



**AKIŞKAN DENKLEMLERİNİN MACFARLANE
KUATERNİONLARIYLA YENİDEN
FORMÜLASYONU**

Yüksek Lisans Tezi

Salih ÇAKIR

Eskişehir 2025

**AKIŞKAN DENKLEMLERİNİN MACFARLANE KUATERNİONLARIYLA
YENİDEN FORMÜLASYONU**

Salih ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Süleyman DEMİR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Haziran 2025

Bu tez çalışması BAP komisyonu tarafından kabul edilen 25LÖT022 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir .

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Salih ÇAKIR'ın AKIŞKAN DENKLEMLERİNİN MACFARLANE KUATER-NİONLARIYLA YENİDEN FORMÜLASYONU başlıklı tezi 27/06/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Süleyman DEMİR	
Üye	: Prof. Dr. Mustafa Emre KANSU	
Üye	: Prof. Dr. Nuray CANDEMİR	

Prof. Dr. Harun BÖCÜK
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

27/06/2025

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm Yüksek Lisans ęrencisi Salih ÇAKIR, AKIşKAN DENKLEMLERİNİN MACFARLANE KUATERNİONLARIYLA YENİDEN FORMÜLASYONU başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunması sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı
Prof. Dr. Süleyman DEMİR

ÖZET

AKIŞKAN DENKLEMLERİNİN MACFARLANE KUATERNİONLARIYLA YENİDEN FORMÜLASYONU

Salih ÇAKIR

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Haziran 2025

Danışman: Prof. Dr. Süleyman DEMİR

Fizik teorilerinde çok boyutlu cebirsel yapıların kullanımı, özellikle kuaternionlar gibi matematiksel araçların farklı fiziksel sistemlere uygulanması, önemli bir araştırma alanıdır. Kuaternionlar, literatürde çeşitli türleriyle yer almakta ve fizik teorilerinde sundukları avantajlar kadar bazı sınırlamalarla da dikkat çekmektedir.

Bu tezde, bir Pauli cebri olarak tanımlanan Macfarlane kuaternionlarının fizik teorilerindeki bazı uygulamaları incelenmektedir. İlk olarak, kuaternionların tarihsel gelişimi özetlenmiş ve cebirsel özellikleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Daha sonra, Macfarlane kuaternionlarının matematiksel yapısı analiz edilmiş, 2×2 ve 4×4 matris temsilleri oluşturulmuştur. Fiziksel bir uygulama olarak elektromanyetizmanın Maxwell denklemlerinin Macfarlane kuaternionik formülasyonu başarıyla geliştirilmiştir. Ayrıca, bu cebirsel yapıdan yararlanılarak Lorentz dönüşümleri elde edilmiş ve Maxwell denklemleri özel görelilik çerçevesinde yeniden formüle edilmiştir.

Tez kapsamında, ideal akışkan denklemleri de tanımlanan cebirsel yapıyla yeniden ifade edilmiştir. Bu amaçla uygun operatörler tanımlanmış ve denklemler 4×4 matris formunda açıkça ortaya konmuştur. Son olarak, elektromanyetizma ile akışkanlar mekaniği arasında bir benzerlik kurulmuş; hem sıkıştırılmaz hem de sıkıştırılabilir akışkanlar için Maxwell tipi denklemler türetilerek kompakt bir biçimde ifade edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Kuaternionlar, Maxwell denklemleri, Akışkanlar mekaniği, Pauli cebri.

ABSTRACT

REFORMULATION OF FLUID EQUATIONS WITH MACFARLANE QUATERNIONS

Salih ÇAKIR

Department of Physics

Programme in Mathematical Physics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, June 2025

Supervisor: Prof. Dr. Süleyman DEMİR

The use of multidimensional algebraic structures in physical theories particularly the application of mathematical tools such as quaternions to various physical systems constitutes a significant area of research. Quaternions appear in different forms in the literature and are notable for both their advantages and certain limitations in physical models.

This thesis investigates selected applications of Macfarlane quaternions, defined as a type of Pauli algebra, in physical theories. It begins with a brief overview of the historical development of quaternions and a detailed analysis of their algebraic properties. The mathematical structure of Macfarlane quaternions is then examined, and their 2×2 and 4×4 matrix representations are constructed. As a physical application, a quaternionic formulation of Maxwell's equations is successfully developed. Lorentz transformations are also derived within this algebraic framework, and Maxwell's equations are reformulated in the context of special relativity.

The equations of ideal fluid dynamics are subsequently re-expressed using the same structure. Suitable operators are defined, and the equations are presented in a 4×4 matrix form. Finally, an analogy between electromagnetism and fluid mechanics is established, and Maxwell-type equations are compactly derived for both incompressible and compressible fluids.

Keywords: Quaternions, Maxwell equations, Fluid mechanics, Pauli algebra.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans sürecim boyunca akademik rehberliği ve desteği için danışmanım Prof. Dr. Süleyman DEMİR'e teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca desteklerini her zaman hissettiren aileme minnettarım. Ayrıca akademik süreçte yaptıkları katkılar ve bilimsel paylaşımlar için arkadaşlarım Araz SOBHIBALOV, Berke BİLGİN ve Burak DERE'ye teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince maddi destek sağlayarak akademik çalışmalarımı sürdürebilmemi mümkün kılan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2210-A Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı'na teşekkür ederim. Bu tez, söz konusu burs programı kapsamında desteklenmiştir.

Salih ÇAKIR

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Salih ÇAKIR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. MATEMATİKSEL KAVRAMLAR	5
3. SAYI SİSTEMLERİ.....	8
3.1. Karmaşık Sayılar	8
3.1.1. Karmaşık sayılar cebri	8
3.1.2. Karmaşık sayıların geometrisi.....	10
3.1.3. Karmaşık sayıların matris temsilleri.....	11
3.2. Hamilton Kuaternionları	12
3.2.1. Hamilton kuaternionları cebri.....	13
3.2.2. Hamilton kuaternionların geometrisi	17
3.2.3. Hamilton kuaternionların matris temsilleri.....	19
4. MACFARLANE KUATERNİONLARI	20
4.1. Macfarlane Kuaternionların Matris Temsilleri.....	23

5. ELEKTROMANYETİZMADA MAXWEL DENKLEMLERİ	27
5.1. Eylem Fonksiyoneliinden Yüklü Parçacık İçin Hareket Denk- lemleri	27
5.2. Maxwell Denklemlerinin İlk Çifti	30
5.3. Süreklilik Denklemi	31
5.4. Elektromanyetik Alanda Eylem Fonksiyoneli	32
5.5. Maxwell Denklemlerin İkinci Çifti	33
5.6. Manyetik Monopol İçeren Maxwell Denklemleri	36
6. MAXWELL DENKLEMLERİNİN MACFARLANE KUATER- NİONLARIYLA YENİDEN FORMÜLASYONU	38
6.1. Dalga Denklemlerinin Macfarlane Kuaternionlarına Yeniden Formülasyonu	41
6.2. Manyetik Tek Kutup İçeren Maxwell Denklemlerinin Mac- farlane Kuaternionlarıyla Yeniden Formülasyonu	42
7. LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ VE MACFARLANE KUATERNİ- ONLARI	44
8. AKIŞKANLAR MEKANİĞİNİN TEMEL DENKLEMLERİ	51
8.1. Süreklilik Denklemi	52
8.2. İdeal Akışkan Denklemleri	53
8.3. Dolanımın Korunumu	56
8.4. Sıkıştırılamaz Akışkan Denklemleri	57
8.5. Sıkıştırılabilir Akışkan Denklemleri	57
9. AKIŞKANLARIN MAXWELL-TİPİ DENKLEMLERİ	59
9.1. Sıkıştırılabilir Akışkanların Maxwell-Tipi Denklemleri	60
9.2. Sıkıştırılamaz Akışkanların Maxwell-Tipi Denklemleri	63
10. AKIŞKAN DENKLEMLERİNİN MACFARLANE KUATERNİ- ONLARIYLA YENİDEN FORMÜLASYONU	66
10.1. İdeal Akışkan Denklemlerin Yeniden Formülasyonu	67
10.2. Sıkıştırılabilir Akışkanların Yeniden Formülasyonu	69

10.3.Sıkıştırılamaz Akışkanların Yeniden Formülasyonu	73
11.SONUÇ, TARTIŞMA.....	76
KAYNAKÇA.....	78
ÖZGEÇMİŞ	



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar uzayı
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar uzayı
$\mathbb{H}$	: Hamilton kuaternionlar uzayı
$\mathbb{O}$	: Oktanyonlar uzayı
$\mathbb{M}$	: Macfarlane kuaternionlar uzayı
i	: İmajiner birim
z	: Karmaşık sayı
z^*	: Karmaşık sayı eşleniği
$N(z)$	: Karmaşık sayının normu
$\mathbf{q}$	: Kuaternion
q_n	: Kuaternion bileşenleri ($n=0,1,2,3$)
e_n	: Kuaternionların taban elemanları ($n=0,1,2,3$)
$S(\mathbf{q})$	: Kuaternionun skaler kısmı
$V(\mathbf{q})$	: Kuaternionun vektörel kısmı
$\mathbf{q}^*$	: Kuaternionik eşlenik
$N(q)$	: Kuaternionun normu
$\mathbf{q}^{-1}$	: Kuaternionun tersi
σ_n	: Pauli matrisleri ($n=0,1,2,3$)
$SO(3)$	: $\mathbb{R}^3$ 'de dönme grubu
$M(2, \mathbb{R})$	: 2×2 reel matris kümesi
$M(4, \mathbb{R})$	: 4×4 reel matris kümesi
Q	: Kuaternionun matris temsili
F_L	: Kuaternionun soldan çarpımına karşılık gelen dönüşüm
F_R	: Kuaternionun sağdan çarpımına karşılık gelen dönüşüm
^+Q	: Soldan çarpıma karşılık gelen matris

$\bar{Q}$	: Sağdan çarpıma karşılık gelen matris
$\tilde{p}, \tilde{q}$	: Özel matrisler
S	: Eylem fonksiyoneli
A_i	: Dört potansiyel
ϕ	: Skaler potansiyel
$\mathbf{A}$	: Vektör potansiyel
q	: Elektrik yükü
c	: Işık sürati
ϵ_0	: Boş uzayın elektrik alan geçirgenliği
μ_0	: Boş uzayın manyetik alan geçirgenliği
L	: Lagrangien fonksiyonu
$\mathbf{E}$	: Elektrik Alan şiddeti
$\mathbf{B}$	: Manyetik Alan şiddeti
$F_{\mu\nu}$	: Elektromanyetik alan tensörü
$\mathbf{D}$	: Kuaternionik türev operatörü
$\mathbf{A}$	: Kuaternionik elektromanyetik potansiyel
$\mathbf{F}$	: Kuaternionik alan terimi
$\mathbf{J}$	: Kuaternionik akım yoğunluğu terimi
$\frac{D}{Dt}$	: Maddesel türev operatörü
$\mathbf{v}$	: Akışkan hızı
$\boldsymbol{\omega}$	: Vortisite
ρ	: Akışkan yoğunluğu
h	: Entalpi
s	: Entropi
p	: Basınç
a	: Ses sürati

ζ	: Lamb vektörü
Ω	: Toplam enerji fonksiyonu
Φ	: Bernoulli enerji fonksiyonu
$\square$	: Genelleştirilmiş türev operatörü
$\oplus$	: Direkt toplam
$[\dots]^T$	: Matrisin transpozu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: İç çarpım
ds	: Uzayzaman aralığı
$\square$	: d'Alambertian operatörü
ρ_e	: Elektrik yük yoğunluğu
$\mathbf{j}_e$	: Elektrik akım vektörü
ρ_m	: Manyetik yük yoğunluğu
$\mathbf{j}_m$	: Manyetik akım vektörü
$\mathbf{q}$	: Akışkan yükü
$\mathbf{j}$	: Akışkan akım vektörü
$\in$	: Elemanıdır simgesi
$\star$	: İkili işlem (veya Grup işlemi)
ι	: Birim eleman

1. GİRİŞ

1835 yılında henüz 30 yaşında olan matematikçi ve fizikçi William Rowan Hamilton, karmaşık (kompleks) sayıları gerçek (reel) sayı çiftleri olarak ele almanın bir yolunu keşfetti. O dönemde matematikçiler genellikle karmaşık sayıları Argand tarafından popülerleştirilen $a + ib$ biçiminde ifade etmekteydi. Ancak Hamilton, $a + ib$ ifadesinin aslında iki gerçek sayıyı ifade etmenin farklı bir yolu olarak düşünebileceğini farketmişti. Örneğin bu sayıyı, (a, b) çifti şeklinde de ifade etmek mümkündür. Bu gösterim karmaşık sayıların toplanmasını ve çıkarılmasını kolaylaştırmaktadır. Hamilton ayrıca, karmaşık sayıların çarpılması ve bölünmesi için biraz daha karmaşık kurallar geliştirmiştir. Bu kurallar, Argand tarafından keşfedilen hoş geometrik anlamı koruyacak şekilde oluşturulmuştur [1].

Hamilton bu çalışmasının ardından, uzun yıllar boyunca üç boyutlu geometride benzer rolü oynayacak daha büyük bir cebir sistemi geliştirmeye çalışmıştır. Ancak bu girişimlerinde sürekli başarısız olmuştur. Bir keresinde oğluna yazdığı bir mektupta şöyle demiştir; "Her sabah kahvaltıya indiğimde, küçük kardeşin William Edwin ve sen sorardın: 'Baba üçlülere çarpabiliyor musun?' Ben ise her seferinde üzüntüyle başımı sallayarak şu cevabı vermek zorunda kaldım: 'Hayır, sadece toplayıp çıkarabiliyorum'." O dönem farkında olmasa da kendisine vermiş olduğu bu görev matematiksel olarak imkansızdı.

Hamilton, 1843 yılında Royal Irish Academy toplantısına giderken Broom Bridge olarak bilinen köprüden geçerken bu problemin üstesinden gelmiştir. Üçlü sayı sisteminden vazgeçip $a + bi + cj + dk$ formunda dört boyutlu bir yapı olan "kuaternionları" geliştirmiştir [2]. Burada i, j ve k , -1 'in üç farklı karekökünü temsil etmektedir. Günümüzde bu olayın bir hatırası olarak Broom Bridge'teki bir taş üzerine Hamilton'un orijinal el yazısıyla yazılmış bir metin bulunmaktadır.

Hamilton kuaternionların fizik alanında büyük bir rol oynayacağına inanıyordu. Nitekim kuaternionların fizikteki kullanım alanları, Hamilton'un inancını boşa çıkarmamıştır. Kuaternionların ilk olarak fizikte önemli kullanım alanı kartezyen koordinatlarının kuaternion gösterimleri olarak ifade edilmesinden oluşmaktadır. Bunun yapıldığı en önemli çalışmalardan biri, Maxwell'in *Treatise on Electricity and Magnetism* (Elektrik ve Manyetizma Üzerine Bir İnceleme) [3] eseridir. Ma-

xwell çalışmalarında, denklemleri kartezyen koordinatlarda sunmanın yanında kuaternionik formlarını da vermiş ve Hamilton tarafından verilen "türev" operatörünü kullanmıştır.

Maxwell'in kuaternionları kullanım şekli, 1880'li yıllarda birbirinde bağımsız bir şekilde Gibbs ve Heaviside tarafından geliştirilen vektör analizinin oluşturulmasında önemli bir referanstır. Gibbs ve Heaviside [4], elektromanyetizmanın Hamilton kuaternionlarının ayrı ayrı skaler ve vektörel parçalarını kullanarak formüle edilebileceğini fark etmiştir. Böyle bir formülasyonun elektriksel ve manyetik etkilerin bireysel temsili için daha elverişli olduğunu öne sürmüşlerdir. Daha sonra Heaviside kuaternionların pratik olmayan bir yapısı olduğunu savunmuştur. 19. yüzyılın sonlarına doğru, fiziğin herhangi bir alanında kuaternionları kullanmanın değeri, Nature dergisinde ilginç ve hararetle bir tartışma yaratmıştır [5]. Bu tartışmanın bir tarafında Tait, McAulay ve Knott gibi kuaternion savunucuları diğer tarafta ise Gibbs ve Heaviside yer almıştır. Bu tartışma "Büyük Kuaternion Savaşı" olarak adlandırılmıştır. Vektör analizi yöntemlerinin standart hale gelmesiyle, kuaternionların değeri büyük ölçüde azalmış olsa da, kuaternionların notasyondaki rolü asla küçümsememelidir. Tait ve McAulay gibi kuaternionları kullananlar, defalarca kuaternionik formda ifade edilen denklemlerin fiziksel anlamlarının son derece şeffaf bir şekilde ortaya çıktığını vurgulamışlardır. 19. yüzyılda kuaternionlara atfedilen bu şeffaflığın, modern zamanlarda da bir benzeri görülmektedir. Özellikle, kütleçekim teorilerinde modern diferansiyel geometri gibi koordinat bağımsız yöntemlerin kullanılmasının, eski tensör yöntemlerine kıyasla avantajlar sağladığı bu bağlamda sıkça dile getirilmektedir [6].

Kuaternionların dört bileşenden oluşmaları bu yapıların da yorumlanma ihtiyacını beraberinde getirir. Bir keresinde Hamilton, vektör kısmın üç uzay boyutunu temsil edebileceğini, skaler kısmın ise zamanı temsil edeceğini öngörmüştür. Bu düşünce kuaternionların özel göreliliğe uygulanmasının temelini oluşturmuş ve matematiksel özellikleri özel göreliliğin tüm ifadelerini şık biçimde türetmeyi sağlamıştır. Kuaternionlar ilk defa 1911 yılında Conway tarafından özel görelilik teorisine dahil edilmiştir [7]. Yaklaşık bir yıl sonra Silberstein, Lorentz dönüşümlerini kuaternionlarla ifade etmeyi başarmıştır [8]. Abonyi ve arkadaşları [9] grup teorisi çerçevesinde Lorentz dönüşümlerinin kuaternionik temsilini oluşturmuş ve sağladığı avantajları

tartışmıştır. Özel görelilik denklemlerinin kuaternionları kullanarak, zarif biçimde yeniden formüle edilmesi bu alanda çalışan bilim insanlarına yeni motivasyonlar sağlamıştır.

1936 yılında Birkhoff ve von Neumann [10] kuantum mekaniksel bir sistemin gerçek, karmaşık ve kuaternionik alanlar üzerinde bir vektör uzayı olarak temsil edilebileceğini göstermiştir. Bu çalışma, bir kuaternionik temsillere dayalı kuantum mekaniği olabileceğine dair ilk örnektir. Daha sonra, kuaternionik kuantum mekaniğinin birçok yönü Finkelstein ve arkadaşları tarafından ortaya konmuştur [11–13]. Ayrıca Adler'in kuaternionik kuantum mekaniği ve kuaternionik kuantum alan teorisi alanında çalışmaları bulunmaktadır [14–16]. Ünlü Türk fizikçi Feza Gürsey de kuaternionların fizik teorilerindeki rolleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Gürsey, çalışmalarında kuaternionlar aracılığıyla Lie gruplarının temsillerini ve parçacık fizikinde kullanılan birleşik alan teorilerini [17–19], temel parçacıkların spin ve izospin yapılarını ve aynı zamanda Dirac ve Yang-Mills teorileriyle olan ilişkilerini ortaya koymuştur [20]. Üstadın çalışmalarının detaylı bir özeti için Gürsey, groups and fluids makalesi iyi bir referanstır ([http-1](http://1)).

Öte yandan kuaternionların teorik fiziğin dışında birçok alanda da kullanılması dikkat çekicidir. Kuaternionların diğer alanlarda kullanılabiliyor olması şüphesiz onların üç boyutlu uzayda dönmeleri temsil edebilmelerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, Tweed ve arkadaşları [21–23] gözün karmaşık dönüşsel hareketini kuaternion cebri kullanarak ifade etmişlerdir. Kuaternionlar ayrıca robot hareketleri, bilgisayar grafikleri ve uzay aracı yönelimlerini belirlemek için gerekli hesaplarda kullanışlı olduğu görülmüştür [24–27]. Açıkça kuaternionların bu çağdaş uygulama alanları 19. yüzyıldaki karıştırlarını muhtemelen şaşırttırdı [6].

Kuaternion cebri ortaya atıldığından beri literatürde birçok çeşitleri tanıtılmıştır. 1843 yılında Hamilton tarafından bileşenleri reel olan kuaternionlar Hamilton kuaternionları veya reel kuaternionlar olarak adlandırılır. Bileşenleri karmaşık sayı olarak oluşturulan kuaternionlar ise kompleks kuaternionlar veya bikuaternionlar ismini alır. Bikuaternionlar, reel sayılar üzerinde 8 boyutlu bir cebir oluşturmaktadır. Aynı zamanda, yeni baz elemanları çarpım kuralları tanımlanarak kuaternion cebirleri oluşturmak mümkündür. İki baz elemanın kendi aralarında çarpımları $+1$ alınarak oluşturulan kuaternionlara split kuaternion denir. Split kuaternionlar, de-

ğışmeli olmayan ancak birleşmeli olan bir kuaternion cebri yapısına sahiptir. Öte yandan Hamilton kuaternionlarının aksine tüm baz elemanlarının kendileriyle çarpımlarının sonucu $+1$ alınarak oluşturulan kuaternionlara hiperbolik kuaternion denir. Hiperbolik kuaternionlar Alexander Macfarlane tarafından 1891 yılında önerilmiştir [28]. Ancak bu kuaternionlar birleşimli olma özelliğine sahip değildir. Bu problemin üstesinden gelmek için 1900 yılında Macfarlane, baz elemanları arasında yeni çarpım kurallarını öne sürmüştür [29]. Böylece birleşme özelliğine sahip olan hiperbolik kuaternionlara Macfarlane kuaternionları adı verilir. Macfarlane kuaternionlarının baz elemanları çarpım kuralları, spin-1/2 parçacıkların Pauli matrisleri ile aynı formdadır. Böylece bu kuaternionlar Clifford cebrinin özel bir hali olan bir Pauli cebridir. Bu nedenle zaman zaman Pauli kuaternionları olarak da adlandırılmaktadırlar [30]. Macfarlane kuaternionları, fiziksel teorilerde genellikle Victor L. Mironov ve Sergey V. Mironov tarafından geliştirilen sedeon yapılarında dolaylı olarak kullanılmaktadır. Sedeonlar, Macfarlane kuaternionlarının tensörel çarpımıyla elde edilen ve uzay-zaman simetrilerini içeren 16 bileşenli birleşik bir cebirsel yapıdır [31]. Bu yapı, klasik kuaternionlara kıyasla hem skaler-vektör ayrımını hem de uzay ve zaman tersinimlerini birlikte ifade edebilme yeteneğine sahiptir. Söz konusu çalışmalarda, Macfarlane kuaternionları sedeon cebirinin temelini oluşturarak fiziksel büyüklüklerin uzay-zamansal özelliklerinin tanımlanmasında önemli bir rol oynamaktadır.

