

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
FEN ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

***l*-GRUPLARINDA HEMEN HEMEN *f*-DÖNÜŞÜMLERİ**

Emrah YILMAZ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ruşen YILMAZ

JÜRİ ÜYELERİ

Doç. Dr. Faruk KARAASLAN

Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN

RİZE-2021

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

***l*-GRUPLARINDA HEMEN HEMEN *f*-DÖNÜŞÜMLERİ**

Prof. Dr. Ruşen YILMAZ danışmanlığında, Emrah YILMAZ tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararı ile oluşturulan jüri tarafından 23/06/2021 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Ruşen YILMAZ	
Üye	: Doç. Dr. Faruk KARAASLAN	
Üye	: Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN	

Doç. Dr. Ahmet YANIK
ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışmada l -grupları ve l -halkaları üzerinde tanımlı hemen hemen f -dönüşümlerinin simetri özelliklerini araştırmayı amaçlıyoruz.

Bu çalışmanın bu noktaya gelinceye kadar emeği geçen ve tecrübelerini benimle paylaşan, değerli eleştiri ve fikirleri ile beni yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. Ruşen YILMAZ'a ve çalışma süresince manevi desteklerini esirgemeyen Aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu Yüksek Lisans/Doktora Tezi tarafındannolu proje ile desteklenmiştir.

Emrah YILMAZ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “ l -gruplarında hemen hemen f -dönüşümleri” başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. .../.../...

Emrah YILMAZ

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

l-GRUPLARINDA HEMEN HEMEN *f*-DÖNÜŞÜMLERİ

Emrah YILMAZ

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Prof. Dr. Ruşen YILMAZ

Bu çalışmada *l*-grupları ve *l*-halkalarının temel özellikleri ve *l*- grupları üzerinde tanımlı hemen hemen *f*-dönüşümlerinin literatürde yer alan önemli sonuçları irdelenerek herhangi bir hemen hemen *f*-dönüşümünün simetrik özelliği incelenmiştir. Ayrıca birim elemanlı bir hemen hemen *f*-halkası üzerinde tanımlı bir halka homomorfizmasının karakterizasyonu için yeter ve gerek koşullar araştırılmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilerek *l*-grupları ve *l*-halkalarının temel özellikleri, bunlar üzerinde tanımlanan çeşitli dönüşümler ve bazı önemli *l*-halka sınıflar tanımlanarak bazı temel özellikler incelenmiştir. İkinci bölümde, genel olarak Ben Amor ve Boulablier’in 2013 yılında basılan “Almost *f*-maps and almost *f*-rings” çalışması esas alınarak çalışmamızın temelini teşkil eden hemen hemen *f*-halkaları ve *l*-grupları üzerinde tanımlı hemen hemen *f*-dönüşümlerinin temel özellikleri işlenmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, bu çalışmadan elde edilen sonuçlar verilmiştir. Son bölümde ise *l*- grupları üzerinde tanımlı hemen hemen *f*-dönüşümleri için önerilerde bulunulmuştur.

2021, 37 sayfa

Anahtar Kelimeler: *l*-grup, *l*-halka, *l*-homomorfizma, hemen hemen *f*-halka.

ABSTRACT

ALMOST f -MAPS IN THE l -GROUPS

Emrah YILMAZ

Recep Tayyip Erdogan University
Graduate Schools
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ruşen YILMAZ

In this study, by examining the basic properties of l -groups and l -rings and the important results of f -maps defined on l -groups in the literature, the symmetrical properties of any almost f -maps are examined. In addition, sufficient and necessary conditions for characterization of a ring homomorphism defined on an almost f -ring with a unit element are investigated.

This thesis consists of four chapters: In the first chapter, by giving basic definitions and theorems, the basic properties of l -groups and l -rings, various maps defined on them and some important l -ring classes are defined and some basic properties are examined. In the second chapter, based on the “Almost l -maps and almost f -rings” study published by Ben Amor and Boulablier in 2013, we discuss the basic properties almost l -maps defined on l -groups and almost f -ring that form the basis of our study. In the third chapter of the study, the results obtained from this study are given. In the last chapter, some proposals are made for almost f -maps defined on l -groups for further studies.

2021, 37 pages

Keywords: l -group, l -ring, l -homomorphism, almost f -ring.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	VI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Latis Sıralı Gruplar	2
1.3. Latis Sıralı Halkalar.	10
1.4. Pozitif Bilineer Dönüşümler	16
2. HEMEN HEMEN f -DÖNÜŞÜMLERİ	18
3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	34
4. ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	37

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq$	Kısmi sıralama bağıntısı
$(L, \leq)$	Kısmi sıralı küme
$x \wedge y$	x ve y nin infimumu
$x \vee y$	x ve y nin supremumu
$ x $	x elemanının modülü
x^+	x elemanının pozitif kısmı
x^-	x elemanının negatif kısmı
$\perp$	Diktir
$\subset$	Alt küme
$[,]$	Sıralı aralık
$C[0,1]$	$[0,1] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi
G^+	G nin pozitif elemanlar kümesi
R^+	R l -halkasının pozitif elemanlar kümesi
$A/N(A)$	A uzayının $N(A)$ alt uzayına göre bölüm uzayı
$\dot{I}(B)$	B izotropik elemanlar kümesi
H^d	H kümesinin dik tümleyeni
H^{dd}	H^d ikinci dik tümleyeni
$\zeta_R(B)$	B nin sağ çekirdeği
$\zeta_L(B)$	B nin sol çekirdeği

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

2001 yılında herhangi bir arşimedyan f -halkasının değişmeli olduğu Buskes ve Holland [7] tarafından ispatlandı. 2010 yılında, Buskes ve Holland'ın bu sonucunun bir genellemesi olarak, Steinberg G bir değişmeli l -grup ve H bir arşimedyan l -grubu olmak üzere her $B: G \times G \rightarrow H$ hemen hemen f -dönüşümünün simetrik olduğunu ispatladı [10, Teorem 3.8.14]. Steinberg bu sonucu Buskes ve Holland'ın sonucunun bir genellemesi olarak göz önüne alınmasına rağmen Ben Amor ve Boulablier'in 2013 yılında basılan "Almost f -maps and almost f -rings" [2] çalışmasında aslında bu iki sonucun denk olduğu sonucuna varılmaktadır. Ayrıca, Ben Amor ve Boulablier'in bu çalışmasında, Huijsmans ve de Pagter [8] yarı-asal f -cebirleri için elde ettikleri bir sonucun genel şekli olarak birimli elemanlı bir hemen hemen f -halkası üzerinde tanımlı bir halka homomorfizmasının karakterizasyonu için gerek ve yeter koşulların incelendiği görülmektedir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilerek l -grupları ve l -halkalarının temel özellikleri, bunlar üzerinde tanımlanan çeşitli dönüşümler ve bazı önemli l -halka sınıfları tanımlanarak bazı temel özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümde, genel olarak Ben Amor ve Boulablier'in 2013 yılında basılan "Almost f -maps and almost f -rings" çalışması esas alınarak çalışmamızın temelini teşkil eden hemen hemen f -halkaları ve l -grupları üzerinde tanımlı hemen hemen f -dönüşümlerinin temel özellikleri işlenmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, bu çalışmadan elde edilen sonuçlar verilmiştir. Son bölümde ise l - grupları üzerinde tanımlı hemen hemen f -dönüşümleri için önerilerde bulunulmuştur.

