

ε_α -ALMOST S-MANİFOLDLAR

Duygu SAĞBAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MART 2010

ANKARA

Duygu SAĞBAŞ tarafından hazırlanan ε_α ALMOST S-MANİFOLDLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doc. Dr. Aysel TURGUT VANLI

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

(Ünvanı, Adı ve Soyadı).....

(Anabilim Dalı, Üniversite Adı)

(Ünvanı, Adı ve Soyadı)

(Anabilim Dalı, Üniversite Adı)

(Ünvanı, Adı ve Soyadı)

(Anabilim Dalı, Üniversite Adı)

(Ünvanı, Adı ve Soyadı)

(Anabilim Dalı, Üniversite Adı)

(Ünvanı, Adı ve Soyadı)

(Anabilim Dalı, Üniversite Adı)

Tarih: 04/ 03 /2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu , ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Duygu SAĞBAŞ

ε_α -ALMOST S-MANİFOLDLAR**(Yüksek Lisans Tezi)****Duygu SAĞBAŞ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Mart 2010****ÖZET**

Bu tezde ε_α -almost S-manifoldlar , Indefinite ε_α -Almost S-manifoldlar ve Indefinite ε_α -S-Manifoldların tanımı verilerek bunlara ait bazı örnekler verildi. Ayrıca ε_α -almost S-manifold ve ε_α -S-manifoldların real hiperyüzeyleri ile ilgili bazı teoremler ispatlandı.

Bilim Kodu : 204.1.095**Anahtar Kelimeler : f -yapı , Almost S-Manifoldlar, S-Manifoldlar , Indefinite Almost S-Manifoldlar, Indefinite S-Manifoldlar, ε_α -Almost S-Manifoldlar****Sayfa Adedi : 132****Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI**

ε_α -ALMOST S-MANIFOLDS

(M.Sc. Thesis)

Duygu SAĞBAŞ

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

March 2010

ABSTRACT

In this thesis, ε_α -almost S-manifold, indefinite ε_α -almost S-manifold and indefinite ε_α -S-manifold are defined, and some examples are given about this manifolds. In addition, some theorems are given real hypersurfaces of an ε_α -S-manifold and an indefinite ε_α -S-manifold.

Science Code :204.1.095

Key Words : f -structure, Almost S-Manifolds, S-Manifolds, Indefinite Almost S-Manifolds, Indefinite S-Manifolds, ε_α -Almost S-manifolds

Page Number :132

Adviser : Asso. Prof. Aysel TURGUT VANLI

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmanın her safhasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI' ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren sevgili annem Asiye SAĞBAŞ, sevgili ailem ve dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Riemann Manifoldları ve Alt Manifodlar.....	3
2.2. Yarı Riemann Manifoldları.....	15
2.3. Almost Kompleks ve Almost Kontak Manifoldlar.....	18
3. ALMOST S-MANİFOLDLAR.....	29
3.1. f -Yapı.....	29
3.2. Torsiyon Tensörü.....	37
3.3. Almost S-Manifoldlar.....	55
4. S-MANİFOLDLAR.....	66
4.1. S-Manifoldlar.....	66
5. INDEFINITE ALMOST-S-MANİFOLDLAR ve INDEFINITE S-MANİFOLDLAR.....	84
5.1. Indefinite Almost S-Manifold.....	84
5.2. Indefinite S-Manifold.....	89
6. ε_α -ALMOST S-MANİFOLDLAR.....	92

	Sayfa
6.1. ε_α -Almost S-Manifold.....	92
6.2. ε_α -Almost S-Manifoldlar İçin Örnekler.....	96
7. INDEFINITE ε_α -S-MANİFOLDLARIN REEL HİPERYÜZEYLERİ.....	115
KAYNAKLAR.....	130
ÖZGEÇMİŞ.....	132

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Anlamı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
g	M manifoldu üzerindeki metrik
$\bar{g}$	$\bar{M}$ hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş metrik
$\Gamma(TM)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
$T_p M$	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
TM	M manifoldun tanjant demeti
ϕ	f -yapı
ξ_α	karakteristik vektör alanları
η^α	1-formlar
R	M manifoldu üzerindeki Riemann eğrilik tensörü
N	$\bar{M}$ hiperyüzeyin normali
N_ϕ	ϕ ' nin Nijenhuis tensörü
∇	M manifoldu üzerindeki konneksiyon
$\bar{\nabla}$	$\bar{M}$ hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş konneksiyon
$[\cdot]$	Lie braket operatörü
K	Kesitsel eğrilik
L	Lie türevi
$\otimes$	Tensörel çarpımı

1. GİRİŞ

Almost kontakt yapıların ve almost kompleks yapıların bir genelleştirilmesi olan f -yapılar 1963 yılında Yano tarafından ortaya atılmış ve günümüze kadar bu alanda bir çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Nakagava (1966), Ishahara (1966), Kobayashi ve Tsuchiya (1972), Mihai (1983) ve Kobayashi (1990) dır. Goldberg ve Yano, çatılandırılan metrik manifoldlar üzerindeki f -yapı yardımı ile bir kompleks yapı tanımlayıp bu yapıların normallik koşullarını inceleyerek bu alanda yapılacak olan çalışmalara ışık tutmuşlardır. 1970 yılında Goldberg ve Yano tarafından global çatılandırılan metrik manifoldlar tanımlanmıştır.

1970 yılında Blair, $\Phi(X, Y) = g(X, \phi(Y))$ olarak temel 2-formu tanımlayarak çatılandırılan metrik manifoldların normallik şartına ilaveten bazı yeni koşulları ekleyerek, almost Hermit durumunda Kaehler yapıların ve almost kontakt durumunda Sasakian yapıların bir genelleştirilmiş olan S-manifoldları tanıtmıştır.

1970 yılında Blair, normal çatılandırılan metrik manifold üzerinde $d\Phi = 0$ (yani temel 2-form kapalı) ise K-manifoldun tanımını yapmıştır. Eğer $\Phi = d\eta^\alpha$ ise K-manifoldun bir S-manifold olduğunu, eğer $d\eta^\alpha = 0$ olduğunda K-manifoldun bir C-manifold olduğunu göstermiştir.

1970 yılında Goldberg ve Yano, global çatılandırılan metrik f-manifoldun temel 2-formu $\Phi = d\eta^\alpha$ olduğunda almost S-manifoldu tanımlamıştır. 1990 lı yıllarda İspanyol matematikçiler Cabrerizo, Fernandez, L.M. ve Fernandez, M. S-manifoldlara ait ciddi çalışmalar yapmışlardır. Bunlardan bazıları Cabrerizo Fernandez, L.M: ve Fernandez, M. (1991,1992, 1993, 1996) dır. 1990 lı yıllarda yapılan çalışmaların yanı sıra günümüze kadar S-manifoldlar ile ilgili Kobayashi (1990), Lotta ve Pastore (2004), Dileo ve Lotta (2005), Terlizzi (2006) yazarlarda çeşitli çalışmalar yapmıştır.

1993 yılında Bejancu ve Duggal, ε -Sasakian manifoldların hiperyüzeyleri üzerinde çalışmıştır. Bu yüksek lisans tezinin orijinal bölümleri bu makaleden esinlenerek aşağıdaki çalışmalar doğrultusunda hazırlanmıştır.

ε_α -almost S-manifoldlar, Indefinite ε_α -Almost S-manifoldlar ve Indefinite ε_α -S-manifoldların tanımı verilerek bunlara ait bazı örnekler yapıldı. ε_α -almost S-manifold ve ε_α -S-manifoldların real hiperyüzeyleri ile ilgili bazı teoremler ispatlandı.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Riemann Manifoldları ve Alt Manifoldlar

2.1. Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, bilinear $(0,2)$ -tipinden tensör alanı g ' ye M üzerinde bir Riemann metriği ve g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* denir ve (M, g) şeklinde gösterilir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.2. Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ olmak üzere. $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü

$$(i) \quad \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$(ii) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$$

$$(iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ye M manifoldu üzerinde bir *afin konneksiyon* ve ∇_X e de X e göre *kovaryant türev operatörü* denir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.3.Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afın konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için, ∇ dönüşümü

$$(i) \nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y] \text{ (sıfır torsiyon özelliği)}$$

$$(ii) Xg(Y, Z) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ) \text{ (konneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann konneksiyon* veya *Levi Civita konneksiyon* adı verilir.

2.4.Tanım

U bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,]: U \times U \rightarrow U$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümünde

$$(i) \text{ 2-lineer}$$

$$(ii) \text{ Anti-Simetrik } (\forall X, Y \in U \text{ için } [X, Y] = -[Y, X])$$

(iii) $\forall X, Y, Z \in U$ için;

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ dönüşümüne, U üstünde bir *Lie operatörü* (*Lie parantez operatörü*) denir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.1. Teorem

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ olsun.

$$\begin{aligned} [,]: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, $[,]$ operatörü $\Gamma(TM)$ üzerinde bir Lie operatörüdür [Yano ve Kon, 1984].

2.5. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \Gamma(TM)$ için L_X , keyfi (s, r) tipinde tensör alanını yine (s, r) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre *Lie türev operatörü* olarak adlandırılır [Yano ve Kon, 1984, Duggal ve Bejancu, 1996].

- (i) $L_X(f) = X(f), \forall f \in C^\infty(M, R)$
- (ii) $L_X Y = [X, Y], \forall Y \in \Gamma(TM)$
- (iii) $L_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y), \forall Y, Z \in \Gamma(TM).$

2.6.Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve L_X, X vektör alanına göre Lie türev operatörü olsun. Eğer $X \in \Gamma(TM)$ için

$$L_X g = 0$$

ise X 'e *Killing vektör alanı* denir(Yano ve Kon, 1984).

2.7.Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel s -forma bir diferensiyel $(s+1)$ -form karşılık getirilen diferensiyel operatörü *dış türev operatörü* olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Özel olarak bir 1-form w ve bir 2-form Ω için d operatörü

$$dw(X, Y) = \frac{1}{2} \{X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X, Y])\}$$

ve

$$d\Omega(X, Y, Z) = \frac{1}{3} \{X(\Omega(Y, Z)) - Y(\Omega(X, Z)) - Z(\Omega(X, Y)) - \Omega([X, Y], Z) + \Omega([X, Z], Y) - \Omega([Y, Z], X)\}$$

olarak tanımlanır [Yano ve Kon, 1984].

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için Riemann konneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = & Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) \\ & + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir [Yano ve Kon, 1984].

2.8. Tanım

M bir Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir [Spivak, 1979].

2.2. Teorem

M bir Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

- (i) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$,
- (ii) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$,

$$(iii) \quad g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$$

dir [O'Neill, 1983].

2.9.Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve R , (M, g) nin Riemann eğrilik tensörü olsun.

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$$

eşitliği *I. Bianchi özdeşliği* olarak adlandırılır [Yano ve Kon, 1984].

2.10.Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu, M nin Riemann eğrilik tensörü R ve ∇ Levi-Civita konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$$

eşitliği *II. Bianchi Özdeşliği* olarak adlandırılır [Yano ve Kon, 1984].

2.11.Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının, X_p, Y_p tanjant vektörleri tarafından gerilen 2-boyutlu bir uzayı Π olmak üzere

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X_p, Y_p)X_p, Y_p)}{g(X_p, X_p)g(Y_p, Y_p) - g(X_p, Y_p)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\Pi)$ reel sayısına Π nin *kesit eğriliği* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.12. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu, M nin Riemann eğrilik tensörü R ve $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı olsun. Böylece

$$Q: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$X \rightarrow Q(X) = -\sum_{i=1}^n R(E_i, X)E_i$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne M nin *Ricci Operatörü* denir. Ayrıca Q yardımı ile M nin Ricci eğrilik tensörü Ric

$$Ric: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(X, Y) \rightarrow Ric(X, Y) = g(Q(X), Y)$$

biçiminde tanımlanır [Chen, 1973].

2.13. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M ye *Einstein manifoldu* adı verilir [Yano ve Kon, 1984].

2.14.Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $T_p M$ tanjant uzayının bir bazı olmak üzere M nin skalar eğriliği,

$$\tau = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır [Chen, 1973].

2.15.Tanım

$\overline{M}$ ve M birer diferensiyellenebilir manifold ve

$$\psi : \overline{M} \rightarrow M$$

bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer $rank \psi = boy \overline{M}$ ise ψ dönüşümüne bir *immersiyon (daldırma)* denir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.16. Tanım

$\overline{M}$ ve M birer C^∞ manifold ve $\overline{M} \subset M$ olsun. Eğer

$$J : \overline{M} \rightarrow M$$

doğal injeksiyonu bir immersiyon ise $\overline{M}$ ye M nin *bir alt manifoldu* denir [Brickell ve Clark, 1970].

2.17.Tanım

M bir C^∞ manifold ve $\overline{M}$, M nin bir alt manifoldu olsun. Herhangi bir $p \in \overline{M}$ noktası için

$$TM^\perp = \{V \in T_p M : g(X_p, V) = 0, \forall X_p \in T_p \overline{M}\}$$

cümlesi tanımlansın. $p \in \overline{M}$ noktasında $\forall X_p \in T_p \overline{M}$ için $g(X_p, V) = 0$ koşulunu sağlayan V vektörüne M nin *normal vektörü*, V nin birim vektörü olması halinde de $\overline{M}$ nin *birim normal vektörü* denir. $\overline{M}$ nin her noktasındaki tüm normal vektörlerini içeren $T\overline{M}^\perp$ uzayına da $\overline{M}$ nin *normal demeti* adı verilir [Yano ve Kon, 1984].

2.18. Tanım

M n -boyutlu bir altmanifoldu $\overline{M}$ Riemann manifoldu ve M üzerinde bir Riemann konneksiyonu ∇ olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + h(X, Y) \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya *Gauss formülü* adı verilir. Burada $\overline{\nabla}_X Y$ ve $h(X, Y)$ sırasıyla $\nabla_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Eş(2.1.2) de tanımlanan $\overline{\nabla}$ ye $\overline{M}$ üzerine indirgenmiş Riemann konneksiyonu ve h ya da M nin *ikinci temel formu* denir. Eğer $h = 0$ ise M ye *total geodeziktir* denir [Chen, 1973].

2.19.Tanım

$\overline{M}$ ve M sırasıyla n ve $n+d$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere, $\overline{M}, M$

nin alt manifoldu olsun. $\overline{M}$ nin birim vektör alanı V olsun. $\overline{\nabla}_X V$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_V X$ ve $\overline{\nabla}_X^\perp V$ olmak üzere

$$A_V : \Gamma(T\overline{M}) \rightarrow \Gamma(T\overline{M})$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\nabla_X V = -A_V X + \overline{\nabla}_X^\perp V \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya *Weingarten formülü* denir. Burada A_V ye $\overline{M}$ nin *şekil operatörü*, $\overline{\nabla}^\perp$ ede $\overline{M}$ nin $T\overline{M}^\perp$ *normal demetdeki konneksiyon* denir. $\overline{M}$ nin şekil operatörü A_V ile ikinci temel form h arasında

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V)$$

bağıntısı vardır. Burada $\overline{g}$, $\overline{M}$ üzerine indirgenmiş Riemann metriğidir [Chen, 1973].

2.20. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve $(\overline{M}, \overline{g})$, (M, g) nin bir alt manifoldu olsun. $\overline{M}$ nin ikinci temel tensörü

$$k_n(X_p) = \|h(X_p, X_p)\|$$

reel sayısına $\overline{M}$ nin X_p doğrultusundaki *normal eğriliği* denir [Hich, 1965].

2.21. Tanım

(M, g) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. $(\bar{M}, \bar{g})$ ve (M, g) üzerindeki Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla $\bar{R}$ ve R olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$g(R(X, Y)Z, W) = \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) - g(h(X, W), h(Y, Z)) + g(h(Y, W), h(X, Z))$$

ile tanımlanan bağıntıya *Gauss denklemi* denir. Gauss denkleminin normal bileşeninin alınması ile elde edilen

$$(R(X, Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z)$$

bağıntısına *Codazzi denklemi* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.22. Tanım

M , n -boyutlu ve N , $(n-1)$ -boyutlu birer C^∞ manifold olsunlar.

$$f: N \rightarrow M$$

fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N) = \bar{M}$ manifolduna M nin bir *hiperyüzeyi* denir [Hacısalıhoğlu, 1984, Brickell ve Clark, 1970].

(M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve (M, g) nin $(n-1)$ -boyutlu bir alt manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. Bu durumda $(\bar{M}, \bar{g})$ bir hiperyüzeydir. Eş.(2.1.3) de belirtilen $\bar{\nabla}_X^\perp V$ normal bileşeni için $\bar{\nabla}_X^\perp V = 0$ dır [Kobayashi ve Nomizu, 1969].

2.23. Tanım

M nin bir hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı N verilsin. M de Riemann konneksiyonu ∇ olmak üzere $\forall X \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$A_N X = \nabla_X N$$

şeklinde tanımlı, A_N dönüşümüne M üzerinde *şekil operatörü* veya *Weingarten dönüşümü* denir [Kobayashi ve Nomizu, 1969].

2.24. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldunun hiperyüzeyi $(\overline{M}, \overline{g})$ ve $\overline{M}$ şekil operatörü A_N olsun. Bu durumda,

- 1) $A_N : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ dir
- 2) A_N lineerdir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.1. Önerme

(M, g) bir Riemann manifoldunun hiperyüzeyi $(\overline{M}, \overline{g})$ ve $\overline{M}$ şekil operatörü A_N olsun. Bu durumda A_N simetriktir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.25. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu, $(\overline{M}, \overline{g})$, (M, g) nin bir hiperyüzeyi ve $\overline{M}$ nin şekil operatörü A_N olsun.

$$H : M \rightarrow R$$

$$p \rightarrow H(p) = \dot{I}zH$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna $\overline{M}$ nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* ve $H(p)$ ye de $p \in \overline{M}$ noktasında M nin *ortalama eğriliği* denir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.2. Yarı Riemann Manifolları

2.26. Tanım

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g|_V : V \times V \rightarrow IR$$

dönüşümü $\forall a, b \in IR$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

$$(i) \quad g|_V(\vec{u}, \vec{v}) = g|_V(\vec{v}, \vec{u})$$

$$(ii) \quad g|_V(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = ag|_V(\vec{u}, \vec{w}) + bg|_V(\vec{v}, \vec{w})$$

$$(iii) \quad g|_V(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = ag|_V(\vec{u}, \vec{v}) + bg|_V(\vec{u}, \vec{w})$$

özelliklerine sahip ise $g|_V$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilinear form* denir [O'Neill, 1983].

2.27. Tanım

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $g|_V$ olsun.

- (i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g|_V(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise $g|_V$ simetrik bilineer formuna *pozitif (definite) tanımlı*,
- (ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g|_V(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $g|_V$ simetrik bilineer formuna *negatif tanımlı*,
- (iii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g|_V(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise $g|_V$ simetrik bilineer formuna *pozitif yarı(semi-definite) tanımlı*,
- (iv) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g|_V(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise $g|_V$ simetrik bilineer formuna *negatif yarı tanımlı*,
- (v) $\forall \vec{w} \in V$ için $g|_V(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ iken $\vec{v} = \vec{0}$ olmak zorunda ise $g|_V$ simetrik bilineer formuna *non-dejenere*, aksi taktirde *dejenere*dir denir [O'Neill, 1983].

2.28. Tanım

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g|_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$g|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $g|_V$ *bilineer simetrik formunun indeksi* denir ve ν ile gösterilir. W alt uzayı üzerine indirgenmiş $g|_W$ simetrik bilineer formuna *indirgenmiş simetrik bilineer form* adı verilir ve kısaca $\bar{g}$ ile gösterilir [O'Neill, 1983].

2.29. Tanım

$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq 0$ ve $\vec{w} \neq 0$ iken $g|_V(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri diktir denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir [O'Neill, 1983, Duggal ve Bejancu, 1996].

2.30. Tanım

M bir C^∞ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olmak üzere

$$g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \rightarrow g(X_p, Y_p)$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilinear ve non-dejenere $(0,2)$ tipindeki tensörüne M üzerinde bir *metrik tensör* denir [O'Neill, 1983].

2.31. Tanım

Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine *yarı-Riemann manifoldunun indeksi* denir ve $indM$ ile gösterilir [O'Neill, 1983].

2.32. Tanım

M bir diferensiyellenebilir yarı-Riemann manifoldu ve g , M üzerinde tanımlanan bir metrik tensör olsun. Eğer $\forall p \in M$ ve $X_p \in T_p M$ için

$$g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

- (i) $g(X_p, X_p) > 0$ veya $X_p = 0$ ise X_p vektörüne *spacelike*,
- (ii) $g(X_p, X_p) < 0$ ise X_p vektörüne *timelike*,
- (iii) $g(X_p, X_p) = 0$, $X_p \neq 0$ vektörüne *lightlike* veya *null* denir [O'Neill, 1983].

2.3.Almost Kompleks ve Almost Kontak Manifoldlar

2.33. Tanım

M bir diferensiyellenebilir reel manifold olsun. M nin her q noktasındaki $T_q M$ tanjant uzayı üzerinde tanımlı bir

$$J : T_q M \rightarrow T_q M$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyor ise J ye M üzerinde *almost kompleks yapı*, M manifolduna da *almost kompleks manifold* denir. Her almost kompleks manifold çift boyutludur [Yano ve Kon, 1984].