Bu tezin amacı, Macfarlane kuaternionlarının cebirsel yapısını ortaya koyarak fizikteki olası uygulama alanları tartışmaktır. Ayrıca Macfarlane kuaternionların elektromanyetizma ve akışkanlar mekaniğinin temel denklemlerine uygulayarak alternatif bir formülasyon geliştirmektir. Bu tezde aynı zamanda Macfarlane kuaternionların soldan ve sağdan çarpım gönderimlerine karşılık gelen matrisler tanımlayarak yeniden formüle edilen denklemlerinin daha açık ve anlaşılır şekilde ifade edilebilmesine yönelik çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

2. MATEMATİKSEL KAVRAMLAR

Kuaternionların cebirsel yapılarının daha iyi anlaşılabilmesi açısından bu bölümde; grup, halka, modül, alan ve cebir gibi temel kavramların tanımları verilecektir.

Tanım 2.1. Küme, nesnelerin bir topluluğu veya yığındır. Bir grup, G kümesi ile birlikte, çarpma olarak adlandırılan ve genel olarak $\star$ sembolü ile gösterilen bir ikili işlemdir, $G \times G \rightarrow G$ ve aşağıdaki özelliklere sahiptir;

a. $\star$ birleşimlidir:

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z);$$

b. G de $\iota \in G$ şeklinde sadece birim eleman vardır ve bu eleman için

$$\iota \star x = x \star \iota = x$$

koşulu sağlanır.

c. Her $a \in G$ eleman için a^{-1} şeklinde gösterilen ters elemanı vardır ve bu eleman $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = \iota$ koşulunu sağlar.

Bir grubun ikili işlemini vurgulamak için $(G, \star)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2. Bir grup $(G, \star)$, eğer her $x, y \in G$ için $x \star y = y \star x$ koşulunu sağlıyorsa Abel grubu veya değişmeli grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. $(G, \star)$ ve $(H, \circ)$ grupları olsun. Bir $f : G \rightarrow H$ gönderimi

$$f(x \star y) = f(x) \circ f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa bir homomorfizma olarak adlandırılır. Aynı zamanda bire bir ve üzerine olan bir homomorfizma, izomorfizma olarak adlandırılır. Eğer $f : G \rightarrow H$ izomorfizması varsa, iki grup izomorfik olup, bu durum $G \cong H$ şeklinde gösterilir. Bir grubun kendisine olan izomorfizmasına otomorfizma denir.

Tanım 2.4. Bir G grubunun alt kümesi olan S eğer G 'nin ikili işlemi altında kendi başına grup oluşturuyorsa G 'nin bir alt grubu olarak adlandırılır.

Tanım 2.5. Boş olmayan bir R kümesi ve bu kümede iki $\star$ ve $\circ$ işlemlerinden oluşan $(R, \star, \circ)$ üçlüsünü ele alalım. Eğer $(H, \star)$ bir abel grubu iken ikinci işlem olan $\circ$, R de birleşmeli ise ve $\star$ üzerine dağılımlı ise $(R, \star, \circ)$ üçlüsüne bir halka denir.

Tanımdan halka aksiyomları şöyle sıralanabilir:

$\star$ işleminin sağlaması gereken aksiyomlar:

$$a. \star: (x, y) \in R \times R \rightarrow x \star y \in R, \quad \forall x, y, z, x^{-1} \in R$$

$$b. (x \star y) \star z = x \star (y \star z),$$

$$c. x \star \iota = \iota \star x = x,$$

$$d. x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = \iota$$

$$e. x \star y = y \star x$$

$\circ$ ikinci işleminin sağlaması gereken aksiyomlar

$$f. \circ: (x, y) \in R \times R \rightarrow x \circ y \in R$$

$$g. (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

$$h. (x \star y) \circ z = (x \circ z) \star (y \circ z)$$

Tanım 2.6. $(R, \star, \circ)$ halkasında ikinci işlem $\circ$ değişmeli ise halka değişmeli halka olarak adlandırılır. Eğer $\circ$ ikinci işlemine göre R nin bir ϵ birim elemanı varsa halkaya birimli halka denir. Bu iki özelliğide sağlayan halkaya birimli değişmeli halka denir.

Tanım 2.7. $(R, \star, \circ)$ birimli ve değişmeli halka olsun ve R 'nin sıfırdan farklı her elemanın $\circ$ işlemine göre tersi varsa, R ye cisim denir. Buna göre $(R, \star, \circ)$ bir cisim ise $(R - \{0\}, \star, \circ)$ bir abel grubudur.

Tanım 2.8. R birimli ve değişmeli halka olsun. R üzerinde bir modül, G abel grubu, $a, b, c \in R$ ve $\alpha, \beta \in G$ olmak üzere;

$$(c, \alpha) \in R \times G \rightarrow c\alpha \in G$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$a. c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$$

b. $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$

c. $(ab)\alpha = a(b\alpha)$

d. 1. $\alpha = \alpha$.

Eğer R bir cisim ise R - modül R üzerindeki bir vektör uzayı ile aynıdır.

Tanım 2.9. Bir A cebri, F cismi üzerinde tanımlı halkadır ve aynı zamanda F üzerinde vektör uzayı olup iki-lineer (doğrusal) çarpma işlemine $m : A \times A \rightarrow A$ sahiptir ($m(x,y) = xy$ olarak gösterilecektir). Her $a \in F$ ve $x, y, z \in A$ olmak üzere şu koşulu sağlayan yapıdır:

$$a(xy) = (ax)y = x(ay)$$

Cebir, eğer çarpma işlemi $x(yz) = (xy)z$ koşulunu sağlıyorsa birleşmeli olarak adlandırılır. Eğer çarpma işlemi, $xy = yx$ koşulunu sağlıyorsa, cebir değişmeli olarak adlandırılır.

Tanım 2.10. Bir A cebri

$$xy = z$$

$$yx = z$$

denklemlerinin $y \neq 0$ için her zaman çözümleri varsa bölmeli bir cebirdir denir [32].

3. SAYI SİSTEMLERİ

Doğada yalnızca dört normlu bölmeli cebir vardır [33]: Reel sayılar ($\mathbb{R}$), karmaşık sayılar ($\mathbb{C}$), kuaternionlar ($\mathbb{H}$) ve oktonyonlar ($\mathbb{O}$). Oktonyonlar bu nedenle doğanın en büyük bölmeli cebridir. Tüm reel sayılar kümesi bir doğru oluşturur. Bu nedenle reel sayılar kümesinin bir boyutlu olduğu söylenir. Bu ifadenin tersi de söylenebilir: Bir doğrunun tek boyutlu olması, üzerindeki bir noktayı belirtmek için reel sayının yeterli olmasından kaynaklanır. 1500'lerden önce reel sayılar, bilinen tek sayı sistemi idi. Ancak, Rönesans döneminde hırslı matematikçiler giderek daha karmaşık denklemleri çözmeye çalışmış ve en zor problemleri çözenin kim olduğunu görmek için yarışmalar düzenlenmiştir.

3.1. Karmaşık Sayılar

Karmaşık sayılar ilk olarak 16. yüzyılda kübik denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Çünkü bazı durumlarda reel çözümler olmasına rağmen, bu çözümleri elde etmek için karmaşık sayılar kullanmak gerekiyordu. Gerolamo Cardano, $x^3 = 15x + 4$ kübik denkleminin kökünü $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ gibi gizemli formüllerle ortaya koydu. Böylece Cardano karmaşık sayıları, cebire sokan ilk kişiydi. Daha sonra Rafael Bombelli, *l'Algebra* adlı eserinde $\sqrt{-1}$ 'i tanımladı ve karmaşık aritmetik kuralları ilk kez formüle etti. Bombelli denklemin çözümünün $x = 4$ verdiğini gözlemledi ve Cardano formülüyle verilen ifadenin, aslında $x = 4$ 'ün farklı bir ifadesi olduğunu açıkladı. Cardano'dan yaklaşık 100 yıl sonra Descartes, bu sayılara küçümseyici şekilde "hayali" ismini koydu ve bugün hala bu sayıları i olarak kısaltılmaktadır. Ancak matematikçiler karmaşık sayılar üzerine çalışmaya devam ettiler [1].

3.1.1. Karmaşık sayılar cebri

Reel sayılara, karesi " -1 " olan ve i olarak gösterilen sayı eklendiğinde karmaşık sayı elde edilir,

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i. \quad (3.1)$$

Öyle ki z karmaşık sayısı (a, b) reel sayı çifti ile şu şekilde yazılabilir:

$$z = a + ib. \quad (3.2)$$

Karmaşık sayılar aynı zamanda bir cebirdir yani,

$$(a + ib)(c + id) = (a + ib)c + (a + ib)id = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad (3.3)$$

işlemi yapılabilir. Karmaşık sayılar cebri hem birleşmeli hemde değişmeli bir cebir yapısındadır. Böylece $x, y, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(xy)z = x(yz) \quad (3.4)$$

$$xy = yx \quad (3.5)$$

eşitlikleri sağlanır.

Bir $z = a + ib$ karmaşık sayısının eşleniği z^* olarak gösterilir ve 1'i 1'e i ' yi $-i$ ' ye gönderen doğrusal bir gönderim olarak tanımlanır:

$$z^* = a - ib. \quad (3.6)$$

Karmaşık sayının normu, $N(z)$ veya $|z|$ ile gösterilir ve

$$N(z) = |z|^2 = zz^* = a^2 + b^2 \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$N(z_1 z_2) = (z_1 z_2)(z_1 z_2)^* = z_1 z_2 z_2^* z_1^* = (z_1 z_1^*)(z_2 z_2^*) = N(z_1)N(z_2) \quad (3.8)$$

eşitiği geçerlidir. Yani, iki karmaşık sayının çarpımının normu, sayıların normları çarpımına eşittir. İki karmaşık sayı

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

şeklinde verilsin. Bu durumda,

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

olduğu açıktır. Yukarıdaki sonuç kullanıldığında,

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \quad (3.9)$$

ifadesine ulaşılır. Diğer bir deyişle, iki karenin toplamının çarpımı yeniden iki karenin toplamı olduğu anlamına gelir.

Sıfırdan farklı bir $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ karmaşık sayısı sadece tek terse sahiptir ve şu

şekilde verilir:

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}. \quad (3.10)$$

Öte yandan z_1 sıfırdan farklı olmak üzere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sayıları ele alınsın. Bu durumda,

$$z_1 x = z_2 \quad (3.11)$$

denkleminin çözümünü bulmak için her iki tarafı z_1^* ile çarpıldığında

$$|z_1|^2 x = z_1^* z_2 \quad (3.12)$$

elde edilir. Son olarak $|z_1|$ sıfırdan farklı olduğundan

$$x = \frac{1}{|z_1|^2} z_1^* z_2 \quad (3.13)$$

ifadesine ulaşılır. Bu sonuç (3.11) için bir çözüm olduğu kolayca görülebilir. Böylece karmaşık sayılar cebirinin, bölmeli bir cebir olduğu söylenebilir.

3.1.2. Karmaşık sayıların geometrisi

Reel sayılar kümesinin bir doğru oluşturduğundan yukarıda bahsedilmişti. Jean-Robert Argand'ın karmaşık sayılar üzerine yaptığı çalışmalar, karmaşık sayıların düzlem üzerindeki noktaları tanımladığı fikrini yaygınlaştırmıştır.

Euler formülü,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.14)$$

yardımıyla karmaşık sayıları, norm ve faz açısı θ cinsinden polar koordinatlarda ifade edilebilir. Böylece, herhangi bir z karmaşık sayısı aşağıdaki formda da yazılabilir;

$$z = r e^{i\theta}. \quad (3.15)$$

Burada $r = |z|$ 'dir. Böylece her karmaşık sayı, karmaşık düzlemde θ açısı tarafından belirlenen yöne sahiptir. Argand'ın çalışmaları, karmaşık sayılarla yapılan cebirsel işlemlerin nasıl bir geometrik sonuçlar doğuracağını da ortaya koymuştur.

Bu geometrik işlemleri daha iyi kavrayabilmek için öncelikle reel sayıları ele alalım. Herhangi bir reel sayının eklenmesi veya çıkarılması düzlemi sağa veya sola kaydırırken, herhangi bir reel sayı ile çarpmak veya bölmek doğruyu genişletir veya

sıkıştırır. Bir $a + ib$ karmaşık sayısının eklenmesi ise düzlemdeki bir noktayı a kadar sağa veya sola b kadar aşağı ve yukarı ötelenmesi anlamına gelir. Bir karmaşık sayı ile çarpmak ise aynı şekilde düzlemi genişletir ve sıkıştırır ancak aynı zamanda döndürür. Bu nedenle 1 sayısını i ile çarpmak düzlemi $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürür. İki defa i sayısı ile çarpıldığında, düzlem yarım tur dönmüş olur ve -1 elde edilir [34].

3.1.3. Karmaşık sayıların matris temsilleri

Bir karmaşık sayısını, reel sayı çifti ile temsil etmek yerine, 2×2 reel matrisleri kullanılarak temsil edilebilir.

Her $c = a + bi$ karmaşık sayısı için $\mathbb{C}$ doğrusal bir $T_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gönderimi,

$$z \mapsto cz = ax - by + (bx + ay)i \quad (3.16)$$

şeklinde ilişkilendirilebilir. Örneğin, $z \mapsto iz$ doğrusal dönüşümünün saat yönünün tersine $\frac{\pi}{2}$ derecelik döndürme işlemi tanımladığından bahsedilmişti. Böylece $z = x + iy = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ ile $\mathbb{R}^2$ ilişkilendirildiğinde,

$$T_c \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

dönüşümü yazılabilir. Böylece $c = a + bi$ tarafından belirlenen T_c doğrusal dönüşümü $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ matrisi ile ifade edilir. Sonuç olarak $F : \mathbb{C} \rightarrow M(2, \mathbb{R})$

$$c = a + ib \rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

gönderimi, $\mathbb{C}$ cisminde, 2×2 reel matris $M(2, \mathbb{R})$ halkasına, $\mathbb{R}$ doğrusal gönderimdir. Öyle ki

$$F(1) = E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F(i) = I := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I^2 = -E$$

olmak üzere $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ kümesi, matris çarpımı ve toplanması al-

tında bir cisimdir. Böylece

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$\mathbb{R}$ - doğrusal dönüşümü bir izomorfizmdir [1].

Cardano'nun da farkına vardığı gibi iki boyutlu sayı sistemi olan karmaşık sayılar daha etkin hesap yeteneği sağlıyorken, daha yüksek boyutlu sayı sistemleri bize neler sunabilirdi? Bu soruya cevap vermek hiç de kolay değildir. Onlarca yıl sonra Sir William Rowan Hamilton, kuaternion olarak adlandırdığı daha yüksek boyutlu bir sayı sistemi ortaya koymuştur.

3.2. Hamilton Kuaternionları

Kuaternionların cebirsel özelliklerini vermeden önce, karmaşık sayıların neden üç boyutlu uzaya genellenemeyeceği tartışılmalıdır. Örneğin; a, b, c reel sayı üçlüsü alındığında karmaşık sayılardaki (x, y) çarpımına genişletilemeyeceği kolaylıkla görülebilir. Çünkü $ij = a + bi + cj$ formunda olmalıdır. Öyle ki tekrar i ile çarpıldığında

$$i(ij) = ai - b + c(ij) = ai - b + c(a + bi + cj) = (ca - b) + (bc + a)i + (c^2)j$$

elde edilir. Öte yandan, $i(ij) = (ii)j$ sağlandığı varsayılırsa $i(ij) = -j$ olmalıdır. Bu durumda $c^2 = -1$ olur bu da imkansızdır. Böylece karmaşık sayılar, üç boyutlu birleşmeli reel bir cebire genişletilemez.

Hamilton uzun süren çalışmalarının ardından, (ij) çarpımının sonucunun karesi -1 'e eşit olan başka bir nicelik olması gerektiği sonucuna vardı. Böylece yeni tanımlanan nicelikle birlikte çarpım tablosu şu şekilde verilir:

$$ij = k = -ji, \quad (3.19)$$

$$jk = i = -kj, \quad (3.20)$$

$$ki = j = -ik. \quad (3.21)$$

Burada i, j ve k kuaternionik baz elemanları olarak adlandırılır. Kuaternion uzayı $\mathbb{H}$ ile gösterilir ve birim eleman 1 ve üç imajiner birim tarafından oluşturulur. Öyle ki bir $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$,

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (3.22)$$

ifadesi ile verilir. Burada q_0, q_1, q_2 ve q_3 reel sayılardır. Aynı zamanda $\mathbf{q}$ kuaternionu şu şekilde de ifade edilebilir:

$$\mathbf{q} = (q_0 + q_1 i) + (q_2 + q_3 i)j. \quad (3.23)$$

Bu eşitlikten, bir kuaternionun bir karmaşık sayı çifti olarak $(q_1 \mathbb{C}, q_2 \mathbb{C}) = (q_0 + q_1 i, q_2 + q_3 i)$ düşünülebileceği çıkarılır yada denk olarak

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilebilir [34].

3.2.1. Hamilton kuaternionları cebri

Bu bölümden itibaren kuaternionların daha genel ifadeleri için taban elemanlarının temsili $(1, i, j, k) \rightarrow (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ değişikliği yapılacaktır. Böylece $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_3$, kuaternionun imajiner taban elemanlarını temsil etmektedir. Bu taban elemanları temsiline (3.22) ifadesi

$$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.25)$$

formunu alır. Böylece yeni taban gösteriminde kuaternionların taban elemanları çarpım kuralları

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1^2 = -1 & \mathbf{e}_2^2 = -1 & \mathbf{e}_3^2 = -1 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \end{array} \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilir. Pratik olarak bir $\mathbf{q}$ kuaternionunu skaler $S(\mathbf{q})$ ve vektör $V(\mathbf{q})$ kısımlarından oluştuğu düşünülebilir:

$$\mathbf{q} = S(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q}). \quad (3.27)$$

Burada $S(\mathbf{q}) = q_0$ iken, $V(\mathbf{q}) = \mathbf{q} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$ göstermektedir. Tüm elemanları sıfır olan kuaterniona, sıfır kuaternion denir.

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ olmak üzere, iki kuaternionun toplamı ve farkı yine bir kuaterniondur:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \pm \mathbf{q} &= (p_0 \mathbf{e}_0 + p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3) \pm (q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (p_0 \pm q_0) \mathbf{e}_0 + (p_1 \pm q_1) \mathbf{e}_1 + (p_2 \pm q_2) \mathbf{e}_2 + (p_3 \pm q_3) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})\mathbf{r} = \mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{q}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{r}\mathbf{q} \quad (3.29)$$

eşitlikleri sağlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda(\mathbf{p}\mathbf{q}) = (\lambda\mathbf{p})\mathbf{q} = \mathbf{p}(\lambda\mathbf{q}) \quad (3.30)$$

eşitlikleri geçerlidir. İki $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ olmak üzere, kuaternionlarının çarpımı

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\mathbf{q} &= (p_0\mathbf{e}_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3)(q_0\mathbf{e}_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{e}_2 + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.31)$$

ile verilir. Bu kuaternion çarpımı, $\mathbb{R}^3$ 'te vektörler için olan sıradan skaler ve vektörel çarpım olarak yazılabilir. Öyle ki çarpım

$$\mathbf{p}\mathbf{q} = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (3.32)$$

şeklinde verilebilir. Burada " $\cdot$ " ve " $\times$ " sırasıyla, skaler ve vektörel çarpımı göstermektedir. Böylece $\mathbb{R}^4$ 'te kuaternion çarpımı $\mathbb{R}$ -iki doğrusal çarpımdır

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4.$$

Kuaternion çarpımı,

$$\mathbf{p}\mathbf{q} \neq \mathbf{q}\mathbf{p} \quad (3.33)$$

olduğundan değişme özelliği göstermez. Öte yandan

$$\mathbf{q}(\mathbf{p}\mathbf{r}) = (\mathbf{q}\mathbf{p})\mathbf{r} \quad (3.34)$$

eşitliği sağladığından kuaternion çarpımı birleşimlidir. Böylece yukarıda verilen eşitlikler göz önünde bulundurulduğunda reel kuaternionlar kümesi $\mathbb{H}$, değişmeli olmayan ancak birleşmeli olan bir halka yapısına sahiptir. Aynı zamanda $\mathbb{H}$, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır [35].

Bir $\mathbf{q}$ kuaternionun eşleniği $\mathbf{q}^*$ şeklinde gösterilir ve $\mathbf{e}_0$ taban elemanını kendisine, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_3$ imajiner taban elemanlarını, eksi işaretlisine gönderen doğrusal

bir gönderim olarak tanımlanır. Bir kuaternionun eşleniği

$$\mathbf{q}^* = q_0 \mathbf{e}_0 - q_1 \mathbf{e}_1 - q_2 \mathbf{e}_2 - q_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.35)$$

şeklinde verilir. Öte yandan $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}$ için çarpımın kuaternionik eşleniği,

$$\begin{aligned} (\mathbf{pq})^* &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2)(-\mathbf{e}_1) \\ &\quad + (p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3)(-\mathbf{e}_2) + (p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1)(-\mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{pq})^* &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) - (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2)\mathbf{e}_1 \\ &\quad - (p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3)\mathbf{e}_2 - (p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

iken, kuaternionik eşleniklerin çarpımı

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* \mathbf{p}^* &= (q_0 \mathbf{e}_0 - q_1 \mathbf{e}_1 - q_2 \mathbf{e}_2 - q_3 \mathbf{e}_3)(p_0 \mathbf{e}_0 - p_1 \mathbf{e}_1 - p_2 \mathbf{e}_2 - p_3 \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{q}^* \mathbf{p}^* &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) - (q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2)\mathbf{e}_1 \\ &\quad - (q_0 p_2 + q_2 p_0 + q_3 p_1 - q_1 p_3)\mathbf{e}_2 - (q_0 p_3 + q_3 p_0 + q_1 p_2 - q_2 p_1)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Böylece,

$$(\mathbf{pq})^* = \mathbf{q}^* \mathbf{p}^* \quad (3.36)$$

eşitliğin sağlandığı kolayca görülür.