Bu çalışmamızda [1, 5, 10] standart kitapları temel kaynak olarak almaktayız.

1.2. Latis Sıralı Gruplar

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

1.2.1. Tanım $\emptyset \neq E$ bir küme olsun. E üzerinde tanımlı bir “ $\leq$ ” bağıntısı

- i. $\forall x \in E$ için $x \leq x$ (yansıma özelliği)
- ii. $\forall x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (ters simetri özelliği)
- iii. $\forall x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (geçişme özelliği).

özellikleri sağlıyorsa bu “ $\leq$ ” bağıntısına bir **kısmi sıralama bağıntısı** ve $(E, \leq)$ ikilisine bir **kısmi sıralı küme** denir. Ayrıca, $\forall x, y \in E$ için $x \leq y \Rightarrow y \leq x$ özelliğini sağlayan “ $\leq$ ” bağıntısına **simetriktir** denir. Yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip bir bağıntısına **denklik bağıntısı** denir ve genel olarak “ $\sim$ ” sembolü ile gösterilir. $x \in E$ elemanına “ $\sim$ ” bağıntısına göre denk elemanların oluşturduğu kümeye x elemanının **denklik sınıfı** denir ve $[x]$ ile gösterilir. Tüm denklik sınıflarının oluşturduğu kümeye bir **bölüm kümesi** denir ve $E/\sim$ olarak yazılır. Buna göre

$$[x] := \{y \in E : x \sim y\}$$

$$E/\sim := \{[x] : x \in G\}.$$

1.2.2. Tanım $\emptyset \neq G$ kümesi üzerinde bir “ $*$ ” ikili işlemi tanımlansın. Aşağıdaki aksiyomların sağlanması durumunda G ye “ $*$ ” işlemine göre (veya $(G, *)$ cebirsel yapısına) bir **grup** denir.

- i. $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$ (kapalılık özelliği)
- ii. $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (birleşme özelliği)
- iii. $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır (etkisiz veya birim eleman özelliği)

iv. $\forall a \in G$ için $a * b = b * a = e$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır (ters eleman özelliği)

G bir grup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ sağlanıyorsa G ye bir **değişmeli grup** denir.

1.2.3. Tanım $(G, *)$ bir grup olmak üzere ve boştan farklı bir N kümesi için $N \subset G$ alt kümesi “ $*$ ” işlemine göre bir grup oluşturuyorsa N ye G nin bir **alt grubu** denir ve $N < G$ ile gösterilir. Aşağıdaki denk ifadelerden herhangi birini sağlayan bir N alt grubuna G nin bir **normal alt grubu** denir ve $N \triangleleft G$ ile gösterilir.

i. $\forall g \in G, \forall x \in N$ için $g * x * g^{-1} \in N$.

ii. $\forall g \in G$ için $g * x * g^{-1} \in N$.

iii. $\forall g \in G$ için $g * N * g^{-1} = N$.

iv. $\forall g \in G$ için $g * N = N * g$.

Bu durumda $N \triangleleft G$ ise N ye tanımlanan sağ ve sol denklik sınıfları aynı olur. G değişmeli bir grup ise her alt grubu normaldir.

1.2.4. Tanım $(G, *)$ bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. G nin H ye göre sol kosetlerinin (yan sınıflarının) kümesi

$$G/N := \{g * N : g \in G\}$$

şeklinde ifade edilir. $\forall a * N, b * N \in G$ için

$$(a * N) \cdot (b * N) = (a * b) * N$$

şeklinde tanımlanan “ $\cdot$ ” işleme göre G/N bir grup olup bu gruba G nin N ye göre bir **bölüm grubu** denir. Açıkça, $(G, *)$ değişmeli ise G/N değişmelidir.

1.2.5. Tanım $(G, *)$ ve $(H, \circ)$ iki grup olmak üzere $\forall x, y \in G$ için

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

özelliğini sağlayan bir $f: G \rightarrow H$ dönüşümüne bir **grup homomorfizması** denir.

1.2.6. Tanım Bir $(G, *)$ grubu ve $x, y \in G$ olsun. $\forall a, b \in G$ için

$$x \leq y \Rightarrow a * x * b \leq a * y * b$$

özelliğini sağlayan bir " $\leq$ " kısmi sıralama bağıntısı varsa bu $(G, *, \leq)$ ye bir **kısmi sıralı grup** veya kısaca **sıralı grup** denir.

1.2.7. Tanım $(G, *, \leq)$ kısmi sıralı bir grup ve $x \in G$ olsun. Eğer $x \geq 1_G$ ise x e bir **pozitif eleman** ve $x \leq 1_G$ ise x e bir **negatif eleman** denir. G nin pozitif elemanlarının kümesi G^+ ile gösterilir ve G nin **pozitif konisi** olarak adlandırılır. Benzer şekilde G nin negatif elemanlarının kümesi G^- ile gösterilir ve G nin **negatif konisi** olarak adlandırılır. Buna göre

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow x * y^{-1} \in G^- \Leftrightarrow y^{-1} * x \in G^- \Leftrightarrow x^{-1} * y \in G^+ \Leftrightarrow y * x^{-1} \in G^+ \\ &\Leftrightarrow y^{-1} \leq x^{-1} \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

1.2.8. Uyarı Kolaylık olması açısından $(G, *, \leq)$ yerine, kısaca, G yazılır. Buna göre, genel olarak, G toplamsal bir grupsa

$$x * y = x + y$$

$$e = 1_G = 0 \text{ (etkisiz eleman)}$$

$$b = a^{-1} = -a \text{ (ters eleman)}$$

ve G çarpımsal bir grup olarak göz önüne alınacaksa

$$x * y = xy$$

$$e = 1_G = 1 \text{ (birim eleman)}$$

olarak alınır.

1.2.9. Tanım $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere $\forall x, y \in L$ için $x \wedge y, x \vee y \in L$ ise $(L, \leq)$ ye **latis** denir ve $(L, \wedge, \vee, \leq)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda bir latıs $\forall \{x, y\} \subset L$ (ve dolayısıyla her sonlu alt küme) için en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı sahip kısmi sıralı bir kümedir. $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin boştan farklı her alt kümesinin supremumu veya infimumu varsa L ye **tam latıs** denir. Eğer $\forall a, b, c \in L$ için

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

denk özelliklerden biri sağlanıyorsa L ye bir **dağılmalı latıs** denir.

1.2.10. Not L bir latıs ise latıs işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır. $x, y \in L$ için

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

$$x \vee y := \sup\{x, y\}.$$

1.2.11. Örnek $\forall (a, b), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(a, b) \leq (u, v) \Leftrightarrow a \leq u, b \leq v$$

koordinatsal sıralama bağıntısına göre $\mathbb{R}^2$, veya $(\mathbb{R}^2, \leq)$ ikilisi, bir kısmi sıralı latıstır fakat tam latıs değildir.

1.2.12. Lemma L bir latıs ve $a, b \in L$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

i. $a < b$

ii. $a \vee b = b$

iii. $a \wedge b = a$.

