \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (139)$$

olur. Öte yandan, Smith, 1987 yılında yayınlanan çalışmasına dayanarak;

$\hat{\beta}_{n_1}/\beta = 1 + O_P(t_n^{-\delta} L(t_n))$ ve $(\hat{\xi} - \xi) = O_P(t_n^{-\delta} L(t_n))$, olduğu görülür (Smith, 1987). Ayrıca (133)' den dolayı $(\hat{\mu}_n - \mu) = O(n^{\frac{\alpha}{4}(\xi - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}})$ olur. Bu durumda aşağıdaki asimptotik ilişkiler sağlanmış olur:

$$i) \beta_{n_1}(\hat{p}_{n_1} - p_{n_1}) = at_n \xi O(n^{-\frac{\alpha}{8} - \frac{1}{2}}) = O(n^{\frac{\alpha\xi}{4} - \frac{\alpha}{8} - \frac{1}{2}}) = o_P(1),$$

$$ii) \hat{p}_{n_1}(\hat{\beta}_{n_1} - \beta_{n_1}) = O(n^{-\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha\xi\delta}{4}}) = o_P(1)$$

$$iii) \hat{p}_{n_1}\hat{\beta}_{n_1}(\hat{\xi} - \xi) = O(n^{-\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha\xi\delta}{2}}) = o_P(1).$$

Dolayısıyla $\frac{\Delta_2}{t_n} = o_P(1)$ olacağı açıktır.

Önerme 4.1.2. Önerme 4.1.1.' nin koşulları altında, $n \rightarrow \infty$ için aşağıdaki olasılık anlamındaki yakınsama sağlanır.

$$\frac{1}{\mu^2 t_n} [aG(t_n) - G(at_n)](\hat{\mu}_n - \mu) = o_P(1) \quad (140)$$

İspat: $aG(t_n)$ ve $G(at_n)$ gösterimlerini kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu^2 t_n} [aG(t_n) - G(at_n)] \\ &= \frac{1}{\mu^2} \left\{ \frac{ap_n t_n}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2t_n} E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a p_n \beta_n}{1 - \xi} \left[1 - t_n^{-\delta} L(t_n) + O(t_n^{-\delta} L(t_n)) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{\mu^2} \left\{ \frac{a^2 p_{n_1} t_n}{2} + \frac{1}{2t_n} E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq at_n\}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a p_{n_1} \beta_{n_1}}{1 - \xi} \left[1 - a^{-\delta} t_n^{-\delta} L(t_n) + O(t_n^{-\delta} L(t_n)) \right] \right\} \\ &\sim \frac{1}{\mu^2} \left\{ \left[\frac{ap_n t_n}{2} + \frac{a p_n \beta_n}{1 - \xi} + \frac{1}{2t_n} E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$- \left[\frac{a^2 p_{n_1} t_n}{2} + \frac{a p_{n_1} \beta_{n_1}}{1 - \xi} + \frac{1}{2 t_n} E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq a t_n\}) \right] \Bigg\} \quad (141)$$

Önerme 4.1.1.'nin varsayımlarına göre

$$\begin{aligned} p_{n_1} &= a^{-\frac{1}{\xi}} & \beta_{n_1} &= a \beta_n = a t_n \xi, \\ p_n &= a^{-\frac{1}{\xi}} c (1 + o(1)) n^{-\frac{\alpha}{4}}, & t_n &= O\left(n^{\frac{\alpha \xi}{4}}\right), \end{aligned}$$

$$\hat{\mu}_n - \mu = O\left(n^{\frac{\alpha}{4}(\xi - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}\right) \text{ olur.}$$

Ayrıca $0 < \alpha < 1$ ve $\frac{1}{2} < \xi < 1$ için, $\frac{\alpha(\xi-1)}{4} < 0$, $-\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha\xi}{4} < 0$ ve $\frac{\alpha}{4}\left(\xi - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} < 0$ dır. Böylelikle

$$\begin{aligned} p_{n_1} t_n &= O\left(n^{\frac{\alpha(\xi-1)}{4}}\right) = o_P(1), & p_n t_n &= O\left(n^{\frac{\alpha(\xi-1)}{4}}\right) = o_P(1), \\ p_{n_1} \beta_{n_1} &= O\left(n^{-\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha\xi}{4}}\right) = o_P(1), & p_n \beta_n &= O\left(n^{-\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha\xi}{4}}\right) = o_P(1), \\ \hat{\mu}_n - \mu &= O\left(n^{\frac{\alpha}{4}(\xi - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\}) < \infty$, $E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq a t_n\}) < \infty$ olduğunu biliyoruz ve böylelikle şu sonuca varabiliriz;

$$\frac{1}{\mu^2 t_n} [aG(t_n) - G(a t_n)](\hat{\mu}_n - \mu) = o_P(1)$$

Önerme 4.1.1. ve Önerme 4.1.2. nin sonuçları kullanılarak $\hat{Q}_{W_a}(t_n)$ tahmincisinin tutarlılığı Teorem 4.1.1. ile verilmiştir.

Teorem 4.1.1. Önerme 4.1.1.'nin koşulları altında, aşağıdaki asimptotik ilişki sağlanır:

$$\hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n) = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (142)$$

İspat: Taylor açılımını kullanarak;

$$\begin{aligned} & \hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n) \\ &= -\frac{1}{\mu^2 t_n} [aG(t_n) - G(a t_n)](\hat{\mu}_n - \mu) + \frac{a}{\mu t_n} [\hat{G}(t_n) - G(t_n)] \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\mu t_n} [\hat{G}(at_n) - G(at_n)] + R_1(t_n) + R_2(t_n) + R_3(t_n) \quad (143)$$

elde edilir. Burada,

$$R_1(t_n) = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{(z+1)\mu^{z+1}t_n} [\hat{G}(at_n) - G(at_n)] [\hat{\mu}_n - \mu]^z, \quad (144)$$

$$R_2(t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a}{(k+1)\mu^{k+1}t_n} [\hat{G}(t_n) - G(t_n)] [\hat{\mu}_n - \mu]^k, \quad (145)$$

$$R_3(t_n) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t+1}}{(t+2)\mu^{t+2}t_n} [aG(t_n) - G(at_n)] [\hat{\mu}_n - \mu]^{t+1} \quad (146)$$

dır. İspat, Önerme 4.1.1. ve Önerme 4.1.2. nin sonuçlarına ek olarak (144) - (146) dan açıktır.

Varsayım 4.1.2. Önerme 4.1.2.'nin koşulları altında $n \rightarrow \infty$ olduğunda aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur.

$$\begin{aligned} & \hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n) \\ &= c_1(\hat{\mu}_n - \mu) + c_2(\hat{p}_n - p) + c_3(\hat{\beta}_n - \beta_n) + c_4(\hat{\xi} - \xi) + \\ & o_P(1). \end{aligned} \quad (147)$$

burada;

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\mu^2} \left\{ \frac{\left(a - a^{2-\frac{1}{\xi}}\right) p_n t_n}{2} + \frac{(E_1 - E_2)}{2t_n} + \frac{\left(a - a^{2-\frac{1}{\xi}}\right) p_n \beta_n}{1 - \xi} \right\}, \\ c_2 &= \frac{\left(a - a^{2-\frac{1}{\xi}}\right) p_n t_n}{2\mu} + \frac{\left(a - a^{2-\frac{1}{\xi}}\right) p_n \beta_n}{\mu(1 - \xi)}, \end{aligned}$$

$$c_3 = \frac{\left(a - a^{2-\frac{1}{\xi}}\right)p_n}{\mu(1-\xi)}$$

$$c_4 = \frac{\left(a - a^{2-\frac{1}{\xi}}\right)p_n\beta_n}{(1-\xi)^2},$$

$$E_1 = E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\}) < \infty,$$

$$E_2 = E(\eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\}) < \infty \text{ dir.}$$