Kuaternion kendi kuaternionik eşleniğiyle (3.31) de verilen kurala göre çarpıldığında, kuaternionun normu elde edilir ve

$$N(\mathbf{q}) = |q|^2 = \mathbf{q} \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (3.37)$$

ifadesiyle verilir. $N(q)$ değerinin pozitif bir skaler olduğu açıktır. Aynı zamanda norm

$$N(\mathbf{pq}) = (\mathbf{pq})(\mathbf{pq})^* = (\mathbf{pq})(\mathbf{q}^* \mathbf{p}^*) = \mathbf{p}(\mathbf{q} \mathbf{q}^*) \mathbf{p}^* = N(\mathbf{p})N(\mathbf{q}) \quad (3.38)$$

eşitliğini sağlamaktadır. $N(\mathbf{q}) = 1$, eşitliğini sağlayan kuaternionlara birim kuaternion denir ve normu sıfır olan tek kuaternion sıfır kuaternionudur. Gizemli bir eşitliği

göstermek için (3.38) ifadesinin açık halini ele alalım. Öyle ki eşitliğin sol tarafı

$$\begin{aligned}
N(\mathbf{pq}) &= \left[(p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{e}_2 + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{e}_3 \right] \\
&\quad \left[(p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) - (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{e}_1 \right. \\
&\quad \left. - (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{e}_2 - (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{e}_3 \right], \\
N(\mathbf{pq}) &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)^2 + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)^2 \\
&\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)^2 + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)^2,
\end{aligned}$$

şeklindedir, sağ tarafının açık ifadesi şu şekildedir

$$N(\mathbf{p})N(\mathbf{q}) = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

Sonuç olarak (3.38)'in açık ifadesi

$$\begin{aligned}
&(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \\
&= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)^2 + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)^2 \\
&\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)^2 + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)^2 \quad (3.39)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade, karmaşık sayılar için (3.9) de verilen eşitliğin kuaternionlar için olan versiyonudur. Benzer şekilde (3.39), dört kare toplamının çarpımı yeniden dört karenin toplamı olduğu anlamına gelmektedir. Burada şu soru sorulabilir : "Hangi n tane kare toplamın çarpımı yeniden n karenin toplamını verir? " 1898 yılında Alman matematikçi Adolf Hurwitz n değeri yalnızca 1,2,4 ve 8 olduğunda eşitliğin sağlandığını göstermiştir [36].

Sıfırdan farklı her kuaternionun tersi vardır ve

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{N(\mathbf{q})} \quad (3.40)$$

eşitliği ile tanımlanır. $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{H} - \{0\}$ olmak üzere

$$\mathbf{q}_2x = \mathbf{q}_1 \quad (3.41)$$

$$\mathbf{q}_1x = \mathbf{q}_2, \quad (3.42)$$

denklemlerin çözümleri incelendiğinde bu denklemlerin ilkini sağlayan çözüme $\mathbf{q}_1$ 'in $\mathbf{q}_2$ 'ye göre soldan bölümü denir. Benzer şekilde ikinci denklemi sağlayan çözüme

$\mathbf{q}_1$ 'in $\mathbf{q}_2$ 'ye göre sağdan bölümü adı verilir. İlk denklem soldan $\mathbf{q}_2^*$ ile çarpılırsa

$$N(\mathbf{q}_2)x = \mathbf{q}_2^*\mathbf{q}_1$$

elde edilir. $N(\mathbf{q}_2)$ her zaman pozitif bir değer olduğundan, ifade bölüm şeklinde yazılabilir ve bu sayede denklemin çözümü için

$$x = \mathbf{q}_2^*\mathbf{q}_1 \frac{1}{N(\mathbf{q}_2)}$$

eşitliği elde edilir. Aynı işlem diğer denklem için de benzer şekilde uygulanabilir. Bu durum, $\mathbb{H}$ 'nin değişmeli olmayan, birleşmeli ve bölmeli bir cebir olduğunu gösterir.

3.2.2. Hamilton kuaternionların geometrisi

Kuaternion çarpımının, vektörlerin skaler ve vektörel çarpımları içermesi sebebiyle, mekanik ve geometrik problemlerde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bunu göstermek için denklem (3.22)'de $q_0 = 0$ alındığında

$$\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3 \quad (3.43)$$

vektör kuaternion yada imajiner kuaternion elde edilir. Normu 1 olan imajiner kuaternionlar

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

bir küre oluşturur. Dikkat edilirse, $\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2$ ve $\pm\mathbf{e}_3$ karekökü -1 olan tek sayılar değildir. Aynı zamanda, normu 1 olan imajiner bir kuaternionun da karekökü -1 'dir. Böyle bir imajiner kuaternion $\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbb{H}$ üzerinde bir karmaşık alt cebir oluşturmak için kullanılabilir. Öyle ki alt cebir

$$\mathbb{C} = \{a + b\hat{\mathbf{u}}\} \quad (3.44)$$

formundadır ve burada $a, b \in \mathbb{R}$. Karmaşık sayılar için olan Euler formülü kullanıldığında

$$e^{\hat{\mathbf{u}}\theta} = \cos \theta + \hat{\mathbf{u}} \sin \theta \quad (3.45)$$

elde edilir. Böylece kuaternionlar şu şekilde ifade edilebilir

$$\mathbf{q} = re^{\hat{\mathbf{u}}\theta} = \sqrt{N(\mathbf{q})}(\cos \theta + \hat{\mathbf{u}} \sin \theta). \quad (3.46)$$

Burada $\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{q}$ 'nin sanal kısmının yönünü belirler [34].

Yalnızca üç boyuttaki dönmeler dikkate alındığında, kuaternionun reel kısmını sabit tutan dönüşümlere ihtiyaç duyulur. Bu nedenle

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{p}^{-1}, \quad (3.47)$$

dönüşümünü dikkate almak yararlı olacaktır. Dönüşüm $\mathbf{q}$ 'nin normunu otomatik olarak korur:

$$N(\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{p}^{-1}) = N(\mathbf{p})N(\mathbf{q})N(\mathbf{p}^{-1}) = N(\mathbf{q}).$$

Böylece dönüşümde, $\mathbf{p}$ 'nin normunun önemsiz olduğu görülür. Öyleyse $\mathbf{p} = e^{i\alpha}$ seçilebilir ve bu durumda $\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^*$ sağlanır. Herhangi bir kuaternion, karmaşık sayı çifti olarak düşünülebileceğinden

$$\mathbf{q} = q_{1C} + q_{2C}j$$

şeklinde ifade edilebilir. Karmaşık sayılar için olan Euler formülü kullanıldığında

$$\mathbf{q} = r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{i\phi} j \quad (3.48)$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{p}^* &= e^{i\alpha}(r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{i\phi} j) e^{-i\alpha} \\ &= r_1 e^{i\theta} e^{i\alpha} e^{-i\alpha} + r_2 e^{i\phi} e^{i\alpha} (j e^{-i\alpha}) \\ &= r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{(i\phi+2\alpha)} j \end{aligned} \quad (3.49)$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{p} = e^{i\alpha}$ için (3.47) denkleminde verilen dönüşüm, hem reel hem de x yönünü sabit tutarken yz - düzleminde 2α radyanlık bir dönme uygular. Benzer şekilde $e^{j\alpha}$ ve $e^{k\alpha}$ değerleri için dönüşüm sırasıyla, zx - ve xy - düzlemlerinde 2α kadarlık dönmelere karşılık gelir. Böylece üç boyutta bir dönme grubu olan $SO(3)$ grubunun kuaternionik tanımı

$$SO(3) = \{\mathbf{q} \mapsto \mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{p}^{-1} : \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}, |p| = 1\} \quad (3.50)$$

şeklinde yapılabilir [34].

3.2.3. Hamilton kuaternionların matris temsilleri

Kuaternionların birleşmeli bir cebir oluşturdıklarından yukarıda bahsedilmişti. Bu sebeple, karmaşık sayılarda olduğu gibi bir gönderim tanımlanarak, kuaternionların matris temsilleri oluşturulabilir. Bir F gönderimi,

$$F : \mathbb{H} \rightarrow M(4, \mathbb{R}),$$

$$F(\mathbf{q}) = F(q_0\mathbf{e}_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3) \rightarrow \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$\mathbb{H}$ cisminden, 4×4 reel matris $M(4, \mathbb{R})$ halkasına bir gönderimdir. F gönderiminin ilk olarak toplama ve çarpma için bir homomorfizm sağladığı gösterilip daha sonra birebir ve üzerine olduğundan bir izomorfizim olduğu kolayca söylenir [32]. Aynı zamanda taban elemanlarına F gönderimi altında

$$F(\mathbf{e}_0) = E_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F(\mathbf{e}_1) = E_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(\mathbf{e}_2) = E_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(\mathbf{e}_3) = E_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

formunu alır. Diğer yandan bir kuaternionun 4×1 matris formunda da temsil etmek mümkündür. Böylece,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_0 & \mathbf{q} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

şeklinde temsil edilebilir ve burada $\mathbf{Q}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ 'nin matris temsidir.

4. MACFARLANE KUATERNİONLARI

Hamilton kuaternionlarının yanı sıra baz elemanları çarpım kuralları değiştirilerek elde edilen birçok kuaternion türü mevcuttur. Örneğin hiperbolik kuaternionlar, baz elemanlarının kendisi ile çarpımları $+1$ 'e eşit olan kuaternion türüdür. Bir $\mathbf{q}$ hiperbolik kuaternionu

$$\mathbf{q} = q_0\mathbf{e}_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3 \quad (4.1)$$

formundadır ve baz elemanları çarpım kuralları

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 &= +1 & \mathbf{e}_2^2 &= +1 & \mathbf{e}_3^2 &= +1, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde verilir. Baz elemanları çarpım kurallarından değişme özelliği sağlanmadığı hemen görülür. Öte yandan

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2 = +\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

ifadeleri geçerli olduğundan, Hamilton kuaternionların aksine birleşme özelliğine de sahip değillerdir.

1900 yılında Alexander Macfarlane [29] , bu problemin üstesinden gelebilmek için yeni baz çarpım kurallarını şu şekilde tanımlamıştır:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 &= +1 & \mathbf{e}_2^2 &= +1 & \mathbf{e}_3^2 &= +1, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= i\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 &= i\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 &= i\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 &= -i\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 &= -i\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 &= -i\mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Burada i , matematiksel olarak, $\sqrt{-1}$ 'i temsil etmektedir. Hemen görülebileceği üzere,

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 &= i\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = +\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2 = +\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

sağlandığından bu çarpım birleşmelidir. Böylece birleşme özelliği gösteren hiperbolik

kuaterniona Macfarlane kuaternionu denir ve $\mathbb{M}$ ile gösterilir. Hamilton kuaternionlarında olduğu gibi, $\mathbf{q} \in \mathbb{M}$ için

$$\mathbf{q} = S(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$$

yazılabilir. Burada $S(\mathbf{q}) = q_0$ kuaternionun skaler kısmını temsil ederken, $V(\mathbf{q}) = \mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$ ise kuaternionun vektörel kısmını göstermektedir. Aynı zamanda $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{M}$ olmak üzere iki Macfarlane kuaternionun toplamı veya farkı, yine bir Macfarlane kuaternionudur

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \pm \mathbf{q} &= (p_0\mathbf{e}_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3) \pm (q_0\mathbf{e}_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3) \\ &= (p_0 \pm q_0)\mathbf{e}_0 + (p_1 \pm q_1)\mathbf{e}_1 + (p_2 \pm q_2)\mathbf{e}_2 + (p_3 \pm q_3)\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{M}$ olmak üzere, iki kuaternionun çarpımı şu kurala göre verilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{pq} &= (p_0\mathbf{e}_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3)(q_0\mathbf{e}_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3) \\ &= (p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + ip_2q_3 - ip_3q_2)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + ip_3q_1 - ip_1q_3)\mathbf{e}_2 + (p_0q_3 + p_3q_0 + ip_1q_2 - ip_2q_1)\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Burada verilen iki kuaternionun çarpım kuralı, $\mathbb{R}^3$ uzayında vektörlerin sıradan skaler ve vektörel çarpımları cinsinden şu şekilde ifade edilebilir :

$$\mathbf{pq} = p_0q_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + i\mathbf{p} \times \mathbf{q}. \quad (4.6)$$

Bir $\mathbf{q} \in \mathbb{M}$ için kuaternionik eşlenik, tıpkı Hamilton kuaternionlarında olduğu gibi tanımlanır:

$$\mathbf{q}^* = q_0\mathbf{e}_0 - q_1\mathbf{e}_1 - q_2\mathbf{e}_2 - q_3\mathbf{e}_3. \quad (4.7)$$

Hamilton kuaternionları tarafından sağlanan (3.36) denkleminin, Macfarlane kuaternionları için de sağlandığı kolayca gösterilebilir.

İki Macfarlane kuaternionu $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ 'nin iç çarpımı

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = S(\mathbf{pq}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{pq}^* + \mathbf{qp}^*) \quad (4.8)$$

ifadesiyle tanımlanır. Bu iç çarpım kullanılarak, bir Macfarlane kuaternionu $\mathbf{q}$ 'nin normu

$$N(\mathbf{q}) = |q|^2 = \mathbf{qq}^* = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \quad (4.9)$$

şeklinde verilir. Dolayısıyla Hamilton kuaternionların aksine Macfarlane kuaternionlarının normu her zaman pozitif bir skalere eşit olamayacağı, sıfırdan büyük, küçük veya eşit değerler alabileceği sonucu çıkar. Öyleyse;

$$N(\mathbf{q}) < 0 \text{ için } \mathbf{q} \text{ uzaysal,} \quad (4.10a)$$

$$N(\mathbf{q}) = 0 \text{ için } \mathbf{q} \text{ ışıksal,} \quad (4.10b)$$

$$N(\mathbf{q}) > 0 \text{ için } \mathbf{q} \text{ zamansal ,} \quad (4.10c)$$

Macfarlane kuaternionu denir. Böylece, uzaysal ve zamansal Macfarlane kuaternionların tersi vardır ve

$$q^{-1} = \frac{q^*}{N(\mathbf{q})} \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanır. Normu 1'e eşit olan Macfarlane kuaternionlarına birim kuaternion denir. Diğer yandan Macfarlane kuaternionları için de

$$N(\mathbf{pq}) = (\mathbf{pq})(\mathbf{pq})^* = \mathbf{pqq}^*\mathbf{p}^* = N(\mathbf{p})N(\mathbf{q}) \quad (4.12)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

$\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p}$ iki uzaysal kuaternionunu ele alınsın. Yukarıdaki tanımdan, $N(\mathbf{q}) < 0$ ve $N(\mathbf{p}) < 0$ olduğu söylenebilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} N(\mathbf{pq}) &= (p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)^2 - (p_0q_1 + p_1q_0 + ip_2q_3 - ip_3q_2)^2 \\ &\quad - (p_0q_2 + p_2q_0 + ip_3q_1 - ip_1q_3)^2 - (p_0q_3 + p_3q_0 + ip_1q_2 - ip_2q_1)^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

ve

$$N(\mathbf{p})N(\mathbf{q}) = (p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \quad (4.14)$$

$N(\mathbf{q})N(\mathbf{p}) = N(\mathbf{pq}) > 0$ olduğundan uzaysal Macfarlane kuaternionları çarpım altında kapalı değildir. Ancak $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p}$ zamansal iki kuaternion olduğunda $N(\mathbf{p}) > 0$ ve $N(\mathbf{q}) > 0$ olur ve $N(\mathbf{pq}) > 0$ sağlandığında zamansal kuaternionlar çarpım altında kapalıdır [30].

Son olarak, bir $\mathbf{q}$ Macfarlane kuaternionu, kutupsal formu şu şekilde formüle edilebilir [30]:

$$\mathbf{q} = \sqrt{N(\mathbf{q})}(\cosh \varphi + \hat{\mathbf{q}} \sinh \varphi). \quad (4.15)$$

Burada

$$\sinh \varphi = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{N(\mathbf{q})}}, \quad \cosh \varphi = \frac{q_0}{\sqrt{N(\mathbf{q})}},$$

şeklinde tanımlanır ve $\hat{\mathbf{q}}^2 = 1$ dir.

4.1. Macfarlane Kuaternionların Matris Temsilleri

Macfarlane kuaternionların baz elemanları çarpım kuralları, spin-1/2 değerli relativistik olmayan parçacıkların Pauli matrisleriyle aynı formdadır. Dolayısıyla Macfarlane kuaternion baz elemanları $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ değiştirilerek 2×2 'lik karmaşık matris temsilleri elde edilebilir:

$$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 \rightarrow q_0 \sigma_0 + q_1 \sigma_1 + q_2 \sigma_2 + q_3 \sigma_3. \quad (4.16)$$

Burada $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ Pauli matrislerini ve σ_0 ise 2×2 'lik birim matrisi temsil etmekte olup

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanır. Pauli matrisleri çarpımlarının

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= +1 & \sigma_2^2 &= +1 & \sigma_3^2 &= +1, \\ \sigma_1 \sigma_2 &= i \sigma_3 & \sigma_3 \sigma_1 &= i \sigma_2 & \sigma_2 \sigma_3 &= i \sigma_1, \\ \sigma_2 \sigma_1 &= -i \sigma_3 & \sigma_1 \sigma_3 &= -i \sigma_2 & \sigma_3 \sigma_2 &= -i \sigma_1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

eşitliklerini sağladığı kolayca görülür. Böylece bir $\mathbf{q} \in \mathbb{M}$, 2×2 matris gösterimi

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 + q_3 & q_1 - i q_2 \\ q_1 + i q_2 & q_0 - q_3 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

şeklinde verilir. Burada $\mathbf{Q}$, bir Macfarlane kuaternionunun matris gösterimini temsil etmektedir.

Aynı zamanda bir dönüşüm yardımıyla Macfarlane kuaternionları 4×4 matrislerle de temsil etmek mümkündür. Kuaternion çarpımı değişmeli olmadığından, F_L

ve F_R dönüşümleri

$$F_L(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{q}\mathbf{x}, \quad (4.20a)$$

$$F_R(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}\mathbf{q}, \quad (4.20b)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\mathbf{x}, \mathbf{q} \in \mathbb{M}$ ve $N(\mathbf{q}) = 1$ 'dir. F_L ve F_R sırasıyla kuaternionların soldan ve sağdan çarpımlarına karşılık gelmektedir

$$\begin{aligned} F_L(\mathbf{e}_0) &= q_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3, & F_R(\mathbf{e}_0) &= q_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3, \\ F_L(\mathbf{e}_1) &= q_1 + q_0\mathbf{e}_1 - iq_3\mathbf{e}_2 + iq_2\mathbf{e}_3, & F_R(\mathbf{e}_1) &= q_1 + q_0\mathbf{e}_1 + iq_3\mathbf{e}_2 - iq_2\mathbf{e}_3, \\ F_L(\mathbf{e}_2) &= q_2 + iq_3\mathbf{e}_1 + q_0\mathbf{e}_2 - iq_1\mathbf{e}_3, & F_R(\mathbf{e}_2) &= q_2 - iq_3\mathbf{e}_1 + q_0\mathbf{e}_2 + iq_1\mathbf{e}_3, \\ F_L(\mathbf{e}_3) &= q_3 - iq_2\mathbf{e}_1 + iq_1\mathbf{e}_2 + q_0\mathbf{e}_3, & F_R(\mathbf{e}_3) &= q_3 + iq_2\mathbf{e}_1 - iq_1\mathbf{e}_2 + q_0\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Böylece, F_L dönüşümünün matris formu

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -iq_3 & iq_2 \\ q_2 & iq_3 & q_0 & -iq_1 \\ q_3 & -iq_2 & iq_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

ve F_R dönüşümünün matris formu

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & iq_3 & -iq_2 \\ q_2 & -iq_3 & q_0 & iq_1 \\ q_3 & iq_2 & -iq_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

şeklinde verilir. Aynı zamanda Macfarlane kuaternionların taban elemanları, F_L gön-

derimi altında şu şekilde verilir

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_0) = E_0 &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & F(\mathbf{e}_1) = E_1 &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \\
F(\mathbf{e}_2) = E_2 &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & F(\mathbf{e}_3) = E_3 &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Diğer yandan bir Macfarlane kuaternionun 4×1 matris formunda

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0, & q_1, & q_2, & q_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_0, & \mathbf{q} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

şeklinde temsil edilebilir. $\mathbf{q} \in \mathbb{M}$ ve $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ olmak üzere; $\mathbf{q}\mathbf{p}$ çarpımları aşağıdaki matris ilişkisi ile temsil edilebilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} q_0 & \mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 I_3 + i\tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -iq_3 & iq_2 \\ q_2 & iq_3 & q_0 & -iq_1 \\ q_3 & -iq_2 & iq_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} q_0 p_0 + q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 \\ q_1 p_0 + q_0 p_1 + i(q_2 p_3 - q_3 p_2) \\ q_2 p_0 + q_0 p_2 + i(q_3 p_1 - q_1 p_3) \\ q_3 p_0 + q_0 p_3 + i(q_1 p_2 - q_2 p_1) \end{bmatrix}, \quad (4.24)
\end{aligned}$$

ya da

$$\mathbf{P}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} p_0 & \mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 I_3 - i\tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & ip_3 & -ip_2 \\ p_2 & -ip_3 & p_0 & ip_1 \\ p_3 & ip_2 & -ip_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Burada I_3 , 3×3 birim matrisi göstermekte olup $\tilde{\mathbf{q}}$ ve $\tilde{\mathbf{p}}$ özel matrisler şu şekilde

tanımlanır:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Bu tanımlar altında F_R ve F_L dönüşümlerine karşılık gelen matrisler sırasıyla şu şekilde ifade edilebilir

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q_0 & \mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 I_3 - i\tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & iq_3 & -iq_2 \\ q_2 & -iq_3 & q_0 & iq_1 \\ q_3 & iq_2 & -iq_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

ve

$$^+\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0 & \mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 I_3 + i\tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -ip_3 & ip_2 \\ p_2 & ip_3 & p_0 & -ip_1 \\ p_3 & -ip_2 & ip_1 & p_0 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

5. ELEKTROMANYETİZMADA MAXWEL DENKLEMLERİ

5.1. Eylem Fonksiyoneliinden Yüklü Parçacık İçin Hareket Denklemleri

Bilindiği üzere, eylem ilkesi (Hamilton İlkesi), her mekanik sistem için S adı verilen ve hareketin gerçek durumunda ekstremum değer alan bir integralin var olduğunu ifade etmektedir. Bu nedenle $\delta S = 0$ değerini alır.

