

**AKIŞKANLAR MEKANİĞİNDE SINIR TABAKASI
AKIŞLARININ SONLU FARKLAR METODU
KULLANILARAK ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖMER AKKAN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

OCAK 2010

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**AKIŞKANLAR MEKANİĞİNDE SINIR TABAKASI AKIŞLARININ SONLU
FARKLAR METODU KULLANILARAK ÇÖZÜMÜ**

Ömer AKKAN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

OCAK 2010

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY danışmanlığında,
Ömer AKKAN tarafından hazırlanan
“Akışkanlar Mekaniğinde Sınır Tabakası Akışlarının Sonlu Farklar Metodu Kullanılarak
Çözümü”,
başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca
06 / 01 / 2010
tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Eğitimi Anabilim Dalında
Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı, SOYADI

İmza

Başkan : Doç. Dr. Hüseyin BAYRAKÇEKEN

Üye : Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY (Danışman)

Üye : Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç.Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. HAREKET DENKLEMLERİ	5
2.1 Üçüncü Derece Power-law Akışkanlara Ait Denklemlerin Çıkartılması	5
2.1.1 Hareket Denklemlerinin Çıkarılışı	5
3. ÜÇÜNCÜ DERECE POWER LAW AKIŞKANININ SINIR TABAKASI DENKLEMLERİ	17
4. MATERYAL VE METOT	21
4.1 Benzerlik Çözümleri	21
4.2 Sonlu Farklar	25
4.2.1 Operatörlerle ilgili temel kavramlar	26
4.2.1.1 İki operatörün eşitliği	26
4.2.1.2 İki operatörün toplamı ve farkı	26
4.2.1.3 İki operatörün çarpımı	27
4.2.1.4 Birim operatör	27
4.2.1.5 Sıfır operatör	27
4.2.1.6 Invers operatörler	27
4.2.1.7 Operatörlerin lineerliği	27
4.2.1.8 Operatörlerle işlemler	28
4.2.2 Sonlu Fark Operatörleri	28
4.2.2.1 İleri farklar ve Δ operatörü	29
4.2.2.2 Geri farklar ve ∇ operatörü	32
4.2.2.3 Kaydırma operatörü	35
4.2.2.4 Merkezi farklar ve δ operatörü	37
4.2.2.5 Ortalama farklar ve μ operatörü	38

4.2.2.6 Türev ve diferansiyel operatörü	40
4.2.3 Bölünmüş Farklar	41
4.2.4 Newton Raphson Yöntemi	42
4.2.4.1 Sistemler için Newton Raphson yöntemi	44
4.3. Nümerik Çözümler	49
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	57
6. KAYNAKLAR	59
7.ÖZGEÇMİŞ	61

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AKIŞKANLAR MEKANİĞİNDE SINIR TABAKASI AKIŞLARININ SONLU FARKLAR METODU KULLANILARAK ÇÖZÜMÜ

Ömer AKKAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Eğitimi Anabilim dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Bu çalışmada, iki boyutlu, kararlı akışlı, laminar sınır tabakası denklemleri modifiye edilmiş power-law ve üçüncü derece bir akışkan modeli için ele alınmıştır. Bu model ($n>0$) iken kayma kalınlaşması, ($n<0$) iken kayma incelmesi karakteri sergileyen power-law akışkan modeli ile normal kayma gerilmesi karakteri sergileyen üçüncü derece akışkan modelinin bir birleşimidir. İlk etapta modele ait hareket denklemleri türetilmiştir. İvme terimleri, viskoz terimler, power-law ve üçüncü derece akışkan terimleri Kartezyen koordinatlar için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Sonuçların daha genel olabilmesi için denklemler ve sınır şartları boyutsuzlaştırılmıştır. Elde edilen hareket denklemleri etkileşimli kısmı diferansiyel denklem olup benzerlik dönüşümleri kullanılarak denklemler adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir. Klasik sınır tabakası şartları için adi diferansiyel denklem sistemi, sonlu farklar algoritması kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen çözümlerde power-law üssü n 'in ve üçüncü derece akışkan sabitinin sınır tabakası çözümleri üzerine etkileri araştırılmıştır x ve Y hız bileşenleri için n 'nin çeşitli değerleri için çizdirilmiştir. n 'nin kayma kalınlaşması durumunda aldığı değerler için yapılan çözümlerde n arttıkça hızların düştüğü görülmüştür. Halbuki n 'nin kayma incelmesi durumunda aldığı değerler için yapılan çözümlerde n azaldıkça hızların arttığı görülmüştür. Ayrıca üçüncü derece akışkan sabiti artırıldıkça sınır tabakası kalınlığı artmıştır.

2010, 61 sayfa

Anahtar Kelimeler: :Newtonyen olmayan akışkanlar, sınır tabakası akışı, sonlu farklar

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

SOLUTION OF BOUNDARY LAYER FLOWS IN FLUIDS MECHANICS BY USING FINITE DIFFERENCE METHOD

Ömer AKKAN

Afyon Kocatepe University
Institute for the Natural and Applied Sciences
Machine Education Department

Advisor: Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

In this study, two dimensional, steady flow, laminar boundary layer equations of a modified power-law fluid of third grade are treated. The model is a combination of power-law and third grade fluid which the fluid may exhibit normal stresses, shear thinning ($n < 0$) or shear thickening ($n > 0$) behaviors. The equations of motion are derived for power-law and third grade fluids. Acceleration terms, viscous term, power-law and third grade fluid terms are calculated for Cartesian coordinates. These equations and boundary conditions have been made dimensionless to be able to generalize results. The coupled partial differential equation system is transformed into an ordinary differential equation system via similarity transformation. Classical boundary layer conditions are considered, and a numerical finite difference scheme is used to integrate the equations. Effect of power-law index n and third grade coefficient on the boundary layer solutions is investigated. x and Y component of velocities are drawn for various n values. For shear thickening n values, a decrease in both the component of velocities is observed for increasing n . Whereas, for shear thinning n values, a increase in both the component of velocities is observed for decreasing n . As the third grade fluid coefficient increases, the boundary gets thicker.

2010, 61 Page

Keywords: Non-Newtonian fluids, boundary layer flow, finite difference

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde yapmış olduğu çok değerli katkı ve yönlendirmeler ile bana büyük destek veren ve elinden gelen yardımı esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen Arş. Grv. Ali KEÇEBAŞ'a ve tüm bölüm hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim

Ömer AKKAN
Afyonkarahisar, 2010

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

1. Simgeler

A_1	Rivlin Ericksen Tensörleri
A_2	Rivlin Ericksen Tensörleri
V_0	Ortalama Hızı
ρ	Akışkanın Yoğunluğu
μ	Viskozite
ν	Kinematik Viskozite
β	Üçüncü Derece Akışkan Terimi
α	İkinci Derece Akışkan Terimi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Açıklama	Sayfa No
Şekil 4.1	x yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi	53
Şekil 4.2	y yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi	53
Şekil 4.3	x yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi	54
Şekil 4.4	y yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi	54
Şekil 4.5	x yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi	55
Şekil 4.6	y yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi	55
Şekil 4.7	x yönündeki hızın türevinin benzerlik değişkenine göre değişimi	56
Şekil 4.8	x yönündeki hızın türevinin benzerlik değişkenine göre değişimi	56
Şekil 4.9	x yönündeki hızın türevinin benzerlik değişkenine göre değişimi	57

1. GİRİŞ

Günümüzde akışkanlar mekaniğinin öneminin ne kadar büyük olduğu gelişen teknoloji ile ortaya çıkmaktadır. İnsandaki kan dolaşımından roketlere kadar çok çeşitli alanlarla doğrudan doğruya ilgili olan akışkanlar mekaniği bütün mühendislik kollarında ve bilim dallarında kaçınılmaz bir bilgi kaynağı durumuna gelmiştir. Yüzyıllar boyunca akışkanlar mekaniği, bugün alt dalları olan, hidrolikten ve hidrostatikten ibaret kalmıştır. Ancak son üç ya da dört yüzyılda bugünkü anlamda akışkanlar mekaniği temelleri atılmış, matematiksel formülasyonu yapılmıştır. Şimdilerde ise akışkanlar mekaniği, diğer bilim ve mühendislik dallarında olduğu gibi, o kadar genişlemiştir ki, Akışkanlar Mekaniği genel olarak incelenebilecek bir kavrama dönüşmüştür.

Yapılan çalışmalar sonucunda birçok gerçek akışkanın, özellikle düşük moleküler ağırlığa sahip olanların mekanik davranışları Navier-Stokes teorisi tarafından doğru olarak belirlenmektedir. Bu teorinin uygulanabildiği akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılır. Başka bir anlatım ile kararlı bir halde akan akışkanda, hız değişimi ile uygulanan kayma gerilimi arasındaki ilişki lineer olan akışkanları Newtonyen akışkanlar olarak tanımlamak mümkündür. Newtonyen olmayan (non-Newtonyen) akışkanlarda ise hız değişimi ile uygulanan kayma gerilimi arasındaki ilişki lineer değildir.

Newtonyen akışkanlar mekaniği bu yüzyılın başında bir değişime maruz kalmıştır. Bunun ana sebeplerinden birisi 1904'de Prandtl tarafından ortaya atılan sınır tabakası kavramı ve uçak endüstrisi olmuştur. Uçak endüstrisi sayesinde bir cismin etrafında hareket eden akış için geniş çalışmalar yapılmıştır, bu akış ile ilgili birçok tasarım metotları geliştirilmiştir. Bunun aksine non-Newtonyen akış mekaniği ise daha yakın bir zamanda gelişmeye başlamıştır. Esas itibarı ile madde akışı ile moleküler yapı arasında ilişki kurmak isteyen fiziksel kimyacıların polimerik malzeme testleri bu konuda öncü rolü oynamıştır. Polimerik malzemelerin ticari önem kazanması bu konudaki araştırmaları arttırmıştır. Madde bilimini inceleyen bir bilim dalı olan reoloji non-Newtonyen akış davranışlarının birçok çeşidini sınıflandırmalara tabi tutmuştur. Bu

sınıflandırmalara gerek vardı, çünkü non-Newtonyen terimi bir şeyin ne olduğunu değil ne olmadığını ifade eden bir terimdir.

Akışkan denince akla hem sıvı, hem de gaz halindeki maddelerin ifade edildiği bilinen bir gerçektir. Günlük yaşantımızda önemli yeri olan, nefes, aldığımız hava, su, süt, ulaşım araçlarında kullandığımız benzin, mazot, damarlarımızda dolaşan kan hepsi basit akışkanlar kapsamında Newtonyen akışkanlar olarak söyleyebiliriz. Ancak akışkanlar her zaman basit yapıda olmayabilirler. Örneğin; bal, hamur, sulandırılmış nişasta, yumurta akı, bitkisel yağlar bu gruba girerler. Her yerde kullanılan boya ve günlük hayatta oldukça sık rastladığımız asfalt, zift, tutkal gibi maddeler de non-Newtonyen akışkanlardır. Karmaşık moleküler yapıya sahip çözeltiler ve eriyiklerle, katı ve sıvı olarak birden fazla fazdan oluşan çok fazlı akışkanların bu davranışı reoloji bilimi kapsamına girer ve en fazla araştırılan alanlardan biridir. Reoloji, Newton kuralına uymayan akışkanların kayma gerilimine karşı davranışının incelenmesini, ölçülmesini ve modellenmesini kapsar.

Doğada bulunan akışkanların çoğunluğu non-Newtonyen akışkan modeline uyar. Bu nedenle sabit viskozite kanununa göre bu tür akışkanların özelliklerini ve içinde bulundukları ortama göre hareketlerini incelemek mümkün değildir. Bu türdeki belirli bir akışkanı yada belirli özelliği olan akışkanları temsil edebilmek için her akışkanı ve genelinde belli bir akışkanı temsil eden reolojik denklemlere ihtiyaç vardır. Viskozitenin sadece kayma gerilmesine bağlı olduğu non-Newtonyen akışkanları en iyi temsil eden Power-Law modelidir. Daha kompleks akışkanlar için ise daha çok sayıda yapısal sabit içeren üçüncü mertebe akışkan modelleri kullanarak akışkanın davranışlarını daha iyi açıklamak mümkün olmakla beraber bu tür akışkan modelleri ile analitik çözümler elde etmek oldukça güçtür.

Non-Newtonyen akışkanlar genelde viskoelastik terimi ile ifade edilirler. Çünkü bu sıvılar hem viskoziteli akışkan hem de elastik katı davranışını birlikte gösterirler. Newtonyen akışkanlardan alışık olduğumuz bazı özellikleri bu akışkanlar gösteremezler. Bunlara birkaç örnek verelim: normalde bir borudan aşağıya doğru akan bir sıvının çapı yere yaklaştıkça momentumun korunumu ilkesinden dolayı azalır.

