

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



**YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**AĞIRLIK FONKSİYONU YAKLAŞIMI İLE PERTÜRBASYON
METODUNUN BİRLEŞTİRİLMESİ VE EULER BERNOULLİ HAREKET
DENKLEMLERİNİN ANALİZİ**

Betül BOZDOĞAN YARDIM

**Danışman
Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR
II. Danışman
Prof. Dr. B. Gültekin SINIR**

MANİSA-2025

**Betül
BOZDOĞAN
YARDIM**

**Ağırlık Fonksiyonu Yaklaşımı ile Pertürbasyon Metodunun Birleştirilmesi ve
Euler Bernoulli Hareket Denklemlerinin Analizi**

2025

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, tezin yazımında akademik ve etik kurallara aykırı herhangi bir yapay zeka ve program kullanmadığımı beyan ederim.

İmza

Betül BOZDOĞAN YARDIM

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

Betül BOZDOĞAN YARDIM
Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR
II. Danışman
Prof. Dr. B. Gültekin SINIR

Bu çalışma, ağırlık fonksiyonu yaklaşımı ile pertürbasyon metodunun birleştirilmesi esasına dayalı yeni bir çözüm tekniği önererek, Euler–Bernoulli kirişlerinin dinamik davranışını analitik ve nümerik açıdan incelemektedir. Tez kapsamında, doğrusal olmayan ve konuma bağlı dinamik sistemlerin çözümünde iki yöntemin birlikte kullanımının sağladığı avantajlar teorik ve uygulamalı olarak değerlendirilmiştir.

Çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde titreşim hareketine ilişkin temel kavramlar, self-adjointlik ve çözülebilirlik şartları ele alınmış, Galerkin, Petrov–Galerkin, Kolokasyon ve En Küçük Kareler yöntemleri gibi nümerik çözüm yaklaşımlarının teorik temelleri özetlenmiştir.

İkinci bölümde, ağırlık fonksiyonlarına dayalı nümerik çözüm yöntemi detaylandırılarak, konuma bağlı dinamik problemlere uygulanabilir genel çözüm prosedürü sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, geliştirilen genel titreşim modeli pertürbasyon tekniği ile analiz edilmiştir. Sistem parametrelerinin farklı değerleri için çeşitli durumlar ayrı ayrı değerlendirilmiş, seküler terimlerin elimine edilmesiyle fiziksel olarak tutarlı çözümler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, eksenel parametrik zorlamaya maruz kalan çoklu yay mesnetli Euler–Bernoulli kirişlerin dinamik davranışı örnek uygulama olarak incelenmiştir. Oluşturulan diferansiyel denklemler boyutsuzlaştırılmış, malzeme ve geometri etkilerinden arındırılmış sonuçlar elde edilmiştir. Çözüm süreçleri Galerkin, Petrov–Galerkin, kolokasyon ve en küçük kareler yöntemleriyle ayrı ayrı gerçekleştirilmiş ve elde edilen doğal frekans değerleri ile işlem süreleri karşılaştırılmıştır.

Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pertürbasyon Yöntemi, Ağırlık Fonksiyonları, Galerkin Yöntemi, Petrov-Galerkin Yöntemi, En Küçük Kareler Yöntemi, Kolokasyon Yöntemi, Euler- Bernoulli Kirişi

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Betül BOZDOĞAN YARDIM

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Education
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

Co-Supervisor: Prof. Dr. B. Gültekin SINIR

This study proposes a new solution technique based on the combination of the weight function approach and the perturbation method to investigate the dynamic behavior of Euler–Bernoulli beams both analytically and numerically. In this thesis, the advantages of using both methods in the solution of nonlinear and position-dependent dynamic systems are evaluated theoretically and practically.

The study consists of four main sections.

The first section discusses the fundamental concepts of vibrational motion, including self-adjointness and solvability conditions, and summarizes the theoretical foundations of numerical solution approaches such as the Galerkin, Petrov–Galerkin, collocation, and least squares methods.

In the second section, the numerical solution method based on weight functions is detailed and the general solution procedure applicable to position-dependent dynamic problems is presented.

In the third section, the developed general vibration model was analyzed using perturbation techniques. Various cases were evaluated separately for different values of the system parameters, and physically consistent solutions were obtained by eliminating secular terms.

In the fourth section, the dynamic behavior of multiple spring-supported Euler–Bernoulli beams subjected to axial parametric loading was examined as a case study. The generated differential equations were nondimensionalized, and results were obtained free of material and geometry effects. The solution processes were carried out separately using the Galerkin, Petrov–Galerkin, collocation, and least squares methods, and the obtained natural frequency values were compared with the CPU times.

The final section includes conclusions and recommendations.

Keywords: Perturbation Method, Weight Functions, Galerkin Method, Petrov–Galerkin Method, Least Squares Method, Collocation Method, Euler–Bernoulli Beam

2025, 63 sayfa

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, eksenel parametrik zorlamaya maruz kalan çoklu yay mesnetli elastik kirişlerin dinamik davranışları, analitik ve nümerik yöntemler çerçevesinde incelenmiştir. Çalışmanın temel amacı, bu tür sistemlerin karmaşık titreşim davranışlarını incelemek ve çözümünde kullanılabilecek etkili yaklaşımlar geliştirmektir. Bu kapsamda, pertürbasyon temelli analizler ve ağırlık fonksiyonlarına dayalı çözüm teknikleri kullanılarak, frekans ve genlik tepkileri farklı parametrik durumlar altında değerlendirilmiştir.

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve desteğiyle beni yönlendiren değerli danışmanım Prof. Dr. Duygu Dönmez Demir'e, çalışmanın hazırlanma sürecinde bilgi, deneyim ve zamanını esirgmeden katkı sunan değerli ikinci danışmanım Prof. Dr. B. Gültekin Sınır'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, süreç boyunca sabrı ve desteğiyle daima yanımda olan eşim Murat Yardım'a, fiziksel olarak yanımda olmasa da varlığıyla kalbimde yaşayan, sevgisini her zaman hissettiğim rahmetli anneme ve her koşulda yanımda olduklarını hissettiren aileme minnettarlığımı sunarım.

Betül BOZDOĞAN YARDIM

Manisa, 2025

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

x	Bağımsız konum değişkeni (boyutsuz)
$\hat{x}$	Bağımsız konum değişkeni (boyutlu)
t	Bağımsız zaman değişkeni (boyutsuz)
$\hat{t}$	Bağımsız zaman değişkeni (boyutlu)
T_0	Hızlı zaman ölçeği
T_1	Yavaş zaman ölçeği
T_2	Daha yavaş zaman ölçeği
ε	Çok küçük boyutsuz parametre
$u(x, t)$	Enine yer değiştirme
A	Kiriş kesit alanı
L	Kiriş uzunluğu
E	Elastisite modülü
f	Periyodik zorlama kuvveti
$F(x)$	Harmonik zorlama kuvveti
I	Atalet momenti
$P(t)$	Zamanla değişen eksenel yük
$w(x, t)$	Boyutsuz ortam deplasmanı
$\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$	Boyutlu giriş deplasmanı
$M[\cdot]$	Kütleyle bağlı lineer diferansiyel operatör
$K[\cdot]$	Yapı elemanlarının rijitlik operatörü
$C[\cdot]$	Sönüm terimi operatörü
$f(x, t) \cos \Omega_1 t$	Parametrik zorlama terimi
$F(x, t) \cos \Omega_2 t$	Harmonik dış zorlama
$f(x, t)$	Dış kuvvetin genliği
Ω_1	İç zorlama frekansı
Ω_2	Dış zorlama frekansı
$W(x, T_0, T_1)$	Seküler olmayan terimler
A_n	Kompleks genlik

$\bar{A}_n$	Kompleks genliğin eşleniği
$k.e.$	Kompleks eşlenik
B_1, B_2	Sınır şartlarını temsil eden lineer operatörler
m	Kütle
$\hat{P}$	Eksenel harmonik basınç yükü
$\hat{\mu}$	Lineer viskoz sönüm katsayısı
k	Yay sabiti
δ	Direkt-delta fonksiyonu
ρ	Yoğunluk
X_n	Şekil fonksiyonu
$(\dot{})$	Zamana göre türev
$(\prime)$	Konuma göre türev
η	Boyutsuz dinamik viskozite (Sönüm katsayısı)
$\hat{\eta}$	Boyutlu dinamik viskozite
ω_n	Doğal frekans
Φ_n	Yer değiştirme fonksiyonunun seküler terimlerle ilişkili kısmı
D_n	T_n 'ye göre türev operatörü
γ_n	n. moda ait faz açısı
σ_n	Ayar parametresi
$\Re$	Rijitlik operatörü
$\Im$	Kütle normalizasyon operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Tek boyutlu alanın iki sonlu elemana bölünmesi ve fonksiyon yaklaşımı.....	9
Şekil 2.2. İki ucu ankastre mesnet.....	24
Şekil 2.3. Basit mesnetli kiriş.....	24
Şekil 2.4. Ankastre-sabit mesnetli kiriş	25



TABLolar DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.2.1 Farklı N değerleri için hesaplanan eksenel yük (P) değerlerinin karşılaştırılması ($\eta = 0.1$, $k = 100$).....	44
Tablo 4.2.2 Farklı N değerleri için hesaplanan doğal frekans (ω) değerlerinin karşılaştırılması ($\eta = 0.5$ $P_0 = 10$ ve $k = 100$).....	45
Tablo 4.2.3 Doğal frekanslarının sayısal olarak hesaplanmasına ait işlem süreleri (N , deneme fonksiyonu sayısı).....	45

İÇİNDEKİLER

ÖZET	I
ABSTRACT	II
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	III
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ	V
TABLolar DİZİNİ	VI
İÇİNDEKİLER	VII
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.

1.1 Titreşim Hareketinin Tanımı.....	4
1.1.1. Serbest ve Zorlanmış Titreşimler.....	4
1.1.2. Rezonans.....	5
1.1.3. Lineer ve Lineer Olmayan Titreşimler.....	6

İKİNCİ BÖLÜM

METODOLOJİ

2.1. Nümerik Yöntemler.....	7
2.1.1. Galerkin Metodu.....	8
2.1.2. Petrov-Galerkin Metodu.....	10
2.1.3. Kolokasyon Metodu.....	11
2.1.4. En Küçük Kareler Metodu.....	12
2.2. Çok Zaman Ölçekli Metod.....	13
2.2.1. Çözülebilirlik Şartı.....	13
2.2.1.1. Self- Adjointlik Şartı	16
2.3. Ağırlık Fonksiyonlarıyla Nümerik Yöntemler.....	18

2.3.1. Ağırlık Fonksiyonlarına Genel Bakış.....	19
2.3.2. Konuma Bağlı Dinamik Problemler ve Ağırlık Fonksiyonunun Bulunması...	22

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

GENEL TİTREŞİM MODELİ

3.1. Genel Model.....	26
3.1.1. Çok Zaman Ölçekli Metot İle Çözüm	27
3.1.2. Lineer Denklemin Çözümü.....	29
3.2. Durum Analizi.....	32
3.2.1. Ω_1 'in 0 'dan ve $2\omega_n$ 'den, Ω_2 'nin ω_n 'den Uzak Olduğu Durum.....	32
3.2.2. Ω_1 'in 0 'e Yakın, Ω_2 'nin ω_n 'den Uzak Olduğu Durum	33
3.2.3. Ω_1 'in $2\omega_n$ 'e yakın, Ω_2 'nin ω_n 'den Uzak Olduğu Durum	34
3.2.4. Ω_1 'in 0 ve $2\omega_n$ 'den Uzak, Ω_2 'nin ω_n 'e Yakın Olduğu Durum.....	36

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMALAR

4.1. Eksenel Parametrik Zorlamalı Çoklu Yay Mesnetli Kirişler.....	39
4.2. Galerkin Yöntemine Göre Çözüm.....	41
4.3. Petrov-Galerkin Yöntemine Göre Çözüm	42
4.4. Kolokasyon Yöntemine Göre Çözüm.....	42
4.5. En Küçük Kareler Yöntemine Göre Çözüm.....	43
4.6. Sayısal Sonuçlar.....	44

BEŞİNCİ BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç ve Öneriler.....47

KAYNAKLAR.....49



GİRİŞ

Fen bilimleri, temel bilimler ve mühendislik gibi disiplinlerde karşılaşılan birçok fiziksel problem, doğrudan gözlemle değil, matematiksel modelleme yoluyla analiz edilmektedir. Ele alınan bir sistemin davranışı, belirli fiziksel ilkelere dayalı olarak geliştirilen matematiksel modeller aracılığıyla temsil edilir. Bu modeller, sistemin zamana bağlı tepkilerini incelemeye ve çeşitli parametrelerin etkilerini nicel olarak analiz etmeye olanak tanır. Ancak, oluşturulan modelin geçerliliği, büyük ölçüde sistemin fiziksel yapısını ne ölçüde doğru temsil ettiğine bağlıdır. Başka bir deyişle, çözüm algoritmasının güvenilir ve anlamlı sonuçlar üretebilmesi, modelin sistemle kurduğu yapısal uyumla doğrudan ilişkilidir.

Bu bağlamda, her fiziksel durum için ayrı ayrı model ve çözüm yöntemleri geliştirmek yerine, benzer türdeki problemleri kapsayacak şekilde genellenebilir bir modelleme yaklaşımı benimsemek hem teorik hem de uygulama açısından önemli avantajlar sunmaktadır. Nitekim literatürde, bu tür genelleştirilebilir modelleme anlayışıyla geliştirilmiş, farklı problem senaryolarına uyarlanabilen yöntem ve algoritmalar sıklıkla rastlanmaktadır (Chapra & Canale, 2014; Fletcher, 1991).

Mühendislik uygulamalarında sıklıkla başvurulmuş modellerden biri olan Euler–Bernoulli kiriş teorisi, yapıların mekanik davranışlarını incelemek amacıyla geliştirilmiş klasik bir yaklaşımdır. Bu teori, küçük deformasyonlar ve doğrusal elastik davranış varsayımları altında, kesitin düz kaldığı ve malzeme özelliklerinin homojen olduğu sistemler için geçerlidir (Szilard, 2004). Ancak karmaşık sınır koşulları, farklı yükleme türleri veya malzeme heterojenliği gibi durumlar söz konusu olduğunda, bu klasik model yetersiz kalabilmektedir.

Bu noktada, söz konusu sınırlamaları aşabilmek ve daha geniş kapsamlı bir çözüm yaklaşımı sunabilmek amacıyla, farklı yöntemlerin bir arada kullanılması tercih edilmektedir. Ağırlık fonksiyonu yaklaşımı, özellikle çatlak mekaniği ve kiriş teorisinde sistemin belirli noktalarındaki tepkiyi analiz etmek amacıyla kullanılır (Shen & Glinka, 1991; Fett & Munz, 1994). Bu yaklaşım, birim yük etkisine karşılık gelen yer değiştirmeyi temsil ederek, çatlaklardaki gerilme yoğunluk faktörlerinin (SIF) belirlenmesinde yüksek doğruluk sağlamaktadır (Wang & Lambert, 1995; Wagner & Millwater, 2012). Ağırlık fonksiyonlarının kapsamlı biçimde farklı çatlak geometrileri ve yükleme türleri için geliştirildiği görülmektedir (Jing & Wu, 2015; Livieri & Segala, 2015).

Sürekli ortamların dinamik davranışını inceleyen titreşim problemleri, oldukça geniş bir model çeşitliliğine sahiptir. Bu çeşitlilik, farklı sınır şartları, malzeme özellikleri ve yükleme türlerinden kaynaklanmaktadır. Her bir fiziksel duruma özgü ayrı bir matematiksel model kurmak ve bu modeller için bireysel çözüm süreçleri geliştirmek yerine, benzer yapıya sahip problemleri kapsayan genel bir modelin oluşturulması ve buna ait genellenebilir bir çözüm algoritmasının geliştirilmesi hem teorik analiz hem de mühendislik uygulamaları açısından önemli kolaylıklar sağlamaktadır. Nitekim literatürde, bu tür bütüncül yaklaşımlara dayanan çok sayıda çalışma mevcuttur (Dönmez Demir, Bildik & Sınır, 2012; Sınır, 2019).

Pertürbasyon metodu ise, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan güçlü bir tekniktir. Küçük bir parametreye bağlı sistemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek üzere, bilinen bir çözüm etrafında genişletme yapılır (Nayfeh, 1993). Bu yöntem, başlangıçta tahmin edilen çözümün sistematik biçimde geliştirilmesini sağlar. Özellikle mühendislikteki doğrusal olmayan titreşim problemlerinde, klasik yaklaşımın ötesine geçerek daha gerçekçi modellemeler sunar (Pakdemirli & Boyacı, 1995; Demirtaş, 2014).

