

39687

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKIŞ KAYNAKLI TİTREŞİM İÇİN ÖRNEK PROBLEM : ANİ GENİŞLEYEN

İKİ LEVHA ARASINDAKİ AKIŞIN SAYISAL MODELLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak.Müh.Ercan KÜMBÜL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Ekim 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Ekim 1994

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Haluk KARADOĞAN

Jüri Üyeleri : Prof.Dr.Mete ŞEN

: Yrd.Doç.Dr.Yavuz TEKİN

EKİM 1994

**AKIŞ KAYNAKLI TİTREŞİM İÇİN ÖRNEK PROBLEM : ANİ GENİŞLEYEN İKİ LEVHA
ARASINDAKİ AKIŞIN SAYISAL MODELLENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak.Müh.Ercan KÜMBÜL

**Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ
Programı : ENERJİ**

EYLÜL 1994

ÖNSÖZ

Su, petrol, doğal gaz ve benzeri akışkanların pompalandığı boru hatlarında, geometrik nedenlerle konulan genişleme, daralma elemanları gibi elemanlar akış açısından birer aykırılık (süreksizlik) yüzeyleridir. Bu elemanlar üzerlerinde oluşacak sınır tabaka ayrılmaları nedeniyle, sürekli olarak akışa, yaklaşık-periyodik vorteksler üretirler. Bu vortekslerin boru sisteminin akustik, mekanik veya termik yapısı ile akuple olması halinde mühendisleri tedirgin eden ciddi titreşim problemleri ortaya çıkabilmektedir.

Hesaplamalı akışkanlar dinamiği, hareket denklemlerine uygulanan sayısal yöntemlerdeki köklü ilerlemeler ve bilgisayar teknolojisinin hızlı gelişimi ile, akışkanlar dinamiği alanında güçlü ve faydalı bir araç haline geldi. Geçmişte, viskoz olmayan transonik akışların tahmininde genellikle potansiyel denklemi kullanılırdı. Son 20-30 yılda türbomakina içindeki akışın modellenmesinde büyük gelişmeler kaydedilmiştir. Çark içindeki transonik, viskoz olmayan akışın çözümünde sonlu hacimler, sonlu farklar veya sonlu elemanlar yaklaşımları ile zaman adımlaması yönteminin birleştirilmesi en önemli ilerlemedir. Bu çalışmanın amacı Euler denklemlerini kullanarak ani genişleyen iki levha arasındaki viskoz olmayan, sıkıştırılamaz, daimi akışın sayısal olarak modellenmesidir.

Bu çalışmada bana her türlü desteği veren sayın hocam Prof.Dr.Haluk KARADOĞAN'a ve nümerik çalışmalarım boyunca beni sürekli olarak yönlendiren sayın Yrd.Doç.Dr.Erkan AYDİR'e teşekkürü bir borç bilirim. Bu çalışmanın ileride yapılacak daha kapsamlı çalışmalara ışık tutması en büyük dileğimdir.

Ercan KÜMBÜL
İstanbul, 1994

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
1. GİRİŞ	1
2. ANA DENKLEMLER	2
3. SONLU HACİMLER AYRIKLAŞTIRMASI	5
4. SINIR ŞARTLARI	11
4.1. Katı Çeper Sınır Şartları	11
4.2. Giriş Kesidi Sınır Şartları	12
4.3. Çıkış Kesidi Sınır Şartları	12
5. YAPAY VİSKOZİTE	13
5.1. Birinci ve Üçüncü Dereceden Yapay Viskozite Terimlerinin Harmanlanması	13
6. ZAMAN ADIMI	17
6.1. Standart Runge-Kutta Yöntemi	17
6.2. Geliştirilmiş Dört Adımlı Runge-Kutta Yöntemi	19
6.3. Yersel Maksimum Zaman Adımının Hesaplanması	19
7. ÖRNEK PROBLEMLER	21
7.1. Tek Boyutlu Lülede Sıkıştırılmaz Akış	21
7.1.1. Analitik Çözüm	23
7.1.2. Farklı Çıkış Basınçları	26
7.1.2.1. Çıkış Basıncı 0.85	26
7.1.2.2. Çıkış Basıncı 0.90	28
7.2. Tek Boyutlu Lülede Sıkıştırılabilir Akış	30
7.2.1. Çıkış Basıncı 0.85	30
7.2.2. Çıkış Basıncı 0.90	32
7.2.3. Çıkış Basıncı 0.95	33
7.3. İki Boyutlu Lülede Sıkıştırılmaz Akış	35
7.4. Basamak Genişlemede Sıkıştırılmaz Akış	36
7.5. Ani Genişlemede Sıkıştırılmaz Akış	38
8. SONUÇ	40
KAYNAKLAR	41
EK A. PROGRAM AKIŞ DİYAGRAMI	42
ÖZGEÇMİŞ	46

ÖZET

Bu çalışmada; daha önce Erkan AYDER [1] tarafından geliştirilmiş olan, sıkıştırılabilir akışkanın kanal içindeki hareketini yöneten denklemleri çözen program üzerinde gerekli değişiklikler yapılarak, sıkıştırılamaz akışkan için bir program geliştirilmiştir. Bu işlem için üç temel değişiklik yapılmıştır:

1-Programın modüler hale getirilmesi.

2-Sıkıştırılabilir akışkan için yazılmış olan programın sıkıştırılamaz akışkan için çalışacak hale getirilmesi.

3- Programın çok bloklı hale getirilmesi.

Bu amaçla ana denklemlerde değişiklikler yapılmış, programın akış diyagramında ise bir değişiklik yapılmamıştır.

Çalışmanın iki numaralı bölümünde, problemin çözümünde kullanılan ana denklemler belirtilmiştir. Üçüncü bölümde, sonlu hacimler ayrıklaştırması hakkında genel bir bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, uygulanan sınır şartları; beşinci bölümde ise denklemlere ilave edilen yapay viskozite terimlerinden bahsedilmiştir. Altıncı bölümde; zaman adımı ve Runge-Kutta yöntemi yer almaktadır. Son bölümde ise üzerinde çalışılan örnek problemlerin sonuçları bulunmaktadır.

Varılan sonuçlar iki bölümde irdelenebilir :

Akışta fiziksel olarak viskozitenin etkisi çok az ise, kullanılan model iyi sonuçlar vermektedir. İki boyutlu lüle örneğinde bu açıkça görülmektedir.

Çalışmanın ana amacı olan ani genişleme olayının çözümünün Euler denklemleri ve yapay viskozite ile mümkün olmadığı, gerçek viskozitenin ve katı yüzeylerde yüzeye paralel hızların sıfır olma şartı nedeni ile, Navier-Stokes denklemlerinin çözümlenmesinin gerekli olduğu sonucuna varılmıştır.

SUMMARY

1. INTRODUCTION

With the rapid development of computer technology along with essential improvements in numerical algorithms applied to flow equations, computational fluid dynamics has become a powerful and helpful tool in the field of aerodynamics. In the past, mostly the potential equation has been used to predict inviscid transonic flows. Recently a number of numerical algorithms have been developed with substantial improvements in both computational efforts and solution accuracy.

2. GOVERNING EQUATIONS

The two-dimensional Euler equations for unsteady incompressible inviscid flows may be written in conservation form using a Cartesian coordinate system (x,y) as

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

where

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} p/\rho_0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \bar{F}_1 = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + p/\rho_0 \\ uv \end{bmatrix}, \bar{F}_2 = \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + p/\rho_0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

In these equations, p , ρ_0 , u and v are the pressure, density and Cartesian velocity components.

Equation (2.2) can be written as in the integral form

Continuity Equation :

$$\frac{\partial(\rho/\rho_0)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

x-Momentum Equation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 + p/\rho_0)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

y-Momentum Equation :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 + p/\rho_0)}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

If steady flows are of main interest, the solution procedure using these equations is marching forward in time until steady state is reached. The advantage of time dependent formulation is that the system is hyperbolic in subsonic and supersonic flows. There exists a highly developed mathematical theory of difference methods for hyperbolic equations which can be used as a solid foundation for the development of algorithms to solve equations (2.1).

By use of Gauss' divergence theorem, the governing equations (2.1) can be written in integral form as

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{W} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{F} \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (2.6)$$

for a fixed region Ω with boundary $\partial\Omega$.

3. FINITE VOLUME SPATIAL DISCRETIZATION

In the finite volume formulation, the generation of a body-fitted grid using curvilinear coordinates (X,Y) and the solution process are separated since no global transformation is used. The only required data concerning the grid are the Cartesian coordinates of the four vertices of every cell in the given mesh. The physical domain is divided into quadrilateral cells $(\Omega_{i,j})$ by joining the cell vertices by straight lines.

As equation (2.6) is valid for any arbitrary control volume, it is also holds locally for each cell $\Omega_{i,j}$.

Hence

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}} \bar{W} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{i,j}} \bar{F} \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (3.1)$$

where the boundary $\partial\Omega_{i,j}$ is given by

$$\partial\Omega_{i,j} = SV_{i,j} + SV_{i+1,j} + SH_{i,j} + SH_{i,j+1} \quad (3.2)$$

Considering a fixed mesh in time and approximating the second integral of (3.1) using the mid-point rule, the discrete analog of equation (3.1) is written as

$$h_{i,j} \left(\frac{d}{dt} \bar{W}_{i,j} \right) + \bar{Q}_{i,j} = 0 \quad (3.3)$$

where the $\bar{Q}_{i,j}$ represents the net flux out of a cell and is balanced by the rate of change of $\bar{W}$.

4. BOUNDARY CONDITIONS

The numerical treatment of boundary conditions along the boundaries in the physical domain is one of the major problems in solving the Euler equations. Their improper implementation can result in inaccurate solution and can lead to instabilities.

Three distinct type of conditions occur in the present analysis. These are the condition on solid, condition across coordinate cut and inflow/outflow conditions in the far field.

4.1. SOLID BODY BOUNDARY CONDITION

On a solid body the physical condition of no-normal-flow is imposed. Using a body-fitted coordinate system (X,Y), the body coinciding with a coordinate line is approximated by straight lines in the finite volume discretization. Hence, the no-normal-flow condition reduces to zero flux velocity through the faces of the cells aligned with the body.

5. DISSIPATION

The finite volumediscretization (3.3) with central averaging is not dissipative which means that high frequency oscillations in the solution, are not damped. In order to avoid these spurious oscillations dissipative terms have to be explicitly introduced. If no artificial dissipative terms are introduced in the scheme, the numerical solution does not converge to a steady state. Having executed 2000 time steps these are still wiggles in the pressure distribution. With dissipation, however, the solution converges completely to the steady state (1×10^{-7}) and the pressure distribution is smooth.

5.1. BLENDING OF FIRST AND THIRD ORDER DISSIPATIVE TERMS

In order to preserve the conservation form of the scheme the artificial dissipative terms are introduced by adding dissipative fluxes to the semi-discrete system (3.3).

$$h_{i,j} \left(\frac{d}{dt} \bar{W}_{i,j} \right) + \bar{Q}_{i,j} - \bar{D}_{i,j} = 0 \quad (5.1)$$

Using a blend of second and fourth differences, the dissipative operator $\bar{D}_{i,j}$ is defined by

$$\bar{D}_{i,j} = \bar{d}_{i+1/2,j} - \bar{d}_{i-1/2,j} + \bar{d}_{i+3/2,j} - \bar{d}_{i-3/2,j} \quad (5.2)$$

where the dissipative flux $\bar{d}_{i+\frac{1}{2},j}$ is given as

$$\bar{d}_{i+\frac{1}{2},j} = a_{i+\frac{1}{2},j} \left\{ \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} (\bar{W}_{i+1,j} - \bar{W}_{i,j}) - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} (\bar{W}_{i+2,j} - 3\bar{W}_{i+1,j} + 3\bar{W}_{i,j} - \bar{W}_{i-1,j}) \right\} \quad (5.3)$$

6. TIME STEPPING SCHEMES

Semi-discretization of equation (2.6) results in a system of first order ordinary differential equations with respect to time which is written as

$$\frac{d}{dt} \bar{W}_{i,j} + \bar{P}_{i,j} = 0 \quad (6.1)$$

where

$$\bar{P}_{i,j} = \frac{1}{h_{i,j}} (\bar{Q}_{i,j} - \bar{D}_{i,j}) \quad (6.2)$$

The operator $\bar{P}$ is often called the residual of system (6.1). System (6.1) is solved using explicit multistage schemes of Runge-Kutta type.

CONCLUSIONS

The code used converges if the viscosity effects of the flow are negligible. This can be clearly seen at the two dimensional flow in a nozzle. This study shows that Euler equations and artificial viscosity are insufficient to solve the flow between suddenly enlarge parallel two plates. Because of the real viscosity and the no-slip conditions this problem can only be handled with solving of Navier-Stokes equations.

BÖLÜM 1.

GİRİŞ

Hesaplamalı akışkanlar dinamiği, hareket denklemlerine uygulanan sayısal yöntemlerdeki köklü ilerlemeler ve bilgisayar teknolojisinin hızlı gelişimi ile, akışkanlar dinamiği alanında güçlü ve faydalı bir araç haline gelmiştir. Geçmişte, viskoz olmayan transonik akışların tahmininde genellikle potansiyel denklemi kullanılırdı. Son 20-30 yılda türbomakina içindeki akışın modellenmesinde büyük gelişmeler kaydedilmiştir. Çark içindeki transonik, viskoz olmayan akışın çözümünde sonlu hacimler, sonlu farklar veya sonlu elemanlar yaklaşımları ile zaman adımlaması yönteminin birleştirilmesi en önemli ilerlemedir.

Bu çalışmanın ana amacı Euler denklemlerinin ani genişleyen iki levha arasında sıkıştırılamayan akışkan hareketinin modellenmesinde kullanılıp kullanılamayacağının irdelenmesidir. Potansiyel teori yerine Euler denklemlerinin kullanılmasının çeşitli sebepleri vardır :

- Ani genişlemelerin olduğu köşelerdeki ayrılmaların belirlenmesi;
- uniform olmayan giriş koşullarının verilebilmesi;
- viskoz akışlara geçişteki kolaylık;
- sıkıştırılabilir akışkanlar için şok oluşumunun hesaplanmasının daha kolay olması.

Eğer sadece viskoz olmayan daimi akışlar ile ilgileniliyor ise, Euler denklemlerini çözmek için iki tane yol izlenebilir. Birinci yol, daimi denklemlerin doğrudan doğruya çözülmesi şeklinde iken; ikinci yol, daimi olmayan denklemlerin daimi hal oluşana kadar zaman içerisinde integre edilmesi şeklindedir. Birinci yaklaşım ikincisi kadar iyi geliştirilmemiştir. Bunun nedeni, sonlu farklar metodunun ileri derecede geliştirilmiş teorisinde, hiperbolik sistemler için zamana bağlı formülasyonun yönlendirmesidir. Zaman içerisindeki entegrasyon, (explicit) veya (implicit) zaman adımlaması yollarından birini kullanarak yapılabilir.

BÖLÜM 2.

ANA DENKLEMLER

Sıkıştırılamaz, viskoz olmayan akışkanların daimi olmayan iki boyutlu hareketi için Euler denklemleri, (x,y) kartezyen koordinatları kullanılarak konservatif formda şu şekilde yazılır :

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

burada

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} p/\rho_0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \bar{F}_1 = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + p/\rho_0 \\ uv \end{bmatrix}, \bar{F}_2 = \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + p/\rho_0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

dır. Bu denklemlerde kullanılan büyüklükler boyutsuz büyüklüklerdir. Bunlar da şu şekildedir :

$$p = \frac{p^*}{p^0}, \rho = \frac{\rho^*}{\rho^0}, L = \frac{L^*}{L^0}, t = \frac{t^*}{t^0}$$

Burada, p^0, ρ^0, L^0, T^0 karakteristik referans büyüklükleridir. Örneğin; p^0, ρ^0 kanal girişindeki toplam basınç ve toplam yoğunluk, L^0 ise kanalın boyu olarak düşünülebilir.

Boyutsuz hız değeri ise şu şekilde hesaplanmıştır :

$$\rho^* \frac{V^{*2}}{2} = p^0 - p^*$$

$$\frac{\rho^*}{\rho^0} \frac{1}{p^0} \frac{V^{*2}}{2} = \frac{1}{\rho^0} (1-p)$$

$$\rho \frac{1}{p^0} \frac{V^{*2}}{2} = \frac{1}{\rho^0} (1-p)$$

$$\rho \frac{1}{2} \frac{V^{*2}}{p^0/\rho^0} = 1-p$$

Buradan

$$\frac{V^{*2}}{p^0/\rho^0} = V^2 \Rightarrow V = \frac{V^*}{\sqrt{p^0/\rho^0}}$$

çıkartılır.