İspat: Önerme 4.1.1. ve Önerme 4.1.2. nin sonuçları kullanılarak aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & \hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n) \\ &= -\frac{1}{\mu^2 t_n} [aG(t_n) - G(at_n)](\hat{\mu}_n - \mu) \\ &+ \frac{a}{\mu t_n} [\hat{G}(t_n) - G(t_n)] \\ &- \frac{1}{\mu t_n} [\hat{G}(at_n) - G(at_n)] + o_P(1) \\ &= \left\{ \frac{1}{\mu^2} \left[\left(\frac{at_n p_n}{2} + \frac{E_1}{2t_n} + \frac{ap_n \beta_n}{1-\xi} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{a^2 t_n p_{n_1}}{2} + \frac{E_2}{2t_n} + \frac{ap_{n_1} \beta_{n_1}}{1-\xi} \right) \right] \right\} (\hat{\mu}_n - \mu) \\ &+ \frac{a}{\mu} \left\{ \left(\frac{t_n}{2} + \frac{\beta_n}{1-\xi} \right) (\hat{p}_n - p_n) + \frac{p_n}{1-\xi} (\hat{\beta}_n - \beta_n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)^2} (\hat{\xi} - \xi) \right\} \\ &- \frac{1}{\mu} \left\{ \left(\frac{a^2 t_n}{2} + \frac{a \beta_{n_1}}{1-\xi} \right) (\hat{p}_{n_1} - p_{n_1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ap_{n_1}}{1-\xi} (\hat{\beta}_{n_1} - \beta_{n_1}) + \frac{ap_{n_1} \beta_{n_1}}{(1-\xi)^2} (\hat{\xi} - \xi) \right\} + o_P(1). \end{aligned} \quad (148)$$

Ayrıca

$$(\hat{\beta}_{n_1} - \beta_{n_1}) = a(\hat{\beta}_n - \beta_n), \quad (\hat{p}_{n_1} - p_{n_1}) = a^{-\frac{1}{\xi}}(\hat{p}_n - p_n) \quad (149)$$

olduğunu biliyoruz. Bu sonuçlar göz önünde bulundurularak istenen sonuç, (148) ve (149) denklemlerinin birlikte çözülmesi ile elde edilir.

Teorem 4.1.2. Önerme 4.1.1.'in koşulları sağlansın.

$\alpha \in (0,1)$ ve her $t_n = O(n^{\alpha\xi/4})$ için aşağıdaki dağılıma göre yakınsama sağlanır.

$$\frac{\sqrt{n}}{t_n \sigma_n} (\hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n)) \rightarrow^d N(0,1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (150)$$

burada

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = & c_1^2 + \frac{p_n(1-p_n)}{\gamma_n^2} \left(c_1 \left(t_n + \frac{\beta_n}{1-\xi} \right) + c_2 \right)^2 + \frac{(1+\xi)^2}{\gamma^2 p_n} \left(\frac{c_1 p_n \beta_n}{(1-\xi)^2} + c_4 \right)^2 \\ & + \frac{\beta_n^2 2(1+\xi)}{\gamma_n^2 p_n} \left(c_1 \left(\frac{p_n}{1-\xi} \right) + c_3 \right)^2 - \frac{\beta(1+\xi)}{p_n \gamma_n^2} \left(c_1 \left(\frac{p_n}{1-\xi} \right) + c_3 \right) \left(\frac{c_1 p_n \beta_n}{(1-\xi)^2} + c_4 \right) \end{aligned}$$

dır.

İspat: Johansson, 2003 yılında yayınlanan çalışmasında Önerme 4.1.1.' de, $\gamma_n^2 = \text{var}(\eta_1 1\{\eta_1 \leq t_n\})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} (\hat{\mu}_n - \mu) = & \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} (\hat{\mu}'_n - \mu'_n) + \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} \left(t_n + \frac{\beta_n}{1-\xi} \right) (\hat{p}_n - p_n) \\ & + \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} \frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)^2} (\hat{\xi} - \xi) \\ & + \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} \frac{p_n}{(1-\xi)} (\hat{\beta}_n - \beta_n) + o_P(1), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (151)$$

olduğu gösterilmiştir (Johansson, 2003). (147) ve (151) birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} (\hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n)) \\ = & c_1 \Lambda_1 + \frac{\sqrt{p_n(1-p_n)}}{\gamma_n} \left(c_1 \left(t_n + \frac{\beta_n}{(1-\xi)} \right) + c_2 \right) \Lambda_2 \\ & + \frac{\beta_n \sqrt{2(1+\xi)}}{\gamma_n \sqrt{p_n}} \left(c_1 \left(\frac{p_n}{1-\xi} \right) + c_3 \right) \Lambda_3 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1 + \xi}{\gamma_n \sqrt{p_n}} \left(\frac{c_1 p_n \beta_n}{(1 - \xi)^2} + c_4 \right) \Lambda_4 + o_{P(1)} \quad (152)$$

sonucu elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} (\hat{\mu}'_n - \mu'_n), & \Lambda_2 &= \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p_n)}{\sqrt{p_n(1 - p_n)}} \\ \Lambda_3 &= \frac{\sqrt{n}\sqrt{p_n}}{\beta \sqrt{2(1 + \xi)}} (\hat{\beta}_n - \beta_n), & \Lambda_4 &= \frac{\sqrt{n}\sqrt{p_n}}{(1 + \xi)} (\hat{\xi} - \xi) \end{aligned} \quad (153)$$

olur. (130) ile verdiğimiz Johansson, 2003 çalışmasına sonucuna göre,

$$E(\Lambda_3 \Lambda_4) = E \left[\left(\frac{\sqrt{n}\sqrt{p_n}}{\beta \sqrt{2(1 + \xi)}} (\hat{\beta}_n - \beta_n) \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{n}\sqrt{p_n}}{(1 + \xi)} (\hat{\xi} - \xi) \right) \right] = -\frac{1}{\sqrt{2(1 + \xi)}}$$

ve bunun dışındaki bütün Λ_i rasgele değişkenleri için Λ_i , $1 \leq i \leq 4$, $E(\Lambda_i \Lambda_j) = 0$ olacak şekilde standart normal rasgele değişkenlerdir (Johansson, 2003). Dolayısı ile aşağıdaki dağılıma göre yakınsama elde edilir:

$$\frac{\sqrt{n}}{t_n \sigma_n} (\hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n)) \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \rightarrow \infty.$$

burada

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= Var \left(\frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} \hat{Q}_{W_a}(t_n) - Q_{W_a}(t_n) \right) \\ &= c_1^2 + \frac{p_n(1 - p_n)}{\gamma_n^2} \left(c_1 \left(t_n + \frac{\beta_n}{1 - \xi} \right) + c_2 \right)^2 + \frac{(1 + \xi)^2}{\gamma^2 p_n} \left(\frac{c_1 p_n \beta_n}{(1 - \xi)^2} + c_4 \right)^2 \\ &\quad + \frac{\beta_n^2 2(1 + \xi)}{\gamma_n^2 p_n} \left(c_1 \left(\frac{p_n}{1 - \xi} \right) + c_3 \right)^2 \\ &\quad - \frac{\beta_n(1 + \xi)}{p_n \gamma_n^2} \left(c_1 \left(\frac{p_n}{1 - \xi} \right) + c_3 \right) \left(\frac{c_1 p_n \beta_n}{(1 - \xi)^2} + c_4 \right) \end{aligned}$$

dır.

4.2. (s, S) Tipli Envanter Modelin Ergodik Dağılımının n. Mertebeden Momentleri İçin Uç Değerler Teorisine Dayalı İstatistiki Tahminci

Bir önceki kısımda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_{W_a}(t_n)$ için önerdiğimiz $\hat{Q}_{W_a}(t_n)$ tahmin edicisinin istatistiksel özelliklerini inceledik. Şimdi, klasik (s, S) tipli yarı Markov envanter modeli ifade eden sürecin ergodik dağılımının n. mertebeden momentleri için uç değer teorisine dayalı bir tahminci önerip, bu tahmincinin istatistiksel özelliklerini inceleyeceğiz. İlk olarak, talep rasgele değişkenleri sonsuz varyanslı ağır kuyruklu dağılıma sahipken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. mertebeden momentleri için asimptotik açılımı elde edeceğiz. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentleri için kesin formüller Khaniyev vd., 2013 yılında yayınlanan çalışmasında aşağıdaki gibi verilmiştir (Khaniyev vd., 2013).

$$U_\eta^n(\beta) \equiv \beta^{n-1} * U(\beta) \equiv \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} U_\eta(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (154)$$

olmak üzere;

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{n U_\eta^n(\beta)}{U_\eta(\beta)} \quad (155)$$

burada $U_\eta(\beta)$, talep rasgele değişkenleri η_i , $i \geq 1$. tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur.