Hâlbuki non-Newtonyen akışkanlarda tam tersi olmaktadır, yani çap yere yaklaştıkça artmaktadır. Bunun sebebi de elastik kuvvetlerin çıkışta serbest kalması ve genleşmeyi sağlamasıdır. Ayrıca non-Newtonyen akışkanlarda jet stabilitesi Newtonyen akışkanlara göre şaşırtıcı oranda daha fazladır. Türbülanslı akımda ise tam anlaşılamayan sebeplerden ötürü yüzey sürtünmesi de büyük ölçüde azalmaktadır.

Teorici ve deneyçiler tarafından büyük destek gören ve elastik bileşen içermeyen önemli bir non-Newtonyen akışkan modeli Rivlin-Ericksen modelidir. Bu modelde akışkanın gerilme tensörü, deformasyon tensörü ve onun zamana göre türevlerini içeren bir fonksiyon tarafından belirlenmektedir. Rivlin–Ericksen akışkanları içerisinde ise çok iyi bilinen özel bir grup ikinci ve üçüncü derece akışkanlar olarak adlandırılır.

Bu tez çalışmasında Newtonyen olmayan bir akışkan modeli ele alınarak bu modele ait sınır tabakası denklemlerinin çözümleri yapılacaktır. Ele alınacak akışkan modeli power-law ve üçüncü derece akışkanları beraberinde kapsayan bileşik bir model olacaktır. Bu hali ile ele alınan ve sınır tabakası denklemlerinin çözüldüğü model orijinal bir modeldir. Tezin ilk kısmında bu akışkan modeline genel hareket denklemlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılacaktır. Sonraki kısımlarında ise sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak elde edilen hareket denklemlerinde sınır tabakası denklemlerine ait matematiksel model oluşturulmuştur. Elde edilen matematiksel model yüksek non lineriteye sahip kısmi diferansiyel denklem sistemidir. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için öncelikle kısmi diferansiyel denklemler özel bir dönüşüm ile adi diferansiyel denklem sistemine indirilecektir. Elde edilen adi diferansiyel denklem sistemi solu farklar metodu kullanılarak nümerik olarak çözülecektir. Elde edilen çözümler Newtonyen olmayan akışkan katsayısı ve power-law üssünün farklı değerleri için olacaktır.

Newtonyen olmayan akışkanlar için yapılmış sınır tabakası denklemleri ile ilgili literatürü şu şekilde özetlemek mümkündür. İkinci derece akışkanlar için sınır tabakası teorisinin uygulanması ile ilgili ilk çalışmalar Srivastava (1958), Rajeswari ve Rathna (1962) 'ya aittir. Bu tip akışkanlar için sınır tabakası teorisi ve bu teoriye ait kısıtlamalar Rajagopal *et al.* (1980) tarafından gösterilmiştir. Son zamanlarda Garg ve Rajagopal

(1991) kama etrafındaki ikinci derece akışkanların akışını incelemiştir. İkinci derece akışkanlara ait sınır tabakası denklemlerini özel bir koordinat sistemi kullanılarak Pakdemirli ve Suhubi (1992a) çıkarmıştır. Çıkarılan bu denklemlerin simetri grubu aynı yazarlar (Pakdemirli ve Suhubi (1992b)) tarafından bulunmuş ve denklemler çözülmüştür. Üçüncü derece akışkanlara ait sınır tabakası denklemleri özel bir koordinat sistemi kullanılarak Pakdemirli (1992) tarafından çıkarılmıştır. Yine Pakdemirli (1994) tarafından bu akışkanlara ait çok katlı sınır tabakası denklemleri ve yeni bazı standart sınır tabakası denklemleri ortaya atılmıştır.

Hız tipi akışkanlar için Beard ve Walters (1964), Astin (1973) tarafından yapılan çalışmalar önemlidir. Acrivos ve arkadaşları (1960) ve Schowalter (1960) ilk defa Power-Law akışkanlarında sınır tabakası denklemlerini incelediler. Na ve Hansen (1967) Power-Law akışkanlarına ait üç boyutlu sınır tabakası denklemlerinin benzerlik çözümlerini ayrıntılarıyla incelediler. Pakdemirli (1993) Power-Law akışkanlarında sınır tabakası denklemlerini özel bir koordinat sistemi kullanarak çıkardı. Bu denklemleri durgun nokta akışı ve düz plaka akışı durumları için çözmüştür. Yurusoy (2006) power-law akışkan modeline ait zamana bağlı sınır tabakası denklemlerini ele almış ve özel bir dönüşüm kullanarak bu denklemleri adi diferansiyel denklem formuna indirgemiş nümerik olarak çözmüştür.

Bu tez çalışmasında ele alınacak model ile ilgili çalışmaları ise aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür. Abbasbandy ve arkadaşları (2008) de yaptıkları çalışmada bu tezde ele alınan modelin ikinci derece akışkanlar-power law modelini ele alarak çözmüşlerdir. Pakdemirli ve arkadaşları (2008) de yaptıkları çalışmada aynı akışkan modeline Lie Grupları uygulayarak denklemlerin genel simetrilerini elde etmişlerdir. Elde edilen simetriler kullanılarak denklemler öncelikle adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiş sonra bu adi diferansiyel denklemler sonlu farklar algoritmasını kullanarak nümerik olarak çözmüşlerdir.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

2.1 Üçüncü Derece Power-law Akışkanlara Ait Denklemlerin Çıkartılması

Bu bölümde kartezyen koordinatlarda üçüncü derece akışkanlara ait denklemlerin çıkışı yapılacaktır. Üçüncü derece power-law akışkanların denklemlerin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılacaktır. Daha sonra bu denklemler boyutsuz vektörel formda ifade edilecektir. Önce ivme terimleri sonra viskoz terimler ve üçüncü derece akışkan terimlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılacaktır. Bu bölümde elde edilen denklemler iki boyutlu kararlı akışı ifade etmektedir.

2.1.1 Hareket Denklemlerinin Çıkarılışı

Non-Newtonyen akışkan modeli olarak Rivlin-Ericksen akışkanları hem kuramcılara hem de araştırmacılardan daha çok kabul kazanmıştır. İkinci ve üçüncü derece akışkanlar olan modelin özel durumları geniş ölçüde kullanılır ve çalışmaların pek çoğu konu üzerine yapılmıştır. Hareket denklemi tensörel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho \frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \text{div } \mathbf{T}^* + \rho \mathbf{b}^* \quad (2.1)$$

Burada; $\mathbf{T}^*$ gerilme tensörü, $\mathbf{b}^*$ birim kütle başına düşen dış kuvvet, ρ yoğunluk, $\mathbf{v}^*$ hız vektörü ve $\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*}$ ivmedir. Sıkıştırılmaz akışkan kabulü yapılırsa;

$$\text{div } \mathbf{v}^* = 0 \quad (2.2)$$

ifadesi yazılır. Üçüncü derece power-law bir akışkan için bünye denklemi;

$$\mathbf{T}^* = -p\mathbf{I} + \mu \Pi^{n/2} \mathbf{A}_1^* + \beta (\text{tr} \mathbf{A}_1^{*2}) \mathbf{A}_1^* \quad (2.3)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{T}^* = -p\mathbf{I} + \mu \left[\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right]^{\frac{n}{2}} \mathbf{A}_1^* + \beta (\text{tr} \mathbf{A}_1^{*2}) \mathbf{A}_1^* \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{T}^* = & -\text{grad} p + \mu \left[\text{div} \left[\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right]^{\frac{n}{2}} \mathbf{A}_1^* + \left[\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right]^{\frac{n}{2}} \text{div} \mathbf{A}_1^* \right] \\ & + \beta \text{div} [\text{tr} \mathbf{A}_1^{*2}] \mathbf{A}_1^* + \beta [\text{tr} \mathbf{A}_1^{*2}] \text{div} \mathbf{A}_1^* \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{T}^* = & -\text{grad} p + \mu \text{grad} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \mathbf{A}_1^* + \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \\ & + \beta \mathbf{A}_1^* \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1^*|^2 + \beta |\mathbf{A}_1^*|^2 \cdot \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

Burada p basınç, μ viskozite katsayısı, β üçüncü derece akışkana ait gerilme modülü, n power-law akışkan sabitidir. $n < 0$ olması incelen akışkanları, $n > 0$ olması ise kabaran akışkanları temsil eder. $\mathbf{A}_1^*$ ise birinci Rivlin-Ericksen tensörüdür. Bu tensör şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \quad (2.8)$$

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \mathbf{v}_t^* + \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}^*|^2 + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* \quad (2.9)$$

$\mathbf{v}_t^*$ hızın zamana göre türevidir. Ele alınan akış kararlı olduğu için $\mathbf{v}_t^* = 0$ 'dır.

(2.7) ve (2.9) eşitlikleri göz önüne alınır ve $\mathbf{b}^* = 0$ yazılırsa baştaki hareket denklemi (2.1) aşağıdaki vektörel forma dönüştürülür.

$$\rho \left(\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}^*|^2 + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* \right) = -\text{grad} p + \mu \text{grad} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \mathbf{A}_1^* + \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \beta \mathbf{A}_1^* \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1^*|^2 + \beta |\mathbf{A}_1^*|^2 \cdot \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad (2.10)$$

Burada $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{v})$ 'dir. Eşitlik (2.10)'u boyutsuzlaştırmak için bütün uzunlukları bir karakteristik uzunluk L ile ve bütün hızları da bir karakteristik hız U ile bölelim.

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^*}{U} \quad (2.11)$$

Basınç ise;

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}^*}{\rho U^2} \quad (2.12)$$

Diğer terimler ise;

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \nabla^{*2} L & \mathbf{A}_1^* &= \frac{U}{L} \mathbf{A}_1 & |\mathbf{A}_1^*|^2 &= \frac{U^2}{L^2} |\mathbf{A}_1|^2 \\ \nabla^{*2} \mathbf{v}^* &= \frac{U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{v} & \boldsymbol{\omega}^* &= \frac{U}{L} \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklinde yazılır. Elde edilen (2.11),(2.12)(2.13) ifadeleri (2.10)'a yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{1}{2} \frac{U^2}{L} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 + \frac{U^2}{L} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) &= -\frac{\rho U^2}{L} \text{grad} p + \mu \frac{U}{L^2} \left(\frac{U}{L} \right)^n \text{grad} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \mathbf{A}_1^* \\ &+ \frac{U}{L^2} \left(\frac{U}{L} \right)^n \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \beta \frac{U^3}{L^4} \mathbf{A}_1^* \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1^*|^2 + \beta \frac{U^3}{L^4} |\mathbf{A}_1^*|^2 \cdot \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \end{aligned} \quad (2.14)$$

bulunur. (2.14) $L/\rho U^2$ ile çarpılırsa denklem aşağıdaki gibi boyutsuz olur.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\text{grad}p + \frac{\mu}{\rho UL} \left(\frac{U}{L} \right)^n \text{grad} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \mathbf{A}_1 \\
+ \frac{\mu}{\rho UL} \left(\frac{U}{L} \right)^n \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\beta U}{\rho L^3} \mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + \frac{\beta U}{\rho L^3} |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

(2.15) denkleminde aşağıdaki gibi boyutsuz katsayılar tanımlanabilir.

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho UL} \left(\frac{U}{L} \right)^n \quad \varepsilon_1 = \frac{\beta U}{\rho L^3} \tag{2.16}$$

Boyutsuz vektörel hareket denkleminin son hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\text{grad}p + \varepsilon \text{grad} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \mathbf{A}_1 + \varepsilon \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right]^{\frac{n}{2}} \nabla^2 \mathbf{v} \\
+ \varepsilon_1 \mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + \varepsilon_1 |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Kartezyen koordinat sistemine göre denklem (2.17)'yi yazalım. Öncelikle denklemdeki terimler aşağıdaki gibi hesaplayalım.

Hız ve gradyan operatörünü şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j} \tag{2.18}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \tag{2.19}$$

Hız operatöründeki u, x yönündeki vektörel hızı ifade ederken v, y yönündeki hızı ifade etmektedir. Süreklilik denklemini açık bir biçimde ifade edersek;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.20}$$

denklemini elde edilir. Bundan sonraki aşamada ise (2.17)'deki vektörel denklemler sırasıyla hesaplanacaktır. Hız operatörünün karesi aşağıdaki denklemde belirtildiği gibi ifade edilmektedir.

$$|\mathbf{v}|^2 = u^2 + v^2 \quad (2.21)$$

Denklem (2.21)'de yer alan $|\mathbf{v}|^2$ ifadesinin gradyanı elde edilirse;

$$\frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{j} \quad (2.22)$$

ifadesi elde edilir. $\boldsymbol{\omega}$ ifadesi ise aşağıdaki gibidir.