1.2.13. Teorem L bir latis ve $\forall a, b, c \in L$ için

i. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (birleşme özelliği).

ii. $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ (değişme özelliği).

iii. $a \vee a = a$, $b \wedge b = b$ (idempotent özelliği).

iv. $a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$ (yutan eleman özelliği).

Latisler hakkında daha geniş bilgi [1, 5, 10]'da bulunabilir.

1.2.14. Tanım Bir G kısmi sıralı grubu aynı zamanda bir latis oluyorsa G ye bir **latis sıralı grup** denir ve kısaca **l -grup** olarak yazılır.

1.2.15. Örnek $C[0,1]$ tüm sürekli reel değerli fonksiyonlar kümesi olsun. Noktasal toplam işlemine göre $(C[0,1], +)$ bir değişmeli gruptur. $\forall f, g \in C[0,1]$ için

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [0,1] \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

olarak tanımlanan “ $\leq$ ” sıralama bağıntısına göre de $(C[0,1], +, \leq)$ bir değişmeli sıralı gruptur. $\forall f, g \in C[0,1]$ ve $\forall x, y \in [0,1]$ için

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

latis işlemlerine göre $C[0,1]$, veya $(C[0,1], +, \leq, \vee, \wedge)$ cebirsel yapısı, bir l -gruptur.

1.2.16. Tanım G bir l -grubu ve $x \in G$ olmak üzere

$$x^+ = x \vee 0$$

$$x^- = (-x) \vee 0$$

$$|x| = x \vee (-x)$$

elemanlarına sırasıyla, x in **pozitif kısmı**, **negatif kısmı** ve **modülü (mutlak değeri)** denir. Açıkça, $\forall x \in G$ için $x^+, x^-, |x| \in G^+$ dır [10].

1.2.17. Teorem G bir l -grubu olmak üzere $\forall x, y, z \in G$ için

i. $x - (x \wedge y) + y = x \vee y$.

ii. $(x - (x \wedge y) \wedge (y - (x \wedge y))) = 0 = -(x \wedge y) + x \wedge -(x \wedge y) + y$.

iii. $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$.

iv. $|x| = |-x| \geq 0$.

v. $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$.

vi. $x = x^+ - x^-$.

vii. $|x| = x^+ + x^-$.

viii. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ix. $x^+ \wedge x^- = 0$.

x. $x \wedge y = x \wedge z = 0 \Rightarrow x \wedge (y + z) = 0$.

xi. $x, y, z \in G^+$ ve $x \leq y + z$ ise $x = y_1 + z_1$ olacak şekilde $0 \leq y_1 < y$ ve $0 \leq z_1 < z$ özelliklerini sağlayan $y_1, z_1 \in G^+$ vardır (ayırışma özelliği).

xii. $x, y, z \in G^+$ ise $x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$.

xiii. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

xiv. $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$ (Birkhoff Eşitsizlikleri).

xv. $x, y, z \geq 0$ ise $x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$ [10, Bölüm 2.1].

1.2.18. Tanım G bir l -grubu ve $x, y \in G^+$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $nx \leq y \Rightarrow x = 0$ sağlanıyorsa G ye **arşımdan (archimedean)** denir.

1.2.19. Teorem Her arşımedyan l -grubu değişmelidir [1, Theorem 2.2].

1.2.20. Tanım Bir G l -grubunun bir H alt grubu aynı zamanda G nin bir alt latisi ise H alt grubuna G nin bir **l -alt grubu** denir.

1.2.21. Teorem H bir G l -grubunun bir alt grubu olsun. H G nin bir l -alt grubudur $\Leftrightarrow \forall x \in H$ için $x^+ \in H$ [10].

1.2.22. Tanım G ve H iki l -grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

özelliklerini sağlayan $f: G \rightarrow H$ grup homomorfizmasına bir **latis homomorfizması** denir ve kısaca **l -homomorfizması** olarak yazılır [10].

1.2.23. Teorem G, H iki l -grubu ve $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i. f bir l -homomorfizmasıdır.

ii. $\forall x \in G$ için $f(x^+) = f(x)^+$.

iii. $\forall x, y \in G$ için $x \wedge y = 0 \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = 0$.

iv. $\forall x \in G$ için $f(|x|) = |f(x)|$ [10, Teorem 2.2.2].

1.2.24. Tanım H bir G l -grubunun bir l -alt grup olsun. $x \in G$ ve $y \in H$ olmak üzere

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow x \in H$$

ise H ye G nin bir **sıra-ideali** veya kısaca **ideali** denir. H , G nin bir ideali olmak üzere H nin her alt kümesinin supremumu G de mevcut ve bu supremum H nin bir elemanı ise bir başka deyişle,

$$\forall F \subseteq H \text{ ve } \sup F = x \in G \Rightarrow x \in H$$

sağlanıyorsa, H idealine G de bir **bant** denir.

1.2.25. Tanım G bir l -grubu ve $x, y \in G$ olmak üzere

$$[x, y] := \{z \in G : x \leq z \leq y\}$$

kümesine **sıralı aralık** ve $H \subset G$ için $H \subset [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in G$ varsa H ye bir **sıra sınırlı küme** denir.

1.2.26. Tanım G, H iki l -grubu ve $T: G \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Eğer T operatörü G deki her sıra sınırlı kümeyi H deki bir sıra sınırlı kümeye dönüştürüyorsa T ye bir **sıra sınırlı dönüşüm** denir.

1.2.27. Tanım G bir l -grubu ve $T: G \rightarrow G$ bir operatör olmak üzere G nin her bir B bandı için $T(B) \subset B$ oluyorsa T ye bir **band koruyan operatör** denir [9].

1.2.28. Teorem G bir arşimedyan l -grubu ve $T: G \rightarrow G$ bir operatör olsun. T band koruyandır $\Leftrightarrow x, y \in G$ olmak üzere $x \perp y \Rightarrow Tx \perp y$ [9].

1.2.29. Tanım G bir l -grubu ve $T: G \rightarrow G$ bir operatör olmak üzere T sıra sınırlı ve band koruyan operatör ise T ye bir **orthomorfizma** denir [9].

1.2.30. Tanım G bir l -grubu ve $x, y \in G$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine **diktir** denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. $\emptyset \neq H \subset G$ olmak üzere

$$H^d = \{x \in G : \forall y \in H \text{ için } x \perp y\}$$

kümesine H kümesinin **dik tümleyeni** denir. H^d nin dik tümleyeni $(H^d)^d$ ye H^d **ikinci dik tümleyeni** denir ve $(H^d)^d = H^{dd}$ yazılır. Özel olarak $H = \{x\}$ ise $\{x\}^d = x^d$ yazılır. Buna göre bir $x \in G$ için

$$x^d = \{y \in G : x \perp y\}.$$

Not: G bir l -grubu ve $\emptyset \neq H \subset G$ olmak üzere $H \subset H^{dd}$ ve H^d bir banddır. Özellikle H^{dd} H yi ihtiva eden bir banddır.

1.3. Latis Sıralı Halkalar (l -Halkaları)

1.3.1. Tanım $(R, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere R üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir “ $\cdot$ ” çarpma işlemi tanımlanabiliyorsa $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne bir **halka** denir ve, kısaca, R şeklinde yazılır.