(2.2) denklemlerini açık olarak yazarsak :

Süreklilik denklemi :

$$\frac{\partial(p/\rho_0)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

x-Momentum Denklemi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 + p/\rho_0)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

y-Momentum Denklemi :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 + p/\rho_0)}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

Gauss diverjans teoremi kullanılarak ana denklemler integral formda,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{W} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{\bar{F}} \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\bar{n}$, $\partial\Omega$ 'nın dış normalidir ve $\bar{\bar{F}}$ akı yoğunluğu tensörü, $\bar{i}_x$ ve $\bar{i}_y$ kartezyen birim vektörleri olmak üzere,

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \bar{f}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\bar{i}_x + v\bar{i}_y \\ (u^2 + p/\rho_0)\bar{i}_x + (uv)\bar{i}_y \\ (uv)\bar{i}_x + (v^2 + p/\rho_0)\bar{i}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{q} + (u + p/\rho_0)\bar{i}_x + u\bar{i}_y \\ \bar{q} + v\bar{i}_x + (v + p/\rho_0)\bar{i}_y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

şeklindedir. Burada $\bar{q}$ hız vektörüdür ve şu şekilde tanımlanmıştır.

$$\bar{q} = u\bar{i}_x + v\bar{i}_y$$

BÖLÜM 3.

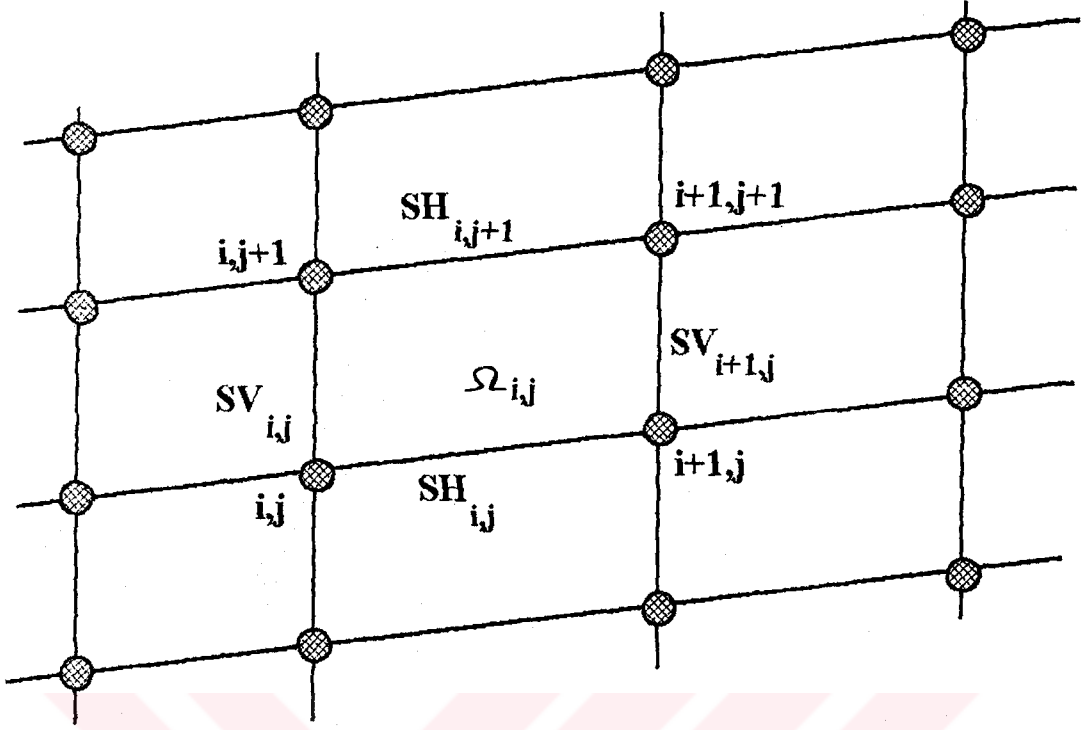
SONLU HACİMLER AYRIKLAŞTIRMASI

Sonlu hacimler yaklaşımı konservatif formda yazılan ana denklemlerin nümerik gösterimidir. Fiziksel akış bölgesi kütle, momentum ve enerji alışverişi yapılan birçok kontrol hacmine bölünür. Metodun temel prensibi; bir V hacmi içindeki herhangi bir temel bilinmeyen $(\rho, \bar{W}, e)$ 'nin değişim hızı V hacminin sınırındaki ∂V yüzeyinden geçen konvektif akıya eşit olmasıdır.

Bir kanat dizini (blade row) arasındaki akışın hesaplanması, sonlu hacimler metodunun, sonlu elemanlar metoduna olan üstünlüğünü açık olarak göstermektedir. Bir türbomakinada olduğu gibi karmaşık geometri, herhangi bir koordinat dönüşümü yapılmadan kolayca ayrıklaştırılabilir. Bu bakış açısından, sonlu hacimler yaklaşımı, sonlu elemanlar yaklaşımı ile aynı esnekliğe sahiptir; fakat, sonlu hacimler metodu konservatif (kapalı) karakteri nedeniyle problemin fiziğine daha yakın kalmaktadır.

Çözüm ağı ile ilgili tek bilgi verilen ağ yapısının her elemanının dört izdüşümünün kartezyen koordinatlarıdır. Ağ üretimi ana programın dışında ek bir bilgisayar programı yardımıyla yapılmaktadır. Programa giriş bilgileri olarak (x) ve (y) yönündeki maksimum nokta sayıları ile katı çeperlerin (x) ve (y) koordinatları verilir. Program içinde bütün noktaların koordinatları ve bu noktalara ait yüzey projeksiyon alanları hesaplanır. Hesaplanan bu değerler ana programda okutulmak üzere bir data dosyasına yazdırılır. İki bloklu olarak çalışan programda, blokların birleşme kesitinde cidarlara paralel olan ağ çizgilerinin kesişmesi gerekmektedir. Bunun için (y) yönündeki maksimum nokta sayıları, bu yöndeki iki nokta arasındaki mesafe eşit tutulacak şekilde seçilmelidir.

Fiziksel tanım alanı, düz çizgilerle eleman izdüşümlerinin yardımıyla dört köşeli elemanlara $(\Omega_{i,j})$ ayrılmıştır.



Şekil 3.1 : Dörtköşeli elemanların tanımlanması

(2.6) denkleminin herhangi bir kontrol hacmi için doğru olması gibi, aynı zamanda her $\Omega_{i,j}$ yersel elemanı için de geçerlidir. Buradan

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}} \bar{W} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{i,j}} \bar{F} \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (3.1)$$

yazılabilir. Burada, $\partial\Omega_{i,j}$ sınırı aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\partial\Omega_{i,j} = SV_{i,j} + SV_{i+1,j} + SH_{i,j} + SH_{i,j+1} \quad (3.2)$$

Jameson [2] 'in aşağıdaki yarı-ayrıklaştırmasında (çizgiler metodu), uzaysal ve zamana bağlı terimler ayrılmıştır.

$$\bar{W}_{i,j} = \frac{1}{h_{i,j}} \int_{\Omega_{i,j}} \bar{W} d\Omega \quad (3.3)$$

burada $h_{i,j}$, $\Omega_{i,j}$ elemanının alanı olup şu şekilde yazılır,

$$h_{i,j} = 0.5 \left\{ (x_{i+1,j+1} - x_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) - (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})(x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \right\} \quad (3.4)$$

(3.1) numaralı denklemin ikinci integralini ele alarak, (3.1) numaralı denklemin ayrık benzeri şu şekilde yazılabilir,

$$h_{i,j} \left(\frac{d}{dt} \bar{W}_{i,j} \right) + \bar{Q}_{i,j} = 0 \quad (3.5)$$

Burada $\bar{Q}_{i,j}$, elemandan çıkan net akıyı temsil eder ve $\bar{W}$ 'nin değişim oranı ile dengelenir. Akı terimi $\bar{Q}_{i,j}$ aşağıdaki gibi ifade edilmiştir,

$$\bar{Q}_{i,j} = \bar{F} \cdot \vec{SH} \Big|_{i,j+1} - \bar{F} \cdot \vec{SH} \Big|_{i,j} + \bar{F} \cdot \vec{SV} \Big|_{i+1,j} - \bar{F} \cdot \vec{SV} \Big|_{i,j} \quad (3.6)$$

$\vec{SH}_{i,j}$, $\vec{SV}_{i,j}$ sınırına normal teşkil eden ve $(s^{(1)}, s^{(2)})$ şeklinde iki tane bileşene sahip olan doğrudur. Bu bileşenler şu şekilde verilmiştir,

$$s_{i,j}^{(1)} = y_{i+1,j} - y_{i,j} \quad (3.7)$$

$$s_{i,j}^{(2)} = x_{i,j} - x_{i+1,j}$$

Akı miktarı $\bar{F} \cdot \vec{SH}_{i,j}$, $\vec{SV}_{i,j}$ sınırını oluşturan noktalardaki ortalamaları kullanılarak hesaplanır. Böylece,

$$\bar{F}_{i,j} = \bar{F} \left(\frac{1}{2} (\bar{W}_{i,j} + \bar{W}_{i,j-1}) \right) \quad (3.8)$$

Akış değişkenleri $\bar{W}$ ve akış miktarları $\bar{F} \cdot \bar{S}$ 'nin farklı uzaysal pozisyonları, sonlu hacimler kavramının esas niteliklerindendir. Bu yöntem, akış miktarı $\bar{W}$ 'nin eleman merkezlerinde değerlendirildiği eleman köşeli yöntem (cell-vertex scheme) olarak bilinir. Buna alternatif bir yaklaşım; $\bar{W}$

'nin elemanların izdüşümlerinde tanımlandığı nodal nokta yöntemidir (nodal point scheme).

(2.7) denkleminin uygun olarak, örneğin $SH_{i,j}$ sınırına doğru olan akı şu şekilde verilmiştir,

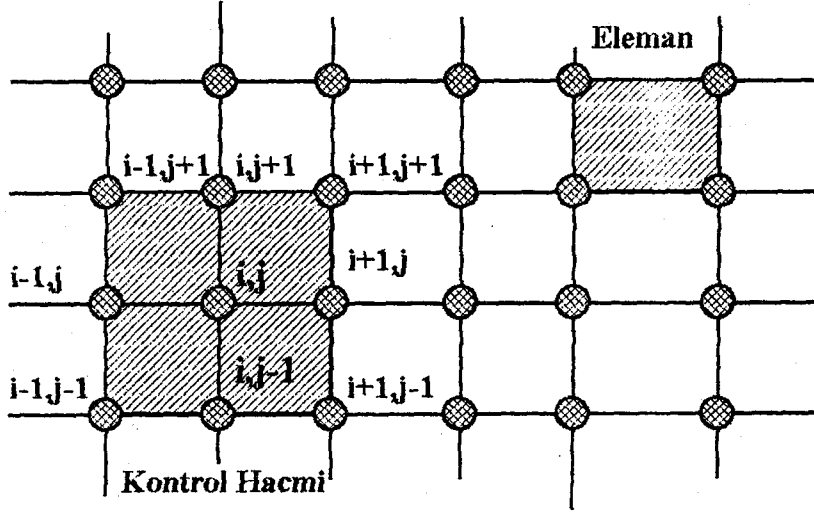
$$\vec{F} \cdot \vec{SH}_{i,j} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{i,j} \cdot \vec{SH}_{i,j} \\ \bar{q}_{i,j} \cdot \vec{SH}_{i,j} + \left(u_{i,j} + (p/\rho_0)_{i,j} \right) s_{i,j}^{(1)} + u_{i,j} s_{i,j}^{(2)} \\ \bar{q}_{i,j} \cdot \vec{SH}_{i,j} + v_{i,j} s_{i,j}^{(1)} + \left(v_{i,j} + (p/\rho_0)_{i,j} \right) s_{i,j}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

(3.8) denkleminin ortalaması alınarak, eleman köşeli (cell-vertex) sonlu hacimler ayrıklaştırması, sabit ağ ölçüleri ile kartezyen ağ sisteminde, ikinci dereceden bir merkezi farklar (central-difference) yöntemine indirgenir. Eğer herhangi rastgele bir üniform olmayan ağ yapısı kullanılmış ise, bu yöntemin doğruluğu ağ yapısının düzgünsüzlüğü ile doğru orantılıdır. Eğer bir elemanın şekil ve hızındaki herhangi bir ani değişim haricinde, ağ yapısı yeterince düzgün ise, yöntem hemen hemen ikinci dereceden doğrudur.

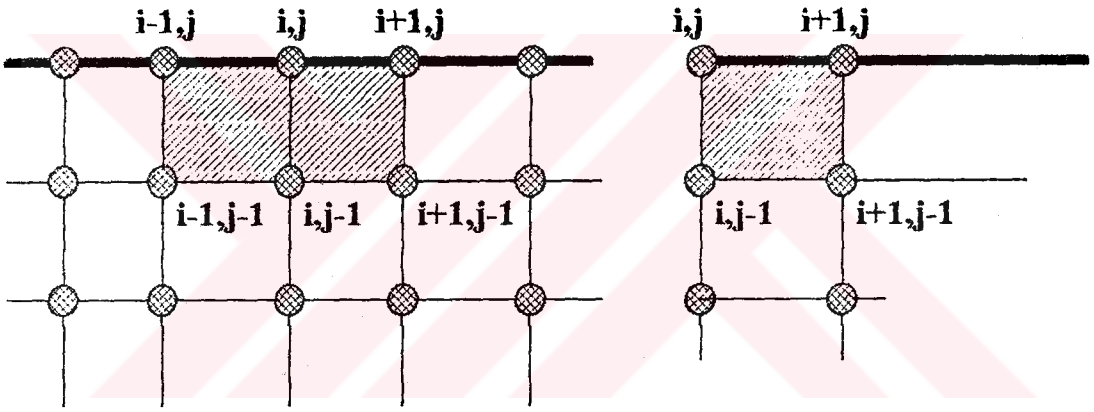
(2.4) denkleminin uzaysal ayrıklaştırması, (3.5) denklemindeki zamana bağlı birinci dereceden adi diferansiyel denklem sistemini verir ve bunlar (explicit) zaman adımı yöntemi ile çözülür.

Kullanılan yöntemde akış bölgesi dört kenarlı elemanlar kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Bilinmeyenler, elemanların (gözlerin) köşelerine yerleştirilmiştir. Kontrol hacmi ise şekil 3.2'de görüleceği şekilde herbir noktanın etrafında bulunan dört elemandan oluşmaktadır.

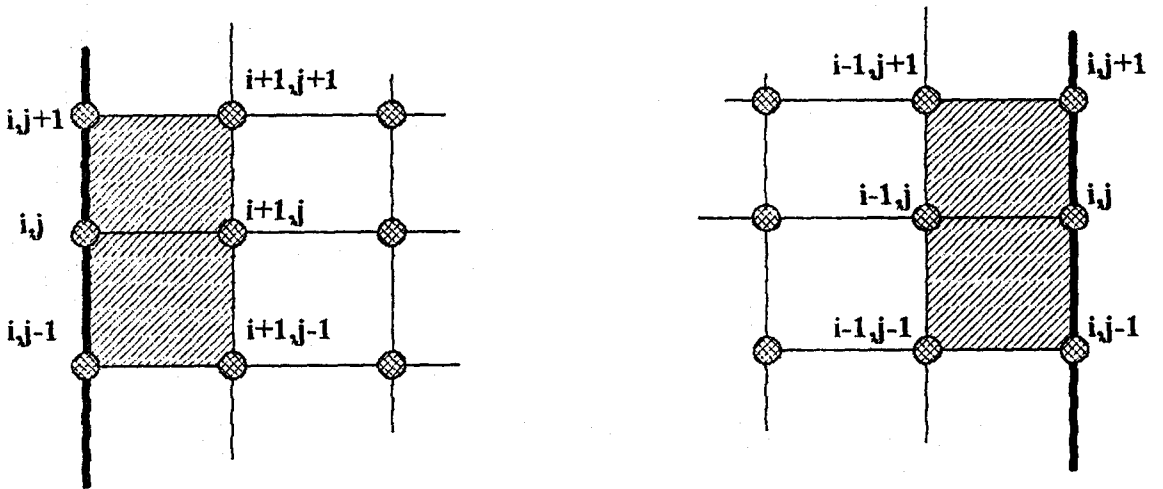
Başlangıç olarak herbir noktaya belli bir basınç ve hız dağılımı ve ayrıca sınır koşulları verilir. Daha sonra $t+dt$ anında alacağı değerler, kalıntı ve yapay viskozitenin matematiksel olarak eklenmesi ile bulunur. Bu iki zaman arasındaki fark makina doğruluğu seviyesine ($\sim 10^{-6}$) ulaşana kadar işleme devam edilir.



a) Orta noktalar için kontrol hacmi tanımı ve bir örnek eleman

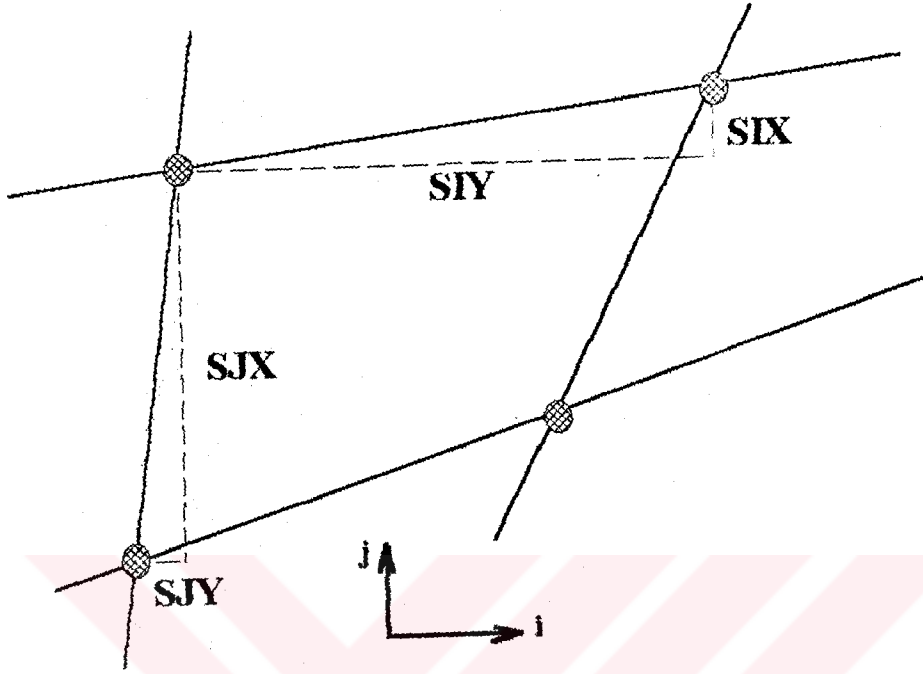


b) Katı cıdarlar ve köşe noktalar için kontrol hacmi tanımı



c) Giriş ve çıkış kesitleri

Şekil 3.2 : Kontrol hacmi tanımları



Şekil 3.3 Yatay ve düşey yüzeylerin x ve y bileşenleri

Şekil 4.1. Katı çeperlere komşu elemanlar

(3.9) denkleminden $SH_{i,1}$ 'den geçen akı miktarı çözülürse,

$$\vec{F}.SH_{i,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ (u_{i,1} + (p/\rho_0)_{i,1})s_{i,1}^{(1)} + u_{i,1}s_{i,1}^{(2)} \\ (p/\rho_0)_{i,1}s_{i,1}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.2. GİRİŞ KESİDİ SINIR ŞARTLARI

Sınır şartı olarak giriş kısmında toplam basınç ve giriş açısı verilmektedir. Statik basınç şu şekilde hesaplanır :

p_{top} verilir, giriş kesitine komşu olan kesitin noktalarının bir bileşeni (u), giriş kesitine taşınır. İkinci hız bileşeni (v) veri dosyasında verilen açılı giriş açısı ile belirlenir.