Bu iki yöntemin birlikte kullanımı ile doğrusal olmayan, çatlaklı, çok katmanlı veya değişken kesitli yapıların daha doğru analiz edilebildiği çalışmalara rastlanmaktadır (Dönmez Demir, 2012; Özhan, 2009; Sınır, 2019). Ağırlık fonksiyonları, sistemin belirli bölgelerinde çözüm doğruluğunu artırırken, pertürbasyon teknikleri küçük sapmaların dinamiğini çözümlmeye olanak tanımaktadır. Örneğin, Wang ve Lambert (1995) yarı eliptik yüzey çatlaklarına sahip sonlu kalınlıktaki plaklarda çatlak boyunca herhangi bir noktada geçerli olacak yerel ağırlık fonksiyonlarını türeterek, karmaşık gerilme alanları altında gerilme şiddet faktörlerinin daha doğru ve pratik şekilde hesaplanmasını amaçlamışlardır. Wang ve Lambert (1997), yüksek genişlik ve boy oranına sahip yarı eliptik yüzey çatlakları için sonlu kalınlıktaki plaklarda üç boyutlu sonlu eleman analizleri yoluyla gerilme şiddeti faktörlerini belirleyerek, çeşitli gerilme dağılımlarına uygulanabilir kapalı formda ağırlık fonksiyonlarını geliştirmişlerdir. Benzer şekilde, Zheng ve ark. (1996), köşe çatlakları için ağırlık fonksiyonu üretiminde yeni yaklaşımlar sunmuştur.

Son yıllarda Euler–Bernoulli kiriş denklemlerinin çözümünde ağırlık fonksiyonları kullanan yöntemler üzerine yapılan çalışmalar literatüre önemli katkılar sağlamıştır (Anderson, 2005; Tatlısu, 2023; Kahraman, 2018). Özellikle Galerkin ve Ritz yöntemlerine dayalı yaklaşımlar, sınır koşullarını doğal olarak tatmin eden Chebyshev ve benzeri spektral taban fonksiyonları ile geliştirilmiş ve hem doğrusal hem de Von Kármán tipi geometrik doğrusal olmayan problemlerin yüksek doğrulukla çözümüne imkân tanımıştır (Jalili & Noeiaghdam, 2025). Petrov–Galerkin yöntemine dayalı çalışmalar ise ikinci tür Chebyshev polinomlarını

kullanarak farklı sınır koşullarını kapsayan verimli spektral şemalar önermiştir (Youssri, Abd-Elhameed, Elmasry, & Atta, 2025). Bunun yanında, fizik-bilgili yapay sinir ağları (PINN) çerçevesinde ağırlık fonksiyonu kavramı yeniden ele alınmış ve bu sayede Euler–Bernoulli kiriş problemlerinde ileri doğruluk, parametre tanımlaması ve genelleştirilebilirlik açısından yeni yaklaşımlar geliştirilmiştir (Kapoor, Wang, Núñez, & Dollevoet, 2023). Tüm bu gelişmeler, klasik yöntemlere kıyasla daha hızlı yakınsama, sınır koşullarının daha doğru temsil edilmesi ve ileri malzeme modellerine uyarlanabilmesi bakımından Euler–Bernoulli kiriş teorisine önemli metodolojik ve uygulamalı katkılar sunmuştur (Reddy, 1993; Nikishkov, 2001).

Bu çalışma kapsamında, Euler–Bernoulli kiriş teorisine dayalı olarak ağırlık fonksiyonu yaklaşımı ile pertürbasyon yönteminin birleştirildiği bir çözüm tekniği önerilmektedir. Uygulanan bu teknik, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlere dayalı problemlerin analizinde kullanılarak hem çözüm doğruluğunun artırılması hem de genel uygulanabilirliğin sağlanması öngörülmektedir. Böylece, literatürdeki pek çok çalışmanın sonuçları ile uyumlu olarak, mühendislik yapılarının daha güvenilir ve hassas analizine katkı sağlanması hedeflemektedir.

BİRİNCİ BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

1.1. Titreşim Hareketinin Tanımı

Titreşim hareketi, bir cismin veya fiziksel sistemin denge konumu etrafında zamanla tekrarlayan salınım şeklindeki hareketi olarak tanımlanmaktadır. Bu hareket, sistemin denge konumundan sapması sonucunda ortaya çıkan geri çağırıcı kuvvetlerin etkisiyle meydana gelir. Geri çağırıcı kuvvet, sistemi denge konumuna yönlendirmeye çalışırken, atalet kuvveti nedeniyle cisim denge konumunu aşarak ters yönde bir sapma gerçekleştirir ve bu süreç düzenli veya düzensiz şekilde tekrarlanır.

Titreşim hareketinin temel özellikleri arasında denge konumu, genlik, periyot ve frekans kavramları yer almaktadır. Denge konumu, sistemin kuvvetlerin dengede olduğu referans noktasıdır. Genlik, cismin denge konumundan maksimum uzaklığını ifade ederken; periyot, bir tam titreşimin gerçekleşmesi için geçen süreyi, frekans ise birim zamanda gerçekleşen titreşim sayısını göstermektedir. Özellikle basit harmonik titreşim, titreşim hareketinin en temel ve düzenli formunu oluşturmakta olup genellikle sinüs veya kosinüs fonksiyonları ile matematiksel olarak ifade edilmektedir.

Titreşim hareketi, mühendislik uygulamalarında yay sistemleri, sarkaçlar veya tel titreşimleri gibi birçok fiziksel sistemin analizinde temel bir kavram olarak kullanılmaktadır.

Doğadan bir örnek verilecek olursa, bir kuşun kanat çırpmaları veya depremin bir yapı üzerindeki etki kuvvetleri titreşime verilecek örneklerdir. Daha çarpıcı olarak insan üzerinden bir örnek verilirse, kalbin bir ritimle çarpması bir titreşim hareketidir ve yaşamın devamı sağlanır, kulak zarının titreşmesiyle duyma olayı gerçekleşir, gırtlaktaki ses tellerinin titreşmesiyle konuşma olayı gerçekleşir (Dönmez Demir, 2012).

1.1.1. Serbest ve Zorlanmış Titreşimler

Serbest titreşim, herhangi bir dış kuvvetin veya periyodik uyarının etkisi olmaksızın, yalnızca başlangıç koşullarının (başlangıç yer değiştirmesi veya hızı) etkisiyle sistemde meydana gelen titreşim hareketi olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda sistem, kendi doğal frekanslarında titreşim yapar ve hareketin karakteri yalnızca sistemin kütlesi, rijitliği ve sönüm özellikleri tarafından belirlenir. Sönümsüz serbest titreşimde, sistem sürekli olarak sabit genlikte ve kendi doğal frekansında titreşir. Ancak pratikte çoğu mühendislik sisteminde sönüm etkisi

bulunduğundan, sönümlü serbest titreşim söz konusu olur ve bu durumda titreşim genliği zamanla azalarak sistem denge konumuna yaklaşır. Serbest titreşim analizi, yapı mühendisliği, makine mühendisliği ve havacılık mühendisliği gibi birçok alanda, sistemlerin dinamik davranışlarının incelenmesi ve özellikle doğal frekansların ve mod şekillerinin belirlenmesi açısından kritik öneme sahiptir.

Zorlamalı titreşim, bir sistemin dışarıdan uygulanan periyodik veya rastgele değişen kuvvetler altında gerçekleştirdiği titreşim hareketi olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda sistemin titreşim cevabı, hem başlangıç koşullarından kaynaklanan serbest titreşim bileşenini hem de dış kuvvetin etkisiyle oluşan zorlanmış titreşim bileşenini içerir. Zorlamalı titreşimde sistemin cevabı, uygulanan kuvvetin frekansı, genliği ve fazı ile sistemin kendi doğal frekansları ve sönüm oranı tarafından belirlenmektedir. Özellikle dış kuvvetin frekansının sistemin doğal frekansına yaklaşması durumunda rezonans meydana gelmekte ve titreşim genliği önemli ölçüde artmaktadır. Bu durum mühendislik yapıları açısından kritik olup yapısal hasarlara veya sistem arızalarına yol açabilmektedir. Dolayısıyla zorlamalı titreşim analizi, makine ve yapı mühendisliği başta olmak üzere birçok disiplinde, dinamik yükler altında sistem davranışının incelenmesi, güvenlik ve performans açısından büyük önem taşımaktadır (Omurtag, 2004).

1.1.2. Rezonans

Rezonans, dışarıdan uygulanan periyodik bir kuvvetin frekansının, sistemin doğal frekansına eşit veya çok yakın olması durumunda meydana gelen ve titreşim genliğinin belirgin şekilde artmasına yol açan dinamik bir olgudur. Bu durumda sistem, dış kuvvetten maksimum düzeyde enerji alır ve titreşim cevabı kritik boyutlara ulaşabilir.

Mühendislik sistemlerinde rezonans, özellikle yapısal güvenlik ve hizmet performansı açısından büyük önem taşımaktadır. Sönüm oranının düşük olduğu sistemlerde rezonans etkisi daha belirgin olup, yapısal elemanlarda yorulma, hasar ya da göçmeye sebep olabilir. Bu nedenle rezonansın önlenmesi veya etkilerinin azaltılması için, sistem tasarımında doğal frekansların değiştirilmesi, sönüm elemanlarının kullanılması veya dış yük frekansının kontrol edilmesi gibi yöntemlere başvurulmaktadır (Omurtag, 2004).

1.1.3. Lineer ve Lineer Olmayan Titreşimler

Lineer titreşim, sistemin hareket denklemlerinin doğrusal diferansiyel denklemlerle ifade edilebildiği ve süperpozisyon ilkesinin geçerli olduğu titreşim hareketidir. Bu tür sistemlerde, kuvvet–yer değiştirme ve kuvvet-hız ilişkileri doğrusal kabul edilir. Lineer titreşim analizi, matematiksel olarak daha basit çözümler sunmakta ve mühendislik uygulamalarında genellikle ilk yaklaşım olarak tercih edilmektedir. Örneğin, küçük genlikli yay-kütle sistemleri veya düşük deformasyonlu yapısal titreşimler lineer titreşime örnek gösterilebilir.

Lineer olmayan titreşim, sistemin hareket denklemlerinde doğrusal olmayan terimlerin bulunduğu ve süperpozisyon ilkesinin geçerli olmadığı titreşim hareketidir. Bu durumda, sistemin kuvvet-yer değiştirme veya kuvvet-hız ilişkileri doğrusal değildir ve titreşim tepkisi, genellikle genlik, frekans ve başlangıç koşullarına kuvvetli bir biçimde bağlıdır. Lineer olmayan titreşimler, karmaşık dinamik davranışlar sergileyebilir ve bazı durumlarda kaotik hareketlere yol açabilir. Örneğin, büyük genlikli salınımlar, gevşek bağlantılar, malzeme doğrusal olmamaları ve temas problemleri lineer olmayan titreşimlere tipik örneklerdir (Omurtag, 2004).

Nonlineerlik yapısal, geometrik, ataletten, kuvvetten veya sürtünmeden kaynaklı olabilir. Bunlara örnek vermek gerekirse, yapısal nonlineerlik, gerilmelerin, şekil değiştirmelerin nonlineer fonksiyonu olması ile meydana gelebilir. Geometrik nonlineerlik, birim şekil değiştirme ile deplasman arasındaki nonlineer ilişkiden kaynaklanabilir. Ataletten kaynaklı nonlineerlik ise sistemde, konsantre veya yayılı kütle bulunmasıyla meydana gelebilir. (Özhan, 2009).

İKİNCİ BÖLÜM

METODOLOJİ

2.1. Nümerik Yöntemler

Doğadaki biyolojik, jeolojik ve mekanik olayların hemen hemen hepsi, çeşitli ilgi çekici nitelikler aracılığıyla fizik yasaları kullanılarak tanımlanabilir. Farklı yapısal ve çevresel koşullar altında fiziksel olayların incelenmesi, sayısal analizin önemini ortaya koyar. Örneğin, karmaşık bir köprü yapısında gerilim ve deformasyon dağılımını belirlemek, yeraltı su kaynaklarında kirleticilerin yayılımını tahmin etmek, bir nükleer santralin soğutma sisteminde sıcaklık dağılımını hesaplamak, okyanus akıntılarının yüzey sıcaklığına etkilerini analiz etmek ve yanardağ patlamalarının çevresel etkileşimlerini modellemek bu tür çalışmalara verilebilecek birkaç örnektir. Bu gibi süreçler, çoğunlukla karmaşık diferansiyel denklemler ve nümerik analiz yöntemleri kullanılarak modellenir ve analiz edilir. Karmaşık fiziksel süreçleri inceleyen mühendisler ve bilim insanları genellikle, fiziksel olgunun matematiksel formülasyonu ve matematiksel modelin sayısal analizi olmak üzere iki temel konu ile ilgilenir. Matematiksel modelleme, genellikle diferansiyel veya türev içeren matematiksel bağıntılarla sonuçlanır. Elde edilen denklemler aynı zamanda, fiziksel sürecin anlaşılması veya tasarımında ilgi duyulan fiziksel büyüklükleri ilişkilendirir. Nümerik metotların ana amacı, doğruluğu yüksek ve hesaplama açısından verimli yaklaşımlar sunmaktır (Canale & Chapra, 2014).

Çoğu mühendislik ve bilimsel problemin matematik modeli analitik olarak çözülemeyecek kadar karmaşık hale geldiğinden, nümerik yöntemlere başvurulması zorunludur. Birçok problemde, temel denklemlerin türetilmesi nispeten kolay olsa da analitik çözümler bulmak oldukça zordur. Bu durumda, yaklaşık çözüm yöntemleri alternatif çözümler sunar. Bu yöntemlere örnek olarak, literatürde oldukça popüler olan sonlu elemanlar, sonlu farklar, en küçük kareler, Rayleigh-Ritz ve Galerkin gibi yöntemler verilebilir. Varyasyonel bu tip yöntemlerde, diferansiyel denklem eşdeğer bir ağırlıklı-integral forma dönüştürülür ve ardından yaklaşık çözümün, uygun şekilde seçilmiş fonksiyonların bir lineer kombinasyonu olduğu varsayılır. Bilinmeyen katsayılar çözülür. Bu katsayılar, integral ifadesinin diferansiyel denkleme eşdeğer olacak şekilde tatmin edilmesini sağlayacak şekilde belirlenir. Bu yöntemlerin her biri, integral formu, ağırlık fonksiyonları ve yaklaşım fonksiyonlarının seçiminde farklılık gösterir (Reddy, 1993).

Literatürde oldukça sık kullanılan metotlardan birisi de pertürbasyon metotlarıdır. Pertürbasyon metotları yarı analitik tekniklerden olup, asimptotik metotlar olarak da bilinir ve çözümleri genellikle iki ya da üç terimli asimptotik açılımlar şeklinde ifade edilir. Pertürbasyon

yöntemi, tam çözüme ulaşamayan veya gerçek çözümü oldukça karmaşık olan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan yarı analitik bir tekniktir. Bu yöntemin temel mantığı, incelenen problemin çözümünün, çözümü bilinen daha basit bir problemten yalnızca küçük bir sapma ile farklılık göstereceği varsayımına dayanır. Bu amaçla problemdeki karmaşık terimler, genellikle ε ile gösterilen küçük bir parametreye bağlı olarak ele alınır ve çözüm fonksiyonu bu parametreye göre seri açılımı biçiminde ifade edilir. Böylece çözüm, sıfırıncı mertebede basit probleme karşılık gelen temel kısım, daha yüksek mertebelerde ise giderek küçülen düzeltme terimlerinden oluşur. Pertürbasyon tekniği diferansiyel denklemler, kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği, sınır tabaka teorisi ve mekanik titreşimler gibi pek çok alanda kullanılmakta, özellikle doğrusal olmayan sistemlerde küçük parametrelerin etkilerinin analitik olarak incelenmesine imkân tanımaktadır. Bu yönüyle yöntem, problemlerin davranışını anlamada güçlü bir yaklaşık çözüm aracı olarak kabul edilmektedir (Nayfeh, 1993).

Özellikle nonlinear diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için çok yaygın olarak kullanılan pertürbasyon teknikleri yavaş açılımı, Lindstedt-Poincare, renormalizasyon ve çok zaman ölçekli yöntemler olarak bilinir. Bu metotlar arasında en çok kullanılanı çok zaman ölçekli metottur. Bu metotta, seküler, tekil veya rezonans terimleri gibi sıkıntılı terimler ortadan kalktığı için avantaj sağlamaktadır (Pakdemirli ve Boyacı, 1997)

2.1.1. Galerkin Metodu

Galerkin yöntemi, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünde kullanılan güçlü bir sayısal yaklaşım olup, özellikle mühendislik ve uygulamalı matematik alanlarında analitik olarak çözülmesi zor ya da imkânsız olan problemlerin incelenmesinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Yöntem, temelinde ağırlık fonksiyonlarına dayalı bir yaklaşım sunmakta ve bu sayede karmaşık sınır koşullarına sahip sistemlerin daha gerçekçi ve güvenilir biçimde modellenmesine olanak tanımaktadır. Özellikle titreşim, stabilite ve deprem etkileri altındaki yapıların davranışının sayısal olarak değerlendirilmesi sürecinde önemli avantajlar sağlamaktadır.