- i. $\forall a, b \in G$ için $a \cdot b \in G$ (kapalılık özelliği)
- ii. $\forall a, b, c \in G$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (birleşme özelliği)
- iii. $\forall a, b, c \in G$ için $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (soldan dağılma özelliği)
- $\forall a, b, c \in G$ için $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (sağdan dağılma özelliği)

$\forall a \in R$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde bir $e \in R$ varsa e ye R halkasının **birimi** ve R ye bir **birimli halka** denir. R bir halka olmak üzere $\forall a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise R ye bir **değişmeli halka** denir.

1.3.2. Uyarı R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $a + (-b)$ yerine $a - b$ ve $a \cdot b$ yerine ab yazılır. Halkanın toplamaya göre birimi (etkisiz elemanı) 0 ile gösterilir ve **halkanın sıfırı** denir.

1.3.3. Tanım R ve S iki halka olmak üzere $\forall x, y \in R$ için

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

özellikleri sağlanıyorsa $f: R \rightarrow S$ fonksiyonuna bir **halka homomorfizması** denir.

1.3.4. Uyarı Halka homomorfizması tanımındaki eşitliklerin her birinin sol tarafındaki işlemler R halkası üzerindeki işlemler ve sağ tarafındaki işlemler ise S halkası üzerindeki işlemlerdir.

1.3.5. Tanım R bir halka ve " $\leq$ " R üzerinde bir kısmi sırama bağıntısı (yani $(R, \leq)$ ikilisi bir kısmi sıralı küme) olmak üzere

i. $(R, \leq)$ bir latistir

ii. $a, b \in R$ için $a \leq b \Rightarrow \forall c \in R$ için $a + c \leq b + c$

iii. $0 \leq a, b \in R$ için $0 \leq ab$

özellikleri sağlanıyorsa R ye bir **latis sıralı halka** denir ve, kısaca, **l -halka** olarak yazılır.

1.3.6. Not Bir R l -halkasının arşimedyan olması $(R, +, \leq)$ kısmi sıralı toplamsal grup arşimedyan olması demektir. Buna göre bir R l -halkasına **arşimedyan** denir eğer $0 \leq x, y \in R$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $nx \leq y \Rightarrow x = 0$.

1.3.7. Teorem Bir R l -halkasının pozitif elemanlar kümesi R^+ olmak üzere

i. $0 \in R^+$.

ii. $R^+ \cap (-R^+) = \{0\}$.

iii. $R^+ + R^+ \subseteq R^+$.

iv. $R^+R^+ \subseteq R^+$.

v. $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in R^+$.

R bir l -halkası ise R toplamsal l -grubudur. Böylece herhangi bir $a \in R$ nin mutlak değeri, pozitif kısmı ve negatif kısmından söz edilebilir. Dolayısıyla 1.2.17. Teorem l -halkaları için de geçerlidir.

1.3.8. Tanım R bir l -halka olsun. $\forall a \in R$ için $aa = a^2 \in R^+$ ise R ye **pozitif kareli** veya **pozitif kare özelliğine sahiptir** denir [3].

1.3.9. Teorem Herhangi bir R l -halkasında aşağıdaki özellikler sağlanır. $a, b \in R$ olmak üzere

i. $a \leq b \Rightarrow \forall c \in R^+$ için $ca \leq cb$ ve $ac \leq bc$. Özellikle, $\forall c \in R^+$ için $c^2 \geq 0$, yani $\forall c \in R^+$ için $c^2 \in R^+$.

ii. $u, v \in R$ olmak üzere $0 \leq a \leq b$ ve $0 \leq u \leq v \Rightarrow 0 \leq au \leq bv$.

iii. $\forall c \in R^+$ için $(a \vee b)c \geq ac \vee bc$ ve $c(a \vee b) \geq ca \vee cb$.

vi. $\forall c \in R^+$ için $c(a \wedge b) \leq ca \wedge cb$ ve $(a \wedge b)c \leq ac \wedge bc$.

v. $(ab)^+ \leq a^+b^+ + a^-b^-$, $(ab)^- \leq a^+b^- + a^-b^+$ ve $|ab| \leq |a| |b|$ [3].

1.3.10. Tanım R bir l -halkası ve $a, b \in R$ olmak üzere

i. $a \wedge b = 0 \Rightarrow \forall c \in R^+$ için $ca \wedge b = 0 = a \wedge cb$ ise R ye bir **f -halkası** denir.

ii. $a \wedge b = 0 \Rightarrow \forall c \in R^+$ için $ca \wedge cb = 0 = ac \wedge bc$ ise R ye bir **d -halkası** denir.

ii. $a \wedge b = 0 \Rightarrow ab = 0$ ise R ye bir **hemen hemen f -halkası** denir [3].

Aşağıdaki sonuç tanımdan hemen görülür.

1.3.11. Teorem R bir f -halkası ise

i. R bir hemen hemen f -halkasıdır.

ii. R bir d -halkasıdır.

İspat: i. $a, b \in R$ ve $a \wedge b = 0$ olsun. Buradan $b \wedge a = 0$ ve $a, b \in R^+$ olup R bir f -halkası olduğundan

$$b \wedge ab = 0$$

olur. Benzer şekilde $a \in R^+$ ve R bir f -halkası olduğundan

$$ab \wedge ab = 0.$$

Bu ise $ab = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla R bir hemen hemen f -halkasıdır.

ii. $a, b \in R$ ve $a \wedge b = 0$ olsun. R bir f -halkası olduğundan $\forall c \in R^+$ için

$$ca \wedge b = ac \wedge b = 0$$

ve tekrar R nin bir f -halka olması kullanılırsa

$$ca \wedge cb = ac \wedge ab = 0$$

olur. Dolayısıyla A bir d -halkasıdır.

Not: Genel olarak d -halkası ile hemen hemen f -halkası birbirinden bağımsızdırlar [3].

1.3.12. Tanım R bir l -halkası olsun. $a \in R$ olmak üzere $\exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0$ ise a ya **nilpotent eleman** ve $\exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0 \Rightarrow a = 0$ sağlanıyorsa R ye **yarı-asal** denir. Başka bir ifadeyle, yarı asal bir R l -halkasının tek nilpotent elemanı 0 dır [3].

1.3.13. Teorem R bir arşimedyan f -halkası ve $x, y \in R$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\forall z \in R^+$ için $z(x \wedge y) = zx \wedge zy$.

ii. $\forall z \in R^+$ için $z(x \vee y) = zx \vee zy$.

iii. $\forall z \in R^+$ için $(x \wedge y)z = xz \wedge yz$.

iv. $\forall z \in R^+$ için $(x \vee y)z = xz \vee yz$.

v. $\forall x \in R$ için $x^2 \geq 0$.

vi. $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$, $(xy)^- = x^+y^- + x^-y^+$ ve $|xy| = |x||y|$.

vii. $x \perp y$ ise $\forall z \in R$ için $zx \perp y$ ve $xz \perp y$.

viii. $x \perp y$ ise $xy = 0$. Özel olarak, $x^+x^- = x^-x^+ = 0$ [3].