Statik basınç,

$$p_{st} = p_{top} - \rho \frac{V^2}{2} \quad (4.2)$$

denklemden şeklinde hesaplanır.

4.3. ÇIKIŞ KESİDİ SINIR ŞARTLARI

Çıkış kısmında sınır şartı olarak statik basınç değeri verilmektedir. Hızlar içeriden çıkıştan bir önceki kesitin noktalarındaki hızlar olarak alınır.

$$u_n = u_{n-1}$$

$$v_n = v_{n-1}$$

BÖLÜM 5.

YAPAY VİSKOZİTE

Merkezi ortalamalı sonlu hacimler ayrıklaştırması, çözümde yüksek frekanslı salınımlar sönümlenmediği için kararlı değildir. Bu salınımları yok edebilmek için yapay viskozite terimleri formülasyona ilave edilir. Eğer, yapay viskozite tanımlanmamış ise, sayısal çözüm daimi hale yakınsayamaz ve kararlı değildir. Yapay viskozite katıldığı zaman, çözüm daimi hale (10^{-6} ~ 10^{-7}) tam olarak yakınsar ve basınç dağılımı düzgün olur. Tek ve çift noktalarındaki coupling'i önlemek için yapay viskozite terimleri denklemlere katılır.

5.1. BİRİNCİ VE ÜÇÜNCÜ DERECEDEN YAPAY VİSKOZİTE TERİMLERİNİN HARMANLANMASI

Yöntemin konservatif formunu korumak için, yapay viskozite terimleri yarı farklı (semi-discrete) sisteme (denklem 3.5) yapay viskoz akılar eklenerek tanımlanır.

$$h_{i,j} \left(\frac{d}{dt} \bar{W}_{i,j} \right) + \bar{Q}_{i,j} - \bar{D}_{i,j} = 0 \quad (5.1)$$

Yapay viskozite terimi $\bar{D}_{i,j}$, ikinci ve dördüncü dereceden farkların harmanlanması ile şu şekilde bulunur,

$$\bar{D}_{i,j} = \bar{d}_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{d}_{i-\frac{1}{2},j} + \bar{d}_{i,j+\frac{1}{2}} - \bar{d}_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

Burada yapay viskozite akısı $\bar{d}_{i+\frac{1}{2},j}$ şu şekilde verilmiştir,

$$\bar{d}_{i+\frac{1}{2},j} = a_{i+\frac{1}{2},j} \left\{ \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} (\bar{W}_{i+1,j} - \bar{W}_{i,j}) - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} (\bar{W}_{i+2,j} - 3\bar{W}_{i+1,j} + 3\bar{W}_{i,j} - \bar{W}_{i-1,j}) \right\} \quad (5.3)$$

Burada $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)}$, gerekli olan ve yeter miktarda yapay viskoziteye göre değişmek üzere düzenlenmiş uyarlamalı katsayıdır ve $a_{i+\frac{1}{2},j}$ sabiti, uygun büyüklükte yapay viskozite terimi verecek şekilde seçilir. İleri doğru farklar operatörü δ_x kullanılarak (5.3) denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\delta_x \bar{W}_{i,j} = \bar{W}_{i+1,j} - \bar{W}_{i,j}$$

$$\bar{d}_{i+\frac{1}{2},j} = a_{i+\frac{1}{2},j} \left\{ \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} \delta_x \bar{W}_{i,j} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} \delta_{xxx} \bar{W}_{i-1,j} \right\} \quad (5.4)$$

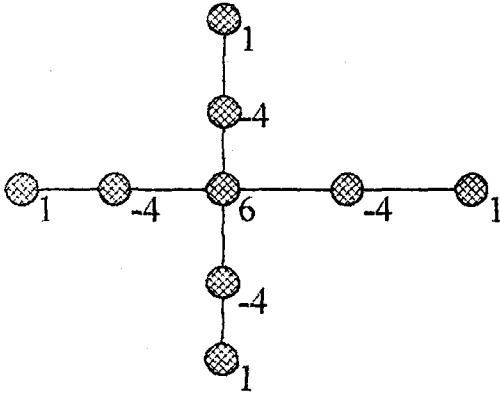
Benzer şekilde $\bar{d}_{i,j+\frac{1}{2}}$ şu şekilde tanımlanır,

$$\bar{d}_{i,j+\frac{1}{2}} = a_{i,j+\frac{1}{2}} \left\{ \varepsilon_{i,j+\frac{1}{2}}^{(2)} \delta_y \bar{W}_{i,j} - \varepsilon_{i,j+\frac{1}{2}}^{(4)} \delta_{yyy} \bar{W}_{i,j-1} \right\} \quad (5.5)$$

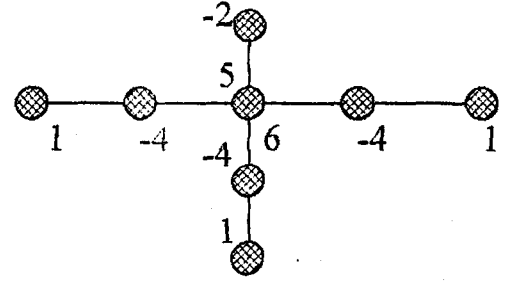
Burada,

$$\delta_y \bar{W}_{i,j} = \bar{W}_{i,j+1} - \bar{W}_{i,j}$$

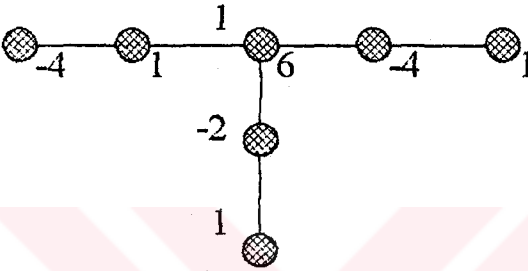
şeklinde tanımlanmıştır. Bu formülasyon aşağıdaki yapay viskozite moleküllerini verir :



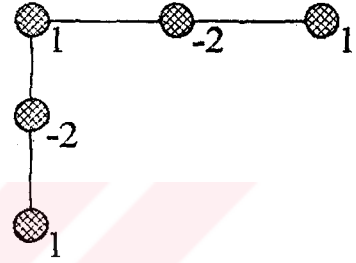
İçerideki bir nokta için



Cidara komşu bir nokta için



Cidardaki bir nokta için



Köşedeki bir nokta için

Şekil 5.1 Yapay viskozite molekülleri

Uygun büyüklük faktörü $a_{i+\frac{1}{2},j}$ şu şekilde verilmiştir,

$$a_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_{i,j}}{\Delta t_{i,j}^*} + \frac{h_{i+1,j}}{\Delta t_{i+1,j}^*} \right) \quad (5.6)$$

Burada $\Delta t_{i,j}^*$, $\Omega_{i,j}$ elemanın birim nominal Courant sayısı için tahmini zaman adımı limitidir. (5.6) formülü,

$$\Delta y \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial \vec{W}} - \Delta x \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial \vec{W}}$$

jakobiyeninin hayali açısına bir yaklaşımdır.

$\varepsilon^{(4)}$ katsayısı,

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} = \max \left(0, k^{(4)} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} \right) \quad (5.7)$$

şeklinde yersel gradyenlere uyarlanmıştır.



BÖLÜM 6.

ZAMAN ADIMI

Zaman adımı yönteminin ana prensibi, daimi bir problemi daimi olmayan bir problem gibi çözmektir. Fiziksel yorum ise şu şekildedir. Hesaplama kaba bir yaklaşımla başlar. Bu yaklaşım, daimi akış bölgesinin büyük bir pertürbasyonu ve belirli bir sınır şartlarına dek yakınsamış gibi gözükten ilk yaklaşımdır. Bu, matematik olarak bir Cauchy probleminin çözümüne eşdeğerdir. Bu daimi olmayan yaklaşımın avantajı, akış rejiminin sesaltı veya sesüstü olduğuna bakmadan akışa ait denklemlerin hiperbolik karakterini kullanıma sunmasıdır. Yöntemin dezavantajı ise yakınsama için gerekli zamanın uzun olmasıdır.

Açık dört adımlı Runge-Kutta tipi zaman integrasyon yöntemi, hiperbolik olan denklem sistemini çözmek için kullanıldı.

6.1. STANDART RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

(2.4) denkleminin yarı ayrıklaştırılması ile aşağıdaki şekilde yazılan zamana göre birinci dereceden adi diferansiyel denklem sistemine ulaşılır :

$$\frac{d}{dt} \bar{W}_{i,j} + \bar{P}_{i,j} = 0 \quad (6.1)$$

Burada

$$\bar{P}_{i,j} = \frac{1}{h_{i,j}} (\bar{Q}_{i,j} - \bar{D}_{i,j}) \quad (6.2)$$

dir. $\bar{P}$ operatörü, genellikle (6.1) denklem sisteminin kalıntısı (residual) olarak adlandırılır. (6.1) denklem sistemi, Runge-Kutta tipi dört kademeli zaman adımı yöntemi kullanılarak çözülmüştür.

Çok kademeli Runge-Kutta yöntemlerinin katsayılar mümkün olan en yüksek doğruluk derecesini sağlayacak şekilde seçilir. Butcher [5] tarafından ispatlandığına göre r bölüm sayısı ile maksimum bulunabilir doğruluk derecesi arasındaki bağıntı şu şekildedir:

Bölüm sayısı, r	1	2	3	4	5	6	7	$r \geq 8$
Doğruluk derecesi	1	2	3	4	4	5	6	$\leq r-2$

Klasik dördüncü dereceden Runge-Kutta metodu (6.1) denklem sistemine uygulanarak;

$$\begin{aligned}
 \bar{W}_{i,j}^{(0)} &= \bar{W}_{i,j}^n \\
 \bar{W}_{i,j}^{(1)} &= \bar{W}_{i,j}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} \bar{P}_{i,j}^{(0)} \\
 \bar{W}_{i,j}^{(2)} &= \bar{W}_{i,j}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} \bar{P}_{i,j}^{(1)} \\
 \bar{W}_{i,j}^{(3)} &= \bar{W}_{i,j}^{(0)} - \Delta t \bar{P}_{i,j}^{(2)} \\
 \bar{W}_{i,j}^{(4)} &= \bar{W}_{i,j}^{(0)} - \frac{\Delta t}{6} \{ \bar{P}_{i,j}^{(0)} + 2 \bar{P}_{i,j}^{(1)} + 2 \bar{P}_{i,j}^{(2)} + \bar{P}_{i,j}^{(3)} \} \\
 \bar{W}_{i,j}^{n+1} &= \bar{W}_{i,j}^{(4)}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

şeklinde yazılır. Burada (6.2) denklemindeki gibi kalıntı şu şekildedir :

$$\bar{P}_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{h_{i,j}} (\bar{Q}_{i,j}^{(k)} - \bar{D}_{i,j}^{(k)}) \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3 \tag{6.4}$$

Bu yöntem, dört akı ($\bar{Q}_{i,j}^{(k)}$) ve dört yapay viskozite teriminin ($\bar{D}_{i,j}^{(k)}$) değerlendirilmesinin gerektiği kadar çok etkili değildir. Ayrıca, $\bar{P}_{i,j}^{(k)}$ ($k=0,1,2,3$) ara terimi de birikmiş olur. Bu da üç boyutlu problemlerde büyük

birikmelere yol açar. Bu bakımdan bu çalışmada değiştirilmiş (geliştirilmiş) dört adımlı Runge-Kutta yöntemi kullanıldı.

6.2. GELİŞTİRİLMİŞ DÖRT ADIMLI RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

Geliştirilmiş dört adımlı Runge-Kutta yöntemi, (6.1) denklem sistemine eklendiği zaman minimum seviyede bilgisayar hafızası gerektirir. Bu ise şu şekilde yazılır :

$$\begin{aligned}
 \bar{W}_{i,j}^{(0)} &= \bar{W}_{i,j}^n \\
 \bar{W}_{i,j}^{(1)} &= \bar{W}_{i,j}^{(0)} - \frac{\Delta t}{4} \bar{P}_{i,j}^{(0)} \\
 \bar{W}_{i,j}^{(2)} &= \bar{W}_{i,j}^{(0)} - \frac{\Delta t}{3} \bar{P}_{i,j}^{(1)} \\
 \bar{W}_{i,j}^{(3)} &= \bar{W}_{i,j}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} \bar{P}_{i,j}^{(2)} \\
 \bar{W}_{i,j}^{(4)} &= \bar{W}_{i,j}^{(0)} - \Delta t \bar{P}_{i,j}^{(3)} \\
 \bar{W}_{i,j}^{n+1} &= \bar{W}_{i,j}^{(4)}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

burada $\bar{P}_{i,j}^{(k)}$ (6.4) denkleminde tanımlanan şekildedir.

6.3. YERSEL MAKSİMUM ZAMAN ADIMININ HESAPLANMASI

Runge-Kutta metodu gibi adi diferansiyel denklemler için kullanılan klasik zaman integrasyon yöntemleri, yarı-ayrıklaştırma eklendikten sonra stabil olmayan karakterdedir. Bu nedenle, denklemleri stabil hale getirmek amacıyla yersel maksimum zaman adımı kullanılır.