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

Denklem (2.23)'ün determinantı alınır;

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (2.24)$$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ ifadesi ise denklem (2.18) ve denklem (2.24)'ün vektörel çarpımıdır. Çarpım sonucu ise şu şekildedir.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{j} - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{i} \quad (2.25)$$

Denklem (2.22) ve (2.25) toplanır;

$$\frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{j} \quad (2.26)$$

denklemini elde edilir.

Basınç gradyanı ise;

$$\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} \quad (2.27)$$

şeklinde yazılır. Akım sıkışmaz olduğu için hız vektörünün laplasiyeni şu şekilde hesaplanır.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\text{rot}(\text{rot} \mathbf{v}) \quad (2.28)$$

Denklem (2.28)'in eşiti aşağıdaki gibidir.

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{v}) = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

Denklem (2.29)'un determinanı alındığı takdirde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} - \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{j} \quad (2.30)$$

Süreklilik denkleminin gradyanı alınır;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{j} = 0 \quad (2.31)$$

(2.31) denklemi düzenlenirse;

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} = 0 \quad (2.32)$$

Denklem (2.30)'un daha sade hale gelebilmesi için denklem (2.32)'deki süreklilik denklemi düzenlenmiş şekliyle denklem (2.30)'da yerine konulduğunda aşağıdaki denklemi elde etmiş oluruz.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} \quad (2.33)$$

Şimdi de denklem (2.17)'de yer alan $|\mathbf{A}_1|^2$ 'sinin hesaplanması yapılacaktır. $|\mathbf{A}_1|$ 'in eşiti aşağıdaki gibidir.

$$|\mathbf{A}_1| = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \quad (2.34)$$

Yukarıdaki $\mathbf{L} = \text{grad} \mathbf{v}$ 'dir. $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{v}$ (2.34)'de yerine yerleştirilirse $\mathbf{A}_1$ 'in eşiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (2.35)$$

Bundan sonraki aşamada ise $|\mathbf{A}_1|^2$ 'nin hesaplanması yapılacaktır.

$$|\mathbf{A}_1|^2 = \begin{vmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Çarpım işlemi yapıp köşegen elemanları toplanırsa $|\mathbf{A}_1|^2$ bulunmuş olur.

$$|\mathbf{A}_1|^2 = 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad (2.36)$$

Buradan da $\text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 / 4$ 'ün eşiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{4} = & \left(2\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} \\ & + \left(2\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.37)$$

İlk önce $\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2$ 'nin hesabı yapılacaktır. Bu ifade için denklem (2.37)'nin 4 ile çarpılması ve çıkan sonucun (2.35) ile skaler çarpılmasından elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 = & \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 8\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

elde edilir. Matris çarpımı yapılsa ifade aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 = & \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \left. \left. \right) \right] \mathbf{i} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \left. \left. \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \left. \left. \right) \right] \mathbf{j}
\end{aligned} \quad (2.39)$$

Hareket denkleminin elde edilmesi için gereken en son terim olan $|\mathbf{A}_1|^2 \nabla^2 \mathbf{v}$ 'nin hesaplanması yapılacaktır. Bu ifade de açıkça görüldüğü gibi denklem (2.33) ve (2.36)'nın çarpımı şeklindedir. Çarpım yapılırsa;

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}_1|^2 \nabla^2 \mathbf{v} = & \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} \\
& + \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j}
\end{aligned} \quad (2.40)$$

elde edilir. Denklem (2.17)'de bulunan diğer ifadeler ise aşağıdaki gibidir.

$|\mathbf{A}_1|^2$ daha önce (2.36)'da olduğu gibi hesaplanmıştı. $|\mathbf{A}_1|^2$ aşağıdaki gibi de ifade edilebilmektedir.

$$|\mathbf{A}_1|^2 = 8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.41)$$

Buradan;

$$\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{\frac{n}{2}} = \left[4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \quad (2.42)$$

Elde edilir ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra bir diğer ifade olan denklem (2.43)'e ulaşılır.

$$\begin{aligned} \text{grad}\left[\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right]^{\frac{n}{2}} &= \frac{n}{2}\left[\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right]^{\frac{n}{2}-1} = \left\{\left[8\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right]\mathbf{i}\right. \\ &\quad \left.\left[8\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathbf{j}\right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Hesaplanan bütün terimler denklem (2.17)'de yerleştirilir ve hareketin x bileşenleri ile y bileşenleri ayrıştırılırsa;

x bileşeni yönündeki hareket denklemi

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{n}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \left[2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\
& + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + \varepsilon_1 \left\{ 20 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
& + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\
& \left. \left. 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

y bileşeni yönündeki hareket denklemi

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{n}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left[2 \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} \right] \left. \right\} + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} \\
& \left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + \varepsilon_1 \left\{ \left(20 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 16 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 16 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + 16 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& \left. \left. + 12 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

3. ÜÇÜNCÜ DERECE POWER LAW AKIŞKANININ SINIR TABAKASI DENKLEMLERİ

Bu bölümde denklem (2.44) ve (2.45)'e sınır tabakası şartları uygulanacaktır. Sınır şartlarımız aşağıda belirtilmiştir.

Bunlar;

p,u,x'ler 1 mertebe kabul edilecek

$$Y = \frac{y}{\delta} \quad (3.1)$$

$$v = \delta \quad (3.2)$$

Süreklilik ve x yönündeki momentum denklemi 1 mertebesinde korunacak y yönündeki momentum ise $1/\delta$ mertebesinde korunacaktır.

$$\varepsilon = \delta^{n+2} \quad \varepsilon_1 = k_1 \delta^4 \quad (3.3)$$

Süreklilik

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} = 0 \quad (3.4)$$

x koordinati

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{n}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\delta \partial x \partial Y} \right) \right] \left[2v \delta^{n+2} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\delta \partial x \partial Y} + 2 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right) \left(\frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial x \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} \right) \right] \\
& \left[v \delta^{n+2} \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right) \right] + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} \left[v \delta^{n+2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} \right) \right] + \frac{\varepsilon_1 \delta^4}{\rho} \\
& \left\{ 20 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial x \partial Y} + 6 \left(\frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} + 4 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial x \partial Y} + 6 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} \right. \\
& + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} + 4 \left(\frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\delta \partial v}{\delta Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} + 2 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial x \partial Y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\delta \partial x \partial Y} \\
& + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\partial^2 u}{\delta \partial x \partial Y} + 8 \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta^2 \partial Y^2} + 8 \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial x \partial Y} \\
& \left. + 12 \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\delta \partial Y^2} + 4 \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta^2 \partial Y^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{n}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial Y} \right]^{n-2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^n \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 6\varepsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[n \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^n \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^n \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right] + 6\varepsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}
\end{aligned}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (n+1) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^n \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 6\varepsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \dots \dots x \text{ koordinati} \tag{3.6}$$

y koordinatı

$$\begin{aligned}
& u \frac{\delta \partial v}{\partial x} + \delta v \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{n}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 2 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right) \left(\frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\delta \partial x \partial Y} \right) \left. \right] \left[v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\delta \partial x \partial Y} \right. \\
& + 2 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right) \left(\frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial x \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} \right) \left. \right] \left[2v \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \right] \left. \right\} + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} \\
& \left[v \left(\frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta^2 \partial Y^2} \right) \right] + \varepsilon_1 \delta^4 \left\{ \left[20 \left(\frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta^2 \partial Y^2} + 4 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\delta \partial Y \partial x} + 6 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 4 \left(\frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\delta \partial Y \partial x} + 6 \left(\frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial Y^2} \\
& + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\delta \partial Y} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta^2 \partial Y^2} + 2 \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta^2 \partial Y^2} + 16 \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\delta \partial Y \partial x} \\
& + 8 \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} + 8 \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\delta^2 \partial Y^2} + 16 \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial Y \partial x} + 16 \frac{\delta \partial v}{\delta \partial Y} \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta \partial Y \partial x} \\
& + 8 \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\delta \partial u}{\delta \partial Y} \frac{\partial^2 u}{\delta \partial x \partial Y} \\
& \left. \left. + 12 \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\partial^2 u}{\delta \partial Y \partial x} + 4 \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\delta \partial v}{\partial x} \frac{\delta^2 \partial^2 v}{\delta^2 \partial Y^2} + 8 \frac{\partial u}{\delta \partial Y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right\} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \quad (3.8)$$

y'ye bağılı değildir ve $P = P(x)$ 'dir.

Bernoulli denkleminde;

$$p = -\frac{1}{2} U^2 \quad -\frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}, \text{ dir.} \quad (3.9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = U \frac{dU}{dx} + (n+1) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^n \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 6\varepsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (3.10)$$

Denklemler;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (3.11)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = U \frac{dU}{dx} + (n+1) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^n \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 6\varepsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (3.12)$$

4. MATERYAL VE METOT

4.1 Benzerlik Çözümleri

Bu bölümde, üçüncü bölümde elde edilen denklem (3.11)'e ölçekleme metodu uygulanacaktır. Bu denklemler için ölçekleme dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\bar{x} = \lambda^a x \quad \bar{Y} = \lambda^b Y \quad \bar{u} = \lambda^c u \quad \bar{v} = \lambda^d v \quad \bar{U} = \lambda^e U \quad (4.1)$$

Denklem (3.11)'e ölçekleme dönüşümü uygulanırsa;

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \lambda^{a-c} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} \lambda^{b-d} = 0 \quad (4.2)$$

Denklemin her iki tarafı λ^{c-a} ile çarpılırsa;

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} \lambda^{b+c-a-d} = 0 \quad (4.3)$$

Denklem (3.12)'ye ölçekleme dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \lambda^{a-2c} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{Y}} \lambda^{b-d-c} &= \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} \lambda^{a-2e} + (n+1) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{Y}} \right)^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{Y}^2} \lambda^{n(b-c)+2b-c} \\ &+ 6k \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{Y}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{Y}^2} \lambda^{4b-3c} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Denklemin her iki tarafı λ^{2c-a} ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{Y}} \lambda^{b+c-d-a} &= \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} \lambda^{2c-2e} + (n+1) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{Y}} \right)^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{Y}^2} \lambda^{n(b-c)+c+2b-a} \\ &+ 6k \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{Y}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{Y}^2} \lambda^{4b-a-c} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Orijinal denklemlerde yapılan dönüşüm altında denklemlerin değişmez kalabilmesi için gerekli şartlar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 b + c - d - a &= 0 \\
 n(b - c) + c + 2b - a &= 0 \\
 4b - a - c &= 0 \\
 2c - 2e &= 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Denklemlerde tüm terimler “b” cinsinden alınırsa;

$$\begin{aligned}
 a &= 3b \\
 b &= b \\
 c &= b \\
 d &= -b \\
 e &= b
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Bu ölçekleme için benzerlik dönüşümleri veren denklem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dY}{Y} = \frac{du}{u} = \frac{dv}{-v} = \frac{dU}{U} \tag{4.8}$$

Benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dY}{Y} \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{3} \ln(x) + \ln(\xi) = \ln(Y) \tag{4.10}$$

$\frac{1}{3} \ln(x)$ eşitliğin sağ tarafına atılıp $\ln(\xi)$ yalnız bırakılır ve işlemler yapıldığı zaman;

$$\ln(\xi) = \ln\left(\frac{Y}{x^{1/3}}\right) \tag{4.11}$$

$$\xi = \frac{Y}{x^{1/3}} \quad (4.12)$$

olarak bulunur.

Benzerlik fonksiyonları

$$\frac{dx}{3x} = \frac{du}{u} \quad (4.13)$$

$$\ln(u) = \ln(x^{1/3}) + \ln(f(\xi))$$

$$u = x^{1/3} f(\xi) \quad (4.14)$$

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dv}{-v} \quad (4.15)$$

$$\ln(v) = -\ln(x^{1/3}) + \ln(g(\xi)) \quad (4.16)$$

$$v = \frac{g(\xi)}{x^{1/3}} \quad (4.17)$$

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dU}{U} \quad (4.18)$$

$$\ln(U) = \ln(x^{1/3}) + \ln(\lambda) \quad (4.19)$$

$$U = \lambda x^{1/3} \quad (4.20)$$

“U” sadece x’in bir fonksiyonu olduğuna göre denklemden elde edilen λ , Y’nin bir fonksiyonu değildir. Genellikten bir kayıp olmaksızın $\lambda = 1$ alınabilir.

Benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\xi = \frac{Y}{x^{1/3}} \quad u = x^{1/3} f(\xi) \quad v = \frac{g(\xi)}{x^{1/3}} \quad U = x^{1/3} \quad (4.21)$$

Denklem (3.11) ve (3.12)' in terimlerini hesaplayalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-2/3} f - \frac{1}{3} f' Y x^{-1} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{g'}{x^{2/3}} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f' \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{f''}{x^{1/3}} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-2/3} \quad (4.26)$$

Bulunan bu denklemler denklem (3.11) ve (3.12) de yerleştirilirse aşağıdaki adi diferansiyel denklem takımı elde edilir.