1.3.14. Teorem R bir arşimedyan hemen hemen f -halkası olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\forall a \in R$ için $a^2 \geq 0$ (R pozitif kareli) ve özel olarak $|a^2| = |a|^2$.

ii. $\forall a \in R$ için $aa^+ \geq 0$ ve $a^+a \geq 0$.

iii. R bir e birim elemanına sahipse $e \geq 0$ [3].

1.3.15. Teorem Bir R arşimedyan l -halkasında aşağıdaki ifadeleri birbirine denktir.

i. R bir hemen hemen f -halkasıdır.

ii. $\forall a, b \in R$ için $a \perp b \Rightarrow ab = 0$.

iii. $\forall a, b \in R$ için $(a - a \wedge b)(b - a \wedge b) = 0$.

iv. $\forall a \in R$ için $a^- a^+ = 0$ veya $a^+ a^- = 0$.

v. $\forall a \in R$ için $a^2 = |a|^2$ [3].

R bir arşimedyan f -halkası ise $\forall a, b \in R^+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$n|(ab - ba)| \leq a^2 + b^2$$

ve

$$\begin{aligned} n|(ab)c - a(bc)| \leq & |ab(a + b + ab) + a(a + a^2 + ba) + cb(c + b + cb) \\ & + c(c + c^2 + bc)| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler kullanılarak bir arşimedyan f -halkasının değişme ve birleşme özelliklerine sahip olduğu Birkhoff ve Pierce tarafından ispatlanmıştır [6]. Bu eşitsizliklerin ispatlarının tamamı [5]'de Birkhoff tarafından verilmiştir. Benzer şekilde her arşimedyan hemen hemen f -halkasının genel olarak değişme özelliğine sahip olduğu ispatlanmıştır. Bu önemli sonucu aşağıda teorem olarak ifade ediyoruz.

1.3.16. Teorem Her arşimedyan hemen hemen f -halkası değişmelidir [10, Teorem 3.8.14].

Bu bölümün başında ele aldığımız gibi bir arşimedyan f -halkası otomatik olarak hem değişmeli hem de birleşmelidir. Fakat bu durum arşimedyan hemen hemen f -halkaları için geçerli değildir. Diğer bir deyişle bir arşimedyan hemen hemen f -halkasının değişmeli olmasına rağmen genel olarak birleşmeli olması gerekmez.

1.3.17. Teorem R bir arşimedyan yarı asal (birleşmeli) l -halkası olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. R bir f -halkasıdır.

ii. R bir hemen hemen f -halkasıdır.

iii. R bir d -halkasıdır.

Özel olarak, her birim elemanlı halka yarı asal olduğundan yukarıdaki sonuç birim elemanlı f -halkalar için de geçerlidir. Başka bir ifadeyle, birim elmanlı l -halkalarında yukarıda sözü edilen l -halka sınıfları denktir [3].

1.4. Pozitif Bilineer Dönüşümler

1.4.1. Tanım F, G ve H $\mathbb{Z}$ -modül l -grupları olmak üzere $B: F \times G \rightarrow H$ dönüşümü $\forall x_1, x_2, x \in F, y_1, y_2, y \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

i. $B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$

ii. $B(nx, y) = nB(x, y)$

iii. $B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$

iv. $B(x, ny) = nB(x, y)$

özelliklerini sağlıyorsa B ye bir **bilineer dönüşüm** denir.

1.4.2. Tanım F, G, H $\mathbb{Z}$ -modül l -grupları ve $B: F \times G \rightarrow H$ bir bilinear dönüşüm olsun.

i. $\forall (x, y) \in F \times G$ için $B(x, y) \geq 0$ ise B ye **pozitif** denir.

ii. $F = G$ olmak üzere $\forall x, y \in F$ için $B(x, y) = B(y, x)$ ise B ye **simetrik** denir.

1.4.3. Tanım G ve H $\mathbb{Z}$ -modül l -grupları olmak üzere $B: G \times G \rightarrow H$ bilinear dönüşümü ve $a \in G$ olmak üzere $B(a, a) = 0$ ise a ya bir **B-izotropik eleman** denir ve G deki bütün B- izotropik elemanlar kümesi $\dot{I}(B)$ ile gösterilir. O halde

$$\dot{I}(B) := \{a \in G : B(a, a) = 0\}.$$

1.4.4. Tanım G ve H $\mathbb{Z}$ -modül l -grupları olmak üzere $B: G \times G \rightarrow H$ bilinear dönüşüm olsun. B nin sağ ve sol çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\zeta_R(B) := \{a \in G : B(a, b) = 0, \forall b \in G\}$$

$$\zeta_L(B) := \{a \in G : B(b, a) = 0, \forall b \in G\}.$$

Tanımlar karşılaştırıldığında $\zeta_R(B), \zeta_L(B) \subset \dot{I}(B)$ olduğu açıkça görülür.



2. HEMEN HEMEN f -DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde genel olarak Ben Amor ve Boulabier'in 2013 yılında basılan “Almost f -maps and almost f -rings” [2] çalışması incelenerek bir hemen hemen f -halkasının ve l - grupları üzerinde tanımlı hemen hemen f -dönüşümlerinin temel özellikleri araştırılacaktır. Bunun sonucunda özellikle aşağıdaki sonuca varılmaktadır:

“Her arşimedyen hemen hemen f -halkası değişmelidir $\Leftrightarrow G$ bir değişmeli l -grup ve H bir arşimedyen l -grup ise her $B: G \times G \rightarrow H$ hemen hemen f -dönüşümü simetridir.”

Aksi belirtilmedikçe, G ve H doğal $\mathbb{Z}$ -modül yapılarına sahip iki değişmeli l - grubu olarak göz önüne alınacaktır.

2.1. Tanım $a, b \in G$ olmak üzere

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow B(a, b) = 0$$

özellikliğini sağlayan $B: G \times G \rightarrow H$ pozitif bilineer dönüşüme **hemen hemen f -dönüşümü** denir.

2.2. Teorem G bir değişmeli l -grup ve H bir arşimedyen l -grup ise her $B: G \times G \rightarrow H$ hemen hemen f -dönüşümü simetridir. Özellikle, her arşimedyen hemen hemen f - halkası değişmelidir [10, Teorem 3.8.14].

Yukarıdaki teoreme göre G bir değişmeli l -grup ve H bir arşimedyen l -grup olmak üzere her $B: G \times G \rightarrow H$ hemen hemen f -dönüşümü simetrik ise her arşimedyen hemen hemen f - halkası değişmeli olduğu açıktır. Ben Amor ve Boulabier'in 2013 yılında basılan “Almost f -maps and almost f -rings” [2] çalışmasında bunun tersinin de doğru olduğunu görüyoruz. Bunun için öncelikle aşağıdaki ön lemmalar verilecektir.