Yersel maksimum zaman adımı şu şekilde hesaplanmıştır :

$$\Delta t_{ij} \leq \text{CFL} \left[\frac{\text{ALAN}}{\tilde{U} + (\tilde{U}^2 + c^2 S^2)^{1/2}} \right]_{ij} \quad (6.6)$$

burada

$$\tilde{U} = |u \text{ SIX} + v \text{ SIY}| + |u \text{ SJX} + v \text{ SJY}|$$

$$S^2 = (|\text{SIX}| + |\text{SJX}|)^2 + (|\text{SIY}| + |\text{SJY}|)^2$$

ve

$$c^2 = \max(0.3, r \bar{V} \cdot \bar{V}) \quad , \quad 1 < r < 5$$

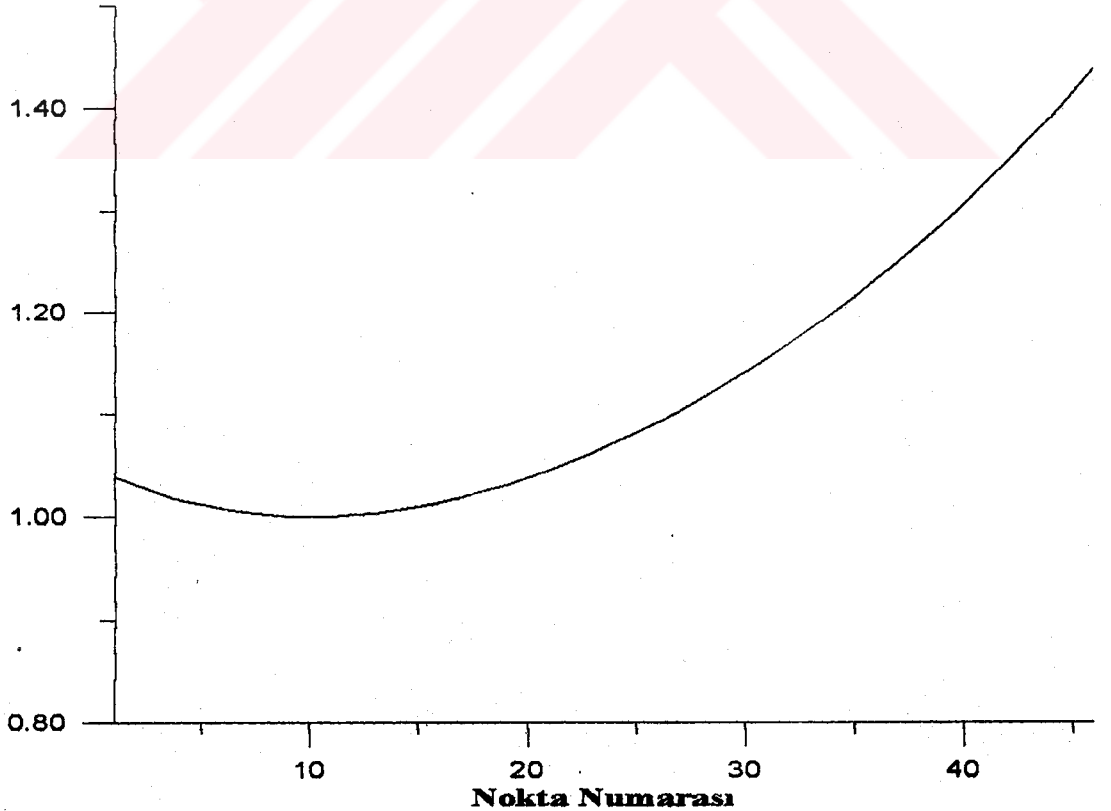
dir.

BÖLÜM 7.

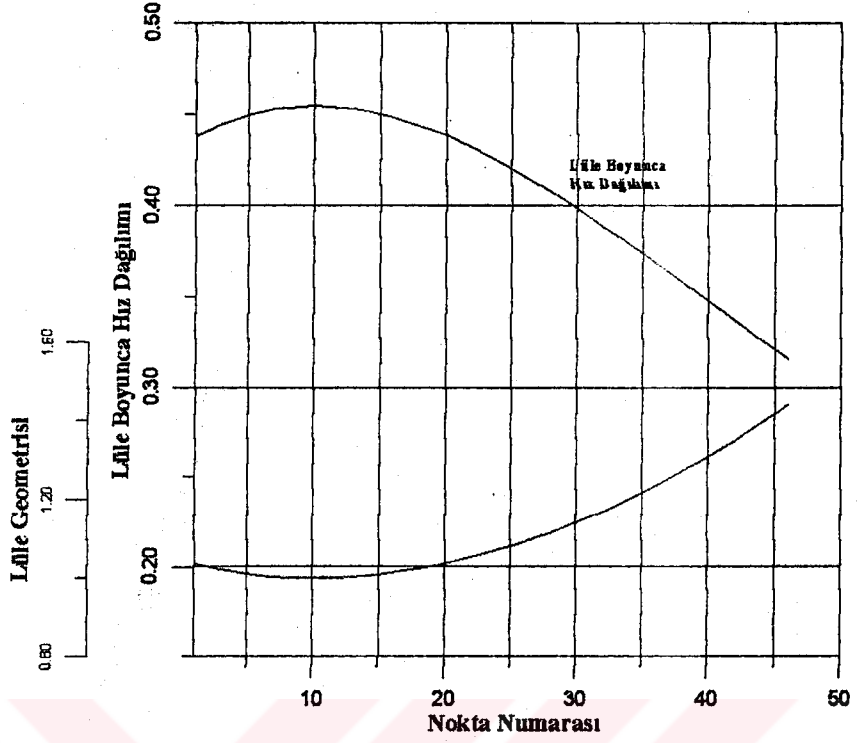
ÖRNEK PROBLEMLER

7.1. TEK BOYUTLU LÜLEDE SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

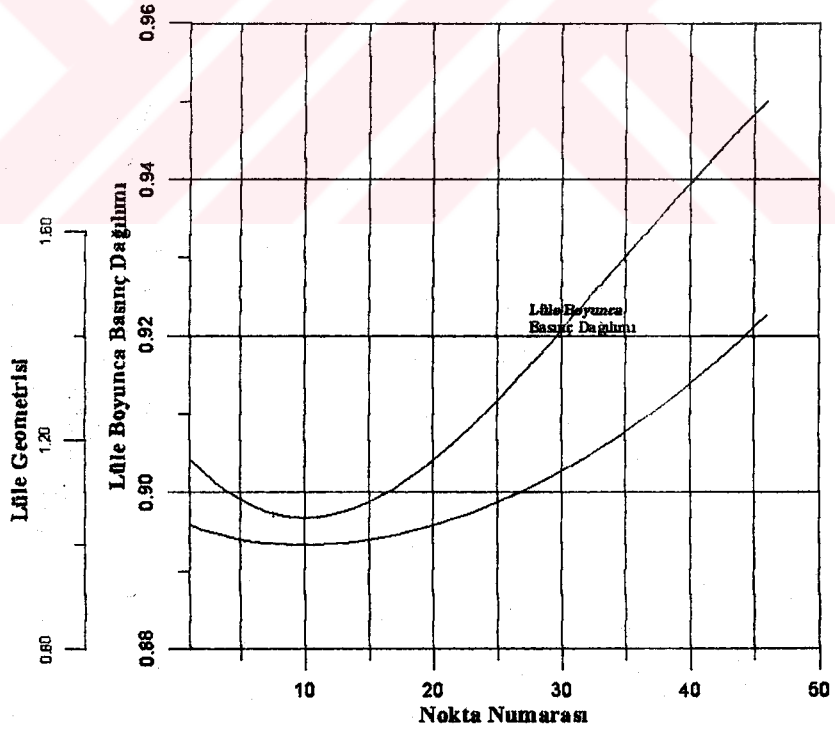
Tek boyutlu bir yakınsak-ıraksak lüledeki akışın incelenmesi örneği ilk olarak denendi. Lülenin geometrisi şekil 7.1'de gösterilmiştir. Şekil 7.2'de lüle boyunca hız değişimi ve lüle geometrisi; şekil 7.3'te ise lüle boyunca basınç değişimi ve lüle geometrisi birlikte görülmektedir. Şekil 7.4'de iterasyon sayısı-yakınsaklık kriteri değişimi çizilmiştir. Buradan da görülebileceği gibi yaklaşık 9000 iterasyondan sonra yakınsaklık kriteri makina doğruluğu kabul edilen 10^{-6} seviyesine inmiştir.



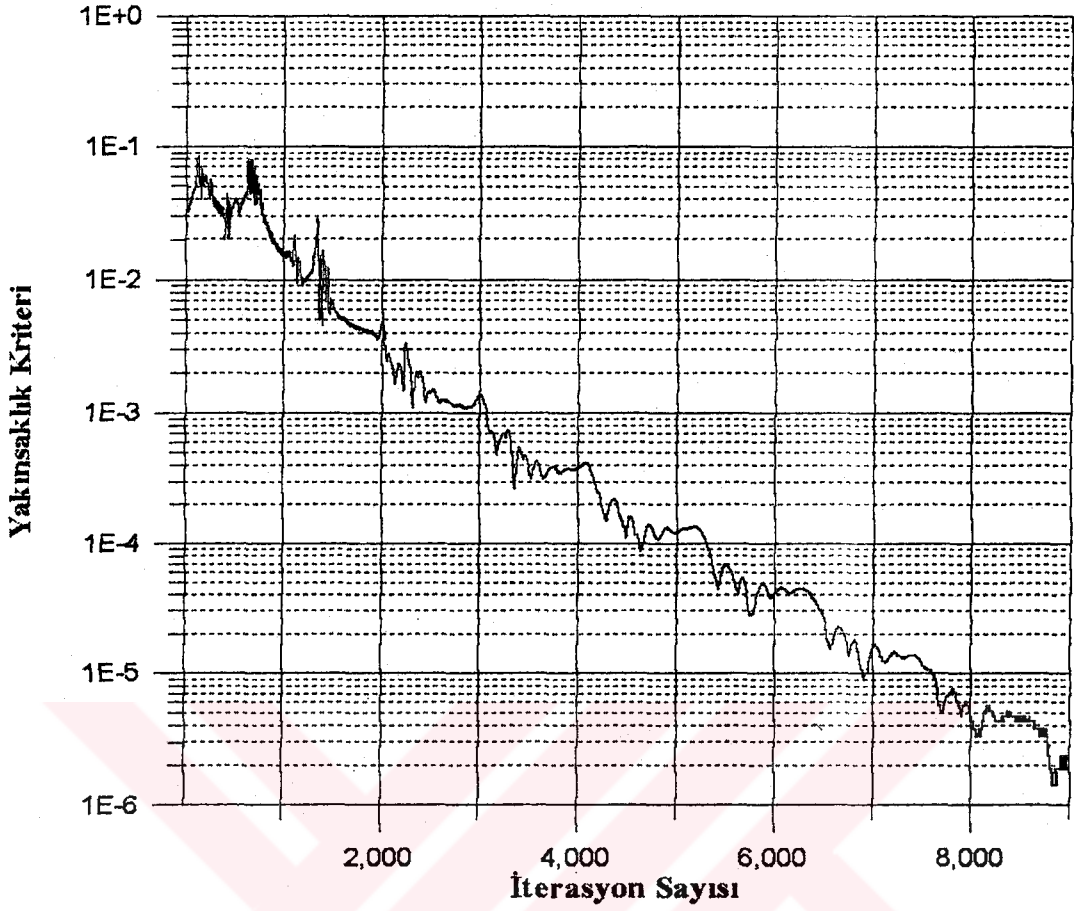
Şekil 7.1 Lüle geometrisi



Şekil 7.2 Lüle boyunca hız dağılımı ve lüle geometrisi.



Şekil 7.3 Lüle boyunca basınç dağılımı ve lüle geometrisi.



Şekil 7.4 Yakınsaklık kriterinin iterasyon sayısına göre değişimi

7.1.1. ANALİTİK ÇÖZÜM

Giriş kesitinde sınır koşulu olarak toplam basınç boyutsuz olarak 1 ve çıkış kesitinde statik basınç gene boyutsuz olarak 0.95 olarak alındı. Bu durumda,

$$p_g + \rho \frac{V_g^2}{2} = 1 \quad \text{ve} \quad p_{\text{ç}} = 0.95$$

olur. Giriş ve çıkış kesitleri arasında Bernoulli denklemini yazarsak,

$$p_G + \rho \frac{V_G^2}{2} = p_\zeta + \rho \frac{V_\zeta^2}{2}$$

elde ederiz. Burada ρ boyutsuz ve 1'dir. Süreklilik denkleminde ise,

$$V_\zeta = V_G \frac{A_G}{A_\zeta}$$

yazabiliriz. Bu denklemlerden de aşağıdaki denklemi çıkartabiliriz.

$$1 = 0.95 + 1 \frac{1}{2} \left(\frac{A_G}{A_\zeta} \right)^2 V_G^2$$

$$\Rightarrow V_G = \sqrt{0.1} \frac{A_\zeta}{A_G}$$

Lülenin geometrisinden giriş ve çıkış kesidi alanlarını da yazarak;

$$V_G = \sqrt{0.1} \frac{1.43898}{1.03823}$$

$$\Rightarrow V_G = 0.43829$$

ve

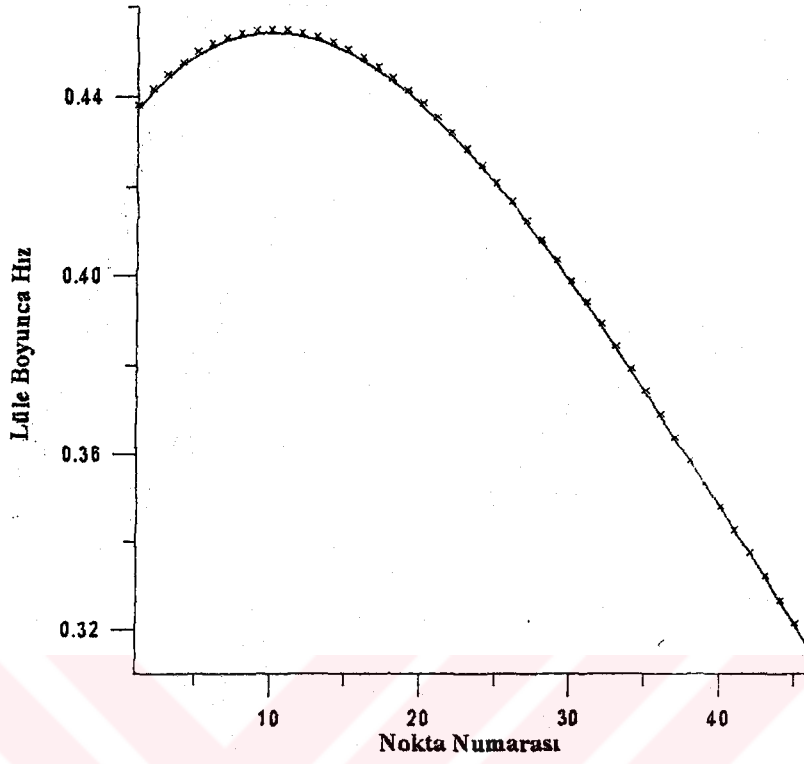
$$V_\zeta = 0.31622$$

değerleri boyutsuz olarak elde edilmiştir.

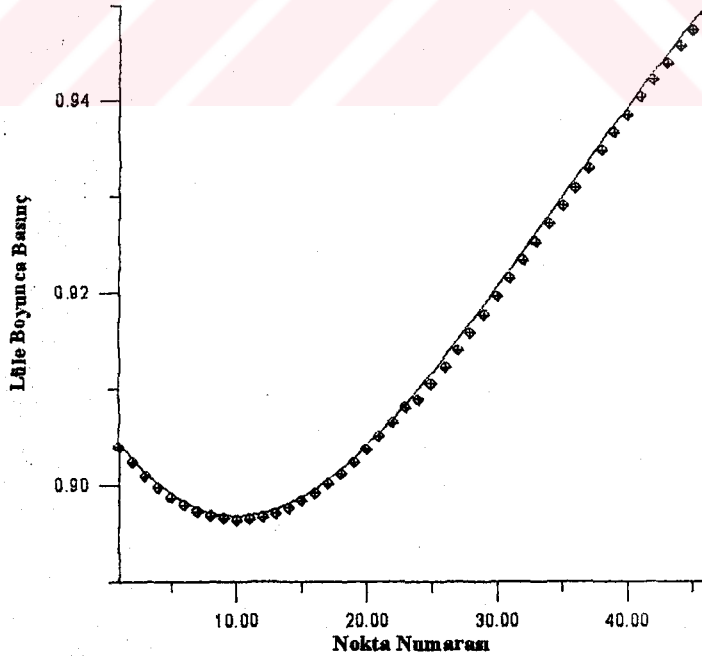
İkinci nokta için ise : $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$

$$\Rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

denkleminde $V_2 = 0.44194$ bulunmuştur.



Şekil 7.5 Bilgisayar programı yardımıyla ve analitik çözümde lüle boyunca hız dağılımları



Şekil 7.6 Bilgisayar programı yardımıyla ve analitik çözümde lüle boyunca basınç dağılımları

Diğer noktalar için de aynı işlemler yapılmca şekil 7.5'deki grafik, bundan sonra giriş kesidi için,

$$p_G = 1 - \frac{V_G^2}{2} = 1 - \frac{0.43829^2}{2} = 0.90395$$

boyutsuz basınç değeri elde edilmiştir.