Galerkin yöntemi, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için kullanılan ağırlıklı rezidüel fonksiyonlar yöntemine dayalı bir yaklaşımdır. Temel mantığı, çözümü bilinmeyen fonksiyonun, uygun seçilmiş sonlu sayıda deneme fonksiyonu ile yaklaşık olarak ifade edilmesidir. Bu yaklaşık çözüm, diferansiyel denkleme yerleştirildiğinde bir rezidüel fonksiyon ortaya çıkar. Galerkin yönteminde bu fonksiyon, seçilen tüm ağırlık fonksiyonlarıyla iç çarpımı

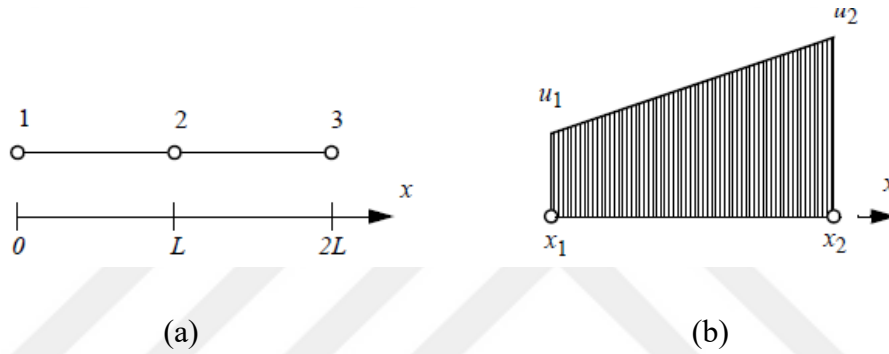
sıfır olacak şekilde koşullandırılır. Böylece, yaklaşık çözümün diferansiyel denklemin zayıf anlamda en iyi karşılığı olması sağlanır.

Galerkin metodunu kullanarak sonlu eleman formülasyonunun açıklaması için basit bir tek boyutlu örnek verilecek olursa,

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b = 0 \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (2.1a)$$

$$u|_{x=0} = 0 ; \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=2L} = R \quad (2.1b)$$

biçimindedir.



Şekil 2.1 (a) İki sonlu elemana bölünen tek boyutlu bölge (b) Tek boyutlu bir elemanda fonksiyonun yaklaşık çözümü

u problemin çözümü olan bilinmeyen fonksiyondur. Şekil 2.1. (a)'da gösterildiği gibi doğrusal tek boyutlu iki sonlu eleman kullanılarak çözülecektir. İlk olarak, Şekil 2.1 (b)'de sunulan bir sonlu elemanı ele alalım. Elemanın iki düğümü vardır ve $u(x)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümü

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N] \{u\}$$

$$[N] = [N_1, N_2], \quad \{u\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

biçimindedir. Burada N_i , $u(x)$ 'in düğüm değerlerini kullanarak interpolate etmek için kullanılan şekil fonksiyonlarıdır. Düğüm değerleri u_1 ve u_2 , ayrık cebirsel denklem sisteminden belirlenmesi gereken bilinmeyenlerdir (Nikishkov, 2001). (2.2) ifadesi (2.1a) 'da yerine yazılırsa, diferansiyel denklem

$$a \frac{d^2}{dx^2} [N] \{u\} + b = \psi \quad (2.3)$$

formunda yazılır. Burada ψ bir sonlu eleman içinde fonksiyonun yaklaşık gösteriminden kaynaklanan sıfır olmayan bir rezidüel değerdir. Galerkin metoduna göre, (2.1a) denklemindeki terimler şekil fonksiyonları ile çarpılarak, eleman boyunca integrallenip sıfıra eşitlenerek rezidüel değer en aza indirgenir (Nikishkov, 2001).

2.1.2. Petrov-Galerkin Metodu

Petrov-Galerkin yöntemi, sonlu elemanlar yaklaşımında kullanılan ve klasik Galerkin yönteminin bir genellemesi niteliğinde olan sayısal bir tekniktir. Bu yöntemde temel fark, çözüm uzayını tanımlayan deneme fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonlarının birbirinden bağımsız seçilmesidir. Klasik Galerkin yönteminde her iki fonksiyon kümesi aynı seçilirken, Petrov-Galerkin yaklaşımı özellikle konveksiyon hâkimiyetinin bulunduğu taşınım-difüzyon denklemleri gibi problemlerde sayısal salınım ve kararsızlıkların önüne geçmek amacıyla ağırlık fonksiyonlarını farklılaştırır. Böylece, çözümün kararlılığı artırılırken, nümerik doğruluk da iyileştirilmiş olur. Bu özelliği sayesinde yöntem, akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve dalga yayılımı gibi alanlarda sıklıkla tercih edilmekte ve yüksek Peclet sayısına sahip problemlerde güvenilir sonuçlar elde edilmesine imkân sağlamaktadır.

Bir fonksiyonun farklı formda yazılan yaklaşık çözümü ile analitik çözümü arasındaki farka rezidü (kalan) denir. R yaklaşık çözümün rezidüsünü, Ω iki boyutlu bir bölgeyi, ψ_i ise ağırlık fonksiyonlarını temsil edecek şekilde, genel formül

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

biçiminde verilir. $\psi_i \neq \phi_i$ alınırsa, bu yöntem ağırlıklı kalan yöntemlerinden Petrov-Galerkin yöntemi olarak bilinir. Genel olarak, bu fonksiyonlar yaklaşık fonksiyonlar ϕ_i ile aynı değildir. ψ_i kümesi lineer bağımsız bir küme olmalıdır. Aksi takdirde denklemler lineer bağımsız olmayacak ve dolayısıyla çözüme sahip olmayacaktır.

A lineer bir operatör olmak üzere, Ω bölgesinde (2.4) yaklaşımı

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \right] c_j = \int_{\Omega} \psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (2.5)$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.6)$$

şeklinde basit bir formda yazılabilir. Bu yöntemde elde edilen A_{ij} katsayılar matrisi simetrik değildir. Yani,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\varphi_j) dx dy \neq A_{ji} \quad (2.7)$$

biçiminde elde edilir. Bu yöntemle elde edilen katsayılar matrisinin simetrik olmaması, yöntemin klasik Galerkin yaklaşımından farkını ortaya koymaktadır. Dolayısıyla, bu formülasyon Petrov–Galerkin yönteminin karakteristik özelliğini oluşturur ve çözümün ağırlık fonksiyonları ile şekil fonksiyonlarından farklı seçilmesi durumunu yansıtır (Reddy, 1993).

2.1.3. Kolokasyon Metodu

Kolokasyon yöntemi, ağırlıklı rezidü metotları kapsamında yer alan ve diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünde sıklıkla kullanılan bir tekniktir. Bu yöntemde temel amaç, yaklaşık çözüm fonksiyonu yardımıyla elde edilen rezidü fonksiyonunu belirli sayıda seçilmiş noktada sifıra eşitlemektir. Böylece, diferansiyel denklem seçilen kolokasyon noktalarında tam olarak sağlanmış olur. Bu yaklaşım, Galerkin yönteminde olduğu gibi tüm çözüm bölgesinde integrasyon yoluyla ortalama hata minimizasyonuna dayalı değil, noktasal hata giderimine dayalıdır. Dolayısıyla, hesaplama sürecinde integral işlemlerine ihtiyaç duyulmaması nedeniyle uygulaması daha basit ve doğrudan bir yöntemdir. Bununla birlikte, çözümün doğruluğu büyük ölçüde kolokasyon noktalarının seçimine bağlı olup, bu noktaların dışında hatanın artması söz konusu olabilir. Yöntemin sağladığı bu pratiklik ve esneklik, onu hem analitik hem de sayısal çözüm yöntemlerinde tercih edilen güçlü bir araç haline getirmektedir.

Kolokasyon yönteminde Ω çözüm bölgesinden seçilen N adet $x^i \equiv (x^i, y^i)$ kolokasyon noktasında kalanın sıfır olması istenir. Yani

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

olmalıdır. x^i kolokasyon noktalarının denklem sistemi iyi şartlı olacak şekilde seçilmesi önemlidir. Bu yöntemde $\psi_i = \delta(x - x^i)$ alınır ve (2.4) denkleminde yazılırsa

$$\int_{\Omega} \delta(x - x^i) R(x, c_j) dx dy = 0 \quad (2.9)$$

veya

$$R(x^i, c_j) = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir. Burada $\delta(x)$, Dirac delta fonksiyonudur ve

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır (Reddy,1993).

2.1.4. En Küçük Kareler Metodu

En küçük kareler metodu, özellikle sayısal analiz ve istatistikte kullanılan, yaklaşık çözüm arayışında hataların karelerinin toplamını en aza indirmeyi esas alan bir yöntemdir. Diferansiyel denklemlerin çözümünde ağırlıklı rezidü yöntemleri kapsamında da sıkça tercih edilen bu yaklaşımda, yaklaşık çözüm fonksiyonunun denklemi tam olarak sağlayamaması durumunda ortaya çıkan rezidü fonksiyonu ele alınır. Ardından, bu rezidü fonksiyonunun karesinin tüm çözüm bölgesi üzerindeki integralinin en küçük değere indirgenmesi hedeflenir. Böylelikle, çözüm fonksiyonunun katsayıları, toplam hatayı minimum yapan değerler olarak belirlenir. Bu yöntem, ortalama hata etkisini azaltarak çözümün genel doğruluğunu artırmakta ve tüm bölge boyunca dengeli bir yaklaşım sağlamaktadır. Ancak hesaplama sürecinde integral işlemlerine gereksinim duyulması, yöntemi kolokasyon metoduna kıyasla daha karmaşık hale getirmektedir. Bununla birlikte, en küçük kareler yöntemi hem teorik tutarlılığı hem de genel hata kontrolündeki etkinliği sayesinde mühendislik ve bilimsel uygulamalarda yaygın olarak kullanılan güvenilir bir çözüm tekniği olarak öne çıkmaktadır.

R rezidü olmak üzere, bahsedilen yöntemde ağırlık fonksiyonları

$$\psi_i = \frac{\partial R}{\partial c_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.12)$$

şeklinde seçilir. Bu seçim yapılarak $c_1, c_2, \dots, c_N$ bilinmeyen katsayılarının bulunması için N tane denklem elde edilir. Ağırlık fonksiyonlarının bu şekildeki seçimi

$$\psi.R = \frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} R^2(x, c_j) dx = \text{minimum} \quad (2.13)$$

rezidüsünün minimum olması demektir. $\psi.R$ 'yi minimum olarak elde etmek için gerekli koşullar ise,

$$\frac{\partial \psi.R}{\partial c_i} = \int_{\Omega} R(x, c_j) \frac{\partial R(x, c_j)}{\partial c_i} dx = 0 ; \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.14)$$

biçimindedir (Ay, 2022).

2.2. Çok Zaman Ölçekli Metot

Bu yaklaşım, çözümün bir muhtemel formu olmaksızın sistemin zaman bağımlılığına etki etmekte olup, zayıf nonlinear, sönümlü ve zorlamalı dinamik sistemlerin analizi için etkili bir yöntemdir. Metot sayesinde sistemlerin nonlinear frekansları, birincil tepkileri ve stabilite koşulları analiz edilirken alt-üst harmonik rezonanslar, iç rezonanslar, parametrik ve birincil rezonans gibi durumlar da incelenebilir (Sınır, 2019).

Bir pertürbasyon tekniği olan çok zaman ölçekli metot hareket denkleminde direkt uygulanacaktır. Çözüm fonksiyonu $u(x, t)$ olan bir modelde, $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t$ ve $T_2 = \varepsilon^2 t$ sırasıyla hızlı, yavaş ve daha yavaş zaman ölçekleridir. Bu takdirde, $u(x, t)$ fonksiyonu için pertürbatif seri açılımı

$$u(x, T_0, T_1, T_2; \varepsilon) = u_0(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(x, T_0, T_1, T_2) \dots \quad (2.15)$$

biçiminde verilir. Zamana bağlı türevler ise,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (2.16)$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2) \cdot (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2) = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (2.18)$$

biçiminde göz önüne alınır. Önerilen bu açılımlar denklemde yerine yazılır ve merteye ayrıştırması yapılır. Elde edilen her bir mertebedeki denklemler çözülerek problemin çözümü bulunmuş olur

2.2.1. Çözülebilirlik Şartı

Pertürbasyon yöntemleri kullanılarak çözümü aranan homojen olmayan problemler üzerinde, çözümün fiziksel ve matematiksel olarak tutarlı olmasını sağlamak için çözülebilirlik şartları kritik bir rol oynar. Bu şartlar, seküler terimler veya sınır koşulları gibi büyüyen ifadelerin

çözümde yer almasını engelleyerek sistemin dengeli kalmasını sağlar. Çözülebilirlik şartları bir sistemin homojen olmayan kısmının, homojen denklemin adjoint çözümlerine dik (ortogonal) olması şeklinde tanımlanır. Bu, sistemi tutarsız kılabilen çelişkileri ortadan kaldırarak çözümün varlığını garanti eder.

Çözülebilirlik şartları genellikle sistemin sınır koşulları ve fiziksel özellikleriyle yakından ilgilidir. Seküler terimler, çözümlerin zaman veya uzaklık gibi parametrelerle sınırsız şekilde büyüyen fiziksel anlamını kaybetmesine neden olabilir. Bu nedenle, seküler terimlerin katsayılarının sıfır olması gibi koşullar, denklemlerden elde edilen çözümlerin anlamlı ve sınırlı olmasını sağlar. Örnek verilecek olursa, ikinci mertebeden

$$y'' + \lambda^2 y = f(x) \quad ; \quad a < x < b \quad (2.19)$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (2.20)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $f(x)$ homojen olmayan bir terimdir ve λ bir parametredir. Homojen denklem ($f(x) = 0$) bir özdeğer problemidir. Eğer homojen denklemin sıfırdan farklı bir çözümü varsa, homojen olmayan problem ($f(x) \neq 0$) yalnızca,

$$\int_a^b f(x)u(x)dx = 0 \quad (2.21)$$

şartı altında çözülebilir. Burada $u(x)$ homojen denklemin adjoint çözümlerinden biridir. Bu şart, homojen olmayan terimin, homojen denklemin adjoint çözümüne ortogonal olması gerektiğini belirtir. Eğer bu şart sağlanmazsa, denklem tutarsız hale gelir ve bir çözüm elde edilemez. Çözülebilirlik durumları çeşitli sınır koşullarına sahip dördüncü mertebeden homojen olmayan denklemler için de türetilir. Bu takdirde, dördüncü mertebeden

$$P_4(x)\phi^{iv} + P_3(x)\phi''' + P_2(x)\phi'' + P_1(x)\phi' + P_0(x)\phi = f(x) \quad (2.22)$$

$$\phi(0) = \beta_1, \quad \phi'(0) = \beta_2, \quad \phi(1) = \beta_3, \quad \phi'(1) = \beta_4 \quad (2.23)$$

diferansiyel denkleminin çözülebilirlik koşullarını belirlemek için, (2.22) ve (2.23) denklemleri adjoint $u(x)$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında terim terim integral alınır,

$$\int_0^1 P_4 u \phi^{iv} dx + \int_0^1 P_3 u \phi''' dx + \int_0^1 P_2 u \phi'' dx + \int_0^1 P_1 u \phi' dx + \int_0^1 P_0 u \phi dx = \int_0^1 u f dx \quad (2.24)$$

elde edilir. Daha sonra, (2.24) eşitliğindeki integrallerde yer alan türevleri ϕ 'den u 'ya aktarmak için kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_4 u \phi^{iv} dx &= P_4 u \phi''' \Big|_0^1 - \int_0^1 (P_4 u)' \phi''' dx = [P_4 u \phi''' - (P_4 u)' \phi'']_0^1 \\
&+ \int_0^1 (P_4 u)'' \phi'' dx = [P_4 u \phi''' - (P_4 u)' \phi'' + (P_4 u)'' \phi']_0^1 \\
&- \int_0^1 (P_4 u)''' \phi' dx = [P_4 u \phi''' - (P_4 u)' \phi'' + (P_4 u)'' \phi' - (P_4 u)''' \phi]_0^1 \\
&+ \int_0^1 (P_4 u)^{iv} \phi dx
\end{aligned} \tag{2.25}$$

olduğu görülür. (2.24)'te birinci terim için yapılan işlemler diğer terimlere de uygulanırsa, (2.25) denklemi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi \left((P_4 u)^{iv} - (P_3 u)''' + (P_2 u)'' - (P_1 u)' + P_0 u \right) dx \\
+ \left[(P_4 u)''' - (P_3 u)'' + (P_2 u)' - (P_1 u) \right] \phi \Big|_0^1 = \int_0^1 f u dx
\end{aligned} \tag{2.26}$$

biçiminde elde edilir. Adjoint'i tanımlayan diferansiyel denklem, (2.24) 'ün sol tarafındaki ϕ 'nin katsayısı sıfıra eşitlenerek,

$$(P_4 u)^{iv} - (P_3 u)''' + (P_2 u)'' - (P_1 u)' + P_0 u = 0 \tag{2.27}$$

şeklinde bulunur. Sonuç denklem, (2.22)'ye karşılık gelen adjoint homojen diferansiyel denklemdir. (2.22)'nin self-adjoint olması için, (2.27) homojen denkleminin (2.22) ile aynı olması gerekir. Buna göre, (2.27)'deki türevler açılarak tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
P_4 u^{iv} + (4P_4' - P_3) u''' + (6P_4'' - 3P_3' + P_2) u'' + (4P_4''' - 3P_3'' + 2P_2' - P_1) u' \\
+ (P_4^{iv} - P_3''' + P_2'' - P_1' + P_0) u = 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

elde edilir. Burada (2.28)'in homojen denklemi (2.22) ile aynı olması gerektiğinden,

$$\begin{aligned}
4P_4' - P_3 &= P_3, & 6P_4'' - 3P_3' + P_2 &= P_2, & 4P_4''' - 3P_3'' + 2P_2' - P_1 &= P_1 \\
P_4^{iv} - P_3''' + P_2'' - P_1' + P_0 &= P_0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Böylece,

$$P_3 = 2P_4', \quad P_3' = 2P_4'', \quad P_1 = 2P_4''', \quad P_0 = P_4^{iv} \tag{2.30}$$

olduğu görülür (Nayfeh, 1993).