Serbest bir parçacık için (herhangi bir dış kuvvet etkisinde olmayan parçacık) eylem integrali referans sistemi seçiminden bağımsız olmalıdır. Bu nedenle Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalmalıdır. m kütleli serbest bir parçacık için eylem şu şekilde tanımlanır [37]:

$$S = -mc \int_a^b ds. \quad (5.1)$$

Burada c ışık sürati, ds ise uzayzaman aralığını ifade etmektedir. Belirli bir elektromanyetik alanda hareket eden bir parçacık için eylem, iki terimden oluşur: serbest parçacığa ait eylemi veren (5.1) numaralı denklem ve parçacığın alanla etkileşimini tanımlayan ek bir terim. Bu ikinci terim, hem parçacığın hem de alanın özelliklerini içermelidir. Parçacığın özellikleri q yükü ile, alanın özellikleri ise bileşenleri koordinatların ve zamanın fonksiyonu olan dört vektör potansiyeli A_μ ile karakterize edilir. Bu nicelikler, eylem fonksiyoneliinde şu şekilde yer alır:

$$q \int_a^b A_\mu dx^\mu. \quad (5.2)$$

Böylece, elektromanyetik alanda hareket eden yüklü parçacık için eylem fonksiyonelinin tam ifadesi:

$$S = \int_a^b (-mcds - qA_\mu dx^\mu) \quad (5.3)$$

şeklindedir. Burada A_μ , dört vektör potansiyelinin bileşenlerini ifade eder; uzaysal bileşenleri $\mathbf{A}$ vektör potansiyeli, zaman bileşeni $A^0 = \phi/c$ ise skaler potansiyel olarak tanımlanır. Bu durumda eylem integrali,

$$S = \int_a^b (-mcds + q\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - q\phi dt) \quad (5.4)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu integral dt parantezinde düzenlendiğinde

$$S = \int_a^b \left(-mc \frac{ds}{dt} + q \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} - q\phi \right) dt$$

$$S = \int_a^b \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + q \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi \right) dt$$

ifadesine ulaşılır. Buradan, yüklü parçacığın Lagrange fonksiyonu

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + q \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi \quad (5.5)$$

şeklinde ifade edildiği sonucu çıkar [37].

Bir elektromanyetik alan içinde bulunan yüklü bir parçacık, yalnızca alan tarafından uygulanan kuvvete maruz kalmaz; aynı zamanda kendisi de alanı etkileyerek değiştirebilir. Ancak q yükü yeterince büyük değilse yükün alan üzerinde etkisi ihmal edilebilir [37]. Bu varsayım altında, alanın parçacığın koordinatlarına ve hızına bağlı olmadığı kabul edilerek, belirli bir alanda yükün hareket denklemleri türetilebilir. Bu denklemler, Euler-Lagrange eşitliğinden elde edilir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \quad (5.6)$$

Burada L , (5.5) denkleminde verilen Lagrange fonksiyonudur. Lagrange fonksiyonunun hıza göre kısmi türevi, genelleştirilmiş momentumu verir:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}. \quad (5.7)$$

Burada $\mathbf{p}$, parçacığın sıradan momentumunu ifade etmektedir. Öte yandan

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - q\nabla\phi \quad (5.8)$$

eşitli vektör özdeşlikleri kullanılarak yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - q\nabla\phi \quad (5.9)$$

ifadesine ulaşılır. Bu sonuçlar (5.6) numaralı denklemde yerine konulduğunda, elde edilen ifade şu formu alır:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - q\nabla\phi. \quad (5.10)$$

Ancak bu ifadedeki tam türev $(d\mathbf{A}/dt) dt$ iki kısımdan oluşur: ilki, $(\partial\mathbf{A}/\partial t) dt$ teri-

miyle temsil edilen, uzayda sabit bir noktadaki vektör potansiyelinin zamana göre değişimidir; ikincisi ise, parçacığın uzayda $d\mathbf{r}$ kadar yer değiştirmesiyle oluşan değişimdir. Bu ikinci terim matematiksel olarak $(d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla, tam türev için şunlar yazılabilir :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Son olarak bu sonuç (5.10) denkleminde kullanıldığında

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -q\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - q\nabla\phi + q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (5.11)$$

bağıntısı elde edilir [37]. Bu, elektromanyetik alanda bir parçacığın hareket denklemdir. Eşitliğin sol taraf parçacığın momentumunun zamana göre türevidir. Bu nedenle eşitliğin sağ tarafı da elektromanyetik alanda yük üzerine etki eden kuvvettir. Kuvvet iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım, parçacığın hızına bağlı olmayan kısımdır. İkinci kısım ise hız ile orantılıdır ve parçacığın hızına diktir. Birim yük başına birinci tip kuvvete *elektrik alan şiddeti* denir ve $\mathbf{E}$ ile gösterilir

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \quad (5.12)$$

Birim yük başına ikinci tip kuvvete *manyetik alan şiddeti* denir ve $\mathbf{B}$ ile gösterilir

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.13)$$

Böylece elektromanyetik alanda bir yükün hareket denklemi,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.14)$$

şeklinde ifade edilir. Denklemin sağ tarafı *Lorentz kuvveti* olarak adlandırılır.

Diğer yandan A_μ dört potansiyelini kullanarak

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (5.15)$$

şeklinde tamamen antisimetrik olan elektromanyetik alan tensörü tanımlanabilir. $F_{\mu\nu}$ tensörün bileşenleri, $A_\mu = (\phi/c, -\mathbf{A})$ değerleri ifade de yerine konularak kolayca elde edilebilir. Bu tensörel ifadenin matris formu, $\mu = 0, 1, 2, 3$ indisleri satırları ν

indisleri sütunları etiketlediği göz önüne alındığında

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

şeklinde oluşturulur.

5.2. Maxwell Denklemlerinin İlk Çifti

Daha önce verilen (5.12) ve (5.13) denklemlerinden yararlanarak sadece $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ niceliklerini içeren denklemler türetilebilir. Bunun için (5.12) denklemin rotasyoneli alındığında,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.17)$$

ifadesi elde edilir. Öte yandan (5.13) denklemin diverjansı alındığında,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.18)$$

sonucuna ulaşılır. Bunlar, Maxwell denklemlerinin ilk çifti olarak bilinir. Ancak bu iki denklem, alanların özelliklerini tam olarak belirleyemezler.

Aynı zamanda vektörel ifadeleri verilmiş denklemlerin integral formları da kolayca elde edilebilir. Denklem (5.18)'in hacim üzerinden integrali alındığında ve daha sonra Gauss teoremi kullanıldığında,

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

ifadesi elde edilir. Burada $d\mathbf{S}$, dV hacmini saran yüzey elemanıdır. Sonuç olarak,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.19)$$

(5.18) ifadesinin integral formudur. Bir vektörün yüzey üzerinden integraline, vektörün yüzey boyunca akısı denir. Böylece her kapalı yüzey boyunca manyetik alan

akısı sıfırdır.

Denklem (5.17)'nin bir yüzey üzerinden integrali alınıp daha sonra Stokes teoremi kullanıldığında,

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

elde edilir. $\mathbf{E}$ vektörün türevinin yüzey üzerinden integrali, onun sınırdaki (yani yüzeyi çevreleyen eğri üzerinde) aldığı değere eşittir. Böylece (5.17) denkleminin integral formu,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.20)$$

şeklindedir. Bir vektörün kapalı bir kapalı yol üzerindeki integraline, vektörün kapalı yol etrafındaki dolaşımı denir. Elektrik alanın dolaşımına, verilen kapalı yol'daki elektromotor kuvveti denir. Böylece herhangi bir kapalı yol'daki elektromotor kuvvet, bu kapalı yol tarafından sınırlanan bir yüzeyden geçen manyetik akının zamanla değişiminin eksi değerine eşittir. Aynı zamanda (5.17) ve integral ifadesi olan (5.20) Faraday yasası olarak adlandırılır.

Sonuç olarak, Maxwell denklemlerinin ilk çifti (5.16) yardımıyla tensörel formda şu ifadeyle verilir

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (5.21)$$

5.3. Süreklilik Denklemi

Bir dV hacim bölgesindeki yükün zamanla değişimi şu şekilde verilir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV. \quad (5.22)$$

Diğer yandan, birim zamandaki yük değişimi, birim zamanda hacmi terk eden ya da tersine hacme giren toplam yük miktarına bağlıdır. Hacmi sınırlayan yüzeyin dS büyüklüğündeki bir alan elemanından birim zamanda geçen yük miktarı, $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ ile ifade edilir. Burada $\mathbf{v}$, $d\mathbf{S}$ elemanının bulunduğu uzay noktasındaki yüklü parçacığın hızını; $d\mathbf{S}$ vektörü ise yüzeyin dışa bakan normal doğrultusunu gösterir. Bu nedenle, $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ ifadesi hacimden bir yük çıkışı söz konusuysa pozitif, dışarıdan hacme bir yük girişi varsa negatif değer alır.

Birim zamanda belirli bir hacimden çıkan toplam yük miktarı, kapalı yüzey

üzerinden alınan yüzey integrali ile $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ biçiminde verilir. Bu açıklamalar doğrultusunda şu sonuca ulaşılır:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.23)$$

Bu denklem süreklilik denklemi olarak adlandırılır ve yükün korunumunun integral ifadesidir. Öte yandan $\rho \mathbf{v}$ ifadesinin akım yoğunluğu olduğu dikkate alındığında denklem

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

şeklinde yazılabilir. Gauss teoremi uygulanarak bu ifadenin diferansiyel formu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) dV = 0. \quad (5.24)$$

Keyfi dV hacmi için sağlanması gerektiğinden, süreklilik denklemin vektörel ifadesi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.25)$$

şeklinde verilir.

5.4. Elektromanyetik Alanda Eylem Fonksiyoneli

Elektromanyetik alan ve içinde bulunan parçacıklardan oluşan sistemin toplam eylem fonksiyoneli S , üç kısımdan oluşur [37]:

$$S = S_m + S_{mf} + S_f. \quad (5.26)$$

Burada S_m , yalnızca parçacıkların özelliklerine bağlı olan yani serbest parçacıklar için olan eylem fonksiyoneli olarak tanımlanır. Tek bir serbest parçacık için eylem fonksiyoneli (5.1) denklemi ile verilmişti. Birden fazla parçacık bulunması halinde, toplam eylem her bir parçacığın eylemlerin toplamına eşittir:

$$S_m = - \sum mc \int ds.$$

Öte yandan (5.26) ifadesinde S_{mf} , parçacıklar ile alanlar arasındaki etkileşime bağlı olan eylem kısmını ifade eder. Bu durumda denklem (5.2) verilen eylem par-

çacık sistemi için

$$S_{mf} = - \sum q \int A_\mu dx^\mu$$

ifadesini alır. Bu toplamın herbirinde A_μ , ilgili parçacığın bulunduğu uzayzaman noktasındaki alanın potansiyelleridir.

Son olarak (5.26) ifadesinde S_f , yalnızca alanın kendi özelliklerine bağlı olan, yani yüklerin yokluğunda alan için olan eylemi temsil eden kısımdır. Şimdiye kadar belirli bir elektromanyetik alandaki yüklerin hareketiyle ilgilenildiğinde, S_f miktarı önemli değildi. Çünkü bu terim parçacıkların hareketlerini etkilememektedir. Ancak alanın kendisini belirleyen denklemler bulunmak istendiğinde gereklidir [37].

S_f eylemin formunu oluşturmak için elektromanyetik alanın çok önemli bir ilkesi olan süperpozisyon ilkesinden yararlanılmalıdır [37]. Bu ilke, bir yükler sistemi tarafından üretilen alanın, her bir yükün ayrı ayrı ürettiği bireysel alan şiddetlerin bir vektörel toplamına eşit olduğunu ifade etmektedir. Dolayısıyla alan denklemleri, doğrusal diferansiyel denklem yapısında olmalıdırlar. Bu durumda S_f eylemi

$$S_f = - \frac{1}{4\mu_0 c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Pi \quad (5.27)$$

formunda yazılabilir. Böylece en genel eylem şu şekilde yazılır:

$$S = - \sum mc \int ds - \sum q \int A_\nu dx^\nu - \frac{1}{4\mu_0 c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Pi. \quad (5.28)$$

Burada $d\Pi = dV dt = c dt dx dy dz$ 'dir, yani integral uzayın tamamı ve verilen iki an arasındaki zaman boyunca alınır.

Burada artık yüklerin belirli bir alandaki hareketini incelerken olduğu gibi, küçük olduğu varsayılmamaktadır. Bu nedenle A_ν ve $F_{\mu\nu}$ gerçek alanı yani dış alan ile parçacıkların kendileri tarafından üretilen alanın toplamını ifade ederler. Dolayısıyla artık yüklerin konum ve hızlarına bağlıdırlar [37].

5.5. Maxwell Denklemlerin İkinci Çifti

Artık sistemin potansiyelleri koordinatlar olarak işlem gördüğünden eylem ilkesinden alan denklemleri bulunurken potansiyellere göre varyasyon yapılmalıdır [37].

Bu nedenle (5.28) denkleminde ilk terim sıfırdır, böylece

$$\delta S = - \int \frac{1}{c} \left\{ j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{4\mu_0} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right\} d\Pi = 0 \quad (5.29)$$

ifadesi elde edilir. Burada $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ dört akım yoğunluğu vektörüdür. Öte yandan

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \delta(F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu}) = 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}$$

ve

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

denklemleri kullanıldığında,

$$\delta S = - \int \frac{1}{c} \left\{ j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{2\mu_0} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu - \frac{1}{2\mu_0} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right\} d\Pi = 0 \quad (5.30)$$

bulunur ve integralin ikinci ifadesinde μ ve ν indisleri değiş-tokuş yapıldığında,

$$\delta S = - \int \frac{1}{c} \left\{ j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right\} d\Pi = 0 \quad (5.31)$$

sonucuna ulaşılır. Denklemi daha açık bir hale getirmek için aşağıdaki ifade ele alınsın,

$$\begin{aligned} \int \nabla \cdot (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) d\Pi &= \int \left(\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \delta A_\mu + F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right) d\Pi \\ &= \int \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \delta A_\mu d\Pi + \int F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu d\Pi. \end{aligned}$$

Bu ifadelerde Gauss teoremi kullanılarak, (5.30) numaralı denklemde yerine yazıldığına, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left\{ j^\mu + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right\} \delta A_\mu d\Pi - \frac{1}{\mu_0 c} \int F^{\mu\nu} \delta A_\mu dS = 0. \quad (5.32)$$

Sabit uç varyasyonu yapıldığında, sınırdaki potansiyel değişimleri sıfır olacağından ikinci terim ihmal edilir. Böylece,

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left\{ j^\mu + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right\} \delta A_\mu d\Pi = 0 \quad (5.33)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğin, keyfi δA_μ değişimleri için her durumda sağlanması gerektiğinden, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\mu_0 j^\mu. \quad (5.34)$$

Bu tensörel ifadenin sırasıyla $\mu = 0$ ve $\mu = 1, 2, 3$ için vektörel biçimi alındığında, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \quad (5.36)$$

Bu denklemler, Maxwell denklemlerinin ikinci çiftini oluşturur [37]. Denklem (5.35) ve (5.36)'da verilen ϵ_0 ve μ_0 , sırasıyla boşluğun elektriksel ve manyetik geçirgenliğini temsil etmektedir. Bu ifadelerin integral formlarını da elde etmek mümkündür. Bunun için denklem (5.35) hacim elemanı üzerinden integrali alınarak Gauss teoremi uygulanırsa,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \quad (5.37)$$

sonucu elde edilir. Böylece, kapalı bir yüzey boyunca elektrik alan şiddetinin akısı, yüzey tarafından sınırlanan hacim içerisindeki toplam yüke eşittir. Bu denklem Gauss Yasası olarak bilinir.

Eşitlik (5.36)'ün yüzey integrali alındığında ve Stokes teoremi kullanıldığında ise

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \int \mathbf{j} dS = \int \left(\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dS \quad (5.38)$$

ifadesi elde edilir. Böylece, manyetik alanın herhangi bir kapalı yol etrafındaki dolaşımının bir kapalı yol tarafından sınırlanan bir yüzeyden geçen gerçek ve yerdeğiştirme akımlarının toplamına eşit olduğu görülür.

Potansiyeller cinsinden (5.12) ve (5.13) denklemlerinde tanımlanan $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ ifadelerinin elde edilen son iki denklemde kullanılması suretiyle, Maxwell denklemlerinin potansiyeller cinsinden ifadesine ulaşılabilir. Örneğin (5.35) denkleminde kullanıldığında,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.39)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.36) denkleminde potansiyel ifadeleri yerine yazıldığında,

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (5.40)$$

sonucuna ulaşılır. Bu son iki denklem, (5.35) ve (5.36) de verilen Maxwell denklemlerine denktir.

Potansiyel ifadelerinden çıkarılabilecek bir diğer önemli sonuç onların ne ölçüde

tek olarak belirlenebileceğidir. Örneğin (5.12) ve (5.13) denklemlerinde,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f, \quad \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5.41)$$

dönüşümleri altında alanların değişmeyeceği açıktır. Dolayısıyla potansiyellerde yapılan bu dönüşüm, alanları etkilemez. Bu nedenle potansiyeller tek bir şekilde belirlenemezler. Vektör potansiyel keyfi bir fonksiyonun gradyanı kadar, skaler potansiyel ise aynı fonksiyonun zamana göre birinci dereceden türevi kadar keyfidir. Bu değişmezliğe, *ayar değişmezliği* adı verilir. Bu keyfilik (5.39) ve (5.40) denklemlerini basitleştirmek için kullanılabilir. Bunlardan biri Coulomb ayarıdır ve

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.42)$$

koşulu sağlamaktadır. Bu koşul altında (5.39) denklemi,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ifadesine indirgenir. Bir diğer önemli ayar seçimi,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.43)$$

şeklinde ve Lorenz ayarı olarak adlandırılır. Lorenz koşulunun en önemli özelliği, bir referans sisteminde sağlayan potansiyellerin diğer referans sistemlerinde de sağlıyor olmasıdır, yani görelilik olarak değişmez bir karaktere sahiptir [37].

5.6. Manyetik Monopol İçeren Maxwell Denklemleri

Önceki bölümde türetilmiş olan Maxwell denklemleri manyetik tek kutuplar yani izole manyetik yükleri içermemektedir. Manyetik tek kutupların varlığı uzun yıllar teorik tartışmaların konusu olmuş, ancak henüz doğrudan gözlemlenmemiştir [38–41]. Ancak, manyetik monopollerin varlığına yönelik deneysel araştırmalar, özellikle CERN'deki ATLAS ve MOEDAL deneyleri tarafından yürütülen güncel çalışmalarla aktif olarak devam etmekte ve bu parçacıkların kütesine ve yüküne dair sınırlar giderek daraltılmaktadır [42–44]. Manyetik tek kutupların varlığında, Maxwell denklemleri daha simetrik bir biçimde yeniden yazılabilir, elektrik ve manyetik alanlar arasında doğal bir dualite sağlanabilirdi.

Manyetik tek kutupları içeren genelleştirilmiş Maxwell denklemleri doğal birim

sisteminde aşağıdaki gibi verilir:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e, \quad (5.44a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.44b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m, \quad (5.44c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.44d)$$

Burada ρ_e ve $\mathbf{j}_e$, sırasıyla elektrik yük yoğunluğu ve elektrik akım yoğunluğu vektörünü temsil ederken, benzer şekilde ρ_m ve $\mathbf{j}_m$, sırasıyla manyetik yük yoğunluğu ve manyetik akım yoğunluğu vektörünü göstermektedir. Bu denklemlerin simetrisinden hareketle, elektrik alan ve manyetik alan potansiyeller cinsinden, ϕ_e ve ϕ_m skaler potansiyeller $\mathbf{A}_e$, $\mathbf{A}_m$ vektör potansiyeller olmak üzere,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \nabla \phi_e - \nabla \times \mathbf{A}_m \quad (5.45)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} - \nabla \phi_m + \nabla \times \mathbf{A}_e \quad (5.46)$$

formunda ifade edilir. Diğer yandan elektrik ve manyetik potansiyeller içinde Lorenz ayar seçimine benzer ayar seçimi yapılabilir. Böylece elektrik potansiyeller için Lorenz ayarı,

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}_e = 0 \quad (5.47)$$

iken manyetik potansiyeller için Lorenz ayarı

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}_m = 0 \quad (5.48)$$

ifadesiyle verilir.

6. MAXWELL DENKLEMLERİNİN MACFARLANE KUATERNİON-LARIYLA YENİDEN FORMÜLASYONU

Bu bölümde, önceki bölümde hem tensörel ifadesi hemde vektör notasyonu ile ifade edilen Maxwell denklemlerinin Macfarlane kuaternionları kullanılarak yeniden formülasyonu yapılacaktır.

