

11675

AKIM VE SİRKULASYON

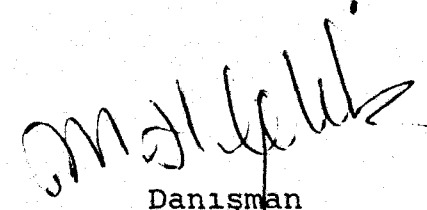
YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)

Adil MISIR
Eylül 1990

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Y. G.
Yükseköğretim Kurulu
Bekümantasyon Merkezi

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Danışman
Doç.Dr. M.Haluk Çelik

Sınav Jürisi

Prof.Dr.H.Nilmi HACISALİHOĞLU

Başkan :

Prof.Dr.Muhsin MERT

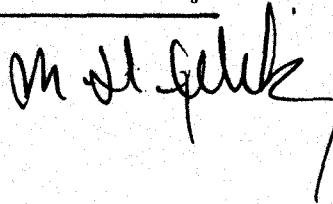
Üye :

Doç.Dr.İ.Ethem ANAR

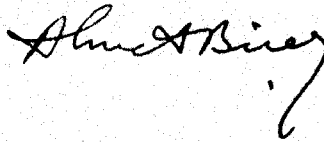
Üye :

Doç.Dr.M.Haluk ÇELİK

Üye :



Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Esaslarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

ÖZ	III
ABSTRACT	IV
TEŞEKKÜR	V
SEMBOLLER	VI
BÖLÜM I	
ÇİZGİSEL İNTEGRALIN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ	1
BÖLÜM II	
DÜZLEMDE ÇİZGİSEL İNTEGRALIN FİZİKSEL UYGULAMALARI.	5
2.1. İş	5
2.2. Düzlemde Green Teoremi	9
BÖLÜM III	
AKIŞKAN KİNEMATİĞİ	14
3.1. Vektör Alanı	14
3.2. Yörüngeler	14
3.3. Tam Türev ve Bir Akışkan Elemanının İvmesi.	15
3.4. Akım Çizgileri	16
3.5. Yoğunluk	18
3.6. Kartezyen Koordinatlarda Akışkanın Sürek- lilik Denklemi	18
3.7. Akışkan Hareketinin Sınıflandırılması	20
3.8. Akı, Divergence	22
3.9. Akışkana Etki Eden Dış Kuvvetler	24
3.10. Hareketin Euler Denklemi	25
3.11. Düzlemsel Hareket	26
3.12. Analitik Fonksiyonlar ve Cauchy Teoremi ..	31
3.13. Düzlemsel İrrotasyonel Hareket.....	32
3.14. Düzlemsel Hidrodinamik Akı	34

3.15. Korunumlu Kuvvetler Etkisi Altında Düz- lemsel irrotasyonel hareket	36
--	----

BÖLÜM IV

AKIM VE SİRKÜLASYON TEOREMLERİ	38
4.1. Akım ve Sirkülasyon	38
4.2. Sirkülasyonun Sürekliliği	42
4.3. Karmaşık ilişkili Bölgelerde irrotasyonel Hareket	44
4.4. Akım ve Potansiyel Hız	46
4.5. Düzlemde Green Teoremi ve Bazı Özel Halleri	47
4.6. Girdap ve Sirkülasyon	57
KAYNAKLAR	70

AKIM VE SİRKÜLASYON

Yüksek Lisans Tezi

Adil MISIR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 1990

Ö Z

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çizgisel integralin tanımı ve temel özellikleri (ispatsız teoremlerle) verilmiştir. İkinci bölümde, çizgisel integralin vektörel yorumu yapılmıştır. Üçüncü bölümde, akışkanın hız vektör alanı gözönüne alınmıştır. Daha sonra, irrotasyonel ve potansiyel akım ile akım çizgileri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, akı ve sirkülasyon tanımları verilmiştir. Bunu takiben, bu tanımlarla ilgili bazı teoremlerde sıralanmıştır. Son olarak, kendi eksenı etrafında sabit bir ω açısal hızı ile dönen bir koninin durgun, ideal bir akışkana batırılırken bir Δt zaman aralığında ortaya çıkan toplam sirkülasyonun hesabı yapılmıştır.

FLOW AND CIRCULATION

M.Sc. Thesis

Adil MISIR

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

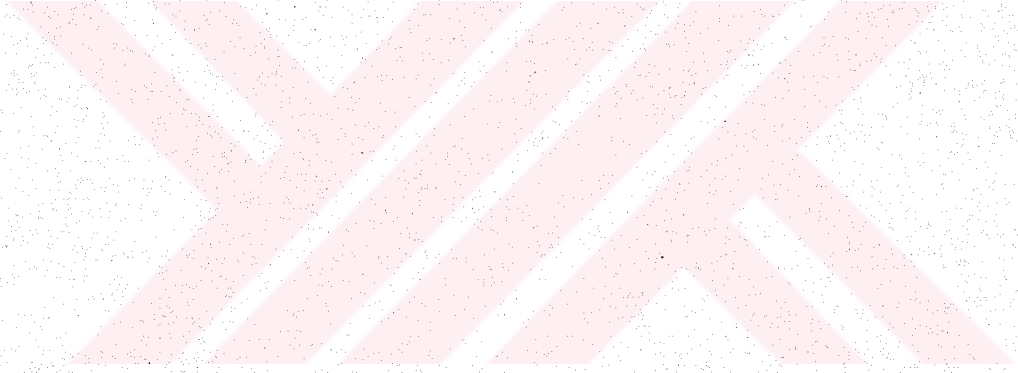
September 1990

ABSTRACT

This work is arranged into four chapters. In the first chapter, the definition and the main properties of the line integral has been given, (Proofs of the theorems are omitted). In the second chapter, vector interpretation of the line integral has been studied. In the third chapter, velocity vector field of a fluid is taken into consideration. Subsequently, connections between irrotational and potential flow and stream lines are investigated. In the fourth chapter definitions of flow and circulation are presented. This is followed by some theorems related to these definitions. Finally, the total circulation of a rotating cone, which has a constant angular velocity, formed at a time interval Δt while it's being sank into a static ideal fluid is calculated.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada yardımlarını esirgemeyen Hocalarım, arkadaşlarım ve danışman hocam M. Haluk Çelik'e teşekkürlerimi sunarım.



SEMBOLLER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
C	: Enazından sonlu nokta hariç diferansiyelle- nebilir eğri
$\ \cdot\ $	: Norm
$\vec{A} \cdot \vec{B}$	: $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörünün skalar (iç) çarpımı
$\vec{A} \times \vec{B}$	: $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörünün kartezyen (dış) çarpımı
A	: Düzlemin bir alt bölgesi
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$	: $f(x,y)$ fonksiyonunun x e göre kısmi türevi
∇	: Del operatörü $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	: x, y ve z eksenini yönündeki birim vektörler
D	: Uzayın bir alt bölgesi
u, v, w	: Hızın x, y ve z yönündeki bileşenleri
ρ	: Yoğunluk
∇^2	: Laplace operatörü
$P(x,y,z)$	: (x,y,z) noktasındaki basınç fonksiyon
$\frac{D}{Dt}$	: Green türev operatörü
i	: $\sqrt{-1}$ kompleks sayı
$d\tau$	: Hacim elemanı
$d\delta$	: Yüzey elemanı
ds, dr	: Yay uzunluğu
u	: Potansiyel
ε	: Yeterince küçük pozitif bir reel sayı
w	: Açısal hız

BÖLÜM I

ÇİZGİSEL İNTEGRALIN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

1.1. TANIMLAR VE GENEL KAVRAMLAR

1.1.1. TANIM: $I = [a,b]$ sonlu uzunluklu bir aralık olmak üzere, D_f ve D_g ler sırasıyla f ve g fonksiyonlarının tanım cümleleri olsunlar. $D_f, D_g \subseteq I$ iken

$$C = \{P(t) \in \mathbb{R}^2 : P(t) = (f(t), g(t)), t \in I\}$$

tanımlarsak C ye $\mathbb{R}^2$ de bir eğri (yay) denir.

$t \in I$ olmak üzere f, g çiftine C nin koordinat bileşenleri veya kısaca bileşenleri ve t ye de C eğrisinin parametresi denir.

C eğrisi aşağıdaki durumlara göre isimlendirilir.

- (a) $P(a) = P(b)$ ise kapalı eğri
- (b) $t_0, t_1 \in (a,b)$ ve $t_0 \neq t_1$ iken $P(t_0) \neq P(t_1)$ ise basit eğri
- (c) Eğer C eğrisi (a) ve (b) özelliklerini sağlarsa Jordan (Basit kapalı) eğrisi
- (d) Eğer f ve g fonksiyonlarının $I = [a,b]$ aralığı üzerinde birinci dereceden türevleri var ve türevleri sürekli iseler C ye düzgün eğri

(e) Eğer $I = [a,b]$ nin bir parçalanması $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ ve f, g fonksiyonları $k = 1, 2, \dots, n$ için $[t_{k-1}, t_k]$ üzerinde C^1 sınıfından iseler C ye sonlu nokta hariç diferensiyellenebilir eğri denir [1].

Bu eğri çeşitlerinin yönüde t -nin artan yönünde seçilirse pozitif aksi durumda negatif olur [1].

1.1.2. TANIM: C verilen bir eğri ve $h = h(x,y)$ de C üzerinde her noktada tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ nin bir parçalanması $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ olmak üzere buna karşılık gelen eğri üzerindeki Δ parçalanmasında alt yaylar üzerinde $\{p(t_0), p(t_1), \dots, p(t_n)\}$ şeklinde gözönüne alınsın. Ayrıca $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x_k = f(t_k)$, $y_k = g(t_k)$ olsun.

Her bir $[t_{k-1}, t_k]$ alt aralığı için $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ seçelim ve $Q_k = P(\xi_k) = (f(\xi_k), g(\xi_k))$ diyelim. Daha sonra,

$$S_{\Delta} = \sum_{k=1}^n h(Q_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Riemann toplamını oluşturalım.

Şimdi kabul edelimki her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta > 0$ sayısı ve $\|\Delta\| < \delta$ olduğunda $|S_{\Delta} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ vardır. Bu şekilde bulunan L değerine C eğrisi üzerinden h fonksiyonunun x -yönündeki çizgisel integrali denir ve

$$L = \int_C h dx$$

ile gösterilir. C eğrisi üzerinden h fonksiyonunun y-yönündeki çizgisel integralin tanımında benzer olarak yapılır [1].

1.1.1. TEOREM : C verilen bir eğri, h_1 ve h_2 fonksiyonları C üzerinde her noktada tanımlı fonksiyonlar ve a,b ler herhangi reel sayılar olmak üzere,

$$\int_C (ah_1 + bh_2) dx = a \int_C h_1 dx + b \int_C h_2 dx$$

ve

$$\int_C (ah_1 + bh_2) dy = a \int_C h_1 dy + b \int_C h_2 dy$$

dir [1].

1.1.2. TEOREM : Yalnızca uç noktaları çakışan herhangi iki C_1 ve C_2 olmak üzere $C = C_1 \cup C_2$ eğrisi için

$$\int_C h dx = \int_{C_1 \cup C_2} h dx = \int_{C_1} h dx + \int_{C_2} h dx$$

ve

$$\int_C h dy = \int_{C_1 \cup C_2} h dy = \int_{C_1} h dy + \int_{C_2} h dy$$

eşitlikleri mevcuttur [1].

1.1.3. TEOREM : $I = [a,b]$ aralığı üzerinde, $t \in I$ olmak üzere, $x = f(t)$, $y = g(t)$ ($f,g \in C^1(I)$) ile tanımlı eğri C ve $h = h(x,y)$ de C eğrisi üzerinde her noktada ta-

nımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\int_C h dx = \int_a^b h(f(t), g(t)) f'(t) dt$$

ve

$$\int_C h dy = \int_a^b h(f(t), g(t)) g'(t) dt$$

dir [1].

1.1.4. TEOREM : Eğer C eğrisinin uç noktaları A ve B le-
re açıkca ihtiyaç yoksa ve C eğrisinin yönü A dan B ye
iken -C de C nin ters yönünde yönlendirilmiş olmak üye-
re

$$\int_{-C} h dx = - \int_C h dx \quad \text{ve} \quad \int_{-C} h dy = - \int_C h dy$$

dir [1].

1.1.3. TANIM : C verilen bir eğri, M(x,y) ile N(x,y)
fonksiyonları C eğrisi üzerinde her noktada tanımlı fonk-
siyonlar olmak üzere, bunların çizgisel integrallerini

$$\int_C M(x,y) dx \quad \text{ve} \quad \int_C N(x,y) dy$$

olarak ifade edelim ve $\int_C M(x,y) dx + \int_C N(x,y) dy$ top-
lamı için $\int_C M(x,y) dx + N(x,y) dy$ gösterimini kullana-
lım [1].

BÖLÜM II

DÜZLEMDE ÇİZGİSEL İNTEGRALIN FİZİKSEL UYGULAMALARI

2.1. İş

$M(x,y)$ ile $N(x,y)$ bir C eğrisi üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonlar olsunlar.

$M(x,y)$ ile $N(x,y)$ yi R^2 uzayında

$$\vec{U} = (M(x,y), N(x,y)) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$$

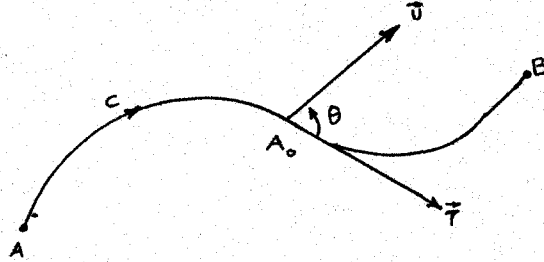
şeklinde bir vektörün x ve y -eksenleri üzerindeki bileşenleri olarak düşünebiliriz. Böylece, $\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy$ çizgisel integralinin basit bir yorumunu düşünebiliriz.

C eğrisini s yay parametresi olmak üzere $x = \phi(s)$, $y = \psi(s)$ şeklinde parametrelendirelim ve C eğrisinin bir A başlangıç ve bir B bitiş noktasına sahip olduğunu varsayalım.