2.34.Tanım

M bir almost kompleks manifold ve M üzerinde almost kompleks yapı J olsun. g , M üzerinde bir Riemann metrik olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(J(X), J(Y)) = g(X, Y)$$

özellikleri sağlanıyor ise g ye M üzerinde *Hermit metrik* denir. M manifolduna da *almost Hermitian manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.35. Tanım

M bir $(2n+1)$ boyutlu manifold, ϕ, ξ ve η da M üzerinde sırasıyla, $(1,1)$ tipinde tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere;

$$\eta(\xi)=1 \text{ ve } \phi^2(X)=-X+\eta(X)\xi \quad (2.4)$$

özellikleri sağlanıyorsa o zaman (ϕ, ξ, η) ya M üzerinde bir *almost kontakt yapı* ve M manifolduna da *almost kontakt manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.1. Örnek

$\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlar (x, y, z) olmak üzere $\mathbb{R}^3$ üzerinde

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$$

1-formu, ξ vektör alanı,

$$\xi = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \in \chi(\mathbb{R}^3)$$

ϕ lineer dönüşümü,

$$\phi: \chi(\mathbb{R}^3) \rightarrow \chi(\mathbb{R}^3)$$

$$(x, y, z) \rightarrow \phi(x, y, z) = (y, -x, y^2)$$

olsun. ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2}(dz - ydx) \left(2 \frac{\partial}{\partial z} \right) = 1$$

olur. Ayrıca

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z} \in \chi(\mathbb{R}^3) : X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta(X) &= \frac{1}{2}(dz - ydx) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2}(x_3 - yx_1) \end{aligned}$$

dır. ξ vektör alanına karşılık gelen matris

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ve $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ in matris formu $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 \phi^2(X) &= \phi(\phi(X)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 \phi^2(X) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= -I_3(X) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -yx_1 + x_3 \end{bmatrix} \\
 &= -X + (x_3 - yx_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= -X + \frac{1}{2}(x_3 - yx_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= -X + \eta(X)\xi
 \end{aligned}$$

dir. Böylece $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta)$ dörtlüsü bir almost kontakt manifolddur.

2.36. Tanım

$(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M olsun. $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ve

$\xi \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (2.5)$$

ve

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.6)$$

koşullarını sağlayan bir g Riemann metriği (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir *almost kontakt metrik yapı*, (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisine de bir *almost kontakt metrik manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.3. Teorem

M bir almost kontakt metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [Blair, 1976].

2.37. Tanım

M $(2n+1)$ -boyutlu bir manifold, η da M üzerinde bir 1-form olsun. Eğer,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulunu sağlıyor ise M ye bir *kontakt yapıya sahiptir* denir. M manifolduna da, *kontakt manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4. Teorem

(M, ϕ, ξ, η) bir almost kontakt manifold olsun. $X, \xi \in \chi(M)$, $X \neq \xi$ ve

$$\phi: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

için

$$(i) \ \phi(\xi) = 0, \ (ii) \ \eta \circ \phi = 0, \ (iii) \ \text{rank} \phi = 2n \quad (2.7)$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

2.38. Tanım

M bir almost kontakt metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X, Y) = -g(X, \phi(Y)) = d\eta(X, Y) \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne (ϕ, ξ, η, g) almost kontak metrik yapının *II. temel formu* denir. Burada η kontak formu için yazılan $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ koşulu $\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$ halini alır [Yano ve Kon, 1984].

2.39. Tanım

$(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt metrik manifold M olsun. Eğer,

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi(Y)) = \Phi(X, Y)$$

oluyorsa (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne *almost kontakt metrik yapı* ve (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisine *almost kontakt metrik manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

Sonuç

Her almost kontakt metrik manifold aynı zamanda kontakt manifolddur [Yano ve Kon, 1984].

2.5. Teorem

M bir almost kontakt metrik manifold olsun. ∇ , M üzerinde bir konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi(Y)) = \frac{1}{2} \{g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)\} \quad (2.9)$$

dır. (Yano ve Kon, 1984).

2.6. Teorem

$(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt metrik manifold M olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X, \xi) = 0 \quad (2.10)$$

ve

$$d\eta(\phi(X), Y) + d\eta(X, \phi(Y)) = 0 \quad (2.11)$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

$(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M ve M üzerinde almost kontakt yapı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel doğruyu IR ile gösterilirse $M \times IR$ manifoldu $(2n+2)$ boyutlu bir çarpım manifoldu olur. Burada X , $M \times IR$ üzerinde herhangi bir vektör alanı, t , IR nin bir koordinatı ve f de $M \times IR$ üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon, J $M \times IR$ üzerinde bir almost kompleks yapıyı veren $M \times IR$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J: \chi(M \times IR) \rightarrow \chi(M \times IR)$$

$$\left(X, f \frac{d}{dt} \right) \rightarrow J \left(X, f \frac{d}{dt} \right) = J \left(X, f \frac{d}{dt} \right) = \left(\phi(X) - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlıdır.

2.40. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold ve ϕ , M üzerinde bir $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_\phi(X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi(X), \phi(Y)] - \phi[\phi(X), Y] - \phi[X, \phi(Y)]$$

şeklinde tanımlanan $(1,2)$ tipindeki tensör alanına ϕ nin *Nijenhuis tensör alanı* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.41. Tanım

Bir almost kompleks metrik manifold M , M üzerindeki almost kompleks yapı J olsun. J nin Nijenhuis tensör alanı N_J olmak üzere $N_J = 0$ ise J dönüşümüne *integrallenebilirdir* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.42. Tanım

Bir $(2n+1)$ -boyutlu almost kontakt manifold M ve (ϕ, ξ, η) de M üzerinde almost kontakt yapı olsun. Reel doğru IR olmak üzere $M \times IR$ çarpım manifoldu göz önüne alınsın. Eğer $M \times IR$ üzerindeki (2.3.9) ile verilen almost kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) almost kontakt yapısı *normaldir* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.43. Tanım

Bir $(2n+1)$ -boyutlu almost kontakt manifold M olsun. $M \times IR$ çarpım manifoldu üzerindeki operatörü

$$[\cdot]: \chi(M \times R) \times \chi(M \times R) \rightarrow \chi(M \times R)$$

$$\left(\left(X, f \frac{d}{dt} \right), \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right) \rightarrow \left[\left(X, f \frac{d}{dt} \right), \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right] = \left([X, Y], (X(g) - Y(f)) \frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlanan operatör

- (i) Anti-Simetriktir,
- (ii) Jacobi özdeşliğini sağlar,

Bu şekilde tanımlanan bu operatöre *Lie braket*i denir (Blair, 2002).

2.44. Tanım

$(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M olsun. $N_J((X, 0), (Y, 0))$ ve $N_J\left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right)$ değerleri sırasıyla hesaplanarak

$$N^1(X, Y) = N_\phi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi \quad (2.13)$$

$$N^2(X, Y) = (L_{\phi(X)}\eta)Y - (L_{\phi(Y)}\eta)X \quad (2.14)$$

$$N^3(X) = [\xi, \phi(X)] - \phi[X, \xi] \quad (2.15)$$

$$N^4(X) = \xi\eta(X) - \eta[X, \xi] \quad (2.16)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerle N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörleri tanımlanır.

2.7. Teorem

$(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter şart N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörlerinin sıfır olmasıdır [Yano ve Kon, 1984].

3.8. Teorem

$(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M olsun. Şayet $N^1 = 0$ ise $N^2 = N^3 = N^4 = 0$ dır (Yano ve Kon, 1984).

2.45. Tanım

$(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt metrik manifold M olsun. Eğer M nin kontakt yapısı normal ise M bir *Sasaki yapıya* ya da *normal kontakt metrik yapıya sahiptir* denir. Sasaki yapıya sahip M manifolduna ise *Sasakian manifold* denir ve (M, ϕ, g, ξ) ile gösterilir [Yano ve Kon, 1984].

2.46. Tanım

(M, ϕ, g, ξ) bir Sasakian manifold ve

$$D = \{X : g(X, \xi) = 0\}$$

olsun. Eğer $X, Y, Z, W \in \chi(D)$ için

$$\phi^2((D_W R)(X, Y)Z) = 0 \tag{2.17}$$

oluyor ise (M, ϕ, g, ξ) ye *lokal ϕ -simetrik Sasakian manifold* denir. Burada R M nin eğrilik tensör alanıdır [De Shaikh ve Biswas, 2003].

3. ALMOST S-MANİFOLDLAR

3.1. f-Yapı

3.1. Tanım

$(2n+s)$ boyutlu bir C^∞ manifold M olsun. M 'nin tanjant demeti TM olmak üzere

$$f^3 + f = 0, \quad \text{rank} f = 2n \quad (3.1)$$

koşulunu sağlayan $(1,1)$ tipindeki diferensiyellenebilir, f tensör alanına f -yapı ve üzerinde bir f -yapı tanımlı M manifolduna da f -manifold denir [Goldberg ve Yano, 1970]. $s=0$ ise f -yapı almost kompleks yapıdır. $s=1$ ise f -yapı almost kontakt yapıdır. f -yapının almost kontakt yapı olması durumunda M manifoldu yönlendirilebilirdir.

$$(i) \ P = -f^2, \quad (ii) \ Q = f^2 + I \quad (3.2)$$

ile tanımlanan iki bütünleyen izdüşüm operatörlerine karşılık sırasıyla D ve $D^\perp$ bütünleyen dağılımlar vardır. Burada $\text{boy}(D) = 2n$ ve $\text{boy}(D^\perp) = s$ 'dir.

3.1. Lemma

$(2n+s)$ boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. ϕ , M üzerinde bir f -yapı, P ve Q ise Eş. 3.2 ile tanımlı bütünleyen izdüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$(i) \ \phi P = P\phi = \phi \quad (ii) \ \phi Q = Q\phi = 0 \quad (iii) \ \phi^2 P = -P \quad (iv) \ \phi^2 Q = 0 \quad (3.3)$$

dir [Ishihara ve Yano, 1964].

Eş.3.3 koşulunu sağlayan P ve Q izdüşüm fonksiyonları yardımı ile M 'nin tanjant demeti TM , biri $2n$ diğeri s boyutlu olan iki dağılımın direkt toplamı olarak yazılır.

Yani;

$$TM = D \oplus D^\perp, \quad D \cap D^\perp = \{0\} \quad (3.4)$$

dir.

3.2. Tanım

$(2n+s)$ boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. Eğer M üzerinde, s -tane ξ_α vektör alanları ve s -tane η^α 1-formları olmak üzere

$$\phi^2 = -I + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha \otimes \xi_\alpha, \quad \eta^\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

olacak şekilde $(1,1)$ tipinden bir ϕ tensör alanı var ise M ' ye bir *global çatılandırılan manifold* ya da kısaca *çatılandırılan manifold* denir ve $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ ile gösterilir [Goldberg ve Yano, 1970].

3.2. Lemma

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ bir çatılandırılan manifold olsun. Bu durumda

$$(i) \ \phi(\xi_\alpha) = 0, \quad (ii) \ \eta^\alpha \circ \phi = 0, \quad (iii) \ rank \phi = 2n \quad (3.6)$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}
(i) \quad \phi^2(\xi_\alpha) &= -\xi_\alpha + \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(\xi_\alpha) \xi_\beta \\
&= -\xi_\alpha + \delta_{\alpha\beta} \xi_\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\phi(\xi_\alpha) &= -\phi^3(\xi_\alpha) \\
&= -\phi(\phi^2(\xi_\alpha)) \\
&= -\phi(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $\forall V \in \Gamma(TM)$ için Eş. 3.1 ve Eş. 3.5 kullanırsak

$$\begin{aligned}
\phi^3(V) &= \phi(\phi^2(V)) = \phi\left(-V + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(V) \xi_\alpha\right) \\
&= -\phi(V) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(V) \phi(\xi_\alpha) \\
&= -\phi(V)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan Eş. 3.5 den

$$\phi^2(\phi(V)) = -\phi(V) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(\phi(V)) \xi_\alpha$$

$$\phi^3(V) = \phi^3(V) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(\phi(V)) \xi_\alpha$$

$$\sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(\phi(V)) \xi_\alpha = 0$$

$$\eta^\alpha \circ \phi = 0$$

elde edilir.

(iii) ϕ lineer bir dönüşüm olduğundan

$$\text{rank} \phi + \text{boyçek} \phi = \text{boy} \Gamma(TM)$$

dir. $V \in \text{çek} \phi$ olmak üzere $\phi(V) = 0$ dır. Buradan

$$\phi^2(V) = \phi(\phi(V)) = \phi(0) = 0$$

olur. Ayrıca Eş. 3.5 kullanılırsa

$$V = \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(V) \xi_\alpha$$

bulunur. Her iki tarafın ϕ altında görüntüsü alınır

$$\phi(V) = \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(V) \phi(\xi_\alpha)$$

olup

$$\phi(V) = 0$$

dır. O halde her bir α için

$$\xi_\alpha \in \text{çek} \phi, \quad 1 \leq \alpha \leq s \text{ için}$$

ξ_α lineer bağımsız olup

$$\text{çek}\phi = \text{Sp}\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$$

dir. Buradan $\text{boyçek}\phi = s$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{rank}\phi &= \text{boy}\Gamma(TM) - \text{boyçek}\phi \\ &= 2n \end{aligned}$$

dir.

3.3. Lemma

ϕ 'nin $\text{Im}\phi$ 'ye kısıtlanması $\text{Im}\phi$ üzerinde bir almost kompleks yapı belirler.

İspat

Herhangi bir $\phi(V) \in \text{Im}\phi$ için Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 eşitlikleri kullanılarak;

$$\phi^2_{\text{Im}\phi}(\phi(V)) = -\phi(V) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(\phi(V)) \xi_\alpha = -\phi(V)$$

bulunur. Buradan

$$\phi^2_{\text{Im}\phi} = -I$$

dır. O halde $\phi_{\text{Im}\phi}$ dönüşümü $\text{Im}\phi$ üzerinde bir almost kompleks yapıdır.

Sonuç

$(\text{Im}\phi, \phi^2_{\text{Im}\phi})$ bir almost kompleks manifolddur.

3.3.Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ çatılandırılan manifold olsun. ϕ 'nin Nijenhuis tensör alanı N_ϕ olmak üzere

$$S_\phi = N_\phi + 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta^\alpha \otimes \xi_\alpha \quad (3.7)$$

ile belirtilen (1,2) tipindeki S_ϕ tensör alanına *torsiyon tensör alanı* denir.

Burada N_ϕ , Nijenhuis tensör alanı $\forall V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$N_\phi(V, W) = \phi^2[V, W] + [\phi V, \phi W] - \phi[\phi V, W] - \phi[V, \phi W] \quad (3.8)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

3.4. Lemma

M, $(2n+s)$ boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerinde f -yapı ϕ olsun. ϕ 'ye karşılık gelen matris

$$\phi = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & -I_n & [0]_{n \times s} \\ I_n & [0]_{n \times n} & [0]_{n \times s} \\ [0]_{s \times n} & [y_i]_{s \times n} & [0]_{s \times s} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times (2n+s)}$$

dir [Ishihara ve Yano, 1964].

3.5. Lemma

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ çatılandırılan manifold olsun. M üzerinde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y) \quad (3.9)$$

$$g(X, \xi_\alpha) = \eta^\alpha(X) \quad (3.10)$$

koşullarını sağlayan bir g Riemann metriği vardır [Yano ve Kon, 1984].

3.6. Lemma

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ çatılandırılan manifold üzerindeki g Riemann metriği

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0 \quad (3.11)$$

koşulunu sağlar, yani ϕ anti-simetriktir.

İspat

Eş. 3.9 ve Eş. 3.6'dan

$$\begin{aligned} g(\phi X, Y) &= g(\phi^2 X, \phi Y) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(\phi X) \eta^\alpha(Y) \\ &= g\left(-X + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha, \phi Y\right) \\ &= -g(X, \phi Y) \end{aligned}$$

dir.

Sonuç

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ bir çatılandırılan manifold olsun. Eş. 3.9 ve Eş. 3.10 koşullarını sağlayan keyfi bir Riemann metriği her zaman bulunabilir [Duggal ve Bejancu, 1996].

3.4.Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ çatılandırılan manifoldu üzerinde Eş.3.9 ve Eş.3.10 şartlarını sağlayan bir g Riemann metriğiyle birlikte $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ye bir *çatılandırılan metrik manifold* denir.

3.5. Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. M üzerinde Φ , *temel 2-formu* $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (3.12)$$

ile tanımlıdır [Yano ve Kon, 1984].

Sonuç

$\forall V \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $\Phi(X, \xi_\alpha) = 0$ dır.

İspat:

Eş. 3.12 de $Y = \xi_\alpha$ alınır ve Eş. 3.6 kullanılırsa

$$\Phi(X, \xi_\alpha) = g(X, \phi \xi_\alpha) = 0 \text{ bulunur.}$$

3.2. Torsiyon Tensörü

$(2n+s)$ -boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ olsun. $M \times IR^s$

$(2n+2s)$ -boyutlu bir çarpım manifolddur. IR^s üzerindeki vektör alanları

$$\chi(IR^s) = \left\{ \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} : f_\alpha \in C^\infty(IR^s, IR), 1 \leq \alpha \leq s \right\}$$

şeklindedir.

$\left(X, f_1 \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, f_s \frac{\partial}{\partial t_s} \right)$ ile $M \times IR^s$ 'deki vektör alanlarıdır. Burada X , M^{2n+s} 'de bir

vektör alanı, $(t_1, \dots, t_s)$ ile IR^s 'de koordinat düzlemini, f_α 'lar IR^s üzerindeki C^∞ fonksiyonlarıdır. Ayrıca IR^s üzerinde almost kompleks yapı J 'yi;

$$J: \chi(M \times IR^s) \rightarrow \chi(M \times IR^s)$$

$$\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \rightarrow J \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) = \left(\phi X - \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \xi_\alpha, \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \quad (3.13)$$

olarak tanımlanır.

3.1. Lemma

J dönüşümü

(i) Lineerdir

(ii) $J^2 = -I$

dir.

İspat

$$(i) \quad \forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \in \chi(M \times IR^s) \text{ ve } \lambda, \mu \in IR \text{ için}$$

$$\begin{aligned} & J \left(\lambda \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) + \mu \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) \\ &= J \left((\lambda X + \mu Y), \sum_{\alpha=1}^s (\lambda f_{\alpha} + \mu g_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \\ &= \left(\phi(\lambda X + \mu Y) - \sum_{\alpha=1}^s (\lambda f_{\alpha} + \mu g_{\alpha}) \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(\lambda X + \mu Y) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \\ &= \left(\lambda \phi(X) + \mu \phi(Y) - \lambda \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \xi_{\alpha} - \mu \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \xi_{\alpha}, \left(\lambda \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(X) + \mu \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(Y) \right) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \\ &= \lambda \left(\phi(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(X) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) + \mu \left(\phi(Y) - \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(Y) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \\ &= \lambda J \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) + \mu J \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece J nin lineer olduğu görülür.

$$(ii) \quad \forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \in \chi(M \times IR^s) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} J^2 \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) &= J \left(\phi X - \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(X) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \\ &= \left(\phi \left(\phi(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) - \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(X) \xi_{\alpha}, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha \left(\phi(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \xi_\alpha \right) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \Bigg) \\
&= \left(\phi^2(X) - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha, - \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \\
&= \left(-X, - \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \\
&= - \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$J^2 = -I$$

bulunur. O halde J , $M \times \mathbb{R}^s$ üzerinde bir kompleks yapıdır.

3.8.Lemma

$(2n+s)$ -boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ olsun. Bu durumda $(M \times \mathbb{R}^s, J)$ bir almost kompleks manifolddur.

3.6. Tanım

$(2n+s)$ -boyutlu bir çatılandırılan manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ olsun. $(M \times \mathbb{R}^s, J)$ bir almost kompleks manifold olsun. Almost kompleks yapı J nin Nijenhuis tensörü

Eş. 3.8 den $\forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \in \chi(M, \mathbb{R}^s)$ için

$$N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \right) = J^2 \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(J \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), J \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) \\
& - J \left(J \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) \\
& - J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), J \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right)
\end{aligned}$$

dir.

3.7. Tanım

$(M \times \mathbb{R}^s, J)$ bir almost kompleks manifold olsun. $M \times \mathbb{R}^s$ üzerinde

$$[\cdot] : \chi(M \times \mathbb{R}^s) \times \chi(M \times \mathbb{R}^s) \rightarrow \chi(M \times \mathbb{R}^s)$$

$$\left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) \rightarrow \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right]$$

olmak üzere

$$\left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right] = \left([X, Y], \sum_{\alpha=1}^s (X(g_{\alpha}) - Y(f_{\alpha})) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanan operatöre *braket operatörü* denir.

3.9. Lemma:

Eş. 3.14 ile tanımlı $[\cdot]$ operatör

(i) Anti-simetriktir,

(ii) Jacobi özdeşliğini sağlar.

İspat

$$(i) \forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \in \chi(M \times IR^s) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right] &= \left([X, Y], \sum_{\alpha=1}^s (X(g_{\alpha}) - Y(f_{\alpha})) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \\ &= - \left([Y, X], \sum_{\alpha=1}^s (Y(f_{\alpha}) - X(g_{\alpha})) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \\ &= - \left[\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $[\cdot, \cdot]$ operatörü

$$(ii) \forall A = \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), B = \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), C = \left(Z, \sum_{\alpha=1}^s h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \in \chi(M \times IR^s) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left[\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Z, \sum_{\alpha=1}^s h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right] \right] \\ &= \left([X, [Y, Z]], \sum_{\alpha=1}^s (XY(h_{\alpha}) - XZ(g_{\alpha}) - [Y, Z](f_{\alpha})) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \\ [B, [C, A]] &= \left[\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left[\left(Z, \sum_{\alpha=1}^s h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right] \right] \\ &= \left([Y, [Z, X]], \sum_{\alpha=1}^s (YZ(f_{\alpha}) - YX(h_{\alpha}) - [Z, X](g_{\alpha})) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C, [A, B]] &= \left[\left(Z, \sum_{\alpha=1}^s h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right] \right] \\
&= \left([Z, [X, Y]], \sum_{\alpha=1}^s (ZX(g_{\alpha}) - ZY(f_{\alpha}) - [X, Y](h_{\alpha})) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

burada

$$[X, Y] = XY - YX$$

eşitliğini göz önüne alınır ve $K = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$ denilirse

$$\begin{aligned}
K &= \left\{ [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]], \sum_{\alpha=1}^s ([X, Y](h_{\alpha}) - [X, Y](h_{\alpha})) \right. \\
&\quad \left. + [Y, Z](f_{\alpha}) - [Y, Z](f_{\alpha}) + [Z, X](g_{\alpha}) - [Z, X](g_{\alpha}) \right) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \Big\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan Jacobi özdeşliği sağlanır.