2.3. Lemma $B: G \times G \rightarrow H$ bilineer dönüşümü pozitifdir $\Leftrightarrow \forall a, b \in G$ için

$$|B(a, b)| \leq B(|a|, |b|).$$

İspat: $\Rightarrow$; $B: G \times G \rightarrow H$ bilineer dönüşümü pozitif ise $\forall a, b \in G$ için

$$|B(a, b)| \leq B(|a|, |b|)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $a, b \in G$ keyfi olsun. B nin bilineer ve pozitifliğinden

$$\begin{aligned} B(|a|, |b|) - B(a, b) &= B(a^+ + a^-, b^+ + b^-) - B(a^+ - a^-, b^+ - b^-) \\ &= B(a^+, b^+) + B(a^+, b^-) + B(a^-, b^+) + B(a^-, b^-) \\ &\quad - [B(a^+, b^+) + B(a^+, -b^-) + B(-a^-, b^+) + B(-a^-, -b^-)] \\ &= 2(B(a^+, b^-) + B(a^-, b^+)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Böylece

$$B(a, b) \leq B(|a|, |b|)$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlik $\forall b \in G$ için sağlandığından b yerine $-b$ alınır ve B nin bilineerliği bir kez daha kullanınırsa

$$-B(a, -b) = B(a, -b) \leq B(|a|, |-b|) = B(|a|, |b|).$$

Buradan $\forall a, b \in G$ için

$$\pm B(a, b) \leq B(|a|, |b|),$$

yani $|B(a, b)| \leq B(|a|, |b|)$ elde edilir.

$\Leftrightarrow \forall a, b \in G$ için $|B(a, b)| \leq B(|a|, |b|)$ özelliğine sahip $B: G \times G \rightarrow H$ bilineer dönüşümün pozitif olduğunu açıklar. Gerçekten, $\forall a, b \in G^+$ için

$$B(a, b) = B(|a|, |b|) \geq |B(a, b)| \geq 0.$$

2.4. Lemma $B: G \times G \rightarrow H$ bir hemen hemen f -dönüşümü ise $\forall a, b \in G$ için

$$0 \leq B(|a|, |a|) = B(a, a).$$

İspat: Öncelikle B pozitif olduğundan $\forall a \in G$ için

$$0 \leq B(|a|, |a|)$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan B bir hemen hemen f -dönüşümü olduğundan $\forall a \in G$ için

$$a^+ \wedge a^- = 0 \Rightarrow B(a^+, a^-) = B(a^-, a^+) = 0$$

sağlanır. O halde

$$B(|a|, |a|) = B(a^+ + a^-, a^+ + a^-)$$

$$\begin{aligned}
&= B(a^+, a^+ + a^-) + B(a^-, a^+ + a^-) \\
&= B(a^+, a^+) + B(a^+, a^-) + B(a^-, a^+) + B(a^-, a^-). \\
&= B(a^+, a^+) - B(a^+, a^-) - B(a^-, a^+) + B(a^-, a^-) \\
&= B(a^+ - a^-, a^+ - a^-) = B(a, a).
\end{aligned}$$

Böylece $\forall a \in G$ için

$$B(|a|, |a|) = B(a, a)$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

2.5. Lemma $B: G \times G \rightarrow H$ bir hemen hemen f -dönüşüm ve H arşimedyan ise

$$\zeta_L(B) = \zeta_R(B) = \dot{I}(B).$$

İspat: $a \in \dot{I}(B)$, $b \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun 2.4. Lemmadan

$$\begin{aligned}
0 &\leq B(n|a| - |b|, n|a| - |b|) \\
0 &\leq B(n|a|, n|a| - |b|) + B(-|b|, n|a| - |b|) \\
&= B(n|a|, n|a|) + B(n|a|, -|b|) + B(-|b|, n|a|) + B(-|b|, -|b|).
\end{aligned}$$

Öte yandan $a \in \dot{I}(B)$ olduğundan $B(a, a) = 0$ ve 2.3.Lemmadan $\forall a, b \in G$ için

$$|B(b, a)| \leq B(|a|, |b|)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &\leq n(|B(a, b)| + |B(b, a)|) \\
&\leq n(B(|a|, |b|) - B(|b|, |a|)) \\
&\leq B(b, b)
\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat H arşimedyan olduğundan

$$|B(a, b)| + |B(b, a)| = 0.$$

Böylece

$$|B(a, b)| = |B(b, a)| = 0.$$

O halde $a \in \zeta_L(B)$ ve $a \in \zeta_R(B)$ olup

$$\dot{I}(B) \subset \zeta_L(B) \text{ ve } \dot{I}(B) \subset \zeta_R(B).$$

Halbuki bunun tersi daima doğru olduğundan $\zeta_L(B) = \zeta_R(B) = \dot{I}(B)$ elde edilir.

2.6. Lemma $B: G \times G \rightarrow H$ bir hemen hemen f -dönüşümü olsun. H arşimedyan ise $\dot{I}(B)$ G nin konveks bir l -alt grubudur.

İspat: $0 \in \dot{I}(B)$ olduğundan $\dot{I}(B)$ boştan farklıdır. $a, b \in \dot{I}(B)$ ise H arşimedyan olduğundan 2.5. Lemmadan $a, b \in \zeta_L(B)$. Buradan $c \in G$ ise

$$B(a - b, c) = B(a, c) - B(b, c) = 0.$$

Böylece $c \in G$ keyfi olduğu için $a - b \in \zeta_L(B)$ elde edilir. 2.5. Lemmadan da $a - b \in \dot{I}(B)$ sağlanır ki bu $\dot{I}(B)$ G nin bir alt grubu olduğunu gösterir. Şimdi $a \in \dot{I}(B)$ ise 2.4. Lemmadan $|a| \in \dot{I}(B)$ elde edilir. O halde $\dot{I}(B)$ G nin bir l -alt grubudur.

Son olarak $a, b \in G$ öyleki $0 \leq a \leq b$ ve $b \in \dot{I}(B)$ olsun B pozitif olduğundan

$$0 \leq B(a, a) \leq B(b, b) = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq B(a, a) \leq 0.$$

$$\Rightarrow B(a, a) = 0.$$

Böylece $a \in \dot{I}(B)$ elde edilir ki bu $\dot{I}(B)$ nin konveks olduğunu ispatlar.

G değişmeli l -grubu olduğundan $\dot{I}(B)$ G nin normal konveks alt grubu olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\forall a, b \in G$ için

$$a + \dot{I}(B) \leq b + \dot{I}(B) \Leftrightarrow \exists c \in \dot{I}(B) : a \leq b + c$$

şeklinde tanımlanan " $\leq$ " sıralama bağıntısına göre $G/\dot{I}(B)$ bölüm grubu bir l -grubudur

[10, Teorem 2.2.1] ve $G/\dot{I}(B)$ üzerindeki latis işlemleri

$$(a + \dot{I}(B)) \vee (b + \dot{I}(B)) = (a \vee b) + \dot{I}(B)$$

ve

$$(a + \mathfrak{I}(B)) \wedge (b + \mathfrak{I}(B)) = (a \wedge b) + \mathfrak{I}(B)$$

olarak verilir.

2.7. Lemma $B: G \times G \rightarrow H$ bir hemen hemen f -dönüşümü ve H arşimedyan ise $G/\mathfrak{I}(B)$ l -grubu arşimedyanıdır.