Bu durumda A noktasında $s = 0$ ve B noktasında $s = l$ olacaktır; burada l ile C eğrisinin yay uzunluğu gösterilmektedir.

Şekil 2.1.1. deki gibi C eğrisinin üzerinde herhangi bir $A_0 = (x_0, y_0)$ noktasında $\vec{U}$ vektörünü gözönüne

alalım. Bu noktadaki C nin birim teğet vektörünü $\vec{T}$ ile gösterelim.



Şekil 2.1.1.

Ayrıca yine bu noktada $\vec{U}$ ile $\vec{T}$ vektörleri arasındaki açıyı θ ile gösterelim. O zaman,

$$\vec{T} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) = \left(\frac{d\phi}{ds}, \frac{d\psi}{ds} \right) = \frac{d\phi}{ds} \vec{i} + \frac{d\psi}{ds} \vec{j}$$

olmak üzere $\vec{U}$ vektörünün $\vec{T}$ birim vektörü yönündeki bileşeni

$$\vec{U} \cdot \vec{T} = M(x, y) \frac{dx}{ds} + N(x, y) \frac{dy}{ds} = M(x, y) \frac{d\phi}{ds} + N(x, y) \frac{d\psi}{ds}$$

olur ve

$$\int_C M(x, y) dy = \int_0^l \left(M(x, y) \frac{dx}{ds} \right) ds ,$$

$$\int_C N(x, y) dy = \int_0^l \left(N(x, y) \frac{dy}{ds} \right) ds$$

olduğundan

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_0^l \left[\left(M(x, y) \frac{dx}{ds} \right) + \left(N(x, y) \frac{dy}{ds} \right) \right] ds$$

$$= \int_0^{\ell} (\vec{U} \cdot \vec{T}) ds \quad (1)$$

elde edilir.

Özel olarak her bir $(x,y) \in C$ için,

$$\vec{U} = (M(x,y), N(x,y))$$

nin R^2 de bir kuvvet alanı olduğunu varsayalım.

O zaman (1) eşitliğini kullanarak

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

çizgisel integralinin, A dan B ye C eğrisi boyunca bir parçacığın hareketi esnasında $\vec{U}$ kuvvet vektörü ile yapılan W işini temsil ettiğini iddia edebiliriz [1].

Şimdi C nin parçalı olarak diferensiyellenebilir olduğunu ve yine s yay parametresi ile parametrelendirilmiş olduğunu kabul edelim. Ayrıca C boyunca A dan B ye hareket eden birim kütleli parçacığı göz önüne alalım.

Parçacığın hareketinin oluşumunda bir

$$\vec{F} = (M(x,y), N(x,y))$$

kuvvetinin etkisi altında kaldığını varsayalım. Hatta $\vec{F}$ nin büyüklüğü ve yönü de parçacığın konumuna göre değişebilir olsun. Bu durumda C boyunca $\vec{F}$ kuvvet ile yapılan "iş" ;

$$W = \int_0^l (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad (2)$$

dir [1].

2.1.1. TEOREM: $R, \mathbb{R}^2$ nin açık irtibatlı bir alt kümesi (genellikle R ye $\mathbb{R}^2$ nin bir bölgesi denir) olmak üzere f de R de C^1 sınıfından tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

Ayrıca $\vec{U} = \nabla f$, f ile birleştirilmiş gradient alanı olsun. A ve B , R de keyfi seçilmiş iki nokta iken, $C \subseteq R$ eğrisi de A başlangıç B bitiş noktalı ve parçalı diferensiyellenebilir eğri olsun. C eğrisi üzerindeki herhangi bir $P = (x,y)$ noktası için,

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

olarak yazılabilir; ayrıca

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = f(B) - f(A)$$

dır [2].

2.1.1. TANIM: $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ve $a < b, c < d$ olmak üzere

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} \phi_1 : [a,b] & \xrightarrow{\text{sürekli}} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \phi_1(x) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} \phi_2 : [a,b] & \xrightarrow{\text{sürekli}} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \phi_2(x) \end{array}$$

şeklinde tanımlı iki fonksiyon ve $\forall x \in [a,b]$ için

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \quad \text{olsun.}$$

Yukarıdaki şartları sağlayan (x,y) noktalarının cümlesi A_1 olsun. Yani,

$$A_1 = \{(x,y) : x \in [a,b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \phi_1, \phi_2 \in C^1([a,b])\}$$

olsun. Bu tip bölgelere 1. çeşit (x-yönünde temel) bölge denir.

$$(b) \begin{array}{ccc} \psi_1 : [c,d] & \xrightarrow{\text{sürekli}} & \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow & \psi_1(y) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} \psi_2 : [c,d] & \xrightarrow{\text{sürekli}} & \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow & \psi_2(y) \end{array}$$

şeklinde tanımlı iki fonksiyon ve $\forall y \in [c,d]$ için $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ olsun. Bu şartları sağlayan (x,y) noktalarının cümlesine A_2 diyelim, yani;

$$A_2 = \{(x,y) : y \in [c,d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \psi_1, \psi_2 \in C^1([c,d])\}$$

olsun. Bu tip bölgelere 2. çeşit (y-yönünde temel) bölge denir [1].

(c) 1. çeşit ve 2. çeşit bölgeleri içeren bölgelere 3. çeşit (temel bölge) bölge denir.

2.2. DÜZLEMDE GREEN TEOREMİ

A bir 3. çeşit bölge ve C de, A'nın sınırından oluşan pozitif yönlendirilmiş bir eğri olsun.

$M = M(x,y)$ ve $N = N(x,y)$ fonksiyonları A da C^1 sınıfından fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_C M dx + N dy = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

dir [2].

Green teoremi, vektör değerli fonksiyonlar için de kullanışlıdır. Eğer M ve N fonksiyonlarını sırasıyla $\vec{U}$ nun x- ve y- yönündeki bileşenleri olarak alırsak, (1) değeri

$$\int_C M dx + N dy = \int_0^l (\vec{U} \cdot \vec{T}) ds$$

şekline dönüşür; burada s, C eğrisi boyunca uzunluk ve $\vec{U} \cdot \vec{T}$ de $\vec{U}$ vektörünün, C eğrisi üzerinde verilen herhangi bir noktada, o noktadaki birim teğet yönündeki bileşenidir.

Eğer $\vec{U}$ yu üçüncü bileşeni sıfır ($z = 0$) olan bir üç bileşenli vektör olarak düşünersek; yani, $\mathbb{R}^3$ de $\vec{U}$ vektörü $x \cdot y$ -düzlemi üzerinde bulunuyor ise, o zaman herhangi bir $P \in \mathbb{R}^3$ için $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ değeri

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (M(x, y), N(x, y), 0) \end{aligned}$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü olmak üzere $(\text{Curl} T)(P)$ vektörünün z-bileşeni gibi düşünülebilir.

Eğer $(\text{Curl} T)(P)$ nin z-bileşeni yerine $(\text{Curl} T)(P)_z$ gösterimini kullanırsak, Green teoremini,

$$\int_0^l (\vec{U} \cdot \vec{T}) ds = \iint_A (\text{Curl} T)(P)_z dx dy$$

şeklinde ifade edebiliriz [1].

Burada ℓ , C nin uzunluğu ve C eğrisinde $\mathbb{R}^2$ nin A temel bölgesi sınırında yönlendirilmiş bir eğridir.

2.2.1. TANIM : $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ herhangi fonksiyonlar olmak üzere $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ açılımına x ve y değerlerinin 1. diferensiyel formu veya kısaca 1-form denir. Ayrıca boş olmayan bir A kümesi için $\omega \in C^1(A)$ ise ve her $P \in A$ için $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ gerçekleşiyorsa ω -ya A da kapalıdır denir.

2.2.2. TANIM : $A, \mathbb{R}^2$ nin bir 3. çeşit (temel) bölgesi, M ve N , A da sürekli fonksiyonlar ve ω da tanım 2.2.1.e uygun bir 1-form olsun.

Eğer herhangi $A_1, A_2 \in A$ noktaları için A bölgesinde yatan A_1 başlangıç B_1 bitiş noktalı herhangi iki eğri C_1 ve C_2 iken

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega$$

oluyorsa

$$\int_C \omega = \int_C M dx + N dy$$

çizgisel integraline " A da yoldan bağımsızdır" denir.

2.2.1. TEOREM : A , M ve N tanım 2.2.2. de tanımlandıkları şekilde olsunlar. Eğer A nın içindeki her kapalı, yön-

lendirilmiş, uygun C eğrisi için

$$\int_C \omega = \int_C M dx + N dy = 0$$

oluyor ise, $\int_C M dx + N dy$ integrali A da yoldan bağımsızdır [1].

2.2.3. TANIM: Eğer $\vec{F} = \nabla f$, A da kuvvet alanı C, yönlendirilmiş bir eğri ve $M = \frac{\partial f}{\partial x}$, $N = \frac{\partial f}{\partial y}$ ise

$$\int_C \omega = \int_C M dx + N dy = \int_C \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

dir ve iş bu C eğrisi üzerinde bir parçacığın eğirinin başlanış noktasından bitiş noktasına kadar olan hareketidir.

Eğer özel olarak C eğrisi A bölgesinde kapalı şekilde yayılmış ve M ve N de tanım 2.2.2. deki şartlara uyuyorsa ve ayrıca

$$\int_C \omega = \int_C M dx + N dy = 0 \quad \text{ise} \quad \vec{F} \text{ kuvvetine çizgi}$$

boyunca konservatif (korunumlu) tir denir.

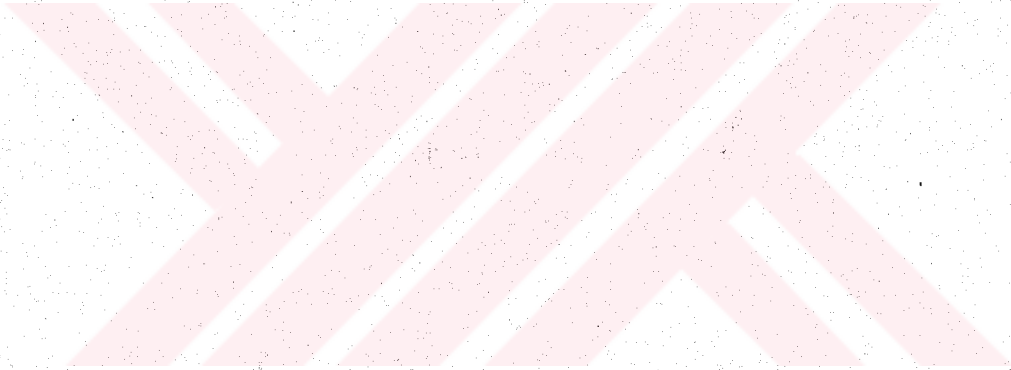
2.2.2. TEOREM: M ile N, A bölgesinde sürekli fonksiyonlar ve $f \in C^2(A)$ olmak üzere, her $P \in A$ için

$$\omega = df$$

oluyor ise

$$\int_C \omega = \int_C M dx + N dy$$

integrali A da yoldan bağımsızdır.



BÖLÜM III

AKIŞKAN KİNEMATİĞİ

3.1. VEKTÖR ALANI

Uzayın bir D bölgesinin herhangi bir M noktasına bir vektör karşılık getiren bir dönüşüme vektör alanı denir.

$\vec{V}$ uzayın bu D bölgesi üzerinde bir vektör alanı ise, bu durumda her bir $M \in D$ için $\vec{V}(M)$ bir vektör olacaktır, kısalık için bu vektörü nokta belli olduğunda $\vec{V}$ ile de göstereceğiz.

Bu vektörün koordinat eksenleri üzerindeki X, Y, Z izdüşümleri M noktasının x, y, z -koordinatlarının $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ gibi üç fonksiyonu olacaktır.

Bu üç fonksiyonun ve kısmi türevlerinin M noktasının değişim bölgesinde sonlu ve sürekli olduklarını kabul edeceğiz.

3.2. YÖRÜNGELER

Sabit $Oxyz$ -eksenlerine göre hareket eden bir akışkanı gözönüne alalım. Her $M(x, y, z)$ noktasında ve her anda, bu noktada bulunan akışkan elemanın $\vec{V}(u, v, w)$ hızının tanımlanabileceğini kabul ediyoruz. Bu hız genellikle-

le x, y, z ve t den ibaret olan dört değişkene bağlıdır.

Hızın tanımlanabileceğini kabul ettiğimiz gibi bu hızın ve bize gerekli olan türevlerinin sürekli olduklarını da kabul edeceğiz.

Bir akışkanın hızlarının teşkil ettiği vektör alanı; yani, $\vec{V}$ nin x, y, z ve t nin fonksiyonları olan u, v, w bileşenleri her noktada ve her anda elde edilebiliyorsa, bu akışkanın hareketini biliniyor kabul edeceğiz.

Ayrıca $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ ve $w(x, y, z, t)$ fonksiyonlarının verildiğini varsayalım ve akışkanın çeşitli elemanlarının hareketini analiz etmeye çalışalım.

Bu elemanlardan birinin x, y, z koordinatları zamanın (bilinmeyen) fonksiyonlarıdır. Aynı elemanın hızının izdüşümleri $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ve $\frac{dz}{dt}$ dir. Bu değerler sırasıyla u, v ve w ya eşitlenirse,

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemler x, y, z yi t cinsinden belirlerler [3].

3.3. TAM TÜREV VE BİR AKIşKAN ELEMANININ İVMESİ

Herhangi bir $\psi(x, y, z, t)$ fonksiyonu gözönüne alalım.

Bu fonksiyonun kısmı türevleri $\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ve $\psi_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ olsunlar.

Bir akışkan elemanının hareketini takip ederek ψ fonksiyonunun zamana göre tam türevini $\frac{d\psi}{dt}$ ile göstereceğiz. Bu taktirde x,y ve z değişkenleri t-nin fonksiyonlarıdır ve ψ de zamanın bir bileşke fonksiyonudur. Şu halde,

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi_x \frac{dx}{dt} + \psi_y \frac{dy}{dt} + \psi_z \frac{dz}{dt} + \psi_t$$

dir. Bu ise

$$\frac{d\psi}{dt} = u \cdot \psi_x + v \psi_y + w \psi_z + \psi_t$$

şeklinde yazılabilir.