3.8.Tanım

Lemma 3.9. ile tanımladığımız operatöre *Lie braket*i denir.

3.10. Lemma

$(M \times \mathbb{R}^s, J)$ bir almost kompleks manifold ve J almost kompleks yapının Nijenhuis torsiyon tensörü N_J olmak üzere

$$N_J((X, 0, \dots, 0), (Y, 0, \dots, 0)) = \left\{ N^1(X, Y), N^2(X, Y) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right\}$$

ve

$$N_J\left((X, 0, \dots, 0), \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0\right)\right) = (N^3(X), N^4(X))$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned} & N_J((X, 0, \dots, 0)(Y, 0, \dots, 0)) \\ &= J^2[(X, 0, \dots, 0), (Y, 0, \dots, 0)] + [J(X, 0, \dots, 0), J(Y, 0, \dots, 0)] \\ &\quad - [J(X, 0, \dots, 0), (Y, 0, \dots, 0)] - [(X, 0, \dots, 0), J(Y, 0, \dots, 0)] \\ &= -[(X, 0, \dots, 0), (Y, 0, \dots, 0)] + \left[\left(\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), \left(\phi(Y), \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \right] \\ &\quad - J \left[\left(\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), (Y, 0, \dots, 0) \right] - J \left[(X, 0, \dots, 0), \left(\phi(Y), \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \right] \\ &= -([X, Y], 0) + ([\phi(X), \phi(Y)], \sum_{\alpha=1}^s (\phi(X) \eta^\alpha(Y) - \phi(Y) \eta^\alpha(X)) \frac{\partial}{\partial t_\alpha}) \\ &\quad - J \left([\phi(X), Y], -\sum_{\alpha=1}^s Y \eta^\alpha(X) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) - J \left([X, \phi(Y)], \sum_{\alpha=1}^s X \eta^\alpha(Y) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \\ &= -([X, Y], 0) + ([\phi(X), \phi(Y)], \sum_{\alpha=1}^s (\phi(X) \eta^\alpha(Y) - \phi(Y) \eta^\alpha(X)) \frac{\partial}{\partial t_\alpha}) \\ &\quad - (\phi[\phi(X), Y] + \sum_{\alpha=1}^s ((Y \eta^\alpha(X) \xi_\alpha), (\eta^\alpha([\phi(X), Y])))) \\ &\quad - (\phi[X, \phi(Y)] - \sum_{\alpha=1}^s ((X \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha), (\eta^\alpha([X, \phi(Y)])))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left(-[X, Y] + [\phi(X), \phi(Y)] - \phi[\phi(X), Y] - \phi[X, \phi(Y)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^s (X\eta^\alpha(Y) - Y\eta^\alpha(X))\xi_\alpha \right), \left(\sum_{\alpha=1}^s (\phi(X)\eta^\alpha(Y) - \phi(Y)\eta^\alpha(X)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \eta^\alpha([\phi(X), Y]) - \eta^\alpha([X, \phi(Y)]) \right) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ilk kısma N^1 denilirse

$$\begin{aligned}
N^1(X, Y) &= \left(-[X, Y] + [\phi(X), \phi(Y)] - \phi[\phi(X), Y] - \phi[X, \phi(Y)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^s (X\eta^\alpha(Y) - Y\eta^\alpha(X))\xi_\alpha \right)
\end{aligned}$$

olur bu eşitliğin sağına $\sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha([X, Y])\xi_\alpha$ eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
N^1(X, Y) &= \left(-[X, Y] + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha([X, Y])\xi_\alpha + [\phi(X), \phi(Y)] - \phi[\phi(X), Y] \right. \\
&\quad \left. - \phi[X, \phi(Y)] + \sum_{\alpha=1}^s (X\eta^\alpha(Y) - Y\eta^\alpha(X) - \eta^\alpha([X, Y]))\xi_\alpha \right) \\
&= \left(\phi^2[X, Y] + [\phi(X), \phi(Y)] - \phi[\phi(X), Y] - \phi[X, \phi(Y)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^s (X\eta^\alpha(Y) - Y\eta^\alpha(X) - \eta^\alpha([X, Y]))\xi_\alpha \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$2d\eta^\alpha(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^s (X\eta^\alpha(Y) - Y\eta^\alpha(X) - \eta^\alpha([X, Y]))\xi_\alpha \quad (3.15)$$

eşitliği Eş. 3.8 ve Eş. 3.15' den

$$N^1(X, Y) = N_\phi(X, Y) + 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta^\alpha(X, Y) \xi_\alpha \quad (3.16)$$

elde edilir. Ayrıca ikinci tarafa

$$N^2(X, Y) = \left\{ \sum_{\alpha=1}^s (\phi(X) \eta^\alpha(Y) - \phi(Y) \eta^\alpha(X)), \right. \\ \left. - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha([\phi(X), Y]) - \eta^\alpha([X, \phi(Y)]) \right\} \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \Bigg\}$$

diyelim. Lie türev özelliklerinden

$$(L_{\phi(X)} \eta^\alpha)(Y) = \left\{ \phi(X) \eta^\alpha(Y) - \eta^\alpha([\phi(X), Y]) \right\}$$

$$(L_{\phi(Y)} \eta^\alpha)(X) = \left\{ \phi(Y) \eta^\alpha(X) - \eta^\alpha([\phi(Y), X]) \right\}$$

dir. Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$(L_{\phi(X)} \eta^\alpha)(Y) - (L_{\phi(Y)} \eta^\alpha)(X) = \left\{ \phi(X) \eta^\alpha(Y) - \phi(Y) \eta^\alpha(X) - \eta^\alpha([\phi(X), Y]) \right. \\ \left. - \eta^\alpha([X, \phi(Y)]) \right\}$$

olup

$$N^2(X, Y) = (L_{\phi(X)} \eta^\alpha)(Y) - (L_{\phi(Y)} \eta^\alpha)(X) \quad (3.17)$$

elde edilir.

(ii)

$$\begin{aligned}
& N_J \left((X, 0, \dots, 0), \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0 \right) \right) \\
&= J^2 \left((X, 0, \dots, 0), \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0 \right) \right) + \left(J(X, 0, \dots, 0), J \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0 \right) \right) \\
&- J \left(J(X, 0, \dots, 0), \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0 \right) \right) - J \left((X, 0, \dots, 0), J \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0 \right) \right) \\
&= - \left((X, 0, \dots, 0), \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0 \right) \right) + \left[\left(\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), (\xi_\alpha, 0, \dots, 0) \right] \\
&- J \left[(X, 0, \dots, 0), (-\xi_\alpha, 0, \dots, 0) \right] - \left[\left(\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), (0, 0, \dots, 0, \xi_\alpha, 0, \dots, 0) \right] \\
&= - \left([\phi(X), \xi_\alpha], \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(\xi_\alpha) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) + \left(\phi[X, \xi_\alpha], \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha([X, \xi_\alpha]) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \\
&= \left\{ -[\phi(X), \xi_\alpha] + \phi[X, \xi_\alpha] + \sum_{\alpha=1}^s (\eta^\alpha(X) \xi_\alpha + \eta^\alpha([X, \xi_\alpha])) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right\}
\end{aligned}$$

bu eşitliğin ilk kısma N^3 , ikinci kısma N^4 denilirse

$$N^3(X) = [\xi_\alpha, \phi(X)] - \phi[\xi_\alpha, X] \quad (3.17)$$

$$N^4(X) = \sum_{\alpha=1}^s (\eta^\alpha(X) \xi_\alpha + \eta^\alpha([X, \xi_\alpha])) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \quad (3.18)$$

olur. Ayrıca

$$(L_{\xi_\alpha} \phi)(X) = [\xi_\alpha, \phi(X)] - \phi[\xi_\alpha, X]$$

$$(L_{\xi_\alpha} \eta^\alpha)(X) = \sum_{\alpha=1}^s (\eta^\alpha(X) \xi_\alpha + \eta^\alpha([X, \xi_\alpha])) \frac{\partial}{\partial t_\alpha}$$

$$N^3(X) = (L_{\xi_\alpha} \phi)(X)$$

$$N^4(X) = (L_{\xi_\alpha} \eta^\alpha)(X)$$

elde edilir.

3.9.Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold ve ϕ nin Nijenhuis tensör alanı N_ϕ olsun. $(M \times \mathbb{R}^s, J)$ almost kompleks manifoldun Nijenhuis tensör alanı $N_J = 0$ ise $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ye *normaldir* denir (Yano ve Kon, 1984).

3.1.Teorem

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörlerinin sıfır olmasıdır.

İspat

$$(\Rightarrow): \forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \in \chi(M \times \mathbb{R}^s) \text{ için}$$

$$N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \right) = N_J \left((X, 0) + \left(0, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), (Y, 0) + \left(0, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \right)$$

eşitliğinde J nin lineerliğini, N_J nin bileer ve anti-simetrik oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) &= N_J \left((X, 0), (Y, 0) \right) + \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) \\
&\quad - \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} N_J \left((Y, 0), \left(0, \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} g_{\alpha} N_J \left(\left(0, \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(0, \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $N_J \left(\left(0, \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(0, \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) &= N_J \left((X, 0), (Y, 0) \right) + \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) \\
&\quad - \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} N_J \left((Y, 0), \left(0, \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} \right) \right) \\
&= \left((N^1(X, Y), N^2(X, Y)) \right) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \left((N^3(X), N^4(X)) \right) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \left((N^3(Y), N^4(Y)) \right) \\
&= \left(N^1(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} N^3(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} N^3(Y) \right. \\
&\quad \left. , N^2(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} N^4(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} N^4(Y) \right)
\end{aligned}$$

$N_J = 0$ ise

$$N^1(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} N^3(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} N^3(Y) = 0 \quad (3.19)$$

ve

$$N^2(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} N^4(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} N^4(Y) = 0 \quad (3.20)$$

elde edilir.

Eş. 3.8' den N_{ϕ} nin ve Eş. 3.15' den $d\eta^{\alpha}$ nin anti-simetrik olduğu görülür. Böylece Eş. 3.16' dan N_j de anti-simetrik olur. Eş. 3.2.19 eşitliği $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için sağlanır. Eş. 3.13' de $X = Y$ alınırsa

$$N^1(X, X) = \sum_{\alpha=1}^s (f_{\alpha} - g_{\alpha}) N^3(X) \quad (f_{\alpha} \neq g_{\alpha}) \quad (3.21)$$

elde edilir. N^1 anti-simetrik olduğundan $N^1(X, X) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\sum_{\alpha=1}^s (f_{\alpha} - g_{\alpha}) N^3(X) = 0$$

olup $f_{\alpha} \neq g_{\alpha}$ olduğundan $N^3(X) = 0$ olur.

N^2 nin anti-simetrik olduğu Eş. 3.17' den görülür. Aynı şekilde Eş.3.2.9 eşitliği $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için sağlanır. Eş. 3.20' de $X = Y$ alırsak

$$N^2(X, X) = \sum_{\alpha=1}^s (f_{\alpha} - g_{\alpha}) N^4(X) ; \quad (f_{\alpha} \neq g_{\alpha}) \quad (3.22)$$

elde edilir. N^2 anti-simetrik olduğunda $N^2(X, X) = 0$ olur. Dolayısıyla Eş.3.22.' den

$$\sum_{\alpha=1}^s (f_{\alpha} - g_{\alpha}) N^4(X) = 0$$

olup $f_\alpha \neq g_\alpha$ olduğundan $N^4(X) = 0$ olur.

$N^3(X) = 0$ ve $N^4(X) = 0$ eşitlikleri $\forall X \in \Gamma(TM)$ için doğru olduğundan Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 eşitliklerini kullanırsak $N^1(X, Y) = 0$ ve $N^2(X, Y) = 0$ elde edilir. Burada ispat yapılırken $f_\alpha \neq g_\alpha$ kabul edilmişti. $f_\alpha = g_\alpha$ için Eş.3.20'de $Y = -X$ yazılırsa ve $N^1(X, X) = 0$ olduğunu kullanırsak

$$-N^1(X, X) + \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha N^3(X) + \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha N^3(X) = 0$$

$$2 \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha N^3(X) = 0$$

olup $f_\alpha \neq 0$ olduğundan $N^3(X) = 0$

elde edilir. Aynı işlemler Eş. 3.21 de yapılırsa $N^4(X) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde Eş.3.20 ve Eş. 3.21' den $N^1(X, Y) = 0$ ve $N^2(X, Y) = 0$ olduğu görülür.

($\Leftarrow$):

Tersine kabul edelim ki $N^1(X, Y) = N^2(X, Y) = N^3(X) = N^4(X) = 0$ olsun

$$\begin{aligned} N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \right) &= \left(N^1(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N^3(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha N^3(Y) \right. \\ &\quad \left. , N^2(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N^4(X) - \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha N^4(Y) \right) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) \in \chi(M, IR^s)$ için sağlandığından

$N_J = 0$ dır. Dolayısıyla $(\phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ çatılandırılan metrik yapısıyla verilen $(2n+s)$ -boyutlu M manifoldu normaldir.

3.2. Teorem

$(2n+s)$ -boyutlu M manifoldu $(\phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ çatılandırılan metrik yapısıyla verilsin.

Eğer $N^1 = 0$ ise $N^2 = N^3 = N^4 = 0$

İspat

$N^1 = 0$ ise $N^1 \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \right) = 0$ dır. Eş. 2.8, Eş. 3.15 ve Eş. 3.16 den

$$\begin{aligned} N^1 \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \right) &= \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha, X \right] + \left[\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \phi(\xi_\alpha) \right] - \phi \left[\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \right] \\ &\quad - \phi \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \phi(\xi_\alpha) \right] + \sum_{\alpha=1}^s \left(X(\eta^\alpha(\xi_\alpha)) - \xi_\alpha(\eta^\alpha(X)) \right) \xi_\alpha \end{aligned} \quad (3.23)$$

olup

$$0 = \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha, X \right] + \phi \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha, \phi(X) \right] - \sum_{\alpha=1}^s \left(\xi_\alpha(\eta^\alpha(X)) \right) \xi_\alpha$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} N_\phi \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \right) &= \phi^2 \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \right] + \left[\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \phi(\xi_\alpha) \right] - \phi \left[\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \right] - \phi \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \phi(\xi_\alpha) \right] \\ &= \phi^2 \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \right] - \phi \left[\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \right] \end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}, X \right] + \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha} \left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] \right) + \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}, \phi(X) \right]$$

bulunur.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta^{\alpha} \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) \xi_{\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^s \left\{ X \left(\eta^{\alpha} \left(\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) \right) - \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \left(\eta^{\alpha} (X) \right) - \eta^{\alpha} \left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] \right) \right\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left\{ - \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \left(\eta^{\alpha} (X) \right) - \eta^{\alpha} \left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} N^1 \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) &= N_{\phi} \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) + 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta^{\alpha} \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) \xi_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left\{ [\xi_{\alpha}, X] + \phi[\xi_{\alpha}, \phi(X)] - \xi \eta^{\alpha}(X) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın η^{α} altında görüntüsü alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s \left\{ \eta^{\alpha} ([\xi_{\alpha}, X]) + \eta^{\alpha} (\phi[\xi_{\alpha}, \phi(X)]) - \eta^{\alpha} (\xi_{\alpha} \eta^{\alpha}(X)) \right\} &= 0 \\ \eta^{\alpha} ([\xi_{\alpha}, X]) - \eta^{\alpha} (\xi_{\alpha}) \eta^{\alpha}(X) &= 0 \\ (L_{\xi_{\alpha}} \eta^{\alpha})(X) &= N^4(X) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.23' de X yerine $\phi(X)$ alınırsa

$$\begin{aligned} N^1 \left(\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) &= \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}, \phi(X) \right] + \left[\phi^2(X), \sum_{\alpha=1}^s \phi(\xi_{\alpha}) \right] - \phi \left[\phi^2(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] \\ &\quad - \phi \left[\phi(X), \sum_{\alpha=1}^s \phi(\xi_{\alpha}) \right] + \sum_{\alpha=1}^s \left(\phi(X) (\eta^{\alpha}(\xi_{\alpha})) - \xi_{\alpha} (\eta^{\alpha}(\phi(X))) \right) \xi_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}, \phi(X) \right] - \phi \left[-X + \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(X) \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] \\
&= \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}, \phi(X) \right] - \phi \left[\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}, X \right] \\
&= (L_{\xi_{\alpha}} \phi)(X)
\end{aligned}$$

$$(L_{\xi_{\alpha}} \phi)(X) = N^3(X) = 0$$

olur. $N^1 = 0$ dan $N^1(\phi(X), Y) = 0$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
N^1(\phi(X), Y) &= \phi^2[\phi(X), Y] + [\phi^2(X), \phi(Y)] - \phi[\phi^2(X), Y] - \phi[\phi(X), \phi(Y)] \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \left\{ \phi(X) \eta^{\alpha}(Y) \xi_{\alpha} - Y \eta^{\alpha}(\phi(X)) \xi_{\alpha} - \eta^{\alpha}([\phi(X), Y]) \xi_{\alpha} \right\} \\
0 &= -[\phi(X), Y] + [-X, \phi(Y)] + \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(X) [\xi_{\alpha}, \phi(Y)] - \phi[-X, Y] - \sum_{\alpha=1}^s \eta^{\alpha}(X) \phi[\xi_{\alpha}, Y] \\
&\quad - \phi[\phi(X), \phi(Y)] + \sum_{\alpha=1}^s \phi(X) \eta^{\alpha}(Y) \xi_{\alpha}
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın η^{α} altında görüntüsü alınır

$$\begin{aligned}
0 &= -\eta^{\alpha}([\phi(X), Y]) - \eta^{\alpha}([X, \phi(Y)]) + \phi(X) \eta^{\alpha}(Y) - \phi(Y) \eta^{\alpha}(X) \\
&= (L_{\phi(X)} \eta^{\alpha})(Y) - (L_{\phi(Y)} \eta^{\alpha})(X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $N^2(X, Y) = 0$ dir.

3.3. Teorem

$(M, \phi, \xi_{\alpha}, \eta^{\alpha}, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. ∇ , M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \phi(Y), \phi(Z)) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^1(Y, Z), \phi(X)) \\
&+ \sum_{\alpha=1}^s \{ N^2(Y, Z) \eta^\alpha(X) + 2d\eta^\alpha(\phi(Y), X) \eta^\alpha(X) \\
&- 2d\eta^\alpha(\phi(Z), X) \eta^\alpha(Y) \}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

İspat

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 2g(\nabla_X \phi(Y), Z) - 2g(\phi(\nabla_X Y), Z) \\
&= 2g(\nabla_X \phi(Y), Z) + 2g((\nabla_X Y), \phi(Z))
\end{aligned}$$

Koszul formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= Xg(\phi(Y), Z) + \phi(Y)g(X, Z) - Zg(X, \phi(Y)) + g([X, \phi(Y)]) \\
&+ g([Z, X], \phi(Y)) - g([\phi(Y), Z], X) + Xg(Y, \phi(Z)) \\
&+ Yg(X, \phi(Z)) - \phi(Z)g(X, Y) + g([X, Y], \phi(Z)) \\
&+ g([\phi(Z), X], Y) - g([Y, \phi(Z)], X) \\
&= -X\Phi(Y, Z) + \phi Y \left(\Phi(\phi(Z), X) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Z) \eta^\alpha(X) \right) - Z\Phi(X, Y) \\
&- g([X, \phi(Y)], \phi(Z)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha([X, \phi(Y)]) \eta^\alpha(\phi(Z)) \\
&+ \Phi([Z, X], Y) + -g(\phi[\phi(Y), Z]) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \eta^\alpha([Z, \phi(Y)]) \\
&+ X\Phi(\phi(Y), \phi(Z)) - Y\Phi(Z, X) - \phi(Z) \{ \Phi(\phi(Y), X) \\
&+ \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y) \} + \Phi([X, Y], Z) - \Phi([\phi(Z)X], \phi(Y)) \\
&+ \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha([\phi(Z), X]) \eta^\alpha(Y) - g(\phi[Y, \phi(Z)], \phi(X))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \eta^\alpha([\phi(Z), Y]) + \Phi([Y, Z], X) - g([Y, Z], \phi(X)) \\
& - \Phi([\phi(Y), \phi(Z), X]) + g([\phi(Y), \phi(Z)], \phi(X)) \\
& + g(2d\eta^\alpha(Y, Z) \xi_\alpha, \phi(X)) \\
& = [X\Phi(\phi(Y), \phi(Z)) + \phi(Y)\Phi(\phi(Z), X) + \phi(Z)\Phi(X, \phi(Y)) \\
& - \Phi([X, \phi(Y)], \phi(Z)) - \Phi([\phi(Z), X]\phi(Y)) \\
& - \Phi([\phi(Y), \phi(Z)], X)] - \{X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) + Z\Phi(X, Y) \\
& - \Phi([X, Y], Z) - \Phi([Z, X], Y) - \Phi([Y, Z], X)\} + g(-[Y, Z] \\
& - \phi[\phi(Y), Z] + [\phi(Y), \phi(Z)] - \phi[Y, \phi(Z)] + 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta^\alpha(Y, Z) \\
& + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha([Y, Z]) \xi_\alpha, \phi(X))
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \phi(Y), \phi(Z)) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^1(Y, Z), \phi(X)) \\
&+ \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) N^2(Y, Z) + 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta^\alpha(\phi(Y), X) \eta^\alpha(Z) \\
&- 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta^\alpha(\phi(Z), X) \eta^\alpha(Y)
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

3.3. Almost S-Manifoldlar

3.10. Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Eğer $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$d\eta^\alpha = \Phi$ ise M ye *almost S-manifold* denir.