İspat: Kolaylık olması bakımından $a \in G$ için

$$[a] := a + \mathfrak{I}(B)$$

olarak alınsın. Şimdi $a, b \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $G/\mathfrak{I}(B)$ de

$$[0] \leq n[a] \leq [b]$$

olsun. Bu durumda

$$\exists x, y \in \mathfrak{I}(B): 0 \leq na + x \leq b + y.$$

Buradan B Pozitif olduğundan

$$0 \leq B(na + x, na + x) \leq B(b + y, b + y).$$

Buradan 2.5. Lemmaya göre H arşimedyan olduğundan

$$x, y \in \zeta_R(B) = \zeta_L(B).$$

Bu nedenle

$$\begin{aligned} B(na + x, na + x) &= B(na + x, na) + B(na + x, x) \\ &= B(na, na) + B(x, na) + B(na, x) + B(x, x) = B(na, na) \\ &= n^2 B(a, a) \end{aligned}$$

ve

$$B(b + y, b + y) = B(b, b) + B(y, b) + B(b, y) + B(y, y) = B(y, y)$$

elde edilir. Böylece

$$0 \leq n^2 B(a, a) \leq B(b, b)$$

olur. Fakat H arşimedyan olduğundan $B(a, a) = 0$. O halde $a \in \dot{I}(B)$, yani $G/\dot{I}(B)$ de $[a] = 0$ dır. Dolayısıyla $G/\dot{I}(B)$ arşimedyandır.

Bütün bu hazırlıklardan sonra aşağıdaki ana teoremi verebiliriz.

2.8. Teorem Bir arşimedyan hemen hemen f -halkası değişmelidir $\Leftrightarrow G$ bir değişmeli l -grup ve H bir arşimedyan l -grup ise her $B: G \times G \rightarrow H$ hemen hemen f -dönüşümü simetriktr.

İspat: $\Leftarrow$; 1.3.16. Teorem veya 2.2. Teorem.

$\Rightarrow$; $G/\dot{I}(B)$ uzayında $a + \dot{I}(B)$ denklik sınıfı tekrar $[a]$ ile gösterilsin. 2.6. Lemma ve 2.7. Lemmadan $G/\dot{I}(B) \times H$ kartezyen çarpımı koordinatsal toplama ve sıralamaya göre arşimedyan l -grupbudur. Şimdi $\forall a, b \in G$ ve $x, y \in H$ için

$$([a], x) * ([b], y) := (0, B(a, b))$$

şeklinde $G/\dot{I}(B) \times H$ da bir çarpma " $*$ " işlemi tanımlanabilir. Gerçekten; $a, b, c, d \in G$ için

$$[a] = [c] \text{ ve } [b] = [d]$$

olmak üzere $a - c \in \dot{I}(B)$ ve $b - d \in \dot{I}(B)$ olur. 2.5. Lemma ve B nin bilineerliği kullanılırsa

$$B(a, b) - B(c, d) = B(a, b - d) + B(a - c, d) = 0.$$

$$\Rightarrow B(a, b) = B(c, d).$$

$$\Rightarrow (0, B(b, a)) = (0, B(c, d)).$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in G \text{ için } ([a], x) * ([b], y) = ([c], x) * ([d], y).$$

Dolayısıyla " * " çarpma işlemi $G/\dot{I}(B) \times H$ üzerinde iyi tanımlıdır.

Diğer taraftan $(G/\dot{I}(B) \times H, *)$ bir l -halkası olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Üstelik $G/\dot{I}(B)$ de

$$([a], x) \wedge ([b], y) = 0$$

ise

$$([a \wedge b], x \wedge y) = ([a], x) \wedge ([b], y) = 0$$

sağlandığından $a \wedge b \in \dot{I}(B)$ elde edilir. O halde

$$(a - a \wedge b) \wedge (b - a \wedge b) = 0.$$

$$\Rightarrow B(a - a \wedge b, b - a \wedge b) = 0.$$

$$\Rightarrow B(a, b) = B(a, a \wedge b) + B(a \wedge b, b) - B(a \wedge b, a \wedge b).$$

Dolayısıyla $a \wedge b \in \dot{I}(B)$ olduğundan 2.5. Lemmadan $B(a, b) = 0$ olup

$$([a], x) * ([b], y) = (0, B(a, b)) = (0, 0),$$

veya denk olarak,

$$([a], x) * ([b], y) = 0.$$

Böylece $(G/\mathcal{I}(B) \times H, *)$ bir arşimedyan hemen hemen f -halkasıdır ve dolayısıyla, hipotezden, değişmelidir. Bu nedenle $\forall a, b \in G$ için

$$(0, B(a, b)) = ([a], 0) * ([b], 0) = ([b], 0) * ([a], 0) = (0, B(b, a))$$

olduğundan $B(a, b) = B(b, a)$ elde edilir ki bu B nin simetrik olduğunu ispatlar.

2.9. Lemma R bir l -halkası ise $\forall a, b \in R^+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$nab - (nab \wedge n^2b) \leq a^2b.$$

Özellikle, R bir e birim elemanına sahipse $\forall a, b \in R^+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$nab - (na \wedge n^2e) \leq a^2.$$

İspat: $\forall a, b \in R^+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(nb - ab \wedge nb) \wedge (ab - ab \wedge nb) = 0$$

olduğundan

$$(nab - a^2b \wedge nab) \wedge (nab - nab \wedge n^2b) = 0.$$

Buradan

$$nab = (a^2b \wedge nab) \vee (nab \wedge n^2b) \leq a^2b \vee (nab \wedge n^2b) \leq a^2b + (nab \wedge n^2b)$$

ve dolayısıyla

$$nab - (nab \wedge n^2b) \leq a^2b$$

elde edilir.

2.10. Teorem R bir e birim elemana sahip bir hemen hemen f -halkası, S bir arşimedyan f -halkası ve $h: R \rightarrow S$ bir l -homomorfizması olsun. h bir halka homomorfizmasıdır $\Leftrightarrow h(e) \in S$ idempotenttir.

İspat: $\Rightarrow$; Açıkça, h bir halka homomorfizması ve e birim eleman ise

$$(h(e))^2 = h(e)h(e) = h(ee) = h(e)$$

olduğundan $h(e) \in S$ idempotenttir.

$\Leftarrow$; $a \in R^+$ olmak üzere $\forall b, c \in R$ için

$$B(b, c) := h(c)h(ab)$$

şeklinde $B: G \times G \rightarrow H$ bilineer dönüşümü tanımlayalım. Açıkça B pozitifdir. Üstelik R de $c \wedge b = 0$ ise $\forall a \in R^+$ için

$$c \wedge (ab) = 0$$

olup h bir l -homomorfizması olduğundan

$$h(c) \wedge h(ab) = 0.$$

Bu nedenle

$$B(b, c) = h(c)h(ab) = 0,$$

yani B bir hemen hemen f -dönüşümdür. 2.2. Teoremden B nin simetrik olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla $\forall b, c \in R$ için

$$h(c)h(ab) = B(b, c) = B(c, b) = h(b)h(ac).$$

Bu eşitlikler $\forall a \in R$ için sağladığı kolayca görülebilir. O halde $\forall a, b, c \in R$ için

$$h(c)h(ab) = h(b)h(ac) = h(ac)h(b).$$

Özel olarak $c = e$ alınırsa $\forall a, b \in R$ için

$$h(e)h(ab) = h(a)h(b) \quad (1)$$

elde edilir. Şimdi $h(e)^2 = h(e)$ olduğunu varsayalım.