Özel olarak akışkan elemanının ivmesinin izdüşümlerini bulmak için, hızın izdüşümlerinin tam türevlerini hesaplamak yeterli olacaktır [4]. Bu ivmenin izdüşümleri

$$J_x = \frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$J_y = \frac{dv}{dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$J_z = \frac{dw}{dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

den ibaret olacaktır.

3.4. AKIM ÇİZGİLERİ

Herhangi bir t-anında öyle bir eğri gözönüne alalım ki bu eğri, her noktasında o noktaya karşılık gelen

hız vektörüne teğet olsun. Bu eğriye "akım çizgisi" denir.

Eğer dx, dy ve dz böyle bir eğri boyunca alınan diferensiyelleri gösterirse,

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

dir. t -sabit olduğundan bu diferensiyel denklem örneğin x ve y yi z nin bir fonksiyonu olarak belirler [5].

Bu denklemlerin integrasyonu, göz önüne alınan t -anındaki akım çizgilerini verir. Bu akım çizgileri iki parametrelili aile teşkil ederler; bu eğrilerden uzayın her noktasından genellikle bir tane geçer [5].

Genel halde u, v ve w izdüşümleri t -ye tabidirler. Bu durumda hareket "daimi (sürekli) değildir" denir. Akım çizgilerinin şekli zamana bağlıdır ve yörüngelerle intibak etmezler.

Geometrik Yorum : Bir t_0 anında M_0 noktasında bulunan akışkan elemanı çok küçük bir dt zamanı zarfında L_0 gibi bir akım çizgisinin bir $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{V} \cdot dt$ parçasını çizer, fakat bu elemanın $t_0 + dt$ anında M_1 noktasına geldiğindeki hızı, t_0 anında M_1 noktasındaki hızından farklıdır ve genellikle L_0 akım çizgisine teğet değildir. Sürekli hareket adı verilen çok önemli bir kısım hareketlerde herhangi bir noktadaki (u,v,w) hızı zamana tabi değildir. Demek ki bu hareketler için yörüngeler, akım çizgileri

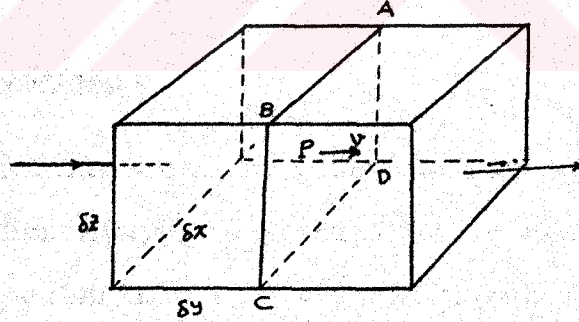
ile intibak ederler.

3.5. YOĞUNLUK

Sürekli bir akışkan yoğunluğunun (birim hacime ait kütlenin) her $M(x,y,z)$ noktasında ve her t -anında x,y,z ve t -değişkenlerinin sürekli bir $\rho = \rho(x,y,z,t)$ fonksiyonu olarak tanımlanabileceğini kabul ediyoruz.

M noktasını ihtiva eden bir $d\tau$ hacim elemanının kütlesi $dm = \rho \cdot d\tau$ dır. Eğer akışkan sıkıştırılamayan bir akışkan ise ρ yoğunluğu sabit ve genellikle bellidir. Eğer akışkan sıkıştırılabilen bir akışkan ise $\rho(x,y,z,t)$ fonksiyonu önceden bilinmez.

3.6. KARTEZYEN KOORDİNATLARDA AKIŞKANIN SÜREKLİLİK DENKLEMİ



Şekil 3.6.1.

Şekil. 3.6.1. de olduğu gibi, $P(x,y,z)$ noktası; kenarları koordinat eksenlerine paralel, $\delta x, \delta y, \delta z$ uzunluklu ve tamamen akışkanın içinde bulunan bir kübik şeklin merkezi olsun. Bir t -anında, P noktasında akışkanın yo-

ğunluğu ve (u,v,w) hızı x,y,z ve t nin genel fonksiyonları olsunlar.

P noktasından geçen ve $\delta z \delta x$ alanlı yüzeylerin arasında kalan bir kesit ABCD olsun.

t den $t + \delta t$ ye olan zaman aralığında y -ekseni yönünde ABCD boyunca geçen akışkan kütlesi :

$$\rho v \delta z \delta x \delta t = f(x,y,z,t) \delta z \delta x \delta t$$

olur. Bu yüzden bloğun içindeki kütlenin oranı $\delta z \delta x$ alanlı iki yüzden geçen akım ile artmış olacaktır ve bu oran;

$$\begin{aligned} & [f(x,y - \frac{1}{2} \delta y, z, t) - f(x,y + \frac{1}{2} \delta y, z, t)] \delta z \delta x \\ &= \left[f(x,y,z,t) - \frac{1}{2} \delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - f(x,y,z,t) - \frac{1}{2} \delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \delta z \delta x \\ &= - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z = - \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) (\rho v) \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

dir.

Benzer olarak $\delta x \delta y$ ve $\delta y \delta z$ alanlı yüz çiftlerinden geçen kütlenin artış oranı, sırasıyla,

$$- \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) (\rho w) \delta x \delta y \delta z \quad \text{ve} \quad - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\rho u) \delta x \delta y \delta z$$

olarak bulunur.

t -anında blok içindeki toplam kütle $\rho \delta x \delta y \delta z$ olduğundan, artış oranı $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \delta x \delta y \delta z$ olmalı ve bu artış elde ettiğimiz artışlar toplamına eşit olmalıdır. Yani,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \delta x \delta y \delta z = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] \delta x \delta y \delta z$$

olmalıdır. Bunun sonucu olarak,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

olur. Bu eşitliğe, kartezyen koordinatlarda akışkanın "Süreklilik denklemi" denir.

Süreklilik denklemini, kısmi türevlerin denk gösteriminden yararlanarak yeniden düzenlersek,

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0.$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Eğer özel olarak akışkan sıkıştırılamaz bir akışkan ise, akışkanın her noktasında ρ aynı bir sabite eşit olacağından bu hal için süreklilik denklemi

$$u_x + v_y + w_z = 0$$

olur.

3.7. AKIŞKAN HAREKETİNİN SINIFLANDIRILMASI

Uzayın bir D bölgesini kaplayan akışkan kütlesindeki her bir (x,y,z) noktasında ve t -anında bir $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$ hız vektörünün var olduğunu kabul etmiştik.

Eğer $\vec{V}$ vektörünü bileşenleri cinsinden ifade edersek,

$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\vec{i} + v(x,y,z,t)\vec{j} + w(x,y,z,t)\vec{k}$$

şeklinde olup bu bileşenler uzayda her t -anında nokta-

dan noktaya değişeceklerdir.

$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ şeklinde verilen bir skalar vektör alanı için "divergence" kısaca div her bir noktanın komşuluğundan, dışa doğru olan net hızın ölçüsüdür ve $\text{div } \vec{V} = 0$ şartı sıkıştırılmaz akışkan akımı olarak bilinir, aynı skalar vektör alanının "Curl" ü ise akışkanın açısal hızının ölçüsüdür. Eğer akışkan sabit bir eksen (z-ekseni) etrafında w açısal hızı ile dönüyorsa, $\vec{V}$ nin Curl'u her zaman $2w = \vec{w} \cdot \vec{k}$ ya eşittir [2].

Eğer $\text{Curl } \vec{V} = 0$ ise akışkanın hareketi "irrotasyonel" aksi halde "rotasyonel" dir denir.

Eğer $\text{Curl } \vec{V} = 0$ ise $\vec{V} = \text{grad } \psi$ olacak şekilde bir ψ skalar fonksiyonu vardır. Tersine olarak, eğer akışkanın hızına karşılık gelen $\vec{V}$ vektörü bir ψ skalar fonksiyonunun gradientine karşılık geliyorsa; yani, $\vec{V} = \text{grad } \psi$ ise $\text{Curl } \vec{V} = 0$ dir [2].

Bu şekilde bulunan ψ fonksiyonuna "potansiyel hız fonksiyonu" veya $\vec{V}$ vektör alanı ψ kuvvet fonksiyonuna veya potansiyeline bağlıdır denir. Eğer gözönüne alınan alan bir kuvvet alanı ise potansiyel diye $-\psi$ fonksiyonuna denir [3].

Potansiyel fonksiyonu $\text{Curl } \vec{V} = 0$ şartını gerektirdiğinden akım irrotasyonel olur ve bu yüzden potansiyel akımla irrotasyonel akım genellikle aynı anlamda kullanılırlar.

Eğer akışkan hareketi irrotasyonel ve akışkan sıkıştırılmaz ise $\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi = 0$ eşitliği sağlanır. Yani,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

sağlanır.

Ohalde ψ potansiyel fonksiyonu tanımlı olduğu bölgede harmonik bir fonksiyondur.

3.8. AKI, DIVERGENCE

M noktasını ihtiva eden bir yüzey elemanı $d\sigma$ olsun. Bu elemanın normali üzerinde $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ birim vektörü yardımıyla tanımlanan pozitif bir yön seçelim.

$\vec{V}(M)$ vektörünün seçilen pozitif yönde $d\sigma$ elemanından geçen akısı, tanım olarak $\vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$ dır; burada $\vec{V} \cdot \vec{n}$ ifadesi bu iki vektörün skalar çarpımını göstermektedir. O halde bu akıyı $\vec{V} = \vec{V}(u, v, w)$ ve $\vec{n} = \vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ olmak üzere $(u\alpha + v\beta + w\gamma)d\sigma$ şeklinde de ifade edebiliriz.

Normal üzerinde seçilen pozitif yön değiştirilirse akıda işaret değiştirir. Sonlu bir yüzey parçasından geçen akımın değeri hemen yazılabilir: bu akı, elemanal akıların toplamı olarak

$$\iint (u\alpha + v\beta + w\gamma)d\sigma$$

ile ifade edilecektir.

Şimdi, vektör alanının tanım bölgesi içinde bulunan ve uzayda kapalı bir S yüzeyi ile sınırlanmış olan basit irtibatlı bir D hacimli bölgesini gözönüne alalım.

S'nin dış normalinin birim vektörüne $\vec{n}$ diyelim. $d\tau$ hacim elemanı olmak üzere, S den geçen akımın

$$\iint_S (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau$$

bağıntısını gerçeklediğini divergence teoremi yardımıyla kolayca söyleyebiliriz.

Yukarıdaki formülün birinci tarafının eksenlerin seçilişinden bağımsız olduğu aşıkardır; o halde ikinci taraf ve bunun sonucu olan

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ifadesi de eksenlerin seçilişinden bağımsızdır. Bu ifadeye $\vec{V}$ vektörünün "divergence" i denir. Divergence, vektör alanına bağlı bir skaldır ve dik eksenler nasıl olursa olsun $\vec{V}(M)$ vektörünün bileşenleri cinsinden,

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

formülü ile ifade edilir.

Eğer D bölgesinin sınırı $S_1, S_2, \dots, S_n$ gibi birden fazla kapalı yüzeylerden oluşmuş ise, bu yüzeylerin normallerini D'nin dışına doğru yöneltmek şartıyla ve her

bir $i = 1, 2, \dots, n$ için $d\sigma_i$, S_i yüzeyinin yüzey elemanı olmak üzere

$$\iint_{S_1} (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma_1 + \iint_{S_2} (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma_2 + \dots + \iint_{S_n} (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma_n = \iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau$$

eşitliği geçerlidir.

3.9. AKIŞKANA ETKİ EDEN DIŞ KUVVETLER

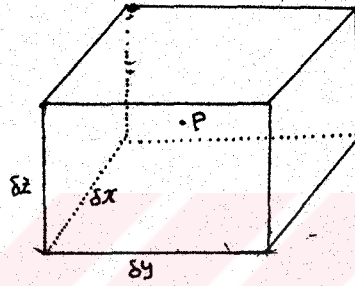
Gözönüne alınan akışkanın, kütlelerle orantılı olan dış kuvvetlerin etkisi altında kaldığını varsayacağız. Sözü geçen kuvvetlere bundan sonra ifadeleri kısaltmak amacıyla bazan "kütle kuvvetleri" de diyeceğiz.

$d\tau$ hacim elemanına etki eden kütle kuvvetini $\rho \cdot d\tau \cdot \vec{F}$ ile göstereceğiz; burada $\vec{F}$ vektörü birim kütleye etki eden kuvvettir ve bunun X, Y ve Z izdüşümlerinin x, y, z ve t -nin sürekli fonksiyonları olduğunu varsayacağız. Çok rastlanan hallerde kütle kuvvetleri akışkanın ağırlığından ibarettir. Böyle bir durumda oz-ekseni olarak yükselen düşey alınırsa, g yerçekimini göstermek üzere $X = Y = 0$, $Z = -g$ dir.

En genel halde x, y, z ve t değişkenlerine bağlı olan X, Y ve Z fonksiyonlarını biliniyor kabul edecek ve bir çok hallerde $\vec{F}$ vektör alanı için bir $U(x, y, z, t)$ potansi-

yelinin var olduğunu ($\vec{F} = \text{grad } U(x,y,z,t)$) yani; $X = U_x$, $Y = U_y$, $Z = U_z$ bağıntılarının mevcut olduğunu kabul edeceğiz. Bu taktirde kütle kuvvetleri "konservatiftir" denir. Kütle kuvvetleri akışkanın ağırlığından ibaret olduğu zaman bu durum yine geçerlidir ve $U = -gz$ elde edilir.

3.10. HAREKETİN EULER DENKLEMİ



Şekil 3.10.1.

Şekil 3.10.1. deki gibi kübik şeklin içindeki akışkanın t -anındaki hareketini düşünelim. Bu kübik şeklin üzerindeki basınçlar, dış kuvvetlerle birlikte akışkanın kübik şeklin altı yüzünde artan itmelerdir.