2.2.1.1. Self- Adjointlik Şartı

Self-adjointlik, bir lineer diferansiyel operatörün biçimsel eşleniği (adjoint) ile kendisinin eşit olduğu durumu ifade eder. Bu özellik, diferansiyel denklemler ve matematiksel fizik problemlerinde kritik bir öneme sahiptir.

Tanım: $a_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) fonksiyonları yeter derecede türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$L = \sum_{k=0}^n a_{n-k}(x) \frac{d^k}{dx^k} = a_0(x) \frac{d^k}{dx^k} + a_1(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x) \quad (2.31)$$

lineer diferansiyel operatörünün formal adjointi (biçimsel eşleniği) L^* , uygun bir φ fonksiyonu

$$L\varphi = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} [a_{n-k}(x)\varphi(x)] \quad (2.32)$$

şeklinde elde edilir. Eğer L , bir H hilbert uzayının tümü üzerinde tanımlı ise, bu takdirde

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle \quad \forall u, v \in H \quad (2.33)$$

bağlantısı sağlanır. Burada, L^* adjoint operatörünün lineer olduğu gösterilebilir. Genelde L ve L^* operatörlerinin tanım kümesi farklıdır. Örnek verilecek olunursa, dördüncü mertebeden bir diferansiyel denklemin çözülebilirlik şartını göz önüne alalım:

$X_n(x)$ ve $u(x)$ olmak üzere, $[0,1]$ aralığında sürekli türevlenebilir iki fonksiyon olsun. Genel olarak L_i operatörünün adjoint'i L_i^*

$$\langle L_i[X_n], u \rangle = \langle u, L_i^*[X_n] \rangle \quad (2.34)$$

eşitliği ile ifade edilir. Buna göre, iç çarpım

$$\langle [X_n], u \rangle = \int_0^1 X_n(x)u(x)dx \quad (2.35)$$

biçiminde tanımlanır. $[0,1]$ aralığında dördüncü mertebeden sürekli türevlere sahip bir sistemin çözülebilirlik şartı göz önüne alınırsa, p_0, p_1, p_2, p_3 ve p_4 , $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$L_i[X_n] = p_4 X_n^{iv}(x) + p_3 X_n'''(x) + p_2 X_n''(x) + p_1 X_n'(x) + p_0 X_n(x) \quad (2.36)$$

elde edilir. Adjoint problemini belirlemek için (1.34) denkleminin sol tarafı

$$\int_0^1 u(x) L_i(X_n) dx = \int_0^1 \left[u p_4 X_n^{iv}(x) + u p_3 X_n'''(x) + u p_2 X_n''(x) + u p_1 X_n'(x) + u p_0 X_n(x) \right] dx \quad (2.37)$$

biçiminde yazılabilir. Sonuç denklemde, türevleri X_n 'den u ' ya aktarmak için kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x) L_i(X_n) dx = & \int_0^1 X_n \left(p_4 u^{iv} - (p_3 u)''' + (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u \right) dx + \\ & + \{ p_4 u X_n''' - [(p_4 u)' - p_3 u] X_n'' + [(p_4 u)'' - (p_3 u)' + p_2 u] X_n' \\ & - [(p_4 u)''' - (p_3 u)'' + (p_2 u)' - p_1 u] X_n \}_0^1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

olarak indirgenir. Burada, $L^*(u)$

$$L^*(u) = \left(p_4 u^{iv} - (p_3 u)''' + (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u \right) \quad (2.39)$$

biçiminde tanımlanır. Bu ise, L operatörüne karşılık gelen adjoint operatördür. (2.38) denklemi, Green özdeşliği şeklinde yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[u L_i(X_n) - X_n L^*(u) \right] dx = & \left\{ u p_4 X_n''' - [u' p_4 + u(p_4' - p_3)] X_n'' + \right. \\ & + \left[u'' p_4 + u'(2p_4' - p_3) + u(p_4'' - p_3' + p_2) \right] X_n' \\ & \left. - [u''' p_4 + u''(3p_4' - p_3) + u'(3p_4'' - 2p_3' + p_2) + u(p_4''' - p_3'' + p_2' - p_1)] X_n \right\}_0^1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

bulunur. Böylece, L_i ve L_i^* operatörlerinin birbirinin adjointi olduğu kolayca görülebilir.

$L_i[X_n] = 0$ diferansiyel denkleminin adjointi olan $L_i^*[u] = 0$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Self-adjointlik şartı için $L_i = L_i^*$ şartının sağlanması gereklidir. Bunun için,

$$p_3 = 2p_4', \quad p_3' = 2p_4'', \quad p_1 = 2p_4''' - \frac{3}{2}p_3''' + p_2' = p_2' - p_4''' \quad (2.41)$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir. Böylece, L_i operatörünün self-adjoint olacağı sonucuna varılır (Nayfeh, 1973; Rao, 2007).

2.3. Ağırlık Fonksiyonlarıyla Nümerik Yöntemler

Matematiksel modelleme ve mühendislik analizlerinde diferansiyel denklemlerin çözülmesi, genellikle analitik yöntemlerle mümkün olmayacak kadar karmaşıktır. Bu nedenle, yaklaşık çözümler elde etmek için nümerik metotlar yaygın olarak kullanılır. Nümerik analizde doğruluğu artırmak ve çözüm süreçlerini iyileştirmek amacıyla ağırlık tipi fonksiyonlar kullanılır. Bu fonksiyonlar, çözüm fonksiyonlarının belirli bir kriter altında optimize edilmesini sağlayarak çözüm hassasiyetini artırır (Reddy, 1993). Bir diferansiyel denklemin ağırlıklı integral formu her zaman yazılabilir, bu ise denklemin lineer olup olmamasına bakılmaksızın geçerlidir. Eğer denklemler ikinci dereceden veya daha yüksekse bu yöntem hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sistemlere uygulanabilir ve çeşitli ağırlık fonksiyonları kullanılarak denklemin hatalarını minimize eder (Fletcher, 1991).

Ağırlık fonksiyonları, kırılma mekaniği ve yapısal analizler kapsamında, çatlakların yol açtığı gerilme yoğunlaşmaları ile yerel deformasyonların daha hassas biçimde incelenmesinde kritik bir role sahiptir. Bu fonksiyonlar, çatlağın geometrisi ve yükleme koşullarına bağlı olarak, çatlak ucundaki veya yakınındaki gerilme dağılımının belirlenmesini sağlar. Özellikle sınırlı kalınlıkta veya yarı-sonsuz plakalarda meydana gelen çatlaklar gibi karmaşık problemlerde, ağırlık fonksiyonları çatlak davranışının detaylı bir şekilde incelenmesinde güçlü bir araç olarak öne çıkar (Anderson, 2005). Ek olarak, ağırlık fonksiyonları, çatlağa yakın bölgelerdeki gerilme yoğunluğunu hesaplamayı ve yükleme durumlarının etkisini belirlemeyi sağlar. Bu yöntem, özellikle çatlak ilerlemesi veya hasar tahmini yapılması gereken durumlarda oldukça önemlidir. Bu ise, çatlakların büyüme oranları ve kritik yük seviyeleri hakkında bilgi sağlayarak, yapıların güvenliğini değerlendirmede kullanılır (Anderson, 2005).

Ağırlık fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar arasında Galerkin yöntemi, Petrov-Galerkin yöntemi ve ağırlıklı rezidü yöntemleri öne çıkmaktadır. Bu yöntemler, çözüm sürecinde kullanılan fonksiyonlara belirli ağırlıklandırma stratejilerinin uygulanması yoluyla doğruluğun ve hesaplama verimliliğinin artırılmasını amaçlamaktadır. Özellikle sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ve sonlu farklar yöntemi (FDM) gibi tekniklerde, ağırlık fonksiyonları diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü daha kararlı ve hassas hale getirmek için kullanılmaktadır (Reddy, 1993; Rao, 2007). Ağırlıklı rezidü yöntemi ise herhangi bir denklemin ağırlıklı integral formunu yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılabilir. Bu form, problemin belirli sınır koşullarını içermediğinden, yaklaşık çözümün hem doğal hem de zorunlu sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilmesi gerekir. Ayrıca, ağırlık fonksiyonları yaklaşık fonksiyonlardan bağımsız olarak seçilebilir, ancak doğrusal bağımsız olmaları gerekir. Böylece elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülebilir.

Diferansiyel denklemin tam olarak sağlanamayan kısımları yani rezidüler için seçilen ağırlık fonksiyonlarıyla ağırlıklandırılarak toplam hata minimize edilir. Böylece, çözümün ortalama bir doğrulukla sistemin davranışını modellemesi sağlanır. Ağırlıklı rezidüler yöntemi bu bakımdan, karmaşık mühendislik problemlerinde doğrusal olmayan veya yüksek dereceli diferansiyel denklemleri yaklaşık olarak çözmek için önemli bir araçtır. Bu yaklaşım, mühendislik ve fizik gibi alanlarda, özellikle karmaşık sınır koşulları ve yüksek mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerde oldukça kullanışlıdır. Bu sayede ağırlıklı rezidüler yöntemi, Rayleigh-Ritz, Galerkin, Petrov Galerkin, kolokasyon ve en küçük kareler gibi alt yaklaşımları kapsayan geniş bir çözüm metodolojisi sunar ve mühendislik problemlerin çözümünde sıkça kullanılır (Reddy, 1993).

2.3.1. Ağırlık Fonksiyonlarına Genel Bakış

Varyasyonel bir yöntemde, diferansiyel denklem eşdeğer bir ağırlıklı-integral forma dönüştürülür ve ardından yaklaşık çözümün, uygun şekilde seçilmiş fonksiyonların ($\sum c_j \phi_j$) lineer bir kombinasyonu olduğu varsayılır. Bilinmeyen katsayılar (c_j) çözülür. Bu katsayılar, integral ifadesinin diferansiyel denkleme denk olacak şekilde tatmin edilmesini sağlayacak şekilde belirlenir. Bu tür varyasyonel yöntemler, Rayleigh-Ritz, Galerkin ve en küçük kareler yöntemleri gibi tekniklerle temsil edilir. Her biri integral formu, ağırlık fonksiyonları ve yaklaşım fonksiyonlarının seçiminde farklılık gösterir. Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEM), geleneksel varyasyonel yöntemlerin dezavantajlarını aşarak çözüm alanını alt bölgelere ayırarak yaklaşık çözüm fonksiyonları sağlar. Bu yöntem, üç temel özelliği nedeniyle diğer yöntemlere göre daha üstün görülmektedir. Birincisi, problem bölgesi geometrik olarak karmaşık olabilir ve bu alan, daha basit alt bölgelere (sonlu elemanlara) ayrılabilir. İkincisi, her eleman içinde fonksiyonlar cebirsel polinomların kombinasyonları olarak ifade edilebilir. Üçüncüsü, cebirsel denklemler, bilinmeyen katsayılar elde edilerek çözülür ve bu katsayılar genellikle belirli noktalarda (düğüm noktalarında) hesaplanır (Reddy 1993).

Sonlu elemanlar yönteminde, yaklaşık çözümün u_j katsayıları arasında cebirsel ilişkiler geliştirmek için,

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \phi_j \quad (2.42)$$

biçiminde bir ifadeden yararlanılır. Burada u_j , belirli bir diferansiyel denklemin çözümünü temsil eder. Diferansiyel denkleme eşdeğer integral ifadesinin tercih edilmesi, bu ifadenin (2.42) denkleminde uygulanması durumunda gerekli sayıda lineer bağımsız cebirsel denklemin her koşulda sağlanamaması gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Bilinmeyen u_j katsayıları için bağımsız cebirsel denklemlerin istenen sayıda olması, bilinmeyen sayısının n olması ile sağlanır. Bu amaçla, denklemin hata terimlerinin ağırlıklı integralleri sıfır yapılır (Reddy 1993). Örneğin,

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+u=0 \quad (0 < x < 1) \quad (2.43)$$

$$u(0)=1 \quad \left(x\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1}=0 \quad (2.44)$$

ile verilen diferansiyel denklemin $(0,1)$ aralığında

$$u \approx U_N \equiv \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x) + \varphi_0(x) \quad (2.45)$$

biçimindeki bir yaklaşık çözümünü bulalım. Burada c_j belirlenecek katsayılar, $\varphi_j(x)$ ve $\varphi_0(x)$ önceden seçilmiş fonksiyonlardır. Böylece, problemin belirtilen sınır koşulları N-parametrelili yaklaşık çözüm U_N tarafından karşılanır. $\varphi_1(x) = x^2 - 2x$, $\varphi_2(x) = x^3 - 3x$, $\varphi_0(x) = 1$ olmak üzere,

$$u \approx U_N \equiv c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x) + 1 \quad (2.46)$$

elde edilir. c_1 ve c_2 sabitleri (2.45) yaklaşık çözümünün (2.43) eşitliğini sağlaması için belirlenmelidir. Bu takdirde, (2.46) ifadesi (2.43)' ya yerleştirilirse,

$$-\frac{dU_N}{dx} - x\frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N = -2c_1(x-1) - 3c_2(x^2-1) - 2c_1x - 6c_2x^2 + c_1(x^2-2x) + c_2(x^3-3x) + 1 \quad (2.47)$$

yazılabilir. Bu ifadenin, x 'in herhangi bir değeri için sıfır olması gerektiğinden, x 'in kuvvetlerinin katsayıları sıfır olmalıdır (Reddy, 1993). Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} 1 + 2c_1 + 3c_2 &= 0 \\ -(6c_1 + 3c_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$c_1 - 9c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

elde edilir ki bu bağıntılar tutarsızdır, dolayısıyla bu denklemlerin bir çözümü yoktur. Diğer taraftan, R rezidü ve ω bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere, ağırlıklı integral anlamında (2.43) diferansiyel denklemini sağlayacak şekilde, U_N yaklaşık çözümü

$$\int_0^1 \omega R dx = 0 \quad (2.49)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada, rezidü

$$R = -\frac{dU_N}{dx} - x \frac{d^2 U_N}{dx^2} + U_N \quad (2.50)$$

ile verilir. (2.49) denkleminde, ω için lineer bağımsız denklemler elde edilir. Örneğin, $\omega = 1$ ve $\omega = x$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 1.R dx &= (1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{2}(-6c_1 - 3c_2) + \frac{1}{3}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{4}c_2 \\ \int_0^1 x.R dx &= \frac{1}{2}(1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{3}(-6c_1 - 3c_2) + \frac{1}{4}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{5}c_2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

yazılabilir. Böylece keyfi sabitlerin lineer bağımsız iki denklemi

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}c_1 + \frac{5}{4}c_2 &= 1 \\ \frac{3}{4}c_1 + \frac{31}{20}c_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

biçiminde elde edilir ($c_1 = \frac{222}{23}$ ve $c_2 = -\frac{100}{23}$). Bu nedenle, (2.49) tipindeki integral ifadeler, bilinmeyen katsayılar kadar cebirsel denklemler elde etme anlamında yaklaşık çözümler sağlar. Varyasyonel bir yöntem, yaklaşık çözümlerin $u \approx \sum c_j \varphi_j + \varphi_0$ türünde arandığı ve katsayıların c_j olarak belirlendiği bir yöntemdir. Varyasyonel yöntemler, ağırlık fonksiyonu ω ve kullanılan integral ifadeye göre farklılık gösterir (Reddy 1993).

2.3.2. Konuma Bağlı Dinamik Problemler ve Ağırlık Fonksiyonunun Bulunması

Konuma bağlı dinamik problemler, sistemin hareket denklemlerinde yer alan kuvvetlerin yalnızca zamana değil, aynı zamanda konuma bağlı olarak değiştiği durumları ifade eder. Bu tür problemler, doğrusal olmayan dinamik sistemlerin temelini oluşturur ve mühendislik, fizik, matematik ve malzeme bilimi gibi birçok bilim dalında önemli bir araştırma alanı olarak öne çıkar. Literatürde, konuma bağlı dinamik denklemler, titreşim analizi, sarkaç sistemleri, yay-kütle modelleri, elastik çubuk ve kiriş teorileri, robotik mekanizmalar, havacılık-yapısal titreşim etkileşimleri ve jeofiziksel dalga hareketleri gibi birçok alanda sistemlerin karmaşık davranışlarını açıklamak amacıyla yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu alandaki çalışmalar, sistemlerin doğrusal olmayan tepki özelliklerini, kaotik davranışlarını, enerji aktarım mekanizmalarını ve stabilite koşullarını anlamada önemli katkılar sunmuştur. Özellikle mühendislik literatüründe, konuma bağlı dinamik analizler sayesinde yapıların titreşim kontrolü, sönümleme stratejileri ve tasarım optimizasyonu konularında yenilikçi yöntemler geliştirilmiştir.

Dinamik problemler genellikle ikinci veya daha yüksek mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklemler ile modellenir. Bu denklemler, sistemin kütle, sönüm ve rijitlik özellikleri ile konuma bağlı dış kuvvetleri de içerecek şekilde tanımlanır. Ancak bu tür denklemler çoğu zaman analitik olarak çözülemediği için, çözüm sürecinde pertürbasyon yöntemi gibi yarı analitik yöntemler ya da Runge–Kutta, Newmark– β , Hilber–Hughes–Taylor, finite element veya finite difference yaklaşımları gibi sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemler, sistemin hem zamana hem konuma bağlı karmaşık dinamik davranışlarının daha doğru şekilde analiz edilmesine olanak sağlamaktadır.

Dördüncü mertebeden diferansiyel denklemler, karmaşık ve elastik sistemlerin dinamik davranışlarını modellemek ve analiz etmek için kullanılan temel matematiksel araçlardır. Bu denklemler, mühendislikte özellikle titreşim, eğilme (bükülme) ve stabilite analizleri gibi konularda, ayrıca elastik yapı elemanlarının davranışı ve radyasyon problemleri gibi ileri düzey fiziksel sistemlerin incelenmesinde önemli bir rol oynar. Bu denklemler, sistemin daha karmaşık davranışlarını ve yüksek dereceli türevlerini içerdikleri için daha detaylı modelleme yapmaya olanak tanır. Özellikle, kablolar ve teller gibi yapıların mekanik modellemesi sırasında doğrusal olmayan titreşim analizleri ve gerilim etkileri bu denklemlerle ifade edilir. Örneğin, kabloların titreşim analizinde ve elastik plakaların bükülme teorisinde bu denklemler, yapısal dayanıklılığı ve performansı optimize etmek için kullanılan matematiksel temel taşlarındandır. Bu bağlamda,

gerilime maruz kalan teller ve kablolar gibi sistemlerin incelenmesi hem teorik hem de pratik yaklaşımlarla ele alınır. Rüzgâr basıncı, elektromanyetik kuvvetler veya aşırı yüklenme gibi etkiler altında ortaya çıkan büyük deformasyonlar, özellikle doğrusal olmayan davranışlarıyla dikkate alınır (Nayfeh ve Pai, 2004). Dördüncü mertebeden diferansiyel denklemlerin çeşitli uygulama alanları ve örnek problemler verilecek olunursa; inşaat mühendisliğinde betonarme veya çelik plakaların analizinde öne çıkan elastik plak teorisinde $D\Delta^4\omega = q(x, y)$ formunda, biyomekanik ve akışkanlar mekaniğinde, mikro ölçekte akışkan taşınımı ve kan akışı modellemeleri gibi kullanım alanları olan Stokes akışkan problemi ($\Delta^4\varphi = 0$), uçak gövdelerinin yapısal analizi ve uzay araçlarının ince duvarlı yapılarının tasarımı için önem arz eden kabuk teorilerinde, ince kabukların bükülme ve kararlılık problemleri verilebilir. Ayrıca

$$EI \frac{d^4\omega(x)}{dx^4} + P \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} = 0 \quad (2.53)$$

denklemleri ile ifade edilen, burkulma problemleri bu tip diferansiyel denklemlere örnektir. Bu denklemler, yüksek yapılar, köprüler, boru hatları gibi sistemlerin kararlılığı için kullanılır.

Elastik yapıların analizinde kullanılan iki temel teori olan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisi, literatürde karşılaşılan birçok dördüncü mertebeden problem için uygun matematiksel modeller sunar. Her iki teori, kirişlerin eğilmesi, titreşim analizi ve yapısal dayanım gibi konularda farklı varsayımlar ve doğruluk dereceleriyle çözümler üretir. Kirişlerin eğilme analizi (Euler-Bernoulli), kalın kirişlerin titreşim analizi (Timoshenko) ve kiriş teorilerine dayalı olarak, elastik plakların (Kirchhoff-Love teorisi gibi) analizi de dördüncü mertebeden diferansiyel denklemleri içerir (Szilard, 2004).

Değişkenlerin ayrılması yöntemi, tüm sınır koşullarını sağlayan iki lineer bağımsız fonksiyon kümesi $X_n(x)$ ve $Y_n(t)$ seçimine indirger. Tek açıklıklı, düzgün kesitli bir kirişin serbest titreşimleri için, Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre uzaysal kısım,

$$\frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} - \frac{m\omega^2}{EI} X_n(x) = 0 \quad (2.54)$$

diferansiyel denklemi ile yazılır. Burada m birim boy başına kütleyi, E elastisite modülünü ve I atalet momentini göstermektedir. Daha sonra

$$\lambda^4 = \frac{m\omega^2}{EI} \quad (2.55)$$

sembolü ile ifade edildiğinde (2.55) denklemi

$$X_n^{iv}(x) - \lambda^4 X_n(x) = 0 \quad (2.56)$$

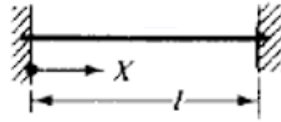
şeklinde yazılır. Burada $X_n(x)$ şekil fonksiyonu olmak üzere, (2.56)'ün genel çözümü

$$X_n(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x + c_3 \sinh \lambda x + c_4 \cosh \lambda x \quad (2.57)$$

olarak bulunur. Denklemin sabitleri c_1, c_2, c_3 ve c_4 sınır koşullarından belirlenirken, λ karakteristik denklemin bir köküdür. Bu denklem homojen denklemlerinin determinantlarının sıfıra eşitlenmesi ile türetilir. Titreşimin m 'inci öz fonksiyonları $X_m(x)$ ve λ_m (2.57)'de yazıldığında

$$X_m(x) = c_1 \sin \frac{\lambda_m x}{l} + c_2 \cos \frac{\lambda_m x}{l} + c_3 \sinh \frac{\lambda_m x}{l} + c_4 \cosh \frac{\lambda_m x}{l} \quad (2.58)$$

elde edilir. Çeşitli sınır koşulları için bu öz fonksiyonların ifadeleri ve bazı örnekleri verilecektir.



Şekil 2.2 İki ucu ankastre mesnetli kiriş

Şekil 2.2. için sınır koşulları

$$\begin{aligned} X(0) &= X'(0) = 0 \\ X(l) &= X'(l) = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

şeklindedir. Şekil 2.2'nin titreşim denklemi (2.55) denklemi olduğundan denklemin genel çözümü (2.58) olarak alınır. (2.58) denklemini (2.59) sınır koşullarını yerleştirdiğimizde

$$c_1 = -\frac{\lambda}{l} c_3 \quad \text{ve} \quad c_2 = -c_4 \quad (2.60)$$

bulunur. Sınır koşullarına bağlı olarak türettiğimiz frekans denklemi

$$\cos \lambda \cosh \lambda = l \quad (2.61)$$

elde edilir. Benzer biçimde,



Şekil 2.3 Basit mesnetli kiriş

Şekil 2.3 'ün sınır koşulları

$$\begin{aligned} X(0) &= X''(0) = 0 \\ X(l) &= X''(l) = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

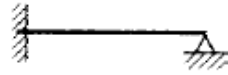
şeklinde alınır ve titreşim denklemi (2.55) denklemi olduğundan denklemin genel çözümü (2.62) sınır koşullarını yerleştirdiğimizde

$$c_2 + c_4 = 0, \quad -c_2 + c_4 = 0, \quad c_3 = 0, \quad 2c_1 \sin \lambda = 0 \quad (2.63)$$

bulunur. Sınır koşullarına bağlı olarak türetilen frekans denklemi

$$\sin \lambda = 0 \quad (2.64)$$

biçimindedir. Bir başka örnek daha verilecek olursa,



Şekil 2.4 Ankastre-sabit mesnetli kiriş

Şekil (2.4)'ün sınır koşulları

$$\begin{aligned} X(0) &= X'(0) = 0 \\ X(l) &= X''(l) = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

şeklindedir. (2.58) denklemi, (2.65) sınır koşullarında yerine koyulursa,

$$c_2 = -c_4, \quad c_1 = -c_3, \quad \text{ve} \quad c_1 = c_2 \cdot \left(\frac{\cosh \lambda - \cos \lambda}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \right) \quad (2.66)$$

bulunur. Sınır koşullarına bağlı olarak türetilen frekans denklemi

$$\tan \lambda = \tanh \lambda \quad (2.67)$$

biçimindedir (Szilard, 2004).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

GENEL TİTREŞİM MODELİ

Sürekli ortamlar, bir ve iki boyutlu durumlar için farklı modellerle incelenebilir. Örneğin, bir boyutlu modeller kablo, çubuk ve kirişlerin mekanik davranışlarını incelemek için tercih edilirken, iki boyutlu modeller plaklar ve zarlar gibi yapıların gerilme ve deformasyon analizlerinde önemli bir rol oynar. Bu tür modeller, farklı yükleme koşulları ve malzeme özelliklerine bağlı olarak çeşitlenebilir ve geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu bağlamda, Bernoulli kiriş modeli, bir boyutlu sürekli ortamların analizi için yaygın olarak kullanılan bir yaklaşımdır. Göz önüne aldığımız matematiksel modelin denklemi tek bir diferansiyel denklemden oluştuğundan, bu model Euler-Bernoulli kiriş teorisine karşılık gelmektedir. Ancak, çeşitli problemlerin doğasına bağlı olarak, tek bir denklem yerine farklı terimlere ve bu terimlerin çeşitli biçimlerine sahip alternatif denklemler ortaya çıkabilir. Burada önerilen model, bu tür değişken koşulları kapsayacak şekilde oluşturulmuş olup, bir boyutlu sürekli ortamların analizine uygun bir çerçeve sunmaktadır.

3.1. Genel Model

İç ve dış harmonik zorlamaya sahip, eksenel yük ve kuvvet altındaki kirişin hareketini analiz edebilmek için oluşturulan genel lineer Euler-Bernoulli kiriş modeli ve sınır şartları

$$M[w] + K[w] + \varepsilon \{C[\dot{w}] + F[w]\cos\Omega_1 t - f(x,t)\cos\Omega_2 t\} = 0 \quad (3.1)$$

$$B_{11}(w)=0 \quad B_{12}(w)=0 \quad (3.2a)$$

$$B_{21}(w)=0 \quad B_{22}(w)=0 \quad (3.2b)$$

biçiminde verilir (Sınır & Sınır, 2011). Model, bir boyutlu sürekli ortamların dinamiğine karşılık gelir. Genel modelde, $w(x,t)$ sürekli ortam deplasmanına karşılık gelmektedir. M kütleyle bağlı lineer diferansiyel operatörü, C operatörü sönüm terimini, K operatörü aynı zamanda yapının rijit elamanını, F operatörü parametrik zorlama terimini, $f(x,t)$ dış zorlamayı, Ω_i zorlama frekansını temsil eder. ε boyutsuz çok küçük bir parametredir. Burada nokta türev zamana (t) göre türevi ifade eder. x ve t sırasıyla konum ve zaman değişkenleridir. M, K operatörleri keyfi lineer diferansiyel operatörler ve konuma bağlı self adjoint operatörlerdir. B_{ij} 'ler ise sınır şartlarıdır.

Burada i sınır şartı konumunu (mesnet sayısını), j sınır şartı sayısını belirtir. Örneğin $i = 1$ başlangıçtaki mesneti, $i = 2$ bitişteki mesneti belirtir. Sınır şartları ikinci mertebeden olduğunda $j = 1$ olur. Böylece, sınır şartları B_{11} ve B_{21} ’den oluşur. Dördüncü mertebeden olduğunda ise, $j = 2$ olacağından sınır şartları B_{11}, B_{12}, B_{21} ve B_{22} ’den şeklinde ortaya çıkar. Yapısal eleman olarak kirişlerin matematiksel modeli dikkate alındığında, en yüksek mertebeden türev olarak dördüncü mertebeden türev ihtiva edeceğinden lineer, homojen ve self-adjoint diferansiyel operatörün genel formu

$$L_I[w] = P_0(x)w + P_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} + P_2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_3(x)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + P_4(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (3.3)$$

biçiminde yazılır. Bu lineer operatörler çubuk, tel ve kablo gibi bir boyutlu yapısal elemanların titreşimini analiz etmek için de kullanılır. Örneğin çubuk veya tel şeklindeki yapılar için P_3 ve P_4 ortadan kalkması gerekmektedir.

3.1.1. Çok Zaman Ölçekli Metot İle Çözüm

Bu bölümde, pertürbasyon tekniklerinden birisi olan çok zaman ölçekli metot direkt olarak (3.1) denkleminde uygulanır. Kullanılan metot denklemdaki seküler terimlerin hesaplamalarda otomatik olarak elimine edilmesini sağladığı için avantajlı bir yöntemdir. Burada $t = T_0$ hızlı zaman ölçeğini, $\varepsilon t = T_1$ yavaş zaman ölçeğini temsil etmek üzere, çözüm fonksiyonunun

$$w(x, t; \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \dots \quad (3.4)$$

formunda olduğu kabul edilir. Zamana bağlı türevler için pertürbatif seri açılımı ise

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (3.6)$$

biçiminde verilir. (3.4) ve (3.5-3.6) denklemleri (3.1) genel model ve sınır şartlarında yerine yazılırsa,

$$M \left[(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) \right] + K [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots] + \varepsilon \left\{ C [(D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots)] + F [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots] (\cos \Omega_1 t) - f(x)(\cos \Omega_2 t) \right\} = 0 \quad (3.7)$$

$$B_{ij}(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) = 0 \quad (3.8)$$

bulunur. Sonuç denklem ε mertebesine göre ayrıştırılırsa,

$$O(1): \quad M[D_0^2 w_0] + K[w_0] = 0 \quad (3.9)$$

$$B_{ij}(w_0) = 0 \quad (3.10)$$

$$O(\varepsilon): \quad M[D_0^2 w_1] + K[w_1] = -2M[D_0 D_1 w_0] - C[D_0 w_0] - F[w_0] \cos \Omega_1 T_0 + f(x) \cos \Omega_2 T_0 \quad (3.11)$$

$$B_{ij}(w_1) = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. İlk mertebedeki (3.7) diferansiyel denkleminin çözümünün

$$w_0 = [A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}_n(T_1)e^{-i\omega_n T_0}]X_n(x); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

formunda olduğunu kabul edelim. Burada, A_n ve $\bar{A}_n$ sırasıyla kompleks genliği ve onun eşleniğini ifade etmektedir. (3.13) eşitliği birinci mertebedeki (3.9) denkleminin çözümü ise, bu denklemi sağlamalıdır. Bu takdirde, (3.13) ile verilen w_0 çözümü (3.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$M[-A_n(T_1)\omega_n^2 e^{i\omega_n T_0} - \bar{A}_n(T_1)\omega_n^2 e^{-i\omega_n T_0}]X_n(x) + K[(A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}_n(T_1)e^{-i\omega_n T_0})X_n(x)] = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılsa,

$$[A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} + c.c.](-\omega_n^2 M[X_n(x)] + K[X_n(x)]) = 0 \quad (3.15)$$

sonuç denkleminde ulaşılır. X_n şekil fonksiyonunun

$$K[X_n] - \omega_n^2 M[X_n] = 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

$$B_{ij}(X_n) = 0 \quad (3.17)$$

(3.16) denklemini ve sınır şartlarını sağladığı görülür. Elde edilen bu denklem bir öz değer-öz fonksiyon problemi olup, burada ω_n öz değerleri, X_n ise öz fonksiyonları temsil eder. Bu

takdirde, (3.16) denkleminde ω_n ve X_n bulunabilir. ε mertebesindeki çözüm için (3.13) çözümü (3.11) denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} M[D_0^2 w_1] + K[w_1] = & \left[-2i\omega_n D_1 A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} + 2i\omega_n D_1 \bar{A}_n(T_1) e^{-i\omega_n T_0} \right] M[X_n(x)] \\ & - \left[i\omega_n A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} - i\omega_n \bar{A}_n(T_1) e^{-i\omega_n T_0} \right] C[X_n(x)] \\ & - \frac{1}{2} F[X_n] \left(A_n e^{i(\omega_n + \Omega_1)T_0} + A_n e^{i(\omega_n - \Omega_1)T_0} + \bar{A}_n e^{-i(\omega_n - \Omega_1)T_0} + \bar{A}_n e^{-i(\omega_n + \Omega_1)T_0} \right) \\ & - \frac{f(x)}{2} e^{i\Omega_2 T_0} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$B_{ij}(w_1) = 0 \quad (3.19)$$

elde edilir. Bu takdirde, (3.18) denkleminin çözümü

$$w_1 = \varphi_n(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + \bar{\varphi}_n(x, T_1) e^{-i\omega_n T_0} + W(x, T_0, T_1) \quad (3.20)$$

formunda kabul edilebilir. Burada ilk terim seküler terimle, üçüncü terim ise seküler olmayan terimle ilgilidir. Zorlama ile ilgili terim, frekansa bağlı olarak ya seküler ya da seküler olmayan terimdir. (3.18) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} M[D_0^2 w_1] + K[w_1] = & \left[-2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)] \right] e^{i\omega_n T_0} + \\ & - \frac{1}{2} F[X_n] \left(A_n e^{i(\omega_n + \Omega_1)T_0} + A_n e^{i(\omega_n - \Omega_1)T_0} \right) - \frac{f(x)}{2} e^{i\Omega_2 T_0} + k.e. + S.O.T \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada *k.e.* önceki terimlerin kompleks eşleniklerini ve *S.O.T.* seküler olmayan terimleri göstermektedir. Ayrıca, Ω_1 ve Ω_2 zorlama frekanslarının farklı durumları için farklı titreşim yapıları ayrı ayrı incelenecektir.

3.1.2. Lineer Denklemin Çözümü

1 mertebesindeki (3.16) denklemi değişken katsayılı, homojen ve lineer bir diferansiyel denklemdir. Pertürbatif çözümündeki ilk aşamalardan birisi (3.16)'deki denklemin en genel formu olan değişken katsayılı ve dördüncü mertebeden olan denklemi çözmektir. Dolayısıyla Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre genel çözüm için çeşitli nümerik metotlar kullanılabilir. Bunlar sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ya da ağırlık tipi fonksiyonlarla çözüm gibi nümerik metotlardır. Bu çalışmada özellikle sonlu elemanlar yönteminin temeli olduğu ve birden fazla metot içerdiğinden ağırlık tipi fonksiyonlarla çözümü uygulayacağız. Ağırlık tipi fonksiyonlarla

çözüm için dördüncü mertebeden ağırlık tipi bir fonksiyon tespiti gereklidir. Ağırlık çözüm fonksiyonu olarak en yüksek mertebeden terim ile mertebesiz olan terim birlikte kullanılarak verilir (Fletcher, 1991).

(3.16) tipindeki denklemler için verilen ağırlık fonksiyonlarının genel hali

$$X_n \approx \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i \quad (3.22)$$

biçimindedir. Burada $\Re[\cdot]$, uygun sınır koşulları altında self-adjoint bir konumsal rijitlik operatörüdür. k_0 yay katsayısını, $\Im[X_n]=1$ seçimi de kütle ağırlığının birim alınmasını, dolayısıyla deneme fonksiyonlarının bu ağırlık altında normalize edilmesini ifade eder. Bu operatörler

$$\Re[X_n] = \frac{\partial^4 X_n}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} + k_0 X_n \quad (3.23)$$

$$\Im[X_n] = 1 \quad (3.24)$$

biçiminde göz önüne alınır ve bu ifadeler (3.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$R = \Re \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] - \omega_n^2 \Im \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] \quad (3.25)$$

rezidü elde edilir. (3.23), (3.24) denklemleri ile (3.25) denklemi birlikte göz önüne alınırsa,

$$R = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] + P \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] + k_0 \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] - \omega_n^2 \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] \quad (3.26)$$

haline gelir. Ağırlık fonksiyonundaki amaç c_i katsayılarını bulmaktır. Farklı yöntemlere göre çözümler incelenirse,

Petrov-Galerkin metodu göre, ağırlık fonksiyonları

$$\psi_i = x^{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.27)$$

biçiminde kabul edilsin. Daha sonra (3.22) ifadesi (3.25)'deki her bir fonksiyonla ayrı ayrı çarpılır ve tanım aralığı $[0,1]$ olmak üzere integre edilirse,

$$\int_0^1 x^{i-1} \left(\Re \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] - \omega_n^2 \Im \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] \right) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

olduğu görülür. (3.28) eşitliklerinin her birinden bir denklem bulunur ve c_i katsayıları elde edilir.

Galerkin metodu ile çözülmek istenirse $\psi_i = \varphi_i$ alınabilir. Dolayısıyla

$$\int_0^1 \varphi_i \left(\Re \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] - \omega_n^2 \Im \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] \right) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

olduğundan, katsayılar bu denklemlerden hesaplanır.

En küçük kareler metoduna göre çözülecek olursa, (3.25)'in sol tarafına

$$R = \Re \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] - \omega_n^2 \Im \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right] \quad (3.30)$$

biçiminde rezidü eklenir. Ağırlık fonksiyonları $\psi_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ alınarak çözülür. Burada ağırlık fonksiyonları R 'nin c_i 'lere göre türevleridir. Buna göre, ağırlık fonksiyonları

$$\psi_i = \frac{\partial R}{\partial c_i} = \Re [\varphi_i(x)] - \omega^2 \Im [\varphi_i(x)] \quad (3.31)$$

şeklinde dir. Buna göre çözüm,

$$\int_0^1 \left(\Re [\varphi_i(x)] - \omega^2 \Im [\varphi_i(x)] \right) R(x) dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.32)$$

denkleminde elde edilir.

Kolokasyon yöntemine göre, tanım aralığında x_j noktaları rezidüde yerine yazılır düzenlenirse,

$$R(x_j) = \Re \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i(x_j) \right] - \omega_n^2 \Im \left[\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i(x_j) \right] = 0 \quad (3.33)$$

bulunur. Buna göre, denklem sistemi çözüldüğünde c_i katsayıları elde edilir.

3.2. Durum Analizi

Bu kısımda, zorlama frekansına bağlı olarak ortaya çıkan durumlar incelenerek, yaklaşık doğal frekans bulunacaktır.

3.2.1. Ω_1 'in 0 'dan ve $2\omega_n$ 'den, Ω_2 'nin ω_n 'den Uzak Olduğu Durum ($\Omega_1 \neq 0$, $\Omega_1 \neq 2\omega_n$ ve $\Omega_2 \neq \omega_n$)

Ω_1 'in sıfır ve $2\omega_n$ 'den, Ω_2 'nin ω_n 'den farklı olduğu durum için (3.18) denklemi aşağıdaki gibidir;

$$M[D_0^2 w_1] + K[w_1] = [-2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)]] e^{i\omega_n T_0} + k.e + S.O.T \quad (3.34)$$

(3.20) eşitliği (3.18) denkleminde yerine yazılır ve φ_n ile ilgili kısım ayrıştırılırsa ortaya çıkan denklem, birinci mertebedeki denklemin homojen olmayan hali olur. (3.21) denklemi

$$K[\varphi_n] - \omega_n^2 M[\varphi_n] = -2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)] \quad (3.35)$$

şeklinde yazılır. Buna göre, homojen kısmın basit olmayan bir çözümü olduğundan homojen olmayan (3.35) denkleminin bir çözümünün olabilmesi ancak bir çözülebilirlik şartını sağlamasına bağlıdır. (3.35) denkleminin her iki tarafı keyfî bir X_n fonksiyonu ile çarpılır tanım kümesi üzerinden integre edilirse,

$$\int_0^1 (K[\varphi_n] - \omega_n^2 M[\varphi_n]) X_n dx = \int_0^1 (-2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)]) X_n dx \quad (3.36)$$

bulunur. Böylece, eşitliğin sağ tarafı

$$2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 M[X_n(x)] X_n + i\omega_n A_n \int_0^1 C[X_n(x)] X_n dx = 0 \quad (3.37)$$

biçimindedir. Gerekli sadeleştirmeler yapıp, ikinci terimin katsayısı

$$\alpha_{1n} = \frac{1}{2} \int_0^1 C[X_n(x)] X_n dx \quad (3.38)$$

olmak üzere,

$$\int_0^1 M[X_n(x)] X_n dx = 1 \quad (3.39)$$

normalizasyonu yapılırsa, (3.37) denklemi

$$D_1 A_n + \alpha_{1n} A_n = 0 \quad (3.40)$$

haline indirgenir. (3.40) denklemi çözülürse,

$$A_n = c e^{-a_n T_1} \quad (3.41)$$

bulunur. Burada c keyfi sabit, a_n reel ve pozitiftir. Burada sistemin genliğinin hızla azaldığı ve çözümün kararlı olduğu görülür.

3.2.2. Ω_1 'in 0 'e Yakın, Ω_2 'nin ω_n 'den Uzak Olduğu Durum ($\Omega_1 \cong 0$, $\Omega_2 \neq \omega_n$)

Burada $\Omega_1 \cong 0 + \varepsilon \sigma_n$ olup, bu değerler (3.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$M[D_0^2 w_1] + K[w_1] = [-2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)]] e^{i\omega_n T_0} + \frac{1}{2} F[X_n] (A_n e^{i(\omega_n + \varepsilon \sigma_n) T_0} + A_n e^{i(\omega_n - \varepsilon \sigma_n) T_0}) + k.e. + S.O.T \quad (3.42)$$

bulunur. (3.21) denklemi (3.42) denkleminde yazıldığında,

$$K[\varphi_n] - \omega_n^2 \varphi_n = -2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)] - \frac{1}{2} F[X_n] A_n (e^{i\sigma_n \varepsilon T_0} + e^{-i\sigma_n \varepsilon T_0}) \quad (3.43)$$

$$= -2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)] - F[X_n] A_n \cos \sigma_n T_1$$

elde edilir. Çözülebilirlik şartı gereği, (3.42) denkleminin homojen olmayan kısmını sıfır yapacak bir $X_n(x)$ fonksiyonu eşitliğin her iki yanı ile çarpılır, tanım kümesi üzerinden integre edilir ve sıfıra eşitlenirse,

$$D_1 A_n \int_0^1 M[X_n(x)] X_n dx + \frac{1}{2} A_n \int_0^1 C[X_n(x)] X_n dx - \frac{i}{2\omega_n} \cos(\sigma_n T_1) A_n \int_0^1 F[X_n] X_n dx = 0 \quad (3.44)$$

sonucuna ulaşılır. (3.38) ve (3.39) eşitlikleri (3.44) de yerine yazılırsa,

$$\alpha_{2n} = -\frac{1}{4\omega_n} \int_0^1 F[X_n] X_n dx \quad (3.45)$$

olmak üzere,

$$D_1 A_n + [\alpha_{1n} + 2i \alpha_{2n} \cos(\sigma_n T_1)] A_n = 0 \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.46) denkleminin çözümü ise,

$$A_n = A_0 \exp \left(-\alpha_{1n} T_1 - i \frac{2\alpha_{2n}}{\sigma_n} \sin(\sigma_n T_1) \right) \quad (3.46a)$$

olarak bulunur.

3.2.3. Ω_1 'in $2\omega_n$ 'e yakın, Ω_2 'nin ω_n 'den Uzak Olduğu Durum ($\Omega_1 \cong 2\omega_n$, $\Omega_2 \neq \omega_n$)

Bu bölümde, zorlama frekansının sistemin doğal frekanslarından birinin iki katına yaklaştığı özel durum olan temel parametrik rezonans durumu ele alınacaktır. Hız değişim frekansının bu kritik değere yakınsamasını ifade edebilmek için bir ayar parametresi tanımlanacaktır. Bu parametre σ_n olmak üzere,

$$\Omega_1 \cong 2\omega_n + \varepsilon\sigma_n \quad (3.47)$$

olarak alınır. Bu koşul (3.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} M[D_0^2 w_1] + K[w_1] = & \left[-2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)] \right] e^{i\omega_n T_0} \\ & - \frac{1}{2} F[X_n] \left(A_n e^{i(\omega_n + 2\omega_n + \varepsilon\sigma_n)T_0} + A_n e^{i(\omega_n - 2\omega_n - \varepsilon\sigma_n)T_0} + \bar{A}_n e^{-i(\omega_n - 2\omega_n - \varepsilon\sigma_n)T_0} \right. \\ & \left. + \bar{A}_n e^{-i(\omega_n + 2\omega_n + \varepsilon\sigma_n)T_0} \right) + k.e. + S.O.T \end{aligned} \quad (3.48)$$

ifadesi elde edilir. (3.20) denklemi (3.48) denkleminde yazıldığında,

$$K[\varphi_n] - \omega_n^2 \varphi_n = -2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)] - \frac{1}{2} F[X_n] \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} \quad (3.49)$$

bulunur. Çözülebilirlik şartı gereği, (3.49) denkleminin homojen olmayan kısmını sıfır yapacak bir $X_n(x)$ fonksiyonu ile eşitliğin her iki yanı çarpılır, tanım kümesi üzerinden integre edilir ve sıfıra eşitlenirse,

$$D_1 A_n \int_0^1 M[X_n(x)] X_n dx + \frac{1}{2} A_n \int_0^1 C[X_n(x)] X_n dx - \frac{i}{4\omega_n} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} \int_0^1 F[X_n] X_n dx = 0 \quad (3.50)$$

sonucuna ulaşılır. Gerekli işlemler yapılırsa (3.50) denklemi

$$D_1 A_n + \alpha_{1n} A_n + i\alpha_{2n} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} = 0 \quad (3.51)$$

haline indirgenir. Daha sonra, (3.51) denkleminin çözümü için

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \quad (3.52)$$

biçiminde bir çözüm önerelim. Önerilen bu çözüm (3.51) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}a_n'(T_1)e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{i}{2}a_n(T_1)\beta_n'(T_1)e^{i\beta_n(T_1)} + \alpha_{1n}\frac{1}{2}a_n(T_1)e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{i}{2}\alpha_{2n}a_n(T_1)e^{i\sigma_n T_1 - i\beta_n(T_1)} = 0 \quad (3.53)$$

bulunur. Elde edilen denklem $e^{-i\beta_n T_1}$ ile çarpılırsa,

$$a_n'(T_1) + i a_n(T_1)\beta_n'(T_1) + \alpha_{1n} a_n(T_1) + i \alpha_{2n} a_n(T_1) e^{i\sigma_n T_1 - 2i\beta_n(T_1)} = 0 \quad (3.54)$$

elde edilir. Burada $\eta = \sigma_n T_1 - 2\beta_n(T_1)$ alınır,

$$a_n'(T_1) + i a_n(T_1)\beta_n'(T_1) + \alpha_{1n} a_n(T_1) + i \alpha_{2n} a_n(T_1) e^{i\eta} = 0 \quad (3.55)$$

sonucuna ulaşılır. İndirgenen bu denklemde gerekli matematiksel işlemler yapıp, reel ve imajiner kısımlara ayrıştırılırsa,

$$\text{Re} : a_n'(T_1) + \alpha_{1n} a_n(T_1) - \alpha_{2n} a_n \sin \eta = 0 \quad (3.56)$$

$$\text{Im} : a_n(T_1)\beta_n'(T_1) + \alpha_{2n} a_n \cos \eta = 0 \quad (3.57)$$

$$2\frac{d\beta_n}{dT_1} = \sigma_n - \frac{d\eta}{dT_1} \text{ olmak üzere, (3.56) ve (3.57) denklemi}$$

$$\text{Re} : a_n'(T_1) + \alpha_{1n} a_n(T_1) - \alpha_{2n} a_n \sin \eta = 0 \quad (3.58)$$

$$\text{Im} : \sigma_n - \frac{d\eta}{dT_1} + 2\alpha_{2n} \cos \eta = 0 \quad (3.59)$$

denklemlerine dönüşür. Böylece, (3.58) ve (3.59) denklemleri baskın rezonans durumuna ait genlik ve faz modülasyon denklemlerine dönüşmüş olur. Kararlı durum çözümleri için $da_n/dT_1 = 0$ ve $d\eta/dT_1 = 0$ koşullarının sağlanması gerekir. Bu denklikler (3.58) ve (3.59) denklemlerine uygulanarak kararlı hal çözümleri elde edilir.

$$\text{Re} : \alpha_{1n} a_n(T_1) - \alpha_{2n} a_n \sin \eta = 0 \quad (3.60)$$

$$\text{Im} : \sigma_n + 2\alpha_{2n} \cos \eta = 0 \quad (3.61)$$

bulunur. Bu denklemlerde de η ifadesi yok edilirse,

$$\sigma_n = \mp 2\sqrt{\alpha_{2n}^2 - \alpha_{1n}^2} \quad (3.62)$$

elde edilir.