$F(\cdot)$ (115) ile tanımlanan denklemde verilen $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı, $\bar{F}(\cdot)$, $1 < \alpha = 1/\xi < 2$ indeksi ile düzenli olarak değişen bir fonksiyon olacak şekilde bir birikimli dağılım fonksiyonu olsun.

Geluk, 1992 yılında $U(t) = E(N(t)) = \sum_k^\infty F^{*k}(t)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki gibi asimptotik bir açılımı vermiştir:

$$U_\eta(t) - \frac{t}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} \int_0^t \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds = O\left(t^4 (\bar{F}(t))^2 \bar{F}(t^2 \bar{F}(t))\right) \quad (156)$$

(Geluk, 1992). (154) ve (156) 'yı kullanarak $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının k. mertebeden momentleri $k = 1, 2, \dots$ için $\beta \rightarrow \infty$ durumunda aşağıdaki asimptotik açılımı elde ederiz:

$$E(\tilde{X}^k) = \frac{\beta^k}{k(k+1)} + \frac{1}{\mu_1 \beta} (\beta^{k-1} * G(\beta)) - \frac{\beta^{k-1}}{\mu_1 k(k+1)} G(\beta) + o(\beta^{k-1} * H(\beta))$$

burada;

$$G(\beta) = \int_0^\beta \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds, \quad H(\beta) = \beta^4 (\bar{F}(\beta)^2 \bar{F}(\beta^2 \bar{F}(\beta)))$$

dır. Ayrıca $\frac{1}{2} < \xi < 1$ ve $L(x)$ yavaş değişen fonksiyon olmak üzere $\bar{F}(x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} (1 + x^{-\delta} L(x))$ dır. Teugels, 1968 yılında yayınlanan çalışmasında

$$G(\beta) = \int_0^\beta \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds \sim \frac{\xi^2 \beta^2 \bar{F}(\beta)}{(1-\xi)(2\xi-1)}, \quad \frac{1}{2} < \xi < 1$$

olduğu gösterilmiştir (Teugels, 1968). Ayrıca Karamata teoremi kullanılarak;

$$\begin{aligned} \beta^{k-1} * G(\beta) &\equiv \int_0^\beta (\beta-t)^{k-1} G(t) dt \\ &\sim \int_0^\beta \frac{(\beta-t)^{k-1} \xi^2 t^2 \bar{F}(t)}{(1-\xi)(2\xi-1)} dt \\ &\sim 1 + \beta^{-\delta} L(\beta) \frac{\xi^2}{(1-\xi)(2\xi-1)} \int_0^\beta (\beta-t)^{k-1} t^{2-\frac{1}{\xi}} dt \\ &= \frac{\bar{F}(\beta) \xi^2 \beta^{k+2}}{(1-\xi)(2\xi-1)} B\left(k, 3 - \frac{1}{\xi}\right) = B\left(k, 3 - \frac{1}{\xi}\right) \beta^k G(\beta) \end{aligned} \quad (157)$$

elde edilir. Burada $B(x, y)$ beta fonksiyonudur. $B\left(k, 3 - \frac{1}{\xi}\right)$; $k \geq 1$ ve $\frac{1}{2} < \xi < 1$ için sabittir. (157) 'dan

$$E(\tilde{X}^k) \sim \frac{\beta^k}{k(k+1)} + \frac{1}{\mu_1} c_k \beta^{k-1} \int_0^\beta \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds, \quad k \geq 1, \quad \beta \rightarrow \infty$$

elde edilir. Burada

$$c_k = B\left(k, 3 - \frac{1}{\xi}\right) - \frac{1}{k(k+1)}$$

dır. t_n Johansson, 2003 yılında yayınlanan çalışmasında önceden belirlenmiş olan eşik seviyesi olmak üzere aşağıdaki yaklaşım elde edilmiş olur:

$$E\left(\tilde{X}^k(t_n)\right) \sim \frac{t_n^k}{k(k+1)} + \frac{1}{\mu_1} c_k t_n^{k-1} \int_0^{t_n} \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds, \quad (158)$$

$k \geq 1, t_n \rightarrow \infty$ (Johansson, 2003).

(158) 'deki çift katlı integralin aşağıdaki eşitini kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \int_s^\infty \bar{F}(v) dv ds &= \int_0^{t_n} v \bar{F}(v) dv + t_n \int_{t_n}^\infty \bar{F}(v) dv \\ &= \frac{t_n^2}{2} \bar{F}(t_n) + \frac{1}{2} \int_0^{t_n} v^2 dF(v) + t_n \int_{t_n}^\infty \bar{F}(v) dv \end{aligned}$$

Böylece, aşağıdaki yaklaşım elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} E\left(\tilde{X}^k(t_n)\right) &\sim \frac{t_n^k}{k(k+1)} + \frac{c_k t_n^{k+1}}{\mu_1} p_n + \frac{c_k}{2\mu_1} t_n^{k-1} E(\eta_1^2 1\{\eta_1 \leq t_n\}) + \frac{c_k t_n^k}{\mu_1} \left(\frac{p_n \beta_n}{1-\xi}\right) \\ &\quad + R_1, \end{aligned}$$

burada

$$R_1 = \left(\frac{p_n \beta_n}{1-\xi}\right) \cdot \left(\frac{\delta \xi}{1-\xi+\delta \xi}\right) \cdot \left(\frac{u_n^{-\delta} L(u_n)}{1+u_n^{-\delta} L(u_n)}\right)$$

$F(\cdot)$ için ampirik tahminci $F_n(x) = \sum_{i=1}^n 1\{X_i \leq x\}$ ve $\bar{F}(\cdot)$ kuyruk dağılımının tahmincisi $\bar{G}_{\hat{\xi}_n, \hat{\beta}_n}$ olduğundan $E\left(\tilde{X}^k(t_n)\right)$ için karşılık gelen ESAD tahmincisini aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned} \hat{E}\left(\tilde{X}^k(t_n)\right) &= \frac{t_n^k}{k(k+1)} + \frac{c_k t_n^{k+1}}{\hat{\mu}_n} \hat{p}_n + \frac{c_k t_n^{k-1}}{2 \hat{\mu}_n} \left(\frac{1}{n} \sum_i^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\}\right) \\ &\quad + \frac{c_k t_n^k}{\hat{\mu}_n} \left(\frac{\hat{p}_n \hat{\beta}_n}{1-\hat{\xi}}\right). \end{aligned}$$

burada $\hat{\mu}_n$, Johansson, 2003 yılında önerilen $\mu_1 = E(\eta_1)$ 'in ESAD tahmincisidir. $\hat{E}(\tilde{X}^k(t_n))$ 'nın tutarlılığı ve asimptotik davranışı, $k = 1$ için aşağıdaki teoremlerde belirlenmiştir (Johansson, 2003). Daha sonra $\hat{E}(\tilde{X}^k(t_n))$ 'nin $k \geq 2$ olduğunda $E(\tilde{X}^k(t_n))$ için tutarlı bir tahminci olmadığını göstereceğiz.