Bernoulli denkleminde 1. ve 2. noktadaki basınçlar için,

$$p_2 = p_1 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$

denklemini yazabiliriz. Buradan 2. noktadaki basınç :

$$p_2 = 0.90395 + \frac{0.43829^2 - 0.44194^2}{2}$$

$$\Rightarrow p_2 = 0.90234$$

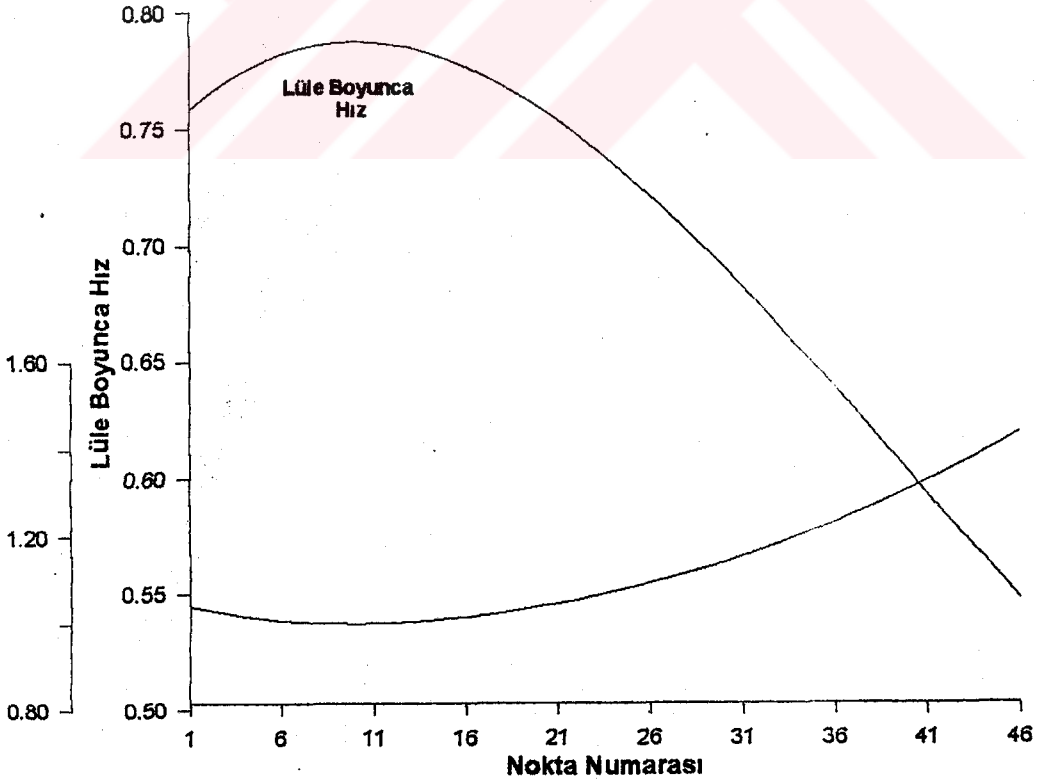
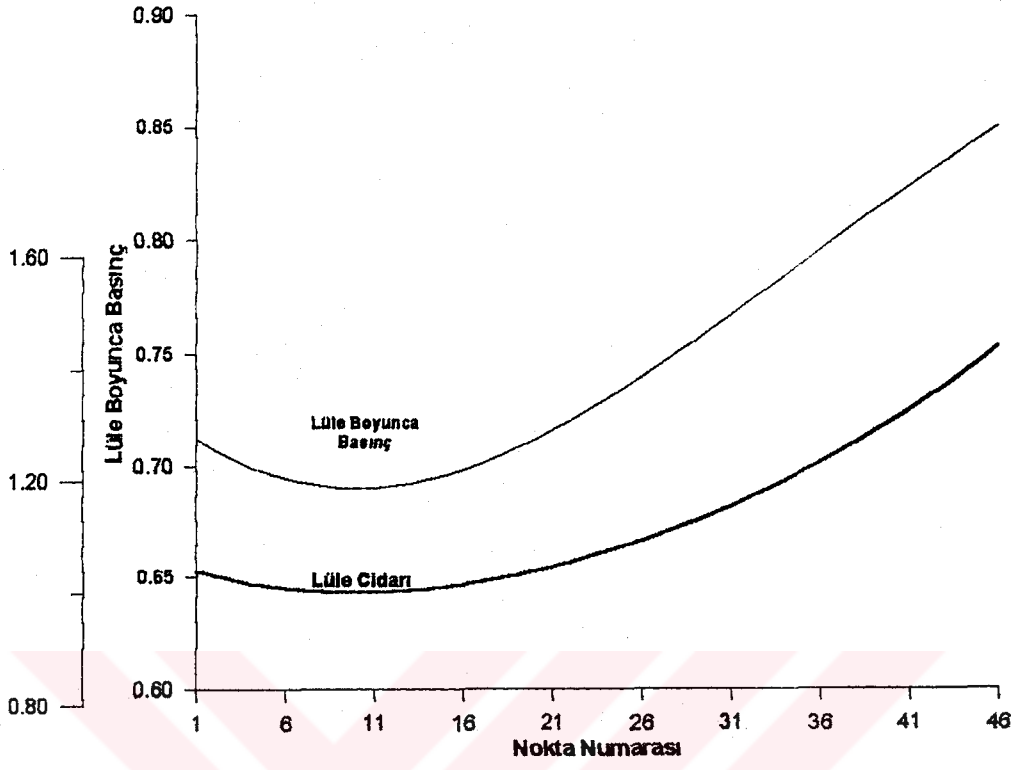
boyutsuz değeri bulunmuştur. Aynı şekilde diğer noktalar için de boyutsuz basınç değerleri hesaplanmıştır. Şekil 7.6'da yine geliştirilen bilgisayar programı ile analitik olarak hesaplanan basınç değerlerinin karşılaştırılması görülmektedir.

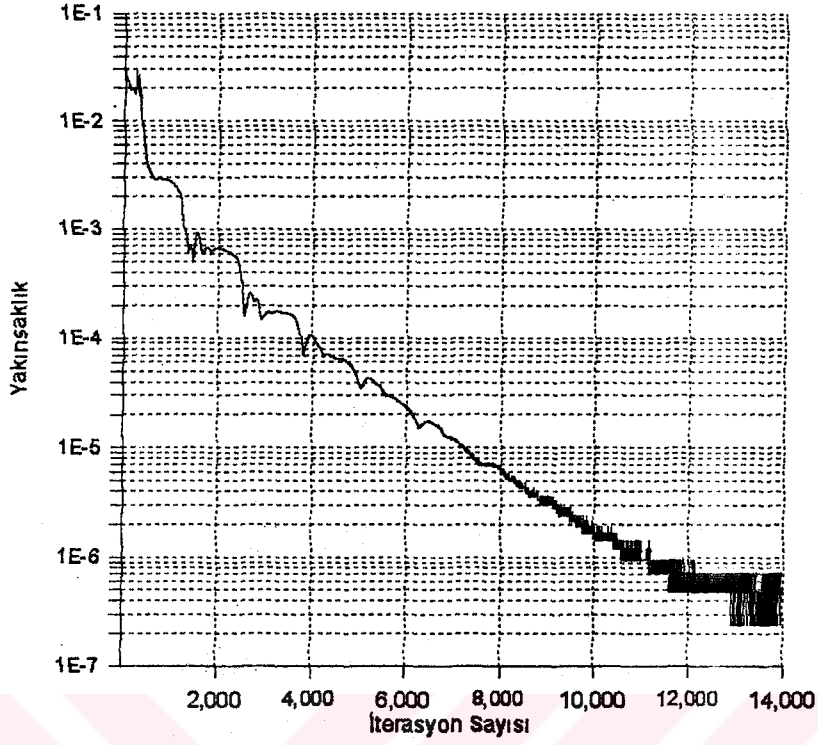
7.1.2. FARKLI ÇIKIŞ BASINÇLARI

Aynı lüle geometrisinde çıkış basıncını 0.85 ve 0.90 alınması halinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

7.1.2.1. ÇIKIŞ BASINCI 0.85

Çıkış basıncı 0.85 değeri için alınan sonuçlar aşağıda gösterilmiştir :

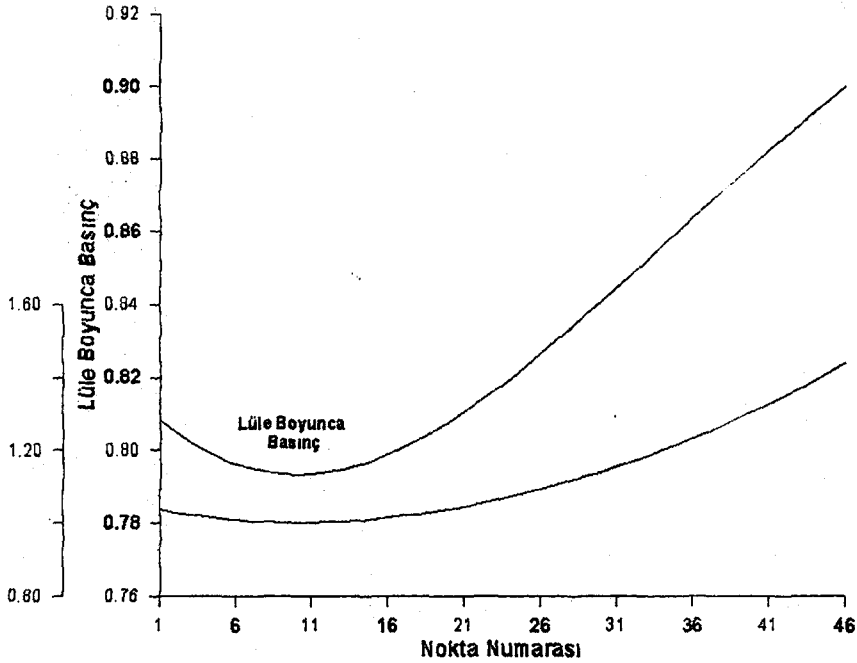




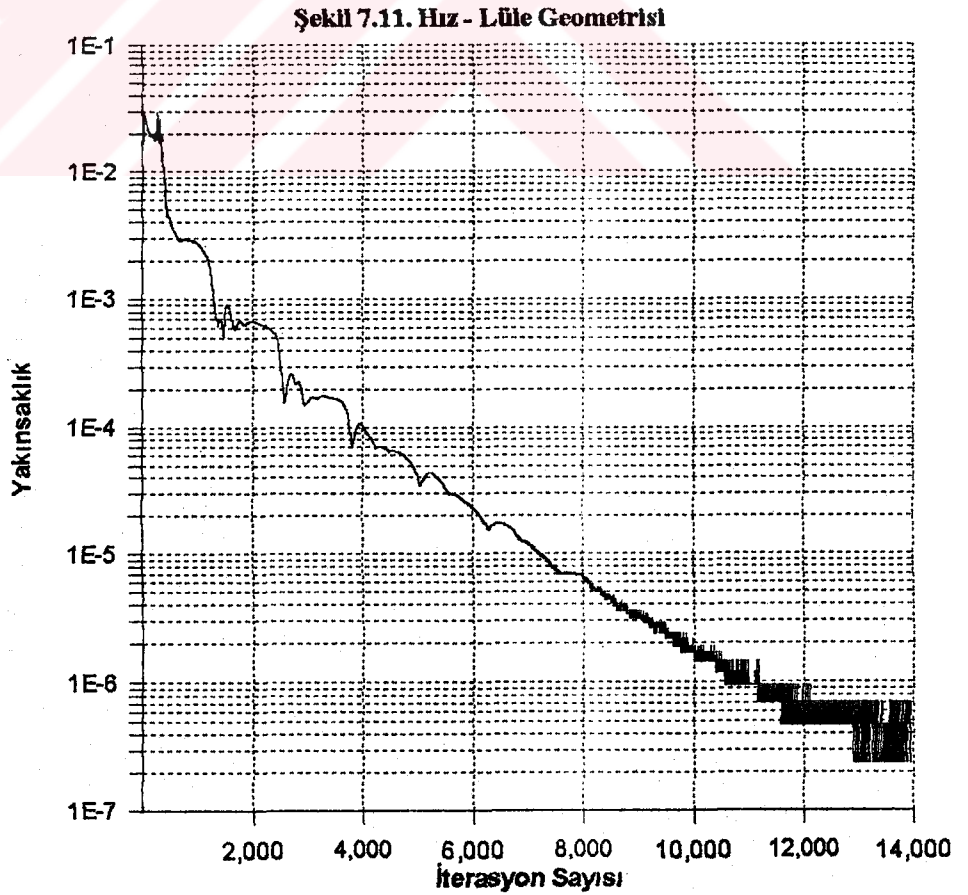
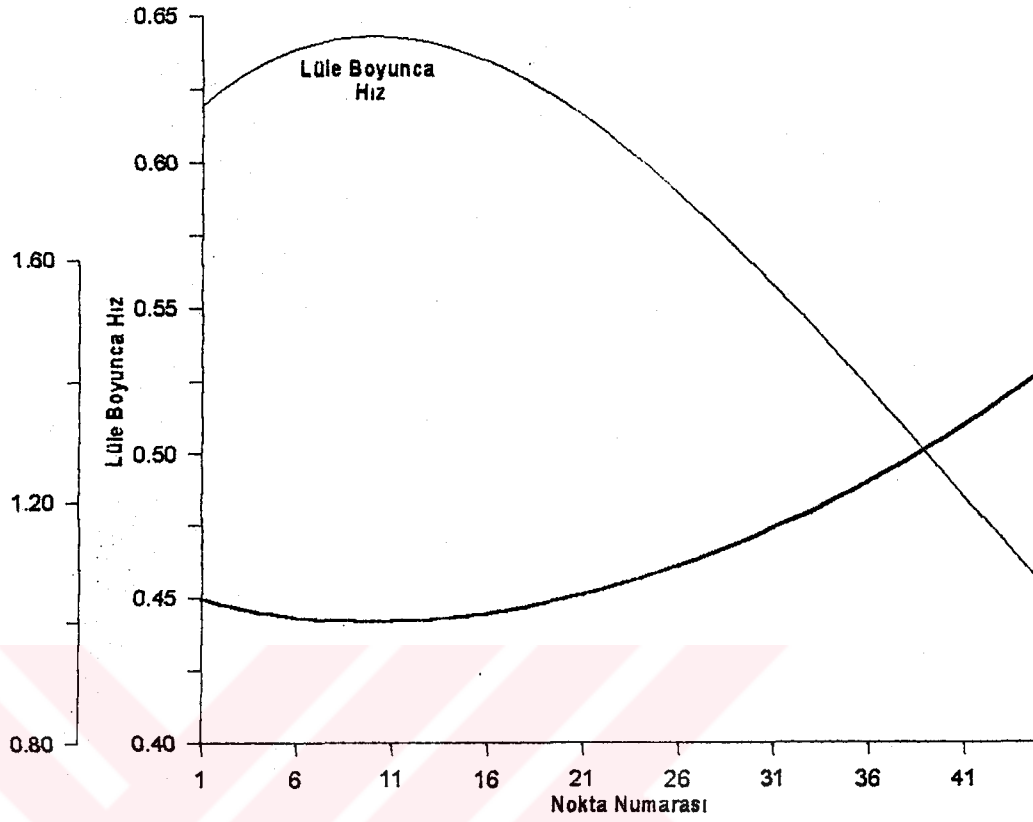
Şekil 7.9. Yakınsama eğrisi

7.1.2.2. ÇIKIŞ BASINCI 0.90

Çıkış basıncı 0.90 değeri için alınan sonuçlar da aşağıdadır :



Şekil 7.10. Basınç - Lüle Geometrisi



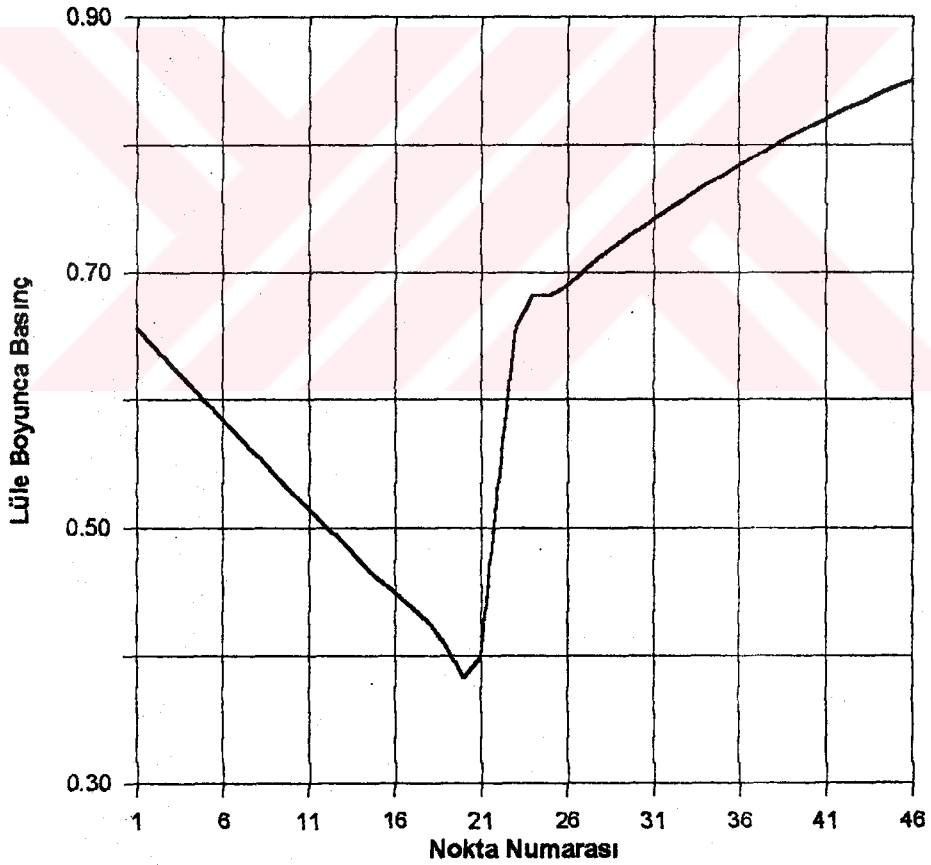
Şekil 7.12. Yakınsama eğrisi

7.2. TEK BOYUTLU LÜLEDE SIKIŞTIRILABİLİR AKIŞ

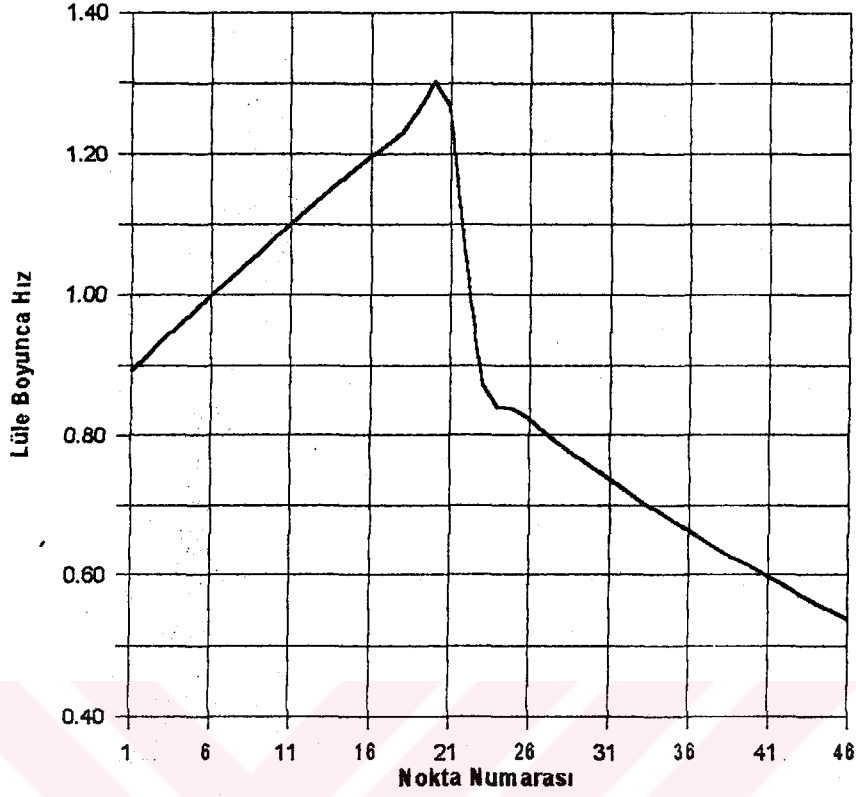
Aynı geometriye sahip tek boyutlu bir lüledeki sıkıştırılabilir akış için de, farklı çıkış basınçlarında, program koşturulmuştur. Bu farklı çıkış basınçları için lüle boyunca hesaplanan hız ve basınç dağılımları ile yakınsama eğrileri aşağıya çizilmiştir.