Eğer $P(x,y,z,t)$ P noktasındaki basınç ise $\delta z \delta x$ alanlı yüzler üzerindeki bileşke itmeler

$$\left[P\left(x, y - \frac{1}{2} \delta y, z, t\right) - P\left(x, y + \frac{1}{2} \delta y, z, t\right) \right] \delta z \delta x = -P_y \delta x \delta y \delta z$$

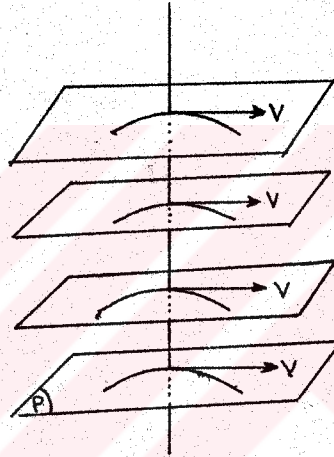
olacaktır ve bu değer oy -yönündeki itmenin değeridir.

Eğer (X,Y,Z) P noktasındaki akışkanın birim kütle sinin dış kuvvetleri ise oy -yönündeki element üzerinde toplam basınç $= Y \cdot \rho \cdot \delta x \delta y \delta z - P_y \delta x \delta y \delta z = \rho \cdot \delta x \delta y \delta z \left(\frac{Dy}{Dt} \right)$

olur. Bu yüzden $\frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{P}{\rho} \frac{Y}{\rho}$ bulunur ve benzer olarak $\frac{Du}{Dt} = X - \frac{P}{\rho} \frac{X}{\rho}$ ve $\frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{P}{\rho} \frac{Z}{\rho}$ eşitliklerini elde ederiz.

Hızın bileşenleri süreklilik denklemini ve bu yeni elde ettiğimiz üç eşitliği sağlarlar. Eğer ρ yoğunluğu sabit veya P basıncının bir fonksiyonu olarak biliniyorsa u, v, w ve P bilinmeyenli dört denkleme sahip oluruz.

3.11. DÜZLEMSEL HAREKET



Şekil 3.11.1.

Bir akışkan hareketinde, bütün elemanların hızları sabit bir P düzlemine daimi sürette paralel kalırsa ve P düzlemine dik bir doğru üzerinde bulunan elemanların hızları her anda aynı ise "akışkanın hareketi P düzlemine paraleldir" denir. (O halde akışkanın düzlemsel hareketinde hızlar alanı düzlemseldir.)

Yukarıdaki şartlar altında, yörüngelerin ve akım çizgilerinin P düzlemine paralel düzlemlerde bulunan

düzlemsel eğriler olduğu aşıkardır.

Bundan başka, P düzlemine paralel olan her düzlemde hareket aynı olduğundan hareketin bu düzlemlerin birinde incelenmesi yeterli olacaktır.

Bundan sonra P düzlemi olarak $x \cdot y$ düzlemini alacağız. O halde düzlemsel harekette hızın üçüncü bileşeni olan w özdeş olarak sifira eşittir, diğer u ve v izdüşümleri z ye bağlı değildir ve bu iki izdüşüm yalnız x, y ve t nin fonksiyonlarıdır.

Bu çeşit hareketlerde (x, y, z) noktasındaki şartlarla $(x, y, 0)$ noktasındaki şartlar aynı olduğundan akışkanın tüm kütlesi ile ilgilenmek yerine $x \cdot y$ düzleminde akışkan parçacığının bir tabakası ile ilgilenmek yeterli olacaktır ki bu parçacığı genellikle $x \cdot y$ düzleminde $z = 0$ ve $z = 1$ düzlemleri arasında kalan birim yükseklikli bir tabaka olarak alacağız.

Bu durum için akım çizgisinin diferensiyel denklemi

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{veya} \quad vdx - udy = 0$$

dır ve sıkıştırılamaz akışkanın süreklilik şartı

$$u_x + v_y = 0 \quad \text{veya} \quad u_x = -v_y$$

olur ki bu da $vdx - udy$ gösterimine karşılık bir Ψ tam diferensiyel fonksiyonunun var olduğunu gösterir.

Eğer özel olarak $v = \psi_x$ ve $u = -\psi_y$ seçersek

$$vdx - udy = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi$$

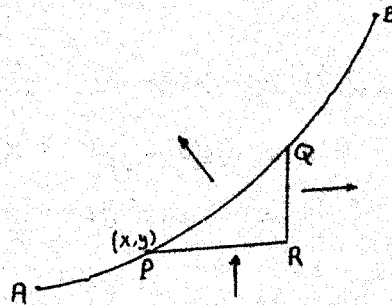
olur. ψ fonksiyonu akım fonksiyonu olarak adlandırılır ve $\psi = \text{sabit}$ eğrileri $x \cdot y$ düzlemindeki akım çizgileridir.

3.11.1. ÖRNEK : a, b, c ler reel sabitler veya t -nin fonksiyonları olmak üzere, eğer $u = -ax + b$, $v = ay + c$ ise süreklilik şartı sağlanır ve

$$vdx - udy = (ay + c)dx + (ax - b)dy = d(axy + cx - by)$$

olur. Böylece özel olarak $\psi(x, y)$ fonksiyonunu $axy + cx - by$ olarak alabiliriz ve bu durum için akım çizgileri $axy + cx - by = \text{sabit}$ olan hiperboller olur.

Şimdi $x \cdot y$ düzleminde yatan, birim uzunluklu ve düzleme dik üreteçleri olan silindirik bir yüzüye dayanan bir eğri gözönüne alalım. Silindirik yüzeyden geçen çapraz akışkan kütlelerinin hızı eğriden çapraz geçen akıma denktir [4].



Şekil 3.11.2

P ve Q bu eğri üzerinde birbirine çok yakın komşu iki nokta olsun. Şekil 3.11.2. de olduğu gibi Ox- ve Oy- eksenlerine paraleller çizerek PR ve QR doğrularını çizelim.

Süreklilik düşüncesi gösterir ki, PQ boyunca sağdan sola geçen çapraz akım = (Oy-yönünde PR den geçen çapraz akım) - (Ox-yönünde QR den geçen çapraz akım) = $\rho(v\delta x - u\delta y) = \rho\delta\psi$.

Bu yüzden, sağdan sola AB sonlu yayı boyunca geçen çapraz akım = $\rho \cdot \int_A^B d\psi = \rho[\psi(B) - \psi(A)]$ olur.

Burada $\psi(A)$ A noktasında akım fonksiyonunun değeridir. Ayrıca, eğer V hızı P noktasında eğriye normal hız ise sağdan sola PQ dan geçen çapraz akım = $\rho \cdot V \cdot \delta S = \rho \cdot \delta\psi$ olur ve böylece $V = \psi_s$ olarak bulunur.

Ayrıca düzlemsel sıkıştırılamaz akışkanlarda hareketin potansiyel olma şartı $\text{Curl } \vec{V} = 0$ yardımıyla

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

olarak bulunur. Bu durum için hızlar alanının rotasyonelli ve süreklilik şartından divergence si sıfırdır.

$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ denkleminde göre $\psi(x,y,t)$ gibi bir hızlar potansiyeli var olup $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ dir [2].

Benzer olarak $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ denklemi $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ olacak şekilde bir Ψ fonksiyonunun var olduğunu gösterir.

Eğer hareket sürekli ise ψ ve Ψ fonksiyonları t-den bağımsız olurlar ve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

temel denklemlerinde ψ fonksiyonu kullanılırsa bu denklemler genellikle,

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} - U \right) = 0$$

denklemini üretirler [6]. Buradan

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} - U = C(t)$$

çıkar. Burada V hızının büyüklüğü $v^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2$ ve c(t) de zamanın keyfi fonksiyonunu göstermektedir.

Hızlar potansiyeli bilindiği taktirde

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} - U = c(t)$$

denklemini P basıncını bulmamıza yarar.

Düzlemsel sıkıştırılamaz irrotasyonel akımlarda ψ potansiyel ve Ψ akım fonksiyonları akışkanın süreklilik bölgesinde harmonik fonksiyonlar ve

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann özelliklerini sağladıklarından, bu akımlardan birinin bilinmesi halinde öbürünü kolayca bulabiliriz.

Ayrıca düzlemsel akımda sabit akım fonksiyonunun potansiyel akım çizgileri sabit potansiyel hızın çizgilerine diktir. Bunu göstermek için

$$\left[\frac{dy}{dx} \mid \right]_{\Psi \equiv \text{sbt}} \cdot \left[\frac{dy}{dx} \mid \right]_{\psi \equiv \text{sbt}} = -1$$

olmasına bakılır.

3.12. ANALİTİK FONKSİYONLAR VE CAUCHY TEOREMİ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{ve} \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

denklemlerini ele alırsak, bu denklemler

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

eşitliklerini verir. Bu eşitlikler ise $z = x + iy$ kompleks değişkenine bağlı olan $f(z) = \psi(x,y) + i\Psi(x,y)$ fonksiyonunun dx, dy sonsuz küçüklerinin seçilişinden bir $\frac{df}{dz}$ türevine sahip olması şartından ibarettir. Bu türevin değeri ise

$$\frac{df}{dz} = \psi_x - i\psi_y = u - iv$$

dir [6].

Bu taktirde f ye z nin "analitik fonksiyonu" denir ve $f(z)$ yazılır. $z = x + iy$ kompleks değişkenini geometrik olarak $x \cdot y$ düzleminde göstereceğiz. Bu düzlemde basit bir bölge alalım eğer bu bölgede ϕ ve Ψ fonksiyonları ile bunların

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

eşitliklerini gerçekleyen birinci kısmı türevleri uniform ve sürekli iseler $f(z)$ ($f = \phi + i\Psi$) fonksiyonu sözü geçen bölgede düzgün (holomorf) dır denir [6].

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ bağıntıları gözönüne alınan bölgede bulunan kapalı C eğrisi ne olursa olsun;

$$\int_C f(z) dz = \int_C (\phi dx - \Psi dy) + i \int_C \phi dy + \Psi dx = 0$$

olmasını gerektirir. Bu son ifadeye "Cauchy teoremi" denir ve analitik fonksiyonların özellikleri bu teoremden çıkartılır.

3.13. DÜZLEMSEL İRROTASYONEL HAREKET

Bu çeşit hareketlerde hızın bileşenleri u ve v ler

$$(i) \quad v_x - u_y = 0$$

$$(ii) \quad u_x + v_y = 0$$

şartlarını sağlarlar.

(i) eşitliği $u dx + v dy$ nin tam diferensiyel oldu-

ğunu gösterir, böylece $u = -\psi_x$, $v = -\psi_y$ olmak üzere

$$-d\psi = udx + vdy$$

yazabiliriz [4]. ψ fonksiyonu potansiyel hız olarak tanımlıdır ve açıktır ki burada gözükmeyen sabit toplamı zamanın fonksiyonudur.

$u = -\psi_x$ ve $v = -\psi_y$ değerlerini (ii) de kullanırsak,

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (iii)$$

elde ederiz. Daha önceden Ψ akım fonksiyonu olmak üzere $u = -\Psi_y$ ve $v = \Psi_x$ olduğunu görmüştük. Bu değerleri (i) de kullanırsak

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0$$

elde ederiz.

Ayrıca $-u = \psi_x = \Psi_y$ ve $-v = \psi_y = -\Psi_x$ bağıntısı vardır.

Şimdi şekil 3.11.2. yi yeniden ele alıp PQ ve PR leri δs ve δn nin çizgi elemanları olarak x-ekseni ile θ ve $\theta + \frac{\pi}{2}$ açısı yapacak yönde çizelim.

PQ yönünde P noktasında hızın bileşeni :

$$u \cos \theta + v \sin \theta = -\psi_x \left(\frac{dx}{ds} \right) - \psi_y \left(\frac{dy}{ds} \right) = -\psi_s$$

dir ve PR yönündeki P noktasındaki hızın bileşini,

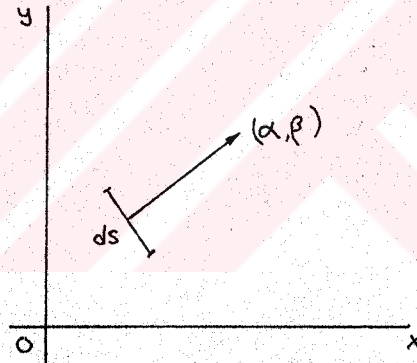
$$-u \sin \theta + v \cos \theta = \psi_y \left(\frac{dy}{ds} \right) + \psi_x \left(\frac{dx}{ds} \right) = \psi_s$$

dir.

Eğer ψ nin ψ_1 ve ψ_2 değerleri (iii) şartını sağlıyorsa $\psi_1 + \psi_2$ de aynı şartı sağlar.

Bunun sonucu olarak eğer iki hareket süperpost ise ve bu hareketlerin potansiyelleri sırasıyla ψ_1 ve ψ_2 ise süperpost hareketin potansiyeli $\psi_1 + \psi_2$ olur. Benzer olarak süperpost hareketin akım fonksiyonu akım fonksiyonlarının toplamıdır [4].

3.14. DÜZLEMSEL HİDRODİNAMİK AKI



Şekil 3.14.1.

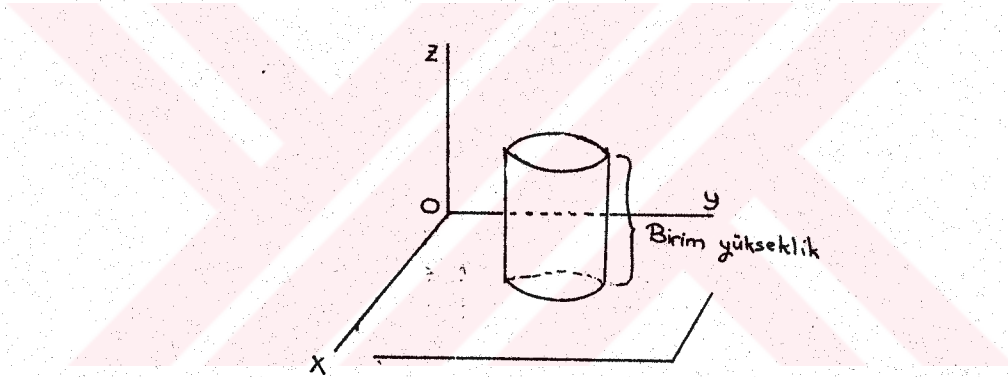
$x \cdot y$ düzleminde bir ds çizgi elemanı alalım, bu elemanın herhangi bir yönde yöneltilmiş olan normalinin doğrultman kosinüsleri α, β olsun.