Sonuç

$(2n+s)$ -boyutlu bir almost S-manifold M olsun. $s=1$ ise M bir almost kontakt manifolddur.

3.11.Lemma

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir almost S-manifold ve $X \in \Gamma(D)$ olsun. O halde, $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $[X, \xi_\alpha] \in \Gamma(D)$ dir.

İspat

$\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$ ve $X \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned} \eta^\beta([X, \xi_\alpha]) &= -2d\eta^\beta(X, \xi_\alpha) + X(\eta^\beta(\xi_\alpha)) - \xi_\alpha(\eta^\beta(X)) \\ &= -2\Phi g(X, \xi_\alpha) + X(\delta_{\alpha\beta}) - \xi_\alpha(\eta^\beta(X)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. O halde $[X, \xi_\alpha] \in \Gamma(D)$ dir.

3.12. Lemma

Almost S-manifoldlarda $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

- (i) N^2 ve N^4 tensör alanları sıfırdır,
- (ii) $N^3=0 \Leftrightarrow \xi_\alpha$ lar Killing vektör alanıdır.

İspat

(i) N^2 nin tanımından

$$\begin{aligned}
 N^2(X, Y) &= 2d\eta^\alpha(\phi(X), Y) - 2d\eta^\alpha(\phi(Y), X) \\
 &= 2\Phi(\phi(X), Y) - 2\Phi(\phi(Y), X) \\
 &= 2g(\phi(X), \phi(Y)) - 2g(\phi(Y), \phi(X)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur. $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$L_{\xi_\alpha} \eta^\alpha = (d \circ i\xi_\alpha + i\xi_\alpha \circ d)(\eta^\beta)$$

olur. Burada

$$L_{\xi_\alpha} \eta^\alpha = di\xi_\alpha \eta^\beta + i\xi_\alpha d\eta^\beta. \quad (3.25)$$

Bu nedenle $N^4 = 0$ dır.

$$(ii) \quad L_{\xi_\alpha} \Phi = L_{\xi_\alpha} d\eta^\beta = d \circ i\xi_\alpha \circ d\eta^\beta + i\xi_\alpha \circ d^2\eta^\beta = 0$$

Buradan, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
 0 &= (L_{\xi_\alpha} \Phi)(X, Y) \\
 &= \xi_\alpha(g(X, \phi(Y))) - g([\xi_\alpha, X], \phi(X)) - g(X, \phi[\xi_\alpha, Y]) \\
 &= (L_{\xi_\alpha} g)(X, \phi(Y)) + g(L_{\xi_\alpha} \phi(Y), X) \\
 &= (L_{\xi_\alpha} g)(X, \phi(Y)) + g(N^3(Y), X)
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten ispat açıktır.

Sonuç

Almost S-manifoldlarda $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\eta^\alpha([\phi(X), Y]) = \eta^\alpha([\phi(Y), X])$$

dır.

İspat

$\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için $N^2 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 = N^2(X, Y) &= (L_{\phi(X)}\eta^\alpha)(Y) - (L_{\phi(Y)}\eta^\alpha)(X) \\ &= \phi(X)(\eta^\alpha(Y)) - \eta^\alpha([\phi(X), Y]) - \phi(Y)(\eta^\alpha(X)) + \eta^\alpha([\phi(Y), X]) \\ &= -\eta^\alpha([\phi(X), Y]) + \eta^\alpha([\phi(Y), X]) \end{aligned}$$

olur, $d\eta^\alpha(\phi(X), Y) + d\eta^\alpha(X, \phi(Y)) = 0$ olduğundan

$$\eta^\alpha([\phi(X), Y]) = \eta^\alpha([\phi(Y), X])$$

dir.

3.1.Önerme

Almost S-manifoldlarda $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(i) \quad 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = g(N^1(Y, Z), \phi(X)) + 2g(\phi(X), \phi(Y))\eta^\alpha(Z)$$

$$-2g(\phi(X), \phi(Z))\eta^\alpha(Y),$$

$$(ii) \quad \nabla_{\xi_\alpha} \phi = 0,$$

$$(iii) \quad \nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta = 0.$$

dır.

İspat

(i) Eş. 3.24 ve Lemma 3.12' den ispat kolayca yapılır.

(ii) (i) de $X = \xi_\alpha$ koyarsak

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_{\xi_\alpha} \phi)Y, Z) &= g(N^1(Y, Z), \phi(\xi_\alpha)) + 2g(\phi(\xi_\alpha), \phi(Y))\eta^\alpha(Z) \\ &\quad - 2g(\phi(\xi_\alpha), \phi(Z))\eta^\alpha(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_{\xi_\alpha} \phi = 0$$

dir.

(iii) (ii) den $Y = \xi_\beta$ koyarsak

$$0 = (\nabla_{\xi_\alpha} \phi)\xi_\beta = \nabla_{\xi_\alpha} \phi(\xi_\beta) - \phi(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta) = -\phi(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta)$$

bulunur. Buradan

$\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta \in D^\perp$ böylece $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$\eta^\alpha([\xi_\alpha, \xi_\beta]) = -2d\eta^\gamma(\xi_\alpha, \xi_\beta) = -2\Phi(\xi_\alpha, \xi_\beta) = 0$$

$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = 0$ olur. Ancak, $g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = s\delta t$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta, \xi_\gamma) &= \xi_\alpha(g(\xi_\beta, \xi_\gamma)) + \xi_\beta(g(\xi_\gamma, \xi_\alpha)) - \xi_\gamma(g(\xi_\alpha, \xi_\beta)) - g([\xi_\beta, \xi_\gamma], \xi_\alpha) \\ &\quad + g([\xi_\gamma, \xi_\alpha], \xi_\beta) - g([\xi_\alpha, \xi_\beta], \xi_\gamma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta \in D$ olacağından $\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta = 0$ dır.

3.11. Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir almost S-manifold olsun. $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X \in \Gamma(TM)$ için, h_α tensör alanı

$$h_\alpha : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$X \rightarrow h_\alpha(X) = \frac{1}{2} L_{\xi_\alpha} \phi(X) = \frac{1}{2} N^3(X)$$

ile tanımlıdır.

3.13. Lemma

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir almost S-manifold olsun. M de $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) \quad \phi(N(X, Y) + N(\phi(X), Y)) = 2\eta^\alpha(Y)h_\alpha(Y)$$

$$(ii) \quad g(N(\phi(X), Y), \xi_\alpha) = 0$$

3.2.Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir almost S-manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için, h_α tensör alanı olmak üzere

$$\nabla_X \xi_\alpha = -\phi(X) - \phi(h_\alpha(X))$$

dir.

İspat

Lemma 3.13. de $X = \xi_\alpha$ konulursa, $\forall Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(N(\xi_\alpha, Y), \phi(Z)) &= -g(\phi(N(\xi_\alpha, Z)), Y) \\ &= -2 \sum_{\gamma=1}^s \eta^\alpha(\xi_\alpha) g(h_\gamma(Z), Y) \\ &= -2g(h_\alpha(Z), Y) \end{aligned}$$

dır. Önerme 3.1.' den

$$\begin{aligned} g(N(\xi_\alpha, Z), \phi(Y)) &= 2g((\nabla_Y \phi) \xi_\alpha, Z) - 2g(\phi(\xi_\alpha), \phi(Y)) \eta^\alpha(Z) \\ &\quad + 2g(\phi(Z), \phi(Y)) \eta^\alpha(\xi_\alpha) \\ &= -2g(\phi(\nabla_Y \xi_\alpha), Z) + 2g(Z, Y) - 2 \sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(Z) \eta^\gamma(Y) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
g(\phi(\nabla_Y \xi_\alpha), Z) &= g(h_\alpha(Z), Y) + g(Z, Y) - \sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(Z) \eta^\gamma(Y) \\
&= g(h_\alpha(Y), Z) + g(Y, Z) - \sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(Y) \eta^\gamma(Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\phi(\nabla_Y \xi_\alpha) = h_\alpha(Y) + Y - \sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(Y) \xi_\gamma$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının ϕ altında görüntüsü alınışa

$$\phi^2(\nabla_Y \xi_\alpha) = \phi(h_\alpha(Y)) + \phi(Y) - \sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(Y) \phi(\xi_\gamma)$$

bulunur. ϕ^2 nin değeri yerine yazılırsa

$$\nabla_Y \xi_\alpha = -\phi(h_\alpha(Y)) - \phi(Y)$$

elde edilir. Burada $\sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(\nabla_Y \xi_\alpha) \xi_\beta = 0$ dır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
2\eta^\beta(\nabla_Y \xi_\alpha) &= 2g(\nabla_Y \xi_\alpha, \xi_\beta) \\
&= Y(g(\xi_\alpha, \xi_\beta)) + \xi_\alpha(g(\xi_\beta, Y)) - \xi_\beta(g(Y, \xi_\alpha)) - g(Y, [\xi_\alpha, \xi_\beta]) \\
&\quad - g(\xi_\alpha, [Y, \xi_\beta]) + g(\xi_\beta, [Y, \xi_\alpha]) \\
&= \xi_\alpha(\eta^\beta(Y)) - \xi_\beta(\eta^\alpha(Y)) - \eta^\alpha([Y, \xi_\beta]) + \eta^\beta([Y, \xi_\alpha]) \\
&= d\eta^\beta(\xi_\alpha, Y) + d\eta^\alpha(Y, \xi_\beta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

3.3. Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir almost S-manifold olsun. M üzerinde $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için, h_α tensör alanı aşağıdakileri sağlar

- (i) h_α simetrik tensör alanıdır,
- (ii) $h_\alpha(\xi_\beta) = 0$,
- (iii) h_α, ϕ ile anti-değişimlidir.

İspat

(i) Önerme 3.1. den $\nabla_{\xi_\alpha} \phi = 0$ dır. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
 g((L_{\xi_\alpha} \phi)X, Y) &= g([\xi_\alpha, \phi(X)] - \phi[\xi_\alpha, X], Y) \\
 &= g(\nabla_{\xi_\alpha} \phi(X) - \nabla_{\phi(X)} \xi_\alpha - \phi(\nabla_{\xi_\alpha} X) + \phi(\nabla_X \xi_\alpha), Y) \\
 &= g((\nabla_{\xi_\alpha} \phi)X - \nabla_{\phi(X)} \xi_\alpha + \phi(\nabla_X \xi_\alpha), Y) \\
 &= g(-(\nabla_{\phi(X)} \xi_\alpha) + \phi(\nabla_X \xi_\alpha), Y)
 \end{aligned}$$

Burada $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $X = \xi_\beta$ ya da $Y = \xi_\beta$ konulduğunda sonuç özdeş sıfır olacaktır. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için, Sonuç yardımı ile

$$\begin{aligned}
 g((L_{\xi_\alpha} \phi)X, Y) &= -g((\nabla_{\phi(X)} \xi_\alpha), Y) - g((\nabla_X \xi_\alpha), \phi(Y)) \\
 &= -\xi_\alpha(g(\phi(X), Y)) + g(\xi_\alpha, \nabla_{\phi(X)} Y) - \xi_\alpha(g(X, \phi(Y))) \\
 &\quad + g(\xi_\alpha, \nabla_X \phi(Y)) \\
 &= \eta^\alpha(\nabla_{\phi(X)} Y) + \eta^\alpha(\nabla_X \phi(Y)) \\
 &= \eta^\alpha(\nabla_Y \phi(X)) + \eta^\alpha([\phi(X), Y]) + \eta^\alpha(\nabla_{\phi(Y)} X)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\eta^\alpha ([X, \phi(Y)]) \\
& = \eta^\alpha (\nabla_Y \phi(X)) + \eta^\alpha (\nabla_{\phi(Y)} X) \\
& = g((L_{\xi_\alpha} \phi)Y, X)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan h_α , simetrik operatördür.

$$(ii) \quad h_\alpha(\xi_\beta) = \frac{1}{2}(L_{\xi_\alpha} \phi)(\xi_\beta) = \frac{1}{2}(L_{\xi_\alpha} \phi(\xi_\beta) - \phi(L_{\xi_\alpha} \xi_\beta)) = 0$$

$$\begin{aligned}
(iii) \quad 2g(X, \phi(Y)) &= 2\Phi(X, Y) = 2d\eta^\alpha(X, Y) \\
&= g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) - g(\nabla_Y \xi_\alpha, X) \\
&= g(-\phi(X) - \phi(h_\alpha(X)), Y) - g(-\phi(Y) - \phi(h_\alpha(Y)), X) \\
&= g(X, \phi(Y)) + g(-\phi(h_\alpha(X)), Y) + g(X, \phi(Y)) \\
&\quad + g(Y, -h_\alpha(\phi(X)))
\end{aligned}$$

dır. O halde;

$$g(-\phi(h_\alpha(X)), Y) + g(-h_\alpha(\phi(X)), Y) = 0$$

dır. $\forall Y \in \Gamma(TM)$ için sağlandığından ve g non-dejenere olduğundan

$$\phi(h_\alpha(X)) + h_\alpha(\phi(X)) = 0$$

$$\phi \circ h_\alpha + h_\alpha \circ \phi = 0$$

dır.

3.4.Önerme:

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir almost S-manifold olsun. M de $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi(X)} \phi)\phi(Y) = 2g(\phi(X), \phi(Y))\xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y)\phi^2(X) - \sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(Y)h_\gamma(X)$$

dir.

İspat

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \gamma, \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) + g((\nabla_{\phi(X)} \phi)\phi(Y), Z) &= (2g(Z, -\eta^\gamma(Y)h_\gamma(X)) + 2g(X, Y)\xi_\alpha \\ &\quad - 2\eta^\gamma(X)\eta^\gamma(Y)\xi_\gamma - \eta^\alpha(Y)X \\ &\quad - \eta^\gamma(X)\eta^\gamma(Y)\xi_\gamma) \end{aligned}$$

dir. O halde;

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi(X)} \phi)\phi(Y) &= -\sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(Y)h_\gamma(X) + 2g(X, Y)\xi_\gamma - 2\eta^\gamma(X)\eta^\gamma(Y)\xi_\gamma \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y)(X - \eta^\alpha(X)\xi_\alpha) \\ &= 2g(\phi(X), \phi(Y)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y)\phi^2(X) - \sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(Y)h_\gamma(Y) \end{aligned}$$

dir.

Sonuç

Önerme 3.4.'ün ışığında $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(i) \quad (\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi(X)} \phi)\phi(Y) = 2 \sum_{\alpha=1}^s g(X, Y)\xi_\alpha$$

$$(ii) \quad (\nabla_X \phi)\phi(Y) = (\nabla_{\phi(X)} \phi)Z$$

(iii) Eğer $s = 1$ alınırsa

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi(X)} \phi)\phi(Y) = 2g(X, Y)\xi - \eta(Y)(X + h(X) + \eta(X)\xi)$$

dir.

İspat

(i) Önerme 3.4.' den kolayca görülür.

(ii) (i) de $Y = \phi(X)$ alınırsa

$$(\nabla_X \phi)(\phi(X)) + (\nabla_{\phi(X)} \phi)(\phi^2(X)) = 2 \sum_{\alpha=1}^s g(X, \phi(X)) \xi_\alpha = 0$$

burada $\phi^2(X) = -X$ olduğundan

$$(\nabla_X \phi)(\phi(X)) = (\nabla_{\phi(X)} \phi)(X)$$

dir.

(iii) $s = 1$ alınırsa Önerme 3.4.' den kolayca görülür.

4.S-MANİFOLDLAR

4.1.S-Manifold

4.1.Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold ve Φ bir temel 2-form olsun.

Eğer M normal, $\xi_1, \dots, \xi_s$ vektör alanları birer Killing vektör alanı ve Φ , 2-formu kapalıysa, yani $d\Phi = 0$ ise M *normal çatılandırılan metrik manifold* ya da *K-manifold* olarak adlandırılır.

4.2.Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir K-manifold olsun. $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için ξ_α nın dual η^α olmak üzere $\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^s \wedge (d\eta^\alpha)^n \neq 0$ olduğunda K-manifolduna yönlendirilebilirdir denir [Terlizzi ve Pastore, 2002].

4.3.Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir K-manifold olsun. Eğer

$$\Phi(X, Y) = d\eta^\alpha(X, Y)$$

oluyorsa $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ye *S-manifold* denir [Terlizzi ve Pastore, 2002].

4.1.Örnek

E^{2n+s} , $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_s)$ kartezyen koordinatlarına sahip bir Öklid uzay olsun.

$$\xi_\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

$$\eta^\alpha = \frac{1}{2} \left(dz_\alpha - \sum_{i=1}^n y_i dx_i \right),$$

$$\phi X = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial y_i} + \left(\sum_{i=1}^n Y^i y^i \right) \left(\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right),$$

$$g = \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha \otimes \eta^\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i)$$

olarak alınırsa

$$\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^s \wedge \Phi^n \neq 0$$

ve

$$d\eta^1 = \dots = d\eta^s = \sum_{\alpha=1}^s dx_\alpha \wedge dy_\alpha$$

dır. Böylece üzerindeki $(\phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ yapısıyla birlikte E^{2n+s} bir S-manifold olur.

$$\text{Burada } X = \sum_{i=1}^n \left(X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) + \sum_{\alpha=1}^s Z^\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \text{ dır.}$$

4.1.Lemma

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold olsun. $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ üzerinde ∇ , Levi-Civita konneksiyonu, ϕ , f-yapı, ξ_α , $1 \leq \alpha \leq s$, vektör alanları olmak üzere $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X \xi_\alpha = -\phi X \tag{4.1}$$

dir.

İspat

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
 0 &= (L_{\xi_\alpha} g)(X, Y) = \xi_\alpha g(X, Y) - g([\xi_\alpha, X], Y) - g(X, [\xi_\alpha, Y]) \\
 &= g(\nabla_{\xi_\alpha} X, Y) + g(X, \nabla_{\xi_\alpha} Y) - g(\nabla_{\xi_\alpha} X, Y) + g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) \\
 &\quad - g(X, \nabla_{\xi_\alpha} Y) + g(X, \nabla_Y \xi_\alpha) \\
 &= g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) + g(X, \nabla_Y \xi_\alpha)
 \end{aligned}$$

dır. Buradan;

$$g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) = -g(X, \nabla_Y \xi_\alpha) \quad (4.2)$$

olduğundan g anti-simetriktir.

II. temel formun ve S-manifoldun tanımından;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi(Y)) = d\eta^\alpha(X, Y) = -g(\phi(X), Y)$$

dir.

$$\begin{aligned}
 2d\eta^\alpha(X, Y) &= X\eta^\alpha(Y) - Y\eta^\alpha(X) - \eta^\alpha([X, Y]) \\
 &= Xg(Y, \xi_\alpha) - Yg(X, \xi_\alpha) - g([X, Y], \xi_\alpha) \\
 &= g(Y, \nabla_X \xi_\alpha) - g(X, \nabla_Y \xi_\alpha)
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Eş. 4.2 ve Eş. 4.3' den

$$2d\eta^\alpha(X, Y) = 2g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) \Rightarrow d\eta^\alpha(X, Y) = g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) = -g(\phi(X), Y)$$

dir. $\forall Y \in \Gamma(TM)$ için g non dejenere olduğundan $\nabla_X \xi_\alpha = -\phi(X)$ olur.

4.1. Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold olsun. $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ üzerinde, ∇ , Levi-Civita konneksiyonu, ϕ , f-yapı, ξ_α , $1 \leq \alpha \leq s$, vektör alanları ve ξ_α ların dual 1-formları η^α olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$(\nabla_X \phi)Y = \sum_{\alpha=1}^s (g(\phi X, \phi Y) \xi_\alpha + \eta^\alpha(Y) \phi^2(X)) \quad (4.4)$$

dir.

İspat

Teorem 3.3.' de $d\phi = 0$ ve $N^1 = N^2 = 0$ olduğu yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= \sum_{\alpha=1}^s \{d\eta^\alpha(\phi X, Y) \eta^\alpha(Z) - d\eta^\alpha(\phi Z, X) \eta^\alpha(Y)\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \{\Phi(\phi X, Y) \eta^\alpha(Z) - \Phi(\phi Z, X) \eta^\alpha(Y)\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \{g(\phi X, \Phi Y) \eta^\alpha(Z) - g(\phi Z, \Phi X) \eta^\alpha(Y)\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \{g(g(\phi X, \Phi Y) \xi_\alpha - \phi^2(X) \eta^\alpha(Y), Z)\} \end{aligned}$$

bulunur. $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için g non dejenere olduğundan;

$$(\nabla_X \phi)Y = \sum_{\alpha=1}^s (g(\phi X, \phi Y) \xi_\alpha + \eta^\alpha(Y) \phi^2(X))$$

dir.

4.1. Teorem

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold olsun. $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ üzerinde ∇ , Riemann konneksiyonu, ϕ , f-yapı, ξ_α , $1 \leq \alpha \leq s$, vektör alanları ve ξ_α ların dual 1-formları η^α ve Φ II. temel form olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = & g\left(\left([\phi, \phi] + 2\sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \otimes d\eta^\alpha\right)(Y, Z), \phi X\right) \\ & + 2\sum_{\alpha=1}^s \left\{ \Phi(\phi Y, X) \eta^\alpha(Z) - \Phi(\phi Z, X) \eta^\alpha(Y) \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

İspat

Önerme 3.1.' den ispat kolayca yapılır.