7.2.1. ÇIKIŞ BASINCI 0.85

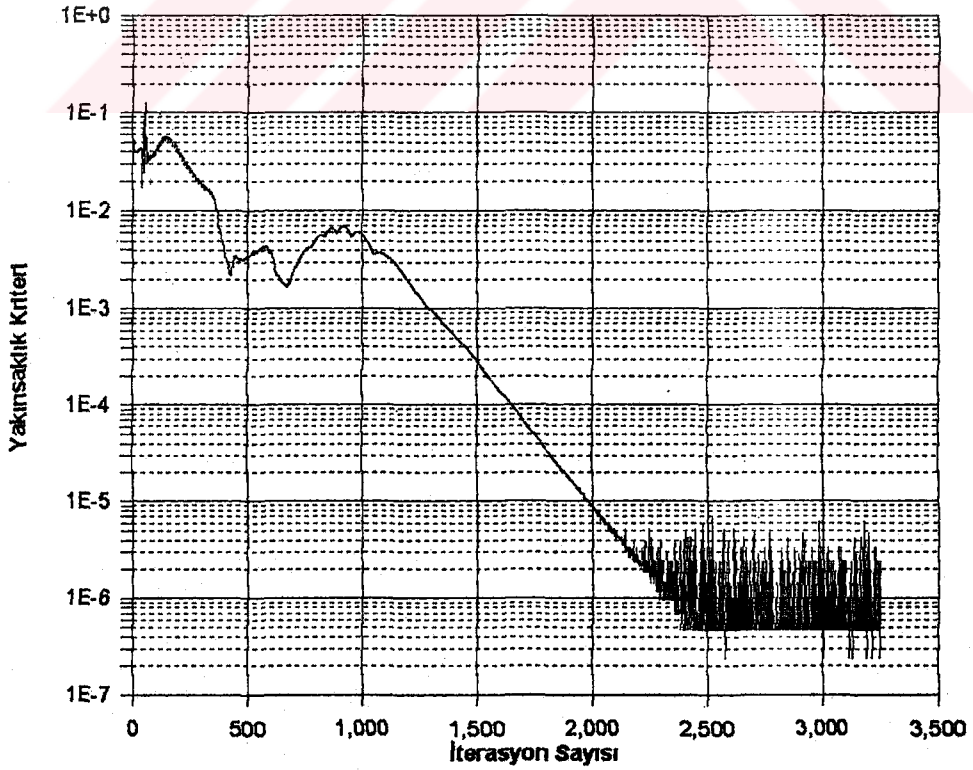
Lüle çıkışındaki boyutsuz basınç 0.85 kullanılarak program koşturulması sonucunda elde edilen sonuçlar :



Şekil 7.13 Lüle boyunca basınç dağılımı



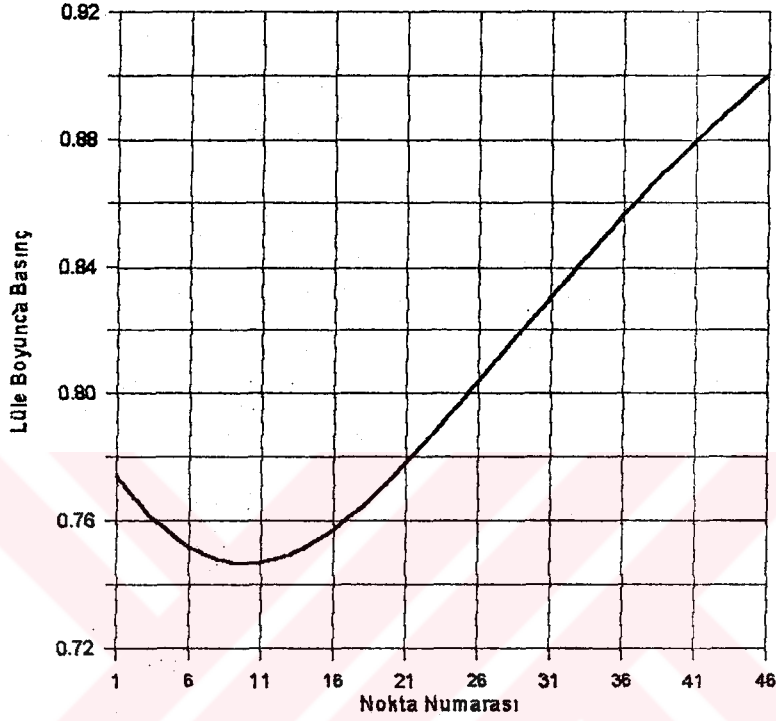
Şekil 7.14 Lüle boyunca hız dağılımı



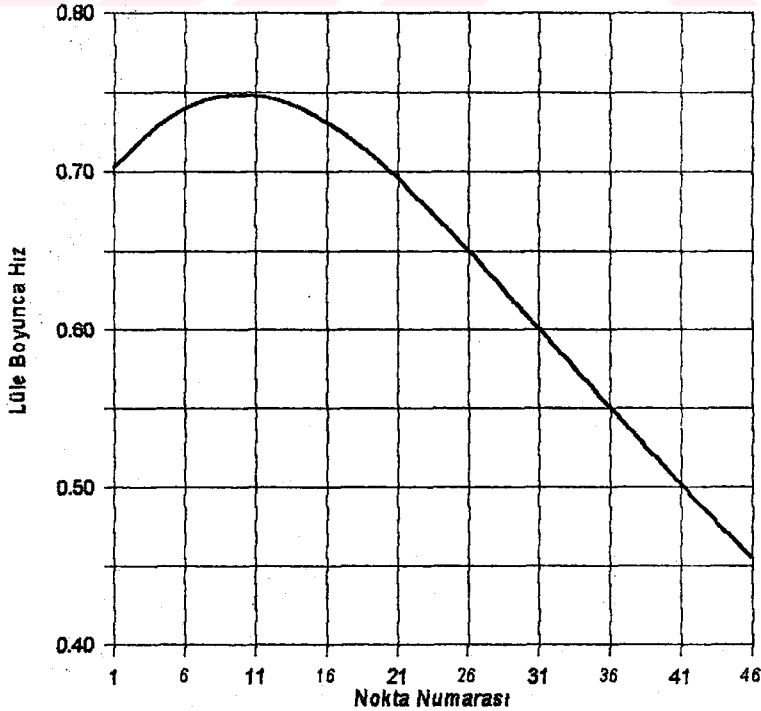
Şekil 7.15 Yakınsama eğrisi

7.2.2. ÇIKIŞ BASINCI 0.90

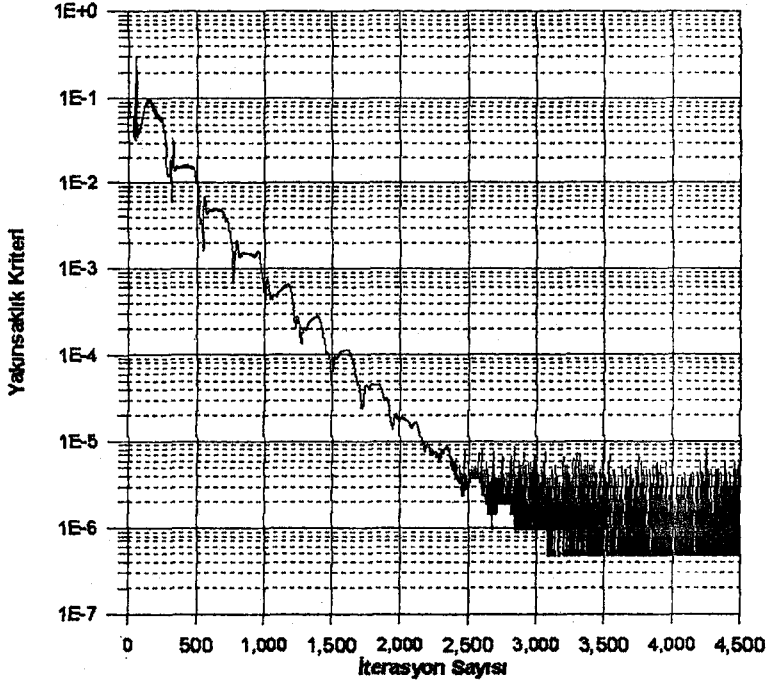
Lüle çıkışındaki boyutsuz basınç 0.90 kullanılarak program koşturulması sonucunda elde edilen sonuçlar :



Şekil 7.16 Lüle boyunca basınç dağılımı



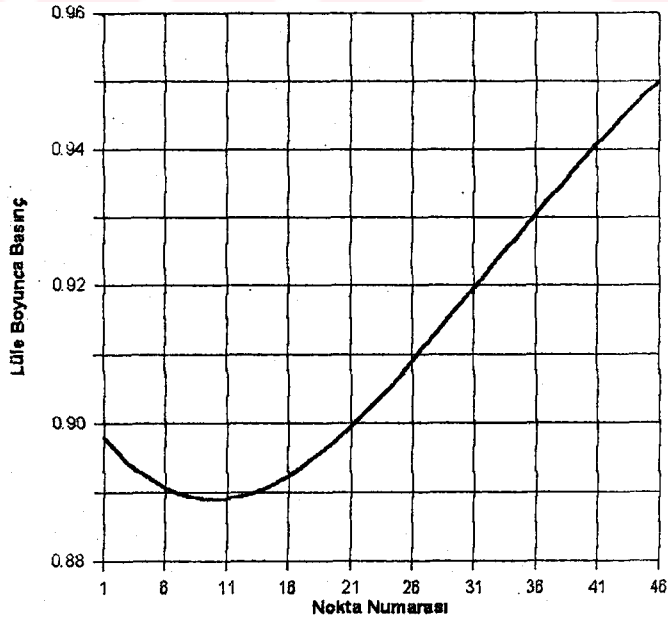
Şekil 7.17 Lüle boyunca hız dağılımı



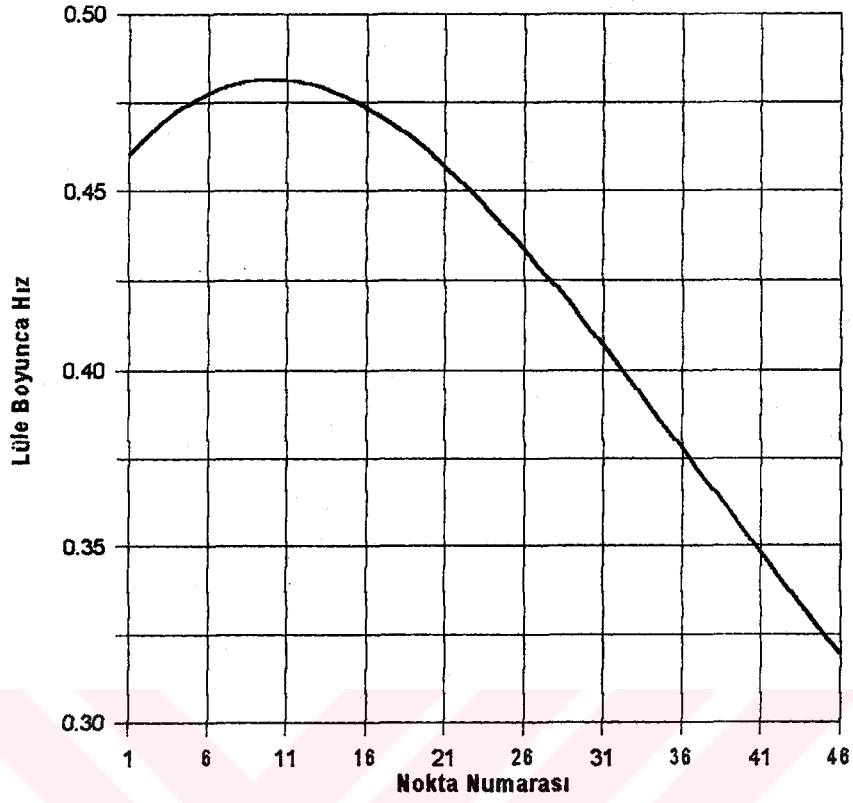
Şekil 7.18 Yakınsama eğrisi

7.2.3. ÇIKIŞ BASINCI 0.95

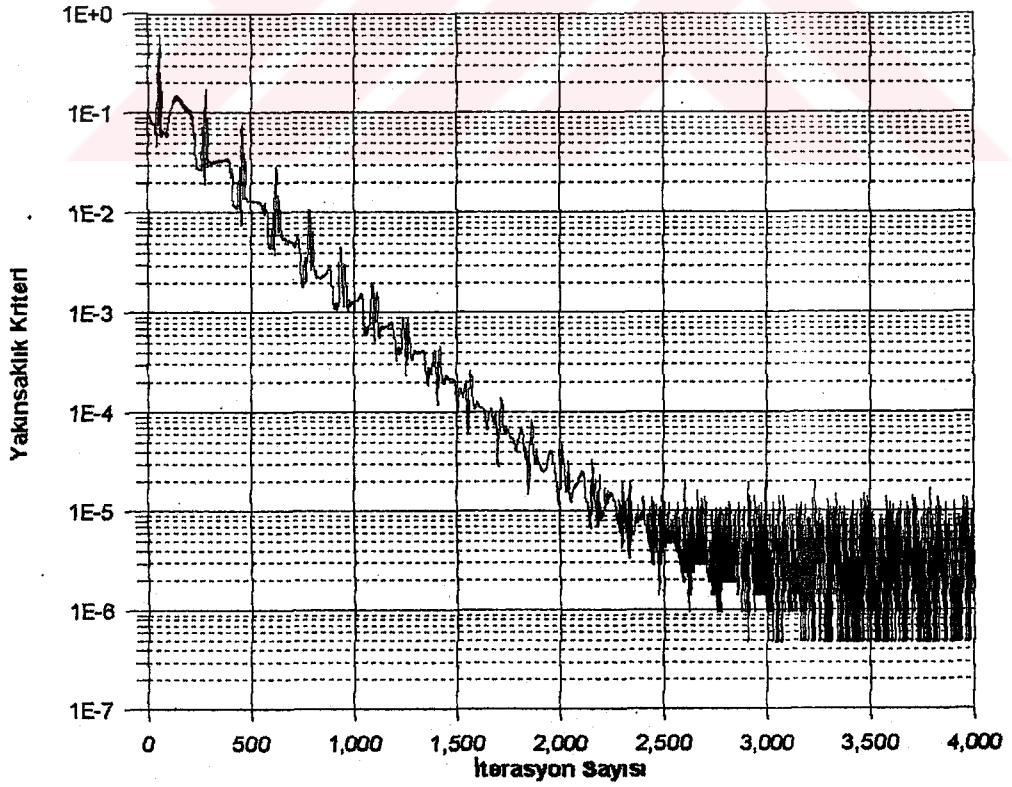
Lüle çıkışındaki boyutsuz basınç 0.95 kullanılarak program koşturulması sonucunda elde edilen sonuçlar :