Düzlemin herhangi bir vektörünün ds elemanından geçen akısını önceden tanımlamıştık.

Hız vektörü halinde $(u\alpha + v\beta)ds$ hidrodinamik akı-

sı elde edilir. Bu şekilde tanımlanan akının uzaysal akıya uygulanabileceği aşıkardır. (Uzaysal akıyı tabanı ds den ve yüksekliği şekil düzlemine dik bir doğru üzerinde birim uzunluktan ibaret olan bir dikdörtgen için hesaplamıştık)

İntegrasyon yolu ile x, y düzleminde bulunan bir C eğrisinden geçen düzlemsel hidrodinamik akıya varılır. Bu akı $\int_C (u\alpha + v\beta)ds$ integrali ile hesaplanır ve dik kesiti C , yüksekliği birim uzunluktan ibaret olan bir silindir yüzeyinden geçen uzaysal akı ile uyumludur.



Şekil 3.14.2.

Eğer C eğrisinin sınırladığı bölgeye A dersek;

$$\int_C (u\alpha + v\beta)ds = \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\sigma$$

bağıntısı vardır.

3.15. KORUNUMLU KUVVETLER ETKİSİ ALTINDA DÜZLEMSEL İRROTASYONEL HAREKET

Kabul edelim ki akışkan dış kuvvetler etkisi altında düzlemsel irrotasyonel hareket etsin öyleki dış kuvvetlerin (x,y) noktasındaki her bir birim kütlesindeki bileşenleri (X,Y) olsun, böylece $X = -U_x$, $Y = -U_y$ olur. O zaman kuvvetler "korunumludur" ve U da onların potansiyelidir" denir.

Hareket denklemleri,

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{P}{\rho} \quad \text{ve} \quad \frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{P}{\rho}$$

lardır.

Şimdi $u = -\psi_x$ ve $v = -\psi_y$ alalım. O zaman

$$\frac{Du}{Dt} = -\psi_{xt} + \psi_x \psi_{xx} + \psi_y \psi_{xy}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\psi_{yt} + \psi_x \psi_{xy} + \psi_y \psi_{yy}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \left(\frac{Du}{Dt} \right) dx + \left(\frac{Dv}{Dt} \right) dy &= -d(\psi_t) + \psi_x d\psi_x + \psi_y d\psi_y \\ &= Xdx + Ydy - \frac{dP}{\rho} = -dU - \frac{dP}{\rho} \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden

$$-\psi_t + \frac{1}{2} (\psi_x^2 + \psi_y^2) = -U - \frac{P}{\rho} + F(t)$$

olur, burada $F(t)$ zamanın genel bir fonksiyonudur. q hız olmak üzere $q^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2$ olduğundan

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + U = F(t) + \phi_t$$

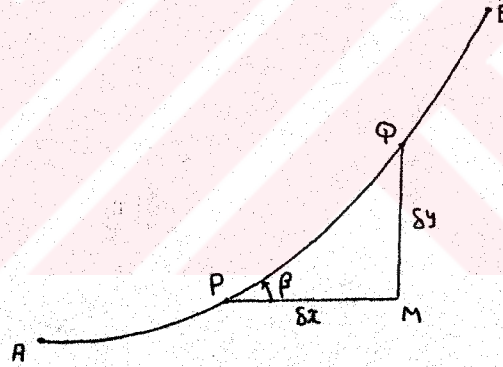
olur ki bu son denklem "Bernoulli eşitliği" olarak bilinir.

BÖLÜM IV

AKIM VE SİRKÜLASYON TEOREMLERİ

4.1. AKIM VE SİRKÜLASYON

z -düzleminde herhangi bir şekilde hareket eden bir akışkan tabakasını ele alalım. A ve B noktaları tamamen akışkanın içinde yatan bir eğri ile birleştirilmiş ve bu eğri üzerinde birbirine komşu iki nokta $P(x,y)$ ile $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ olsun.

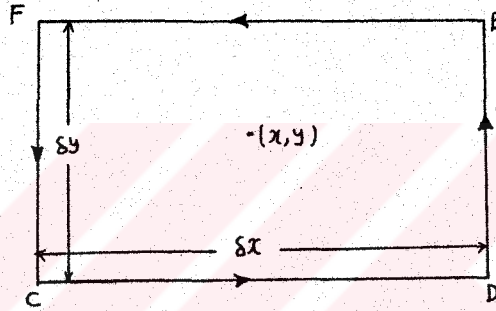


Şekil 4.1.1.

Eğer P noktasındaki hız u, v ve $PQ(= \delta s)$ yay elemanı reel eksen (x -ekseni) ile β açısı yapıyorsa, P noktasında PQ boyunca hız bileşeninin $u \cos \beta + v \sin \beta$ olduğunu ve PQ boyunca akımın, $(u \cos \beta + v \sin \beta) \delta s = u \delta x + v \delta y$ olarak tanımlı olduğunu biliyoruz. AB eğrisi boyunca A dan B ye akım A dan B ye eğri boyunca alınan $\int u dx + v dy$ integraliyle tanımlanmıştır.

B den A ya olan akımın A dan B ye olan akımın ters işaretlisi olduğu çizgisel integral özelliklerinden açıktır.

Eğer A noktası B noktası ile birleştirilirse o zaman AB kapalı bir eğri formunda olur ve pozitif anlamda bu eğri üzerinden alınan aynı integral bu kapalı eğri tarafından elde edilen dönmenin içindeki sirkülasyon olarak tanımlanmıştır.



Şekil 4.1.2.

Şekil 4.1.2. deki gibi merkezi (x,y) noktası olan ve köşeleri koordinat eksenlerine paralel δx , δy uzunluklarından oluşan CDEF küçük dikdörtgeninin çevresi boyunca dönmenin sirkülasyonunu düşünelim.

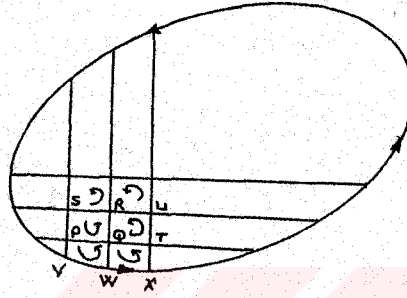
Eğer (x,y) noktasındaki hız bileşenleri (u,v) ise CD boyunca hız CD nin orta noktasındaki; yani, $(x, y - \frac{1}{2}\delta y)$ noktasındaki u nun değeri ile verilecektir ki bu noktadaki hızın birinci bileşeni $u - \frac{1}{2} u_y \delta y$ dir.

Benzer olarak EF kenarı boyunca hız EF nin $(x, y + \frac{1}{2}\delta y)$ noktasındaki $-u$ nun değeri ile verilecek-

tir ki bu noktadaki hızın birinci bileşeni $-u - \frac{1}{2} u_y \delta y$ dir. Böylece CD boyunca akım + EF boyunca akım = $-u_y \delta x \delta y$ dir. Aynı şekilde DE boyunca akım + FC boyunca akım = $v_x \delta x \delta y$ olur ve böylece

$$\begin{aligned} \text{Dikdörtgen boyunca sirkülasyon} &= (v_x - u_y) \delta x \delta y \\ &= 2\zeta \delta x \delta y \end{aligned}$$

olur. Burada ζ dönme vektörüdür [4].



Şekil 4.1.3.

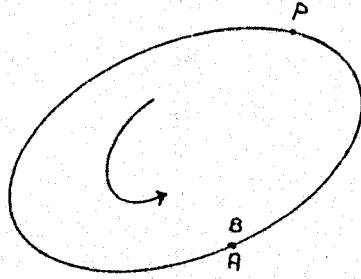
Şimdi içi akışkan tarafından tamamen kapsanan sonlu bir dairesel dönme ele alalım. Daha sonra da bu bölgede eksenlere paralel doğrular çizelim. O zaman bölge PQRS, QTVR,... gibi dikdörtgenler ve PVWQ, QWXT,... gibi alanlardan meydana gelen bölümlerden oluşur.

Eğer bu elemanlar boyunca sirkülasyonları toplarsak QR boyunca akım RQ boyunca akımın tersine eşit olduğundan QR ve RQ gibi kenarlar yardımıyla genel anlamda bunlar birbirlerini yok ederler ve bu toplamların sonucu dönme eğrisinin VW, WX,... gibi elemanları boyunca akımların toplamı olur ki bu da dönme boyunca sirkülasyondur.

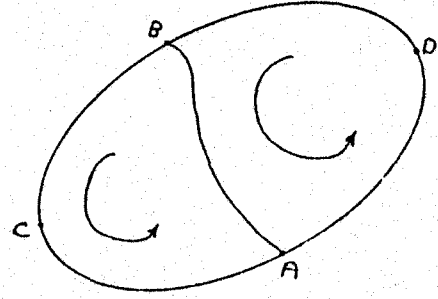
Özel olarak; eğer hareket irrotasyonel ise, dönme her yerde sıfırdır ve içi akışkan tarafından tamamen

kapsanan herhangi bir dönmenin sirkülasyonu sıfırdır.

Bunun yanısıra, dönme, dönme içinde bölünmelerle çiftlere ayrılmış ise verilen dönmenin sirkülasyonu parçalara ayrılan çiftlerin sirkülasyonları toplamına eşittir [4].



Şekil 4.1.4.



Şekil 4.1.5.

Şekil 4.1.5. de görüldüğü gibi eğri üzerindeki A ve B noktaları akışkan içinde uzanan herhangi bir yolla birleştirilsin.

Verilen ADBCA dönmesinin sirkülasyonu Γ olsun ve aynı zamanda ABCA dönmesinin sirkülasyonu Γ_1 ve ADBA dönmesinin sirkülasyonunda Γ_2 olsun. Burada her iki dönme için pozitif yön aynıdır ve sirkülasyon tanımından

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = (\text{AB boyunca akım} + \text{BC boyunca akım} + \text{CA boyunca akım}) + (\text{AD boyunca akım} + \text{DB boyunca akım} + \text{BA boyunca akım})$$

$$= \text{AD boyunca akım} + \text{DB boyunca akım} + \text{BC boyunca akım} + \text{CA boyunca akım}.$$

olur. Bu son eşitliğin sağ tarafındaki ifade verilen

dönmenin sirkülasyonudur. Bu yüzden

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

dır.

Yukarıdaki düşüncemizi, bizi memnun edecek kadar dönmelerin bölünmelerine uygulayabileceğimiz ve bu bölünmelerin yardımıyla her zaman Γ yı elde edebileceğimiz açıktır.

O halde $x \cdot y$ düzleminde herhangi bir dönme alıp bu dönmenin sirkülasyonuna Γ diyelim. Bölgeyi yukarıdaki düşüncemize uygun şekilde bölünmüş düşünersek, bu küçük parçalara ayrılmış dikdörtgensel bölgelerin içindeki dönmelerin sirkülasyonları toplamı $\zeta = v_x - u_y$ olmak üzere

$$\Gamma = \iint 2\zeta dx dy$$

dir ve bu Stokes teoreminin özel bir sonucudur.

4.2. SİRKÜLASYONUN SÜREKLİLİĞİ

Şekil 4.1.1. deki $\overline{AB}$ eğrisinin hareket halinde bir akışkan olduğunu varsayalım (yani, her noktada akışkan elemanlarının aynı hızda olduğunu varsayıyoruz)

PQ elemanı boyunca artan akım oranı $\left(\frac{D}{Dt} \right) (u\delta x + v\delta y)$ ile belirtilmiştir. Burada

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

dir.

Şimdi $\left(\frac{D}{Dt} \right) (u \delta x)$ değerini hesaplayalım.

$$\left(\frac{D}{Dt} \right) (u \delta x) = \left(\frac{Du}{Dt} \right) \delta x + u \left(\frac{D}{Dt} \right) (\delta x)$$

ve

$$\left(\frac{D}{Dt} \right) (\delta x) = \left(\frac{D}{Dt} \right) (PM)$$

$$= (Q \text{ noktasındaki hızın } x\text{-bileşeni}) - (P \text{ noktasındaki hızın } x\text{-bileşeni})$$

$$= \delta u$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{Dt} \right) (u \delta x + v \delta y) &= \left(\frac{Du}{Dt} \right) \delta x + \left(\frac{Dv}{Dt} \right) \delta y + u \delta u + v \delta v \\ &= X \delta x + Y \delta y - \frac{1}{2} [P_x \delta x + P_y \delta y] + \frac{1}{2} \delta (u^2 + v^2) \\ &= -\delta V - \frac{\delta P}{\rho} + \frac{1}{2} \delta (q^2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada Eulerin hareket denklemi kullanılmış ve dış kuvvetlerin bir V potansiyeline sahip olduğu varsayılmıştır.

Böylece AB eğrişi boyunca akımın değişim oranı :

$$\frac{D}{Dt} \int_A^B (u dx + v dy) = \left[-V - \int \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 \right]_A^B$$

ile verilir ve parantez içindeki son terim A ve B noktası arasındaki değerlerin farkını verir. Burada, yoğunluk sadece basıncın bir fonksiyonu olarak alınmıştır.

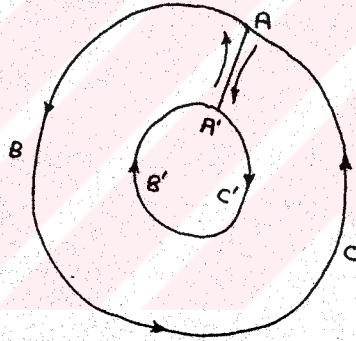
Eğer AB kapalı bir eğri ve V de tek değerli ise o

zaman dairesel eğri içindeki sirkülasyonun değişim oranı sıfır olur. Buradan şu teoremi elde ederiz.

"Yoğunluğu sadece basıncın bir fonksiyonu olan ve tek değerli potansiyel kuvvetlerin etkisi altında, iki boyutlu hareket eden akışkanın; akışkanla beraber hareket eden bir dönmenin içindeki sirkülasyonu değişmezdir".

4.3. KARMAŞIK İLİŞKİLİ BÖLGELERDE İRROTASYONEL HAREKET

"Düzensiz hareket eden bir akışkan içerisindeki herhangi iki bağdaşabilir dolanım eşit sirkülasyonlara sahiptir."