Teorem 4.2.1. $F, \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ için $\bar{F}(x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} (1 + x^{-\delta} L(x))$ olacak şekilde bir dağılım fonksiyonu olsun. L 'nin $x_0 \geq 0$ için $[x_0, \infty)$ da sınırlı olduğunu ve bazı $\delta > 0$ değerleri için $x \rightarrow x^{-\delta} L(x)$ 'in sonsuzda artmayan bir fonksiyon olduğunu varsayalım. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere her $t_n = O\left(n^{\frac{\alpha\xi}{4}}\right)$ için aşağıdaki yakınsama doğrudur:

$$\hat{E}(\tilde{X}^1(t_n)) - E(\tilde{X}^1(t_n)) = o_p(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (159)$$

İspat: $\Delta_n(t_n) = \hat{E}(\tilde{X}^1(t_n)) - E(\tilde{X}^1(t_n))$ olsun.

$$\frac{\Delta_n(t_n)}{t_n} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\Delta_1 = \left(c_1 \frac{t_n}{2}\right) \frac{1}{\hat{\mu}_n} (\hat{p}_n - p_n) - \frac{c_1 t_n}{2} \frac{p_n}{\hat{\mu}_n \mu_1} (\hat{\mu}_n - \mu_1),$$

$$\Delta_2 = \frac{c_1}{2 \hat{\mu}_n t_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1_{\{\eta_i \leq t_n\}} - \sum_{i=1}^n E(\eta_i^2) 1_{\{\eta_i \leq t_n\}} \right) - \frac{c_1}{2} \sum_{i=1}^n E(\eta_i^2) 1_{\{\eta_i \leq t_n\}} \left[\frac{(\hat{\mu}_n - \mu_1)}{(\hat{\mu}_n \mu_1) t_n} \right],$$

$$\Delta_3 = -\frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)} \frac{\hat{\mu}_n + \mu_1}{\mu_1 \hat{\mu}_n} (\hat{\mu}_n - \mu_1) c_1 + \frac{\beta_n c_1}{\hat{\mu}_n (1-\xi)} (\hat{p}_n - p_n) + \frac{c_1 \hat{p}_n}{\hat{\mu}_n (1-\xi)} (\hat{\beta}_n - \beta_n) + \frac{c_1}{\hat{\mu}_n} \left(\frac{\hat{p}_n \hat{\beta}_n}{(1-\xi)(1-\hat{\xi})} \right) (\hat{\xi} - \xi)$$

dır. Öncelikle $n \rightarrow \infty$ iken $\Delta_1 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ olduğunu göstereceğiz. Önerme 4.1.1.' e göre; $n \rightarrow \infty$ iken; $\hat{\mu}_n - \mu_1 = O\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right)$ olur. Yine Johansson, 2003 yılında yayınlanan çalışmasında, $\gamma_n^2 = O(n^{\alpha/2(\xi-1/2)})$ olduğu gösterilmiştir (Johansson, 2003). Ayrıca $\hat{\mu}_n - \mu_1 = O(n^{\alpha/4(\xi-1/2)-1/2}) = o_P(1)$, $n \rightarrow \infty$ olduğu açıktır. Buradan $p_n = c(1 + o(1))n^{-\frac{\alpha}{4}}$, $t_n = O\left(n^{\frac{\alpha\xi}{4}}\right)$ için aşağıdaki asimptotik ilişkiyi elde ederiz.

$$\hat{p}_n - p_n = O_p\left(\sqrt{\frac{p_n}{n}}\right)$$

Böylelikle aşağıdaki asimptotik ilişkiler elde edilmiş olur:

$$t_n(\hat{p}_n - p_n) = O\left(n^{\frac{\alpha}{4(\xi-\frac{1}{2})}-\frac{1}{2}}\right) = o_P(1),$$

$$t_n p_n(\hat{\mu}_n - \mu_1) = O\left(n^{\alpha/4(\xi-\frac{3}{2})-1/2}\right) = o_P(1).$$

Bu da $n \rightarrow \infty$ iken $\Delta_1 \xrightarrow{P} 0$ olduğunu kanıtlar. Şimdi $\Delta_2 \xrightarrow{P} 0$ olduğunu gösterelim. Aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu biliyoruz.

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\} - \sum_{i=1}^n E(\eta_i^2) 1\{\eta_i \leq t_n\}\right) < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^n E(\eta_i^2) 1\{\eta_i \leq t_n\} < \infty.$$

Bu eşitliklerden faydalanılarak

$$\frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\} - \sum_{i=1}^n E(\eta_i^2) 1\{\eta_i \leq t_n\}\right)}{t_n} = o_P(1)$$

olduğu kolayca görülür. Böylelikle

$$\frac{\hat{\mu}_n - \mu_1}{t_n} = O\left(n^{-\frac{\alpha}{8}-1/2}\right) = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

yani $n \rightarrow \infty$ iken $\Delta_2 \xrightarrow{P} 0$ olduğu kanıtlanmış olur. Şimdi $n \rightarrow \infty$ iken $\Delta_3 \xrightarrow{P} 0$ olduğunu göstereyim. Bunun için aşağıdaki asimptotik ilişkilere ihtiyacımız olacaktır:

$$1. p_n \beta_n (\hat{\mu}_n - \mu_1) = O \left(n^{\left(\frac{\alpha \xi}{2} - \frac{3\alpha}{8} \right) - \frac{1}{2}} \right) = o_P(1),$$

$$2. \beta_n (\hat{p}_n - p_n) = O \left(n^{\left(\frac{\alpha \xi}{4} - \frac{\alpha}{8} \right) - \frac{1}{2}} \right) = o_P(1),$$

$$3. \hat{p}_n (\hat{\beta}_n - \beta_n) = O \left(n^{\left(\frac{\alpha \xi}{4} - \frac{\alpha}{8} \right)} \right) = o_P(1),$$

$$4. \hat{p}_n \hat{\beta}_n (\hat{\xi} - \xi) = O \left(n^{-\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha \xi \delta}{2}} \right) = o_P(1).$$

1., 2., 3., ve 4. kullanılarak $n \rightarrow \infty$ iken $\Delta_3 \xrightarrow{P} 0$ elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2. F , Teorem 4.2.1.' de olduğu gibi tanımlanmış bir dağılım fonksiyonu olsun, $\alpha \in \left(\frac{4}{1+2\xi\delta}, 1 \right)$ olmak üzere her $t_n = O \left(n^{\frac{\alpha \xi}{4}} \right)$ için aşağıdaki dağılıma göre yakınsama elde edilir:

$$\frac{\sqrt{n}}{t_n \sigma_n} \left(\hat{E} \left(\tilde{X}(t_n) \right) - E \left(\tilde{X}(t_n) \right) \right) \xrightarrow{D} N(0,1), \quad n \rightarrow \infty.$$

burada,

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = & A_1^2 \gamma_n^2 + \left(A_2 + A_1 \left(t_n + \frac{\beta_n}{1-\xi} \right) \right)^2 p_n (1-p_n) \\ & + \left(A_3 + A_1 \frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)^2} \right)^2 \frac{(1+\xi)^2}{p_n} \\ & + \left(A_4 + A_1 \frac{p_n}{1-\xi} \right)^2 \frac{2(1+\xi)\beta_n^2}{p_n} \\ & - \left(A_4 + A_1 \frac{p_n}{1-\xi} \right) \left(A_3 + A_1 \frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)^2} \right) \frac{(1+\xi)\beta_n}{p_n} \end{aligned} \quad (160)$$

ve

$$A_1 = - \left(\frac{c_1 t_n p_n}{2\mu_1^2} + \frac{c_1 \sum_{i=1}^n E(\eta_i^2) 1\{\eta_i \leq t_n\}}{2\mu_1^2 t_n} + \frac{2p_n \beta_n c_1}{(1-\xi)m_1^2} \right),$$

$$A_2 = \frac{c_1 t_n}{2\mu_1} + \frac{\beta_n}{\mu_1(1-\xi)}$$

$$A_3 = \frac{c_1}{\mu_1} \frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)^2},$$

$$A_4 = \frac{p_n c_1}{\mu_1(1-\xi)}.$$

dir.