3.2.4. Ω_1 'in 0 ve $2\omega_n$ 'den Uzak, Ω_2 'nin ω_n 'e Yakın Olduğu Durum ($\Omega_1 \neq 0, \Omega_1 \neq 2\omega_n$ ve $\Omega_2 \cong \omega_n$)

Bu kısımda, dış zorlama kuvvetine ait ikinci frekans bileşeninin sistemin doğal frekansına çok yakın olması durumunda meydana gelen baskın rezonans hali incelenecektir. Baskın rezonans koşulu $\Omega_2 \cong \omega_n + \varepsilon \sigma_n$ ile ifade edilir ve bu ifade (3.21) denkleminde yazılırsa,

$$M[D_0^2 w_1] + K[w_1] = [-2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)]] e^{i\omega_n T_0} - \frac{f(x)}{2} e^{i(\omega_n + \varepsilon \sigma_n) T_0} + k.e. + S.O.T \quad (3.63)$$

ve

$$K[\varphi_n] - \omega_n^2 \varphi_n = -2i\omega_n D_1 A_n M[X_n(x)] - i\omega_n A_n C[X_n(x)] - \frac{f(x)}{2} e^{i\sigma_n T_1} \quad (3.64)$$

elde edilir. Çözülebilirlik şartı gereği, (3.64) denkleminin homojen olmayan kısmını sıfır yapacak bir $X_n(x)$ fonksiyonu denklemin her iki yanı ile çarpılır, tanım kümesi üzerinden integre edilir ve sıfıra eşitlenirse

$$\alpha_{3n} = \frac{1}{2\omega_n} \int_0^1 f(x) X_n dx \quad (3.65)$$

olacak şekilde,

$$D_1 A_n + \alpha_{1n} A_n = \frac{i}{2} \alpha_{3n} e^{i\sigma_n T_1} \quad (3.66)$$

elde edilir. Buradan da kutupsal formda tanımlanan genlik

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)}$$

(3.66) da yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2} \frac{da_n(T_1)}{dT_1} e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{i}{2} \frac{a_n(T_1) d\beta_n(T_1)}{dT_1} e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{1}{2} \alpha_{1n} a_n(T_1) e^{i\beta_n T_1} = \frac{1}{2} i \alpha_{3n} e^{i\sigma_n T_1} \quad (3.67)$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen bu denklemin her iki tarafı $e^{i\beta_n}$ ile bölünüp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\frac{da_n(T_1)}{dT_1} + ia_n(T_1) \frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{1n} a_n(T_1) + i\alpha_{3n} e^{i(\sigma_n T_1 - \beta_n(T_1))} = 0 \quad (3.68)$$

elde edilir.

$$\gamma_n = \sigma_n T_1 - \beta_n \quad (3.69)$$

değeri (3.67) denkleminde yazılırsa

$$\frac{da_n(T_1)}{dT_1} + ia_n(T_1) \frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{1n} a_n(T_1) + i\alpha_{3n} e^{i\gamma_n} = 0 \quad (3.70)$$

haline gelir. (3.70) denklemi reel ve imajiner kısımlara ayrıştırılırsa,

$$\text{Re} : \frac{da_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{1n} a_n(T_1) - \alpha_{3n} \sin \gamma_n = 0 \quad (3.71)$$

$$\text{Im} : a_n(T_1) \frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{3n} \cos \gamma_n = 0 \quad (3.72)$$

bulunur. (3.69) eşitiliği

$$\frac{d\beta_n}{dT_1} = \sigma_n - \frac{d\gamma_n}{dT_1} \quad (3.73)$$

şeklinde düzenlenip (3.72) denkleminde yazılırsa,

$$\text{Re} : \frac{da_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{1n} a_n(T_1) - \alpha_{3n} \sin \gamma_n = 0 \quad (3.74)$$

$$\text{Im} : a_n \sigma_n - a_n \frac{d\gamma_n}{dT_1} + \alpha_{3n} \cos \gamma_n = 0 \quad (3.75)$$

biçiminde baskın rezonans durumuna ait genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir. Titreşim hareketinde düzgün rejim bölgesi, geçici davranışların sona erdiği ve sistemin dinamik parametrelerinin (genlik ve faz) zamanla değişmeden sabit kaldığı bir bölgeyi ifade eder. Düzgün rejimde, genlik ve faz değerlerinin sabit olması nedeniyle, $da_n/dT_1 = 0$ ve $d\gamma/dT_1 = 0$ kabul edilmelidir. Bu koşullar (3.74) ve (3.75) de yerine yazılırsa,

$$\text{Re} : \alpha_{1n} a_n - \alpha_{3n} \sin \gamma_n = 0 \quad (3.76)$$

$$\text{Im} : \sigma_n \alpha_{1n} + \alpha_{3n} \cos \gamma_n = 0 \quad (3.77)$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer bu denklemlerden γ_n terimi yok edilirse, σ_n ayar parametresine ait

$$\sigma_n = \mp \frac{1}{a_n} \sqrt{a_{3n}^2 - a_n^2 a_{1n}^2} \quad (3.78)$$

eşitlik bulunur.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMALAR

4.1. Eksenel Parametrik Zorlamalı Çok Yaylı Mesnetli Kirişler

Bu bölümde, her iki ucu basit mesnetle sınırlandırılmış ve lineer elastik yaylarla desteklenmiş bir kiriş göz önüne alınır. Genel durumu temsil edebilmek amacıyla, M tane lineer elastik yay içeren bir sistem için hareket denklemi ve sınır şartları

$$EI\hat{w}^{iv} + \hat{P}\hat{w}'' + \sum_{j=0}^N \hat{w}\hat{k}_j\delta(\hat{x} - \hat{x}_j) + m\ddot{\hat{w}} + \hat{\mu}\dot{\hat{w}} = 0 \quad (4.1)$$

$$\hat{w}(0, \hat{t}) = \hat{w}''(0, \hat{t}) = 0 \quad \text{ve} \quad \hat{w}(L, \hat{t}) = \hat{w}''(L, \hat{t}) = 0 \quad (4.2)$$

şeklindedir. (4.1) denkleminde verilen E, I, m, L sırasıyla kirişin elastisite modülü, atalet momenti, birim kesit kütlesi ve iki mesnet arası uzunluğudur. $\hat{P}$ ise, $\hat{P} = \hat{P}_0 + \varepsilon\hat{P}_1 \cos\hat{\Omega}\hat{t}$ olmak üzere, eksenel harmonik basınç yüküdür. ε çok küçük bir parametredir. $\hat{\mu}$ lineer viskoz sönüm katsayısını, $\hat{k}$ ise boyutlu yay sabitini temsil eder. δ Dirac-delta fonksiyonunu gösterir. $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$ bağımlı değişkeni enine yer değiştirmeyi, bağımsız değişkenler $\hat{x}$ ve $\hat{t}$ ise konumu ve zamanı temsil etmektedir. Malzeme ve geometri bağımlılığından kurtulmak için boyutsuzlaştırma yapılır. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin boyutsuz terimleri

$$w = \frac{\hat{w}}{L}, \quad x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad t = \hat{t}\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (4.3)$$

şeklinde olmak üzere, bu terimler (4.1)-(4.2) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\frac{EI}{L^3} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\hat{P}}{L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^N \hat{k}_j \delta(xL - \hat{\eta}_j) wL + \frac{EI}{L^3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \hat{\mu} \frac{\sqrt{EI}}{\sqrt{m}} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

bulunur. Buna göre, yukarıdaki denklemin her iki tarafı $\frac{L^3}{EI}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\hat{P}L^2}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{L^3}{EI} \sum_{j=1}^N \hat{k}_j \delta(xL - \hat{\eta}_j) wL + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \hat{\mu} \frac{L^2}{\sqrt{EI}m} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu denklemde yeni boyutsuz terimler,

$$\eta = \frac{\hat{\eta}_j}{L}, \quad k_j = \frac{k_j L^3}{EI}, \quad P = \frac{\hat{P} \ell^2}{EI}, \quad \mu = \frac{\mu L^2}{\sqrt{E \text{Im}}} \quad (4.6)$$

olmak üzere, (4.1) denklemi ve sınır şartları

$$EI w^{iv} + P w'' + \sum_{j=1}^N w k_j \delta(x - \eta_j) + \ddot{w} + \mu \dot{w} = 0 \quad (4.7a)$$

$$w(0, t) = w''(0, t) = 0, \quad w(1, t) = w''(1, t) = 0 \quad (4.7b)$$

formuna indirgenir. Bir tane elastik yay ile desteklenen iki açıklığa sahip, basit-basit mesnetli bir kirişin dinamik analizini ele alalım. $N = 1$ alınırsa, (4.7a) denklemi

$$w^{iv} + P w'' + w k \delta(x - \eta) + \ddot{w} + \mu \dot{w} = 0 \quad (4.8)$$

boyutsuz forma indirgenir.. Genel modelde verilen operatörlere karşılık gelen operatörler ise,

$$K[w] = w^{iv} + P_0 w'' + w k \delta(x - \eta) \quad (4.9)$$

$$F[w] = P_1 w'' \quad (4.10)$$

$$C[\dot{w}] = \mu \dot{w} \quad \text{ve} \quad \Omega_1 = \Omega \quad (4.11)$$

$$M[\ddot{w}] = \ddot{w} \quad (4.12)$$

şeklindedir. Buna göre, (3.16) denklemi

$$X_n^{iv} + P_0 X_n'' + k \delta(x - \eta) X_n - \omega^2 X_n = 0 \quad (4.13a)$$

$$X_n(0) = X_n(1) = 0, \quad X_n''(0) = X_n''(1) = 0 \quad (4.13b)$$

biçiminde bulunur. Böylece (4.13a) denkleminin çözümü ağırlık fonksiyonu yaklaşımı

$$X_n \cong \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x) \quad (4.14)$$

şeklinde yazılır. Burada c_i katsayılar, $\varphi_i(x)$ ağırlık fonksiyonlarıdır. Rezidü ise

$$R = \sum_{i=1}^N c_i \left(\varphi_i^{iv}(x) + P_0 \varphi_i'' \right) + \left(k \delta(x - \eta) - \omega^2 \right) \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x) \cong 0 \quad (4.15)$$

biçimindedir. (4.14) denklemindeki $\varphi_i(x) = \sin i\pi x$ sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlardır. c_i katsayıların belirlenmesi için farklı yöntemler önerilmiştir.

4.2. Galerkin Yöntemine Göre Çözüm

Galerkin yaklaşımı, rezidü fonksiyonunun deneme(yaklaşım) fonksiyonlarıyla aynı uzaydan seçilen ağırlık fonksiyonlarına göre ağırlıklı ortalamasının tanım aralığında sıfıra eşitlenmesi esasına dayanır. Bundan dolayı,

$$\int_0^1 R(x) \varphi_j(x) dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.16)$$

yazılır. (4.16) denklemi düzenlenirse,

$$\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^N c_j \left(\varphi_i^{iv} + P_0 \varphi_i'' + k \delta(x-\eta) \varphi_i - \omega_n^2 \varphi_i \right) \right] \varphi_j(x) dx = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.15) denkleminde yer alan

$$\int_0^1 \left(k \delta(x-\eta) \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x) \right) \varphi_j(x) dx \quad (4.18)$$

terimi, Delta fonksiyonu $\delta(x-\eta)$

$$\int_0^1 \delta(x-\eta) f(x) dx = f(\eta); \quad \eta \in [0,1] \quad (4.19)$$

özelliğine sahip olduğundan (4.19) denklemi

$$k \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(\eta) \varphi_j(\eta) \quad (4.20)$$

haline gelir. (4.17) denklemindeki integraller

$$R_{ij} = \int_0^1 \varphi_i^{iv}(x) \varphi_j(x) dx \quad Q_{ij} = \int_0^1 \varphi_i''(x) \varphi_j(x) dx \quad (4.21)$$

$$S_{ij} = \varphi_i(\eta) \varphi_j(\eta) \quad M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (4.22)$$

olmak üzere, matris formda

$$\sum_{i=1}^N c_i \left[R_{ij} + P_0 Q_{ij} + k S_{ij} - \omega^2 M_{ij} \right] = 0 \quad (4.23)$$

biçiminde yazılabilir. Özdeğer problemi ise

$$(R + P_0 Q + k S - \omega^2 M) c = 0 \quad (4.24)$$

biçiminde yazılır. Buradan ω doğal frekans ve c_i değerleri bulunur.

4.3. Petrov-Galerkin Yöntemine Göre Çözüm

Bu yöntemde ise, ağırlık fonksiyonunu yaklaşım fonksiyonundan farklı olarak $\varphi_j(x) \neq \psi_j(x)$ biçiminde alınması gereklidir. Bu takdirde,

$$\int_0^1 R(x) \psi_j(x) dx = 0 \quad (4.25)$$

yazılır. Ayrıca rezidü, $\psi_j(x) = x^{j-1}$ olmak üzere,

$$R = \sum_{i=1}^N c_i \left[\left(\varphi_i^{iv} + P_0 \varphi_i'' + k \delta(x-\eta) \varphi_i - \omega_n^2 \varphi_i \right) \psi_j(x) \right] \cong 0 \quad (4.26)$$

biçimindedir. (4.25) denklemi düzenlenir ve integralleri matris formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \int_0^1 \varphi_i^{iv}(x) x^{j-1} dx & Q_{ij} &= \int_0^1 \varphi_i''(x) x^{j-1} dx \\ S_{ij} &= \varphi_i(\eta) \eta^{j-1} & M_{ij} &= \int_0^1 \varphi_i(x) x^{j-1} dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir. Matris denklem sistemi

$$(R + P_0 Q + k S - \omega^2 M) c = 0 \quad (4.28)$$

biçiminde yazılır.

4.4. Kolokasyon Yöntemine Göre Çözüm

Kolokasyon yönteminde $i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere, sınır değerler arasında x^j değerleri alınır. Rezidü için bu değerleri yazdığımızda

$$R(x^j, c_j) = 0 \quad (4.29)$$

bulunur. Rezidü, (4.15) denklemi olduğu düşünüldüğünde kolokasyon noktalarında sıfırlanır. Yani,

$$\sum_{i=1}^N c_i \left[\varphi_i^{iv}(x^j) + P_0 \varphi_i''(x^j) + k \delta(x-\eta) \varphi_i(x^j) - \omega_n^2 \varphi_i(x^j) \right] = 0 \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.30) ifadesi matris formda,

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \varphi_i^{iv}(x^j) & Q_{ij} &= \varphi_i''(x^j) \\ S_{ij} &= \varphi_i(x^j) \delta(x^j - \eta) & M_{ij} &= \varphi_i(x^j) \end{aligned} \quad (4.31)$$

olmak üzere,

$$(R + P_0 Q + k S - \omega^2 M) c = 0 \quad (4.31a)$$

4.5. En Küçük Kareler Yöntemine Göre Çözüm

Bu yöntemle göre, rezidünün karesinin integrali alınarak toplam hata minimize edilir. Yani,

$$\int_0^1 R^2(x) dx = \min \quad (4.32)$$

olur. Bu takdirde, (4.15) denkleminin integrali minimize edilirse,

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \left(\int_0^1 R^2(x) dx \right) = 0 \quad \text{yani} \quad \int_0^1 R(x) \frac{\partial R(x)}{\partial c_j} dx = 0 \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.33) denkleminde yer alan türev ifadesi $\frac{\partial R(x)}{\partial c_j} = D[\varphi_j(x)]$ diferansiyel operatörü ile

temsil edilirse,

$$\sum_{i=1}^N c_i \int_0^1 D[\varphi_i(x)] D[\varphi_j(x)] dx = 0 \quad (4.34)$$

şeklinde yazılır. Elde edilen bu ifade, simetrik ve pozitif tanımlı bir katsayılar matrisine sahip olmak üzere, aşağıdaki gibi bir lineer denklem sistemine karşılık gelmektedir.

$A_{ij} = \int_0^1 D[\varphi_i(x)] D[\varphi_j(x)] dx$ olacak şekilde, A_{ij} sistemin rijitlik matrisi, c_{ij} bilinmeyen katsayı

vektörü olmak üzere,

$$A_{ij} \cdot c_{ij} = 0 \quad (4.35)$$

biçiminde yazılır.

4.6. Sayısal Sonuçlar

Bu çalışmada kullanılan ağırlık tipi yaklaşım yöntemlerinde çözüm fonksiyonunun uygun ağırlık fonksiyonlarıyla temsil edilmesine bağlı olarak bir denklem sistemi elde edilmektedir. Bu bağlamda, çözüm hassasiyetini belirleyen temel parametrelerden biri, yaklaşık çözümde kullanılan terim sayısı olan N 'dir. Aşağıda verilen Tablo 4.2.1, Tablo 4.2.2 ve Tablo 4.2.3'te farklı k yay katsayıları ve η yay konumları için elde edilen kritik eksenel yük değerlerinin birbirleriyle karşılaştırılması sunulmuştur.