Şekil 4.3.1.

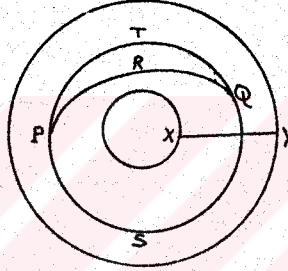
Şekil 4.3.1. deki ABCA ile A'B'C'A' bu şekilde iki dolanım olsunlar. AA' yü birleştirdiğimizde tamamen akışkanın içinde kalan kapalı bir ABCAA'C'B'A'A dönmesini elde ederiz. Bundan dolayı bu dönmenin içindeki sirkülasyon sıfır olur ve bu yüzden;

$$ABCA \text{ boyunca akım} + A'A \text{ boyunca akım} + A'C'B'A' \text{ boyunca akım} + AA' \text{ boyunca akım} = 0$$

olduğundan ve

$A'B'A'$ boyunca akım = $-(A'B'C'A'$ içindeki sirkülasyon) olduğundan ABCA ile $A'B'C'A'$ içindeki sirkülasyonlar eşittir.

Şimdi aynı merkezli iç içe geçmiş iki daire arasında kalan bölgeyi tamamen dolduran akışkanı ele alalım. İçerideki daireyi çevreleyen bütün basit dolanımların aynı k sirkülasyonuna sahip olduğunu söyleyebiliriz.



Şekil 4.3.2.

Bundan dolayı şekil 4.3.2. deki PSQRP içindeki sirkülasyonun değeri k dir ve bu yüzden PSQ boyunca akım + QPR boyunca akım = k olur yani,

PSQ boyunca akım = k ++ PRQ boyunca akım
dir.

$P \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bu bölgede P -kere tanımlanmış olan PSQRP ile bağdaşabilir dolanımın sirkülasyonu $P.k$ olur [4]. Burada; P , bağdaşabilir dolanımın durumuna göre ya bir pozitif tamsayı, ya da bir negatif tamsayı veya sıfırdır.

Bunun sonucu olarak iki noktayı birleştiren herhangi iki yolun akımı k integral çarpanına bağlı olarak eşitlenecek veya farklılaşacaktır.

n -kere ilişkili bir bölgede iki nokta arasındaki herhangi iki yolu izleyen akım; $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ ler pozitif, negatif veya sıfır olan tamsayılar ve $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ ler bu bölgede çizilebilen $(n - 1)$ tane bağımsız ve indirgenemez dolanımlar üzerindeki sirkülasyonlar olmak üzere

$$P_1 k_1 + P_2 k_2 + \dots + P_{n-1} k_{n-1}$$

ifadesi ile farklılaşır [4].

Buradaki k değerlerine "Hareketin dairesel sabitleri" denir.

4.4. AKIM VE POTANSİYEL HIZ

$P(x,y)$ noktası (şekil 4.1.1.) akışkanın içinde değişken bir nokta olsun ve bu nokta n -kere ilişkili bölgede irrotasyonel hareket etsin ve A da aynı bölge içinde sabit bir nokta olsun.

Eğer A ve P noktaları akışkanın içindeki bir yolla birleştirilirse bu yolun F akımı

$$F = \int_A^P (u dx + v dy)$$

dir.

A dan P ye başka yolların akımı dairesel sabitle-
rin çarpımlarının toplamı ile F den farklılaşacaktır.

P noktasını, ona komşu olan $M(x + \delta x, y)$ noktası
ile birleştirelim. P den M ye düz bir yolla akış $u \cdot \delta x$
dir ve bu nedenle,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dir ve benzer olarak

$$\frac{\partial F}{\partial y} = v = - \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

bulunur [2].

Burada ψ potansiyel hız olup keyfi sabit bir nok-
tadan değişken bir noktaya olan akımın eksi işaretlisi
olarak tanımlanmıştır. Fakat burada ψ nin değeri F nin
ki gibi tek değerli değildir. ψ nin değerleri F deki gi-
bi herhangi noktada dairesel sabitlerin çarpımlarının
toplamları ile farklıdırlar [4].

4.5. DÜZLEMDE GREEN TEOREMİ VE BAZI ÖZEL HALLERİ

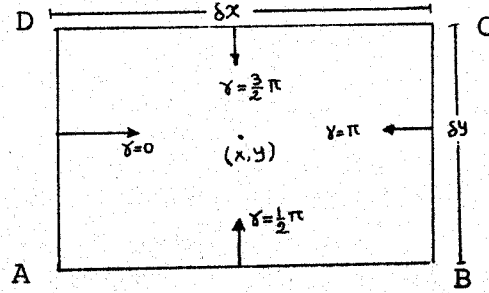
Basit kapalı bir eğri üzerinde ve bu eğrinin sınır-
ladığı bölgede sonlu değerli ve birinci dereceden türev-
leri sürekli olan x ve y -nin iki fonksiyonu U ile V ol-
sun.

δs eğriye ait yay elemanı olsun ve bu yay elemanı-
nın iç normal x -ekseni ile γ açısı yapsın. Eğri boyun-

ca pozitif anlamda

$$\int (u \cos \gamma + v \sin \gamma) ds$$

integralini almak istiyoruz.



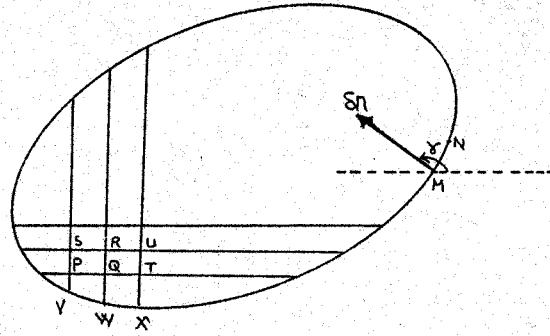
Şekil 4.5.1.

Önce şekil 4.5.1. deki gibi ABCD küçük dikdörtgeni boyunca integralin değerini bulalım. Bu dikdörtgenin merkezi (x, y) noktası ve δx , δy lerde koordinat eksenlerine paralel olsunlar. Kenarlar üzerinden integralin değerini aşağıdaki tablo ile verelim.

KENAR	γ DEĞERİ	δs DEĞERİ	$(u \cos \gamma + v \sin \gamma) \delta s$ DEĞERİ
AB	$\frac{\pi}{2}$	δx	$V(x, y - \frac{1}{2} \delta y) \delta x = [V - \frac{1}{2} V_y \delta y] \delta x$
BC	π	δy	$-U(x + \frac{1}{2} \delta x, y) \delta y = -[U + \frac{1}{2} U_x \delta x] \delta y$
CD	$\frac{3\pi}{2}$	δx	$-V(x, y + \frac{1}{2} \delta y) \delta x = -[V + \frac{1}{2} V_y \delta y] \delta x$
DA	0	δy	$U(x - \frac{1}{2} \delta x, y) \delta y = [U - \frac{1}{2} U_x \delta x] \delta y$

O halde,

Dikdörtgen boyunca integralin değeri $-(u_x + v_y) \delta x \delta y$ dir.



Şekil 4.5.2.

Sınırlanmış bölgeyi paralel çizgilerle bölümlere ayırdığımızda şekil 4.5.2. deki gibi PQRS dikdörtgenleri ve VWQP gibi alanlara bölünmüş olacaktır.

Eğer bütün bu bölünmelerden ortaya çıkan elemanlar üzerinden alınan integralleri toplarsak; PQRS nin QR kenarı üzerinde $\gamma = \pi$ ve aynı kenar QTUR nin üzerinde alınırsa $\gamma = 0$ olduğundan QR ve WQ gibi kenarlar üzerinden alınan integrallerin toplamaları birbirlerini yok ederler. Bu yüzden eğri üzerinden pozitif anlamda alınan integraller ve bütün bu integrallerin toplamı azalır ve

$$\int_{\text{Eğri üzerinden}} (U \cos \gamma + v \sin \gamma) ds = - \iint_{\text{Bölge üzerinden}} (U_x + v_y) dx dy$$

olur.

Bu sonuç gene Stokes teoreminin özel bir halidir.

U ve V nin bazı özel seçilişleri ile bazı kullanışlı sonuçlar ortaya çıkabilir.

i) $U = u$, $V = v$ olsun. Burada (u,v) düzlemde irrotasyonel hareketli sıkıştırılamaz akışkanın bir noktasındaki hız bileşenidir. Süreklilik şartı, $u_x + v_y = 0$ dır. Bu yüzden $\int (u \cos \gamma + v \sin \gamma) ds$ eğri üzerinden alındığında değeri sıfır olur.

$u \cos \gamma + v \sin \gamma$ değeri iç normal boyunca hızın bileşeni olduğundan integral alanın (bölgenin) içine olan toplam akımı gösterir.

ii) ϕ ve θ bu bölge üzerinde sonlu, tek değerli ve birinci dereceden türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere

$U = \phi \theta_x$ ve $V = \phi \theta_y$ alalım. O zaman

$$U \cos \gamma + V \sin \gamma = \phi (\theta_x \cos \gamma + \theta_y \sin \gamma) = \phi \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)$$

olur. Burada ∂n normalin içe yönelik elemanıdır, bu yüzden,

$$\int \phi \frac{\partial \theta}{\partial n} ds = - \iint [\phi (\theta_{xx} + \theta_{yy}) + \phi_x \theta_y + \phi_y \theta_x] dx dy$$

Eğri boyunca Bölge üzerinden

şeklinde yazabiliriz. Bu sonuca düzlemde Green teoremi denir.

Özel olarak $\phi = \theta$ ve ϕ de ρ yoğunluklu sıkıştırılamaz akışkanın hareketinin potansiyel hızı olsun. O zaman

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

ve

$$-\frac{1}{2} \rho \int \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = \frac{1}{2} \rho \iint (\phi_x^2 + \phi_y^2) dx dy$$

yi elde ederiz [4].

4.5.1. TEOREM (Cauchy teoremi)

z- düzleminde kapalı bir C eğrisinin yay elemanı MN(=δS) olsun ve M ile N koordinatları sırasıyla (x,y), (x + δx, y + δy) iken iç normal, x-ekseni ile γ açısı yapsın. O zaman

$$\delta s \cos \gamma = -\delta y$$

$$\delta s \sin \gamma = \delta x$$

dir. Bu durumda Stokes teoremini

$$\int_{\text{Eğri üzerinden}} (U dy - V dx) = \iint_{\text{Bölge üzerinden}} (u_x + v_y) dx dy$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki U ile V fonksiyonlarının ve onların ilgili türevlerinin C üzerinde ve C nin sınırladığı bölgede sürekli ve sonlu olduklarını Stokes teoreminden kolayca söyleyebiliriz.

$z = x + iy$ nin bir fonksiyonu olan $f(z)$, C nin üzerinde ve C nin sınırladığı bölgede sonlu değerli olsun.

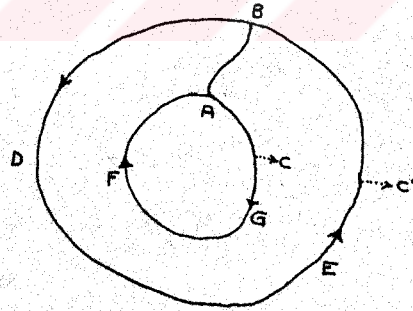
C eğrisi üzerinden $f(z)$ nin integrali $f(z) = \psi + i\chi$ olmak üzere $\int_C f(z) dz$ ile tanımlanmıştır.

$$\psi_x = \chi_y \quad \text{ve} \quad \psi_y = -\chi_x \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C (\psi + i\varphi)(dx + idy) \\
&= \int_C (\psi dx - \varphi dy) + i \int_C (\varphi dx + \psi dy) \\
&= -\iint (\varphi_x + \psi_y) dx dy + i \iint (\psi_x - \varphi_y) dx dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Bu sonuç Cauchy teoremi olarak bilinmektedir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu (şekil 4.5.3. deki gibi) C ve C' gibi kapalı eğri arasındaki bölgede ve bu iki eğri üzerinde tanımlı ise ve eğer bölgeyi, şekil 4.5.3. deki gibi, A ve B noktalarını kullanarak bölgeyi içeriden uzanan bir çizgiyle sınırlarsak, bu durumda teoremi bölgenin tamamlanmış sınırı boyunca pozitif anlamda $f(z)$ nin integrali almada kullanabiliriz.



Şekil 4.5.3.

Bu yüzden,

$$\int_{BDEB} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz + \int_{AGFA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz = 0$$

olur. Ayrıca $\int_{AB} f(z)dz = - \int_{BA} f(z)dz$ dir ve

$$\int_{BDEB} f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz, \quad \int_{AGFA} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$$

olduğundan

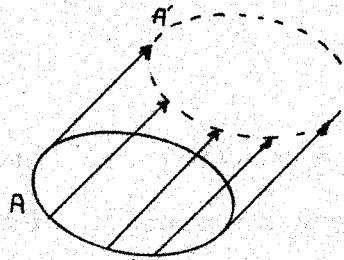
$$\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz$$

olur ki bunun anlamı $f(z)$ fonksiyonunun yolun üzerinde ve aralarındaki bütün noktalarda sonlu değerli olması şartıyla integralin değeri integrasyon yollarından herhangi biri alınarak hesaplanabilir.

4.5.2. TEOREM (Thomson teoremi)

Bir akışkanın hareketinde dış kuvvetler bir kuvvetler fonksiyonundan türüyorsa, (yani, kuvvetler konservatif ise) kapalı bir akışkan iplikciğini oluşturan partiküllerin meydana getirdiği eğri boyunca sirkülasyon zamanla değişmez.

İSPAT :



Şekil 4.5.4.

A eğrisinin Δt zaman sonraki durumu A' olsun. A eğ-

risi boyunca sirkülasyonu ele alalım ve bunun hareketi takip eden alınmış (harcanmış) zamana göre türevini hesaplayalım.