Süreklilik denklemi

$$\frac{1}{3} x^{-2/3} f - \frac{1}{3} f' Y x^{-1} + \frac{g'}{x^{2/3}} = 0 \quad (4.27)$$

Denklemin her iki tarafı $3x^{2/3}$ ile çarpılırsa;

$$f - \xi f' + 3g' = 0 \quad (4.28)$$

Momentum denklemi

$$x^{1/3} f \left(\frac{1}{3} x^{-2/3} f - \frac{1}{3} f' Y x^{-1} \right) + \frac{g f'}{x^{1/3}} f' = \frac{1}{3} x^{-1/3} + (n+1) (f')^n f'' \frac{1}{x^{1/3}} + 6k f'' (f')^2 \frac{1}{x^{1/3}} \quad (4.29)$$

Denklemin her iki tarafı $3x^{1/3}$ ile çarpılırsa;

$$f^2 - f f' \xi + 3g f' = 1 + 3(n+1) (f')^n f'' + 18k (f')^2 f'' \quad (4.30)$$

Bölüm 3'te verilen sınır şartları

$$u(x,0) = 0 \quad v(x,0) = 0 \quad u(x,\infty) = 1 \quad (4.31)$$

Bu sınır şartları denklem (4.21) 'e uygulanırsa;

$$x^{1/3} f(0) = 0 \quad \frac{g(0)}{x^{1/3}} = 0 \quad x^{1/3} f(\infty) = x^{1/3} \quad (4.32)$$

$$f(0) = 0 \quad g(0) = 0 \quad f(\infty) = 1 \quad (4.33)$$

4.2 Sonlu Farklar

Sonlu farklar hesabı nümerik analizde geniş kullanılma alanına sahiptir. Hatta sayısal işlemlerin pek çoğu için baz teşkil ederler. Bu bölümde, sonlu farkların oldukça geniş bir incelemesi yapılacak ve sayısal yöntemler için gerekli olan kavramlar verilecektir.

Matematiksel problemler değişkenlerin sürekli fonksiyonları olarak karşımıza çıkarlar. Bu fonksiyonlar kapalı bir formülle tanımlanmışlardır ve bağımsız değişkenlerin verilmiş değerleri için fonksiyonların değerleri hesaplanabilir. Bir başka şekilde de fonksiyon, bağımsız değişkenlerin her bir değerine karşılık gelen değerlerin bir cümlesi olarak tanımlanabilir. Bu halde fonksiyon kapalı ya da açık bir formülle verilmemiştir.

Fonksiyonun, bağımsız değişkenin liste halinde verilmiş sıralı değerler ile tanımlanması halinde, süreklilik aralığındaki herhangi bir noktada formülle tanımlama yoktur. Verilen aralık (veya bölge)'de fonksiyonun mevcut olduğu varsayılır. Sonlu farklar kullanılarak aralığın içinde herhangi bir noktadaki değeri için iyi bir yaklaşım bulmak olasıdır.

Karşılaşılan problemlerin pek çoğunda, kapalı bir formül şeklinde çözüm bulma olası ise de, bazen bu kapalı analitik çözüm yerine ayırık noktalar cümlesinde sonlu farklar kullanarak çözüm elde etmek daha kolaydır.

4.2.1 Operatörlerle ilgili temel kavramlar

Matematikte kısalık, anlatım kolaylığı ve diğer bazı pratik amaçlarla bazı işlemlerin oluşumunu göstermek için “işlem yaptıran” diyebileceğimiz $D, \int, \Delta$ v.b. gibi semboller kullanılır. Bunlara genellikle “operatör” denir.

4.2.1.1 İki operatörün eşitliği

A ve B gibi iki operatör verilmiş olsun. $A = B$ veya $B = A$ olması ancak ve ancak keyfi bir f fonksiyonu için,

$$Af = Bf \quad (4.34)$$

olması mümkündür.

4.2.1.2 İki operatörün toplamı ve farkı

A, B operatörlerinin toplamı $A + B$ farkı $A - B$ şeklinde gösterilir. Tanım olarak,

$$(A + B)f = Af + Bf, (A - B)f = Af - Bf \text{ dir.} \quad (4.35)$$

4.2.1.3 İki operatörün çarpımı

A ve B operatörlerinin çarpımı AB veya A.B şeklinde gösterilir. Tanım olarak,

$$(A.B)f = (AB)f = A(Bf) \text{ dir.} \quad (4.36)$$

4.2.1.4 Birim operatör

Birim operatör I ile gösterilir ve tanım olarak $If = f$ dir. Uygulamada I yerine 1 kullanılır.

4.2.1.5 Sıfır operatör

Sıfır operatör 0 ile gösterilir. f keyfi bir fonksiyon olmak üzere $0f = 0$ şeklinde tanımlanır.

4.2.1.6 Invers operatörler

Herhangi iki A,B operatörleri arasında $AB = I$ bağıntısı varsa B operatörüne A operatörünün inversi denir.

$$B = A^{-1} = \frac{1}{A} \quad (4.37)$$

Şeklinde gösterilir. Buradan $A^{-1}f = g$ olması, ancak ve ancak $Ag = f$ olmasıyla mümkündür.

4.2.1.7 Operatörlerin lineerliği

Keyfi f ve g fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer bir A operatörü için,

$$A(f+g) = Af + Ag \quad (4.38)$$

$$A(f) = \alpha Af, \quad \alpha = \text{st} \quad (4.39)$$

Koşulları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir. Aksi halde lineer olmayan operatördür.

4.2.1.8 Operatörlerle işlemler

A,B,C herhangi üç operatör olduğunda;

a) $A+B = B+A$ Toplamada değişme özelliği

b) $A+(B+C) = (A+B)+C$ Toplamada birleşme özelliği

c) $AB = BA$ Çarpmada değişme özelliği

d) $A(BC) = (AB)C$ Çarpmada birleşme özelliği

e) $A(B+C) = AB+AC$ Dağılma özelliği

f) $A^m A^n = A^{m+n}$

4.2.2 Sonlu Fark Operatörleri

Bu bölümde fonksiyonun belli bir x_i noktasında değeri, gösterim kolaylığı bakımından $f(x_i)$ yerine f_i ile gösterilecektir.

4.2.2.1 İleri farklar ve Δ operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasında f_i , x_{i+h} noktasında f_{i+1} , ... $x_i + kh$ noktasında ise f_{i+h} değerini algıladığını varsayalım. Bu halde $f_{i+1} - f_i$ farkına f fonksiyonunun x_i noktasındaki ileri farkı denir ve

$$f_i = f_{i+1} - f_i \quad (4.40)$$

ile gösterilir. Daha açık olarak (4.40) formülü;

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (4.41)$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer tarzda ikinci mertebeden ileri fark tanımı yapılabilir.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta [\Delta f(x)] = \Delta [f(x+h)-f(x)] = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \quad (4.42)$$

den,

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)+f(x) \quad (4.43)$$

veya

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h)-2f(x+h)+f(x) \quad (4.44)$$

elde edilir. Yine bu sonuç kısaltılmış gösterim ile;

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad (4.45)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı şekilde üçüncü mertebeden ileri fark,

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i \quad (4.46)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Şimdi de fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin, ileri farklar yardımıyla nasıl hesaplanabileceğini görelim;

$f(x)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımını göz önüne alırsak;

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!} f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots \quad (4.47)$$

yazılabilir. Böylece;

$$f_{i+1} - f_i = hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots \quad (4.48)$$

elde edilir. h değerinin çok küçük olması durumunda h^2 ve daha sonraki terimler ihmal edilerek,

$$f'_i \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{1}{h} \Delta f_i \quad (4.49)$$

yazılabilir. Diğer taraftan;

$$f_{i+2} = f_i + \frac{2h}{1!} f'_i + \frac{4h^2}{2!} f''_i + \dots \quad (4.50)$$

Diğer taraftan;

$$f_{i+2} = f_i + \frac{2h}{1!} f'_i + \frac{4h^2}{2!} f''_i + \dots \quad (4.51)$$

$$2f_{i+1} = 2f_i + \frac{2h}{1!}f'_i + \frac{2h^2}{2!}f''_i + \dots \quad (4.52)$$

taraf tarafa çıkartılarak,

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + \frac{2h^2}{2}f''_i + \dots \quad (4.53)$$

veya,

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i = h^2f''_i + \dots \quad (4.54)$$

bulunur.

Burada da h^3 lü terim ve sonraki terimlerin ihmal edilmesiyle

$$f''_i \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \quad (4.55)$$

elde edilir.

(4.55) formülü ikinci mertebeden ileri farklar kullanılarak;

$$f''_i \cong \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad (4.56)$$

şeklinde gösterilebilir.

Sonuç olarak üçüncü mertebe türev formülünün de benzer yolla hesaplanmasıyla,

$$i) f'_i = \frac{\Delta f_i}{h} \quad ; \text{ Hata: } -\frac{h}{2}f''_i \quad (4.57)$$

$$\text{ii) } f_i'' \cong \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad ; \text{ Hata: } -h^2 f_i''' \quad (4.58)$$

$$\text{iii) } f_i''' \cong \frac{\Delta^3 f_i}{h^3} \quad ; \text{ Hata: } -\frac{3h^3}{2} f_i^{(IV)} \quad (4.59)$$

şeklinde özetlenebilir.

İleri fark formülleri;

Bir terim ileri fark ifadesi;

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (4.60)$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} \quad (4.61)$$

$$f_i''' = \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{h^3} \quad (4.62)$$

$$f_i^{(4)} = \frac{f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i}{h^4} \quad (4.63)$$

4.2.2.2 Geri farklar ve ∇ operatörü

f fonksiyonunun x_i noktasındaki Geri Farkı $f_i - f_{i-1}$ olarak tanımlanır ve

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad (4.64)$$

şeklinde gösterilir. (4.64) ifadesi açık olarak,

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h) \quad \text{dir.} \quad (4.65)$$

$f(x)$ in yüksek mertebeden geri farkları da benzer şekilde tanımlanabilir.

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i \quad (4.66)$$

$$\nabla^3 f_i = -f_{i-3} + 3f_{i-2} - 3f_{i-1} + f_i \quad (4.67)$$

Şimdi de geri farklar ile fonksiyonun türevleri arasındaki ilişkileri çıkarmaya çalışacağız;

$$f_{i-1} = f_i - \frac{h}{1!} f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots \quad (4.68)$$

olduğundan;

$$f_i - f_{i-1} = hf'_i - \frac{h^2}{2} f''_i + \dots \quad (4.69)$$

yazılabilir.

Yine h^2 li terimlerden sonraki terimler ihmal edilerek;

$$f'_i \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad (4.70)$$

bulunur. Geri farklar dikkate alınarak;

$$f'_i \cong \frac{\nabla f_i}{h} \quad ; \text{ Hata: } \frac{h}{2} f''_i \quad (4.71)$$

yazılabilir.

Şimdi de İleri Farklar ve Geri Farklar arasındaki bazı ilişkilere bakalım;

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad (4.72)$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad (4.73)$$

(4.72) ve (4.73) ifadeleri toplanarak;

$$f_{i+1} - f_{i-1} = \Delta f_i + \nabla f_i \quad (4.74)$$

bulunur.

Benzer şekilde;

$$\Delta^2 f_{i-1} = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \quad (4.75)$$

$$\nabla^2 f_{i+1} = f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \quad (4.76)$$

ifadeleri toplanarak;

$$\nabla^2 f_{i+1} + \Delta^2 f_{i-1} = 2(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad (4.77)$$

elde edilir.

Geri fark formülleri

Bir terim geri fark ifadesi;

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad (4.78)$$

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} \quad (4.79)$$

$$f_i''' = \frac{f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}}{h^3} \quad (4.80)$$

$$f_i^{(4)} = \frac{f_i - 4f_{i-1} + 6f_{i-2} - 4f_{i-3} + f_{i-4}}{h^4} \quad (4.81)$$

4.2.2.3 Kaydırma operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonu için kaydırma işlemi $f(x+h)$ olarak tanımlanır ve

$$Ef(x) = f(x + h) \quad (4.82)$$

veya kısaca;

$$Ef_i = f_{i+1} \quad (4.83)$$

şeklinde gösterilir.

İleri fark ve Geri Fark operatörleri gibi Kaydırma Operatörü de lineerdir.

Yani;

$$\Delta[f_i \mp g_i] = \Delta f_i \mp \Delta g_i \quad (4.84)$$

$$\nabla[f_i \mp g_i] = \nabla f_i \mp \nabla g_i \quad (4.85)$$

$$E[f_i \mp g_i] = Ef_i \mp Eg_i \quad (4.86)$$

Şimdi de Kaydırma Operatörü ile İleri Fark ve Geri Fark Operatörleri arasındaki ilişkiye bakalım;

$$Ef(x) = f(x + h) \quad (4.87)$$

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) \quad (4.88)$$

den,

$$Ef(x) = f(x) + \Delta f(x) \quad (4.89)$$

yazılabilir.

O halde sembolik olarak;

$$E = 1 + \Delta \quad (4.90)$$

eşitliğinden söz edebiliriz.

Benzer şekilde,

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} = f_i - E^{-1}f_i \quad (4.91)$$

olduğundan;

$$\nabla = 1 - E^{-1} \quad (4.92)$$

yazılabilir.

Yüksek mertebeden kaydırma operatörü;

$$E^2 f(x) = E(Ef) = f(x + 2h) \quad (4.93)$$

$$E^3 f(x) = E(E^2 f) = f(x + 3h) \quad (4.94)$$

$$\dots\dots\dots E^n f(x) = E(E^{n-1} f) = f(x + nh) \quad (4.95)$$

olarak tanımlanabilir.

Benzer şekilde,

$$E^{-1}f(x) = f(x - h) \quad (4.96)$$

$$E^{-2}f(x) = E^{-1}(E^{-1}f) = f(x - 2h) \quad (4.97)$$

$$E^{-n}f(x) = E^{-1}(E^{-(n-1)}f) = f(x - nh) \quad (4.98)$$

4.2.2.4 Merkezi farklar ve δ operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonunda, bağımsız değişkenin yarım adım ilersindeki değer ile, yarım adım gerisindeki değer arasındaki fark, Merkezi fark olarak bilinir ve

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (4.99)$$

şeklinde ya da kısaca;

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \quad (4.100)$$

şeklinde gösterilir. İkinci mertebeden Merkezi Fark ise yine tanımdan;

$$\delta^2 f_i = \delta\left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}\right) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \quad (4.101)$$

şeklindedir.

Dikkat edilirse (3.17) den,

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) = E^{1/2}f(x) - E^{-1/2}f(x) \quad (4.102)$$

olduğundan sembolik olarak;

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} \quad (4.103)$$

bulunur.

Merkezi fark formülleri;

Bir terim merkezi fark ifadeleri;

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (4.104)$$

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad (4.105)$$

$$f'''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} \quad (4.106)$$

$$f^{(4)}_i = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h^4} \quad (4.107)$$

4.2.2.5 Ortalama farklar ve μ operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonunda, bağımsız değişkenin yarım adım ilerisindeki fonksiyon değeri ile yarım adım gerisindeki fonksiyon değerlerinin aritmetik ortalamasına Ortalama Fark denir ve;

$$\mu f(x) = \frac{1}{2} \left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right) \right] \quad (4.108)$$

şeklinde gösterilir.

Ortalama Operatörü kısaca;

$$\mu f_i = \frac{1}{2} \left[f_{i+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.109)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

İkinci mertebeden ortalama operatörü de;

$$\mu^2 f_i = \mu(\mu f_i) = \mu \left[\frac{1}{2} (f_{i+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{1}{4} (f_{i+1} + 2f_i + f_{i-1}) \quad (4.110)$$

dır .

Diğer taraftan,

$$\mu f_i = \frac{1}{2} \left[(f_{i+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{1}{2} (E^{\frac{1}{2}} f_i + E^{-\frac{1}{2}} f_i) \quad (4.111)$$

olduğundan;

$$\mu = \frac{1}{2} \left[E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.112)$$

yazılabilir.

4.2.2.6 Türev ve diferansiyel operatörü

Bilindiği gibi bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi;

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad (4.113)$$

ile ve birinci mertebeden diferansiyeli de;

$$df(x) = f'(x).h = h.Df(x) \quad (4.114)$$

ile tanımlanır.

Yani kısaca,

$$f'(x) = Df(x) \quad (4.115)$$

$$df(x) = h.Df(x) \quad (4.116)$$

yazılabilir.

O halde,

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)Df(x_i) + \frac{1}{2!}(x - x_i)^2 D^2f(x_i) + \dots \quad (4.117)$$

Taylor serisinde $x = x_{i+1}$ ve $x_{i+1} - x_i = h$ yazılırsa,

$$f(x_{i+1}) = (1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots)f(x_i) \quad (4.118)$$

elde edilir. (4.118) de parantez içindeki seri e^{hD} ile gösterilirse,

$$f(x_{i+1}) = e^{hD}f(x_i) \quad (4.119)$$

bulunur.

Böylece,

$$E = e^{hD} \quad (4.120)$$

yazılabilir.

4.2.3 Bölünmüş Farklar

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerine karşılık $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ değerlerini aldığını kabul edelim. $f(x)$ in x_i ve x_j deki değerleri $f(x_i)$ ve $f(x_j)$ olmak üzere, Bölünmüş Fark;

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \quad (4.121)$$

şeklinde tanımlanır.

Önemli birçok uygulamada x_i ve x_j ardışık değerler olmaktadır. Dikkat edilirse,

$$f[x_i, x_j] = f[x_j, x_i] \quad (4.122)$$

dir.

Benzer şekilde,

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \quad (4.123)$$

ve

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (4.124)$$

tanımlanabilir.

4.2.4 Newton Raphson Yöntemi

$f(x)=0$ denkleminin bir kökünün yaklaşık hesabında kullanılan ikinci mertebeden bir italsyon yöntemidir. $f(x)$ in türevinin kolaylıkla hesaplanabileceği durumlarda bu yöntem rahatlıkla kullanılabilir.

Kökün yaklaşık değeri x_0 ve x_k gerçek kökü ile x_0 arasındaki fark h ise;

$$x_k = x_0 + h \quad (4.125)$$

yazılabilir.

Bu durumda,

$$f(x_k) = f(x_0 + h) = 0 \quad (4.126)$$

olacaktır. x_0 civarında $f(x)$ in Taylor seri açılımı yapılırsa $0 < \theta < 1$ olmak üzere

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.f'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0 + \theta h) \quad (4.127)$$

yazılabilir.

O halde,

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0 + \theta h) = 0 \quad (4.128)$$

elde edilebilir.

Şayet h yeterince küçük ise h^2 içeren son terim ihmal edilebilir. Böylece,

$$f(x_0 + hf'(x_0)) \cong 0 \quad (4.129)$$

veya

$$h \cong -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (4.130)$$

elde edilir.

h' ın bu yaklaşık değerini h_1 ile gösterirsek, birinci yaklaşım olarak;

$$x_1 = x_0 + h_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (4.131)$$

bulunur. Bu değer gerçek köke x_0 dan daha yakın olacaktır.

Bu işleme devam edilerek,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{aligned} \quad (4.132)$$

elde edilir.

4.2.4.1 Sistemler için Newton Raphson yöntemi

Dördüncü bölümde anlatılan Newton-Raphson yöntemine tekrar dönecek olursak; $f(x)=0$ denkleminde fonksiyonun x_i noktasındaki değeri ve türevleri belli iken,

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (4.133)$$

şeklinde Taylor seri açılımı yapılabilirdi. x_{i+1} kök ise $f(x_{i+1}) = 0$ olacağından;

$$0 \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (4.134)$$

veya,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (4.135)$$

sonucunu elde etmiştik. Bu formül iterasyonda kullanılacak denklemini ifade etmekteydi. Benzer şekilde sistemler için formül elde etmeye çalışacağız.

$$f(x,y) = 0 \quad (4.136)$$

$$g(x,y) = 0 \quad (4.137)$$

sistemini göz önüne alırsak, iki değişkenli fonksiyonlarda Taylor formülüne göre,

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) \cong f(x_i, y_i) + (x_{i+1} - x_i) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i, y_i} + (y_{i+1} - y_i) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_i, y_i} \quad (4.138)$$

$$g(x_{i+1}, y_{i+1}) \cong g(x_i, y_i) + (x_{i+1} - x_i) \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_i, y_i} + (y_{i+1} - y_i) \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{x_i, y_i}$$

yazılabilir. (x_{i+1}, y_{i+1}) kök ise;

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0 \quad (4.139)$$

$$g(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0 \quad (4.140)$$

dir.

Buna göre,

$$\frac{\partial f}{\partial x} x_{i+1} + \frac{\partial f}{\partial y} y_{i+1} = -f + \frac{\partial f}{\partial x} x_i + \frac{\partial f}{\partial y} y_i \quad (4.141)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} x_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial y} y_{i+1} = -g + \frac{\partial g}{\partial x} x_i + \frac{\partial g}{\partial y} y_i \quad (4.142)$$

elde edilir. (4.1) formülünde $f, g, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ türevleri (x_i, y_i) noktasında

alınacaktır. (4.142) sistemi iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistem olup, çözümü Cramer yöntemiyle yapılacak olursa;

$$x_{i+1} = \frac{\begin{bmatrix} -f + \frac{\partial f}{\partial x} x_i + \frac{\partial f}{\partial y} y_i & \frac{\partial f}{\partial y} \\ -g + \frac{\partial g}{\partial x} x_i + \frac{\partial g}{\partial y} y_i & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}} \quad (4.143)$$

den,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f \frac{\partial g}{\partial y} - g \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}} \quad (4.144)$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f \frac{\partial g}{\partial x} - g \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}} \quad (4.145)$$

elde edilir. Dikkat edilirse (4.2) ve (4.3) da, paydadaki ifadeler Jakobiyen olup $J(f,g)$ şeklinde gösterilebilir.

(4.2) ve (4.3) formülleri matrisyel şekilde de ifade edilebilir:

$$0 = f(x_i, y_i) + (x_{i+1} - x_i) \frac{\partial f}{\partial x} + (y_{i+1} - y_i) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.146)$$

$$0 = g(x_i, y_i) + (x_{i+1} - x_i) \frac{\partial g}{\partial x} + (y_{i+1} - y_i) \frac{\partial g}{\partial y} \quad (4.147)$$

ifadesi,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

şeklinde yazılabilir.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad F(x_i) = \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix}; \quad \Delta x = \begin{bmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

ile gösterilirse,

$$0 = F(x_i) + J.\Delta x \quad (4.150)$$

veya

$$J.\Delta x = -F(x_i) \quad (4.151)$$

elde edilir. $|J| \neq 0$ ise J^{-1} mevcuttur. Böylece,

$$\Delta x = -J^{-1}.F(x_i) \quad (4.152)$$

bulunur. Buradan da;

$$X_{i+1} = X_i + \Delta x = X_i - J^{-1}.F(x_i) \quad (4.153)$$

sonucu elde edilir.

Şimdi de n bilinmeyen ve n denklemden oluşan,

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (4.154)$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

sistemine Newton-Raphson yöntemini uygulayalım: n değişkenli fonksiyonlarda Taylor açılımını kullanılarak,

$$f_{1,i+1} \cong f_{1,i} + (x_{1,i+1} - x_{1,i}) \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} + (x_{2,i+1} - x_{2,i}) \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} + (x_{3,i+1} - x_{3,i}) \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_3} + \dots + (x_{n,i+1} - x_{n,i}) \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n} \quad (4.155)$$

$$f_{2,i+1} \cong f_{2,i} + (x_{1,i+1} - x_{1,i}) \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} + (x_{2,i+1} - x_{2,i}) \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} + (x_{3,i+1} - x_{3,i}) \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_3} + \dots + (x_{n,i+1} - x_{n,i}) \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_n} \quad (4.156)$$

.....

$$f_{n,i+1} \cong f_{n,i} + (x_{n,i+1} - x_{n,i}) \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_1} + (x_{n,i+1} - x_{n,i}) \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_2} + (x_{n,i+1} - x_{n,i}) \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_3} + \dots + (x_{n,i+1} - x_{n,i}) \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_n} \quad (4.157)$$

yazılabilir. $f_{1,i+1}, f_{2,i+1}, \dots, f_{n,i+1}$ değerleri sıfıra eşitlenip,

$$[F_i]^T = [f_{1,i} \quad f_{2,i} \quad \dots \quad f_{n,i}] \quad (4.158)$$

$$[X_i]^T = [x_{1,i} \quad x_{2,i} \quad \dots \quad x_{n,i}] \quad (4.159)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

yazılarak,

$$[X_{i+1}] = [X_i] - [J]^{-1} \cdot [F_i] \quad (4.161)$$

elde edilir.

4.3. Nümerik Çözümler

Bu bölümde ölçekleme dönüşümüyle elde ettiğimiz probleme ait klasik sınır şartları (4.33)'de sınır tabakası denklemleri (4.28) ve (4.30) için sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümler yapılacaktır. Bu problemde sonlu farklar yöntemi diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri elde edilemediği için nümerik ve yaklaşık çözümleri verebilecek bir yöntemdir. Problemde birinci ve ikinci mertebeden türev ifadeleri için sırasıyla merkezi farklar (4.104) ve (4.105) kullanılır.