Tablo 4.2.1. Farklı N değerleri için hesaplanan eksenel yük (P) değerlerinin karşılaştırılması

($\eta = 0.1$, $k = 100$)

N	Galerkin Metodu	Petrov-Galerkin Metodu	Kolokasyon Metodu	En Küçük Kareler Metodu
$N = 2$	13.8561	13.8536	13.8391	13.8510
$N = 4$	13.8365	13.8352	13.8358	13.8389
$N = 6$	13.8339	13.8338	13.8341	13.8346
$N = 8$	13.8336	13.8335	13.8336	13.8336
$N = 10$	13.8336	13.8335	13.8335	13.8335

Tablo 4.2.1'e bakıldığında, N değeri arttıkça tüm yöntemlerin sonuçlarının ortak bir değere yakınsadığı görülmektedir. Bu beklenen bir durumdur, çünkü terim sayısı arttıkça teorik olarak doğru çözüme yaklaşmayı garanti eden yöntemlerdir.

Tablo 4.2.2. Farklı N değerleri için hesaplanan doğal frekans (ω) değerlerinin karşılaştırılması $(\eta = 0.5, P_0 = 10 \text{ ve } k = 100)$

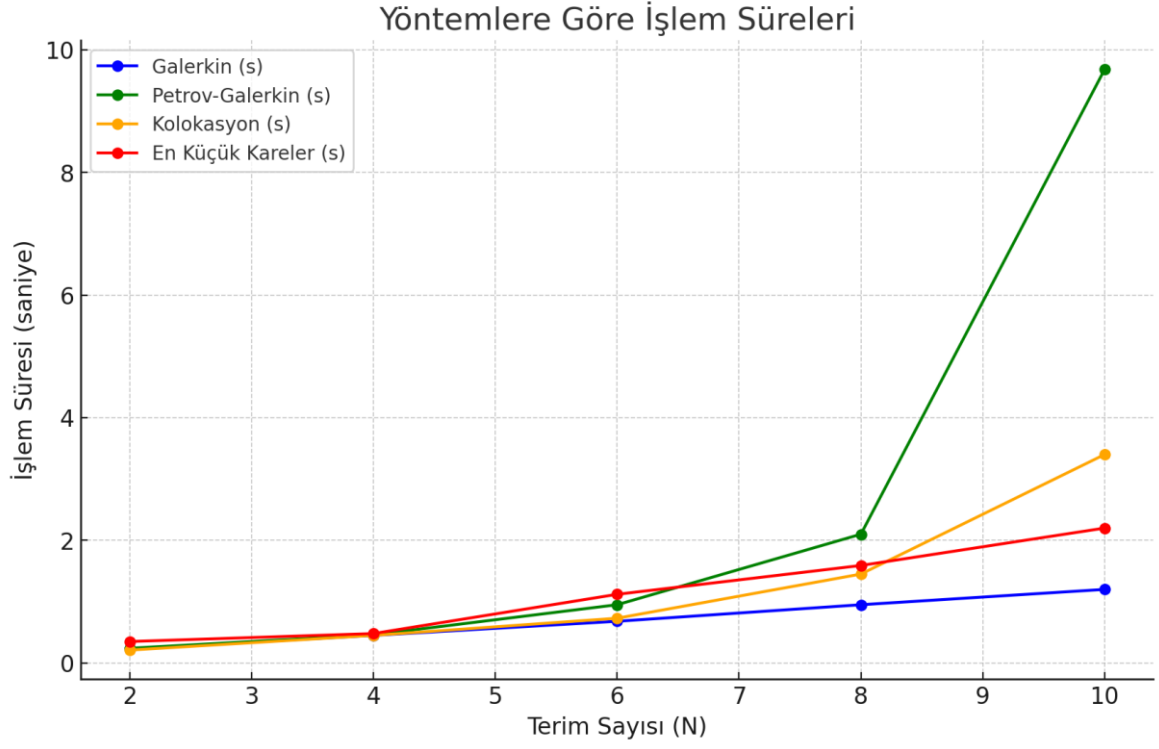
N	Galerkin Metodu	Petrov-Galerkin Metodu	Kollakasyon Metodu	En Küçük Kareler Metodu
$N = 2$	34.11394556	34.11394552	34.11394556	34.11394555
$N = 4$	34.11394557	34.11394553	34.11394555	34.11394555
$N = 6$	34.11394555	34.11394557	34.11394555	34.11394555
$N = 8$	34.11394555	34.11394558	34.11394556	34.11394555
$N = 10$	34.11394555	34.11394552	34.11394549	34.11394555

Tablo 4.2.2 de görüldüğü gibi tüm yöntemlerle hesaplanan doğal frekans değerleri aynı değere yakınsamaktadır. $N \geq 4$ için yöntemler arası farklar 10^{-8} basamağına inmekte ve pratikte ihmal edilebilir düzeydedir. En Küçük Kareler yönteminde N için elde edilen sonuçların, daha yüksek N değerleriyle tamamen aynı olduğu görülmektedir. Bu durum, yöntemin düşük mertebede dahi yüksek doğruluk sağladığını ve $N = 2$ değerinin bu problem için yeterli olduğunu göstermektedir.

Tablo 4.2.3. Doğal frekanslarının sayısal olarak hesaplanmasına ait işlem süreleri (N , deneme fonksiyonu sayısı)

N	Galerkin Metodu	Petrov-Galerkin Metodu	Kollakasyon Metodu	En Küçük Kareler Metodu
$N = 2$	0.23	0.24	0.21	0.35
$N = 4$	0.45	0.46	0.45	0.48
$N = 6$	0.68	0.95	0.73	1.12
$N = 8$	0.95	2.10	1.45	1.59
$N = 10$	1.20	9.68	3.40	2.20

Tablo genel olarak değerlendirildiğinde, tüm yöntemlerde işlem süresinin terim sayısı arttıkça yükseldiği görülmektedir. Bu artış, beklenen bir durum olup yöntemlerin hesaplama karmaşıklığıyla doğrudan ilişkilidir. Ancak özellikle $N=10$ için elde edilen sonuçlar, bazı yöntemlerin diğerlerine kıyasla çok daha yüksek işlem maliyetine sahip olduğunu göstermektedir.



BEŞİNCİ BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, sürekli ortamların dinamik davranışlarını analiz etmek amacıyla, Euler–Bernoulli kiriş teorisine dayalı olarak genel bir model ele alınmıştır. Geliştirilen genel model Galerkin, Petrov-Galerkin, kolokasyon ve en küçük kareler gibi ağırlık fonksiyonu yaklaşımları kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Çözüm yöntemlerinin karşılaştırmalı olarak değerlendirilebilmesi için, klasik yaklaşımdan elde edilen eksenel yük ve doğal frekans değerleri ile önerilen sayısal yöntemlerden elde edilen sonuçlar tablolar hâlinde sunulmuştur.

Karşılaştırma sonuçları, Petrov-Galerkin ve kolokasyon tekniklerinin diğer yöntemlere kıyasla daha uzun işlem sürelerine sahip olduğunu göstermektedir. Bu durum, her iki yöntemin yapısal ve hesaplama açısından daha karmaşık işlemler içermesiyle ilişkilidir. Petrov-Galerkin yönteminde ağırlık fonksiyonları yaklaşım fonksiyonlarından farklı olması nedeniyle, sistem matrisinin her bir elemanı için ayrı ağırlıklı integrallerin hesaplanmasını gerektirdiğinden, bu da toplam işlem süresini artırmaktadır. Benzer şekilde, kolokasyon yönteminde çözüm fonksiyonunun kolokasyon noktalarında rezidü teriminin sıfıra eşitlenmesi, yüksek hassasiyetli değerlendirmeler gerektirdiğinden işlem süresine olumsuz yansımaktadır. Buna karşın Galerkin ve en küçük kareler yöntemleri, integral tabanlı ve daha düzenli yapıları sayesinde artan terim sayısına (N) rağmen daha sınırlı bir işlem süresi artışı sergilemiştir.

Teorik açıdan Kolokasyon yöntemi, çözüm aranan diferansiyel denklemin seçilen test fonksiyonları doğrultusunda belirli noktalarda sağlanmasına dayandığından, klasik Galerkin ve türevleri gibi iç çarpım temelli yaklaşımlardan farklıdır. Ayrıca sayısal integrasyon prosedürlerine ihtiyaç duymaması nedeniyle teorik olarak daha düşük işlem maliyetiyle hızlı sonuçlar üretmesi beklenir. Ancak mevcut çalışmada kolokasyon yönteminin işlem süresi, Galerkin yöntemine kıyasla daha yüksek çıkmıştır. Teorik olarak daha hızlı olması beklenen kolokasyon yöntemi, yazılım tabanlı hesaplama farklılıkları nedeniyle pratikte beklenenin altında bir performans göstermiştir. Bu durum, kuramsal verimlilik ile uygulama düzeyi arasında yazılım kaynaklı bir fark bulunduğunu ortaya koymaktadır. Buna karşılık, Galerkin ve en küçük kareler yöntemleri hem işlem süreleri hem de elde edilen sonuçların tutarlılığı açısından daha istikrarlı ve işlevsel bir performans sergilemiştir. Özellikle yüksek terim sayılarında (N) dahi doğruluk düzeyini korumaları ve makul işlem süreleriyle çözüm üretmeleri, bu iki yöntemi pratik mühendislik uygulamaları açısından güvenilir ve tercih edilebilir kılmaktadır.

Sonuç olarak, elde edilen sayısal sonuçlar ağırlık fonksiyonu yaklaşımı ve pertürbasyon metodunun birlikte uygulanmasının, Euler–Bernoulli kirişlerinin dinamik davranışını hem matematiksel hem de fiziksel olarak doğru temsil ettiğini göstermektedir. Yöntemler arasında elde edilen doğal frekans değerlerinin uyumu, çözümün yakınsadığını ve modelin self-adjointlik koşulunu sağladığını kanıtlamaktadır. Parametrik değişkenlerin frekans üzerindeki etkileri mühendislik açısından anlamlı olup, sistemin rijitlik ve stabilite özellikleriyle doğrudan ilişkilidir. Dolayısıyla geliştirilen yöntem, klasik analitik çözümlere kıyasla hem doğrusal olmayan davranışların hem de konuma bağlı etkilerin daha hassas biçimde incelenmesine olanak tanımaktadır.

İlerleyen çalışmalarda, önerilen yöntemin Timoshenko kiriş teorisi, değişken kesitli veya kompozit malzemeli yapı elemanları gibi daha karmaşık sistemlere uygulanması hedeflenebilir. Böylelikle model, kesme deformasyonlarının ve dönme atalet etkilerinin de dikkate alındığı durumlarda kullanılabilir hale gelecektir. Ayrıca, sistemde doğrusal olmayan sönüm, zamana bağlı rijitlik değişimleri veya karma dış zorlamalar gibi etkiler dikkate alınarak modelin kapsamı genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Anderson, T. L. (2005). *Fracture mechanics: Fundamentals and applications* (3rd ed.). CRC Press.
- Ay, B. (2022). *Bazı kısmi diferensiyel denklemlerin B-spline en küçük kareler yöntemi ile çözümleri* (Yayımlanmış doktora tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Eskişehir.
- Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2014). *Numerical methods for engineers* (7th ed.), New York, NY: McGraw-Hill Education.
- Clark, R.M., Kaw, A.K. (2020). Benefits of adaptive lessons for pre-class preparation in a flipped numerical methods course. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 51 (5), 713–729.
- Corbani, S., Martha, L. F., de Castro, J. T., Carter, B., & Ingrassia, A. (2014). Crack front shapes and stress intensity factors in plates under a pure bending loading that induces partial closure of the crack faces. *Procedia Materials Science*, 3, 1279–1284.
- Demirtaş, A. (2014). *Doğrusal olmayan diferensiyel denklemlerin homotopi pertürbasyon yöntemi ile çözümü* (Yayımlanmış yüksek lisans tezi). İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- Dinachandra, M., & Alankar, A. (2022). Static and dynamic modeling of functionally graded Euler–Bernoulli microbeams based on reformulated strain gradient elasticity theory using isogeometric analysis. *Composite Structures*, 280, 114923.
- Dönmez Demir, D. (2012). *Kesirli türevlere sahip sürekli ortamların dinamik analizi* (Yayımlanmış doktora tezi). Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa.
- Dönmez Demir, D., Bildik, N., & Sınır, B. G. (2012). Application of fractional calculus in the dynamics of beams. *Boundary Value Problems*, 2012(1), 1–19.
- Dugnani, R., & Ma, L. (2023). Stress intensity factor by combined perturbation method and universal weight functions. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 126, 103994.
- Fett, T., & Munz, D. (1994). *Stress intensity factors and weight functions for one-dimensional cracks*. Karlsruhe, Germany: Kernforschungszentrum Karlsruhe.
- Fletcher, C. A. J. (1991). *Computational techniques for fluid dynamics 1: Fundamental and general techniques* (2nd ed.). Springer-Verlag.
- Jalili, M., & Noeiaghdam, S. (2025). A Chebyshev–Ritz spectral framework for nonlinear vibration of CNT-reinforced composite beams. *arXiv preprint*, arXiv:2509.11946.
- Jing, Z., & Wu, X. R. (2015). Wide-range weight functions and stress intensity factors for arbitrarily shaped crack geometries using complex Taylor series expansion method. *Engineering Fracture Mechanics*, 138, 215–232.
- Kahraman, E. (2018). *Pertürbasyon-sonlu farklar metodunun titreşim problemlerine uygulanması* (Yayımlanmış yüksek lisans tezi). Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Manisa.
- Kapoor, T., Wang, H., Núñez, A., & Dolleyoet, R. (2023). Transfer learning for improved generalizability in causal physics-informed neural networks for beam simulations. *arXiv preprint*, arXiv:2311.00578.
- Livieri, P., & Segala, F. (2015). New weight functions and second order approximation of the Oore–Burns integral for elliptical cracks subject to arbitrary normal stress field. *Engineering Fracture Mechanics*, 138, 100–117.
- Nayfeh, A. H. (1993). *Introduction to perturbation techniques*. New York: John Wiley & Sons.
- Nayfeh, A. H. ve Pai, P. F. (2004). *Linear and nonlinear structural mechanics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

- Nikishkov, G. P. (2001). *Introduction to the finite element method*, Lecture notes. University of Aizu.
- Omurtag, M. H. (2004). *Mekanik II: Dinamik*. İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Özhan, B. B. (2009). *Kübik nonlinear bir sürekli ortam sisteminin dış zorlamalı ve parametrik titreşimlerine genel bir yaklaşım* (Yayımlanmış doktora tezi). Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Manisa.
- Özkaya, E. (2001). *Linear transverse vibrations of a simply supported beam carrying concentrated masses*. *Mathematical and Computational Applications*, 6(2), 147–152.
- Pakdemirli, M., & Boyaci, H. (1994). Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for non-linear vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 186(5), 837–845.
- Pakdemirli, M.ve Boyacı, H. (1997). A comparison of different versions of multiple scales method. *Mathematical and Computer Modelling*, 26(8–10), 21–29.
- Rao, S. S. (2007). *Mechanical vibrations* (4th ed.). Pearson Prentice Hall.
- Reddy, J. N. (1993). *An introduction to the finite element method*. New York, NY: McGraw-Hill.
- Shen, G., & Glinka, G. (1991). Determination of weight functions from reference stress intensity factors. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 15(3), 237–245.
- Shen, G., & Glinka, G. (1991). Weight functions for a surface semi-elliptical crack in a finite thickness plate. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 15(3), 247–255.
- Szillard, R. (2004). *Theories and applications of plate analysis: Classical, numerical and engineering methods*. John Wiley & Sons.
- Sınır, B. G., & Sınır, S. (2011). Eksenel parametrik zorlamalı çok yaylı kirişlerin yeni bir yaklaşımla dinamik analizi. *XVII. Ulusal Mekanik Kongresi Bildirileri*, 5–9 Eylül 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ, Türkiye.
- Sınır, S. (2019). *Değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş kirişlerin nonlinear titreşim analizi* (Yayımlanmış doktora tezi). Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Bilim Dalı, Manisa.
- Tatlısu, Y. (2023). *Genelleştirilmiş eşit genişlikli ve modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denklemlerinin Petrov-Galerkin yöntemi ile sayısal çözümleri* (Yüksek lisans tezi). Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Nevşehir.
- Wagner, D., & Millwater, H. (2012). 2D weight function development using a complex Taylor series expansion method. *Engineering Fracture Mechanics*, 86, 23–37.
- Wang, X., & Lambert, S. B. (1995a). Local weight functions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 23(3), 199–208.
- Wang, X., & Lambert, S. B. (1995b). Stress intensity factors for low aspect ratio semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates subjected to nonuniform stresses. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(4), 517–532.
- Wang, X., & Lambert, S. B. (1997). Stress intensity factors and weight functions for high aspect ratio semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, 57(1), 13–24.
- Yang, D., Kang, C., Cheng, S., Hu, Z., & Ademiloye, A. (2025). Statistical structural damage detection of functionally graded euler-bernoulli beams based on element modal strain energy sensitivity. *Buildings*, 15(9), 1521.
- Zheng, X. J., Glinka, G., & Dubey, R. N. (1996). Stress intensity factors and weight functions for a corner crack in a finite thickness plate. *Engineering Fracture Mechanics*, 54(1), 49–61.