Dört boyutlu diferansiyel operatörü Macfarlane kuaternion terimleriyle şu şekilde tanımlanabilir

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e}_0 + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla. \quad (6.1)$$

Burada $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_3$ (4.3)' te verilen Macfarlane kuaternionların taban elemanlarıdır. Diferansiyel operatörün kuaternionik eşleniği, (4.7)'da olduğu gibi

$$\mathbf{D}^* = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e}_0 - \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_2 - \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \quad (6.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Önceki bölümde elde edilen Maxwell denklemlerinin, Macfarlane kuaternion terimiyle elde etmek için $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$ olduğu varsayılınsın. O halde Maxwell denklemleri,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (6.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.3b)$$

formunu alır. Burada, $\mathbf{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$ ve $\mathbf{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$ sırasıyla elektrik alan ve manyetik alanın bileşenleri göstermektedir, aynı zamanda $\hat{x}, \hat{y}$ ve $\hat{z}$ üç boyutlu kartezyen uzayın birim vektörleridir. Yük yoğunluğu ρ ile ifade edilirken, akım yoğunluğu vektörü $\mathbf{j} = j_x\hat{x} + j_y\hat{y} + j_z\hat{z}$ şeklinde ifade edilir.

Öte yandan, ϕ skaler ve $\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ vektör potansiyellerini birlikte ifade edilmesine olanak tanıyan Macfarlane kuaternionik potansiyel şu şekilde oluşturulabilir :

$$\mathbf{A} = \phi\mathbf{e}_0 + A_x\mathbf{e}_1 + A_y\mathbf{e}_2 + A_z\mathbf{e}_3 = \phi + \mathbf{A}. \quad (6.4)$$

Denklem (4.23) yardımıyla Macfarlane kuaternionik potansiyeli $\mathbf{A}$ matris formunda

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi, & A_x, & A_y, & A_z \end{bmatrix}^T \quad (6.5)$$

ile gösterilir. Dört boyutlu Macfarlane kuaternionik diferansiyel operatör potansiyel $\mathbf{A}$ üzerine uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{DA} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right] [\phi + \mathbf{A}] \\ &= \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi + i \nabla \times \mathbf{A} \right]\end{aligned}\quad (6.6)$$

sonucu elde edilir. Burada elde edilen eşitliğin skaler kısmı (5.43)'de verilen Lorenz ayarıdır. Vektörel kısım için (5.12) ve (5.13) denklemleri göz önüne alındığında, çarpım şu şekilde yazılabilir

$$\mathbf{DA} = \mathbf{F}. \quad (6.7)$$

Burada $\mathbf{F}$, Macfarlane kuaternionudur ve açık hali şu şekilde verilir

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\mathbf{E} + i\mathbf{B} = (-E_x + iB_x)\mathbf{e}_1 + (-E_y + iB_y)\mathbf{e}_2 + (-E_z + iB_z)\mathbf{e}_3 \\ &= F_x\mathbf{e}_1 + F_y\mathbf{e}_2 + F_z\mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Operatörlerin 4×4 matris temsillerinden yararlanılarak (6.7) denkleminin matris formu oluşturulabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}{}^+\mathbf{DA} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \nabla^T \\ \nabla & \frac{\partial}{\partial t} I_3 + i\tilde{\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & -i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} & -i\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & -i\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E_x + iB_x \\ -E_y + iB_y \\ -E_z + iB_z \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6.9)$$

matris elemanları (5.12), (5.13) ve (5.43) denklemlerinin

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) &= -E_x + iB_x, \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) &= -E_y + iB_y, \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} + i \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) &= -E_z + iB_z\end{aligned}$$

ile verilen açık ifadelerinin elde edilmesini sağlar.

Diğer yandan, eşlenik diferansiyel operatör $\mathbf{D}^*$, $\mathbf{F}$ üzerine uygulandığında

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^*\mathbf{F} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \right] [-\mathbf{E} + i\mathbf{B}] \\ &= \left[\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right] + i \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{B} \right]\end{aligned}\quad (6.10)$$

elde edilir. Burada imajiner kısmın vektörel ifadesi Maxwell denklemlerinin Faraday yasasına karşılık gelirken, skaler ifadesi manyetik tek kutbun var olmadığı anlamına gelen Maxwell denkleminin karşılık gelmektedir. Böylece çarpım

$$\mathbf{D}^*\mathbf{F} = \mathbf{J} \quad (6.11)$$

formunda yazıldığında Maxwell denklemleri şeffaf ve kompakt formu elde edilmiş olur. Burada $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{J} = \rho + j_x \mathbf{e}_1 + j_y \mathbf{e}_2 + j_z \mathbf{e}_3 = \rho + \mathbf{j} \quad (6.12)$$

formunda olup, Macfarlane kuaternionik akım yoğunluğudur. Öte yandan (4.24) denkleminde verilen Macfarlane kuaternionların matris çarpımlarından yararlanarak (6.11) denkleminin açık formunu da elde etmek mümkündür. Böylece (6.11) denkleminin 4×4 matris formu

$$\overset{+*}{\mathbf{D}} \mathbf{F} = \mathbf{J} \quad (6.13)$$

şeklinde olup matris çarpımı aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & i\frac{\partial}{\partial z} & -i\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} & i\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -E_x + iB_x \\ -E_y + iB_y \\ -E_z + iB_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - i \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ -\frac{\partial E_x}{\partial t} + i\frac{\partial B_x}{\partial t} + i \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \\ -\frac{\partial E_y}{\partial t} + i\frac{\partial B_y}{\partial t} + i \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{\partial E_z}{\partial t} + i\frac{\partial B_z}{\partial t} + i \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Sonuç olarak, (6.14) ifadesinde verilen matrisin elemanları, (6.3) numaralı denklem-

lerin aşağıda açıkça yazılmış biçimlerine karşılık gelmektedir:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - i \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = \rho, \quad (6.15)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial t} + i \frac{\partial B_x}{\partial t} + i \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = j_x, \quad (6.16)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial t} + i \frac{\partial B_y}{\partial t} + i \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = j_y, \quad (6.17)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial t} + i \frac{\partial B_z}{\partial t} + i \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = j_z. \quad (6.18)$$

Böylece, önceki bölümlerde tensörel ve vektörel biçimlerde ifade edilen Maxwell denklemlerinin, Macfarlane kuaternionları kullanılarak estetik ve tekil bir formda ifade edilebileceği gösterilmiştir.

6.1. Dalga Denklemlerinin Macfarlane Kuaternionlarına Yeniden Formülasyonu

Ayrıca Macfarlane kuaternionları kullanılarak potansiyeller ve alanlar için dalga denklemlerine de kompakt bir form kazandırılabilir. Bunun için (6.7) denkleminde eşlenik diferansiyel operatör $\mathbf{D}$ uygulandığında ve denklem (6.11) sonucu kullanıldığında,

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (6.19)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $\square$, d'Alembertian operatörü olup

$$\square = \mathbf{D}^* \mathbf{D} = \mathbf{D} \mathbf{D}^* = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \quad (6.20)$$

formundadır. Böylece (6.19) denklemin açık ifadesi

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] [\phi + \mathbf{A}] = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi \right] + \left[\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} \right] = \rho + \mathbf{j}$$

şeklinde verilir. Bu durumda skaler potansiyel için dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \rho \quad (6.21)$$

şeklinde olup, vektör potansiyel için dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{j} \quad (6.22)$$

formundadır.

Diğer yandan, (6.11) denkleminde diferansiyel operatör uygulandığında,

$$\square \mathbf{F} = \mathbf{D}\mathbf{J} \quad (6.23)$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitliğin sol tarafı

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] [-\mathbf{E} + i\mathbf{B}] = - \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} \right] + i \left[\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} \right]$$

formunda olup, sağ tarafı

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right] [\rho + \mathbf{j}] = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \rho + i \nabla \times \mathbf{j} \right]$$

şeklinde verilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki ilk parantez, (5.25) numaralı denklemde verilen süreklilik denkleminde karşılık gelmektedir. Sonuç olarak, yukarıdaki eşitliklerin taraf tarafa karşılaştırılmasıyla elde edilen elektrik ve manyetik alanlar için dalga denklemleri,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \nabla \rho, \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{j}, \quad (6.25)$$

biçiminde ifade edilir:

6.2. Manyetik Tek Kutup İçeren Maxwell Denklemlerinin Macfarlane Kuaternionlarıyla Yeniden Formülasyonu

Uygun genelleştirilmiş Macfarlane kuaternionik operatörler tanımlanarak manyetik tek kutup içeren Maxwell denklemleri şık ve şeffaf bir biçimde yeniden formüle edilebilir.

Genelleştirilmiş Macfarlane kuaternionik potansiyel $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_e + i\mathbf{A}_m = (\phi_e - \mathbf{A}_e) + i(\phi_m - \mathbf{A}_m) \quad (6.26)$$

ifadesiyle verilebilir. Burada $\mathbf{A}_e$ ve $\mathbf{A}_m$, sırasıyla elektrik yükü ve manyetik yük için kuaternionik potansiyelleri temsil etmektedir. Böylece, genelleştirilmiş potansiyel $\mathbf{A}$, bu iki kuaternionik potansiyelin kompleks bir kombinasyonunu oluşturur.

Denklem (6.2)'de verilen diferansiyel operatörün eşleniği $\mathbf{D}^*$, genelleştirilmiş

potansiyel $\mathbf{A}$ üzerine uygulandığında,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^*\mathbf{A} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \right] [\mathbf{A}_e + i\mathbf{A}_m] \\ &= \left[\frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}_e + i \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}_m \right) \right] \\ &\quad + \left[-\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \nabla \phi_e - \nabla \times \mathbf{A}_m + i \left(-\frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} - \nabla \phi_m + \nabla \times \mathbf{A}_e \right) \right] \quad (6.27)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Denklemin sağ tarafındaki ilk parantezde yer alan reel kısım, elektrik yükü için Lorenz koşuluna; imajiner kısım ise manyetik yükün varlığından kaynaklanan Lorenz koşuluna karşılık gelmektedir. Denklemler (5.47) ve (5.48) sayesinde bu parantez sıfırlanır. Öte yandan, vektörel kısım için (5.45) ve (5.46) denklemlerinde verilen tanımlar dikkate alındığında, yukarıdaki ifade zarif bir biçimde

$$\mathbf{D}^*\mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (6.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{F}$, genelleştirilmiş Macfarlane kuaternionudur ve açık hali şu şekilde verilir:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B} = (E_x + iB_x)\mathbf{e}_1 + (E_y + iB_y)\mathbf{e}_2 + (E_z + iB_z)\mathbf{e}_3. \quad (6.29)$$

Benzer şekilde, diferansiyel operatör $\mathbf{D}$, genelleştirilmiş alan $\mathbf{F}$ üzerine uygulandığında

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\mathbf{F} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right] [\mathbf{E} + i\mathbf{B}] \\ &= \left[\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right] + i \left[\nabla \cdot \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \quad (6.30)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda, Macfarlane kuaternionlarıyla tanımlanan genelleştirilmiş elektromanyetik akım yoğunluğu şu şekilde ifade edilirse:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + i\mathbf{J}_m = (\rho_e - \mathbf{j}_e) + i(\rho_m - \mathbf{j}_m) \quad (6.31)$$

denklem (6.30)'deki ifade, aşağıdaki kompakt formda yazılabilir:

$$\mathbf{D}\mathbf{F} = \mathbf{J}. \quad (6.32)$$

Bu denklemin sol ve sağ taraflarındaki reel ve imajiner bileşenler karşılaştırıldığında, (5.44) ile verilen manyetik tek kutuplu Maxwell denklemleri, kompakt ve estetik bir biçimde elde edilmiş olur.

7. LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ VE MACFARLANE KUATERNİONLARI

Pauli cebirinin doğası gereği özel görelelik teorisine uygulanması kaçınılmazdır. Baylis ve Jones, Pauli cebirini dış elektromanyetik alanlar içindeki yüklü parçacıkların görelî dinamiklerini araştırmak için kullanmış ve özel görelî fenomenler için basitleştirilmiş bir cebirsel çerçeve sunmuşlardır [45]. Daha sonra, Dirac cebirine kıyasla basitliğine rağmen Pauli cebirinin özel görelî fenomenleri formüle etmede eşdeğer etkinlik sunduğunu göstermiş, Lorentz dönüşümleri için düzeltme açısının sıfır olduğunu ortaya koymuş ve belirli dönüşüm kombinasyonları için yeni sonuçlar türetmişlerdir [46]. Pauli cebri kullanılarak uygun dönüşümler türetimi ve görelî çerçevede manyetik monopol içeren Maxwell denklemlerin formülasyonu Baylis ve Jones tarafından gerçekleştirilmiştir [47].

Macfarlane kuaternionları yardımıyla Lorentz dönüşümlerini elde etmek için bikuaternionların kullanımına benzer bir yol izlenebilir [32, 48, 49]. $K(t, x, y, z)$ eylemsiz referans sistemi ve bu eylemsiz referans sistemine göre sabit $\mathbf{v}$ hızıyla x -ekseni yönünde hareket eden $K'(t', x', y', z')$ referans sistemi düşünölsün. $\mathbf{q}$ birim Macfarlane kuaternionu olmak üzere

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{q}\mathbf{r}\mathbf{q} \quad (7.1)$$

dönüşümü, (4.8) denkleminde tanımlanan iç çarpımı korur:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle &= S(\mathbf{x}'\mathbf{y}'^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}'\mathbf{y}'^* + \mathbf{y}'\mathbf{x}'^*) \\ &= \frac{1}{2}[(\mathbf{q}\mathbf{x}\mathbf{q})(\mathbf{q}^*\mathbf{y}^*\mathbf{q}^*) + (\mathbf{q}\mathbf{y}\mathbf{q})(\mathbf{q}^*\mathbf{x}^*\mathbf{q}^*)] \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{q}\mathbf{x}\mathbf{y}^*\mathbf{q}^* + \mathbf{q}\mathbf{y}\mathbf{x}^*\mathbf{q}^*] \\ &= \mathbf{q}[\frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{y}^* + \mathbf{y}\mathbf{x}^*)]\mathbf{q}^* \\ &= \mathbf{q} S(\mathbf{x}\mathbf{y}^*) \mathbf{q}^* = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle . \end{aligned}$$

Bir uzayzaman noktası (ct, x, y, z) , Macfarlane kuaternion formalizmi çerçevesinde şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{r} = ct + \mathbf{r}. \quad (7.2)$$

Burada da önceki bölüme uygun olarak $c = 1$ olduğu varsayölsün. Alternatif olarak,

(4.15) denkleminde Macfarlane kuaternionunun kutupsal formu şu şekilde temsil edilebilir:

$$\mathbf{r} = \sqrt{N_r}(\cosh \varphi + \hat{\mathbf{r}} \sinh \varphi). \quad (7.3)$$

Dolayısıyla, bu iki kuaternion temsili aşağıdaki ilişkileri ima eder:

$$\cosh \varphi = \frac{t}{\sqrt{N_r}}, \quad \sinh \varphi = \frac{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{N_r}}, \quad N_r = t^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}. \quad (7.4)$$

Buna uygun olarak, birim kuaternion $\mathbf{q}$ 'nin kutupsal formu şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{q} = \cosh(\theta/2) + \hat{\mathbf{q}} \sinh(\theta/2) = q_0 + \mathbf{q}. \quad (7.5)$$

Burada $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{x}$ -ekseni yönündeki birim uzaysal vektör ve θ dönüşüm parametresidir.

Böylece dönüşüm

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\mathbf{q} = & \sqrt{N_r}[\cosh \varphi \cosh(\theta/2) + \hat{\mathbf{q}} \cosh \varphi \cosh(\theta/2) + \hat{\mathbf{r}} \sinh \varphi \cosh(\theta/2) \\ & + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \sinh \varphi \sinh(\theta/2) + i(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{q}}) \sinh \varphi \sinh(\theta/2)] \end{aligned} \quad (7.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\mathbf{r}\mathbf{q} = & \sqrt{N_r}[\cosh \varphi \cosh^2(\theta/2) + \hat{\mathbf{q}} \cosh \varphi \cosh(\theta/2) \sinh(\theta/2) \\ & + \hat{\mathbf{r}} \sinh \varphi \cosh^2(\theta/2) + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \sinh \varphi \cosh(\theta/2) \sinh(\theta/2) \\ & + i(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{q}}) \sinh \varphi \sinh(\theta/2) \cosh(\theta/2) \\ & + \hat{\mathbf{q}} \cosh \varphi \sinh(\theta/2) \cosh(\theta/2) + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \cosh \varphi \sinh^2(\theta/2) \\ & + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \sinh \varphi \sinh(\theta/2) \cosh(\theta/2) \\ & + i(\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{r}}) \sinh \varphi \cosh(\theta/2) \sinh(\theta/2) \\ & + \hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \sinh \varphi \sinh^2(\theta/2) \\ & - \hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{q}}) \sinh \varphi \sinh^2(\theta/2)] \end{aligned} \quad (7.7)$$

ifadesine ulaşılır. Trigonometrik ve vektör özdeşlikleri kullanarak eşitlik tekrar düzenlendiğinde şu formu alır:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' = \mathbf{q}\mathbf{r}\mathbf{q} = & [t \cosh \theta + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \sinh \theta] \\ & + [\hat{\mathbf{q}} t \sinh \theta + \hat{\mathbf{r}} \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} (\cosh \theta - 1)]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Skaler ve vektör kısımlar taraf tarafa eşlendiğinde

$$t' = t \cosh \theta + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \sinh \theta, \quad (7.9)$$

$$\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{q}} t \sinh \theta + \hat{\mathbf{r}} \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \hat{\mathbf{q}} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} (\cosh \theta - 1) \quad (7.10)$$

ifadelerine ulaşılır. Standart formülasyona uygun olacak şekilde

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}, \quad \cosh \theta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (7.11)$$

tanımları yapıldığında, dönüşüm şu formu alır:

$$t' = \gamma(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}), \quad (7.12a)$$

$$x' = \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \quad (7.12b)$$

$$y' = y, \quad (7.12c)$$

$$z' = z. \quad (7.12d)$$

Dönüşümler, $\mathbf{v}$ yönü boyunca, özellikle de x -ekseni boyunca standart Lorentz dönüşümlerini temsil eder. Ters Lorentz dönüşümlerini türetmek için hız, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ alınarak elde edilir:

$$t = \gamma(t' + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{v}), \quad (7.13a)$$

$$x = \gamma(\mathbf{x}' + \mathbf{v}t'), \quad (7.13b)$$

$$y = y', \quad (7.13c)$$

$$z = z'. \quad (7.13d)$$

Klasik elektromanyetizmanın görelî formülasyonunu sunmadan önce, Lorentz dönüşümleri altında operatörlerin ve alanların dönüşüm özelliklerini göstermek önemlidir. Denklem (6.1)'de tanımlandığı gibi dört boyutlu diferansiyel operatör $\mathbf{D}$ aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\mathbf{D} = D^\mu \mathbf{e}_\mu. \quad (7.14)$$

Burada,

$$D^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (7.15)$$

ile ifade edilir. D^μ bileşenleri (7.12) denkleminde verilen koordinant dönüşümlerine

benzer şekilde dönüşür. Dönüşüm altında bileşenler şu şekilde hesaplanabilir:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}. \quad (7.16)$$

Sonuç olarak, $\mathbf{D}$ diferansiyel operatörü Lorentz dönüşümleri altında

$$\mathbf{D}' = \frac{\partial}{\partial t'} + \nabla' = \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{e}_0 + \frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{e}_3 = D'^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \quad (7.17)$$

formunu alır. Burada $\frac{\partial}{\partial t'}$, $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$ ve $\frac{\partial}{\partial z'}$ bileşenleri

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (7.18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (7.18b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (7.18c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (7.18d)$$

ifadeleriyle verilir.

Öte yandan (6.4) denkleminde verilen kuaternionik potansiyel Lorentz dönüşümleri altında, koordinant dönüşümlerine benzer bir hal alır:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{q} \mathbf{A} \mathbf{q} = (q_0 + \mathbf{q}) \mathbf{A} (q_0 + \mathbf{q}) \quad (7.19)$$

ve aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= (q_0 + \mathbf{q})(q_0 \phi + \mathbf{q} \phi + q_0 \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} + i \mathbf{A} \times \mathbf{q}) \\ &= (q_0^2 \phi + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \phi + 2q_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}) \\ &\quad + (q_0^2 \mathbf{A} + 2q_0 \phi \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{q} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{q})). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Denklem (7.5)'de verilen ifadeler yukarıda yerine konulduğunda,

$$\phi' = \phi \cosh \theta + \hat{\mathbf{q}} \sinh \theta \mathbf{A}, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \hat{\mathbf{q}} \sinh \theta \phi + \hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A})(\cosh \theta - 1) \quad (7.22)$$

ifadelerine ulaşılır. Sonuç olarak bileşenlerin son hali

$$\phi' = \gamma(\phi - vA_x), \quad (7.23a)$$

$$A'_x = \gamma(A_x - v\phi), \quad (7.23b)$$

$$A'_y = A_y, \quad (7.23c)$$

$$A'_z = A_z \quad (7.23d)$$

formunu alır. Diferansiyel operatör $\mathbf{D}'$, kuaternionik potansiyel $\mathbf{A}'$ üzerine uygulandığında

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'\mathbf{A}' &= \left[\frac{\partial}{\partial t'} + \nabla' \right] [\phi' + \mathbf{A}'], \\ &= \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \mathbf{A}' \right] + \left[\nabla' \phi' + \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t'} + i \nabla' \times \mathbf{A}' \right], \end{aligned} \quad (7.24)$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin skaler kısmının (7.18) ve (7.23) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \mathbf{A}' &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \gamma(\phi - vA_x) + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma(A_x - v\phi) \\ &\quad + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \gamma^2 \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - v^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} - v \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} - v^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + v \frac{\partial A_x}{\partial t} - v \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \\ &= \gamma^2 (1 - v^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

sağladığı gösterilebilir. Açıkça burada Lorenz ayar değişmezinin sıradan bir ayar değişmezi olmadığı, Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalan bir ayar olduğu gösterilmiştir. Böylece (7.24) denklemi

$$\mathbf{D}'\mathbf{A}' = \mathbf{F}' \quad (7.26)$$

biçiminde kompakt formda ifade edilebilir. Burada $\mathbf{F}'$,

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{E}' + i\mathbf{B}' \quad (7.27)$$

olup, potansiyel terimleri cinsinden açık ifadeleri

$$\mathbf{E}' = -\nabla' \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t'}, \quad (7.28)$$

$$\mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}' \quad (7.29)$$

ile verilir. Elektrik $\mathbf{E}$ ve manyetik alanların $\mathbf{B}$ Lorentz dönüşümleri altında nasıl dönüştüklerini ortaya koymak için $\mathbf{F}$ 'nin dönüşümler altında nasıl davrandığı incelenmelidir. Bunun için

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}' = \mathbf{q}^* \mathbf{F} \mathbf{q} \quad (7.30)$$

dönüşümünün iç çarpımı koruduğu test edilmelidir. Dönüşümün açık hali şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= (q_0 - \mathbf{q})(-\mathbf{E} + i\mathbf{B})(q_0 + \mathbf{q}) \\ &= (q_0 - \mathbf{q})(-q_0\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{q} - i\mathbf{E} \times \mathbf{q} + iq_0\mathbf{B} + i\mathbf{B} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{B} \times \mathbf{q}) \\ &= -\left[(q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{E} + 2q_0\mathbf{B} \times \mathbf{q} - 2\mathbf{q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{q})\right] \\ &\quad + i\left[(q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{B} - 2q_0\mathbf{E} \times \mathbf{q} - 2\mathbf{q} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{q})\right]. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Denklem (7.5)'de verilen ifadeler yukarıdaki denklemde yerine konulduğunda

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cosh \theta + \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{q}} \sinh \theta - \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{q}})(\cosh \theta - 1)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cosh \theta - \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{q}} \sinh \theta - \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{q}})(\cosh \theta - 1)$$

ifadelerine ulaşılır. Burada (7.11) denkleminde verilen tanımlar kullanıldığında, Lorentz dönüşümleri altında $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ dönüşümleri şu şekilde elde edilir

$$\mathbf{E}' = \gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \right) + \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{v^2}, \quad (7.32)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma \left(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} - \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \right) + \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{v^2}. \quad (7.33)$$

Karşılık gelen bileşen alanlarının Lorentz dönüşümleri dikkate alındığında, bu dönüşümler şu şekilde ifade edilir:

$$E'_x = E_x \quad B'_x = B_x \quad (7.34a)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \quad B'_y = \gamma(B_y + vE_z) \quad (7.34b)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \quad B'_z = \gamma(B_z - vE_y). \quad (7.34c)$$

Öte yandan, diferansiyel operatörün eşleniği $\mathbf{D}'^*$ ile genelleştirilmiş alan $\mathbf{F}'$ üzerine uygulandığında

$$\begin{aligned}\mathbf{D}'^*\mathbf{F}' &= \left[\frac{\partial}{\partial t'} - \nabla' \right] [-\mathbf{E}' + i\mathbf{B}'] \\ &= \left[\nabla' \cdot \mathbf{E}' + \nabla' \times \mathbf{B}' - \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} \right] + i \left[\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + \nabla' \times \mathbf{E}' \right]\end{aligned}\quad (7.35)$$

ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak, bu çarpım, genelleştirilmiş bir akım vektörü kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{D}'^*\mathbf{F}' = \mathbf{J}'. \quad (7.36)$$

Burada genelleştirilmiş akım vektörü

$$\mathbf{J}' = \rho' + \mathbf{j}' \quad (7.37)$$

formunda olup Lorentz dönüşümleri altında denklem (7.21)'de belirtildiği üzere dönüşür ve böylece akım vektörünün bileşenlerinin şu şekilde elde edildiği kolayca gösterilebilir:

$$\rho' = \gamma(\rho - vj_x), \quad (7.38a)$$

$$j'_x = \gamma(j_x - v\rho), \quad (7.38b)$$

$$j'_y = j_y, \quad (7.38c)$$

$$j'_z = j_z. \quad (7.38d)$$

8. AKIŞKANLAR MEKANİĞİNİN TEMEL DENKLEMLERİ

Evrende gördüğümüz birçok olayı açıklamak için akışkanlar mekaniğine başvurulur. Akışkanlar mekaniğinde ele alınan nicelikler makroskobik olduğundan, bir akışkan sürekli bir ortam olarak kabul edilebilir. Bu, akışkanın içerisindeki herhangi bir küçük hacim elemanının her zaman çok sayıda molekül içerdiği anlamına gelir. Buna bağlı olarak sonsuz küçük hacim elemanlarından bahsedildiğinde, her zaman fiziksel olarak sonsuz küçük yani üzerinde çalışılan hacim ile karşılaştırıldığında çok küçük ancak moleküller arası mesafelerle karşılaştırıldığında büyük hacim elemanları olduğu kastedilir. Bu küçük hacme, akışkan parseli adı verilir.

Hareket eden akışkanın durumunun matematiksel tanımı, akışkanın hızı $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ ve akışkana ait termodinamik niceliklerin, örneğin basınç ve yoğunluk dağılımını veren fonksiyon yardımıyla yapılabilir.

Akışkanın durumunun matematiksel tanımı iki farklı şekilde açıklanabilir. Bir akışkanı Lagrange bakış açısıyla ele almak için akışkanla birlikte hareket etmek ve hareketli parsellerde akışkan özelliklerini belirlemek gerekir. Lagrange analizi, belirli kavramsal ve matematiksel avantajlara sahiptir ancak doğrudan deneyle ilişkili değildir; çünkü akışkandaki ölçümler, genellikle akışkanın bir noktadan geçerken, uzayda sabit bir noktada gerçekleştirilir [50]. Bu sebeple akışkanın özelliklerini sabit bir x noktasında zamanın bir fonksiyonu olarak gözlemlendiği Euler bakış açısını seçmek avantaj sağlayacaktır.

Bu iki bakış açısı arasında ilişki ortaya konulmalıdır. Örneğin, $d\mathbf{v}/dt$ türevi, uzaydaki sabit bir noktadaki akışkanın değişim oranını değil, uzayda hareket eden belirli bir akışkan parçacığının hızındaki değişim oranını ifade eder. Bu türev, sabit noktalara atıfta bulunan nicelikler cinsinden ifade edilmelidir. Bunu yapmak için belirli bir akışkan parçacığının hızındaki $d\mathbf{v}$ değişimin dt süresince iki kısımdan oluştuğu düşünülür: Uzayda sabit bir noktada dt süresince hızındaki değişim, diğeri ise aynı anda, dr kadar bir mesafede bulunan iki noktanın hızları arasındaki değişim. İlk kısım açık zaman bağımlılığından $(\partial\mathbf{v}/\partial t)dt$ şeklinde ifade edilir. Burada $(\partial\mathbf{v}/\partial t)$ türevi x, y, z sabitken yani uzayda sabit bir noktada alınır. İkinci kısım ise

$$dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak bir akışkan parçacığının türevi, sabit noktalar

cinsinden

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (8.1)$$

olarak ifade edilir. Bu ifadedeki

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (8.2)$$

operatörü akışkanlar dinamiğinde maddesel türev (material derivative) olarak adlandırılır. Bu ifade açıkça, akışkanı takip eden bir zaman türevidir ve Lagrange zaman türevini, akışkanın Euler bakış açısı cinsinden ifade eder.

8.1. Süreklilik Denklemi

Klasik elektromanyetizmada olduğu gibi akışkanlar mekaniğinin en temel denklemlerinden biri de belirli bir hacim bölgesinde maddenin korunumunu ifade eden süreklilik denklemidir. Uzayın belirli bir V_0 hacim bölgesinde akışkanın toplam kütlesi $\int \rho dV$ şeklindedir. Burada ρ , akışkanın yoğunluğunu ifade ederken, integral tüm V_0 hacmi üzerinden alınır. Elektromanyetizmada süreklilik denklemi türetilirken verilen açıklamalar tekrar dikkate alındığında, birim zamanda V_0 hacminden dışarı akan sıvının toplam kütlesi

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

kadardır. Diğer yandan, V_0 hacminde birim zamanda akışkanın kütlesindeki azalış

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$$

şeklindedir. Bu iki ifadenin eşitliğinden

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.3)$$

elde edilir. Eşitlikte ki yüzey integrali Gauss teoremi yardımıyla

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

hacim integraline dönüştürülür. Böylece (8.3) denklemi

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

formunu alır. Bu denklem herhangi bir keyfi hacim için sağlanması gerektiğinden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (8.4)$$

süreklilik denklemi elde edilmiş olur. Öte yandan, fizikte bu tür denklemlerle sıkça karşılaşılır, çünkü korunum yasalarının geçerli olduğu her durumda bu denklemler ortaya çıkar. Örneğin elektrodinamikte, (5.25) denklemiyle aynı formdadır. Akışkanlar mekaniği için ρ kütle yoğunluğu ve $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ kütle akım yoğunluğu olarak tanımlanabilir.

Bu ifadeyi, (8.2) yardımıyla maddesel türev cinsinden

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.5)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

8.2. İdeal Akışkan Denklemleri

Akışkanda bir hacim bölgesi göz önüne alındığında bu hacim bölgesine etkiyen toplam kuvvet [51],

$$-\oint p d\mathbf{S}$$

hacmi sınırlayan yüzey üzerinden alınan integrale eşittir. Burada p , hacmin yüzeyine etkiyen basınçtır. Yüzey integrali hacim integraline dönüştürüldüğünde

$$-\oint p d\mathbf{S} = -\int \nabla p dV$$

ifadesi elde edilir. Böylece akışkanın birim hacim bölgesine $-\nabla p$ kadarlık kuvvet etki ettiği söylenebilir. Dolayısıyla akışkanın hacim elemanının hareket denklemi

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p \quad (8.6)$$

şeklindedir. Burada türev, (8.1) denkleminde yararlanılarak sabit noktalar cinsinden yazıldığında

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (8.7)$$

formunu alır. Bu denklem, akışkanlar dinamiğinin en temel denklemlerindedir ve ilk kez 1755 yılında Leonhard Euler tarafından elde edildiğinden Euler denklemi olarak adlandırılır. Akışkan hacmine etkiyen diğer herhangi bir $\mathbf{f}$ kuvvetin varlığında ve

maddesel türev kullanarak Euler denklemi şu şekilde verilir:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}. \quad (8.8)$$

Hareket denklemi ve süreklilik denklemini türetirken, akışkandaki iç sürtünmeleri (viskozite) ve akışkanın farklı kısımlar arasındaki ısı alışverişi sonucunda meydana gelebilecek enerji kaybı süreçlerini dikkate alınmamıştır. Dolayısıyla bu denklemler yalnızca termal iletkenlik ve viskozitenin önemsiz olduğu akışkan hareketleri için geçerlidir. Bu tür akışkanların *ideal* olduğu söylenir. Diğer bir deyişle, (8.7) denkleminin uyan akışkanlar, ideal akışkan olarak adlandırılır [51].

Aynı zamanda Euler denklemi sadece hızı içerecek şekilde de düzenlenebilir. Bunun için, vektör analizinden

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (8.9)$$

formülü hatırlanırsa, (8.7) denklemi

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{2}\nabla v^2 \quad (8.10)$$

halini alır. Denklemin her iki tarafın rotasyoneli alındığında, sadece akışkan hızını içeren aşağıdaki denklem elde edilir :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}). \quad (8.11)$$

Burada

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (8.12)$$

vektörü, vortisite (girdaplık) olarak adlandırılır ve akışkanın uzayda her bir noktada nasıl kıvrıldığını tanımlar. Bu tanım altında denklem (8.11),

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (8.13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu vortisite denklemdir ve akışkanın zamanla girdap çizgilerini nasıl gerildiğini ve büküldüğünü belirtir.

Akışkanın farklı kısımlar arasında (ve tabiki ona bitişik cisimler arasında) ısı alışverişinin olmaması, hareketin akışkan boyunca adyabatik olduğu anlamına gelir. Bu nedenle ideal bir akışkanın hareketinin zorunlu olarak adyabatik olduğu varsayılmalıdır [51]. Adyabatik harekette herhangi bir akışkan parçacığının entropisi

parçacık uzayda hareket ettikçe sabit kalır. Birim kütle başına entropi s olarak ifade edildiğinde adyabatik hareket için;

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{ds}{dt} = 0$$

denklemini geçerlidir. Bu ifadenin açık hali aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s = 0. \quad (8.14)$$

Bu ifade, ideal bir akışkanın adyabatik denklemi olarak bilinir. Böylece (8.4) denklemi kullanılarak entropi için süreklilik denklemi

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (8.15)$$

yazılabilir. Burada $\rho s \mathbf{v}$ çarpımı, entropi akı yoğunluğudur [52].

Eğer entropi başlangıçtaki bir anda sıvının hacmi boyunca sabitse, sıvının daha sonraki herhangi bir hareketi için sabit değerini koruyacaktır. Bu durumda adyabatik denklem basitçe $s = \text{sabit}$ formunu alır. Böyle bir akışın isentropik olduğu söylenir. Akışkanların isentropik olduğu varsayımı altında denklemler daha simetrik bir hal almaktadır. Örneğin, (8.7) denklemini farklı bir formda elde etmek için hareketin isentropik olduğu kullanılabilir. Bunun için

$$dh = Tds + Vdp \quad (8.16)$$

termodinamik ilişkisini veren denklemden yararlanılabilir. Burada h , akışkanın birim kütle başına entalpisi ve T sıcaklıktır. Hareketin isentropik olduğu varsayıldığında

$$dh = Vdp = \frac{1}{\rho} dp \quad (8.17)$$

sonucu elde edilir. Bu eşitlik (8.7)'de kullanıldığında denklem

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla h \quad (8.18)$$

formunu alır.

8.3. Dolanımın Korunumu

Genel olarak

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.19)$$

integraline, kapalı yol etrafındaki hız dolanımı denir [51]. Akışkan içinde bir akışkan kapalı yolu yani akışkan parçacıklarından oluşan bir kapalı yol düşünölsün. Zamanla bu parçacıklar hareket edecek ve kapalı yol onunla birlikte yerdeğıştirecektir. Hız dolaşımının zamanla nasıl değıştiğı merak edildiliyorsa

$$\frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

integrali hesaplanmalıdır. Burada maddesel türev kullanılmaktadır, çünkü hareket eden akışkanın kapalı bir yol etrafında nasıl değıştiğı incelenmektedir. Böylece

$$\frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{l})}{Dt}$$

ifadesi elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} \frac{D(d\mathbf{l})}{Dt} &= d\frac{D\mathbf{l}}{Dt} = d\mathbf{v} \\ \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} &= \oint d(1/2v^2) \end{aligned}$$

eşitliğı de yazılabilir. Ancak toplam diferansiyel kapalı bir yol boyunca sıfırdır. Böylece

$$\frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{l}$$

sonucu çıkar. Euler denkleminde $D\mathbf{v}/Dt = -\nabla h$ yerine yazılıp Stokes teoremi kullanıldığında

$$\oint \nabla \times (D\mathbf{v}/Dt) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (8.20)$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (8.21)$$

ifadesine ulaşılır. Böylece, ideal bir akışkanda kapalı bir akışkan kapalı yolu etrafında hız dolaşımı sabittir. Bu, Kelvin teoremi olarak bilinir. Bu sonuca Euler denklemini kullanarak ulaşıldığından akışkanın isentropik varsayımı içerdiği unutulmamalıdır.

Teorem, isentropik olmayan akışkanlar için geçerli değildir [51]. Bu sonucun bir diğer çıkarımı Stokes teoremini kullanarak

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \text{sabit} \quad (8.22)$$

şeklinde yapılabilir. Bu sezgisel olarak girdapın akışkanla birlikte hareket ettiği anlamına gelir. Böylece akışkanda başlangıçta $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ise tüm hacim boyunca bu korunacaktır. Bu tip akışkalara *potansiyel akış* adı verilir.

8.4. Sıkıştırılmaz Akışkan Denklemleri

Akışkanların aktığı pek çok durumda, yoğunlukların değişmez olduğu yani akışkanın hacmi ve hareketi boyunca sabit olduğu varsayılabilir. Başka bir deyişle, bu gibi durumlarda akışkanın gözle görülür bir sıkışması ya da genişlemesi söz konusu değildir. Bu durum, (8.5) denkleminde uygulandığında

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.23)$$

basit formunu alır. Dolayısıyla yoğunluk, genel bir durumda olduğu gibi bilinmeyen bir fonksiyon olmadığından, sıkıştırılmaz bir akışkan için akışkanlar mekaniği denklem seti sadece hızı içeren denklemler olarak alınabilir. Aynı zamanda sıkıştırılmazlık koşulu altında Euler denklemini de düzenlemek mümkündür. Yoğunluk akış boyunca sabit kabul edildiğinden denklem (8.7),

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla(p/\rho + 1/2v^2) \quad (8.24)$$

şeklinde verilir. Burada $(p/\rho + 1/2v^2)$, *Bernoulli enerji fonksiyonunu* ifade etmektedir.

8.5. Sıkıştırılabilir Akışkan Denklemleri

Akışkanın yoğunluğunun sabit olmadığı, akış boyunca çeşitli parametrelere bağlı olarak değiştiği durumlar olabilir. Bunlardan en yaygını, barotik akışkanlardır. Bir barotropik akışkan, basıncın yoğunluğun bir fonksiyonu olarak verildiği $p(\rho)$ ifadesiyle tanımlanır. Böylece denklemler, çeşitli termodinamik ilişkiler kullanarak daha simetrik bir hale sokulabilir. Bunun için (8.17) denkleminde, $dp = (\partial p / \partial \rho) d\rho$

eşitliği yazılıp, $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ ses hızı tanımı kullanıldığında

$$dh = \frac{a^2}{\rho} d\rho \quad (8.25)$$

elde edilir. Böylece (8.4) denklemi entalpi cinsinden yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.26)$$

formunu alır. Sonuç olarak, (8.18) ile birlikte (8.26) denklemi, sıkıştırılabilir bir ideal akışkanın diğer bir değişle barotik akışkanın denklem takımı oluşturmaktadırlar.



9. AKIŞKANLARIN MAXWELL-TİPİ DENKLEMLERİ

Tarih boyunca belirli fiziksel nicelikler için dinamik modeller ve analogiler kurmak yeni teorilerin geliştirilmesinde önemli olmuştur. William Thomson henüz 17 yaşında yazdığı ilk makalelerinde elektriksel kuvvetin, elektrik yüklü iletkenlerin bulunduğu bir bölgede nasıl dağıldığını anlamak için sonsuz bir katı içerisinde ısının akış dağılımıyla karşılaştırmıştır. Bu durumda eş potansiyel yüzeyler, izotermal yüzeylere karşılık gelirken elektrik yükü ısı kaynağı gibi davranmaktadır.

1846 yılında W.Thomson elektriksel niceliklerle elastik nicelikler arasındaki benzerlikleri de araştırmıştır. Gerilme durumunda olan sıkıştırılamaz bir elastik katının denge denklemlerini incelemiş, elastik yerdeğiştirmeyi temsil eden vektörün elektriksel kuvvet dağılımına benzetilebileceğini göstermiştir. Ancak Thomson'ın çalışmaları o dönemde ilgi çekmemiştir.

Daha sonra Thomson'ın bu çalışmaları, Faraday'ın *Deneyisel Araştırmalar* kitabından haberdar olan Maxwell'in de benzer bir yol izlemesini sağlamıştır. Faraday'ın kuvvet çizgileri fikrinden çok etkilenen Maxwell, bir akışkanın akış çizgilerini, serbest uzayda elektrik alan çizgileri olarak alınabileceğini öngörmüştür [53]. Bu tartışma ve daha fazlası E.T.Whittekar'ın *A History of The Theories of Aether and Electricity* (*Eter ve Elektrik Teorilerinin Tarihi*) kitabında ele alınmıştır.

Bu benzerlikler ışığında akışkanlar mekaniği denklemleri elektromanyetizmadaki Maxwell denklemlerine benzer dört adet doğrusal formda yeniden formüle etme çabası anlaşılır olacaktır. Böyle bir çalışmanın amacı, halihazırda iyi bilenen bir teoremin teorem ve çözüm tekniklerini yeni teoride kullanmaya çalışmaktır. İlk olarak 1960'lı yıllarda belirli akışkan problemleri için Maxwell denklemlerine benzer ifadeler yazılmıştır [54–56]. Daha sonra Marmanis, yüksek Reynolds sayılarında sıkıştırılamaz akışkanlar için Navier-Stokes denklemini, Maxwell denklemleri formunda ifade edilebilecek bir analogi kurmayı başarmıştır [57]. Bu analogiye göre Lamb vektörü, elektrik alana ($\mathbf{E}$) karşılık gelirken vortisite, manyetik alana ($\mathbf{B}$) karşılık gelmektedir. Sıkıştırılabilir akışkanlar için Maxwell denklemlerinin tam formu Kambe tarafından ortaya konmuştur [58]. Bir diğer makalede [59] ise elektrodinamikte kullanılan Lorentz kuvvet yasasını ve Poynting teoremini akışkan dinamiğinde yazmayı başarmışlardır. Daha sonra Thompson ve Moeller elektromanyetizma ve akışkanlar

mekaniği arasındaki bu analojiyi plazma fiziği alanına uygulamışlardır [60]. Bu bölümde hem sıkıştırılabilir hem de sıkıştırılamaz akışkanların Maxwell tipi denklemleri vektörel formda elde edilecektir.

9.1. Sıkıştırılabilir Akışkanların Maxwell-Tipi Denklemleri

Sıkıştırılabilir akışkanlara ilişkin denklemler bir önceki bölümde elde edilmiştir. Öte yandan, (8.18) denkleminde (8.9) özelliği kullanıldığında

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla(h + 1/2v^2) \quad (9.1)$$

elde edilir. Burada,

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (9.2)$$

ifadesi *Lamb vektörü* olarak adlandırılır ve

$$\Omega = h + 1/2v^2 \quad (9.3)$$

ifadesi toplam enerji fonksiyonudur. Bu yeni tanımlar altında (9.1) denklemini

$$\boldsymbol{\zeta} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla\Omega \quad (9.4)$$

formunu alır. Bu denklemin diverjansı alındığında

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2\Omega$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı, Maxwell denklemleri göz önünde bulundurulduğunda akışkan yük yoğunluğu olarak yorumlanır:

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2\Omega. \quad (9.5)$$

Sonuç olarak

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{q} \quad (9.6)$$

eşitliği Lamb vektörünün kaynaklarının, hız gradyanları ve entalpi olduğu anlamına gelmektedir.

Denklem (9.4) rotasyoneli alındığında ve vortisite tanımı kullanıldığında

$$\nabla \times \boldsymbol{\zeta} = -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \quad (9.7)$$

ilişkisi elde edilir. Bu eşitlik, açısal hızın zamanla değişiminin Lamb vektörü olan Coriolis kuvveti tarafından verilen torka eşit olduğu anlamına gelmektedir.

Denklem (8.12)'de verilen vortisite tanımından görüleceği gibi vortisitenin diverjansı sıfırdır:

$$\nabla \cdot \omega = 0. \quad (9.8)$$

Bu, vortisite akısının bir tüp boyunca korunduğunu anlamına gelir. Elektromanyetik teorideki duruma benzer şekilde, bunun bir akışkan mekaniğinde monopol (tek kutup) vortisite kaynağının yokluğu olduğu çıkarımı yapılabilir [61].

Son olarak, Lamb vektörün zamanla nasıl evrildiği ortaya konmalıdır. Bunun için (9.4) denklemin zamana göre birinci mertebeden türevi alındığında

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial h}{\partial t}$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim, (8.26) denklemi kullanılarak yeniden düzenlendiğinde

$$\nabla(a^2 \nabla \cdot v + (v \cdot \nabla)h) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

ve

$$a^2 \nabla(\nabla \cdot v) + \nabla((v \cdot \nabla)h) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

denklemleri elde edilir. Aşağıdaki vektör özdeşliği

$$\nabla(\nabla \cdot v) = \nabla \times (\nabla \times v) + \nabla^2 v \quad (9.9)$$

yerine yazılıp denklem düzenlendiğinde

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - a^2(\nabla \times \omega) = -j \quad (9.10)$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$j = -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 \nabla^2 v + \nabla((v \cdot \nabla)h) \quad (9.11)$$

formunda olup akışkan akım yoğunluğu vektörü olarak adlandırılır.

Sonuç olarak elde edilen akışkan Maxwell denklemleri seti

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{q} \quad (9.12a)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\zeta} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 0 \quad (9.12b)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (9.12c)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} - a^2(\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{j} \quad (9.12d)$$

şeklinde verilir. Diğer bir önemli sonuç için (9.12a) denkleminin zamana göre birinci mertebeden türevini alıp, denklem (9.12d)'nin diverjansı ile karşılaştırıldığında, yükün korunum denkleminde ulaşılır:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (9.13)$$

Sıkıştırılabilir akışkanlar için elde edilen Maxwell denklemleriyle, elektromanyetizmadaki Maxwell denklemleri karşılaştırıldığında, $\boldsymbol{\zeta}$ vektörünün elektromanyetizmadaki $\mathbf{E}$ elektrik alanına karşılık gelirken, vortisite vektörü $\boldsymbol{\omega}$ nın ise $\mathbf{B}$ manyetik alan vektörüne karşılık geldiği sonucu çıkarılabilir. Aynı şekilde elektromanyetizmada alanları ifade ederken kullanılan $\mathbf{A}$ ve ϕ 'nin, vektör ve skaler fonksiyonları Maxwell-tipi akışkanlar mekaniği denklemlerinde sırasıyla $\mathbf{v}$ hız alanı ve Ω enerji fonksiyonuna karşılık geldiği görülür. Elektromanyetizmada olduğu gibi, akışkanlar mekaniğinde Maxwell denklemleri sadece potansiyelleri içerecek biçimde iki denkleme indirgenebilir. Bunun için (9.4) denklemi (9.12d) denkleminde yerine konulduğunda

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \Omega}{\partial t} + a^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{j}$$

ifadesi elde edilir. Özdeşlik (9.9) yukarıdaki eşitlikte kullanıldığında aşağıdaki formda da yazılabilir:

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) = -\frac{1}{a^2} \mathbf{j}. \quad (9.14)$$

Bu denklem, (9.12) denklemlerinin dalga karakterisliğini ortaya koymaktadır. Lamb vektör tanımı (9.12a) denkleminde yerine konulduğunda

$$\nabla^2 \Omega + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{q} \quad (9.15)$$

ifadesine ulaşılır. Aynı zamanda elektromanyetizma için (5.43) denkleminde olduğu

gibi burada da benzer şekilde ayar seçimi yapılabilir. Burada

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (9.16)$$

ayar seçimi sıkıştırılabilir akışkanların Maxwell-tipi denklemleri için Lorenz ayarına karşılık gelmektedir.

9.2. Sıkıştırılamaz Akışkanların Maxwell-Tipi Denklemleri

Sıkıştırılamaz akışkanların Maxwell-tipi denklemleri, sıkıştırılabilir akışkanlar için elde edilen denklemlere benzer yollarla elde edilebilir. Denklem (8.24) düzenlenerek tekrar yazıldığında,

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla(p/\rho + 1/2v^2) \quad (9.17)$$

formunu alır. Bu eşitlikte (9.2) tanımı ve $\Phi = p/\rho + 1/2v^2$, Bernoulli enerji fonksiyonu yerine konulduğunda

$$\boldsymbol{\zeta} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (9.18)$$

sonucu elde edilir. Bu denklemin diverjansı alındığında ve (8.23) koşulu göz önünde bulundurulduğunda

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = -\nabla^2 \Phi$$

ifadesine ulaşılır. Tıpkı sıkıştırılabilir akışkanlarda olduğu gibi bu eşitliğin sağ tarafı da yük yoğunluğu olarak yorumlanabilir:

$$\mathbf{q} = -\nabla^2 \Phi. \quad (9.19)$$

Sonuç olarak,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{q} \quad (9.20)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (9.18) rotasyoneli alındığında ve vortisite tanımı kullanıldığında

$$\nabla \times \boldsymbol{\zeta} = -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \quad (9.21)$$

ifadesine ulaşılır. Burada (9.7) ve (9.8) denklemleri genel ifadeler olduğundan sıkıştırılamaz akışkanlar için de geçerlidir.

Son olarak, (9.2) denkleminin zamana göre birinci mertebeden türevi alındığında

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

elde edilir. (9.7) ve (9.18) denklemlerindeki sonuçlar kullanılırsa bu ifade

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = -(\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{\zeta} - \nabla \Phi) \quad (9.22)$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\zeta} + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) + \boldsymbol{\zeta} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

eşitliği geçerlidir. Burada eşitliğin sol tarafı sıfırdır. Bu sonuç (9.22) denkleminde yerine konulduğunda

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\zeta} - (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \nabla \Phi \quad (9.23)$$

ifadesine ulaşılır. Diğer yandan

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}) - \boldsymbol{\zeta}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\zeta}$$

vektör özdeşliğinde sıkıştırılamazlık koşulu ve (9.20) denklemi kullanıldığında

$$-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{v}q - (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

denklemi elde edilir. Bu sonuç (9.23) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{v}q - 2(\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \nabla \Phi \quad (9.24)$$

ve ardından eşitliğin sağ tarafında ilk terimde vektör özdeşliği kullanılıp Lamb vektörünün açık ifadesi kullanıldığında

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = v^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{v}q - \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \nabla(\Phi + v^2) - 2(\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (9.25)$$

ifadesine ulaşılır. Maxwell denklemleri göz önüne alındığında bu denklem

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = v^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{j} \quad (9.26)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada

$$\mathbf{j} = \mathbf{v}q + \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \nabla(\Phi + v^2) + 2[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot \nabla]\mathbf{v} \quad (9.27)$$

ile verilir ve akım yoğunluğu vektörü olarak adlandırılır [57].

Sonuç olarak elde edilen sıkıştırılamaz akışkanların Maxwell denklemleri takımı

$$\nabla \cdot \zeta = \mathfrak{q} \quad (9.28a)$$

$$\nabla \times \zeta + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad (9.28b)$$

$$\nabla \cdot \omega = 0 \quad (9.28c)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - v^2(\nabla \times \omega) = -\mathfrak{j} \quad (9.28d)$$

ile verilir.



10. AKIŞKAN DENKLEMLERİNİN MACFARLANE KUATERNİON-LARIYLA YENİDEN FORMÜLASYONU

Akışkan denklemlerin özellikle Navier-Stokes denkleminin doğrusal olmayan doğası gereği ve girdaplı akışların varlığı teorisinin kuaternion cebriyle incelenmesini akla getirir. Gibbon [62–64], çalışmalarında üç boyutlu sıkıştırılamaz Euler denklemlerinin vortisite dinamiğini kuaternionik bir temsil ile ifade etmiş ve ideal manyetik-hidrokinamik (MHD) denklemlerine benzer bir yaklaşım geliştirmiştir. Öte yandan, Postnikov ve Stepanova [65], üç boyutlu sıkıştırılamaz Navier-Stokes denkleminin yalnızca kuaternionik operatörler ve değişkenler kullanılarak, kuaternion çarpımı ve eşleniği gibi işlemlerle formüle edilebileceğini göstermiştir.

Bir önceki bölümde bahsedilen analogileri yansıtan özel denklemler, literatürde çeşitli matematiksel formlarda sunulmuştur. Maxwell-tipi akışkan denklemleri, sekiz boyutlu oktonlar [66], hiperbolik [67] ve karmaşılaştırılmış oktonionlar [68] kullanılarak türetilmiştir. Bu çalışmaya paralel ancak sınırlı bir bağlamda, sıkıştırılabilir akışkanlar için Maxwell-tipi denklemleri temsil etmek üzere Hamilton kuaternionlarına dayalı yeni bir model geliştirilmiştir [69]. Benzer şekilde, ideal bir akışkanın temel denklemleri, akışkan potansiyeli için tek bir birinci mertebeden dalga denklemi olarak simetrik bir biçimde yeniden formüle edilmiştir [52]. Ayrıca, sedeon formalizmi ses dalgalarının yayılımını ele almak için kullanılmış ve uygulaması viskoz akışkanları da içerecek şekilde genişletilmiştir. Diğer bir çalışmada [70], uzay-zaman cebiri kullanılarak sıkıştırılabilir akışkanların alternatif bir formülasyonu sunulmuştur. Benzer şekilde, vortisitesiz barotropik, izotermal ve izentropik akışların birleşik bir denklem seti kullanılarak tanımlanabileceği gösterilmiştir [71]. Bu denklemler, hidrokinamik uygulamalarda kullanılmak üzere hem skaler hem de vektör potansiyellerini içeren tek bir sedeonik doğrusal olmayan dalga denklemi olarak sunulmuştur. Buna karşılık, son çalışmalarda [72–74] sıkıştırılamaz akışkanlar için Maxwell-tipi denklemleri geometrik cebir kullanarak daha sade bir biçimde türetilmiştir.

Bu bölümde, bir önceki bölümde vektörel formda elde edilen denklemleri Macfarlane kuaternionları kullanılarak yeniden formüle edilecektir. Aynı zamanda Macfarlane kuaternionlarının 2×2 ve 4×4 matris temsillerinden yararlanılarak denklemlerin açık formu da ifade edilecektir.

10.1. İdeal Akışkan Denklemlerin Yeniden Formülasyonu

Macfarlane kuaternionları cinsinden dört boyutlu diferansiyel operatör

$$\square = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) + \nabla = \frac{1}{a} \frac{D}{Dt} \mathbf{e}_0 + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3 \quad (10.1)$$

ifadesiyle verilebilir. Burada D/Dt operatörü (8.2) denkleminde verilen maddesel türev operatörüdür. Diferansiyel operatörün kuaternionik eşleniği ise şu şekilde verilir:

$$\square^* = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) - \nabla = \frac{1}{a} \frac{D}{Dt} \mathbf{e}_0 - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3. \quad (10.2)$$

Ses hızı a 'nın sabit olduğu yani koordinant ve zamandan bağımsız olduğu varsayılabilir. Öte yandan, skaler h ve vektör $\mathbf{A} = a\mathbf{v}$ terimlerinden oluşan genelleştirilmiş Macfarlane kuaternionik potansiyel

$$\Psi = h + \mathbf{A} = h \mathbf{e}_0 + a(v_x \mathbf{e}_1 + v_y \mathbf{e}_2 + v_z \mathbf{e}_3) \quad (10.3)$$

ifadesiyle verilebilir. Denklem (4.23) yardımıyla akışkan potansiyeli Ψ matris formunda

$$\Psi = \begin{bmatrix} h, & A_x, & A_y, & A_z \end{bmatrix}^T \quad (10.4)$$

ile gösterilir. Diferansiyel operatör $\square$, kuaternionik akışkan potansiyel Ψ üzerine etkidiğinde

$$\begin{aligned} \square \Psi &= \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) + \nabla \right] [h + \mathbf{A}] \\ &= \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) h \right) + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right) + \nabla h + i \nabla \times \mathbf{A} \right] \end{aligned} \quad (10.5)$$

ifadesi yazılabilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki ilk parantez (8.4) denkleminin karşılık gelmektedir. Açıkça $\mathbf{A}$ entalpi akısını gösterirken denklem entalpinin korunum yasasını ifade etmektedir :

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) h + \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{a} \frac{Dh}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (10.6)$$

Benzer şekilde ikinci parantezin reel kısmı denklem (8.18)'da verilen Euler denklemine karşılık gelirken

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) \mathbf{A} + \nabla h = \frac{1}{a} \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \nabla h = 0 \quad (10.7)$$

aşağıda verilen imajiner kısım

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (10.8)$$

ise kapalı bir yol etrafında entalpi akısının sıfır olduğunu ifade etmektedir. Sonuç olarak (10.5) denklemi

$$\square \Psi = 0 \quad (10.9)$$

ile verilen kompakt biçimde ifade edilebilir [52]. Öte yandan (4.24) denkleminde verilen Macfarlane kuaternionların matris çarpımlarından yararlanarak (10.9) denkleminin açık formunu da elde etmek mümkündür:

$${}^+D\Psi = \begin{bmatrix} D_t & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & D_t & -i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & D_t & -i\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & -i\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial x} & D_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

Burada D_t

$$D_t = \frac{1}{a} \frac{D}{Dt} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) \quad (10.11)$$

formundadır. Sonuç olarak matris elemanları, (10.6)-(10.8) denklemlerinin

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) h + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) A_x + \frac{\partial h}{\partial x} + i \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) A_y + \frac{\partial h}{\partial y} + i \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) A_z + \frac{\partial h}{\partial z} + i \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ile verilen açık ifadelerinin elde edilmesine olanak tanır.

10.2. Sıkıştırılabilir Akışkanların Yeniden Formülasyonu

Sıkıştırılabilir akışkanların Maxwell-tipi denklemleri kuaternionik genelleştirilmiş potansiyel ve yeniden tanımlanan diferansiyel operatör yardımıyla elde edilebilir. Denklem (10.1)' de verilen kuaternionik differansiyel operatör doğrusallaştırıldığında aşağıdaki forma indirgenir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3. \quad (10.12)$$

Diferansiyel operatörün kuaternionik eşleniği ise

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3 \quad (10.13)$$

olacaktır. Diğer yandan genelleştirilmiş kuaternionik potansiyel

$$\Psi = \Omega + \mathbf{A} = \Omega \mathbf{e}_0 + a(\mathbf{v}_x \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_y \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}_z \mathbf{e}_3) \quad (10.14)$$

şeklinde ifade edilir. Burada Ω , toplam enerji fonksiyonunu gösterirken vektör $\mathbf{A} = a\mathbf{v}$ formundadır. Diferansiyel operatör $\mathbf{D}$ ' nin Ψ üzerine etkisi

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\Psi = \left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right] [\Omega + \mathbf{A}] &= \left[\frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] \\ &+ \left[\frac{1}{a} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Omega + i \nabla \times \mathbf{A} \right] \end{aligned} \quad (10.15)$$

sonucunu verir. Vortisite ve denklem (9.4)' de verilen Lamb vektör tanımları kullanılarak çarpım daha kompakt formda ifade edilebilir:

$$\mathbf{D}\Psi = \mathbf{F}. \quad (10.16)$$

Burada Macfarlane kuaternion

$$\mathbf{F} = F_0 \mathbf{e}_0 + F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3 \quad (10.17)$$

formunda olup skaler kısım

$$F_0 = \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (10.18)$$

vektörel kısım

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3 &= [-\zeta_x + ia\omega_x] \mathbf{e}_1 \\ &+ [-\zeta_y + ia\omega_y] \mathbf{e}_2 + [-\zeta_z + ia\omega_z] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (10.19)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $\zeta_x, \omega_x, \zeta_y, \omega_y, \zeta_z$ ve ω_z sırasıyla $\boldsymbol{\zeta}$ ve $\boldsymbol{\omega}$ vektörlerinin $x-$, $y-$, ve $z-$ eksenleri doğrultusundaki reel bileşenlerini göstermektedir. Öte yandan denklem (10.18)'da verilen $\mathbf{F}$ kuaternionun skaler kısmı, (9.16) denkleminde türetilen sıkıştırılabilir akışkanlar için Lorenz ayarındır. Böylece

$$F_0 = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Diferansiyel operatör $\mathbf{D}$, akışkan potansiyel Ψ ve genelleştirilmiş akışkan alanı $\mathbf{F}$, baz elemanları Pauli matrisleri ile değiştirilerek (4.19) denkleminde olduğu gibi 2×2 matris formunda da ifade edilebilir. Bu durumda (10.16) denklemi

$$\mathbf{D}\Psi = \mathbf{F} \quad (10.20)$$

ve

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega + av_z & a(v_x - iv_y) \\ a(v_x + iv_y) & \Omega - av_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\zeta_z + ia\omega_z & -\zeta_x + ia\omega_x + a\omega_y + i\zeta_y \\ -\zeta_x + ia\omega_x - a\omega_y - i\zeta_y & \zeta_z - ia\omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.21)$$

ifadesiyle verilir. Burada $\mathbf{D}$, Ψ ve $\mathbf{F}$ kuaternionlarına karşılık gelen matrisler sırasıyla

$$\mathbf{D} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_0 + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_1 + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_2 + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (10.22)$$

$$\Psi = \Omega \sigma_0 + A_x \sigma_1 + A_y \sigma_2 + A_z \sigma_3 = \begin{bmatrix} \Omega + av_z & a(v_x - iv_y) \\ a(v_x + iv_y) & \Omega - av_z \end{bmatrix}, \quad (10.23)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_0 \sigma_0 + F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 = \begin{bmatrix} F_0 + F_3 & F_1 - iF_2 \\ F_1 + iF_2 & F_0 - F_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\zeta_z + ia\omega_z & -\zeta_x + ia\omega_x + a\omega_y + i\zeta_y \\ -\zeta_x + ia\omega_x - a\omega_y - i\zeta_y & \zeta_z - ia\omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.24)$$

şeklinde. Bu matrisler göz önüne alındığında Macfarlane kuaternionların 4×4 matris formlarının daha sade bir anlatım sunduğu çıkarımı yapılabilir.

Öte yandan diferansiyel operatörün kuaternionik eşneliği $\mathbf{D}^*$, kuaternionik alan

$\mathbf{F}$ üzerine etki ettiğinde ise

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* \mathbf{F} = \left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \right] [-\boldsymbol{\zeta} + ia\boldsymbol{\omega}] &= \left[-\frac{1}{a} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + a \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} \right] \\ &+ i \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{\zeta} - a \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \right] \end{aligned} \quad (10.25)$$

sonucuna ulaşılır. Bu aşamada, Macfarlane kuaternionik genelleştirilmiş akışkan kaynak yoğunluğu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} + \frac{1}{a} \mathbf{j}. \quad (10.26)$$

Burada $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{j}$ sırasıyla (9.5) ve (9.11) denklemleriyle verilen akışkan kaynak ve akım yoğunluklarını göstermektedir. Böylece (10.25) denkleminin

$$\mathbf{D}^* \mathbf{F} = \mathbf{J} \quad (10.27)$$

ile verilen şık ifadesine ulaşılır. Bu denklem, (9.12) de verilen sıkıştırılabilir akışkanların Maxwell-tipi denklemlerinin Macfarlane kuaternionları cinsinden kompakt ifadesidir.

Aynı zamanda (10.27) denkleminin 4×4 matris formu

$$\mathbf{D}^{+*} \mathbf{F} = \mathbf{J} \quad (10.28)$$

şeklinde olup açık ifadesi

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} & i \frac{\partial}{\partial z} & -i \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & -i \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} & i \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & i \frac{\partial}{\partial y} & -i \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\zeta_x + ia\omega_x \\ -\zeta_y + ia\omega_y \\ -\zeta_z + ia\omega_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \zeta_x}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \right) - ia \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) \\ -\frac{\partial \zeta_x}{\partial t} + i \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + i \left(\frac{\partial \zeta_z}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_y}{\partial z} \right) + a \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) \\ -\frac{\partial \zeta_y}{\partial t} + i \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + i \left(\frac{\partial \zeta_x}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} \right) + a \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + i \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + i \left(\frac{\partial \zeta_y}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} \right) + a \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.29)$$

ile verilir. Sonuç olarak (10.29)'de verilen matrisin elemanları (9.12) denklemlerinin

aşağıda verilen açık formlarını ifade eder:

$$\left(\frac{\partial\zeta_x}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_z}{\partial z}\right) - ia\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right) = \mathbf{q}, \quad (10.30)$$

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\zeta_x}{\partial t} + ia\frac{\partial\omega_x}{\partial t} + i\left(\frac{\partial\zeta_z}{\partial y} - \frac{\partial\zeta_y}{\partial z}\right) + a\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y} - \frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{a}\mathbf{j}_x, \quad (10.31)$$

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\zeta_y}{\partial t} + ia\frac{\partial\omega_y}{\partial t} + i\left(\frac{\partial\zeta_x}{\partial z} - \frac{\partial\zeta_z}{\partial x}\right) + a\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z} - \frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{a}\mathbf{j}_y, \quad (10.32)$$

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\zeta_z}{\partial t} + ia\frac{\partial\omega_z}{\partial t} + i\left(\frac{\partial\zeta_y}{\partial x} - \frac{\partial\zeta_x}{\partial y}\right) + a\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x} - \frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{a}\mathbf{j}_z. \quad (10.33)$$

Son olarak, (10.16) denkleminde diferansiyel operatörün eşleniği $\mathbf{D}^*$ etkidiğinde ise

$$\mathbf{D}^*\mathbf{D}\Psi = \mathbf{D}^*\mathbf{F} \quad (10.34)$$

sonucunu verir. Öte yandan (10.27) denklemindeki sonuç kullanıldığında

$$\square\Psi = \mathbf{J} \quad (10.35)$$

ifadesi yazılabilir. Burada kullanılan yeni operatör $\square$,

$$\square = \mathbf{D}^*\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{D}^* = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (10.36)$$

formundadır. Böylece (10.35) denklemini için

$$\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right][\Omega\mathbf{e}_0 + av_x\mathbf{e}_1 + av_y\mathbf{e}_2 + av_z\mathbf{e}_3] = \mathbf{q}\mathbf{e}_0 + \frac{1}{a}\mathbf{j}_x\mathbf{e}_1 + \frac{1}{a}\mathbf{j}_y\mathbf{e}_2 + \frac{1}{a}\mathbf{j}_z\mathbf{e}_3$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifade açıkca potansiyeller cinsinden akışkan dalga denklemleridir. Bileşenleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} - \nabla^2\Omega &= \mathbf{q}, \\ \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2v_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2v_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2v_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{a^2}\mathbf{j}_x, \\ \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2v_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2v_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2v_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2v_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{a^2}\mathbf{j}_y, \\ \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2v_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2v_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2v_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2v_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{a^2}\mathbf{j}_z. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Öte yandan akışkan dalga denklemlerini alanlar cinsinde de ifade etmek mümkündür.

Bunu göstermek için (10.27) denkleminde soldan $\mathbf{D}$ operatörü etkidiğinde

$$\square\mathbf{F} = \mathbf{D}\mathbf{J} \quad (10.38)$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitliğin eşitliğin sol tarafı

$$\left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] [-\boldsymbol{\zeta} + ia\boldsymbol{\omega}] = \left[-\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\zeta}}{\partial t^2} + \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} \right] + i \left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} - a \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \right]$$

iken, sağ taraf

$$\left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right] \left[\mathbf{q} + \frac{1}{a} \mathbf{j} \right] = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right] + \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \mathbf{q} \right] + i \frac{1}{a} \nabla \times \mathbf{j}$$

formundadır. Sonuç olarak (10.38) denklemi için

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\zeta}}{\partial t^2} + \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} \right] + i \left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} - a \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \right] &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right] \\ &+ \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \mathbf{q} \right] + i \frac{1}{a} \nabla \times \mathbf{j} \end{aligned} \quad (10.39)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, (10.39) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk parantez, daha önce (9.13) denkleminde verilen akışkan yükün korunum denklemdir. Kalan terimlerdeki reel ve imajiner kısımlar eşleştirildiğinde

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\zeta}}{\partial t^2} - \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \nabla \mathbf{q}, \quad (10.40)$$

ve

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} - \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{a^2} \nabla \times \mathbf{j} \quad (10.41)$$

denklemlerine ulaşılır. Bunlar ise sırasıyla elektromanyetik teoridekilere benzer şekilde ifade edilen Lamb vektör $\boldsymbol{\zeta}$ ve vortisite alanı $\boldsymbol{\omega}$ cinsinden akışkan dalga denklemleridir.

10.3. Sıkıştırılamaz Akışkanların Yeniden Formülasyonu

Sıkıştırılamaz akışkanların Maxwell-tipi denklemlerinin yeniden formüle edilmesi bir önceki bölümde izlenen yollara benzer bir yolla elde edilir. Daha önce sıkıştırılabilir akışkanlar tanımlanan olan operatörden farklı olarak diferansiyel operatör

$$\mathbf{D} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla, \quad (10.42)$$

biçiminde ve sıkıştırılamaz akışkanların genelleştirilmiş potansiyel Ψ ,

$$\Psi = \Phi + \mathbf{A} = \Phi \mathbf{e}_0 + v(\mathbf{v}_x \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_y \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}_z \mathbf{e}_3) \quad (10.43)$$

şeklinde düzenlenmelidir. Daha sonra diferansiyel operatörü $\mathbf{D}$, akışkan potansiyel Ψ üzerine uygulandığında

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\Psi = \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right] [\Phi + \mathbf{A}] &= \left[\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] \\ &+ \left[\frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi + i \nabla \times \mathbf{A} \right]\end{aligned}\quad (10.44)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik, (8.23) de verilen sıkıştırılamazlık koşulu altında aşağıdaki forma indirgenir:

$$\mathbf{D}\Psi = \left[\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right] + i [\nabla \times \mathbf{A}]. \quad (10.45)$$

Öte yandan (8.12) ve (9.18) denklemlerinde verilen vortisite ve Lamb vektörü tanımları göz önüne alındığında bu eşitlik

$$\mathbf{D}\Psi = \mathbf{F} \quad (10.46)$$

şeklinde kompakt bir biçimde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{F}$ kuaternionu,

$$F_0 = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (10.47)$$

ile verilen skaler bileşene ve sıkıştırılamaz akışkanların alanlarını içeren imajiner

$$\mathbf{F} = -\zeta + iv\omega = [-\zeta_x + iv\omega_x]\mathbf{e}_1 + [-\zeta_y + iv\omega_y]\mathbf{e}_2 + [-\zeta_z + iv\omega_z]\mathbf{e}_3 \quad (10.48)$$

bileşenlere sahiptir. Son olarak diferansiyel operatörün eşleniği $\mathbf{D}^*$, kuaternion $\mathbf{F}$ üzerine uygulandığında

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^*\mathbf{F} = \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \right] [-\zeta + iv\omega] &= \left[-\frac{1}{v} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \nabla \times \omega + \nabla \cdot \zeta \right] \\ &+ i \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times \zeta - \nabla \cdot \omega \right]\end{aligned}\quad (10.49)$$

elde edilir. Bu eşitlik kısaca

$$\mathbf{D}^*\mathbf{F} = \mathbf{J} \quad (10.50)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{J}$ kuaternionu

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} + \frac{1}{v} \mathbf{j} \quad (10.51)$$

formunda olup sıkıştırılamaz akışkanların kuaternionik genelleştirilmiş akım yoğunluğudur. Burada $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{j}$ sırasıyla (9.19) ve (9.27) denklemleriyle verilen sıkıştırılamaz

akışkan yük ve akım yoğunluklarını göstermektedir. Sonuç olarak (10.50) denklemi, (9.28) de verilen denklemlerinin Macfarlane kuaternion terimleriyle ifade edilen kompakt formudur.



11. SONUÇ, TARTIŞMA

Dört boyutlu bir cebirsel yapı olan kuaternionların fizikte birçok alandaki kullanımı giriş kısmında bahsedilmişti. Kuaternionların fizikte dönmeleri basit bir şekilde ifade etme başarısının yanı sıra, dört reel bileşene sahip olmaları nedeniyle bunları uygun bir şekilde yorumlayarak fizik teorilerindeki denklemleri yeniden ifade etme gücü sunmaktadır. Bu gerçek literatürde bulunan birçok kuaternion türü içinde geçerlidir. Bu tezde Pauli cebri olarak da adlandırılan Macfarlane kuaternionların cebirsel yapısı detaylı bir şekilde verilmiştir. Macfarlane kuaternionlarının sağdan ve soldan çarpım dönüşümlerine karşılık gelen 4×4 matris formları da tanımlanmıştır. Bu matris temsillerinden yararlanılarak kompakt biçimde ifade edilen denklemlerin açık formları da verilmiştir.

Görelî bir parçacığın eylem fonksiyoneliinden yola çıkarak Maxwell denklemleri türetilmiş, ayrıca elektromanyetizmanın diğer temel denklemleri de tartışılmıştır. Uygun diferansiyel operatör ve kuaternionik potansiyeller tanımlanarak klasik elektromanyetizmanın temel denklemleri yeniden formüle edilmiştir. Bu formülasyonda vektörel formda dört adet denklemle ifade edilen Maxwell denklemleri, Macfarlane kuaternionlarıyla daha kompakt ve şık biçimde sunulmuştur. Hiperbolik kuaternionlarla yapılan çalışmalar incelendiğinde [75], Macfarlane kuaternionlarının daha şık ve sade bir anlatım sunduğu sonucu çıkarılabilir.

Ayrıca Macfarlane kuaternionlarının norm yapısı incelendiğinde, baz elemanlarının Minkowski uzayzamanının baz elemanları olarak ele alınabileceği görülmüştür. Bu, Macfarlane kuaternionlarının zengin cebirsel yapısını ortaya koymaktadır. Ayrıca Macfarlane kuaternionların polar formunun hiperbolik trigonometrik ifadelerle verilmesi bu kuaternion türünün özel görelîlik teorisine uygulanmasını doğal hale getirmektedir. Böylece iç çarpımı koruyan uygun dönüşümler tanımlanarak Lorentz dönüşümleri elde edilmiştir. Aynı zamanda Maxwell denklemlerini ifade ederken kullanılan operatörler ve alanların Lorentz dönüşümlerini vererek, Maxwell denklemlerini özel görelîlik çerçevesinde yeniden formülasyonu yapılmıştır.

Ayrıca, ideal akışkan denklemlerinin kuaternionik bir çerçevede yeniden yapılandırılması, akışkanlar mekaniğine yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Mironov ve Mironov'un [52] benzer cebirsel yapıyla elde ettiği denklemleri sadece reel bileşen-

lere sahip kuaternionları kullanarak da yeniden formüle edilebileceği gösterilmiştir. Elektromanyetizma ile akışkanlar mekaniği arasında kurulan analogi, sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir akışkanlar için Maxwell tipi denklemlerin türetilmesini mümkün kılmış ve bu denklemlerin kompakt bir formda sunulmasıyla teorik bir bütünlük sağlanmıştır. Macfarlane kuaternionlarının 2×2 ve 4×4 matris temsilleri, hem analitik hem de sayısal analizler için pratik bir araç sunmuştur.



KAYNAKÇA

- [1] Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A. and Remmert, R. (1991). *Numbers*. New York: Springer-Verlag.
- [2] Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on Quaternions*. Dublin: Royal Irish Academy.
- [3] Maxwell, J. C. (1891). *A Treatise on Electricity and Magnetism*. New York: Clarendon Press.
- [4] Heaviside, O. (1893). Vectors versus quaternions. *Nature*, 47, 533-534.
- [5] Stephenson, R. J. (1966). Development of vector analysis from quaternions. *Am. J. Phys.*, 34(3), 194-201.
- [6] Anderson, R. and Joshi, G. C. (1993). Quaternions and the heuristic role of mathematical structures in physics. *Phys. Essays* 6(2), 308-319.
- [7] Conway, A. W. (1911). On the application of quaternions to some recent developments of electrical theory. *Proc. R. Ir. Acad. Sect. A Math. Phys. Sci.*, 29, 1-9.
- [8] Silberstein, L. (1912). Quaternionic form of relativity. *Philos. Mag.*, 23(137), 790-809.
- [9] Abonyi, I., Bito, J. F. and Tar, J. K. (1991). A quaternion representation of the Lorentz group for classical physical applications. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24(14), 3245-3254.
- [10] Birkhoff, G. and von Neumann, J. (1936). The logic of quantum mechanics. *Ann. Math.*, 37 (4), 823-843.
- [11] Finkelstein, D., Jauch, J. M., Schiminovich, S. and Speiser, D. (1962). Foundations of quaternion quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 3(2), 207-220.
- [12] Finkelstein, D., Jauch, J. M. and Speiser, D. (1963). Quaternionic representations of compact groups. *J. Math. Phys.*, 4(1), 136-140.
- [13] Finkelstein, D., Jauch, J. M., Schiminovich, S. and Speiser, D. (1963). Principle of general Q-covariance. *J. Math. Phys.*, 4(6), 788-796.
- [14] Adler, S. L. (1980). Quaternionic chromodynamics as a theory of composite quarks and leptons. *Phys. Rev. D*, 21(10), 2903-2915.

- [15] Adler, S. L. (1986). Quaternionic quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, 104, 611-656.
- [16] Adler, S. L. (1995). *Quaternionic quantum mechanics and quantum fields*. New York: Oxford University Press.
- [17] Gürsey, F. (1956). Contribution to the quaternion formalism in special relativity. *Rev. Fac. Sci. Istanbul* , 20, 149-171.
- [18] Gürsey, F. (1978). Some algebraic structures in particle theory. *Johns Hopkins Workshop on Current Problems in High-Energy Particle Theory*, Baltimore: Johns Hopkins University, 3-25, G. Domokos and S. Kovesi-Domokos (Ed.).
- [19] Gürsey, F. (1978). Quaternion analyticity in field theory. , *Johns Hopkins Workshop on Current Problems in High-Energy Particle Theory*, Baltimore: Johns Hopkins University, 189-203, G. Domokos and S. Kovesi-Domokos (Ed.).
- [20] Gürsey, F. and Tze, H. C. (1980). Complex and quaternionic analyticity in chiral and gauge theories. Part 1. *Ann. Phys.*, 128, 29-55.
- [21] Tweed, D. and Vilis, T. (1987). Implications of rotational kinematics for the oculomotor system in three dimensions. *J. Neurophysiol.*, 58 (4), 832-849.
- [22] Tweed, D. and Vilis, T. (1990). Geometric relations of eye position and velocity vectors during saccades. *Vision Res.*, 30, 111-127.
- [23] Tweed, D., W., C. and Tütis, V. (1990). Computing three-dimensional eye position quaternions and eye velocity from search coil signals. *Vision Res.*, 37, 97-110.
- [24] Walker, M. W., Shao, L. S. and Volz, R. A. (1991). Estimating 3-D location parameters using dual number quaternions. *CVGIP: Image Underst.*, 54, 358-367.
- [25] Young, G.-S. J. and Chellappa, R. (1990). 3-D motion estimation using a sequence of noisy stereo images: Models, estimation, and uniqueness results. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 12, 735-759.
- [26] Chou, J. C. K. and Kamel, M. (1991). Finding the position and orientation of a sensor on a robot manipulator using quaternions. *Int. J. Robot. Res.*, 10, 240-253.
- [27] Chou, J. (1992). Quaternion kinematic and dynamic differential equations. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 8(1), 53-64.

- [28] Macfarlane, A. (1891). Principles of the algebra of physics. *Proc. Am. Assoc. Adv. Sci.*, 40, 65-117.
- [29] Macfarlane, A. (1900). Hyperbolic quaternions. *Proc. R. Soc. Edinb.*, 23, 169-180.
- [30] Kim, J. (2017). A representation of De Moivre's formula over Pauli quaternions. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.*, 9 (2).
- [31] Mironov, V. L. and Mironov, S. V. (2025). *Space-Time Algebra of Sedeons: Electrodynamics, Hydrodynamics, Field Theory, and Quantum Mechanics*, De Gruyter Studies in Mathematical Physics. Walter de Gruyter GmbH, Berlin.
- [32] Ward, J. P. (1997). *Quaternions and Clifford algebras in geometry and physics*. Lancaster: Lancaster University.
- [33] Hurwitz, A. (1923). Über die Komposition der quadratischen Formen. *Math. Ann.*, 88, 1-25.
- [34] Dray, T. and Manogue, C. A. (2015). *The geometry of the octonions*. Singapore: World Scientific Publishing.
- [35] Gürsey, F. and Tze, C. H. (1996). *On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics*. Singapore: World Scientific.
- [36] Kantor, I. L. and Solodovnikov, A. S. (1989). *Hypercomplex numbers*. Berlin: Springer-Verlag.
- [37] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1975). *The classical theory of fields*. . Oxford: Pergamon Press.
- [38] Dirac, P. A. M. (1931). Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 133(821), 60-72.
- [39] Zwanziger, D. (1968). Exactly soluble nonrelativistic model of particles with both electric and magnetic charges. *Phys. Rev.*, 176, 1480–1488.
- [40] Zwanziger, D. (1968). Quantum field theory of particles with both electric and magnetic charges. *Phys. Rev.*, 176(5), 1489-1495.
- [41] Schwinger, J. (1969). A magnetic model of matter. *Science*, 165(3895), 757-761.
- [42] MoEDAL Collaboration. (2022). Search for magnetic monopoles produced via the Schwinger mechanism. *Nature*, 602(7895), 63–67

- [43] MoEDAL Collaboration. (2024). MoEDAL search in the CMS beam pipe for magnetic monopoles produced via the Schwinger effect. *Phys. Rev. Lett.*, 133(7), 071803.
- [44] ATLAS Collaboration. (2023). Search for magnetic monopoles and stable particles with high electric charges in $\sqrt{s} = 13$ TeV pp collisions with the ATLAS detector. *JHEP.*, 11, 112.
- [45] Baylis, W. E. and Jones, G. (1989). Relativistic dynamics of charges in external fields: the Pauli algebra approach *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22(1), 1-16.
- [46] Baylis, W. E. and Jones, G. (1988). Special relativity with Clifford algebras and 2×2 matrices, and the exact product of two boosts. *J. Math. Phys.*, 29, 57–62 .
- [47] Baylis, W. E. and Jones, G. (1989). The Pauli-algebra approach to special relativity. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22(1), 1.
- [48] Girrard, P. (2007). *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*. Birkhäuser.
- [49] De Leo, S. (1996). Quaternions and special relativity. *J. Math. Phys.*, 37(6), 2955-2968.
- [50] Childress, S. (2009). *An introduction to theoretical fluid mechanics*. New York: American Mathematical Society.
- [51] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1987). *Fluid mechanics*. Oxford: Pergamon Press.
- [52] Mironov, V. L. and Mironov, S. V. (2017). Sedeonic equations of ideal fluid. *J. Math. Phys.*, 58, 083101.
- [53] Whittaker, E. T. (1989). *A history of the theories of aether and electricity*. New York: Dover Publications.
- [54] Logan, J. G. (1960). Hydrodynamic analog of the classical field equations. *Phys. Fluids*, 5, 868-869.
- [55] Troshkin, O. V. (1990). On wave properties of an incompressible turbulent fluid. *Physica A*, 168(2), 881–899
- [56] Troshkin, O. V. (1994). Perturbation waves in turbulent media. *Comput. Math. Math. Phys.*, 33, 1613–1628.

- [57] Marmanis, H. (1998). Analogy between the Navier–Stokes equations and Maxwell’s equations: Application to turbulence. *Phys. Fluids*, 10(6), 1428–1437.
- [58] Kambe, T. (2010). A new formulation of equation of compressible fluids by analogy with Maxwell’s equations. *Fluid Dyn. Res.*, 42(5), 055502.
- [59] Scotfield, D. and Huq, P. (2014). Fluid dynamical Lorentz force law and Poynting theorem derivation and implications. *Fluid Dyn. Res.*, 46, 055514.
- [60] Thompson, R. J. and Moeller, T. (2012). A Maxwell formulation for the equations of a plasma. *Phys. Plasmas*, 19 (1), 010702.
- [61] Abreu, E. M. C., Neto, J. A., Mendes, A. C. R., and Sasaki, N. (2015). Abelian and non-Abelian considerations on compressible fluids with Maxwell-type equations and minimal coupling with the electromagnetic field. *Phys. Rev. D*, 91(12), 125011.
- [62] Gibbon, J. D. (2002). A quaternionic structure in the three-dimensional Euler and ideal magneto-hydrodynamics equations. *Physica D*, 166(1), 17–28.
- [63] Gibbon, J.D., Holm, D.D., Kerr, R.M. and Roulstone, I. (2005). Quaternions and particle dynamics in the Euler fluid equations. *Nonlinearity*, 19(8), 1969–1983.
- [64] Gibbon, J.D. and Holm, D.D. (2007). Lagrangian particle paths and orthonormal quaternion frames. *Nonlinearity*, 20(7), 1745–1753.
- [65] Postnikov, E. B. and Stepanova, I. V. (2005). A variant of the pure quaternionic representation of the Navier-Stokes equation. *Adv. appl. Clifford alg.*, 15, 67–69.
- [66] Tanışlı, M., Demir, S. and Şahin, N. (2015). Octonic formulations of Maxwell type fluid equations. *J. Math. Phys.*, 56(9), 091701.
- [67] Demir, S. and Tanışlı, M. (2016). Hyperbolic octonion formulation of the fluid Maxwell equations. *J. Korean Phys. Soc.*, (68)5, 616–623.
- [68] Demir, S. and Tanışlı, M. (2023). Generalization of compressible fluid equations in terms of complexified octonions. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, (20), 2350211.
- [69] Demir, S., Uyumaz, S. and Tanışlı, M. (2016). A new model for the reformulation of compressible fluid equations. *Chin. J. Phys.*, 58, 115–126
- [70] Demir, S. and Tanışlı, M. (2017). Spacetime algebra for the reformulation of fluid field equations. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 14(11), 1750133.

- [71] Mironov, V. L. and Mironov, S. V. (2020). Generalized sedeonic equations of hydrodynamics. *Eur. Phys. J. Plus*, 61(11), 113101.
- [72] Belançon, E. D. and da Silva, S. (2019). A very short introduction to the geometric algebra of hydrodynamics. *Eur. J. Phys.*, (40), 015801
- [73] Panakkal, S. M., Parameswaran R. and Vedan M. J. (2021). A geometric algebraic approach to fluid dynamics. *Phys. Fluids*, 32 (8), 087111.
- [74] Sen, D. (2023). Field theoretic formulation of Fluid Mechanics according to geometric algebra. *Paramana - J. Phys*, (32), 97-132.
- [75] Demir, S., Tanışlı, M. and Candemir, N. (2010). Hyperbolic quaternion formulation of electromagnetism. *Adv. appl. Clifford alg.*, 20, 547-563.
- http-1:** <https://arxiv.org/pdf/2112.09957> (Erişim tarihi: 11.04.2025)

ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID : 0009-0001-7373-8941

Adı-Soyadı : Salih ÇAKIR

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2018-2022, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü
- 2023-2024, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik, Yüksek Lisans
- 2024-2025, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematiksel Fizik, Yüksek Lisans

Yayımları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- Türk Fizik Derneği 40. Uluslararası Fizik Kongresi, Reformulation of Incompressible Fluid Equations in Terms of Biquaternions, Sözlü Sunum, Salih ÇAKIR ve Süleyman DEMİR, Bodrum, TÜRKİYE, 2-6 Eylül 2024.