Merkezi farklar da elde edilen türev denklemleri denklem (4.28) ve (4.30)'da yerine yazılırsa;

$$f_i - \xi_i \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right) + 3 \left(\frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h} \right) = 0 \quad (4.162)$$

$$f_i^2 - f_i \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right) \xi_i + 3g_i \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right) - 1 - 3(n+1)(f_i)^n \left(\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \right) - 18k \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right)^2 \left(\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \right) = 0 \quad (4.163)$$

Hesaplamalarda, denklem (4.162) ve (4.163) de $\xi = [0,10]$ ve $h = 0.1$ olarak alınmıştır. Denklemlere sınır şartları uygulandığında $i=1$ için denklem (4.162)

$$f_1 - \xi_1 \left(\frac{f_2 - f_0}{0.2} \right) + 3 \left(\frac{g_2 - g_0}{0.2} \right) = 0 \quad (4.164)$$

Burada sınır şartları $f(0) = 0$ ve $g(0) = 0$ $i = 1$ için $f_0 = 0$, $g_0 = 0$ ve $\xi_1 = 0.1$ olur.

Değerler yerine kullanılırsa;

$$i = 1 \text{ için } f_1 - \left(\frac{f_2}{2}\right) + 3\left(\frac{g_2}{2}\right) = 0 \quad (4.165)$$

i=99 için denklem (4.162)

$$f_{99} - \xi_{99} \left(\frac{f_{100} - f_{98}}{0.2}\right) + 3\left(\frac{g_{100} - g_{98}}{0.2}\right) = 0 \quad (4.166)$$

Burada sınır şartları $f(\infty) = 1$ ve $g'(\infty) = a$ (sınır şartını keyfi bir sayı olarak alınır) kabulü ile $i = 99$ için $f_{100} = 1$, $g_{100} = g_{99} + ha$ ve $\xi_{99} = 9.9$ olur.

Değerler yerine kullanılırsa;

$$i = 99 \text{ için } f_{99} - 9.9 \left(\frac{1 - f_{98}}{0.2}\right) + 3\left(\frac{g_{99} + 0.1a - g_{98}}{0.2}\right) = 0 \quad (4.167)$$

Denklemlere sınır şartları uygulandığında;

i=1 için denklem (4.163)

$$\begin{aligned} f_1^2 - f_1 \left(\frac{f_2 - f_0}{0.2}\right) \xi_1 + 3g_1 \left(\frac{f_2 - f_0}{0.2}\right) - 1 - 3(n+1)(f_1)^n \left(\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(0.2)^2}\right) \\ - 18k \left(\frac{f_2 - f_0}{0.2}\right)^2 \left(\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(0.2)^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.168)$$

Burada sınır şartları $f(0) = 0$ ve $g(0) = 0$ $i = 1$ için $f_0 = 0$, $g_0 = 0$ ve $\xi_1 = 0.1$ olur.

Değerler yerine kullanılırsa;

i=1 için;

$$f_1^2 - f_1 0.1 \left(\frac{f_2}{0.2} \right) + 3g_1 \left(\frac{f_2}{0.2} \right) - 1 - 3(n+1)(f_1)^n \left(\frac{f_2 - 2f_1}{(0.2)^2} \right) - 18k \left(\frac{f_2}{0.2} \right)^2 \left(\frac{f_2 - 2f_1}{(0.2)^2} \right) = 0 \quad (4.169)$$

i=99 için denklem(4.163)

$$f_{99}^2 - f_{99} \left(\frac{f_{100} - f_{98}}{0.2} \right) \xi_{99} + 3g_{99} \left(\frac{f_{100} - f_{98}}{0.2} \right) - 1 - 3(n+1)(f_{99})^n \left(\frac{f_{100} - 2f_{99} + f_{98}}{(0.2)^2} \right) - 18k \left(\frac{f_{100} - f_{98}}{0.2} \right)^2 \left(\frac{f_{100} - 2f_{99} + f_{98}}{(0.2)^2} \right) = 0 \quad (4.170)$$

Burada sınır şartları $f(\infty) = 1$ kabulü ile $i = 99$ için $f_{100} = 1$ ve $\xi_{99} = 9.9$ olur.

Değerler yerine kullanılırsa;

$$f_{99}^2 - f_{99} 9.9 \left(\frac{1 - f_{98}}{0.2} \right) + 3g_{99} \left(\frac{1 - f_{98}}{0.2} \right) - 1 - 3(n+1)(f_{99})^n \left(\frac{1 - 2f_{99} + f_{98}}{(0.2)^2} \right) - 18k \left(\frac{1 - f_{98}}{0.2} \right)^2 \left(\frac{1 - 2f_{99} + f_{98}}{(0.2)^2} \right) = 0 \quad (4.171)$$

elde edilmektedir.

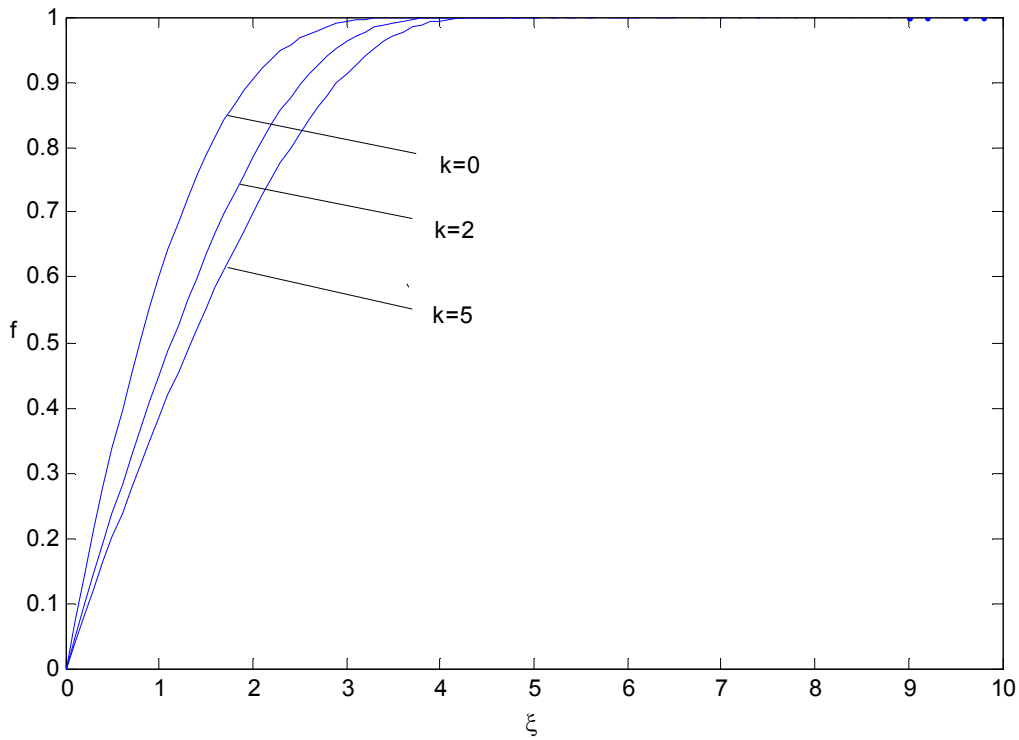
Denklemleri çözmek için yukarıda bulunan değerler matlab programında yazıldı. Sonlu farklar metodunun uygulanabilmesi için başlangıçta belirli aralıklarla fonksiyonlarının tahmini değerlerinin verilmesi gerekmektedir. Bu tahmini değerler ne kadar iyi olursa yakınsama ihtimalide o kadar artmakta veya çözümleri yakınsamak için kullanılan bilgisayar zamanı azalmaktadır.

Daha sonra problemler için $n > 0$ ve $n < 0$ 'ın farklı değerleri için ($k=1$) farklı çözümler elde ettik. Şekil 4.1-3 de sabit n ($n=0.2$) ve farklı k değerleri ($k=0, 2, 5$) için f , g ve f' nin

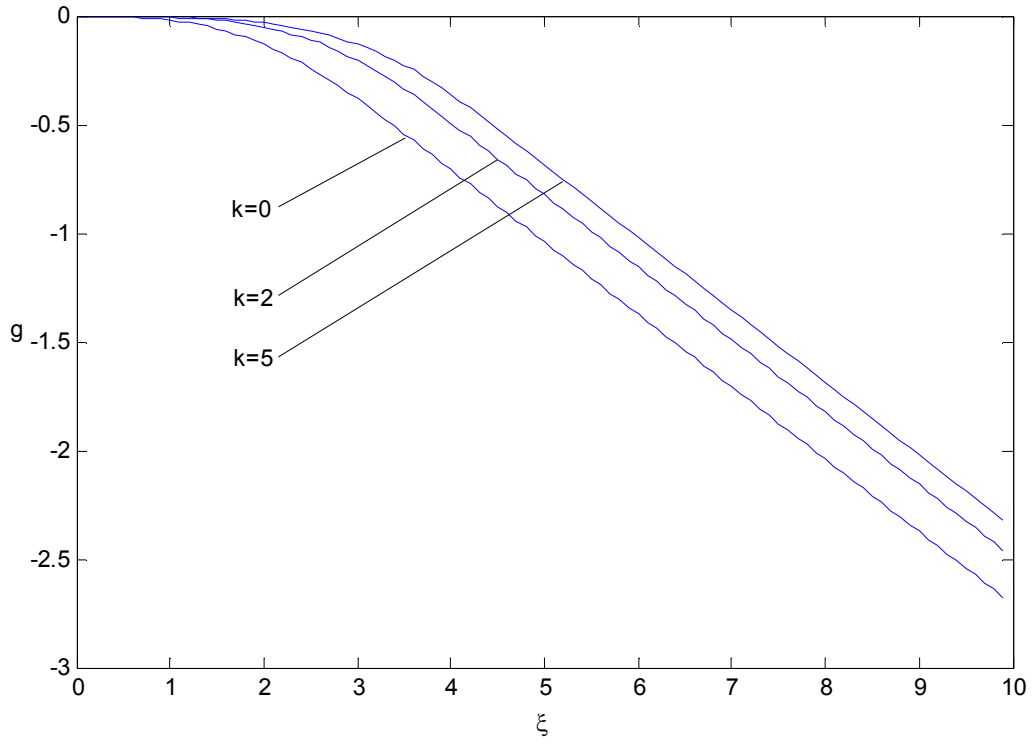
Y'ye göre karşılaştırmalı grafikleri verilmiştir. Şekil 4.4-6 'da sabit k ($k=1$) ve farklı negatif n değerleri ($n=0, -0.2, -0.4$) için f , g ve f' nin Y'ye göre karşılaştırılmalı grafikleri verilmiştir. Şekil 4.7-9 'da sabit k ($k=1$) ve farklı pozitif n değerleri ($n=0, 0.2, 0.4$) için f , g ve f' nin Y'ye göre karşılaştırılmalı grafikleri verilmiştir.

Şekil 4.1-3'e bakıldığında artan k değerlerinde sınır tabakasının kalınlaştığı söylenebilir. Şekil 4.4-6 n'in negatif değerleri için çizilmiştir. Şekil 4.4 f fonksiyonunun ξ 'ye göre, Şekil 4.5 g fonksiyonunun ξ 'ye göre ve Şekil 4.6 f' fonksiyonunun ξ 'ye göre değişimlerini göstermektedir. Buradan n 'nin negatif değerleri için sınır tabakası kalınlaştığı gözlenmektedir.

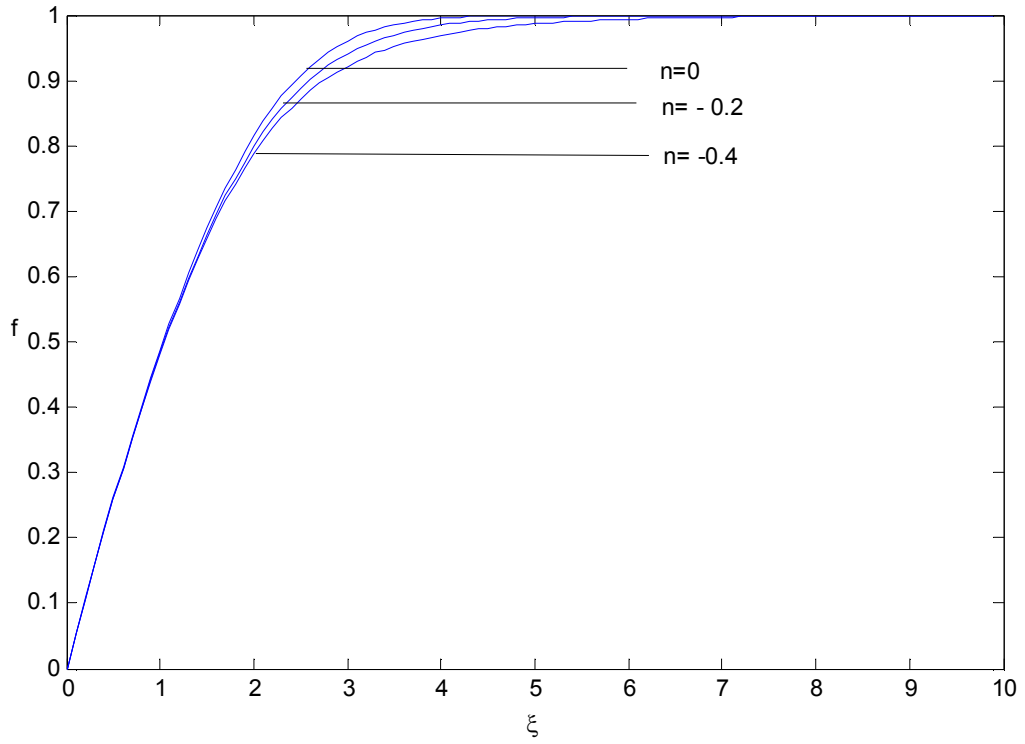
Şekil 4.7-9 n'in pozitif değerleri için çizilmiştir. Şekil 4.7 f fonksiyonunun ξ 'ye göre, Şekil 4.8 g fonksiyonunun ξ 'ye göre ve Şekil 4.9 f' fonksiyonunun ξ 'ye göre değişimlerini göstermektedir. Buradan n 'nin pozitif değerleri için sınır tabakası incelendiği gözlenmektedir.