İspat: Teorem 4.2.1.' de $\hat{E}(\tilde{X}(t_n)) = E(\tilde{X}(t_n)) + o_P(1)$ olduğunu göstermiştik. Dolayısı ile yeterince büyük her n değeri için aşağıdaki sonucun elde edileceği aşıkardır.

$$\begin{aligned} \Delta_n(t_n) = & \left((1 + o_P(1))\sqrt{n} \right) \left(A_1(\hat{\mu}_n - \mu_1) + A_2(\hat{p}_n - p_n) \right. \\ & \left. + A_3(\hat{\xi} - \xi) + A_4(\hat{\beta}_n - \beta_n) \right) \end{aligned} \quad (161)$$

Diğer taraftan Johansson, 2003 yılında yayınlanan çalışmasında

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_1) = & \sqrt{n}(\hat{\mu}'_n - \mu'_1) + \left(t_n + \frac{\beta_n}{1-\xi} \right) \sqrt{n}(\hat{p}_n - p_n) \\ & + \frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)^2} \sqrt{n}(\hat{\xi} - \xi) + \frac{p_n}{1-\xi} \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_n) + o_P(\gamma_n) \end{aligned} \quad (162)$$

olduğunu göstermiştir (Johansson, 2003). (161) ve (162) birlikte kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} \Delta_n(t_n) = & \hat{E}(\tilde{X}^k(t_n)) - E(\tilde{X}^k(t_n)) \\ = & A_1 \sqrt{n}(\hat{\mu}'_n - \mu'_1) + \left[A_1 \left(t_n + \frac{\beta_n}{1-\xi} \right) + A_2 \right] \sqrt{n}(\hat{p}_n - p_n) \\ & + \left[A_1 \frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)^2} + A_3 \right] \sqrt{n}(\hat{\xi} - \xi) + \left[A_1 \frac{p_n}{1-\xi} + A_4 \right] \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_n) \end{aligned}$$

Teorem 4.1.2. deki ispat adımlarının benzerini uygulayarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}\Delta_n}{t_n\gamma_n} &= A_1\Lambda_1 + \frac{\sqrt{p_n(1-p_n)}}{\gamma_n} \left(A_2 + A_1 \left(t_n \frac{\beta_n}{1-\xi} \right) \right) \Lambda_2 \\ &+ \frac{(1+\xi)}{\gamma_n\sqrt{p_n}} \left(A_3 + A_1 \frac{p_n\beta_n}{(1-\xi)^2} \right) \Lambda_3 \\ &+ \frac{\beta\sqrt{2(1+\xi)}}{\gamma_n\sqrt{p_n}} \left(A_4 + A_1 \frac{p_n}{1-\xi} \right) \Lambda_4 + o_P(1) \end{aligned} \quad (163)$$

Burada $(\Lambda_i)_{i=1,4}$, $E(\Lambda_3\Lambda_4) = -\frac{1}{\sqrt{2(1+\xi)}}$ ile standart normal rasgele değişkenlerdir.

Buradan da Teorem 4.2.1.'nin varsayımları altında aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{t_n\gamma_n\rho_n} \left(\hat{E}(\tilde{X}(t_n)) - E(\tilde{X}(t_n)) \right) &\xrightarrow{D} N(0,1), \quad n \rightarrow \infty, \\ \rho_n^2 &= Var \left(\frac{\sqrt{n}}{t_n\gamma_n} \Delta_n(t) \right) = \sigma_n^2/\gamma_n^2 \end{aligned}$$

Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1. ve Teorem 4.2.2. ile $X(t)$ sürecinin birinci momentini $E(\tilde{X}(t_n))$ için önermiş olduğumuz $\hat{E}(\tilde{X}(t_n))$ tahmin edicisinin için tutarlılık ve asimptotik normallik özellikleri ispatlanmış oldu. Şimdi $k \geq 2$ olduğunda $\hat{E}(\tilde{X}^k(t_n))$ 'nin $E(\tilde{X}^k(t_n))$ için tutarlı tahmin edici olmadığını göstereceğiz.

Teorem 4.2.3. (159) formülü ile verilmiş olan $\hat{E}(\tilde{X}^k(t_n))$ tahmincisi $t_n = O\left(n^{\frac{\alpha\xi}{4}}\right)$, $\alpha \in (0,1)$ ve $k \geq 2$ durumunda $E(\tilde{X}^k(t_n))$ için tutarlı bir tahminci değildir.

İspat: $\Delta_{nk}(t_n) = \hat{E}(\tilde{X}^k(t_n)) - E(\tilde{X}^k(t_n)) = \Delta_{1k} + \Delta_{2k} + \Delta_{3k}$ olsun.

Burada

$$\Delta_{1k} = c_k \frac{t_n^{k+1}}{2} \frac{1}{\hat{\mu}_n} (\hat{p}_n - p_n) - \frac{c_k t_n^{k-1}}{2 \hat{\mu}_n \mu_1} (\hat{\mu}_n - \mu_1),$$

$$\Delta_{2k} = \frac{c_k}{2\hat{\mu}_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 1\{\eta_i \leq t_n\} - \sum_{i=1}^n E(\eta_i^2) 1\{\eta_i \leq t_n\} \right) \\ - \frac{c_k}{2} \sum_{i=1}^n E(\eta_i^2) 1\{\eta_i \leq t_n\} \left[\frac{t_n^k}{\hat{\mu}_n \mu_1} \frac{(\hat{\mu}_n - \mu_1)}{t_n} \right]$$

$$\Delta_{3k} = \frac{c_k t_n^k}{\hat{\mu}_n} \left[-\frac{p_n \beta_n}{(1-\xi)} \frac{\hat{\mu}_n + \mu_1}{\hat{\mu}_n \mu_1} + \frac{\beta_n}{\hat{\mu}_n (1-\xi)} (\hat{p}_n - p_n) + \frac{\hat{p}_n (\hat{\beta}_n - \beta_n)}{\hat{\mu}_n (1-\xi)} \right. \\ \left. + \frac{1}{\hat{\mu}_n} \left(\frac{\hat{p}_n \hat{\beta}_n}{(1-\xi)(1-\hat{\xi})} (\hat{\xi} - \xi) \right) \right]$$

dır.

Dikkat edilecek olursa $k \geq 2$ için $n \rightarrow \infty$ iken $t_n^{(k+1)}(\hat{p}_n - p_n) = O\left(n^{\frac{\alpha}{4}(\xi(k+1)-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow \infty$ olur. Dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ iken $k \geq 2$ için $\Delta_{1k} \rightarrow \infty$ olur. Benzer sonuçlar Δ_{1k} , Δ_{2k} ve Δ_{3k} için de geçerlidir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken $k \geq 2$ için $\Delta_{nk}(t_n) = \hat{E}\left(\tilde{X}^k(t_n)\right) - E\left(\tilde{X}^k(t_n)\right) \rightarrow \infty$ elde edilir. Bu da iddiamızı kanıtlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında (s, S) tipli yarı Markov envanter modelin bazı özelliklerine ilişkin tahmin problemi incelenmiştir. Yenileme süreçlerinin ve yenileme fonksiyonunun envanter problemlerinde doğal bir şekilde ortaya çıktığı bilinmektedir. Bu tez çalışmasında ele alınan yarı Markov envanter modeli ifade eden sürecin sayısal özelliklerine ilişkin kesin sonuçlar, talep rastgele değişkenleri tarafından oluşturulan yenileme fonksiyonları aracılığıyla sağlanmaktadır örneğin bkz. (Aliyev, 2016; Aliyev ve Khaniyev, 2014; Aliyev vd., 2010; Bektaş Kamışlık vd., 2019; Bektaş Kamışlık vd., 2018; Khaniyev ve Atalay, 2010; Khaniyev vd., 2013). Dolayısıyla yenilenme fonksiyonunun tahmini bu tezin temel araçlarından biridir.

Farklı türde dağılımların oluşturduğu yenileme fonksiyonunun tahmin edilmesine ilişkin literatür oldukça geniştir. Mevcut literatürden farklı olarak, burada ağır kuyruklu dağılımlara sahip talep rastgele değişkenlerini ele alıyoruz. Bu nedenle uç değer teorisinin önemli çalışmalarından biri olan ağır kuyruklu dağılımların oluşturduğu yenileme fonksiyonu için farklı tahmin yöntemlerine odaklandık. Bu tezin temel amacı, uç değer teorisine dayalı yenileme fonksiyonu için farklı tahmin yöntemlerini araştırmak ve bu tahmin edicilerin (s, S) tipi yarı-Markov envanter modeli üzerindeki performanslarını analiz etmektir. Bu bağlamda bu tez çalışmasında uç değerler teorisinde yaygın olarak kullanılan ESAD yöntemi ayrıntılı bir biçimde incelenmiş ve sonsuz varyansa sahip düzenli değişen dağılımların beklenen değerleri için ESAD yöntemine dayalı tahmincinin Johansson, 2010 yılında önerildiği belirlenmiştir (Johansson, 2010).