A eğrisi üzerindeki herhangi bir (x,y,z) noktasındaki hız $\vec{V} = (v_x, v_y, v_z)$ ve çok küçük yay uzunluğu $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ olmak üzere A eğrisi boyunca Γ sirkülasyonu

$$\Gamma = \oint_A \vec{V} \cdot d\vec{r} = \oint_A (v_x dx + v_y dy + v_z dz)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left(\oint_A (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \right) \\ &= \oint_A \frac{D}{Dt} (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \end{aligned}$$

olur. Şimdi son integralin içindeki ifadenin birinci terimini yazalım.

$$\frac{D}{Dt} (v_x dx) = \frac{D(v_x dx)}{Dt} = \frac{dv_x}{dt} \cdot dx + v_x \frac{d(dx)}{dt}$$

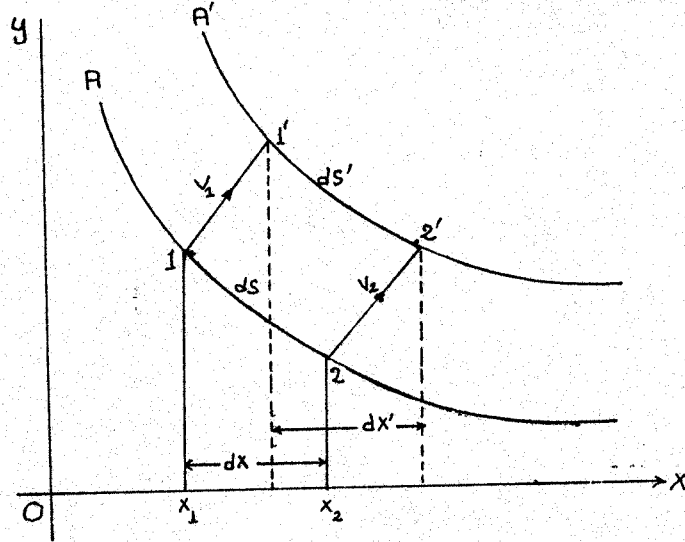
Diğer taraftan hareketin Euler denklemini hatırlarsak,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

olup, bu değeri yukarıda yerine yazarsak

$$\frac{D(v_x dx)}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx + v_x \frac{d(dx)}{dt}$$

olur. Buradaki $\frac{d(dx)}{dt}$ değerini bulabilmek için şekli, şekil 4.5.5. deki gibi büyütelim.



Şekil 4.5.5.

ds elemanını temsil eden 1 ve 2 noktaları Δt -zamanı için de 1' ve 2' noktalarına giderlerse izdüşümler,

$$v_{x_1} \cdot \Delta t + dx' = v_{x_2} \cdot \Delta t + dx$$

$$(v_{x_1} - v_{x_2}) \cdot \Delta t = dx - dx'$$

ve buradan

$$v_{x_1} - v_{x_2} = \frac{dx - dx'}{\Delta t}$$

olup,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{dx - dx'}{\Delta t} \right) = \frac{d(dx)}{dt} = \frac{d}{dt} (dx) = d \left(\frac{dx}{dt} \right) = dv_x$$

bulunur. Bu değer yerine konulursa

$$\frac{D(v_x dx)}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx + v_x dv_x$$

olur. Ayrıca $v_x dv_x = d \frac{v_x^2}{2}$ eşitliği vardır. O halde bu son değeri de kullanırsak

$$\frac{D(v_x dx)}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx + d \frac{v_x^2}{2}$$

olur bulunur. Benzer olarak

$$\frac{D(v_y dy)}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy + d \frac{v_y^2}{2}$$

$$\frac{D(v_z dz)}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right) dz + d \frac{v_z^2}{2}$$

olur. Burada u, potansiyel fonksiyonu, P de basınçtır.

Bu yeni bulduğumuz değerleri, eşitinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \oint_A \frac{D}{Dt} (v_x dx + v_y dy + v_z dz) &= \oint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + d \frac{v_x^2}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy + d \frac{v_y^2}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right) dz + d \frac{v_z^2}{2} \right] \\ &= \oint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} d (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] \\ &= \oint_A \left(du - \frac{1}{\rho} dP + \frac{1}{2} dv^2 \right) \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_A \left(du - \frac{1}{\rho} dP + \frac{1}{2} dv^2 \right)$$

yazılabilir. O halde A eğrisinin a ve b noktaları arasındaki parçası için aranan türev

$$\frac{D\Gamma_{ab}}{Dt} = \left| u - \int \frac{1}{\rho} dP + \frac{v^2}{2} \right|_a^b$$

olur. Eğer $a = b$ ise eğri kapalı bir eğri olacak ve

$$\frac{D\Gamma_{ab}}{Dt} = 0 \text{ olacaktır ki bu da } \Gamma_{ab} = \text{sabit demektir.}$$

4.6. GİRDAP VE SİRKÜLASYON

Girdap vektörünün, hız vektörünün yarı rotasyoneli olduğunu biliyoruz [6]. O halde Stokes formülü şu sonucu verir : "verilen bir anda kapalı bir C eğrisi boyunca hız vektörünün

$$\Gamma = \oint_C (udx + vdy + wdz)$$

sirkülasyonu, aynı anda uygun bir yönde girdap vektörünün C eğrisine dayanan açık bir yüzeyden geçen akısının iki katına eşittir."

Şimdi bir ivmeler potansiyelinin varlığına denk olan şartları oluşturursak, buradan sirkülasyonun ve bunun sonucu girdap akısının korunumuna ait önemli sonuçlar çıkaracağız.

Önce sonsuz küçük bir $\vec{MM'} = \delta \vec{S}$ çizgisel elemanını alalım, bunun izdüşümlerine $\delta x, \delta y$ ve δz diyelim. $\vec{MM'}$ nün akışkan tarafından sürüklendiği kabul edildiğine göre, hız vektörünün bu elemana karşılık gelen ve $\vec{MM'}$ yü hareketinde takip ederek her anda hesaplanan sirkülasyonu $\delta \Gamma = u \delta x + v \delta y + w \delta z$ olsun.

O zaman şu bağıntı mevcuttur.

$$\frac{d}{dt} \delta \Gamma = \frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z + u \frac{d}{dt} \delta x + v \frac{d}{dt} \delta y + w \frac{d}{dt} \delta z$$

(Burada t-nin sabit değeri için hesaplanan uzay diferensiyelini δ harfi ile gösteriyoruz)

Burada, örneğin δu notasyonu, u nun x,y ve z ye $\delta x, \delta y, \delta z$ artmaları verilerek alınan bir diferensiyelini göstermektedir.

Diğer taraftan $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ yerine bunların

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} (u - q)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} (u - q)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} (u - q)$$

değerleri konulursa

$$K = u - \int \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} v^2$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt} \delta \Gamma = \delta K$$

elde edilir.

Böylece çizgisel bir elemana karşılık gelen sirkülasyonun tam türevini hesaplamış olduk. Bu halden herhangi bir eğri boyunca hesaplanan sirkülasyon haline kolayca geçilebilir.

4.6.1. TANIM (Akışkan eğri, Akışkan yüzey)

Akışkan tarafından sürüklenen ve her anda aynı maddesel elemanların geometrik yeri olan bir eğri veya bir yüzeye "akışkan eğri" veya "akışkan yüzey" denir.

Şimdi uçları M_0 ve M_1 olan açık bir akışkan eğrisi alalım. Bu eğriye karşılık gelen ve $M_0 M_1$ yönünde hesaplanan sirkülasyon Γ olsun. O zaman

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left[K \right]_{M_0}^{M_1}$$

elde edilir. Burada ikinci taraf K nın M_0 dan M_1 e geçildiği vakit aldığı değerlerin farkını göstermektedir.

Nihayet kapalı bir C eğrisini gözönüne alalım, bu halde M_0 ve M_1 noktaları çakıştırlar ve $\left[K \right]_{M_0}^{M_1}$ farkı sıfır olduğundan sirkülasyon sabittir.

Şu halde aşağıdaki sonucu verebiliriz :

"Eğer bir ivmeler potansiyeli varsa, kapalı bir C

akışkan eğrisi boyunca hesaplanan sirkülasyon sabittir veya sirkülasyonla girdap akısı arasındaki bağıntı dola-
yısıyla girdap vektörünün C eğrisine dayanan açık bir
yüzeyden geçen akısı sabittir."

Nihayet, bir akışkan yüzey C ye dayanan bir yüzey
olarak kabul edilir ve sonuç olarak girdap vektörünün
akışkan yüzeyinin herhangi bir parçasından geçen akısı
sabittir.

Şimdi durgun halde bulunan sıkıştırılamaz bir akış-
kan tabakasına, sabittir w açısız hızı ile kendi eksenini
etrafında dönen pürüzsüz yüzeyli düzgün bir koninin,
akışkana belli bir hızla tepe noktasından başlayarak
aşağı doğru batırılırken, bir Δt -küçük zaman dilimi ara-
sındaki sirkülasyonun değişimini inceleyelim.

Akışkan kütlelerinin en üst tabakasını $x \cdot y$ -düzlemi
gibi düşünerek bu düzlemde bir nokta seçip koniyi akış-
kana bu noktadan batırmaya başlayalım.

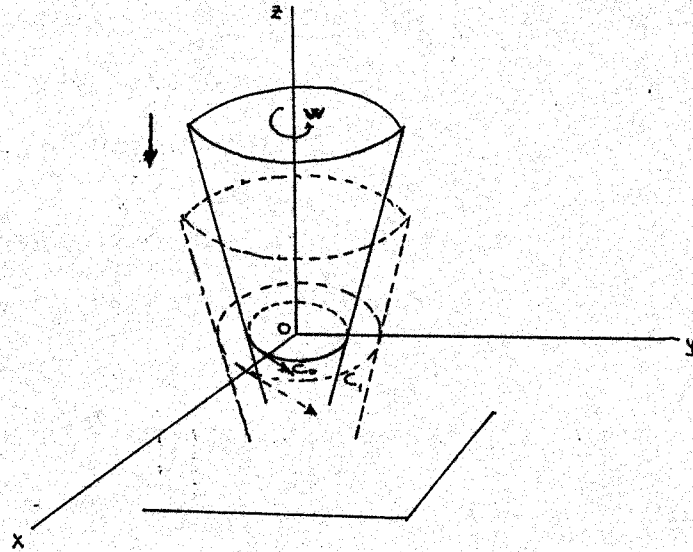
Ayrıca bu seçtiğimiz noktaya orijin gözü ile bakıp
bu noktayı O ile gösterelim. Daha sonra her bir Δt -zaman
diliminde akışkanın en üst tabakası ile koni yüzeyinin
arakesitinden oluşan eğrileri ele alıp bir $t = t_0$ anın-
da karşımıza çıkan eğri üzerinden sirkülasyonla $t = t_0 + \Delta t$
anı arasında değişen sirkülasyonu hesaplamak istiyoruz.

Burada hemen belirtelim ki, her bir Δt -zaman dili-
minde elde edilen eğriler, O noktasını içeren, iç içe

geçmiş, $x \cdot y$ düzleminde yatan çemberler olacaktırlar.

$t = 0$ anında akışkanın en üst tabakasına koninin tepe noktası henüz degeceğinden bu noktada bir hız fonksiyonu tanımlayamayacağız. Bu yüzden bu noktaya kritik nokta gözüyle bakabiliriz.

$t = 0$ anına Δt -zaman dilimlerinin eklenmeleri sonucunda bir $t = t_0$ anına geldiğimizi varsayarsak bu süre zarfında koni de akışkana belli bir miktar gömülmüş olacaktır. Bu $t = t_0$ anında akışkan kütlesinin en üst tabakası ile koni yüzeyinin ara kesitinden oluşan eğriye C_0 eğrisi diyelim ve daha sonra $t = t_0 + \Delta t$ anında yukarıdaki şekilde oluşan eğriyede C_1 eğrisi diyelim. Burada, koninin kendi eksenini etrafında dönmesi pozitif veya negatif yönde olabilir. Fakat biz genelliği bozmamak için dönme yönünü pozitif (saatin tersi yönü) olarak alacağız.



Şekil 4.6.1.

Bu hesaplamayı yapmak için önce C_0 eğrisi üzerinden bir $\vec{AB}$ çok küçük yay elemanı alalım ve bu $\vec{AB}$ yay elemanını çok küçük olduğundan bir doğru imiş gibi düşünüp uzunluğuna $\delta\vec{r}$ diyelim. Koninin kendi eksenini etrafında uygun bir hıza sahip olduğunu varsaydığımızdan $\vec{AB}$ doğru parçasının bir hızı olacaktır. $\vec{AB}$ doğru parçasının bu hızına $\vec{V}$ deyip bu an için skalar çarpımı oluşturursak $I_0 = \vec{V} \cdot \delta\vec{r}$ olur.

O halde bu an için $I_0 = \vec{V} \cdot \delta\vec{r}$ ye karşılık gelen sirkülasyon

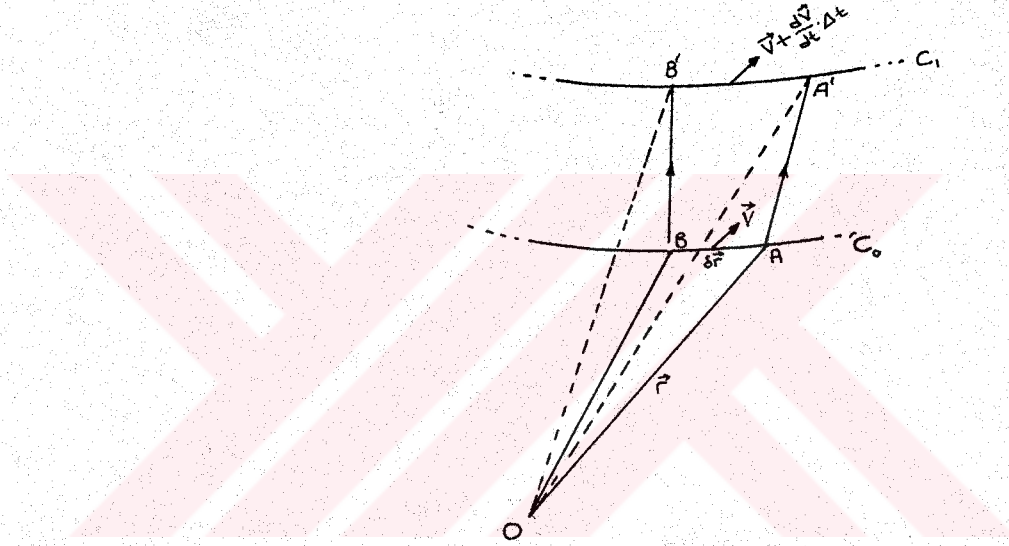
$$\Gamma_0 = \oint_{C_0} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

olur.