4.2. Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold olsun. L, M üzerinde Lie türevi olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$(L_{\phi X} \eta^\alpha)(Y) = (L_{\phi Y} X)(X) \quad (4.6)$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}
 (L_{\phi X} \eta^\alpha)(Y) &= \phi X \eta^\alpha(Y) - \eta^\alpha([\phi X, Y]) \\
 &= \phi X g(Y, \xi_\alpha) - g([\phi X, Y], \xi_\alpha) \\
 &= g(\nabla_{\phi X} Y, \xi_\alpha) + g(Y, \nabla_{\phi X} \xi_\alpha) - g(\nabla_{\phi X} Y, \xi_\alpha) + g(\nabla_Y \phi X, \xi_\alpha) \\
 &= g(Y, \nabla_{\phi X} \xi_\alpha) + g(\nabla_Y \phi X, \xi_\alpha) \quad (*)
 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 2d\eta^\alpha(\phi X, Y) &= \phi X \eta^\alpha(Y) - Y \eta^\alpha(\phi X) - g([\phi X, Y], \xi_\alpha) \\
 &= g(\nabla_{\phi X} Y, \xi_\alpha) + g(Y, \nabla_{\phi X} \xi_\alpha) - g(\nabla_Y \phi X, \xi_\alpha) - g(\phi X, \nabla_Y \xi_\alpha) \\
 &\quad - g(\nabla_{\phi X} Y, \xi_\alpha) + g(\nabla_Y \phi X, \xi_\alpha) \\
 &= g(Y, \nabla_{\phi X} \xi_\alpha) - g(\phi X, \nabla_Y \xi_\alpha) \\
 &= g(Y, \nabla_{\phi X} \xi_\alpha) + g(\nabla_Y \phi X, \xi_\alpha) \quad (**)
 \end{aligned}$$

olur. (*) ve (**) dan

$$\begin{aligned}
 (L_{\phi X} \eta^\alpha)(Y) &= 2d\eta^\alpha(\phi X, Y) = 2\Phi(\phi X, Y) \\
 (L_{\phi Y} \eta^\alpha)(X) &= 2d\eta^\alpha(\phi Y, X) = 2\Phi(\phi Y, X)
 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$(L_{\phi X} \eta^\alpha)(Y) = (L_{\phi Y} \eta^\alpha)(X)$$

dir.

4.3.Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold olsun. $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ için h_α tensör alanı aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

(i) h_α , simetrik tensör alanıdır,

(ii) $h_\alpha \xi_\beta = 0, \quad \beta \in \{1, \dots, s\}.$

İspat

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$h_\alpha : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$X \rightarrow h_\alpha(X) = \frac{1}{2} (L_{\xi_\alpha} \phi)(X) = \frac{1}{2} (L_{\xi_\alpha} \phi(X) - \phi L_{\xi_\alpha} X)$$

dir.

$$\begin{aligned} (i) \quad h_\alpha(X) &= \frac{1}{2} (L_{\xi_\alpha} \phi(X) - \phi L_{\xi_\alpha} X) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_{\xi_\alpha} \phi X - \nabla_{\phi X} \xi_\alpha - \phi(\nabla_{\xi_\alpha} X) - \phi(\nabla_X \xi_\alpha)) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_{\xi_\alpha} \phi X + \phi^2(X) - \phi \nabla_{\xi_\alpha} X - \phi^2(X)) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_{\xi_\alpha} \phi X - \phi \nabla_{\xi_\alpha} X) \end{aligned} \quad (*)$$

dir. Buradan

$$g(h_\alpha(X), Y) = \frac{1}{2} g(\nabla_{\xi_\alpha} \phi X - \phi \nabla_{\xi_\alpha} X, Y)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ g(\nabla_{\xi_\alpha} \phi X, Y) - g(-\phi \nabla_{\xi_\alpha} X, Y) \right\}$$

olur. Burada $\forall \alpha \{1, \dots, s\}$ için $X = \xi_\beta$ ya da $Y = \xi_\beta$ konulduğunda özdeş sıfır olacaktır.

$$\begin{aligned} & \eta^\alpha([\phi X, Y]) + \eta^\alpha([X, \phi Y]) \\ &= g(\nabla_{\phi X} Y, \xi_\alpha) - g(\nabla_Y \phi X, \xi_\alpha) + g(\nabla_X \phi Y, \xi_\alpha) - g(\nabla_{\phi Y} X, \xi_\alpha) \\ &= g(\nabla_{\phi X} \xi_\alpha, Y) - g(\nabla_Y \xi_\alpha, \phi X) + g(\nabla_X \xi_\alpha, \phi Y) - g(\nabla_{\phi Y} \xi_\alpha, X) \\ &= -g(\phi^2 X, Y) + g(\phi Y, \phi X) - g(\phi X, \phi Y) + g(\phi^2 Y, X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(*) da X ve Y ξ_α ya dik ise;

$$(L_{\phi X} \eta^\alpha)(Y) = (L_{\phi Y} \eta^\alpha)(X) \quad (4.7)$$

dir.

$$\begin{aligned} g(h_\alpha(X), Y) &= \frac{1}{2} g((L_{\xi_\alpha} \phi) X, Y) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ g(\nabla_{\xi_\alpha} \phi X, Y) - g(\phi \nabla_{\xi_\alpha} X, Y) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \eta^\alpha(\nabla_{\phi X} Y) + \eta^\alpha(\nabla_X \phi Y) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \eta^\alpha(\nabla_Y \phi X) + \eta^\alpha(\nabla_{\phi Y} X) \right\} \\ &= \frac{1}{2} g((L_{\xi_\alpha} \phi) Y, X) \\ &= g(h_\alpha(Y), X) \end{aligned}$$

olup h_α simetriktir.

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad h_\alpha \xi_\beta &= \frac{1}{2} (L_{\xi_\alpha} \phi) \xi_\beta \\
 &= \frac{1}{2} (L_{\xi_\alpha} \phi \xi_\beta - \phi L_{\xi_\alpha} \xi_\beta) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

dir.

4.4.Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold olsun. O halde $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha \in \{1, 2, \dots, s\}$ için

$$(i) \quad \nabla_X \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta (\nabla_X \xi_\alpha) \xi_\beta = -\phi h_\alpha (X) - \phi (X) \quad (4.8)$$

$$(ii) \quad h_\alpha (X) = \frac{1}{2} \{ \phi (\nabla_X \xi_\alpha) - \nabla_{\phi(X)} \xi_\alpha \} \quad (4.9)$$

dir.

İspat

Önerme 4.2.' den $\forall X, Z \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha \in \{1, 2, \dots, s\}$ için

$$\begin{aligned}
 2g((\nabla_X \phi) \xi_\alpha, Z) &= -g(\phi(L_{\xi_\alpha} \phi)Z, \phi(X)) - 2g(\phi(X), \phi(Z)) \\
 &= -g((L_{\xi_\alpha} \phi(Z)), X) - 2g(X, Z) + 2 \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(X) \eta^\beta(Z)
 \end{aligned}$$

dir. h_α simetrik olduğundan

$$2g((\nabla_X \phi) \xi_\alpha, Z) = -g((L_{\xi_\alpha} \phi) X, Z) - 2g(X, Z) + 2 \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(X) g(\xi_\beta, Z)$$

olur. $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için g non-dejenere olduğundan;

$$2(\nabla_X \phi(\xi_\alpha) - \phi \nabla_X \xi_\alpha) = -(L_{\xi_\alpha} \phi) X - 2X + 2 \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(X) \xi_\beta$$

$$-2\phi(\nabla_X \xi_\alpha) = -2h_\alpha(X) + 2\phi^2(X)$$

$$-\phi(\nabla_X \xi_\alpha) = -h_\alpha(X) + \phi^2(X)$$

bulunur. Her iki tarafa ϕ uygulanırsa

$$-\phi^2(\nabla_X \xi_\alpha) = -\phi(h_\alpha(X)) + \phi^3(X)$$

$$\nabla_X \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(\nabla_X \xi_\alpha) \xi_\beta = -\phi(h_\alpha(X)) - \phi(X)$$

dır. Gerçektende;

$$\begin{aligned} g(\phi(L_{\xi_\alpha} \phi) Z, \phi(X)) &= g((L_{\xi_\alpha} \phi) Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta((L_{\xi_\alpha} \phi)(Z)) \eta^\beta(X) \\ &= g((L_{\xi_\alpha} \phi) Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(X) (\eta^\beta(L_{\xi_\alpha} \phi(Z)) - \eta^\beta(\phi L_{\xi_\alpha} Z)) \\ &= g((L_{\xi_\alpha} \phi) Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(X) (\eta^\beta(\nabla_{\xi_\alpha} \phi(Z)) - \eta^\beta(\nabla_{\phi(Z)} \xi_\alpha) \\ &\quad - \eta^\beta(\phi \nabla_{\xi_\alpha} Z) + \eta^\beta(\phi \nabla_Z \xi_\alpha)) \\ &= g((L_{\xi_\alpha} \phi) Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(X) (\eta^\beta(\nabla_{\xi_\alpha} \phi(Z)) - \eta^\beta(\phi^2(Z)) \\ &\quad - \eta^\beta(\phi \nabla_{\xi_\alpha} Z) + \eta^\beta(\phi^2(Z))) \\ &= g((L_{\xi_\alpha} \phi) Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(X) (\eta^\beta(\nabla_{\xi_\alpha} \phi(Z)) + \eta^\beta(\phi^2(Z))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g\left(\left(L_{\xi_\alpha}\phi\right)Z, X\right) - \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(X) \left(-g\left(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta, \phi(Z)\right)\right. \\
&\quad \left.+ g\left(\phi\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta, Z\right)\right) \\
&= g\left(\left(L_{\xi_\alpha}\phi\right)Z, X\right)
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \frac{1}{2}\left(L_{\xi_\alpha}\phi\right)(X) &= \frac{1}{2}\left(L_{\xi_\alpha}\phi(X) - \phi\left(L_{\xi_\alpha}X\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\nabla_{\xi_\alpha}\phi(X) - \nabla_{\phi(X)}\xi_\alpha - \phi\nabla_{\xi_\alpha}X + \phi\nabla_X\xi_\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\nabla_{\xi_\alpha}\phi(X) - \phi^2(X) - \phi\nabla_{\xi_\alpha}X + \phi^2(X)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\nabla_{\xi_\alpha}\phi(X) - \phi\nabla_{\xi_\alpha}X\right)
\end{aligned}$$

dir.

4.2. Teorem

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold olsun. Bu durumda $\alpha \in \{1, 2, \dots, s\}$ için ξ_α vektör alanı bir Killing vektör alanıdır $\Leftrightarrow h_\alpha = 0$

İspat

$$L_{\xi_\alpha}\Phi = di\xi_\alpha\Phi + i\xi_\alpha d\Phi = 0$$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için;

$$(L_{\xi_\alpha}\Phi)(X, Y) = \xi_\alpha\Phi(X, Y) - \Phi(L_{\xi_\alpha}X, Y) - \Phi(X, L_{\xi_\alpha}Y)$$

$$\begin{aligned}
&= \xi_\alpha \Phi(X, Y) - d\eta^\alpha(L_{\xi_\alpha} X, Y) - d\eta^\alpha(X, L_{\xi_\alpha} Y) \\
&= \xi_\alpha \Phi(X, Y) - g(L_{\xi_\alpha} X, \phi(Y)) - g(X, \phi(L_{\xi_\alpha} Y)) \\
&= \xi_\alpha \Phi(X, Y) - g(L_{\xi_\alpha} \phi(Y), X) - g(X, L_{\xi_\alpha} \phi(Y)) + g(X, (L_{\xi_\alpha} \phi)Y) \\
&= \xi_\alpha \Phi(X, Y) + g(X, (L_{\xi_\alpha} \phi)Y) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

ξ_α bir Killing vektör alanı olsun. Yani $L_{\xi_\alpha} g = 0$ olduğundan

$$g(X, (L_{\xi_\alpha} \phi)Y) = (L_{\xi_\alpha} \Phi)(X, Y) = 0$$

dir. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için g non-dejenere olduğundan

$$L_{\xi_\alpha} \phi = \frac{1}{2} h_\alpha = 0 \Rightarrow h_\alpha = 0$$

bulunur.

$\Leftarrow$

Karşıt olarak $h_\alpha = 0$ ise $\forall \beta \in \{1, 2, \dots, s\}$ için Eş. 4.1.11 den;

$$(L_{\xi_\alpha} g)(X, \phi(Y)) = (L_{\xi_\alpha} \Phi)(X, Y) = 0$$

olur.

$$(L_{\xi_\alpha} g)(X, \phi^2(Y)) = (L_{\xi_\alpha} \Phi)\left(X, -Y + \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(Y) \xi_\beta\right) = 0$$

$$0 = -(L_{\xi_\alpha} g)(X, Y) + \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(Y) (L_{\xi_\alpha} \eta^\beta)(X)$$

$$\begin{aligned} (L_{\xi_\alpha} g)(X, Y) &= \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(Y) (L_{\xi_\alpha} \eta^\beta)(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Gerçektende;

$$\begin{aligned} (L_{\xi_\alpha} \eta^\beta) &= (d \circ i_{\xi_\alpha} + i_{\xi_\alpha} \circ d)(\eta^\beta) \\ &= d(i_{\xi_\alpha} \eta^\beta) + i_{\xi_\alpha}(d\eta^\beta) \\ &= d(\eta^\beta(\xi_\alpha)) + 2d\eta^\beta(\xi_\alpha, Y) \\ &= 2(g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta, Y) + g(\xi_\alpha, \nabla_{\xi_\alpha} Y)) \\ &= -2g(Y, \nabla_{\xi_\beta} \xi_\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $L_{\xi_\alpha} g = 0$ olduğundan ξ_α bir Killing vektör alanıdır.

4.5.Önerme:

M^{2n+s} bir K-manifold olsun. O halde M üzerinde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, s\}$ için

$$(i) \quad \Re(X, \xi_\alpha)Y = \nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha - \nabla_{\nabla_X Y} \xi_\alpha \quad (4.11)$$

$$(ii) \quad \Re(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) = -g(\nabla_X \xi_\beta, \nabla_Y \xi_\alpha) \quad (4.12)$$

$$(iii) \quad K(\xi_\alpha, X) = \|\nabla_X \xi_\alpha\|^2 \quad (4.13)$$

$$(iv) \quad \Re(\xi_\alpha, \phi(X), \xi_\beta, \phi(Y)) = \Re(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) \quad (4.14)$$

dir.

İspat

(i) ξ_α bir Killing vektör alanı olduğundan;

$$L_{\xi_\alpha} \nabla_X Y - \nabla_X L_{\xi_\alpha} Y = \nabla_{L_{\xi_\alpha} X} Y$$

$$[\xi_\alpha, \nabla_X Y] - \nabla_X [\xi_\alpha, Y] = \nabla_{[\xi_\alpha, X]} Y$$

$$\nabla_{\xi_\alpha} \nabla_X Y - \nabla_{\nabla_X Y} \xi_\alpha - \nabla_X \nabla_{\xi_\alpha} Y + \nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha = \nabla_{[\xi_\alpha, X]} Y$$

$$[\xi_\alpha, X] Y - \nabla_{[\xi_\alpha, X]} Y = -\nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha + \nabla_{\nabla_X Y} \xi_\alpha$$

dır. Teorem 2.8. ve Teorem 2.2' den;

$$R(X, \xi_\alpha) Y = \nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha - \nabla_{\nabla_X Y} \xi_\alpha$$

olur.

(ii) Teorem 2.2. ve (i)' den

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) &= g(\mathfrak{R}(\xi_\alpha, X) \xi_\beta, Y) \\ &= g(\mathfrak{R}(\xi_\beta, Y) \xi_\alpha, X) \\ &= -g(\mathfrak{R}(\xi_\beta, Y) X, \xi_\alpha) \\ &= g(\mathfrak{R}(Y, \xi_\beta) X, \xi_\alpha) \\ &= -g(\nabla_{\nabla_Y X} \xi_\beta, \xi_\alpha) + g(\nabla_Y \nabla_X \xi_\beta, \xi_\alpha) \\ &= g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta, \nabla_Y X) + g(\nabla_Y \nabla_X \xi_\beta, \xi_\alpha) \end{aligned}$$

dır. ξ_α Killing vektör alanı olduğundan;

$$\mathfrak{R}(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) = g(\nabla_Y \nabla_X \xi_\beta, \xi_\alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= -g(\nabla_Y \xi_\alpha, \nabla_X \xi_\beta) \\
&= -g(\nabla_X \xi_\beta, \nabla_Y \xi_\alpha)
\end{aligned}$$

dir.

(iii) (i)' den;

$$\begin{aligned}
K(\xi_\alpha, X) &= \Re(\xi_\alpha, X, X, \xi_\alpha) \\
&= g(\Re(\xi_\alpha, X)X, \xi_\alpha) \\
&= -g(\Re(\xi_\alpha, X)\xi_\alpha, X) \\
&= -g(\xi_\alpha, X, \xi_\alpha, X) \\
&= g(\nabla_X \xi_\alpha, \nabla_X \xi_\alpha) \\
&= \|\nabla_X \xi_\alpha\|^2
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
(iv) \quad \Re(\xi_\alpha, \phi(X), \xi_\beta, \phi(Y)) &= g(\Re(\xi_\alpha, \phi(X))\xi_\beta, \phi(Y)) \\
&= g(\Re(\xi_\alpha, X)\xi_\beta, Y) - \sum_{\gamma=1}^s \eta^\gamma(\Re(\xi_\alpha, X)\xi_\beta)\eta^\gamma(Y) \\
&= g(\Re(\xi_\alpha, X)\xi_\beta, Y) \\
&= \Re(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y)
\end{aligned}$$

dir. Gerçektende;

$$\begin{aligned}
\eta^\gamma(R(\xi_\alpha, X)\xi_\beta) &= \eta^\gamma(\nabla_{\xi_\alpha} \nabla_X \xi_\beta - \nabla_{\nabla_{\xi_\alpha} X} \xi_\beta) \\
&= g(\nabla_{\xi_\alpha} \nabla_X \xi_\beta, \xi_\gamma) - g(\nabla_{\nabla_{\xi_\alpha} X} \xi_\beta, \xi_\gamma) \\
&= -g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\gamma, \nabla_X \xi_\beta) + g(\nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta, \nabla_{\xi_\alpha} X)
\end{aligned}$$

$$= 0$$

4.5.Önerme

$(M^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir K-manifold olsun. $(M^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold ise

$$\Re(X, Y)\xi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \{ \eta^\alpha(X)\phi^2(Y) - \eta^\alpha(Y)\phi^2(X) \} \quad (4.15)$$

dir.

İspat

Eş. 4.1' den;

$$\begin{aligned} \Re(X, Y)\xi_\alpha &= \nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha - \nabla_Y \nabla_X \xi_\alpha - \nabla_{[X, Y]}\xi_\alpha \\ &= -\nabla_X \phi(Y) + \nabla_Y \phi(X) + \phi([X, Y]) \\ &= -(\nabla_X \phi)Y - \phi(\nabla_X Y) + (\nabla_Y \phi)X + \phi(\nabla_Y X) + \phi(\nabla_X Y) - \phi(\nabla_Y X) \\ &= -(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X \end{aligned}$$

dir. Önerme 4.1.' den

$$\begin{aligned} \Re(X, Y)\xi_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^s \{ g(\phi(Y), \phi(X))\xi_\alpha + \eta^\alpha(X)\phi^2(Y) - g(\phi(X), \phi(Y))\xi_\alpha \\ &\quad - \eta^\alpha(Y)\phi^2(X) \} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \{ \eta^\alpha(X)\phi^2(Y) - \eta^\alpha(Y)\phi^2(X) \} \end{aligned}$$

dir.

Sonuç:

$(M^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir K-manifold olsun. $(M^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-manifold ise

$$\Re(X, \xi_\alpha)Y = -(\nabla_X \phi)Y \quad (4.16)$$

dir.

İspat:

$$g(\Re(X, Y)\xi_\alpha, Z) = g(\Re(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

$$g(\eta^\alpha(X)\phi^2(Y) - \phi^2(X)\eta^\alpha(Y), Z) = g(\Re(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

$$\eta^\alpha(X)g(\phi^2(Y), Z) - g(Y, \xi_\alpha)g(\phi^2(X), Z) = g(\Re(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

$$g(g(X, \xi_\alpha)\phi^2(Z) - g(\phi^2(X), Z)\xi_\alpha, Y) = g(\Re(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

$$\eta^\alpha(X)\phi^2(Z) - g(\phi^2(X), Z)\xi_\alpha = \Re(\xi_\alpha, Z)X$$

elde edilir.

5. INDEFİNİTE ALMOST S-MANİFOLDLAR VE INDEFİNİTE S-MANİFOLDLAR

5.1. Indefinite Almost S-Manifold

5.1. Tanım

$(2n+s)$ -boyutlu bir çatılandırılan manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y) \quad (5.1)$$

$$g(X, \xi_\alpha) = \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \quad (5.2)$$

şartlarını sağlayan M üzerinde indeksi ν ($0 < \nu < 2n+s$) olan bir yarı-Riemann metriği g varsa $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ' ye *indefinite metrik f-manifold* (ya da *çatılandırılan indefinite metrik manifold*) denir. Burada $\varepsilon_\alpha = \mp 1$ olup, her bir ξ_α ya spacelike ya da timelike vektör alanıdır.

5.1. Teorem

$(2n+s)$ -boyutlu bir çatılandırılan manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha)$ ve h_1 M üzerinde yarı-Riemann metrik olsun. O halde M üzerinde Eş. 5.1 de tanımlanan $(0,2)$ tipinde simetrik tensör alanı g mevcuttur.