Johansson, 2003 yılında önerilen tahminci ve yöntem kullanılarak Necir vd.; 2010 yılında yine ağır kuyruklu sonsuz varyansa sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için ESAD yöntemini baz alan bir tahminci önerilmiş, bu tahmincinin yansızlık ve asimptotik normallik özellikleri incelenmiştir (Johansson, 2003; Necir vd., 2010). Bu tez çalışmasında ise hem Johansson, 2003 hem de Necir vd., 2010 tarafından önerilen yöntem ve parameter tahmincileri kullanılarak sonsuz varyanslı ağır kuyruklu dağılıma sahip yarı Markov envanter modeli ifade eden sürecin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının momentleri için ESAD yöntemine dayalı

tahminciler önerilmiş ve bu tahmincilerin bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir (Johansson, 2003; Necir vd., 2010).

İncelenen modele göre uç değer analizi iki farklı şekilde ele alınmaktadır. Bu yaklaşımlar toplamaların dalgalanmaları ve maksimumların dalgalanmaları olarak bilinir. İlk durumda, verilerdeki uç noktaları ele almak için ampirik dağılım ve ampirik momentler üzerine kurulu klasik parametrik olmayan tahmin teknikleri ve geniş örneklem yöntemi kullanılır. İkinci yöntem ise uç değerler teorisine dayalı istatistiki yarı parametrik tahmin yöntemi olarak bilinmektedir. Bu tez çalışmasında klasik (s, S) tipli yarı Markov envanter modellerin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının momentleri için uç değerler teorisine dayalı tahminciler üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda elde edilen bulgular şu şekilde özetlenmiştir:

I) Ağır kuyruklu dağılımlar ve (s, S) tipli envanter modelin ergodik dağılımı için uç değerler teorisine dayalı istatistiki tahminci yöntemiyle oluşturulan yenileme fonksiyonunun yarı parametrik tahmini hakkında teorik zemin oluşturulmuştur. Ele alınan yarı Markov envanter sisteminin bir açıklaması sunulmuş, temel notasyonları ve matematiksel kurulumu verilmiştir. Ayrıca geniş bir literatür taraması, araştırma çalışmasının zemini, ele alınması gereken problem ve olası yaklaşımlar sunulmuştur.

II) Bu çalışmada son yıllarda önemli bir istatistiksel metodoloji haline gelmiş olan ESAD yöntemi araştırılmıştır. ESAD yönteminin literatürde daha çok kuyruk indeksi tahmini ve büyük kantil tahmininde kullanıldığı bilinmektedir.

III) Genelleştirilmiş Pareto dağılımı yaklaşımı, Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı parametrelerinin tahmin edilmesi, kuyruk dağılımının tahmini, ve mometlerin tahmini ile ilgili geniş bir literatür sunulmuştur. Ayrıca genelleştirilmiş Pareto dağılımı yaklaşımı ve uç değerler teorisi yöntemini kullanarak yenileme fonksiyonunun tahmini hakkında ayrıntılı bir derleme yapılmıştır

IV) Aşağıdaki talep dağılımına sahip (s, S) tipli klasik bir yarı Markov envanter modeli incelenmiştir.

$$\bar{F}(x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} \left(1 + x^{-\delta} L(x)\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (164)$$

(164) ile verilmiş olan denklemde $c \in \mathbb{R}$, $\xi \in (1/2, 1)$, $\delta > 0$ ve $L(x)$ yavaş değişen fonksiyondur. Sonsuzda kesin, pozitif ve sonlu bir limite sahip olan herhangi bir fonksiyonun yavaş değişen olduğunu biliyoruz. Ayrıca $L(x)$ yavaş değiştiğinden, herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + x^{-\delta} L(x) = 1$$

dir. Dolayısıyla $1 + x^{-\delta} L(x)$ fonksiyonu da yavaş değişir. $L_1(x) = 1 + x^{-\delta} L(x)$ diyelim. Bu durumda $\bar{F}(x) = c x^{-\frac{1}{\xi}} (1 + x^{-\delta} L(x))$ kuyruk indeksi $-1/\xi$ ve $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ için düzenli olarak değişen dağılım fonksiyonudur. Burada $\bar{F}(x)$ sonsuz varyansa sahiptir. Dolayısıyla $\bar{F}(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L_1(x)$, ile $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L_1(x)$, $1 < \alpha < 2$ hemen hemen aynı şekle sahiptir, burada $1/\xi = \alpha$ dır. Literatürde ESAD prosedürü işlemi için en uygun modelin (164) ile verilen kuyruk dağılımı olduğu belirtilmektedir. Dolayısıyla çalışmanın bu bölümünde talep dağılımı olarak $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ ile verilen klasik düzenli değişim modeli yerine (164) ile verilen modeli tercih ettik.

V) İlk olarak, yukarıda belirtilen koşullar altında (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli temsil eden $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için uç değerler teorisine bağlı istatistiki tahmin ediciler elde edilmiştir. Burada Johansson, 2003 ve Necir vd.; 2010 tarafından önerilen yöntemleri kullandık. Ergodik dağılım fonksiyonu için önerilen tahmin edicinin tutarlı ve asimptotik olarak normal olduğunu gösterdik (Johansson, 2003; Necir vd., 2010).

VI) İkinci olarak, yukarıda bahsedilen modeli ifade eden sürecin ergodik dağılımının n . mertebeden momentleri için uç değerler teorisine bağlı istatistiki tahminciyi araştırdık. Önerilen tahmincinin yalnızca $n = 1$ olduğunda tutarlı ve asimptotik normal olduğunu gösterdik. Ayrıca bu tahmincinin $n \geq 2$ için tutarlı olmadığını gösterdik.

Uç değerler üretme eğiliminde olan ağır kuyruklu dağılıma sahip veriler ile envanter sistemlerde sıklıkla karşılaşıldığı bilinmektedir. Bu veriler genellikle envanter sistemlerde talepleri ifade eden rasgele değişkenlerde gözlemlenmektedir. Çoğu envanter model çalışması, talep rasgele değişkenlerinin normal dağılımdan geldiği varsayımı üzerine kuruludur. Fakat riski çok yüksek ama olasılığı diğer durumlara göre oldukça küçük olan durumları, normal dağılım varsayımı altında gerçekçi bir şekilde öngörmek mümkün değildir. Envanter modeller ile ilgili problemlerde sistemi temsil eden stokastik süreçlerin uzun süredeki davranış karakteristiklerini bilmek uygulamada çok önemlidir. Dikkat edilecek olur ise, (s, S) tipli stok kontrol modellerinin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun n . mertebeden momentleri için verilmiş olan kesin formüller talep