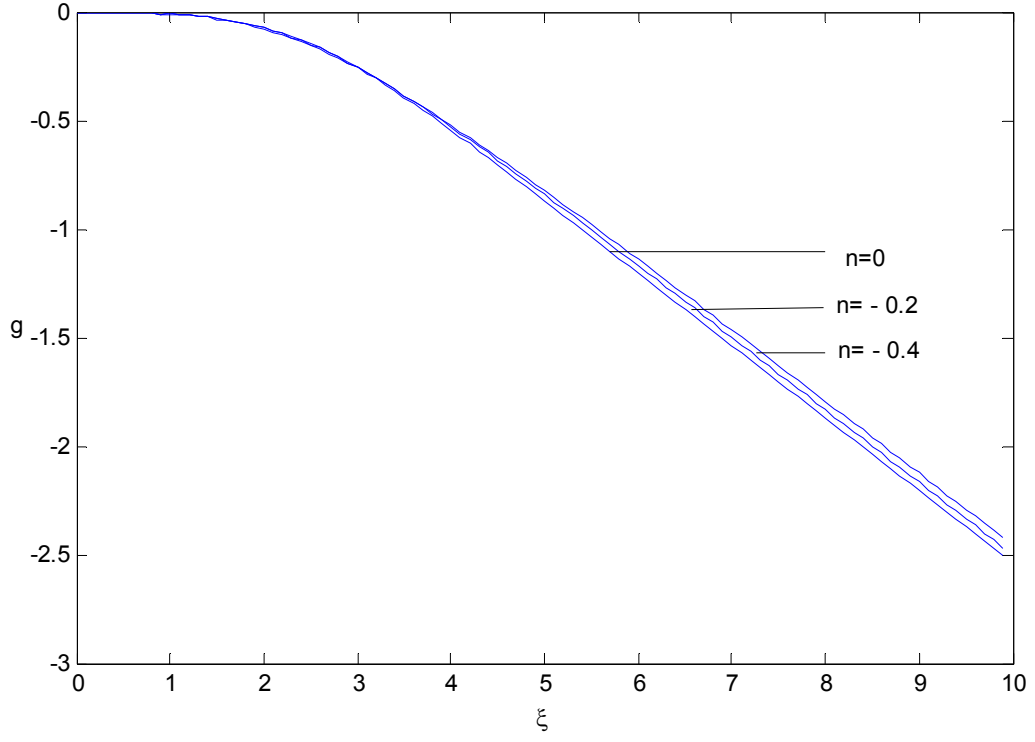
Şekil 4.1 x yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi



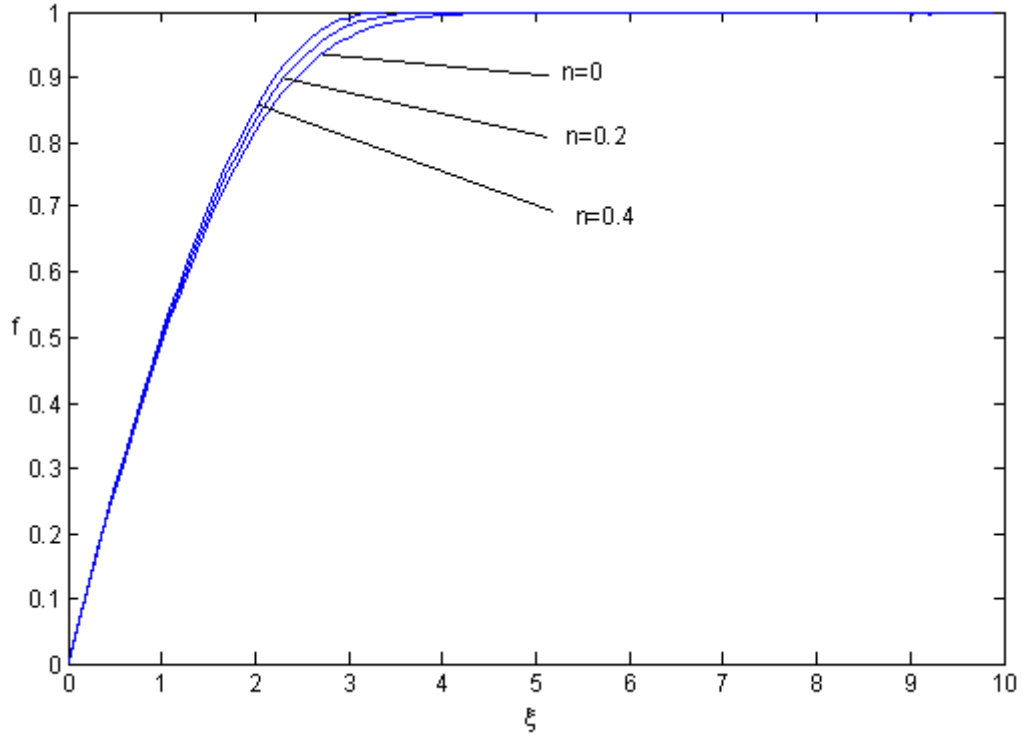
Şekil 4.2 y yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi



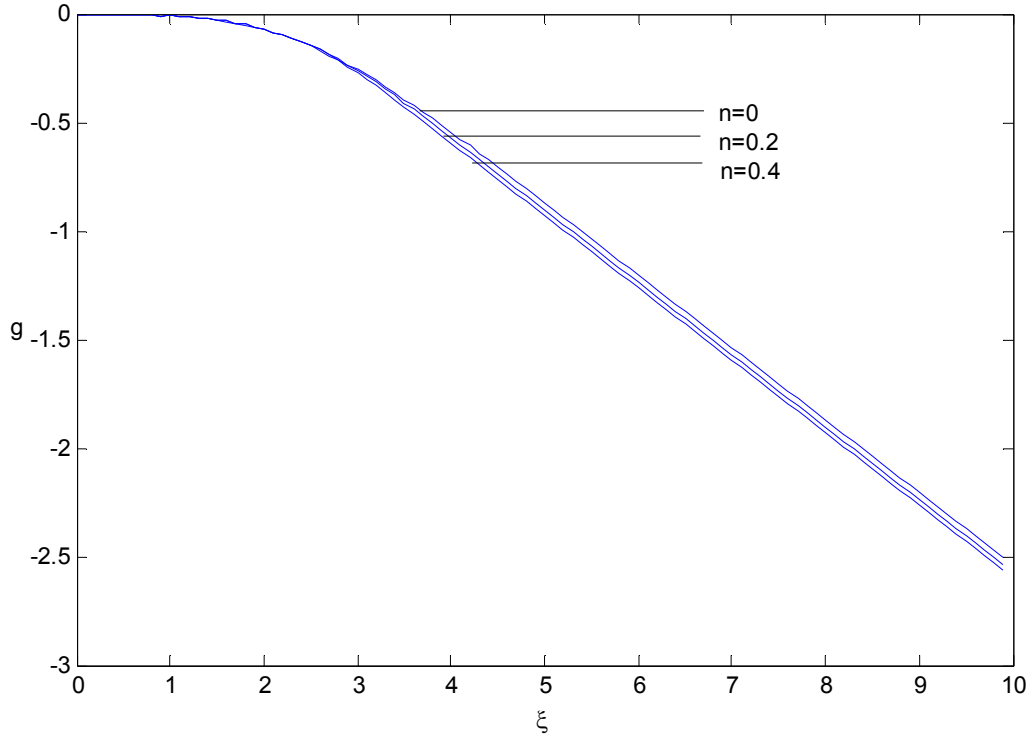
Şekil 4.3 x yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi



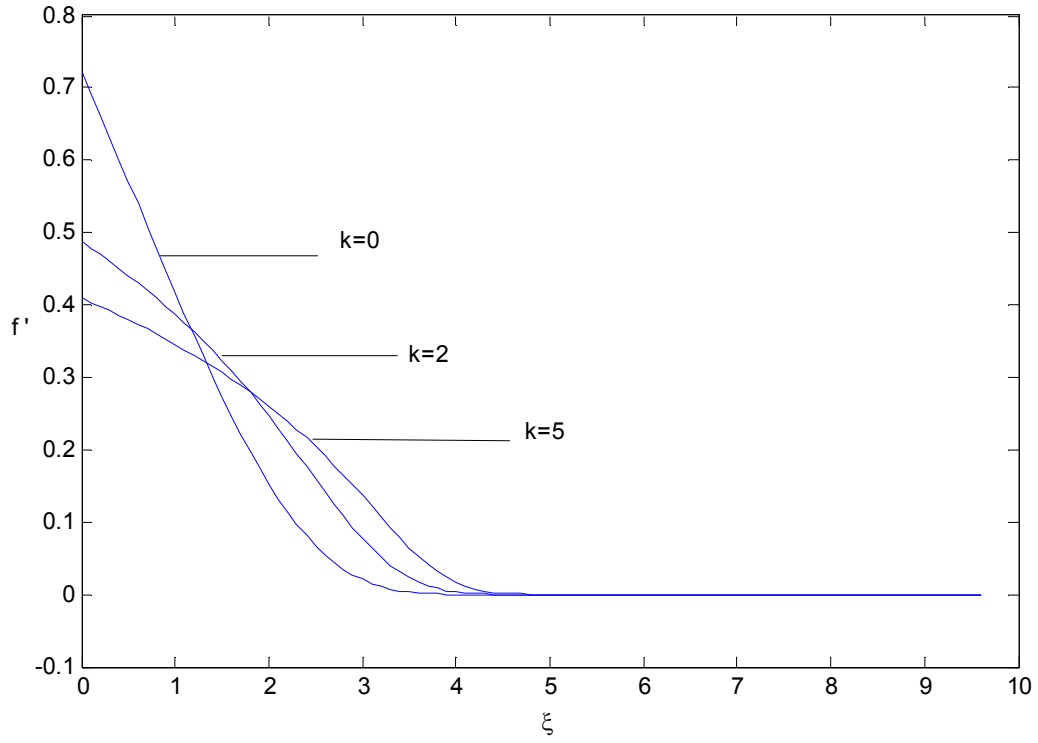
Şekil 4.4 y yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi



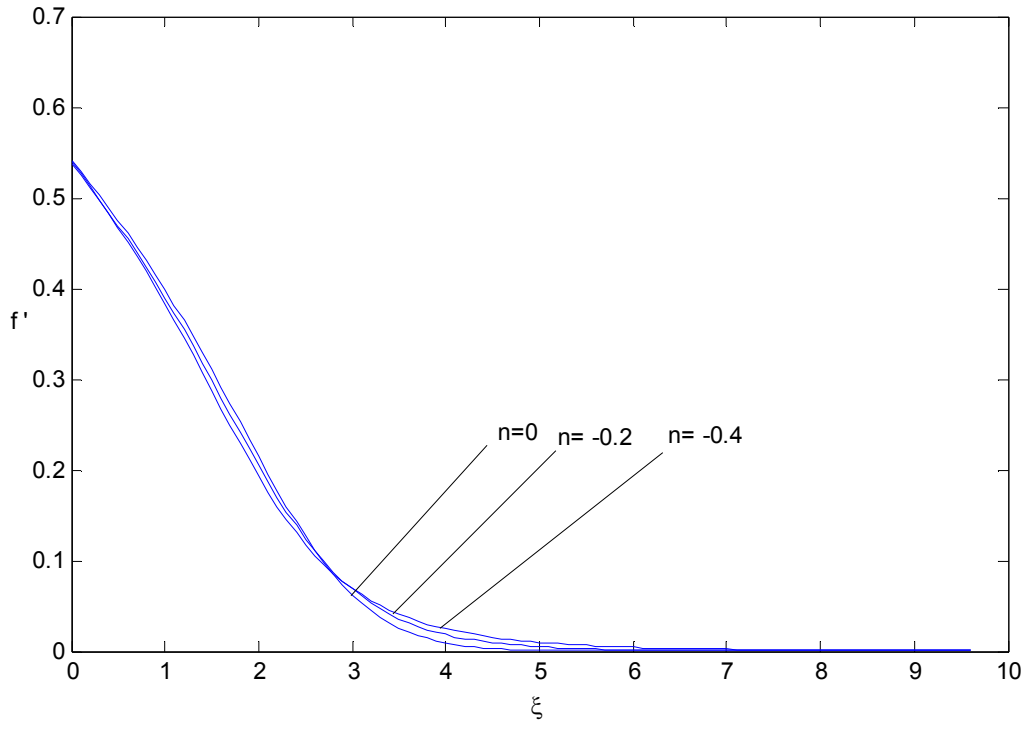
Şekil 4.5 x yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi



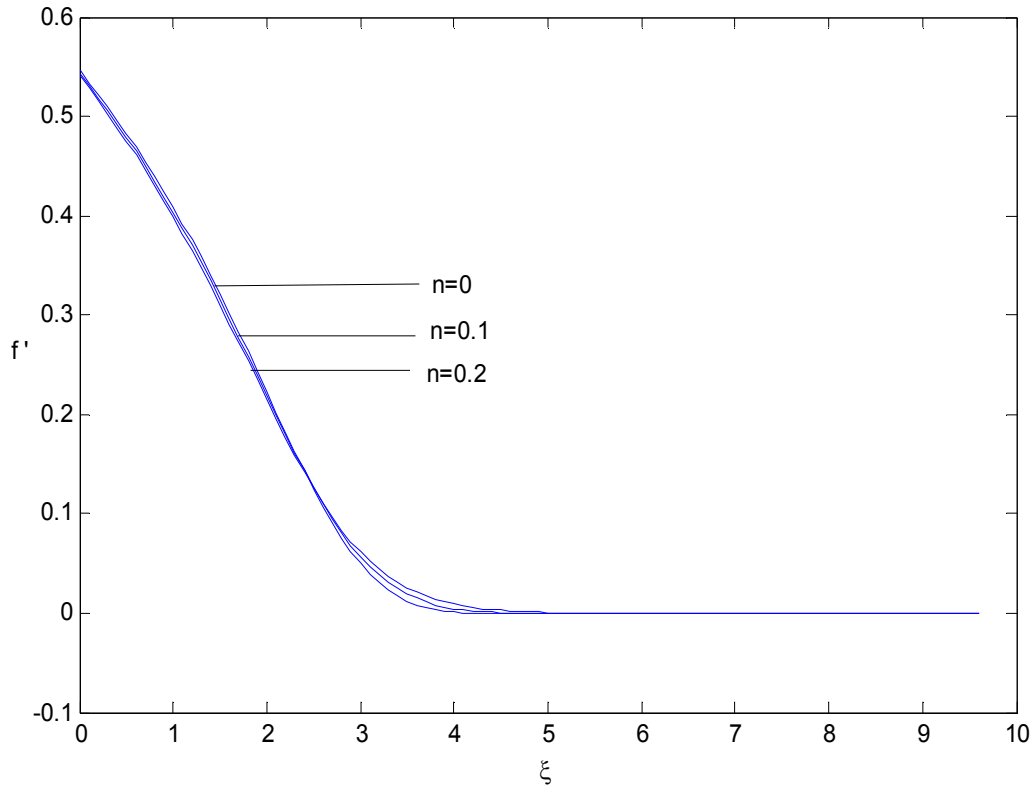
Şekil 4.6 y yönündeki hızın benzerlik değişkenine göre değişimi



Şekil 4.7 x yönündeki hızın türevinin benzerlik değişkenine göre değişimi



Şekil 4.8 x yönündeki hızın türevinin benzerlik değişkenine göre değişimi



Şekil 4.9 x yönündeki hızın türevinin benzerlik değişkenine göre değişimi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında çok özel bir kayma gerilmesi modeli ele alınarak bu modele ait sınır tabakası denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlerin çözümleri yapılmıştır. Ele alınana kayma gerilmesi modeli daha önce hiçbir çalışmada ele alınmamıştır. Model power-law akışkan modeli ile üçüncü derece akışkan modelinin bir birleşimi biçimindedir. Daha önce yapılan çalışmalara göz gezdirildiğinde bu çalışmaların sadece power-law akışkan modeli veya üçüncü derece akışkan modeli gibi modeller üzerinde yapıldığı görülmektedir. Literatürde bu iki Newtonyen olmayan akışkan modeli ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Değişik akış problemleri ele alınıp incelenmiştir.

Çalışmada akışkanlar mekaniğinde çok önemli bir yere sahip olan sınır tabakası akışları bu özel model için ele alınıp incelenmiştir. Akışkan modelinde öncelikle en genel hareket denklemleri çıkarılmıştır. İvme terimleri, viskoz terimler, power-law terimi ve üçüncü derece akışkan terimleri ayrı ayrı elde edilmiştir. Tezin sonraki kısmında ise sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak sınır tabakası denklemleri elde edilmiştir. Sınır tabakası yaklaşımında x koordinatı ve bu yöndeki hız u bir mertebesinde, basınç terimi p bir mertebesinde, y koordinatı ve bu yöndeki hız δ mertebesinde alınmıştır. Bu yaklaşım ile hareket denklemleri elde edilmiştir. Bu hareket denklemlerinde power-law üssü ($n=0$) alındığında sınır tabakası denklemleri sadece üçüncü dereceden akışkan terimini ihtiva eden sınır tabakası denklemlerine dönüşmektedir. Eğer denklemlerde üçüncü derece akışkan katsayısı $k=0$ alınır ise sınır tabakası denklemleri power-law akışkan modeline dönüşmektedir. Eğer $n=0$ ve $k=0$ alınır ise sınır tabakası denklemleri Newtonyen akışkanlar için elde edilmiş olur.

Yukarıdaki yaklaşım ile elde edilen sınır tabakası denklemlerini yüksek non-lineriteye sahip kısmi diferansiyel denklem sistemi biçimindedir. Bu kısmi diferansiyel denkleme ait sınır şartı olarak literatürde de çok sık kullanılan klasik sınır şartları alınarak çözüme gidilmiştir. Denklemlerin çözümü için benzerlik dönüşümü kullanılmıştır. Benzerlik dönüşümlerinin çok çeşitleri mevcuttur. Bu çalışmada ölçekleme dönüşümü kullanılmıştır. Kısmi diferansiyel denklemlere bu dönüşüm uygulanmış ve denklemlerin bu dönüşümü kabul ettiği görülmüştür. Dönüşümden sonra denklemlere ait benzerlik

değişkenleri ve yeni hız fonksiyonları elde edilmiştir. Bu yeni değişkenler denklemde yerlerine yazılarak kısmi diferansiyel denklem sistemi adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmesi sağlanmıştır. Denklemler adi diferansiyel denklem formuna inerken sınır şartları da başarı ile adi diferansiyel forma indirilebilmiştir. Ölçekleme dönüşümünün başarı ile uygulanması bu tez çalışmasına çok büyük bir kolaylık getirmiştir. Çünkü her zaman için bir kısmi diferansiyel denklemi çözmek bir adi diferansiyel denklemi çözmekten zordur. Dönüşüm sayesinde denklemler adi diferansiyel denklem formuna indirilmek sureti ile çok büyük bir avantaj elde edilmiştir. Elde edilen adi diferansiyel denklemlerde x koordinatı yönündeki hız fonksiyonu f , y koordinatı yönündeki hız fonksiyonu g olarak belirlenmiştir.

Bundan sonraki aşamada elde edilen adi diferansiyel denklem sisteminin çözümleri üzerinde durulmuştur. Çözüm için sonlu farklar metodu tercih edilmiştir. Bunun içinde ortalama farklar kullanılmıştır. Yüz düğüm noktası için çözüm yapılmıştır. Elde edilen bu büyük denklem sistemi Newton iterasyonu kullanılarak çözülmüştür. Newton iterasyonunu kullanarak çalışan bir program Matlab paket programında yazılmış ve programa girilen denklem sistemi başarı ile çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar grafiklerle ifade edilmiştir. Elde edilen grafikler power-law üssü n 'nin ve üçüncü derece akışkan katsayısı k 'nin çeşitli değerleri için hız fonksiyonlarının değişimini göstermektedir.

k 'nin çeşitli değerleri için elde edilen çözümler incelendiğinde artan k değerlerine karşılık sınır tabaksının kalınlaştığı gözlenmektedir. Buna karşılık k arttıkça x ve y koordinatı yönündeki hızların azaldığı görülmüştür. $n > 0$ için elde edilen çözümler incelendiğinde ise n arttıkça sınır tabakası kalınlığının azaldığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum için hız fonksiyonları incelendiğinde ise n değeri arttıkça hızların arttığı sonucu ortaya çıkmıştır. $n < 0$ değerleri için çizdirilen grafikler incelendiğinde ise n 'nin azalan değerlerine karşılık sınır tabakası kalınlığının arttığı görülmektedir. Hızlar bazında incelendiğinde ise n 'nin azalan değerlerine karşılık hızlarında azaldığı görülmüştür. Ayrıca çözümlerde f fonksiyonunun türevine ait grafiklerde elde edilmiştir. Bu grafikler kayma gerilmesinin hesap edilmesinde kullanılmaktadır.

6. KAYNAKLAR

Abbasbandy S., Yürüsoy M. and Pakdemirli M., 2008, The analysis approach of boundary layer equations of power-law fluids of second grade, [Z. Naturforschung A - A Journal of Physical Sciences](#), 63a ,564-570,.

Acrivos, A. M., Shah, J., and Petersen, E., 1960. Momentum and heat transfer in laminar boundary -layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces, A.I.Ch.E.J., 6, 312-317.

Astin, J. R., Jones S., and Lockyer, P., 1973. Boundary layers in non-Newtonian fluids, Mecanique, 12, 527-539.

Beard, D.W., and Walters, K., 1964. Elastico, viscous boundary layer flows, Proc. Camb.Phil. Soc, 60, 667-674.

Na ,T.Y., and Hansen, A.G., 1967. Similarity solutions of a class of laminar three dimensional boundary layer equations of power-law fluids, International Journal of Non-Linear Mechanics, 2, 373-385.

Pakdemirli, M., 1992. The boundary layer equations of third grade fluids, International Journal of Non-Linear Mechanics, 27, 785-793.

Pakdemirli, M., 1993. Boundary layer flow of power-law fluids past arbitrary profiles, IMA J. Appl. Math., 50, 133-148.

Pakdemirli, M., 1994. Conventional and multiple deck boundary layer approach to second and third grade fluids, International Journal of Engineering Science, 32, 141-154.

Pakdemirli, M., and Suhubi, E.S., 1992a. Boundary layer theory for second order fluids., International Journal of Non-Linear Mechanics, 30, 523-532.

Pakdemirli, M., and Suhubi, E.S., 1992b. Similarity solutions of boundary layer equations for second order fluids, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 30, 611-629.

Pakdemirli M., Aksoy Y., Yürüsoy M. and Khalique C. M., 2008, Symmetries of boundary layer equations of power-law fluids of second grade, *Acta Mechanica Sinica*, 24/ 6, 661-670,.

Rajeswari, G.K., and Rathna, S.L., 1962. Flow of a particular class of non-Newtonian visco-elastic and visco-inelastic fluids near a stagnation point, *ZAMP*, 13, 43-.

Rajagopal, K.R., Gupta, A.S., and Wineman, A.S., 1980. On a boundary layer theory for non-Newtonian fluids, *Letters in Applied Engineering Science*, 18, 875-.

Schowalter ,W.R., 1960. The aplication of boundary layer theory to power-law pseudoplastic fluids: Similarity solutions, *A.I. Ch.E.J.*, 6, 24-28.

Srivastava, A.C., 1958. The flow of non-Newtonian liquid near stagnation point, *ZAMP*, 9, 80-.

Yürüsoy M., 2006, Unsteady boundary layer flow of power-law fluid on stretching sheet surface, *International Journal of Engineering Science*, 44/5-6, 325-332.

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Ömer AKKAN
Doğum Yeri	AFYON KARAHİSAR
Doğum Tarihi	09.12.1980
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dili	İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	Afyon Lisesi (1995-1999)
Ön Lisans	Pamukkale Üniversitesi Denizli Meslek Yüksek Okulu Makine Bölümü (2000-2002)
Lisans	Pamukkale Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Otomotiv Öğretmenliği (2004-2007)
Yüksek Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Makine Eğitimi (2007-2010)