İspat:

İlk olarak ilk tane yarı-Riemann metrik tanımlayalım;

$$h_1 = \frac{-\varepsilon_\alpha}{\alpha} h_0, \quad \alpha = h_0(\xi_\alpha, \xi_\alpha)$$

ve $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X, Y) = h_1(\phi^2(X), \phi^2(Y)) + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y)$$

olarak tanımlansın. Burada;

$$\eta^\alpha(X) = \varepsilon_\alpha h(X, \xi_\alpha) \text{ ve } h(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = \varepsilon_\alpha$$

dır. O halde M de $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ dağılımı mevcuttur. $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ dağılımının tümleyen dağılımı D_1 ile gösterilirse $\forall X \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned} h(X, X) &= h_1\left(-X + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha, -X + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(X) \\ &= h_1(X, X) \end{aligned}$$

dır. Burada $h_1(X, \xi_\alpha) = 0$ ve $h_1(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = -\varepsilon_\alpha$ dır. Böylece h , D' de h_1 ile aynı indeksli M üzerinde bir yarı-Riemann metrik

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} \left\{ h(X, Y) + h(\phi(X), \phi(Y)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y) \right\}$$

ve

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = \frac{1}{2} \left\{ h(\phi(X), \phi(Y)) + h\left(-X + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha, -Y + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha\right) \right\}$$

$$= g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_{\alpha} \eta^{\alpha}(X) \eta^{\alpha}(Y)$$

dir.

5.1.Önerme

$(M, \phi, \xi_{\alpha}, \eta^{\alpha}, g)$ bir indefinite metrik f-manifold olsun. O halde $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \phi(Y), \phi(Z)) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^1(Y, Z), \phi(X)) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_{\alpha} \{N^2(Y, Z) \eta^{\alpha}(X) + 2d\eta^{\alpha}(\phi(Y), X) \eta^{\alpha}(X) \\ &\quad - 2d\eta^{\alpha}(\phi(Z), X) \eta^{\alpha}(Y)\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

İspat:

İspat Teorem 3.3.' den kolayca görülür.

5.2.Tanım

$(M, \phi, \xi_{\alpha}, \eta^{\alpha}, g)$ bir çatılandırılan indefinite metrik manifold olsun. M ' nin temel formu $\Phi = d\eta^{\alpha}$ ise $(M, \phi, \xi_{\alpha}, \eta^{\alpha}, g)$ ye bir *indefinite almost S-manifold* denir.

5.2.Önerme

$(M, \phi, \xi_{\alpha}, \eta^{\alpha}, g)$ bir indefinite almost S-manifold olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$\eta^\alpha [\phi(X), Y] = \eta^\alpha [\phi(Y), X]$$

dir.

İspat:

Sonuç 3.3.' den kolayca görülür.

5.3.Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir indefinite almost S-manifold ve $\bar{\eta} = \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha$ olsun.

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$ için

$$(i) \quad 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = g(N^1(Y, Z), \phi(X)) + 2g(\phi(Y), \phi(X))\bar{\eta}(Z) \\ - 2g(\phi(Z), \phi(X))\bar{\eta}(Y)$$

$$(ii) \quad \nabla_{\xi_\alpha} \phi = 0$$

$$(iii) \quad \nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta = 0$$

dir.

İspat:

Önerme 3.1.' den kolayca görülür.

5.4.Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir indefinite almost S-manifold olsun. O halde;

(i) $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $h_\alpha = \frac{1}{2} L_{\xi_\alpha} \phi$ simetriktir

(ii) $\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$ için $h_\alpha(\xi_\beta) = 0$

(iii) $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $h_\alpha \circ \phi + \phi \circ h_\alpha = 0$

dir.

İspat:

Önerme 3.3.' den kolayca görülür.

5.5.Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir indefinite almost S-manifold olsun. $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve

$\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$\nabla_X \xi_\alpha = -\varepsilon_\alpha \phi(X) - \phi(h_\alpha(X))$$

dir

İspat:

Önerme 3.2.' den kolayca görülür.

5.6.Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir indefinite almost S-manifold, $\bar{\xi} = \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha$ ve $\bar{\eta} = g(X, \bar{\xi})$ olsun.

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \phi)(Y) + (\nabla_{\phi(X)} \phi)(\phi(Y)) = 2g(\phi(X), \phi(Y)) \bar{\xi} + \bar{\eta}(Y) \phi^2(X) - \bar{\eta}(X) \phi^2(Y)$$

dir.

İspat:

Önerme 3.4.' den kolayca görülür.

Sonuç:

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir indefinite almost S-manifold olsun. O halde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(i) (\nabla_X \phi)(Y) + (\nabla_{\phi(X)} \phi)(\phi(Y)) = 2g(X, Y) \bar{\xi}$$

$$(ii) (\nabla_X \phi)(\phi(X)) = (\nabla_{\phi(X)} \phi)(X)$$

dir. Burada $\bar{\xi} = \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha$ dır.

İspat:

Sonuç 3.3.' den kolayca görülür.

5.2.Indefinite S-Manifold

5.3.Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ indefinite almost S-manifoldu normal ise $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ' ye *indefinite S-manifold* denir.

5.6. Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir indefinite S-manifold olsun. O halde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \phi)Y = \sum_{\alpha=1}^s \{g(\phi(x), \phi(Y))\xi_\alpha + \eta^\alpha(Y)\phi^2(X)\} \quad (5.4)$$

dir.

İspat:

Önerme 5.1.' den kolayca görülür.

5.2.Sonuç:

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir indefinite S-manifold olsun. Bu durumda $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$\nabla_X \xi_\alpha = -\varepsilon_\alpha \phi(X) \quad (5.5)$$

dir.

İspat:

Lemma 4.1.' den kolayca görülür.

5.8. Önerme

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir indefinite S-manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \sum_{\alpha=1}^s \left\{ \eta^\alpha(Y) g(\phi(X), \phi(Y)) - \eta^\alpha(Z) g(\phi(X), \phi(Y)) \right\} \quad (5.6)$$

dir.

İspat:

Eş. 5.4.' de $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z)$ kullanılarak Eş. 5.6 kolayca görülür.

6. ε_α -ALMOST S-MANİFOLDLAR

6.1. ε_α -Almost S-Manifold

6.1.Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$, $(2n+s)$ -boyutlu bir indefinite almost S-manifold olsun. $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $\varepsilon_\alpha = g(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = \mp 1$ ise $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ye bir ε_α -almost S manifold denir.

6.1.Teorem

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ε_α -almost S-manifold olsun. Bu durumda

$$(i) \ \phi(\xi_\alpha) = 0, \quad (ii) \ \eta^\alpha \circ \phi = 0, \quad (iii) \ rank \phi = 2n$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} (i) \ \phi^2(\xi_\alpha) &= -\xi_\alpha + \sum_{\beta=1}^s \eta^\beta(\xi_\alpha) \xi_\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\phi(\xi_\alpha) = -\phi^3(\xi_\alpha) = -\phi(\phi^2(\xi_\alpha)) = 0$$

elde edilir.

(ii) Eş. 3.1 ve Eş. 3.5' den $\forall V \in \Gamma(TM)$ için

$$\phi^3(V) = -\phi(V)$$

dir. Diğer taraftan Eş. 3.6' dan

$$\eta^\alpha \circ \phi = 0$$

elde edilir.

(iii) Eş. 3.5' dan $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$\zeta \phi = Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$$

dir. Buradan

$$\text{boy} \zeta \phi = s$$

olur. Bu durumda

$$\text{rank} \phi = 2n$$

dir.

6.2. Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ normal çatılandırılan metrik manifold olsun. $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir ε_α -almost S-manifold denir.

6.2. Teorem

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ε_α -almost S-manifold ve h_1 M üzerinde yarı-Riemann metrik olsun. Bu durumda M üzerinde Eş. 5.1' de tanımlanan $(0, 2)$ tipinde g simetrik tensör alanı her zaman mevcuttur.

İspat:

5.1. Teorem' den kolayca görülür.

6.3. Tanım

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ε_α -almost S-manifold olsun.

(i) $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $\varepsilon_\alpha = +1$ ve $\nu = 2r$ ise M ye *spacelike almost S-manifold*

(ii) $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $\varepsilon_\alpha = 1$ ve $\nu = 2r + 1$ ise M ye *timelike almost S-manifold* denir.

6.3. Teorem

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ $f \cdot pk$ -yapı bir ε_α -S-manifolddur $\Leftrightarrow$

$$(\nabla_X \phi)Y = \sum_{\alpha=1}^s \{g(X, Y)\xi_\alpha - \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(Y)X\}, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (6.1)$$

dir. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyondur.

Sonuç:

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ε_α -almost S-manifold olsun. O halde

$$\nabla_X \xi_\alpha = -\varepsilon_\alpha \phi(X), \quad \forall X \in \Gamma(TM) \quad (6.2)$$

dir.

İspat:

Eş. 6.1’de $Y = \xi_\alpha$ konulursa Eş. 6.2 elde edilir.

Sonuç

$(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir ε_α -S manifold olsun. M üzerinde $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için ξ_α karakteristik vektör alanları Killing vektör alanıdır.

İspat:

$$\begin{aligned} (L_{\xi_\alpha} \Phi)(X, Y) &= \xi_\alpha \Phi(X, Y) - \Phi([\xi_\alpha, X], Y) - \Phi(X, [\xi_\alpha, Y]) \\ &= \xi_\alpha g(X, \phi(Y)) - g([\xi_\alpha, X], \phi(Y)) - g(X, \phi([\xi_\alpha, Y])) \\ &= (L_{\xi_\alpha} g)(X, \phi(Y)) \end{aligned}$$

dir. Burada $L_{\xi_\alpha} \phi = 0$ dir. Fakat

$$L_{\xi_\alpha} \Phi = di_{\xi_\alpha} \Phi + i_{\xi_\alpha} d\Phi$$

$$(i_{\xi_\alpha} \Phi) = \Phi(\xi_\alpha, X) = 0$$

dır. Diğer taraftan

$$(L_{\xi_\alpha} g)(X, \eta^\beta(Y) \xi_\beta) = \xi_\alpha (\eta^\beta(Y) \eta^\beta(X) - \eta^\beta(Y) \eta^\beta([\xi_\alpha, X]))$$

$$\begin{aligned}
& -\eta^\beta(Y)g(X, [\xi_\alpha, \xi_\beta]) - \xi_\alpha(\eta^\beta(Y)\eta^\beta(X)) \\
& = \eta^\beta(Y)\eta^\beta(X) - \eta^\beta(Y)\eta^\beta([\xi_\alpha, X]) - \eta^\beta(Y)\eta^\beta([\xi_\alpha, \xi_\beta]) \\
& = 0
\end{aligned}$$

burada $L_{\xi_\alpha}\eta^\beta = 0$ ve $L_{\xi_\alpha}\xi_\beta = 0$ dir. Böylece

$$(L_{\xi_\alpha}g)\left(X, \phi(Y) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\beta(Y)\xi_\beta\right) = 0$$

dir.

$\phi + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\beta \otimes \xi_\beta$ non-singular olduğundan $L_{\xi_\alpha}g = 0$ olarak bulunur.

6.2. ε_α -Almost S-Manifolds İçin Örnekler

Örnek (Spacelike Almost S-Manifolds):

IR^{2n+s} üzerindeki koordinat sistemi $(x_i, y_i, z_\alpha) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_s)$ olsun.

$r \neq 0, r \leq n, r \neq s$ için özel halini incelenecektir. Burada;

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, 0 \leq i \leq r \\ +1, (r+1) \leq i \leq n \end{cases} \quad \text{olmak üzere, } \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, s\} \text{ için } \varepsilon_\alpha = +1$$

dir.

$$\eta^\alpha = \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \left\{ dz_\alpha - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i dx_i - \sum_{i^*=(r+1)}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} dx_{i^*} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ dz_\alpha + \sum_{i=1}^r y_i dx_i - \sum_{i^*=(r+1)}^n y_{i^*} dx_{i^*} \right\}$$

1-formu göz önüne alınsın. Burada $\xi_\alpha = 2\varepsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ için

$$\eta^\alpha(\xi_\beta) = \frac{1}{2} \left(dz_\alpha + \sum_{i=1}^r y_i dx_i - \sum_{i^*=(r+1)}^n y_{i^*} dx_{i^*} \right) \left(2 \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right) = \delta_{\alpha\beta}$$

olduğu görülür. Ayrıca ϕ endomorfizmine karşılık gelen matris

$$\phi(X) = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & I_n & [0]_{n \times s} \\ -I_n & [0]_{n \times n} & [0]_{n \times s} \\ [0]_{s \times n} & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 y_1 \dots \varepsilon_s y_s y_{s+1} \dots y_n \\ \dots \\ \varepsilon_1 y_1 \dots \varepsilon_s y_s y_{s+1} \dots y_n \end{bmatrix}_{s \times n} & [0]_{s \times s} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times (2n+s)} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{i^*} \\ X_{n+i} \\ X_{n+i^*} \\ X_{2n+\alpha} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times 1}$$

dir. Buradan

$$\phi^2(X) = \begin{bmatrix} -I_n & [0]_{n \times n} & [0]_{n \times s} \\ [0]_{n \times n} & -I_n & [0]_{n \times s} \\ \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 y_1 \dots -\varepsilon_s y_s - y_{s+1} \dots - y_n \\ \dots \\ -\varepsilon_1 y_1 \dots -\varepsilon_s y_s - y_{s+1} \dots - y_n \end{bmatrix}_{s \times n} & [0]_{s \times n} & [0]_{s \times s} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times (2n+s)} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{i^*} \\ X_{n+i} \\ X_{n+i^*} \\ X_{2n+\alpha} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times 1}$$

$$\phi^2(X) = \begin{bmatrix} -I_n & [0]_{n \times n} & [0]_{n \times s} \\ [0]_{n \times n} & -I_n & [0]_{n \times s} \\ [0]_{s \times n} & [0]_{s \times n} & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{i^*} \\ X_{n+i} \\ X_{n+i^*} \\ X_{2n+\alpha} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} X_i \\ X_{i^*} \\ X_{n+i} \\ X_{n+i^*} \\ X_{2n+\alpha} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(X_{2n+\alpha} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i X_i - \sum_{i^*=(r+1)}^n y_{i^*} X_{i^*} \right) \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -X + \frac{1}{2} \left(X_{2n+\alpha} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i X_i - \sum_{i^*=(r+1)}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} X_{i^*} \right) \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -X + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \xi_\alpha$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \eta^\alpha(X) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \left(dz_\alpha - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i dx_i - \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} dx_{i^*} \right) \\ &\quad \left(X_j \frac{\partial}{\partial x_j} + X_{j^*} \frac{\partial}{\partial x_{j^*}} + X_{n+j} \frac{\partial}{\partial y_j} + X_{n+j^*} \frac{\partial}{\partial y_{j^*}} + X_{2n+\beta} \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(X_{2n+\beta} \delta_{\alpha\beta} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i X_j \delta_{ij} - \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} X_{j^*} \delta_{i^*j^*} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(X_{2n+\alpha} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i X_i - \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} X_{i^*} \right) \end{aligned}$$

dir. Indefinite “g” metriğini bulunacaktır

$$g = \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \sum_{i=1}^r \varepsilon_i (dx_i^2 + dy_i^2) + \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \sum_{i=1}^r \varepsilon_{i^*} (dx_{i^*}^2 + dy_{i^*}^2) + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha \otimes \eta^\alpha$$

dir. Burada;

$$\begin{aligned} \eta^\alpha \otimes \eta^\alpha &= \frac{1}{4} \left(dz_\alpha - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i dx_i - \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} dx_{i^*} \right) \left(dz_\beta - \sum_{j=1}^r \varepsilon_j y_j dx_j - \sum_{j^*=r+1}^n \varepsilon_{j^*} y_{j^*} dx_{j^*} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ dz_\alpha \otimes dz_\beta - \sum_{j=1}^r \varepsilon_j y_j dz_\alpha \otimes dx_j - \sum_{j^*=r+1}^n \varepsilon_{j^*} y_{j^*} dz_\alpha \otimes dx_{j^*} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i dx_i \otimes dz_\beta \right. \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^r \varepsilon_i \varepsilon_j y_i y_j dx_i \otimes dx_j + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i \sum_{j^*=r+1}^n \varepsilon_{j^*} y_{j^*} dx_i \otimes dx_{j^*} - \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} dx_{i^*} \otimes dz_\beta \\ &\quad \left. + \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} \sum_{j=1}^r \varepsilon_j y_j dx_{i^*} \otimes dx_j - \sum_{i^*,j^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} \varepsilon_{j^*} y_{i^*} y_{j^*} dx_{i^*} \otimes dx_{j^*} \right\} \end{aligned}$$

dir O halde g tekrar yazılırsa;

$$\begin{aligned} g &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ dz_\alpha \otimes dz_\beta - \sum_{j=1}^r \varepsilon_j y_j dz_\alpha \otimes dx_j - \sum_{j^*=r+1}^n \varepsilon_{j^*} y_{j^*} dz_\alpha \otimes dx_{j^*} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i dx_i \otimes dz_\beta \right. \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^r (\varepsilon_i \delta_{ij} + \varepsilon_i \varepsilon_j y_i y_j) dx_i \otimes dx_j + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i \sum_{j^*=r+1}^n \varepsilon_{j^*} y_{j^*} dx_i \otimes dx_{j^*} - \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} dx_{i^*} \otimes dz_\beta \\ &\quad + \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} \sum_{j=1}^r \varepsilon_j y_j dx_{i^*} \otimes dx_j + \sum_{i^*,j^*=r+1}^n (\varepsilon_{i^*} \delta_{i^*j^*} + \varepsilon_{i^*} \varepsilon_{j^*} y_{i^*} y_{j^*}) dx_{i^*} \otimes dx_{j^*} + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i dy_i \otimes dy_i \\ &\quad \left. + \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} dy_{i^*} \otimes dy_{i^*} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. g indefinite metriğine karşılık gelen matris

$$[g] = \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \begin{bmatrix} \varepsilon_i \delta_{ij} + \varepsilon_i \varepsilon_j y_i y_j & \varepsilon_i y_i \varepsilon_j^* y_j^* & [0]_{r \times r} & [0]_{r \times (n-r)} & [A]^T \\ \varepsilon_i y_i \varepsilon_j^* y_j^* & \varepsilon_i^* \delta_{i^* j^*} + \varepsilon_i^* \varepsilon_j^* y_i^* y_j^* & [0]_{(n-r) \times r} & [0]_{(n-r) \times (n-r)} & [B]^T \\ [0]_{r \times r} & [0]_{r \times (n-r)} & \varepsilon_i \delta_{ij} & [0]_{r \times (n-r)} & [0]_{r \times s} \\ [0]_{(n-r) \times r} & [0]_{(n-r) \times (n-r)} & [0]_{(n-r) \times r} & \varepsilon_i^* \delta_{i^* j^*} & [0]_{(n-r) \times s} \\ [A] & [B] & [0]_{s \times r} & [0]_{s \times (n-r)} & \delta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times (2n+s)}$$

dir. Buradaki A ve B matrisleri sırasıyla;

$$[A] = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & -\varepsilon_r y_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\varepsilon_1 y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & -\varepsilon_r y_r \end{bmatrix}_{s \times r} \quad [B] = \begin{bmatrix} -\varepsilon_{r+1} y_{r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & -\varepsilon_n y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\varepsilon_{r+1} y_{r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & -\varepsilon_n y_n \end{bmatrix}_{s \times (n-r)}$$

dir. $\varepsilon_i = \begin{cases} -1, 0 \leq i \leq r \\ +1, (r+1) \leq i \leq n \end{cases}$ ve $\forall \alpha \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $\varepsilon_\alpha = +1$ olduğu göz önüne

alınarak g matrisi tekrar yazılırsa;

$$[g] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\delta_{ij} + y_i y_j & -y_i y_j^* & [0]_{r \times r} & [0]_{(n-r) \times r} & y_i \\ -y_i y_j^* & \delta_{i^* j^*} + y_i^* y_j^* & [0]_{r \times (n-r)} & [0]_{(n-r) \times (n-r)} & -y_i^* \\ [0]_{r \times r} & [0]_{(n-r) \times r} & -\delta_{ij} & [0]_{(n-r) \times r} & [0]_{s \times r} \\ [0]_{r \times (n-r)} & [0]_{(n-r) \times (n-r)} & [0]_{r \times (n-r)} & \delta_{i^* j^*} & [0]_{s \times (n-r)} \\ y_j & -y_j^* & [0]_{r \times s} & [0]_{(n-r) \times s} & \delta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times (2n+s)}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(IR_{2r}^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir spacelike-S-manifolddur.

6.1.Önerme

$(IR_{2r}^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ spacelike almost S-manifold için

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y)$$

dir.

İspat

İspat yapılırken aşağıdaki eşitlikler göz önüne alınılacaktır.