değişkenine ait yenileme fonksiyonları aracılığı ile ifade edilmişlerdir. Yenileme fonksiyonunun matematiksel olarak kesin ifadesi yalnızca birkaç dağılım (üstel dağılım, erlang dağılımı gibi) için mümkündür. Günlük hayat problemlerinde ise, talep rasgele değişkenlerine ait dağılım fonksiyonu F ya bilinmiyordur ya da şekilsel olarak bilinirken parametreleri bilinmiyordur. Böyle durumlarda F verilerden tahmin edilir. Gökpınar, 2016 yılında ve Frees, 1986 yılında F dağılımı bilinmediğinde büyük t değerleri için yenileme fonksiyonunun bir tahmin edicisini önermiştir (Gökpınar, 2016 ve Frees, 1986). Frees, 1986 yılında önerilen tahmin edici aykırı değerler söz konusu olmadığında, yenileme fonksiyonu içeren sistemlerin karakteristikleri için istatistiki tahmin ediciler elde edilmesi amacı ile kullanılabilir (Frees, 1986). Fakat sistemdeki talep rasgele değişkenleri aykırı değerler üretme eğiliminde olan ağır kuyruklu bir dağılıma sahip olduğunda bu dağılımların kuyruk davranışlarını göz önünde bulundurmadan önerilen tahmin edicilerin gerçekçi sonuçlar vermediği ortaya çıkmıştır. Bu nedenle talep rasgele değişkenlerindeki ani dalgalanmaların uzun vadede sistemlerin karakteristikleri üzerindeki etkilerinin istatistiki tahmini uç değer teorisine dayalı tahmin edicilerin kullanılmasını gerektirmektedir. 3. kısımda ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için elde edilmiş olan bazı istatistiki tahmin ediciler ve bu tahmin edicileri elde etme yöntemleri üzerinde durulmuştur. Bu çalışmanın amacı literatürde yenileme fonksiyonları için önerilmiş olan tahmin edicilerden yararlanılıp uç değer yönteminin aşamaları takip edilerek talep rasgele değişkenleri aykırı değerler üretme eğiliminde olan (s, S) tipli yarı Markov envanter sistemlerin karakteristiklerinden ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun n . dereceden momentleri için istatistiki tahmin ediciler önermektir. Ayrıca bu tahmin edicilerin asimptotik yansızlık, tutarlılık, asimptotik normallik gibi istatistiksel bazı özelliklerinin incelenmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçların ve bu konuda elde edilecek deneyimlerin daha sonra Cramer Lundberg modeller ve rasgele yürüyüş modelleri gibi yapısı daha karmaşık süreçlerin istatistiki olarak tahmin edilmesi problemlerinde kullanılabilmesine olanak sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmada ele alınan yöntemin avantaj ve dezavantajları şu şekilde özetlenebilir: Kuyruk indeksi ve örneklem büyüklüğü ne olursa olsun, uç değerler teorisine bağlı istatistiki tahmincinin en önemli avantajının asimptotik normallliği

sağlaması olduğunu fark ettik. Uç değerler teorisine bağlı istatistiki tahmincinin en büyük zorluğu ise eşik seviyesinin belirlenmesidir. Johansson, 2003 yılında önerdiği eşik seviyesinin yenileme fonksiyonunun uç değerler teorisine bağlı istatistiki tahmin problemlerinde kullanılmasının uygun olduğu Necir vd., 2010 yılında belirtilmiştir (Johansson, 2003; Necir vd., 2010). Johansson, 2003, yılında t_n eşik değerinin, β_n ve ξ tahminlerinin etrafında kararlı olacak şekilde seçildiğini belirtmiştir fakat eşik seviyesini seçmenin standart bir yolu yoktur (Johansson, 2003). Bu nedenle, eşik seçimi uç değerler teorisine bağlı istatistiki tahmin modelinin farklı problemlerde kullanılmasında karşılaşılan en önemli zorluklardan biridir.

Ağır kuyruklu dağılımların sonlu momentlerini belirlemek için en önemli araç kuyruk indeksidir. Kuyruk indeksi aynı zamanda dağılımın kuyruğunun şeklini gösteren ağır kuyruklu verilerin önemli bir özelliğidir. Bu tez çalışmasında ayrıca kuyruk endeksinin iyi bilinen uç değerler teorisine bağlı istatistiki tahmin modelini de dikkate aldık.

Bu tez çalışmasının temel amaçlarından biri yarı-Markov envanter sistemlerin istatistiksel analizinde uç değer teorisinin güvenilir bir yöntem olarak kullanılabileceğini göstermektir. Bu metodoloji, örneğin yalnızca az sayıda veri mevcut olduğunda aşırı risklerin tahmin edilmesi gibi zor, somut problemlere yönelik bilimsel bir yaklaşım da sağlar. Bu çalışma, özellikle talep rastgele değişkenlerinin ağır kuyruklu olduğu durumlarda yarı Markov envanter modelleri ifade eden süreçlerin istatistiksel özelliklerinin uç değer teorisi ile incelenmesi için bir başlangıç noktası olarak düşünülebilir. Gelecekteki araştırmalara yönelik bir takım öneriler şu şekilde verilebilir:

1. Fuzzy tip yenileme ve ödüllü yenileme süreçleri ağır kuyruklu dağılımlarla incelenebilir. Bu süreçlerin bazı özellikleri için uç değer tabanlı tahmin ediciler önerilebilir.

2. Literatürde yenileme fonksiyonlarıyla ifade edilebilecek pek çok stok kontrol modeli bulunmaktadır. Bu modellerde yenileme fonksiyonunun dağılımı bilinmediğinde aynı sorun ortaya çıkmaktadır. Yenilenme fonksiyonunun dağılımı kesin olarak bilinmemekle birlikte sadece ağır kuyruklu olduğu bilinen bu modeller için de bu çalışmada kullandığımız yöntemler kullanılabilir.

3. Bu çalışmada, yarı Markov bir envanter modelin bazı istatistiksel özelliklerini analiz etmek amacıyla yenileme fonksiyonunun tahmini için Johansson, 2003 tarafından önerilen ESAD yöntemi kullanılmıştır. Ağır kuyruklu dağılımların momentlerini ve kuyruk indekslerini tahmin etmek için literatürde bazı farklı yöntemler mevcuttur. Örneğin, Liang Peng, 2001 yılında yayınlanan makalesinde, uç değer teorisini kullanarak $-a < -1$ kuyruk indeksine sahip ağır kuyruklu dağılımın ortalaması için alternatif bir tahminci önermiştir (Liang Peng, 2001). Önerdiği yöntemi kullanarak, (s, S) tipli yarı Markov envanter modelin, ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için alternatif bir tahminci elde edilebilir.

4. Uç değer teorisinin en ilgi çekici alanlarından biri zaman serisi modellerinin analizidir. Bu teorisinin ağır kuyruklu zaman serisi analizinde kullanılması yönünde çalışmalarımızı genişletebiliriz.

KAYNAKÇA

- Adler, R. J., Feldman, R. E. ve Taqqu, M. S., (1998). *A Practical Guide to Heavy Tails*. Birkhauser, Boston, M.A.
- Aliyev, R., (2016). On a stochastic process with a heavy-tailed distributed component describing inventory model type of (s, S) . *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 46 (5), 2571-2579.
- Aliyev, R. ve Khaniyev, T., (2014). On the moments of a semi-Markovian random walk with Gaussian distribution of summands. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 43 (1), 90-104.
- Aliyev, R. T., Khaniyev, T. A. ve Kesemen T., (2010). Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with Gamma distributed interference of chance. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 39 (1), 130-143.
- McNeil, A. J., Frey R. ve Embrechts, P., (2015). *Quantitative Risk Management-Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.
- Arnold, S. F., (1990). *Mathematical Statistics*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Asmussen, S., (2000). *Ruin probabilities*. Singapore: Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, World Scientific Publishing.
- Asmussen, S., (1987). *Applied Probability and Queues*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Applied Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Balkema, A., ve de Haan, L., (1974). Residual life time at great age. *Annals of Probability*, 2, 792–804.
- Bebbington, M., Davydov, Y. ve Zitikis, R., (2007). Estimating the renewal function when the second moment is infinite. *Stochastic Models*, 23 (1), 27-48.
- Beirlant, J., Matthys, G. ve Dierckx, G., (2001). Heavy tailed distributions and rating. *ASTIN Bull.*, 31, 37-58.
- Beirlant, J., Goegebeur, Y., Teugels, J. ve Segers, J., (2004). *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. Chichester: Wiley.
- Beirlant, J. ve Teugels, J., (1987). *Asymptotic normality of Hill's estimator. Extreme value theory*. Lecture Notes in Statistics, 51, Springer, New York.
- Bektaş Kamışlık, A., Kesemen, T. ve Khaniyev, T., (2019). Inventory model of type (s, S) under heavy tailed demand with infinite variance, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 33 (1), 39-56.