$$h(e)^d = \{a \in S : |a| \wedge h(e)\}$$

ve

$$h(e)^{dd} = \{a \in S : |a| \wedge |b| = 0, \forall b \in h(e)^d\}$$

olmak üzere $h(e)^{dd} = (h(e)^d)^d$ olup $h(e)^{dd}$, $h(e)^d$ nin bir banddır [10, Bölüm 2.2].
 $\forall a \in S$ için

$$\pi(a) := h(e)a$$

olarak tanımlanan $\pi : S \rightarrow S$ dönüşümü S nin bir orthomorfizmasıdır [4, Bölüm 12.1] ve böylece π , S deki bandları korur. Dolayısıyla π , $h(e)^{dd}$ nin orthomorfizması olarak görülebilir. Şimdi hipotezden

$$\pi(h(e)) = h(e)^2 = h(e)$$

olduğu dikkate alınırsa π , $h(e)^{dd}$ nin birim elemanı olduğu görülür [4, Sonuç 12.2.9]. Dolayısıyla $\forall a \in h(e)^{dd}$ için

$$h(e)a = a \quad (2)$$

olur. Diğer taraftan $0 \leq a \in R$ ve $0 \leq b \in h(e)^d$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için Birkhoff eşitsizliğinden (1.2.17. Teorem xiv))

$$\begin{aligned} 0 \leq n(b \wedge h(a)) &= n(b \wedge h(a)) - n(b \wedge h(a) \wedge nh(e)) \\ &\leq nh(a) - n(h(a) \wedge nh(e)). \end{aligned}$$

Dolayısıyla h bir l -homomorfizması olduğundan

$$0 \leq n(b \wedge h(a)) \leq nh(a) - n(h(a) \wedge nh(e)) = h(na - n^2e \wedge na)$$

ve h pozitif olduğundan 2.9. Lemmadan

$$0 \leq n(b \wedge h(a)) \leq h(na - n^2e \wedge na) \leq h(a^2),$$

yani

$$0 \leq n(b \wedge h(a)) \leq h(a^2).$$

O halde R arşimedyan olduğundan $b \wedge h(a) = 0$. Bu ise $h(a) \in h(e)^{dd}$ olması demektir. (2)'den $\forall a \in R$ için

$$h(e)h(a) = h(a) \quad (3)$$

olur. (1) ve (3)'den $\forall a, b \in R$ için

$$h(ab) = h(a)h(b)$$

elde edilir. Diğer taraftan, hipotezden, h bir l -homomorfizması olduğundan $\forall a, b \in R$ için

$$h(a + b) = h(a) + h(b)$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak h bir halka homomorfizmasıdır.

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu tezde genel olarak Ben Amor ve Boulabier'in 2013 yılında basılan “Almost f -maps and almost f -rings” çalışması incelenerek bir hemen hemen f -halkasının ve l -grupları üzerinde tanımlı hemen hemen f -dönüşümlerinin temel özellikleri araştırılmış ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

1. Arşimedyan bir hemen hemen f -halkası değişmelidir.
2. G ve H ($\mathbb{Z}$ -modül yapılarına sahip) iki değişmeli l -grubu ve H Arşimedyan ise bir $B: G \times G \rightarrow H$ hemen hemen f -dönüşümü simetriktr.
3. Yukarıdaki iki sonuç bir birine denktir (2.8. Teorem).
4. R bir e birim eleman sahip bir hemen hemen f -halkası, S bir Arşimedyan f -halkası ve $h: R \rightarrow S$ bir l -homomorfizması olsun. h bir halka homomorfizmasıdır $\Leftrightarrow h(e) \in S$ idempotenttir.

4. ÖNERİLER

l -grupları ve f -halkları üzerinde yapılan bu araştırmalar ve elde edilen sonuçlar latis-sıralı cebirler (l -cebirleri) üzerinde göz önüne alınabilir. R bir l -halkası olmak üzere $\forall 0 \leq a \in R$ ve $\forall 0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \alpha a$ özelliğini sağlayan bir $\mathbb{R}$ -cebiri ise R ye bir **latis sıralı cebir** denir ve, kısaca, **l -cebiri** şeklinde ifade edilir.

Ayrıca G, H l -grupları ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T : G^n \rightarrow H$ pozitif n -lineer ve hemen hemen f -dönüşümlerinin özellikleri araştırılabilir. $T : G^n \rightarrow H$ n -lineer dönüşümüne **pozitif** denir eğer $T(G^+)^n \subset H^+$ ve T ye bir **hemen hemen f -dönüşümü** denir eğer $a_1, \dots, a_n \in G^n = G \times \dots \times G$ ve $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere $a_i \wedge a_j = 0 \Rightarrow T(a_1, \dots, a_n) = 0$ [10, s. 264].

KAYNAKLAR

- [1] Anderson M. and Feil T., (1988). Lattice-Ordered Groups: An Introduction, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- [2] Ben Amor, M. A. and Boulabier, K. (2013). Almost f -maps and almost f -rings. *Algebra Universalis*, 69, 93-99.
- [3] Bernau, S. J. and Huijsmans, C. B. (1990). Almost f -algebras and d -algebras. *Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*, 107, 287-308.
- [4] Bigard, A., Keimel, K., and Wolfenstein, S., (1977). Groupes et Anneaux R'eticul'es. Lecture Notes in Mathematics, vol. 608. Springer, Berlin.
- [5] Birkhoff, G., (1967). Lattice Theory, 3rd edn. Colloquium Publications, no. 25. Amererican Mathematical Society, Providence.
- [6] Birkhoff, G. and Pierce, R.S., (1956). Lattice-Ordered Rings and Modules. Springer Publishing, New York, ISBN: 978-1-4419-1720-1, 623.
- [7] Buskes, G. and Holland, J., (2001). A note on the commutativity of Archimedean almost f -rings. *New Zealand J. Math.*, 30, 25–29.
- [8] Huijsmans, C.B. and de Pagter, B., (1984). Subalgebras and Riesz subspaces of an f -algebra. *Proc. London Math. Soc.*, 48, 161–174.
- [9] de Pagter, B., (1981). f -Algebras and Orthomorphisms. PhD thesis, Leiden.
- [10] Steinberg, S., (2010). Lattice-ordered Rings and Modules. Springer, Dordrecht.

ÖZGEÇMİŞ

Emrah YILMAZ

doğdu. İlk

öğrenimini Akçakale İlköğretim Ortaokulu, orta öğretimini Selim Şehit Teğmen Gökhan Yaşartürk Lisesini tamamladı. 2012 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. Bir yıl zorunlu hazırlık ve dört yıllık eğitimin ardından “Matematikçi” unvanıyla mezun oldu. Trabzon Üniversitesi Eğitim Fakültesi’nde Pedagojik Formasyon Eğitim Sertifikasını aldı. 2016 KPSS puanı ile yapılan memur alımlarında Trabzon Ortahisar Milli Eğitim Kurumuna memur olarak atandı. 2019 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başladığı yüksek lisans eğitimine devam etmektedir. 2020 yılında Milli Eğitim Bakanlığına bağlı Konya Mehmet-Hanife Yapıcı Anadolu Lisesinde matematik öğretmenini olarak atandı. Halen aynı okulda matematik öğretmenini olarak görevine devam etmektedir. Yabancı dili İngilizcedir.