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = [\phi(X)]^T [g] [\phi(Y)]$$

$$g(X, Y) = [X]^T [g] [Y]$$

olmak üzere

$$[\phi(X)] = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & I_n & [0]_{s \times n} \\ -I_n & [0]_{n \times n} & [0]_{s \times n} \\ [0]_{n \times s} & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 y_1 \dots \varepsilon_s y_s y_{s+1} \dots y_n \\ \dots \dots \dots \\ \varepsilon_1 y_1 \dots \varepsilon_s y_s y_{s+1} \dots y_n \end{bmatrix}_{n \times s} & [0]_{s \times s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{i^*} \\ X_{n+i} \\ X_{n+i^*} \\ X_{2n+\alpha} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r X_{n+i} \\ \sum_{i^*=r+1}^n X_{n+i^*} \\ -\sum_{i=1}^r X_i \\ -\sum_{i^*=r+1}^n X_{i^*} \\ \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i X_{n+i} + \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} X_{n+i^*} \end{bmatrix}$$

dir. Burada vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^s X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i^*=s+1}^n X_{i^*} \frac{\partial}{\partial x_{i^*}} + \sum_{i=1}^s X_{n+i} \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} + \sum_{i^*=1}^s X_{n+i^*} \frac{\partial}{\partial x_{n+i^*}}$$

ve

$$Y = \sum_{i=1}^s Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i^*=s+1}^n Y_{i^*} \frac{\partial}{\partial x_{i^*}} + \sum_{i=1}^s Y_{n+i} \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} + \sum_{i^*=1}^s Y_{n+i^*} \frac{\partial}{\partial x_{n+i^*}}$$

olmak üzere

$$[g][\phi(Y)] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^r Y_{n+i} \\ \sum_{i^*=r+1}^n Y_{n+i^*} \\ \sum_{i=1}^r Y_i \\ -\sum_{i^*=1}^r Y_{i^*} \\ [0] \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
[\phi(X)]^T [g][\phi(Y)] &= \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c} \sum_{i=1}^r X_{n+i} \\ \sum_{i^*=r+1}^n X_{n+i^*} \\ -\sum_{i=1}^r X_i \\ -\sum_{i^*=r+1}^n X_{i^*} \\ \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i X_{n+i} + \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} X_{n+i^*} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} -\sum_{i=1}^r Y_{n+i} \\ \sum_{i^*=r+1}^n Y_{n+i^*} \\ \sum_{i=1}^r Y_i \\ -\sum_{i^*=1}^r Y_{i^*} \\ [0] \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left\{ -\sum_{i=1}^r X_{n+i} Y_{n+i} + \sum_{i^*=r+1}^n X_{n+i^*} Y_{n+i^*} - \sum_{i=1}^r X_i Y_i + \sum_{i^*=r+1}^n X_{i^*} Y_{i^*} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ -\sum_{i=1}^r (X_i Y_i + X_{n+i} Y_{n+i}) + \sum_{i^*=r+1}^n (X_{i^*} Y_{i^*} + X_{n+i^*} Y_{n+i^*}) \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$[g][Y] = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c} -\sum_{i=1}^r Y_i + \sum_{i=1}^r y_i y_j Y_i - \sum_{i^*=r+1}^n y_i y_{j^*} Y_{i^*} + \sum_{i=1}^r y_i Y_{2n+\alpha} \\ -\sum_{i=1}^r y_i y_{j^*} Y_i + \sum_{i^*=r+1}^n Y_{i^*} + \sum_{i^*=r+1}^n y_i y_{j^*} Y_{i^*} - \sum_{i^*=r+1}^n y_{i^*} Y_{2n+\alpha} \\ -\sum_{i=1}^r Y_{n+i} \\ \sum_{i^*=r+1}^n Y_{n+i^*} \\ \sum_{i=1}^r y_j Y_i - \sum_{i^*=r+1}^n y_{j^*} Y_{i^*} + Y_{2n+\alpha} \end{array} \right]$$

$$[X]^T [g][Y] = \frac{1}{4} \left\{ -\sum_{i=1}^r X_i Y_i + \sum_{i=1}^r y_i y_j X_i Y_i - \sum_{i^*=r+1}^n y_i y_{j^*} X_i Y_{i^*} + \sum_{i=1}^r y_i X_i Y_{2n+\alpha} - \sum_{i=1}^r y_{i^*} y_j X_{i^*} Y_i \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i^*=r+1}^n X_{i^*} Y_{i^*} + \sum_{i^*=r+1}^n y_{i^*} y_{j^*} X_{i^*} Y_{i^*} - \sum_{i=1}^r y_{i^*} X_{i^*} Y_{2n+\alpha} - \sum_{i=1}^r Y_{n+i} X_{n+i} + \sum_{i^*=r+1}^n X_{n+i^*} Y_{n+i^*} \\
& \quad + \sum_{i=1}^r y_j X_{2n+\alpha} Y_i - \sum_{i^*=r+1}^n y_{j^*} X_{2n+\alpha} Y_{i^*} + X_{2n+\alpha} Y_{2n+\alpha} \Big\} \\
& = \frac{1}{4} \left\{ - \sum_{i=1}^r (X_i Y_i + X_{n+i} Y_{n+i}) + \sum_{i^*=r+1}^n (X_{i^*} Y_{i^*} + X_{n+i^*} Y_{n+i^*}) + \sum_{i=1}^r y_i y_j X_i Y_i - \sum_{i^*=r+1}^n y_i y_{j^*} X_i Y_{i^*} \right. \\
& \quad + \sum_{i=1}^r y_i X_i Y_{2n+\alpha} - \sum_{i=1}^r y_{i^*} y_{j^*} X_{i^*} Y_{i^*} + \sum_{i^*=r+1}^n y_{i^*} y_{j^*} X_{i^*} Y_{i^*} - \sum_{i=1}^r y_{i^*} X_{i^*} Y_{2n+\alpha} + \sum_{i=1}^r y_j X_{2n+\alpha} Y_i \\
& \quad \left. - \sum_{i^*=r+1}^n y_{j^*} X_{2n+\alpha} Y_{i^*} + X_{2n+\alpha} Y_{2n+\alpha} \right\}
\end{aligned}$$

olur ve sonuç olarak

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y)$$

eşitliği bulunur.

Ayrıca $(IR_{2r}^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ spacelike almost S-manifoldunun

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{i^*}}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_{i^*}}, \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right) \text{ doğal tabanından başka } \varepsilon_i = \begin{cases} -1, 0 \leq i \leq r \\ +1, (r+1) \leq i \leq n \end{cases}, \varepsilon_\alpha = +1$$

$\forall \alpha \in \{1, 2, \dots, s\}$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \left(E_i = 2 \frac{\partial}{\partial y_i}, E_{i^*} = 2 \frac{\partial}{\partial y_{i^*}}, \phi(E_i) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \right. \\
&\quad \left. \phi(E_{i^*}) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_{i^*}} + \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \xi_\alpha = 2 \varepsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right) \\
\varphi_1 &= \left(E_i = 2 \frac{\partial}{\partial y_i}, E_{i^*} = 2 \frac{\partial}{\partial y_{i^*}}, \phi(E_i) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^r y_i \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \right. \\
&\quad \left. \phi(E_{i^*}) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_{i^*}} + \sum_{i^*=r+1}^n y_{i^*} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \xi_\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right)
\end{aligned}$$

tabanı da alınabilir. Vektör alanları

$$X = \overline{X}^i E_i + \overline{X}^{i^*} E_{i^*} + \overline{X}^{n+i} E_{n+i} + \overline{X}^{n+i^*} E_{n+i^*} + \overline{X}^{2n+\alpha} E_{2n+\alpha}$$

ve

$$Y = \overline{Y}^i E_i + \overline{Y}^{i^*} E_{i^*} + \overline{Y}^{n+i} E_{n+i} + \overline{Y}^{n+i^*} E_{n+i^*} + \overline{Y}^{2n+\alpha} E_{2n+\alpha}$$

olmak üzere φ_1 bazının bir ortonormal baz olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
g(E_i, E_j) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r (dx_k(E_i) dx_k(E_j) + dy_k(E_i) dy_k(E_j)) + \sum_{k^*=r+1}^n (dx_{k^*}(E_i) dx_{k^*}(E_j) \right. \\
&\quad \left. + dy_{k^*}(E_i) dy_{k^*}(E_j)) \right\} + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_i) \eta^\alpha(E_j) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k 2\delta_{ki} 2\delta_{kj} \right\} \\
&= \varepsilon_i \delta_{ij} \\
&= -\delta_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(E_{i^*}, E_{j^*}) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(E_{i^*}) dx_k(E_{j^*}) + dy_{k^*}(E_{i^*}) dy_{k^*}(E_{j^*}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(E_{i^*}) dx_{k^*}(E_{j^*}) + dy_{k^*}(E_{i^*}) dy_{k^*}(E_{j^*}) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_{i^*}) \eta^\alpha(E_{j^*}) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \varepsilon_{k^*} 2\delta_{k^*i^*} 2\delta_{k^*j^*} \right\} \\
&= \varepsilon_{i^*} \delta_{i^*j^*} \\
&= \delta_{i^*j^*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\phi(E_i), \phi(E_j)) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^s \varepsilon_k \left(dx_k(\phi(E_i)) dx_k(\phi(E_j)) + dy_k(\phi(E_i)) dy_k(\phi(E_j)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(\phi(E_i)) dx_{k^*}(\phi(E_j)) + dy_{k^*}(\phi(E_i)) dy_{k^*}(\phi(E_j)) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(\phi(E_i)) \eta^\alpha(\phi(E_j)) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k 2\delta_{ki} 2\delta_{kj} \right\} \\
&= \varepsilon_i \delta_{ij} \\
&= -\delta_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\phi(E_{i^*}), \phi(E_{j^*})) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(\phi(E_{i^*})) dx_k(\phi(E_{j^*})) + dy_k(\phi(E_{i^*})) dy_k(\phi(E_{j^*})) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^r \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(\phi(E_{i^*})) dx_{k^*}(\phi(E_{j^*})) + dy_{k^*}(\phi(E_{i^*})) dy_{k^*}(\phi(E_{j^*})) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(\phi(E_{i^*})) \eta^\alpha(\phi(E_{j^*}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{k^*=1}^s \varepsilon_{k^*} 2\delta_{k^*i^*} 2\delta_{k^*j^*} \right\} \\
&= \varepsilon_{i^*} \delta_{i^*j^*} \\
&= \delta_{i^*j^*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\xi_\alpha, \xi_\beta) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(\xi_\alpha) dx_k(\xi_\beta) + dy_k(\xi_\alpha) dy_k(\xi_\beta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(\xi_\alpha) dx_{k^*}(\xi_\beta) + dy_{k^*}(\xi_\alpha) dy_{k^*}(\xi_\beta) \right) \right\} + \sum_{\gamma=1}^s \varepsilon_\gamma \eta^\gamma(\xi_\alpha) \eta^\gamma(\xi_\beta) \\
&= \sum_{\gamma=1}^s \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\gamma\beta} \\
&= \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(E_i, E_{j^*}) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(E_i) dx_k(E_{j^*}) + dy_k(E_i) dy_k(E_{j^*}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(E_i) dx_{k^*}(E_{j^*}) + dy_{k^*}(E_i) dy_{k^*}(E_{j^*}) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_i) \eta^\alpha(E_{j^*}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(E_i, \phi(E_j)) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(E_i) dx_k(\phi(E_j)) + dy_k(E_i) dy_k(\phi(E_j)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(E_i) dx_{k^*}(\phi(E_j)) + dy_{k^*}(E_i) dy_{k^*}(\phi(E_j)) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_i) \eta^\alpha(\phi(E_j)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(E_i, \xi_\beta) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(E_i) dx_k(\xi_\beta) + dy_k(E_i) dy_k(\xi_\beta) \right) + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(E_i) dx_{k^*}(\xi_\beta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + dy_{k^*}(E_i) dy_{k^*}(\xi_\beta) \right) \right\} + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_i) \eta^\alpha(\xi_\beta), \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(E_i, \phi(E_j^*)) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(E_i) dx_k(\phi(E_j^*)) + dy_k(E_i) dy_k(\phi(E_j^*)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(E_i) dx_{k^*}(\phi(E_j^*)) + dy_{k^*}(E_i) dy_{k^*}(\phi(E_j^*)) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_i) \eta^\alpha(\phi(E_j^*)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(E_{i^*}, \phi(E_j)) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(E_{i^*}) dx_k(\phi(E_j)) + dy_k(E_{i^*}) dy_k(\phi(E_j)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(E_{i^*}) dx_{k^*}(\phi(E_j)) + dy_{k^*}(E_{i^*}) dy_{k^*}(\phi(E_j)) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_{i^*}) \eta^\alpha(\phi(E_j)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(E_{i^*}, \phi(E_j^*)) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(E_{i^*}) dx_k(\phi(E_j^*)) + dy_k(E_{i^*}) dy_k(\phi(E_j^*)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(E_{i^*}) dx_{k^*}(\phi(E_j^*)) + dy_{k^*}(E_{i^*}) dy_{k^*}(\phi(E_j^*)) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_{i^*}) \eta^\alpha(\phi(E_j^*)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(E_{i^*}, \xi_\beta) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(E_{i^*}) dx_k(\xi_\beta) + dy_k(E_{i^*}) dy_k(\xi_\beta) \right) + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(E_{i^*}) dx_{k^*}(\xi_\beta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + dy_{k^*}(E_{i^*}) dy_{k^*}(\xi_\beta) \right) \right\} + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(E_{i^*}) \eta^\alpha(\xi_\beta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\phi(E_i), \phi(E_{j^*})) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(\phi(E_i)) dx_k(\phi(E_{j^*})) + dy_k(\phi(E_i)) dy_k(\phi(E_{j^*})) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(\phi(E_i)) dx_{k^*}(\phi(E_{j^*})) + dy_{k^*}(\phi(E_i)) dy_{k^*}(\phi(E_{j^*})) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(\phi(E_i)) \eta^\alpha(\phi(E_{j^*})) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\phi(E_i), \xi_\beta) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(\phi(E_i)) dx_k(\xi_\beta) + dy_k(\phi(E_i)) dy_k(\xi_\beta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(\phi(E_i)) dx_{k^*}(\xi_\beta) + dy_{k^*}(\phi(E_i)) dy_{k^*}(\xi_\beta) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(\phi(E_i)) \eta^\alpha(\xi_\beta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\phi(E_{i^*}), \phi(E_{j^*})) &= \frac{\varepsilon_\alpha}{4} \left\{ \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \left(dx_k(\phi(E_{i^*})) dx_k(\xi_\beta) + dy_k(\phi(E_{i^*})) dy_k(\xi_\beta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k^*=r+1}^n \varepsilon_{k^*} \left(dx_{k^*}(\phi(E_{i^*})) dx_{k^*}(\xi_\beta) + dy_{k^*}(\phi(E_{i^*})) dy_{k^*}(\xi_\beta) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(\phi(E_{i^*})) \eta^\alpha(\xi_\beta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan φ_1 tabanı ortogonaldır.

Örnek (Timelike Almost S-Manifolds):

IR^{2n+s} üzerindeki koordinat sistemi $(x_i, y_i, z_\alpha) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_s)$ olsun.

$r \neq 0, r \leq n, r \neq s$ özel hali incelenecektir. Burada;

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, 0 \leq i \leq r \\ +1, (r+1) \leq i \leq n \end{cases} \text{ olmak üzere, } \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, s\} \text{ için } \varepsilon_\alpha = -1$$

dır.

$$\eta^\alpha = \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \left\{ dz_\alpha - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i dx_i - \sum_{i^*=(r+1)}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} dx_{i^*} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ dz_\alpha + \sum_{i=1}^r y_i dx_i - \sum_{i^*=(r+1)}^n y_{i^*} dx_{i^*} \right\}$$

1-formları göz önüne alınsın. Burada $\xi_\alpha = 2\varepsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} = -2 \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ için

$$\eta^\alpha(\xi_\beta) = -\frac{1}{2} \left(dz_\alpha + \sum_{i=1}^r y_i dx_i - \sum_{i^*=(r+1)}^n y_{i^*} dx_{i^*} \right) \left(2 \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right) = -\delta_{\alpha\beta}$$

olduğu görülür. Ayrıca ϕ endomorfizmine karşılık gelen matris spacelike almost S-manifoldlardaki gibi benzer şekilde

$$\begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & I_n & [0]_{s \times n} \\ -I_n & [0]_{n \times n} & [0]_{s \times n} \\ [0]_{n \times s} & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 y_1 \dots \varepsilon_s y_s y_{s+1} \dots y_n \\ \dots \dots \dots \\ \varepsilon_1 y_1 \dots \varepsilon_s y_s y_{s+1} \dots y_n \end{bmatrix}_{n \times s} & [0]_{s \times s} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times (2n+s)}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\phi^2(X) = -X + \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \xi_\alpha$$

dir ve indefinite g metriği

$$[g] = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\delta_{ij} + y_i y_j & -y_i y_j^* & [0]_{r \times r} & [0]_{(n-r) \times r} & y_i \\ -y_i y_j^* & \delta_{i^* j^*} + y_i^* y_j^* & [0]_{r \times (n-r)} & [0]_{(n-r) \times (n-r)} & -y_i^* \\ [0]_{r \times r} & [0]_{(n-r) \times r} & -\delta_{ij} & [0]_{(n-r) \times r} & [0]_{s \times r} \\ [0]_{r \times (n-r)} & [0]_{(n-r) \times (n-r)} & [0]_{r \times (n-r)} & \delta_{i^* j^*} & [0]_{s \times (n-r)} \\ y_j & -y_j^* & [0]_{r \times s} & [0]_{(n-r) \times s} & \delta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(2n+s) \times (2n+s)}$$

olur. Sonuç olarak $(IR_{2(n-r)+1}^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir timelike almost S-manifolddur.

6.2. Önerme

$(IR_{2(n-r)+1}^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ timelike almost S-manifoldu için

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y)$$

dir. Ayrıca $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir timelike almost S-manifoldunun

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{i^*}}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_{i^*}}, \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right) \text{ doğal tabanından başka } \varepsilon_i = \begin{cases} -1, 0 \leq i \leq r \\ +1, (r+1) \leq i \leq n \end{cases}, \varepsilon_\alpha = -1$$

$\forall \alpha \in \{1, 2, \dots, s\}$ için

$$\varphi_2 = \left(E_i = 2 \frac{\partial}{\partial y_i}, E_{i^*} = 2 \frac{\partial}{\partial y_{i^*}}, \phi(E_i) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i y_i \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \right.$$

$$\left. \phi(E_{i^*}) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_{i^*}} + \sum_{i^*=r+1}^n \varepsilon_{i^*} y_{i^*} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \xi_\alpha = 2 \varepsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right)$$

$$\varphi_2 = \left(E_i = 2 \frac{\partial}{\partial y_i}, E_{i^*} = 2 \frac{\partial}{\partial y_{i^*}}, \phi(E_i) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^r y_i \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \right.$$

$$\left. \phi(E_{i^*}) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_{i^*}} + \sum_{i^*=r+1}^n y_{i^*} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \xi_\alpha = -2 \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right)$$

tabanı da alabiliriz. Burada spacelike almost S-manifold da olduğu gibi

$$g(E_i, E_i) = \delta_{ij}$$

$$g(E_{i^*}, E_{j^*}) = -\delta_{i^* j^*}$$

$$g(\phi(E_i), \phi(E_j)) = \delta_{ij}$$

$$g(\phi(E_{i^*}), \phi(E_{j^*})) = -\delta_{i^* j^*}$$

$$g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

olur ayrıca

$$g(E_i, E_{j^*}) = g(E_i, \phi(E_j)) = g(E_i, \phi(E_{j^*})) = g(E_i, \xi_\beta) = 0$$

$$g(E_{i^*}, E_j) = g(E_{i^*}, \phi(E_j)) = g(E_{i^*}, \phi(E_{j^*})) = g(E_{i^*}, \xi_\beta) = 0$$

$$g(\phi(E_i), E_j) = g(\phi(E_i), E_{j^*}) = g(\phi(E_i), \phi(E_{j^*})) = g(\phi(E_i), \xi_\beta) = 0$$

$$g(\phi(E_{i^*}), E_j) = g(\phi(E_{i^*}), E_{j^*}) = g(\phi(E_{i^*}), \phi(E_j)) = g(\phi(E_{i^*}), \xi_\beta) = 0$$

$$g(\xi_\beta, E_j) = g(\xi_\beta, E_{j^*}) = g(\xi_\beta, \phi(E_j)) = g(\xi_\beta, \phi(E_{j^*})) = 0$$

olduğundan φ_2 tabanı ortogonaldır.

7. INDEFINITE ε_α -S-MANİFOLDLARIN REAL HİPERYÜZEYLERİ

$(2n+s)$ -boyutlu bir indefinite ε_α -S manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ve $\overline{M}$, M nin non-dejenere real hiperyüzeyi olsun. $\overline{M}$ 'nin normal vektör alanı N ve $\xi_{s+1} = \phi N$ olmak üzere

$$\phi X = fX + w(X)N \quad (7.1)$$

dir. Burada $w(X) = g(X, N)$ dir. Şimdi reel hiperyüzeye ait bazı eşitlikler elde edilecektir.

$$\eta^\alpha(N) = \varepsilon_\alpha(N, \xi_\alpha) = 0 \quad (7.2)$$

$$g(\xi_{s+1}, \xi_{s+1}) = g(\phi N, \phi N) = g(N, N) - \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(N) \eta^\alpha(N), \quad (7.3)$$

$$g(N, N) = \varepsilon_N = \varepsilon_{s+1} \quad (7.4)$$

ve

$$g(\xi_{s+1}, N) = g(\phi N, N) = 0 \quad (7.5)$$

dir. Ayrıca

$$g(\xi_{s+1}, \xi_\alpha) = g(\phi N, \xi_\alpha) = -g(N, \phi \xi_\alpha) = 0, \quad \xi_{s+1} \in \Gamma(T\overline{M}) \quad (7.6)$$

$$g(\phi X, \xi_{s+1}) = g(\phi X, \phi N) = g(X, N) - \sum_{\alpha=1}^s \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(N) = 0 \quad (7.7)$$

ve

$$g(\phi X, N) = g(fX + w(X)N, N) = g(fX, N) + w(X)g(N, N) \quad (7.8)$$

dır. Böylece

$$w(X) = g(\phi X, N) = -g(X, \alpha \phi N) = -g(X, \xi_{s+1}) = -\varepsilon_{s+1} \eta^{s+1}(X) \quad (7.9)$$

olup

$$\phi X = fX - \varepsilon_{s+1} \eta^{s+1}(N) \quad (7.10)$$

dir. Burada

$$\eta^{s+1}(X) = \varepsilon_{s+1} \bar{g}(X, \xi_{s+1}) = \varepsilon_{s+1} \bar{g}(X, \phi N) \quad (7.11)$$

7.1.Önerme

$(2n+s)$ -boyutlu indefinite ε_α -S manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ olsun. M nin real hiperyüzeyi $\bar{M}$ üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanı f olmak üzere

$$f^2 = -I + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \eta^\alpha \otimes \xi_\alpha \quad (7.12)$$

dir.