Şekil 7.19 Lüle boyunca basınç dağılımı



Şekil 7.20 Lüle boyunca hız dağılımı



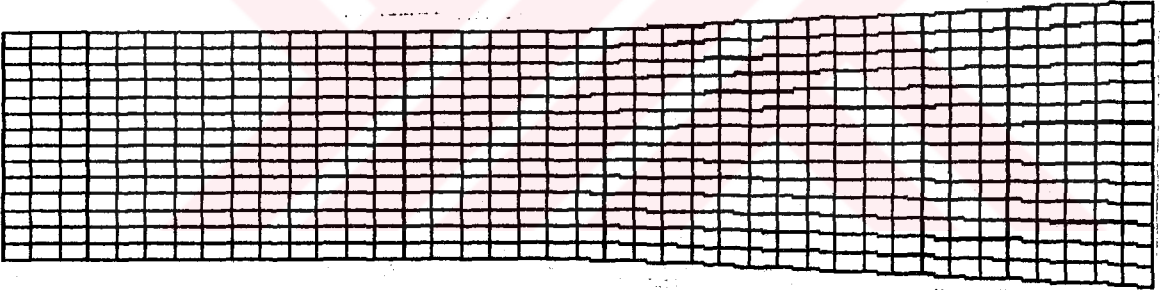
Şekil 7.21 Yakınsama eğrisi

7.3. İKİ BOYUTLU LÜLEDE SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

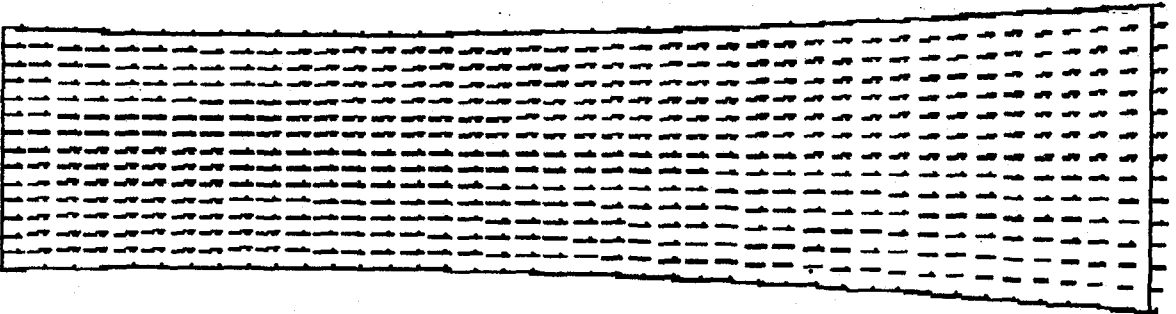
Aynı program, ana denklemlerdeki bazı değişiklikler ile iki boyutlu geometriler için de kullanılır. Buna ilk örnek olarak bir yakınsak-ıraksak lüle geometrisi kullanılmıştır. Lüle boyutları ve çıkış basıncı boyutsuz olarak şu şekilde verilmiştir:

Lüle boyu = 9.561,
 boğazın giriş kesitine uzaklığı = 2.19512,
 giriş kesiti = 2.07646,
 çıkış kesiti = 2.65444,
 boğaz kesiti = 2. ve
 çıkış basıncı = 0.85

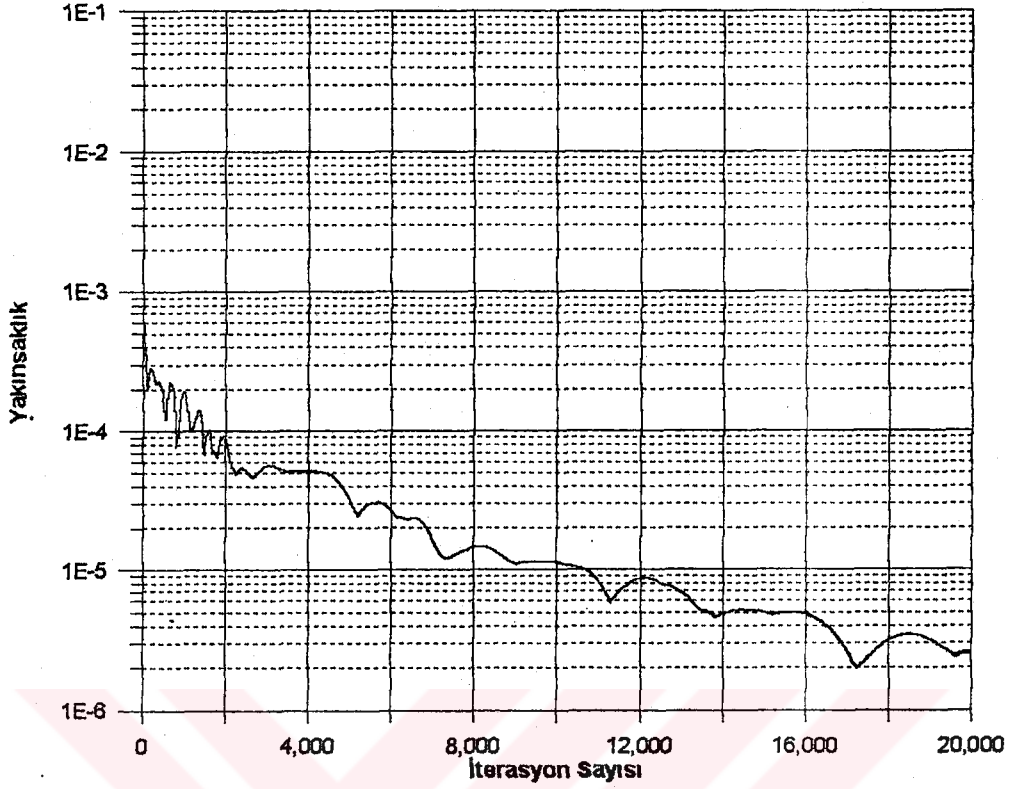
Lülenin geometrisi, hız vektörleri ve yakınsama eğrisi aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 7.22 Lüle geometrisi ve ağ yapısı



Şekil 7.23 Hız vektörleri

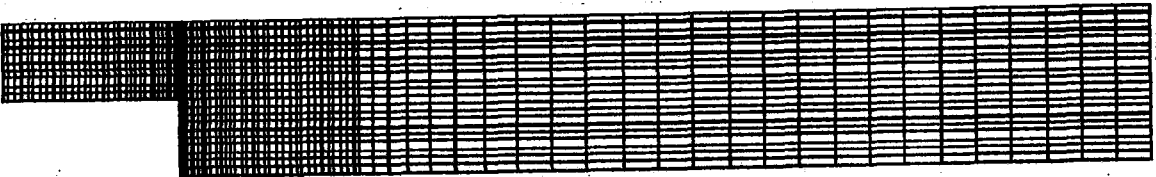


Şekil 7.24 İterasyon sayısına göre yakınsama eğrisi

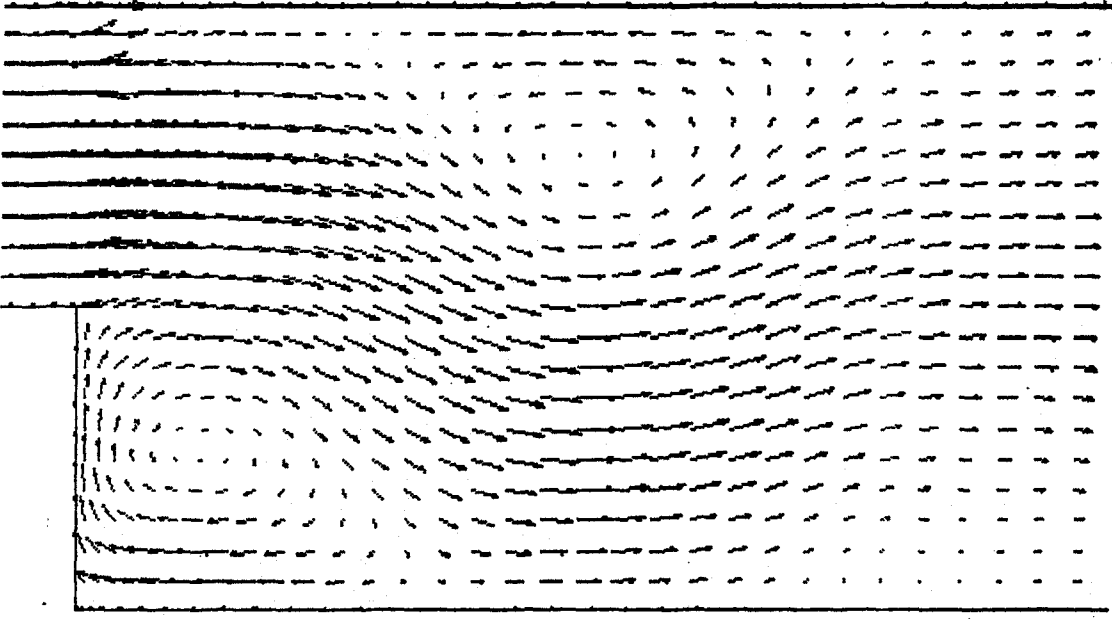
7.4. BASAMAK GENİŞLEMEDE SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

Basamak şeklinde tek tarafa doğru ani genişleme örneği, ani genişleme örneğine geçişten önceki adım olarak öngörülmüştür. Bu örnekte kullanılan geometriye ait boyutsuz büyüklükler şu şekildedir :

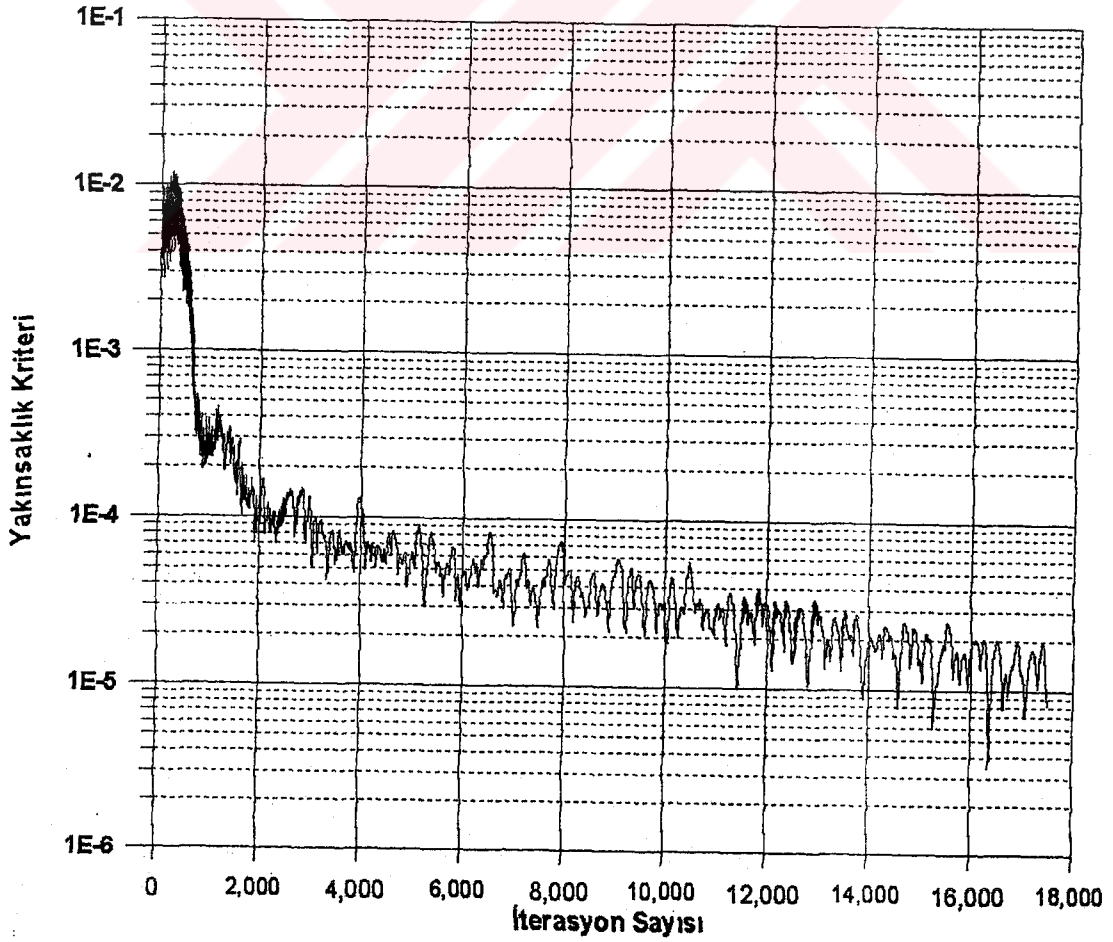
Tam boy = 2.007141,
 dar kısmın boyu = 0.313082,
 dar kısmın genişliği = 0.033333,
 çıkış kesitinin genişliği = 0.066666 ve
 çıkış basıncı = 0.999



Şekil 7.25 Geometri ve ağ yapısı



Şekil 7.26 Hız vektörleri



Şekil 7.27 İterasyon sayısına göre yakınsama eğrisi

7.5. ANİ GENİŞLEMEDE SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

Ani genişleme örneğinde kullanılan geometriye ait boyutsuz büyüklükler şu şekildedir :

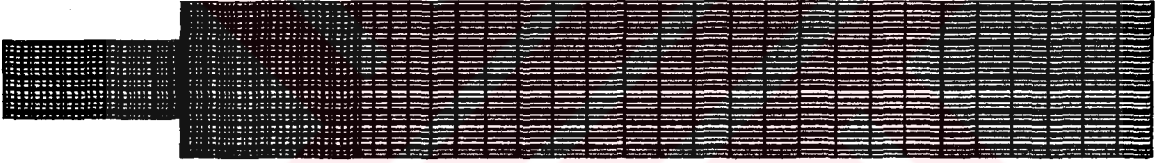
Tam boy = 2.007141,

dar kısmın boyu = 0.313082,

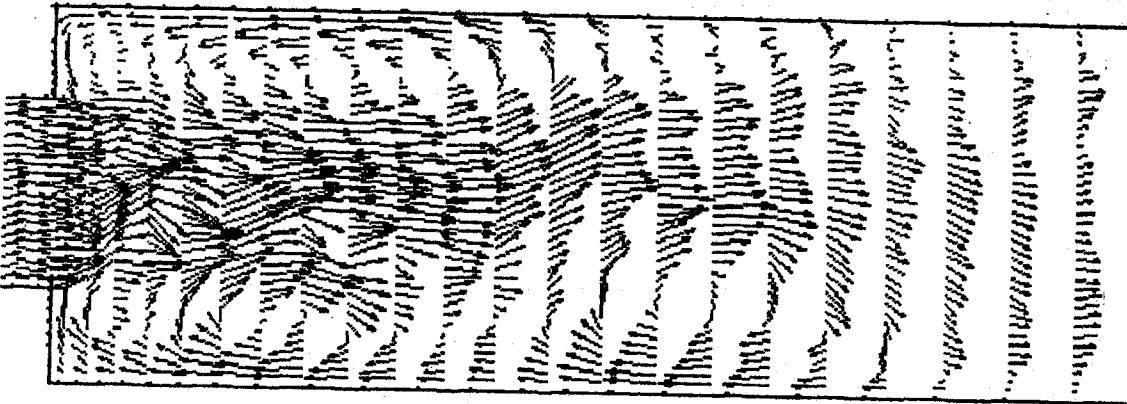
dar kısmın genişliği = 0.033333,

çıkış kesitinin genişliği = 0.066666 ve

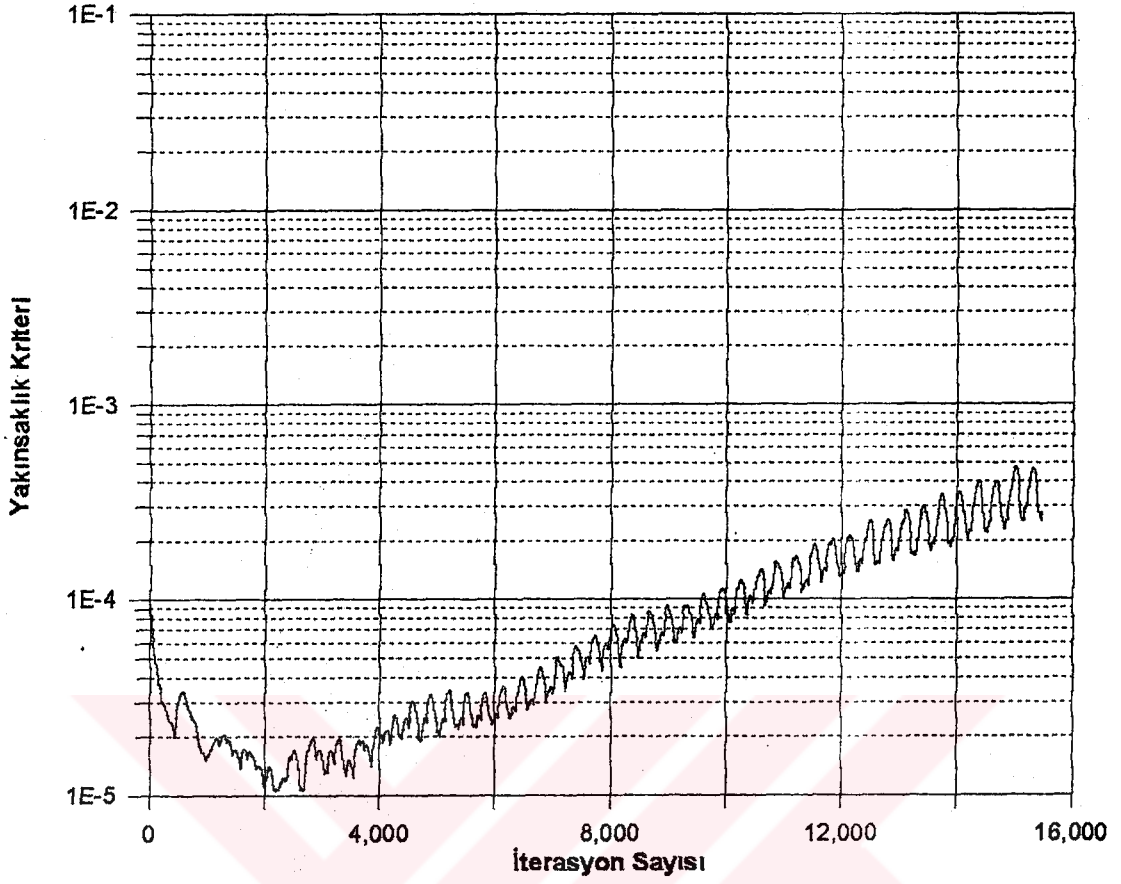
çıkış basıncı = 0.999



Şekil 7.28 Geometri ve ağ yapısı



Şekil 7.29 Hız vektörleri



Şekil 7.30 İterasyon sayısına göre yakınsama eğrisi

BÖLÜM 8

SONUÇ

Sıkıştırılabilir akışkanın kanal içindeki hareketini yöneten denklemleri çözen program üzerinde gerekli değişiklikler yapılarak, sıkıştırılamaz akışkan için program geliştirilmiştir. Bu amaçla mevcut olan bilgisayar programında üç temel değişiklik yapılmıştır:

1-Program modüler hale getirildi,

2-Sıkıştırılabilir akışkan için yazılmış olan program sıkıştırılamaz akışkan için çalışacak hale getirildi,

3-Program çok bloklu hale getirildi.

Bu amaçla ana denklemlerde değişiklikler yapılmış, programın akış diyagramında ise bir değişiklik yapılmamıştır.

Geliştirilmiş olan programda kullanılan formüllerin doğruluğunun kontrolü için, öncelikle tek boyutlu problemlerin çözümleri üzerinde duruldu. Daha sonraki aşamada, iki boyutlu problemlere bir yakınsak-ıraksak lüle problemi ile geçiş yapıldı. Asıl çözmek istediğimiz problem olan ani genişleme durumuna geçmeden önce, tek taraftan ani genişleme problemi üzerinde duruldu. Bu problemde de istenen sonuca ulaşıldıktan sonra ani genişlemeye geçildi. Bu geometride ise istenilen sonuçlara ulaşılamadı.

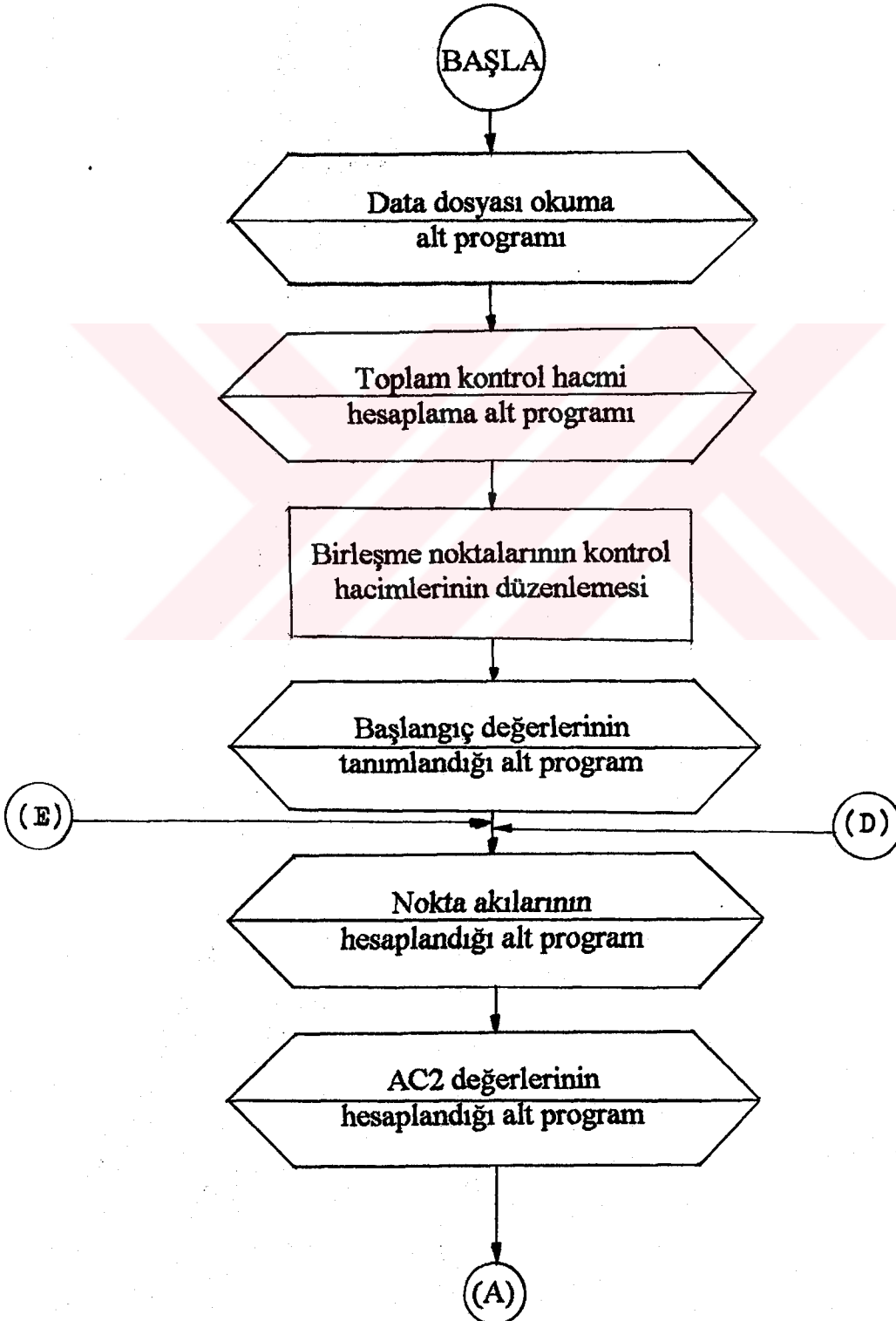
Varılan sonuçlar iki bölümde irdelenebilir :

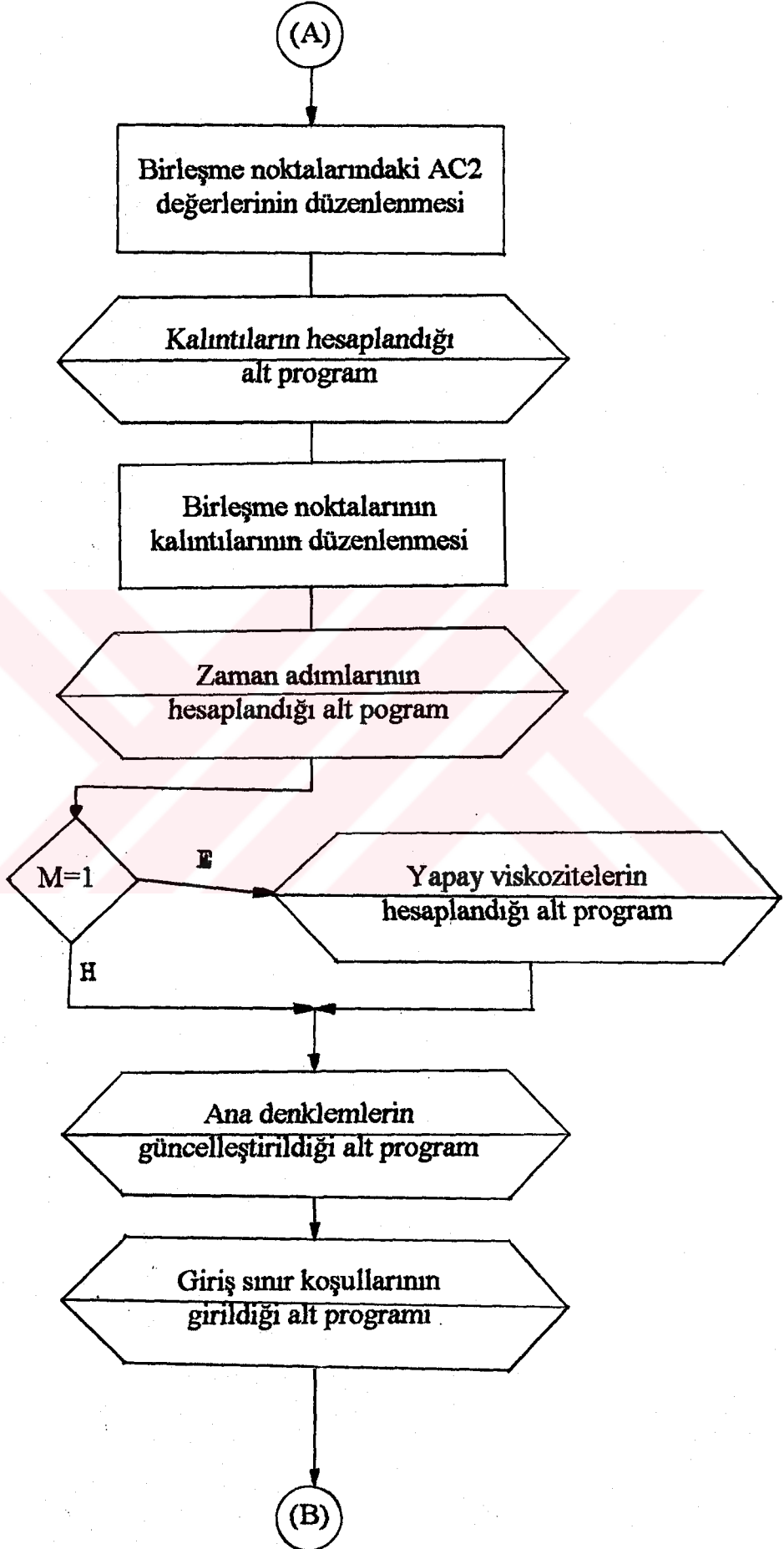
Akışta fiziksel olarak viskozitenin etkisi çok az ise, kullanılan model iyi sonuçlar vermektedir. İki boyutlu lüle örneğinde bu açıkça görülmektedir.

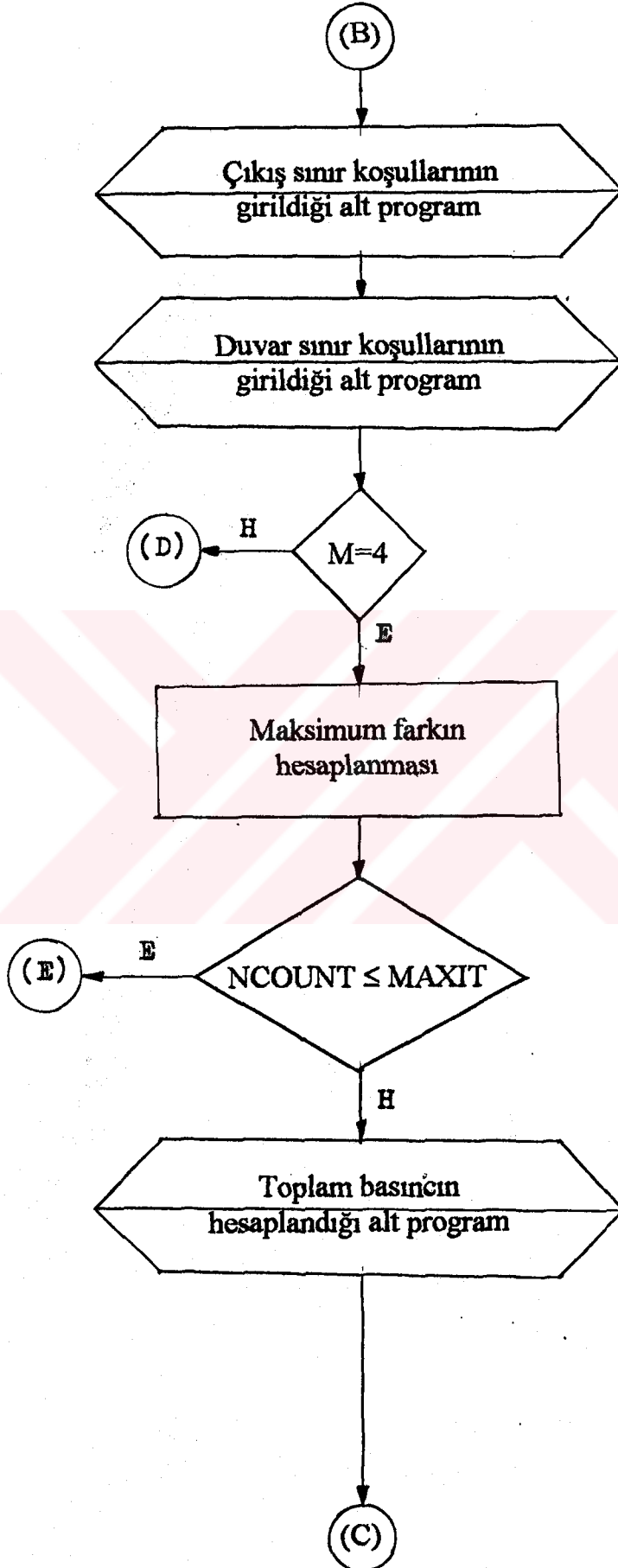
Çalışmanın ana amacı olan ani genişleme olayının Euler denklemleri ve yapay viskozite ile mümkün olmadığı, gerçek viskozitenin ve katı yüzeylerde yüzeye paralel hızların sıfır olma şartı nedeni ile, Navier-Stokes denklemlerinin çözümlenmesinin gerekli olduğu sonucuna varılmıştır.

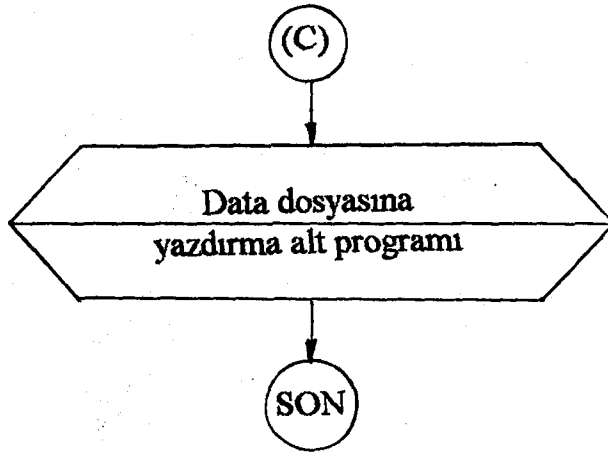
KAYNAKLAR

- [1] AYDER, E., Doktora Tezi, Experimental and Numerical Analysis of the Flow in Centrifugal Compressor and Pump Volutes
- [2] JAMESON, A., SCHMIDT, W. and TURKEL, E., Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes, AIAA-Paper 81-1259 (1981)
- [3] ARTS, T., Three Dimensional Rotational Inviscid Flow Calculation in Axial Turbine Blade Rows, September 1985
- [4] RIZZI, A. and ERIKSSON, L., Computation of Inviscid Incompressible Flow with Rotation, Journal of Fluid Mechanics, 1985, vol. 153, pp.275-312
- [5] BUTCHER, J.C., On the Attainable Order of Runge-Kutta- Methods, Math. Comp. 19 (1965), pp. 408-417
- [6] DICK, E., Introduction to Finite Volume Techniques in Computational Fluid Dynamics
- [7] KROLL, N. and JAIN, R.K., Solution of Two-Dimensional Euler Equations -Experience with a Finite Volume Code-, October 1987

EK A. PROGRAM AKIŞ DİYAGRAMI







ÖZGEÇMİŞ

Ercan KÜMBÜL 1965 yılında Çorum 'da doğdu. 1982 yılında Kabataş Erkek Lisesi 'nden mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Makina Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü 'ne girdi. Şubat 1990 'da Makina Mühendisi olarak mezun oldu. Kasım 1990 'da İ.T.Ü. Makina Fakültesi 'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1991 yılında İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Bölümü Enerji Programı 'nda yüksek lisans eğitimine başladı.