- Bektaş Kamışlık, A., (2017). *(s, S) tipli envanter modellerin ağır kuyruklu dağılımların belirli alt sınıfları ile incelenmesi*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Bektaş Kamışlık, A., Kesemen, T., ve Khaniyev, T., (2018). On the moments for ergodic distribution of an inventory model of type (s, S) with regularly varying demands having infinite variance. *TWMS J. App. Eng. Math.* 8 (1a), 318-329.
- Bingham, N. H., Goldie, C. M. ve Teugels, J. L., (1987). *Encyclopedia of Mathematics and its applications- Regular Variation*. Cambridge University Press, New York.
- Casella, G. ve Berger, R. L., (2002). *Statistical Inference (Second Edition)*. Pacific Grove: Duxbury/ Thomson Learning.
- Castillo, E., Hadi, A.S., Balakrishnan, N. ve Sarabia, J. M., (2005). *Extreme Value and Related Models with Applications in engineering and Science*. Hoboken, NJ: Wiley.
- Chistyakov, V. P., (1964). A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes." *Theory Probability and Applications*, 9, 640-648.
- Coles, S., (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer Verlag, London.
- Cox, D. R., (1962). *Renewal Theory*. Methuen, London, UK.
- Crovella, M.E., Taqqu, M.S., Bestavros, A., (1998). *Heavy Tailed Probability Distributions in the World Wide Web in A Practical Guide to Heavy Tails*. Birkhauser, Boston, M.A.
- Embrechts, P. ve Omey E., (1984). A property of long-tailed distributions. *Journal of Applied Probability*, 21, 80-87.
- Embrechts, P., Klüppelberg C. ve Mikosch T., (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Applications of Mathematics*. Stochastic Modelling and Applied Probability 33, Springer, New York.
- Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications II (2nd Edition)*. J. Wiley, New York, USA.
- Fisher, R. A. ve Tippett, L. H. C., (1928). Limiting Forms of the Frequency Distributions of the Largest or Smallest Member of a Sample. *Proceedings of Cambridge Philosophy Society* 24, 180-190.
- Foss, S., Korshunov, D. ve Zachary, S., (2011). *An Introduction to Heavy Tailed and Sub-exponential Distributions*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, New York.

- Frees, E. W., (1986a). Warranty analysis and renewal function estimation. *Naval Research. Logistics*, 33, 361-372.
- Frees, E. W., (1986b). Nonparametric renewal function estimation, *Annals of Statistics*, 14 (4), 1366-1378.
- Geluk, J., L., (1992). A renewal theorem in the finite mean case. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125 (11), 3407-3413.
- Geluk, J. L. ve Frenk, J. B. G., (2011). Renewal theory for random variables with heavy tailed distribution and finite variance. *Statistics and Probability Letters*, 81 (1), 77-82.
- Geluk, J. L. ve Haan, L. D., (2000). Stable probability distributions and their domains of attraction: a direct approach. *Probability and Mathematical Statistics*, 20 (1), 169-188.
- Gikhman, I. ve I. Skorohod, A. V., (1975). *Theory of Stochastic Processes II*. Second Edition, Springer-Verlag, New York.
- Gnedenko, B.V., (1941). Limit Theorems for the Maximal Term of a Variational Series. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences del'URSS*. 32, 7-9.
- Goldie, C. M. ve Smith, R. L., (1987). Slow variation with remainder: a survey of the theory and its applications. *Quart J. Math. Oxford*, 38 (2), 45-71.
- Gökpınar, E., (2016). *Yenileme sürecinde tahmin ediciler ve uygulamaları*. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi.
- Grübel, R. and Pitts, S., (1993). Nonparametric estimation in renewal theory 1: the empirical renewal function. *Annals of Statistics*, 21 (3), 1431-145.
- Guedon, Y. ve Coccozza-Thivent, C., (2003). Nonparametric estimation of renewal processes from count data. *The Canadian Journal of Statistics*, 3 (12), 191-223.
- Gumbel, E. J., (1958). *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, New York, USA.
- Haan, L. de ve Resnick, S. I., (1996). Second order regular variation and rates of convergence in extreme value theory." *Ann. Probab* 24, 9-124.
- Haan, L. D. ve Ferreira, A., (2006). *Extreme Value Theory: An Introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, New York, USA.
- Jenkinson, A. F., (1955). The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81, 158-171.

- Johansson, J., (2003). Estimating the mean of heavy tailed distributions. *Extremes*, 6, 91-109.
- Kaasik, A., (2009). *Estimating ruin probabilities in the Cramer-Lundberg model with heavy tails*. Ph.D., Institute of Mathematical Statistics, University of Tartu, Tartu.
- Kesemen, T., Bektaş Kamışlık, A., Küçük, Z. ve Şenol, E., (2016). Inventory Model of Type (s,S) with Subexponential Weibull Distributed Demand. *Journal of the Turkish Statistical Association*, 9 (3), 81-92.
- Khaniyev, T. ve Atalay, K. D., (2010). On the Weak Convergence of the Ergodic Distribution for an Inventory Model of Type (s,S). *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 9 (4), 599-611.
- Khaniyev, T. A., Kokangul, A. ve Aliyev, R. T., (2013). An asymptotic approach for a semi-Markovian inventory model of type (s,S). *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 29 (5), 439 – 453.
- Kluppelberg, C., (1988). Subexponential distributions and integrated tails. *Journal of Applied Probability*, 25 (1), 132-141.
- LePage, R., Woodrofe, M. ve Zinn, J., (1981). Convergence to a stable distribution via order statistics. *Annals of Probability*, 9, 624-632.
- Liang P., (2001). Estimating the mean of heavy tailed distribution. *Statistics and Probability Letters*, 52, 255-264.
- Markovich, N. M. ve Krieger, U. R., (2000) Nonparametric estimation of long-tailed density functions and its application to the analysis of World Wide Web traffic. *Performance Evaluation*, 24, 205-222.
- Mikosch, T.V., (1999). Regular Variation, Subexponentiality and Their Applications in Probability Theory. *EURANDOM European Institute for Statistics, Probability, Operations Research and their Applications Report*, 99, 17.
- Mikosch, T. V., (2004). *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes*. Springer, Verlag.
- Mikosch, T. V. ve Rackauskas, A., (2010). The limit distribution of the maximum increment of a heavy-tailed random walk. *Bernoulli* 16, 1016-1038.
- Necir, A., Rassoul, A. ve Meraghni, D., (2010). POT-based estimation of the renewal function of inter-occurrence times of heavy-tailed risks. *Journal of Probability and Statistics*, Article ID 965672: doi:10.1155/2010/965672.
- Peng, L., (2001). Estimating the mean of heavy tailed distributions. *Statistics and Probab. Lett.* 52, 255-264.

- Peng, L. ve Qi, Y., (2004). Estimating the first and second-order parameters of heavy tailed distribution. *Aust. N. Z. J. Stat.* 46, 305-312.
- Pickands, J., (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*, 3, 119–131.
- Rassoul, A., (2010). *Estimate some tools probabilistic in insurance and finance*. Ph.D. University Mohamed Khider, Biskra, Algeria.
- Reiss, R. D. ve Thomas, M., (2007). *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhauser, Basel.
- Resnick, S. I., (2006). *Heavy Tail Phenomena: Probabilistic and Stochastic Modeling*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, New York, USA.
- Sgibnev, M. S., (1981). On the renewal theorem in the case of infinite variance. *Sibirski Matematicheski Zhurnal*, 22 (5), 178–189.
- Smith, R. L., (1982). Uniform rates of convergence in extreme-value theory. *Adv. Appl. Probab.*, 14, 600-622.
- Smith, R. L., (1985). Maximum likelihood estimation in a class of non-regular cases. *Biometrika*, 72 (1), 67–90.
- Smith, R. L., (1987). Estimating tails of probability distributions. *The Annals of Statistics*, 15 (3), 1174-1207.
- Schneider, H., Lin, B.S. ve O’Cinneide, C., (1990). Comparison of nonparametric estimators for the renewal function. *Journal Royal Statistical Society*, 39, 55–61.
- Teugels, J. L., (1968). Renewal theorems when the first or the second moment is infinite. *Annals of Mathematical Statistics*, 39, 1210–1219.
- Vardi, Y., (1982). Nonparametric estimation in renewal processes. *Annals of Statistics*, 10 (3), 772-785.
- Von Mises, R., (1936). La distribution de la plus grande des n valeurs. *Selected papers, American Mathematical Society*, 271-294.
- Zhao, Q. ve Rao, S., (1997). Nonparametric renewal function estimation based on estimated densities. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 14 (1), 115–126.