İspat

Eş. 7.10' dan

$$\phi^2(X) = \phi(fX) - \eta^{s+1}(X)\phi(N)$$

$$\begin{aligned}
&= f^2(X) - \eta^{s+1}(fX)N - \eta^{s+1}(X)(fN - \eta^{s+1}(N))N \\
&= f^2(X) - \eta^{s+1}(X)fN - \varepsilon_{s+1}g(fX, \xi_{s+1})N \\
&= f^2(X) - \eta^{s+1}(X)\xi_{s+1} - \varepsilon_{s+1}g(\phi X, \xi_{s+1}) + \varepsilon_{s+1}\eta^{s+1}(X)g(N, \xi_{s+1})N \\
&= f^2(X) - \eta^{s+1}(X)\xi_{s+1}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
f^2(X) &= \phi^2(X) + \eta^{s+1}(X)\xi_{s+1} \\
&= -X + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X)\xi_\alpha + \eta^{s+1}(X)\xi_{s+1} \\
&= -X + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \eta^\alpha(X)\xi_\alpha
\end{aligned}$$

olur.

7.2.Önerme

$(2n+s)$ -boyutlu indefinite ε_α -S manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ olsun. O halde M nin real hiperyüzeyi $\overline{M}$ üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanı f , $\overline{M}$ üzerinde bir f -yapıdır. Yani;

$$f^3 + f = 0 \tag{7.13}$$

dır.

İspat

Eş. 7.13' den $\forall X \in \Gamma(TM)$ için;

$$f^3(X) = -f(X) + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \eta^\alpha(X) f(\xi_\alpha) = -f(X)$$

dır.

7.1. Teorem

$(2n+s)$ -boyutlu indefinite ε_α -S manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ve $\overline{M}$, M 'nin real hiperyüzeyi olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\overline{g}$, $\overline{M}$ nin anti-simetrik yarı-Riemann metriği olmak üzere;

$$(i) f(\xi_\alpha) = 0, \quad (ii) \eta^\alpha \circ f = 0, \quad (iii) rank f = 2n$$

dir.

İspat

$$(i) \text{ Eş. 7.1' den } f(\xi_\alpha) = 0 \text{ dır.}$$

$$(ii) \text{ Eş. 7.10, Önerme 7.1.' den } \forall W \in \Gamma(T\overline{M}) \text{ ve } \forall \alpha \in \{1, \dots, s, s+1\} \text{ için}$$

$$\eta^\alpha \circ f = 0$$

$$(iii) f \text{ lineer bir dönüşüm olduğundan}$$

$$rank f + boyçekf = boy\Gamma(T\overline{M})$$

$$\text{dir. } \forall \alpha \in \{1, \dots, s, s+1\} \text{ için}$$

$$\xi_\alpha \in çekf, \quad \xi_\alpha \text{ lineer bağımsız olup}$$

$$\zeta ekf = Sp\{\xi_1, \dots, \xi_{s+1}\}$$

dir. Buradan $boy\zeta ekf = s + 1$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} rankf &= boy\Gamma(T\overline{M}) - boy\zeta ekf \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$

dir.

7.2. Teorem

$(M^{2n+s}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ indefinite ε_α -S-manifoldunun bir hiperyüzeyi $(M^{2(n-1)+s+1}, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, \bar{g})$ bir indefinite ε_α -S-manifolddur.

İspat

Önerme 7.1., Önerme 7.2. ve Teorem 7.1.' den ε_α -S-manifoldun bazı şartları sağlanır. Şimdi Eş. 7.3' den

$$\begin{aligned} d\eta^{s+1}(X, Y) &= \frac{1}{2} \{ X\eta^{s+1}(Y) - Y\eta^{s+1}(X) - \eta^{s+1}([X, Y]) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \varepsilon_{s+1}(g(\nabla_X Y, \phi(N)) + g(Y, \nabla_X \phi(N))) - \varepsilon_{s+1}(g(\nabla_Y X, \phi(N)) \\ &\quad + g(X, \nabla_Y \phi(N))) - \varepsilon_{s+1}(g((\nabla_X Y - \nabla_Y X), \phi(N))) \} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1}(g(Y, \nabla_X \phi(N)) - g(X, \nabla_Y \phi(N))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1} \left(g(Y, -\phi(X)) - g(X, -\phi(Y)) \right) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1} \left(\bar{g}(Y, -f(X)) - \bar{g}(X, -f(Y)) \right) \\
&= \varepsilon_{s+1} \bar{g}(X, fY)
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

7.3.Önerme

$(2n+s)$ -boyutlu indefinite ε_α -S manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ve $\bar{M}$, M 'nin real hiperyüzeyi olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\bar{g}$, $\bar{M}$ nin anti-simetrik yarı-Riemann metriği olmak üzere;

$$\bar{g}(fX, Y) + \bar{g}(X, fY) = 0 \quad . \quad (7.14)$$

dir.

İspat

Eş. 7.12' den

$$\begin{aligned}
\bar{g}(fX, Y) &= \bar{g}(\phi X + \eta^{s+1}(X)N, Y) \\
&= \bar{g}(\phi X, Y) + \eta^{s+1}(X) \bar{g}(N, Y) \\
&= -\bar{g}(X, \phi Y)
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde

$$\bar{g}(X, fY) = \bar{g}(X, Y + \eta^{s+1}(Y)N)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{g}(X, \phi Y) + \eta^{s+1}(Y) \bar{g}(X, N) \\
&= \bar{g}(X, \phi Y)
\end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır. Herhangi bir $X \in \Gamma(\overline{TM})$ için

$$X = PX + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \quad (7.15)$$

dir. $PX \in D = \text{Im } \phi$, $\sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \in D^\perp = \text{çek } \phi$ dir.

Burada P , $D = \text{Im } \phi$ ’ ye dik izdüşüm fonksiyonudur. $(M^{2(n-s)+s+1}, f, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$

üzerinde η^α 1-formları

$$\eta^\alpha(X) = \varepsilon_\alpha \bar{g}(X, \xi_\alpha) \quad (7.16)$$

şeklindedir. Buradan,

$$\eta^\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad f^2(X) = -X + \eta^\alpha(X) \xi_{s+1} \quad (7.17)$$

dır ve Eş. 6.3’ den

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y) \quad (7.18)$$

elde edilir.

7.3. Teorem

İndefinite ε_α -S-manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ ’nin real hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. Bu

durumda $\forall X, Y \in \Gamma(\overline{TM})$ için

$$(i) (\nabla_X f)Y = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left\{ \varepsilon_\alpha \overline{g}(AX, Y) \xi_\alpha - \eta^\alpha(Y) AX \right\} \quad (7.19)$$

$$(ii) (\nabla_X \eta^\alpha)Y = \varepsilon_\alpha \overline{g}(fAX, Y) \quad (7.20)$$

dır.

İspat

(i) $\forall \alpha \in \{1, \dots, s, s+1\}$ ve $\forall X \in \Gamma(\overline{TM})$ için;

$$AX = f(\nabla_X \xi_\alpha) \quad (7.21)$$

dır. Burada A, (1,1) tipinde tensör alanıdır. Buradan

$$fAX = -\overline{\nabla}_X \xi_\alpha \quad (7.22)$$

Buradan

$$f(\overline{\nabla}_X \xi_\alpha) = -AX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \eta^\alpha(AX) \xi_\alpha \quad (7.23)$$

olup

$$\overline{g}((\overline{\nabla}_X f)Y, Z) = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left\{ d\eta^\alpha(fY, X) \eta^\alpha(Z) - d\eta^\alpha(fZ, X) \eta^\alpha(X) \right\} \quad (7.24)$$

dır. Diğer taraftan

$$\bar{g}\left(\left(\bar{\nabla}_X f\right)Y, Z\right)=\bar{g}\left(\bar{\nabla}_X\left(fY\right)-f\left(\bar{\nabla}_X Y\right), Z\right) \quad (7.25)$$

dir. Eş. 7.25' de Y yerine ξ_α konulursa

$$\bar{g}\left(\left(\bar{\nabla}_X f\right)\xi_\alpha, Z\right)=-\bar{g}\left(f\left(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha\right), Z\right) \quad (7.26)$$

olur. Eş.7.24' de Y yerine ξ_α konulursa

$$\bar{g}\left(\left(\bar{\nabla}_X f\right)\xi_\alpha, Z\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s+1}d\eta^\alpha\left(fZ, X\right) \quad (7.27)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\bar{g}\left(\left(\bar{\nabla}_X f\right)\xi_\alpha, Y\right)=-\bar{g}\left(f\left(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha\right), Y\right) \quad (7.28)$$

olur. Eş. 7.24' de Eş. 7.27 ve Eş. 7.28 yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} \bar{g}\left(\left(\bar{\nabla}_X f\right)Y, Z\right) &= -\sum_{\alpha=1}^{s+1}\left\{\bar{g}\left(f\left(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha\right), Y\right)\eta^\alpha\left(Z\right)-\bar{g}\left(f\left(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha\right), Z\right)\eta^\alpha\left(Y\right), Z\right\} \\ &= \bar{g}\left(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\left\{\varepsilon_\alpha \bar{g}\left(f\left(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha\right), Y\right)\xi_\alpha-f\left(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha\right)\eta^\alpha\left(Y\right)\right\}, Z\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{g}$ metriği non-dejenere ve Eş. 7.22' den

$$\begin{aligned} \left(\bar{\nabla}_X f\right)Y &= \sum_{\alpha=1}^{s+1}\left\{\varepsilon_\alpha \bar{g}\left(f\left(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha\right), Y\right)\xi_\alpha-f\left(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha\right)\eta^\alpha\left(Y\right)\right\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s+1}\left\{\varepsilon_\alpha \bar{g}\left(AX, Y\right)\xi_\alpha-\eta^\alpha\left(Y\right)(AX)\right\} \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) $\eta^\alpha(Y)$ nin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X(\eta^\alpha(Y)) &= \bar{\nabla}_X(\varepsilon_\alpha \bar{g}(Y, \xi_\alpha)) \\ (\bar{\nabla}_X \eta^\alpha)(Y) + \eta^\alpha(\bar{\nabla}_X Y) &= \varepsilon_\alpha \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi_\alpha) + \varepsilon_\alpha \bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha, Y)\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$(\bar{\nabla}_X \eta^\alpha)(Y) = \varepsilon_\alpha \bar{g}(\nabla_X \xi_\alpha, Y) = \varepsilon_\alpha \bar{g}(fAX, Y).$$

dır.

7.3. Teorem

$\bar{M}$, indefinite ε_α -S-manifoldun real hiperyüzeyi olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- (i) $f \bar{M}$ ' de paraleldir
- (ii) $\eta^\alpha \bar{M}$ ' de paraleldir
- (iii) $\xi_\alpha \bar{M}$ ' de paraleldir
- (iv) A (1,1) tipinde bir tensör alanı olmak üzere

$$AX = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \{ \eta^\alpha(AX) \xi_\alpha \}, \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

dir.

İspat

$(i) \Rightarrow (ii)$

f , $\overline{M}$ 'de paralel olsun. O halde Eş. 7.20' den

$$0 = (\overline{\nabla}_X f)Y = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left\{ \eta^\alpha(Y) AX - \varepsilon_\alpha \overline{g}(AX, Y) \xi_\alpha \right\}$$

dir. Eğer Y yerine ξ_α alınırsa, $AX = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \overline{g}(AX, Y) \xi_\alpha$ olur. Böylece

$$fAX = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \overline{g}(AX, Y) f(\xi_\alpha) = 0$$

olup, buradan

$$(\overline{\nabla}_X \eta^\alpha)Y = \varepsilon_\alpha (fAX, Y) = 0$$

olur. Yani η^α 1-formları $\overline{M}$ 'de paraleldir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

η^α , $\overline{M}$ 'de paralel olsun. Eş. 7.20 ve Eş. 7.21' den $\forall Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\overline{\nabla}_X \eta^\alpha)Y = \varepsilon_\alpha \overline{g}(fAX, Y) = 0$$

dir. g non-dejenere bir metrik olduğundan

$$fAX = 0 = -\overline{\nabla}_X \xi_\alpha$$

olur. Yani ξ_α vektör alanları $\overline{M}$ 'de paraleldir.

$(iii) \Rightarrow (iv)$

Eş. 7.22' den $\bar{\nabla}_X \xi_\alpha = -fAX = 0$

dır. Böylece $f^2(X) = 0$ olur. Buradan

$$AX = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \eta^\alpha (AX) \xi_\alpha$$

dır.

$$(iv) \Rightarrow (i)$$

Eğer Eş. 7.19' da Y yerine ξ_α konulursa

$$(\bar{\nabla}_X f) \xi_\alpha = 0$$

olur.

7.3. Teorem

İndefinite ε_α -S-manifold $(M, \phi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ nin real hiperyüzeyi $\bar{M}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) $\bar{M}$ bir ε_α -S-manifolddur.

(ii) ξ_α karakteristik vektör alanları Eş. 6.1.2' yi sağlar

(iii) A , $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere

$$AX = \varepsilon_\alpha X - \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left\{ \eta^\alpha (A\xi_\alpha) - \varepsilon_\alpha \right\} \eta^\alpha (X) \xi_\alpha \quad (7.29)$$

dır.

İspat

$(i) \Rightarrow (ii)$

Eş. 7.19' da Y yerine ξ_α konulursa

$$(\bar{\nabla}_X f) \xi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left\{ \bar{g}(X, \xi_\alpha) \xi_\alpha - \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(\xi_\alpha) X \right\} \quad (7.30)$$

olur, diğer taraftan

$$(\bar{\nabla}_X f) \xi_\alpha = \bar{\nabla}_X (f \xi_\alpha) - f(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha) \quad (7.31)$$

olup Eş. 7.30 ve Eş. 7.31' den

$$-f(\bar{\nabla}_X \xi_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left\{ \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) - \varepsilon_\alpha X \right\}$$

ve buradan

$$\bar{\nabla}_X \xi_\alpha = -\varepsilon_\alpha f X \quad (7.32)$$

bulunur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Eş. 7.15 ve Eş. 7.33' den

$$\varepsilon_\alpha f \left(PX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \right) = f \left(PAX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \eta^\alpha(AX) \xi_\alpha \right)$$

olur. Buradan,

$$\varepsilon_\alpha f P X = f P A X$$

$$\varepsilon_\alpha P X = P A X \quad (7.34)$$

7.1.2. Teorem' de X yerine ξ_α konulursa

$$A\xi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \bar{g}(AX, \xi_\alpha) \xi_\alpha \quad (7.35)$$

olacaktır. Eş. 7.33, Eş. 7.34 ve Eş. 7.35 kullanılırsa

$$\begin{aligned} AX &= PAX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \bar{g}(AX, \xi_\alpha) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha PX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \bar{g}(AX, \xi_\alpha) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha PX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \bar{g}(X, A\xi_\alpha) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha PX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \bar{g}\left(X, \sum_{\alpha=1}^{s+1} \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \xi_\alpha\right) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha PX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \bar{g}(X, \xi_\alpha) \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha PX + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha PX - \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(PX) \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \eta^\alpha(PX) \xi_\alpha \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha PX - \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(PX) \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \eta^\alpha(PX) \xi_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \eta^\alpha(\xi_\alpha) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha \left(PX - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \right) - \varepsilon_\alpha \eta^\alpha \left(PX - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \right) \xi_\alpha \\ &\quad + \eta^\alpha(A\xi_\alpha) \eta^\alpha \left(PX - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \right) \xi_\alpha \\ &= \varepsilon_\alpha X - \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left(\eta^\alpha(A\xi_\alpha) - \varepsilon_\alpha \right) \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \end{aligned}$$

bulunur.

$$(iii) \Rightarrow (i)$$

Eş. 7.19 ve Eş. 7.29' dan

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X f)Y &= \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left\{ \eta^\alpha(Y) AX - \varepsilon_\alpha \bar{g}(AX, Y) \xi_\alpha \right\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left\{ \eta^\alpha(Y) AX - \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left(\eta^\alpha(A\xi_\alpha - \varepsilon_\alpha) \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_\alpha \bar{g} \left(\left(\varepsilon_\alpha X - \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left(\eta^\alpha(A\xi_\alpha) - \varepsilon_\alpha \right) \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \right), Y \right) \xi_\alpha \right\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left\{ \bar{g}(X, Y) \xi_\alpha - \varepsilon_\alpha \eta^\alpha(Y) X \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Aktan N., “S-Manifoldların Geometrisi Üzerine”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 32-40 (2006).
2. Bejancu A. ve Duggal K.L., “Real Hypersurfaces of Indefinite Kaehler Manifolds”, *Internat. J. Math. Sci.*, 3: 545-556 (1993).
3. Bejancu A. ve Duggal K.L., “Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Application”, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London*, 211-223 (1996).
4. Blair D.E., “Geometry of Manifolds With Structural Group $U(n) \times \theta(s)$ ”, *J.Diff.Geom.* 4:155-167 (1970).
5. Blair D.E., Terlizzi L.D., Konderak J.J., “A Darboux Theorem Generalized Contact Manifolds”, *Note di Matematica*, 2: 147-152 (2006).
6. Blair D.E., “Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds”, *Progress in Math.*, 203:31-115 (2001).
7. Brickell F. ve Clark R.S., “Differentiable Manifolds”, *Van Nostrand, London*, 5-19 1(970).
8. Brunetti L. ve Pastore A.M., “Curvature of a Class of Indefinite Globally Farmed f -Manifolds”, *Bull. Math. Soc. Sci. Math.Roumanie Tome*, 3:183-204 (2008).
9. Chen B.Y., “Geometry of Submanifolds”, *Marcel Dekker NY*, 154-163 (1973).
10. Cabrerizo J.L., Fernandez L.M. ve Fernandez M., “The Curvature Tensor Fields on f -Manifolds with Complemented Frames”, *An. Şt. Univ. “Al. I. Cuza” Iaşi Matematica*, 36: 151-162 (1990).
11. Cabrerizo J.L., Fernandez L.M. ve Fernandez M., “A Classification of Certain Submanifolds of an S -Manifold”, *Annales Polinici, Mathematici Liv.*, 2:117-123 (1991).
12. Cabrerizo J.L., Fernandez L.M. ve Fernandez M., “On normal CR-Submanifolds of S -Manifolds”, *Colloquim Mathematicum*, 64:203-214 (1993).
13. Dileo G. and Lotta A., “On The Structure and Symmetry Properties of Almost S -Manifolds”, *Geometriae Dedicata*, 191-211 (2005).

14. Duggal K.L., Ianus S. ve Pastore A.M., “Maps Interchanging f -structures and Their Harmonicity”, *Acta Appli, Maths.*, 67:91-115 (2001).
15. Goldberg S.I. ve Yano K., “On Normal Globally Framed f -Manifolds”, *Tohoku Math. Jour.*, 22:362-370 (1970).
16. Hacısalihoğlu H.H., “Diferensiyel Geometri”, *İnönü Üniv. Fen Edebiyat Fak. Yayınları* 2:75-97,(1983).
17. Ishihara S. , “Normal Structure f satisfying $f^3 + f = 0$ ”, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 18:36-47 (1966).
18. Ishihara S. ve Yano K., “On Integrability Conditions of a Structure f Satisfying $f^3 + f = 0$ ”, *Quart, J, Math, Oxford (2)*, 15:217-222 (1964).
19. Kobayashi M. ve Tsuchiya S., “Invarriant Submanifolds in an f -Manifold With Complemented Frames”, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 24: 430-450 (1972).
20. Mihai I., “CR-Submanifolds of a framed f -Manifold”, *Stud. Cerc. Math.*, 35:127-136 (1983).
21. Kobayashi M., “Semi-Invariant Submanifolds in an f -Manifold With Complemented Frames”, *Tensor*, 51:155-178 (1990).
22. Lotta A. ve Pastore A.M., “The Tanaka-Webster Connection For Almost S - Manifolds and Cartan Geometry”, *Archivum Mathematicum.* 40: 47-61 (2004).
23. O’Neill B., “Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, Academic Pres”, *New York London*, 215-257 (1983).
24. Sahikh De.U.C., A.A. ve Biswas, “On ϕ -Recurrend Sasakian Manifolds”, *Novi Sad J. Math.*, 2: 43-48 (2003).
25. Terlizzi L.D. ve Pastore A.M., “Some results on K-manifolds”, *Balkan Journal of Geometry ant Its Applications*, 7:43-62 (2002).
26. Terlizzi L.D., “On The Curvature of a Generalization of Contact Metric Manifolds”, *Acta Math, Hungar*, 3:225-239 (2006).
27. Yano K. ve Kon M., “Structure on Manifolds”, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 3:252-286 (1984).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SAĞBAŞ, Duygu

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 11.04.1984 Ankara

Medeni hali : Bekar

Telefon : 0 (538) 968 72 65

e-mail : duygusagbas@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi Mezuniyet	Tarihi
Lisans	Anadolu Üniversitesi / İşletme Bölümü	2008
Lisans	Ankara Üniversitesi / Matematik Bölümü	2007
Lise	Ankara Gazi Lisesi	2001

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008-2009	Yeni Aşama Dersaneleri	Öğretmen
2009-...	Kızılay PTT Genel Müdürlüğü	Memur

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme, Ebru Sanatı, Gitar Çalmak, Kitap Okumak