En genel halde, $\vec{AB}$ çizgi elemanı çok küçük olmasına rağmen A ve B uçlarındaki hızlar farklı olabilirler. Bu yüzden A ucundaki hıza $\vec{V}_A$ ve B ucundaki hızda $\vec{V}_B$ dersek ve uçlardaki hızları farklı kabul edersek, $\vec{V}_B - \vec{V}_A = \delta\vec{V}$ den $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \delta\vec{V}$ olur.

$t = t_0$ anından $t = t_0 + \Delta t$ anına geçtiğimizde koni yüzeyi üzerindeki C_0 eğrisine ait A noktası $\vec{V}_A \cdot \Delta t$ kadar mesafe katedip C_1 eğrisi üzerinde A' noktasına ve B noktasıda aynı zaman zarfında $\vec{V}_B \cdot \Delta t = (\vec{V}_A + \delta\vec{V}) \cdot \Delta t$ kadar mesafe katedip C_1 eğrisi üzerinde B' noktasına gelecektir. $\vec{AB}$ doğru parçası üzerindeki her noktaya yukarıdakine benzer olarak bir mesafe katettirerek C_1

eğrisi üzerinde A' ile B' noktaları arasına düşer ve yeni bir yay elemanı elde ederiz. C_1 üzerinde elde ettiğimiz bu yay parçası da yeterince küçük olacağından bu yay parçasını $\vec{A'B'}$ doğrusu olarak ele alabileceğiz. Bu zaman zarfında $\vec{AB}$ çizgi elemanı üzerindeki ortak hız da değişecek ve C_1 eğrisi üzerinde $\vec{A'B'}$ çizgi elemanının $\vec{V} + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \Delta t$ hızı olacaktır. (Burada $\frac{d\vec{V}}{dt}$ ivmedir)



Şekil 4.6.2.

Koninin tepe noktasının akış kanla ilk buluştuğu noktaya O demiştik. Şimdi $t = t_0$ anı için OA uzunluğuna $\vec{r}$ diyelim.

$\vec{AB} = \delta \vec{r}$ olduğundan birkaç basit geometrik işlem sonucunda

$$\begin{aligned}\vec{OB} &= \vec{r} + \delta \vec{r} \\ \vec{OA'} &= \vec{r} + \vec{V}_A \cdot \Delta t \\ \vec{OB'} &= \vec{r} + \delta \vec{r} + (\vec{V}_A + \delta \vec{V}) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

$$\vec{A'B'} = \delta \vec{r} + \delta \vec{V} \cdot \Delta t$$

olarak buluruz.

$t = t_0$ anındaki C_0 eğrisi üzerindeki Γ_0 sirkülasyonu $t = t_0 + \Delta t$ anında C_1 eğrisi üzerindeki $\Gamma_0 + \left(\frac{d\Gamma}{dt} \right) \Delta t$ sirkülasyonu olacaktır. Bu sirkülasyonun değişimini incelemek için C_1 eğrisi üzerinde elde ettiğimiz $\vec{A'B'}$ küçük doğru parçası için skalar çarpımı oluşturursak

$$\begin{aligned} I_0 + \left(\frac{dI}{dt} \right) \Delta t &= \left(\vec{V} + \frac{d\vec{V}}{dt} \Delta t \right) \cdot (\delta \vec{r} + \delta \vec{V} \cdot \Delta t) \\ &= \vec{V} \cdot \delta \vec{r} + \left(\vec{V} \cdot \delta \vec{V} + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \delta \vec{r} + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \delta \vec{V} \Delta t \right) \Delta t \end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece akışkandan oluşmuş bir ortamda bir eğri alıp, bunu çok küçük parçalardan birleşmiş gibi düşünüp her parçaya karşılık gelen skalar çarpımı hesaplayıp bunları toplarız veya limit halini düşünerek eğri boyunca integre ederiz. O halde

$$\begin{aligned} \Gamma_0 + \left(\frac{d\Gamma}{dt} \right) \Delta t &= \oint_{C_1} \left[\vec{V} \cdot \delta \vec{r} + \left(\vec{V} \cdot \delta \vec{V} + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \delta \vec{r} + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \delta \vec{V} dt \right) \Delta t \right] \\ &= \oint_{C_1} \vec{V} \cdot \delta \vec{r} + \oint_{C_1} \left(\vec{V} \cdot \delta \vec{V} + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \delta \vec{r} + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \delta \vec{V} dt \right) \Delta t \end{aligned}$$

olur. Burada Teorem 1.1.1. kullanıldı.

Ayrıca çizgisel integralin özelliklerinden

$$\oint_{C_1} \vec{V} \cdot \delta \vec{r} = \oint_{C_0} \vec{V} \cdot \delta \vec{r}$$

dir. O halde

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{V} + \oint_{C_1} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{V} \cdot dt$$

olur. Şimdi $\oint \vec{V} \cdot d\vec{V}$ integralini düşünelim.

$$\vec{V} \cdot d\vec{V} = \frac{1}{2} d(\vec{V} \cdot \vec{V}) = \frac{1}{2} dv^2$$

olduğundan

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{V} = \oint \frac{1}{2} dv^2 = 0$$

olur. Burada da eğri üzerinde hızın sürekli olduğu kullanıldı. Bu yeni elde edilen değeri yerine yazarsak,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C_1} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{V} \cdot dt$$

olur. Hız = ivme × Zaman olduğunu kullanırsak,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{V} \cdot dt = \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot dt \cdot d\vec{V} = \vec{V} \cdot d\vec{V}$$

olur ve

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{V} = 0$$

olduğundan

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C_1} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

elde ederiz.

Ele aldığımız t-anında durgun akışkana koninin dönerek batması sonucunda elde ettiğimiz eğriler düzlemsel olup, bu eğriler üzerinde alacağımız her yay parçasının ortak hızının bir x-eksenine bir de y-eksenine izdüşüm fonksiyonları vardır.

Bu izdüşüm fonksiyonlarını sırasıyla $u = u(x,y)$ ve $v = v(x,y)$ gösterirsek eğri üzerinde her noktada $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$ olur. Ayrıca ele alacağımız her dr yay uzunluğunun da sırasıyla dx ve dy gibi x-eksenine ve y-eksenine izdüşümleri olacağından $\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ olur.

O halde

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C_1} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{dr}, \quad \vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}, \quad \vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

değerlerini ortak olarak kullanırsak.

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_{C_1} \frac{d(u\vec{i} + v\vec{j})}{dt} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\ &= \oint_{C_1} \frac{d}{dt} (u\vec{i} + v\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \end{aligned}$$

olur. Hız fonksiyonunun t-zaman ve r-uzaklık değişkenlerinin bir fonksiyonu olduğunu ve bu değişkenlere göre koni üzerinde her noktada tanımlı, sürekli ve sınırlı olduğunu düşünürsek, en son elde ettiğimiz eşitliği sağ tarafına Leibniz kuralını uygulayabiliriz. O zaman,

$$\oint_{C_1} \frac{d}{dt} (u\vec{i} + v\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \frac{d}{dt} \oint_{C_1} (u\vec{i} + v\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

elde ederiz. Bu değeri yerine koyarsak,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C_1} (\vec{u}\vec{i} + \vec{v}\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

olarak buluruz. Bu değeri de C_1 eğrisi üzerindeki

$\Gamma_0 + \left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)\Delta t$ sirkülasyonunda yerine yazarsak

$$\Gamma_0 + \left(\frac{d\Gamma}{dt}\right) \cdot \Delta t = \Gamma_0 + \left(\frac{d}{dt} \oint_{C_1} (u dx + v dy)\right) \cdot \Delta t$$

elde ederiz. Δt yi limit konumunda sıfıra götürürsek o zaman Δt değeri dt olur ve

$$\Gamma_0 + \left(\frac{d\Gamma}{dt}\right) \cdot \Delta t = \Gamma_0 + \oint_{C_1} (u dx + v dy)$$

olarak bulunur.

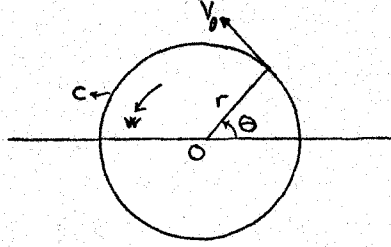
Eğer $\Gamma_1 = \oint_{C_1} (u dx + v dy)$ gösterimini kullanırsak

$t = t_0$ anı ile $t = t_0 + \Delta t$ anı arasında bu şekilde bir dönme ile açığa çıkan sirkülasyon, $t = t_0$ anında karşımıza çıkan eğri üzerinden hız fonksiyonunun sirkülasyonu ile $t = t_0 + \Delta t$ anında karşımıza çıkan eğri üzerinden bu andaki hız fonksiyonunun sirkülasyonu toplamı olur.

Ayrıca $\vec{V}$ hız vektörünün eğri üzerindeki teğet bileşenini V_T ile gösterirsek $u dx + v dy = V_T \cdot ds$ dir.

Her Δt -zaman diliminde karşımıza çıkan eğrilerin birer çember olduğunu kullanır ve herhangi bir t -anında kar-

şımıza çıkacak olan çembere C dersek $\oint_C udx + vdy$ integralini hesaplayabiliriz.



Şekil 4.6.3.

Bunun için,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r = \text{sabit}$$

dönüşümünü yaparsak, $\theta = \theta(t)$ olmak üzere,

$$ds = r \cdot d\theta$$

olur ve bu çember üzerindeki her noktada hız V_θ ya eşittir ve

$$V_\theta = r \cdot \omega$$

dır. Bu durumda

$$\oint_C udx + vdy = \oint_C V_\theta \cdot r d\theta = \int_0^{2\pi} \omega \cdot r^2 d\theta = 2\pi \omega r^2 = 2\omega \cdot \pi r^2$$

olarak bulunur.

O halde C çemberi üzerinden sirkülasyon ω açısal hızın iki katı ile bu çemberin sınırladığı bölgenin alanının çarpımı olur.

Bu son bulunan değeri hesaplamaya çalıştığımız sirkülasyonun değişiminde kullanırsak; $t = t_0$ ile $t = t_0 + \Delta t$ zamanları arasında açığa çıkan sirkülasyon, C_0 çemberinin sınırladığı bölgenin alanı A_1 , C_1 çemberinin sınırladığı bölgenin alanı A_2 olmak üzere

$$2w(A_1 + A_2)$$

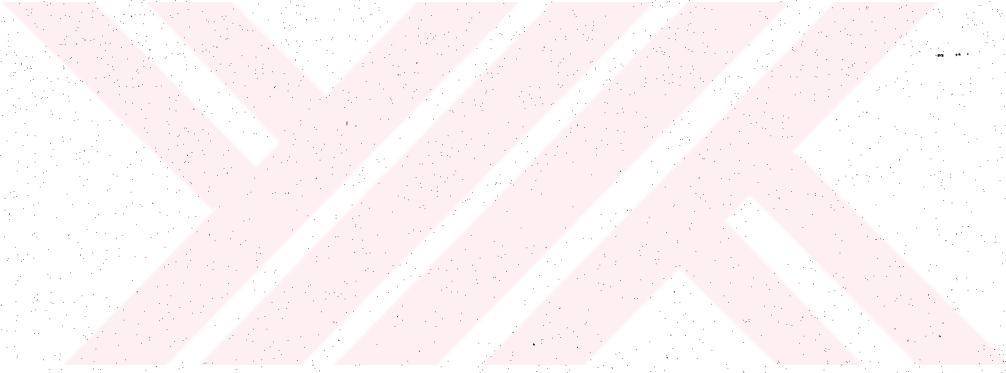
olarak bulunur.

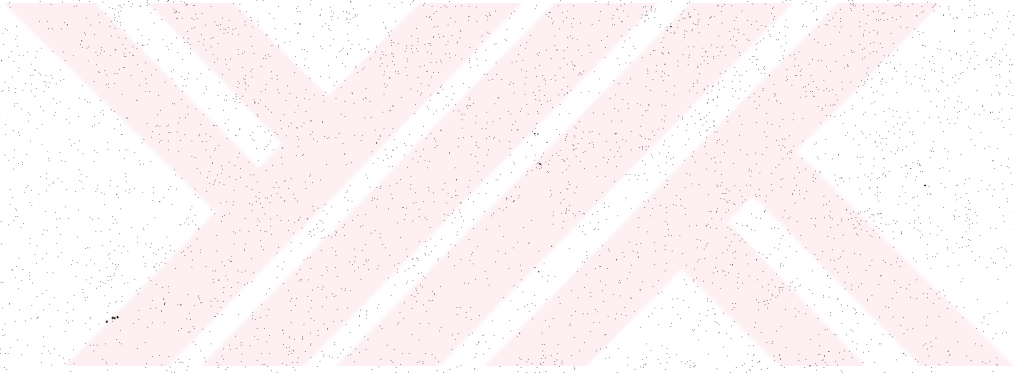
KAYNAKLAR

- [1]. De Lillo, N.J., Advanced Calculus With Application, New York, Mac Millan 1982
- [2]. Kaplan, W., Advanced Calculus, Wesley Publishing Company, 1984
- [3]. Süray, S., Akışkanlar Mekaniği, İstanbul Teknik Üniversitesi, 1954
- [4]. Green, S.L., Aerodynamics. Paris University, 1956
- [5]. Garabedian, P.R., Partial Diferential Equation. New York University, 1964
- [6]. Sabersky, R.H., Fluid Flow, Collier Mac Millan International Editions, 1971.

ÖZGEÇMİŞ

1.1.1965 de Rize-Ardeşende doğdu, ilk, orta ve lise eğitimini Ardeşen'de tamamladıktan sonra 1987 de Gazi Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü Bitirdi. 14.3.1988 de Aynı fakültede araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.





Eyüp SAVAŞCI

Çelik-Bağlan Yayıncılık
Bayındır Sokak. No: 40/A
Kızılay - ANKARA

Tel.: 133 35 66

Y. G.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkez