



**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

DOKTORA TEZİ

**ALMOST SİMETRİK ARF SAYISAL YARIGRUPLARIN KALE
POLİNOMLARI**

Mehmet Şirin SEZGİN

**Mayıs-2025
BATMAN**

**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

DOKTORA TEZİ

**ALMOST SİMETRİK ARF SAYISAL YARIGRUPLARIN KALE
POLİNOMLARI**

Mehmet Şirin SEZGİN

**Danışman
Doç. Dr. Meral SÜER**

Diğer Jüri Üyeleri

**Prof. Dr. Sedat İLHAN Prof. Dr. Hasan DALMAN
Doç. Dr. Meral SÜER Doç. Dr. Veyis TURUT
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ÇELİK**

**Mayıs-2025
BATMAN**

TEZ KABUL VE ONAYI

Mehmet Şirin SEZGİN tarafından hazırlanan “Almost Simetrik Arf Sayısal Yarıngrupların Kale Polinomları” adlı tez çalışması 16/05/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Sedat İLHAN

.....

Danışman

Doç. Dr. Meral SÜER

.....

Üye

Prof. Dr. Hasan DALMAN

.....

Üye

Doç. Dr. Veyis TURUT

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ÇELİK

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Ömer Murat ÖTER
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

Bu tez çalışması Batman Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından BTÜBAP-2023-YL-17 nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK BEYANI

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabullendiğimi bildiririm.

ETHICAL DECLARATION

I declare that all the information in this thesis has been obtained within the framework of ethical behavior and academic rules, and that the source of any statements and information that do not belong to me in this study prepared in accordance with the thesis writing rules has been fully cited, and I declare that I accept all kinds of legal responsibility in case of any contrary situation.

Mehmet Şirin SEZGİN
Tarih: 16.05.2025

ÖZET
DOKTORA TEZİ
ALMOST SİMETRİK ARF SAYISAL YARIGRUPLARIN KALE
POLİNOMLARI

Mehmet Şirin SEZGİN

Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Meral SÜER

2025, 51 Sayfa

Bu çalışmada, almost simetrik Arf yarıgrupları ile kale polinomları arasındaki ilişkiyi Young diyagramları aracılığıyla ortaya koyarak, bu alanda çalışanlara yeni bir uygulama alanı sunmayı amaçlıyoruz. Çalışma kapsamında sayısal kümeler, sayısal yarıgruplar, pozitif tamsayıların parçalanışları, kale polinomları ve Young diyagramları gibi kavramlar ele alınmıştır. Literatürde, sayısal kümeler kümesi, parçalanışlar kümesi ve Young diyagramları kümesi arasında birebir eşleşmelerin bulunduğu iyi bilinmektedir. Almost simetrik Arf yarıgruplarına karşılık gelen Young diyagramlarının kale polinomlarını ifade etmek için bu eşleşmelerden yararlandık.

Kale polinomlarının hesaplanmasına yönelik literatürde hücre ayrıştırma algoritması ve blok ayrıştırma algoritması gibi çeşitli yöntemlerin kullanıldığı bilinmektedir. Bu çalışmada, almost simetrik Arf yarıgruplarına karşılık gelen Young diyagramlarının kale polinomlarını hesaplamak için blok ayrıştırma algoritmasını uyguladık ve elde ettiğimiz sonuçları sunduk.

Sonuç olarak, almost simetrik Arf yarıgruplarına karşılık gelen Young diyagramlarının kale polinomlarını belirledik. Ayrıca, bu Young diyagramlarının tamamlayıcılarının kale polinomlarını da elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Sayısal küme, Sayısal yarıgrup, Almost simetrik Arf yarıgrup, Pozitif tamsayı parçalanışı, Young diyagramı, Kale polinomu.

ABSTRACT
DOCTORAL THESIS
THE ROOK POLYNOMIALS OF ALMOST SYMMETRIC ARF NUMERICAL SEMIGROUPS

Mehmet Şirin SEZGİN

Batman University Graduate Education Institute

Mathematics Department of Science

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Meral SÜER

2025, 51 Pages

In this study, we aim to introduce a new area of application for researchers in the field by exploring the relationship between almost symmetric Arf semigroups and rook polynomials through Young diagrams. The study addresses concepts such as numerical sets, numerical semigroups, partitions of positive integers, rook polynomials, and Young diagrams. It is well established in the literature that there are one-to-one correspondences among the sets of numerical sets, integer partitions, and Young diagrams. We utilized these correspondences to express the rook polynomials of the Young diagrams corresponding to almost symmetric Arf semigroups.

It is known that various methods, such as the cell decomposition algorithm and the block decomposition algorithm, are used in the literature for the calculation of rook polynomials. In this study, we applied the block decomposition algorithm to calculate the rook polynomials of Young diagrams corresponding to almost symmetric Arf semigroups and presented the results we obtained.

As a result, we determined the rook polynomials of the Young diagrams corresponding to almost symmetric Arf semigroups. We also obtained the rook polynomials of the complements of these Young diagrams.

Keywords: Numerical set, Numerical semigroup, Almost symmetric Arf semigroup, Partition of a positive integer, Young diagram, Rook polynomial.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında değerli bilgi ve tecrübesiyle yol gösteren, akademik sürecin her aşamasında yönlendirmeleri ve desteğiyle katkı sağlayan tez danışmanım Doç. Dr. Meral SÜER'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tez izleme komitemde yer alan değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Veyis TURUT ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ÇELİK'e, bu süreçte bana zaman ayırıp, değerli önerileriyle çalışmamın gelişimine katkı sağladıkları için teşekkür ederim. Tüm bu süreç boyunca her zaman yanımda olan ve desteğini esirgemeyen sevgili eşim Saniye SEZGİN'e teşekkür ederim. Tez savunma sınavımız için kıymetli zamanlarını bize ayıran tez jüri üyelerine de ayrıca teşekkür ederim. Bu tez çalışmasına maddi destek sağlayarak araştırmamın gerçekleşmesine olanak tanıyan Batman Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne, BTÜBAP-2023-YL-17 nolu proje kapsamında verdikleri katkıdan dolayı teşekkür ederim.

Mehmet Şirin SEZGİN
BATMAN-2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
3. YÖNTEM	5
3.1. Sayısal Kümeler, Parçalanışlar ve Young Diyagramlar	5
3.2. Kale Polinomları	11
3.2.1. Kale polinomlarını hesaplamak için bazı algoritmalar	15
3.2.1.1. Hücre ayrıştırma algoritması	15
3.2.1.2. Blok ayrıştırma algoritması	17
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	22
4.1. Bulgular	22
4.2. Tartışma	44
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	45
5.1 Sonuçlar	45
5.2 Öneriler	46
KAYNAKLAR	48

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. 6 sütun ve 5 satırdan oluşan bir Young diyagramı	8
Şekil 3.2. $S=\{0,3,4,5,7,9,11,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı	9
Şekil 3.3. 10 sütun ve 12 satırdan oluşan bir Young diyagramı	11
Şekil 3.4. B tahtası	12
Şekil 3.5. C tahtası	14
Şekil 3.6. 2×3 boyutlarında dikdörtgen bir tahta	15
Şekil 3.7. B tahtası	16
Şekil 3.8. B tahtası	18
Şekil 3.9. B tahtası	20
Şekil 3.10. B tahtası içinde kırmızıyla işaretlenmiş H tahtası	20
Şekil 4.1. $S=\{0,\alpha+1,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S	23
Şekil 4.2. $S=\{0,2,4,\dots,2\alpha+2,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S	24
Şekil 4.3. $S=\{0,2,4,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S	24
Şekil 4.4. $B=\{0,2,4,\dots,2n+2,2n+4,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_B	25
Şekil 4.5. Y_B tahtası içinde kırmızıyla işaretlenmiş Y_S tahtası	26
Şekil 4.6. $S=\{0,2,4,6,8,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S	29
Şekil 4.7. $C=\{0,\beta+1,\beta+3,\dots,2\alpha+\beta+1,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_C	31
Şekil 4.8. Y_C tahtası içinde kırmızıyla işaretlenmiş Y_S tahtası	32
Şekil 4.9. $S=\{0,6,8,10,12,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_C	34
Şekil 4.10. Y_C 'nin tamamlayıcısı kırmızı renkli bölgedir	36
Şekil 4.11. Şekil 4.7'deki Y_C tahtasının tamamlayıcısı olan Y_C' tahtası kırmızıyla işaretlenmiştir	37
Şekil 4.12. B tahtası	37
Şekil 4.13. B tahtasında sarıyla işaretlenmiş H tahtası	38

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$A \setminus B$: A fark B kümesi
$A \times B$: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$A \cup B$: A ve B kümelerinin birleşimi
$A \subseteq B$: A , B 'nin alt kümesi
$a * b$: (a, b) ikilisinin $*$ işlemi altındaki görüntüsü
$B_{H,j}$: H 'ye göre B 'nin j 'inci dahil etme tahtası
$F(S)$: S sayısal kümesinin Frobenius sayısı
$G(S)$: S sayısal kümesinin boşluklarının kümesi
$g(S)$: S sayısal kümesinin cinsi
$\min(a, b)$: a ve b 'nin küçüğü (minimumu)
$M_{p,q}[\mathbb{F}_2]$: Her bir elemanı ikili girdilere sahip bir $p \times q$ matrisi
\mathbb{N}	: Pozitif tam sayılar kümesi
\mathbb{N}_0	: Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$PF(S)$: S sayısal yarıgrubunun pseudo-Frobenius sayılarının kümesi
\mathbb{P}	: Pozitif tam sayıların parçalanışlarından oluşan küme
$R_{p,q}(x)$: $p \times q$ şeklindeki bir dikdörtgenin kale polinomu
\mathbb{S}	: Sayısal kümeler ailesi
$t(S)$: S sayısal yarıgrubunun tipi
Y_S	: S sayısal yarıgrubuna karşılık gelen Young diyagramı
Y_λ	: λ parçalanışına karşılık gelen Young diyagramı
\mathbb{Y}	: Young diyagramlar ailesi

1. GİRİŞ

\mathbb{N} , pozitif tam sayılar kümesi ve $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ negatif olmayan tam sayılar kümesini gösterebiliriz. \mathbb{N}_0 'ın bir S alt kümesi 0 'ı (sıfırı) kapsıyor ve \mathbb{N}_0 'da sonlu tümleyene sahip ise S 'ye sayısal küme denir. Bir S sayısal kümesi verildiğinde, her $x, y \in S$ için $x + y \in S$ oluyor ise S 'ye sayısal yarıgrup denir. Sayısal yarıgruplar, matematik biliminin değişmeli cebir, cebirsel geometri, kombinatorik, sayılar teorisi ve kodlama teorisi gibi birçok alt alanında uygulamalara sahiptir.

Sayısal yarıgruplar, ilişkili olduğu yarıgrup halkaları bakımından değişmeli cebir çalışmaları özel ilgisini çekmiştir. Gorenstein, Kunz, doymuş ve Arf halkalarının değer yarıgruplarının sırasıyla simetrik, sözde-simetrik, doymuş ve Arf sayısal yarıgruplarına karşılık geldiği bilinmekte olup ve bu alanda literatürde çok fazla çalışmaya rastlanmaktadır (Abhyankar, 1967; Arf, 1948; Barucci et al., 1997; Brown & Curtis, 1991; Brown & Herzog, 1992; Delgado & Nuñez, 1987; Lipman, 1971; Nuñez, 1989; Sally, 1977; Zariski, 1971a, 1971b, 1975).

Sayısal yarıgrup çalışmaları, pozitif tam sayı katsayılı homojen olmayan bir lineer denklemin negatif olmayan tam sayı çözümlerine eşdeğerdir. Bu klasik problemin sayı teorisi çalışmaları tarafından geniş ölçüde çalışıldığını görebiliriz. 19. yüzyılın sonunda ilk kez ortaya çıkan sayısal yarıgrup problemleri, günümüzde hâlâ güncelliğini korumakta olup, konuyla ilgili literatürde birçok çalışmaya rastlanmaktadır (Brauer, 1942; Brauer & Shockley, 1962; Çelik, 2023; Davison, 1994; Djawadi & Hofmeister, 1996; İlhan & Karakaş, 2017; Johnson, 1960; Selmer, 1977; Sylvester, 1884).

Ayrıca, sayısal yarıgruplar, cebirsel hata kodları düzeltme ve kombinatorik çalışmaları da dikkatini çekmiştir (Bras-Amorós, 2003; Campillo et al., 2000; Colton & Kaplan, 2017; Kaplan, 2017; Kaplan & O'Neill, 2021). Birçok araştırma çalışması ile görüldüğü üzere güncel ve uygulama alanı geniş olan sayısal yarıgruplar çalışmalarına yenilerini eklemek tezi sunmak için oldukça motive edici bir unsurdur.

Bir Young diyagramı, her sütundaki kutu sayısı hemen sağında bulunan sütundaki kutu sayısından az olmayacak şekilde üste hizalanmış bir dizi kutu sütunu olarak tanımlanır. Bazı kaynaklarda Young diyagramı, her satırdaki kutu sayısı, hemen altındaki satırdaki kutu sayısından az olmayacak şekilde, sola hizalanmış bir dizi kutu olarak

tanımlanmaktadır (Fulton, 1997, s.1; Gümüşbaş et al., 2020, s.2187; Tutaş et al., 2019, s.449-450). Young diyagramları kavramı, temsil teorisi dahil ancak bununla sınırlı olmamak üzere matematiğin çeşitli dallarında uygulamaları olan temel kombinatoryal yapılardan biridir.

B , satırlar ve sütunlar halinde düzenlenmiş bir hücreler kümesi olan bir satranç tahtası olsun. Kale, satırlara ve sütunlara saldıran bir satranç taşıdır; kale yerleşimi derken, B tahtası üzerindeki birbirinden ayırt edilemeyen k kalenin saldırmadan yerleştirilmesini kastediyoruz. Bu sezgisel tanım çeşitli şekillerde biçimlendirilebilir. Örneğin, B , ikili girdilere sahip bir $p \times q$ matrisi olan $M_{p,q}[\mathbb{F}_2]$ 'nin bir ögesi olarak da görülebilir. Bu durumda $B = (b_{i,j})$ şeklinde yazarız. Bu yorumda k kalenin B üzerindeki bir yerleşimi B 'deki k bağımsız 1'in bir seçimine karşılık gelir.

Bir B tahtasının kale polinomu $R_B(x) = r_0(B) + r_1(B)x + \dots + r_k(B)x^k + \dots$, denklemi ile verilir. Burada $r_k(B)$ katsayısı, k tane kale yerleştirme yollarının sayısını verir. Herhangi bir tahta için $r_0(B) = 1$ ve $r_1(B)$, B 'deki hücre sayısına eşittir.

Kale polinomları teorisi ilk olarak Kaplansky ve Riordan (1946) tarafından ortaya atılmıştır. O zamandan beri bu konu hakkında yapılmış çok sayıda önemli çalışmalar olduğu raporlanmıştır (Alayont & Krzywonos, 2013; Loehr & Remmel, 2009; Mitchell, 2004). Kale polinomlarının son zamanlarda hipergeometrik seriler, matrislerin sonlu alanlar üzerinde numaralandırılması, grup temsil teorisi, eşleştirme teorisi, kromatik teori ve diğer çeşitli grafik-teorik konularla ilişkili olduğunu ve ayrıca, Weyl cebirleri ile kale polinomlarının kullanımı yoluyla kuantum mekaniğine yönelik uygulamalar son zamanlarda yüzeye çıkmaya başladığı raporlanmıştır (Mitchell, 2004).

Bu çalışmada, almost simetrik Arf yarıgrupları ile kale polinomları arasındaki ilişkiyi Young diyagramları aracılığıyla ortaya koyarak, bu alanda çalışanlara yeni bir uygulama alanı sunmayı amaçlıyoruz. Bugüne kadar, parçalanışların kombinatoryal özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu konuda önemli bir bilgi birikimi oluşmuştur. Özellikle sayısal kümelerle ilgili özellikler, Constantin vd. (2017) tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Pozitif tam sayıların parçalanışları, Young diyagramları kullanılarak grafiksel olarak görselleştirilebilir. Ayrıca, Young diyagramları sayısal yarıgrupların daha küçük bileşenlere ayrıştırılmasını düzenleyerek, cebirsel yapıların net bir şekilde görselleştirilmesine olanak tanır. Kale polinomları, genellikle yarıgrupların (veya grupların) indirgenemez bileşenlere ayrıştırılmasını modellemek için gösterim teorisinde kullanılmaktadır. Almost simetrik Arf yarıgruplarının incelenmesinde Young

diyagramları ve kale polinomlarının kullanımı, bu yapıların ve cebirsel özelliklerinin daha derinlemesine anlaşılmasına olanak sağlayan zengin bir kombinatoriyal çerçeve sunar. Bu araçlar kullanılarak, yarıgrup elemanlarının etkileşim biçimleri, ayrışma süreçleri ve birleşme özellikleri hakkında daha derin bir kavrayış elde edilebilir; bu da yarıgrup teorisi ve cebirsel kombinatoriklerin daha kapsamlı bir şekilde incelenmesine olanak sağlar.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde sayısal yarıgrupların, Young diyagramlarının ve kale polinomlarının uygulama alanlarından bahsedilmiştir.

Kaynak araştırması bölümünde, sayısal kümelerin Young diyagramlarıyla ilişkilendirilmesine yönelik bir literatür özeti sunulmuş, ayrıca kale polinomlarıyla ilgili literatür özeti de verilmiştir.

Yöntem bölümünde, tez yazımı boyunca yararlanılan tanımlar ve yardımcı teoremler verilmiştir.

Bulgular ve tartışma bölümünde, almost simetrik Arf yarıgruplarına karşılık gelen Young diyagramlarının kale polinomları ve bu diyagramların tamamlayıcılarının kale polinomları ile ilgili sonuçlar ele alınmış, ayrıca tartışmalara yer verilmiştir.

Sonuçlar ve öneriler bölümünde, tez kapsamında yürütülen tüm çalışmalar doğrultusunda elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca, konuyla ilgili gelecekte çalışma yapmayı planlayan araştırmacılar için yol gösterici olabilecek bazı öneriler sunulmuştur.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Keith ve Nath (2011) kombinatorik bir obje olan ve temsil teorisinde birçok uygulaması bulunan Young diyagramları, sayısal kümeler ile ilişkilendirmiş ve bu ilişkinin sayısal yarıgruplar ve tam sayı parçalanışları üzerine etkilerini incelemişlerdir. Constantin vd. (2017) bu ilişkiyi simultane çekirdek parçalanışlarının ve bunlara karşılık gelen sayısal yarıgrupların kombinatorik özelliklerini çalışmak için kullanmışlardır. Son yıllarda ise Tutaş vd. (2019) Young diyagramları aracılığı ile Arf sayısal yarıgrupları karakterize etmiş ve bu çalışmanın neticesinde Arf sayısal yarıgrupların birçok kombinatorik özellikleri Young diyagramları ile elde edilmiştir (Gümüşbaş & Tutaş, 2020; Gümüşbaş et al., 2020; Karakaş & Tutaş, 2020; Tutaş, 2019). Süer ve Yeşil (2021), Young diyagramları simetrik ve sözde simetrik sayısal yarıgrupların yeni ayrıştırmalarını vermek için kullanmışlardır. Yine, Süer ve Yeşil (2024), bazı özel alt diyagramlar ve bunlara karşılık gelen sayısal kümelerin karakterizasyonunda Young diyagramlarını kullanmışlardır.

Kale polinomları kısıtlı permütasyonlar teorisinde güçlü bir araçtır. Herhangi bir tahtanın kale polinomunun, Riordan (1958) hücre ayrıştırma tekniği kullanılarak yinelemeli olarak hesaplanabileceği bilinmektedir. Mitchell (2004) bu tekniği daha da genelleştirerek kale polinomunu hesaplamak için daha verimli bir algoritma sağlayan yeni bir ayrıştırma algoritmasını sunmuőtur. Kale polinomları daha yüksek boyutlarda da çalışılmıştır. Örneğin, iki boyutlu kale polinomlarının özelliklerini ve teoremlerini daha yüksek boyutlara genelleştirilerek açıklanmıştır (Alayont & Krzywonos, 2013; Zindle, 2007).

3. YÖNTEM

Bu tezin sonuçlarına ulaşabilmek için öncelikle sayısal kümeler, parçalanışlar ve Young diyagramları ile ilgili gerekli literatür verisi toplandı ve analiz edildi. Ardından, bu üç kavram arasındaki ilişkiler incelendi. Sonrasında, kale polinomları teorisi ile ilgili kaynaklar gözden geçirilerek gerekli literatür verisi elde edildi. Kale polinomları üzerine yapılan araştırmalarda, bir tahtanın kale polinomunu hesaplamak için kullanılan algoritmalar araştırıldı. Daha sonra araştırdığımız bu algoritmaları genel ifadesi bilinen almost simetrik Arf sayısal yarıgruplarına karşılık gelen Young diyagramlarının kale polinomlarına uygulayarak sonuçlarımıza ulaştık. Bu sonuçlar, matematik ispat yöntemleri kullanılarak kanıtlandı.

Uyguladığımız yöntemin ve araştırma konusunun anlaşılması için ilgili temel tanımlar ve yardımcı teoremler aşağıdaki iki kısımda ayrıntıları ile verilmiştir.

3.1. Sayısal Kümeler, Parçalanışlar ve Young Diyagramlar

Tanım 3.1.1. \mathbb{N} , pozitif tam sayılar kümesi ve $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ negatif olmayan tam sayılar kümesini gösterebilir. \mathbb{N}_0 'ın bir S alt kümesi 0 'ı kapsıyor ve \mathbb{N}_0 'da sonlu tümleyene sahip ise S 'ye sayısal küme denir.

Örnek 3.1.2. $S = \{0,3,5,6,9,11, \rightarrow\}$ kümesi bir sayısal kümedir. Çünkü S kümesi 0 'ı kapsıyor ve $\mathbb{N}_0 \setminus S = \{1,2,4,7,8,10\}$ kümesi sonludur.

Burada " \rightarrow " işareti sonraki tüm sayıların S 'ye ait olduğunu belirtmektedir.

Tanım 3.1.3. S bir sayısal küme olsun. S 'de olmayan \mathbb{N}_0 kümesinin elemanlarına S 'nin boşlukları denir ve S 'nin tüm boşluklarının kümesi $G(S)$ ile gösterilir. Bununla beraber, $G(S)$ 'nin eleman sayısına S 'nin cinsi denir ve $g(S)$ ile gösterilir. \mathbb{N}_0 , $G(S) = \emptyset$ olan bir sayısal kümedir ve eğer $G(S) \neq \emptyset$ ise S 'ye bir has sayısal küme denir.

Tanım 3.1.4. S bir sayısal küme olsun. S 'de olmayan en büyük tam sayıya S 'nin Frobenius sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. $C(S) = F(S) + 1$ sayısına S 'nin ileticisi ve $C(S)$ 'den küçük olan elemanlara S 'nin küçük elemanları denir. Eğer S sayısal kümesinin n tane küçük elemanı

varsa bu durumda $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_{n-1}$ ve $S = \{s_0 = 0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = C(S), \rightarrow\}$ olarak yazılır.

Örnek 3.1.6. $S = \{0,4,7,8,13, \rightarrow\}$ sayısal kümesi verilsin. O zaman

$$G(S) = \{1,2,3,5,6,9,10,11,12\}$$

$$g(S) = 9$$

$$F(S) = 12$$

$$C(S) = 13 \text{ olur.}$$

Tanım 3.1.7. A bir küme olsun. $A \times A$ 'dan A 'ya tanımlı

$$* : A \times A \rightarrow A, (x, y) \rightarrow x * y$$

fonksiyonuna A 'da bir ikili işlem denir. Burada $x * y$ değeri (x, y) ikilisinin $*$ işlemi altındaki görüntüsü demektir.

Tanım 3.1.8. $*$, A kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer A kümesi $*$ işlemine göre birleşme özelliği varsa, yani

$$\forall x, y, z \in A \text{ için } (x * y) * z = x * (y * z)$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman $(A, *)$ ikilisine bir yarıgrup denir.

Tanım 3.1.9. S bir sayısal küme olsun. $\forall x, y \in S$ için $x + y \in S$ oluyor ise S 'ye sayısal yarıgrup denir (Rosales & García-Sánchez, 2009, s.1).

Örnek 3.1.10. $S = \{0,4,7,8,9,11, \rightarrow\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur. Çünkü S bir sayısal küme ve $\forall x, y \in S$ için $x + y \in S$ 'dir.

Tanım 3.1.11. S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $x \notin S$ ve $\forall s \in S \setminus \{0\}$ için $x + s \in S$ oluyorsa, bu durumda x tam sayısına S 'nin pseudo-Frobenius sayısı denir ve S 'nin bütün pseudo-Frobenius sayıların kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. $PF(S)$ 'nin eleman sayısına S 'nin tipi denir ve $t(S)$ ile gösterilir (Rosales & Branco, 2002, s.306).

Örnek 3.1.12. $S = \{0,7,9,13,14,16,18,20,21,22,23,25, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman $PF(S) = \{19,24\}$ ve $t(S) = 2$ olur.

Önerme 3.1.13. S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman

$$S \text{ almost simetrik bir yarıgruptur} \Leftrightarrow g(S) = \frac{F(S)+t(S)}{2} \text{ dir (Branco et al., 2019, s.3).}$$

Örnek 3.1.14. $S = \{0,7,9,14,15,16,17,18,19,21, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Buradan

$$G(S) = \{1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,13,20\}$$

$$g(S) = 12$$

$$F(S) = 20$$

$$PF(S) = \{8,10,12,20\}$$

$t(S) = 4$ bulunur. Aynı zaman da

$g(S) = \frac{20+4}{2} = 12$ olduğu için S almost simetrik bir yarıgrupdur.

Teorem 3.1.15. S bir sayısal yarıgrup ve $PF(S) = \{f_1 < f_2 < \dots < f_t = F(S)\}$ olsun. O zaman

S almost simetrik bir yarıgrupdur $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, t-1$ için $f_i + f_{t-i} = F(S)$ olmasıdır (Nari, 2013, s.143).

Örnek 3.1.16. $S = \{0,6,11,12,16,17,18,21,22,23,24,26 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman

$$F(S) = 25$$

$PF(S) = \{5,10,15,20,25\}$ olur. Buradan

$f_1 = 5, f_2 = 10, f_3 = 15, f_4 = 20$ ve $f_5 = F(S) = 25$ için

$$f_1 + f_4 = 25$$

$$f_2 + f_3 = 25$$

$$f_3 + f_2 = 25$$

$$f_4 + f_1 = 25$$

olduğundan S almost simetrik bir yarıgrupdur.

Tanım 3.1.17. S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $\forall x, y, z \in S$ için $x \geq y \geq z$ olduğunda $x + y - z \in S$ sağlanıyorsa S 'ye bir Arf sayısal yarıgrup denir (Arf, 1948, s.259-260).

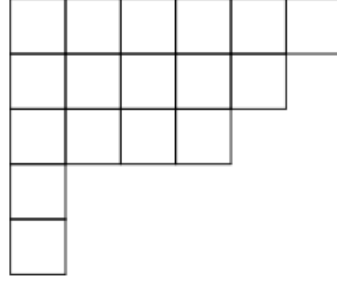
Örnek 3.1.18. $S = \{0,4,8,12,14,16,18, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. $\forall x, y, z \in S$ için $x \geq y \geq z$ koşuluyla $x + y - z \in S$ olduğu için S bir Arf sayısal yarıgrupdur.

Fakat $S = \{0,9,13,14,16, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu bir Arf sayısal yarıgrup değildir. Çünkü $14 + 14 - 13 = 15 \notin S$ 'dir.

Tanım 3.1.19. Bir Young diyagramı, her sütundaki kutu sayısı hemen sağında bulunan sütundaki kutu sayısından az olmayacak şekilde üste hizalanmış bir dizi kutu sütunu olarak tanımlanır.

Bazı kaynaklarda Young diyagramı, her satırdaki kutu sayısı, hemen altındaki satırdaki kutu sayısından az olmayacak şekilde, sola hizalanmış bir dizi kutu olarak tanımlanmaktadır (Fulton, 1997, s.1; Gümüüşbaşı et al., 2020, s.2187; Tutaş et al., 2019, s.449-450).

Örnek 3.1.20. Şekil 3.1, 6 sütun ve 5 satırdan oluşan bir Young diyagramıdır.



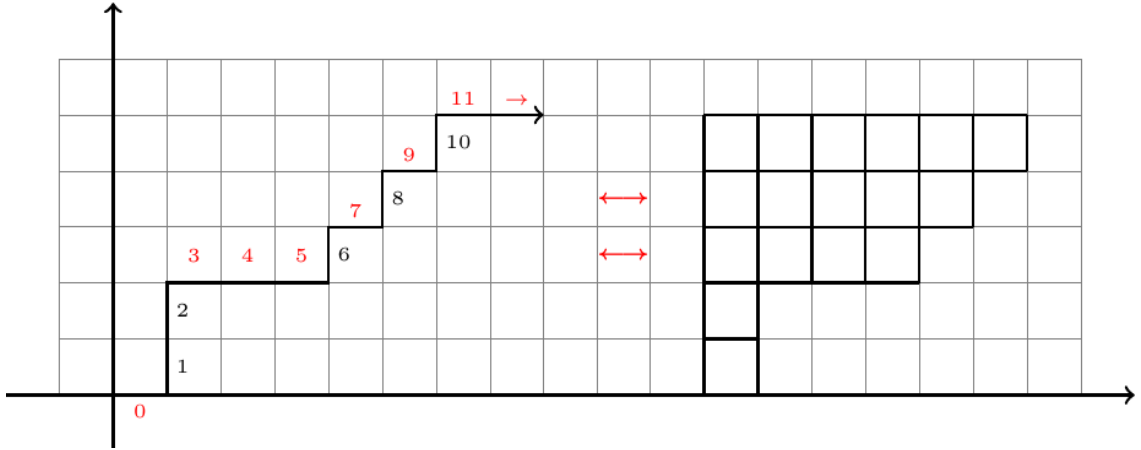
Şekil 3.1. 6 sütun ve 5 satırdan oluşan bir Young diyagramı

Tanım 3.1.21. Her S sayısal kümesi bir Young diyagramı ile gösterilebilir. Bu gösterim \mathbb{Z}^2 'de orijinden başlayan sürekli ve çok köşeli bir yol çizilerek elde edilir. $s = 0$ 'dan başlayarak,

- Eğer $s \in S$ ise sağa doğru bir birim uzunlukta bir doğru parçası çizilir,
- Eğer $s \notin S$ ise yukarı doğru bir birim uzunlukta bir doğru parçası çizilir,
- Yukarıdaki işlem $s + 1$ için tekrar edilir.

Bu işlemlere $s = F(S)$ oluncaya kadar devam edilir. Bu süreç sonunda elde edilen çok köşeli yol, y eksenini ve $y = g(S)$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge, birim karelerin oluşturduğu bir Young diyagramdır. Bu Young diyagrama, S 'ye karşılık gelen Young diyagramı denir ve Y_S ile gösterilir. Tersine her Young diyagramına tek bir S sayısal kümesinin karşılık geldiği açıktır. Böylece $\varphi: S \rightarrow \mathbb{Y}$, $\varphi(S) = Y_S$ ile tanımlanan bağıntı sayısal kümeler ailesi ile Young diyagramlar ailesi arasında birebir ve örten bir eşleme oluşturur (Constantin et al., 2017, s.99-127; Gümüşbaş et al., 2020, s.2187-2188; Tutaş et al., 2019, s.451).

Örnek 3.1.22. $S = \{0,3,4,5,7,9,11, \rightarrow\}$ sayısal kümesi verilsin. Bu sayısal kümeye karşılık gelen Young diyagramı Şekil 3.2'deki gibidir.



Şekil 3.2. $S=\{0,3,4,5,7,9,11,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı

Tanım 3.1.23. Pozitif bir N tam sayısı verildiğinde, N 'nin bir $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ parçalanışı, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = N$ olacak şekilde, artmayan bir $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{k-1} \geq \lambda_k$ pozitif tam sayı dizisidir. $\forall i = 1, 2, \dots, k$ için λ_i sayısına λ 'nın bir parçası, k sayısına ise parçalanışın uzunluğu denir. Eğer $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$, N 'nin bir parçalanışı ise o zaman $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k] \vdash N$ yazarız (Gümüşbaş et al., 2020, s.2187; Keith & Nath, 2011, s.2; Tutaş et al., 2019, s.449).

Örnek 3.1.24. $N = 7$ için farklı parçalanışları aşağıda verilmiştir.

$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$\lambda_1 = [1,1,1,1,1,1,1] \vdash 7$
$7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$\lambda_2 = [2,1,1,1,1,1] \vdash 7$
$7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$	$\lambda_3 = [2,2,1,1,1] \vdash 7$
$7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1$	$\lambda_4 = [3,1,1,1,1] \vdash 7$
$7 = 2 + 2 + 2 + 1$	$\lambda_5 = [2,2,2,1] \vdash 7$
$7 = 3 + 2 + 1 + 1$	$\lambda_6 = [3,2,1,1] \vdash 7$
$7 = 4 + 1 + 1 + 1$	$\lambda_7 = [4,1,1,1] \vdash 7$
$7 = 3 + 2 + 2$	$\lambda_8 = [3,2,2] \vdash 7$
$7 = 3 + 3 + 1$	$\lambda_9 = [3,3,1] \vdash 7$
$7 = 4 + 2 + 1$	$\lambda_{10} = [4,2,1] \vdash 7$
$7 = 5 + 1 + 1$	$\lambda_{11} = [5,1,1] \vdash 7$
$7 = 4 + 3$	$\lambda_{12} = [4,3] \vdash 7$
$7 = 5 + 2$	$\lambda_{13} = [5,2] \vdash 7$
$7 = 6 + 1$	$\lambda_{14} = [6,1] \vdash 7$
$7 = 7$	$\lambda_{15} = [7] \vdash 7$

Tanım 3.1.25. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k] \vdash N$ parçalanışı verilsin. λ 'ya karşılık gelen Young diyagramı uzunlukları $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ olan k sütundan oluşan kutulardan meydana gelir ve Y_λ ile gösterilir. Her Young diyagramı tek bir parçalanışı temsil etmektedir. Böylece $\psi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Y}$, $\psi(\lambda) = Y_\lambda$ ile tanımlanan bağıntı parçalanışlarının kümesi ile Young diyagramlarının kümesi arasında birebir ve örten bir eşleme oluşturur (Gümüşbaş et al., 2020, s.2187; Tutaş et al., 2019, s.450).

Ayrıca, $\psi^{-1}\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{P}$, $\psi^{-1}\varphi(S) = \psi^{-1}(Y_S)$ ile tanımlanan bağıntı, sayısal kümeler ailesi ile parçalanışlar kümesi arasında birebir ve örten bir eşleme oluşturur (Gümüşbaş et al., 2020, s.2188).

Örnek 3.1.26. Örnek 3.1.20'deki Young diyagramı $[5,3,3,3,2,1] \vdash 17$ parçalanışına karşılık gelir.

Tanım 3.1.27. Bir Young diyagramında k tane sütun olduğunu ve $\forall i = 1, 2, \dots, k$ için i uzunluğunda u_i satır olduğunu varsayalım. O zaman böyle bir Young diyagramı $Y = 1^{u_1} 2^{u_2} \dots k^{u_k}$ ile gösteririz. Eğer $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$, $Y = 1^{u_1} 2^{u_2} \dots k^{u_k}$ 'ya karşılık gelen parçalanış ise o zaman

$$\lambda_j = \sum_{i=j}^k u_i, \quad 1 \leq j \leq k$$

şeklinindedir. Ayrıca, $\forall j = 1, \dots, k-1$ için $\lambda_j - \lambda_{j+1} = u_j$ ve $\lambda_k = u_k$ geçerlidir (Gümüşbaş et al., 2020, s.2187; Tutaş et al., 2019, s.450).

Örnek 3.1.28. $\lambda = [12, 7, 6, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1]$ olsun. $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ için

$$u_1 = \lambda_1 - \lambda_2 = 12 - 7 = 5,$$

$$u_2 = \lambda_2 - \lambda_3 = 7 - 6 = 1,$$

$$u_3 = \lambda_3 - \lambda_4 = 6 - 3 = 3,$$

$$u_4 = \lambda_4 - \lambda_5 = 3 - 2 = 1,$$

$$u_5 = \lambda_5 - \lambda_6 = 2 - 1 = 1,$$

$$u_6 = \lambda_6 - \lambda_7 = 1 - 1 = 0,$$

$$u_7 = \lambda_7 - \lambda_8 = 1 - 1 = 0,$$

$$u_8 = \lambda_8 - \lambda_9 = 1 - 1 = 0,$$

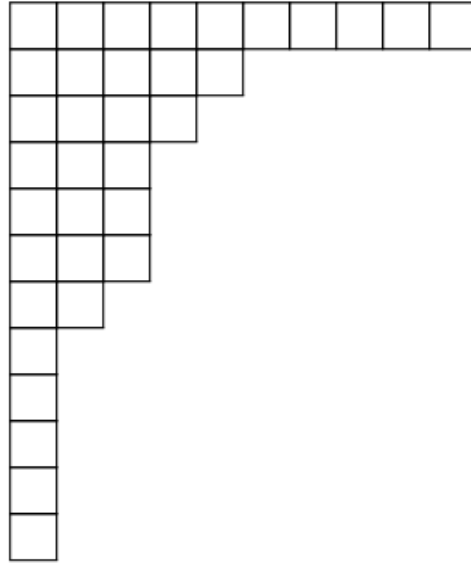
$$u_9 = \lambda_9 - \lambda_{10} = 1 - 1 = 0 \text{ ve}$$

$u_{10} = \lambda_{10} = 1$ bulunur. O zaman $Y = 1^5 2^1 3^3 4^1 5^1 10^1$ olup

10^1 : 10 uzunluğunda 1 satır vardır,

- 9^0 : 9 uzunluğunda 0 satır vardır,
 8^0 : 8 uzunluğunda 0 satır vardır,
 7^0 : 7 uzunluğunda 0 satır vardır,
 6^0 : 6 uzunluğunda 0 satır vardır,
 5^1 : 5 uzunluğunda 1 satır vardır,
 4^1 : 4 uzunluğunda 1 satır vardır,
 3^3 : 3 uzunluğunda 3 satır vardır,
 2^1 : 2 uzunluğunda 1 satır vardır,
 1^5 : 1 uzunluğunda 5 satır vardır.

Dolayısıyla λ 'ya karşılık gelen Young diyagramı Şekil 3.3'teki gibidir.



Şekil 3.3. 10 sütun ve 12 satırdan oluşan bir Young diyagramı

3.2. Kale Polinomları

Tanım 3.2.1. B , satırlar ve sütunlar halinde düzenlenmiş bir hücreler kümesi olan bir satranç tahtası olsun. Kale, satırlara ve sütunlara saldıran bir satranç taşıdır; kale yerleşimi derken, B tahtası üzerindeki birbirinden ayırt edilemeyen k kalenin saldırmadan yerleştirilmesini kastediyoruz.

Bu sezgisel tanım çeşitli şekillerde biçimlendirilebilir. Bir B tahtası bazı $p, q \in \mathbb{N}$ için $[1, 2, \dots, p] \times [1, 2, \dots, q]$ 'nin bir alt kümesi olarak düşünülebilir. $D \subseteq [1, 2, \dots, p]$

keyfi bir altküme olsun. O zaman bir kale yerleşimi, herhangi bir $i \in D$ için $(i, f(i)) \in B$ olacak şekilde bir $f: D \rightarrow [1, 2, \dots, q]$ birebir fonksiyonudur.

B , ayrıca ikili girdilere sahip bir $p \times q$ matrisi olan $M_{p,q}[\mathbb{F}_2]$ 'nin bir ögesi olarak da görülebilir. Bu durumda $B = (b_{i,j})$ şeklinde yazarız. Bu yorumda k kalenin B üzerindeki bir yerleşimi B 'deki k bağımsız 1'in bir seçimine karşılık gelir. Örneğin, aşağıda ikili girdilere sahip 3×3 matrisini ele alalım:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matriste 2 kale yerleştirirsek, olası bir dizilim onları matristeki 1'lere karşılık gelen (1,1) ve (2,2) hücrelerine yerleştirmektir:

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

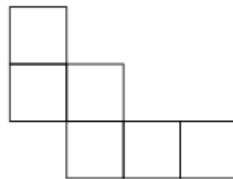
Burada kalın yazılan girdiler kalelerin konumlarını temsil etmektedir. Bu kaleler aynı satırı veya sütunu paylaşmadıkları için birbirinden bağımsızdırlar. Kalelerin yerleştirilmesine ilişkin bu dizilim, B matrisinde bağımsız 1'lerin seçilmesine karşılık gelir.

Tanım 3.2.2. Bir B tahtasının kale polinomu

$$R_B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(B)x^k$$

şeklindedir. Burada $r_k(B)$ katsayısı, k tane kale yerleştirme yollarının sayısını verir. Herhangi bir tahta için $r_0(B) = 1$ ve $r_1(B)$, B 'deki hücre sayısına eşittir.

Örnek 3.2.3. Şekil 3.4'te verilen B tahtasının kale polinomunu bulalım.



Şekil 3.4. B tahtası

Bu tahtaya karşılık gelen matris:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda

1 kalenin B üzerindeki yerleşimi matristeki 1'lere karşılık gelen $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$, $(3,3)$ ve $(3,4)$ hücrelerine yerleştirmektir. Dolayısıyla, $r_1(B) = 6$ bulunur.

Bu matriste 2 kale yerleştirirsek, olası dizilimler:

- $(1,1)$ ve $(2,2)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(1,1)$ ve $(3,2)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(1,1)$ ve $(3,3)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(1,1)$ ve $(3,4)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(2,1)$ ve $(3,2)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(2,1)$ ve $(3,3)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(2,1)$ ve $(3,4)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(2,2)$ ve $(3,3)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(2,2)$ ve $(3,4)$ hücrelerine yerleştirmek

şeklindedir. Dolayısıyla, $r_2(B) = 9$ bulunur.

Bu matriste 3 kale yerleştirirsek, olası dizilimler:

- $(1,1)$, $(2,2)$ ve $(3,3)$ hücrelerine yerleştirmek
- $(1,1)$, $(2,2)$ ve $(3,4)$ hücrelerine yerleştirmek

şeklindedir. Dolayısıyla, $r_3(B) = 2$ bulunur.

Bu matrise 4 veya daha fazla kale yerleştirmek mümkün değildir. Buradan B tahtasının kale polinomu $R_B(x) = 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3$ olarak bulunur.

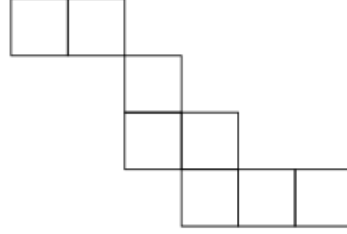
Dikkat edilirse, B tahtasının kale polinomu aşağıdaki durumlarda belirtilen şekilde döndürdüğümüzde değişmeyecektir:

1. Saat yönünde 90, 180 veya 270 derece döndürme
2. Saat yönünün tersine 90, 180 veya 270 derece döndürme
3. x ve y eksenlerine göre simetri alma

Teorem 3.2.4. (Ayrık Tahta Ayırıştırma Teoremi) A ve B , satırları ve sütunları paylaşmayan tahtalar olsun. O zaman A ve B 'deki hücrelerin birleşiminden oluşan $A \cup B$

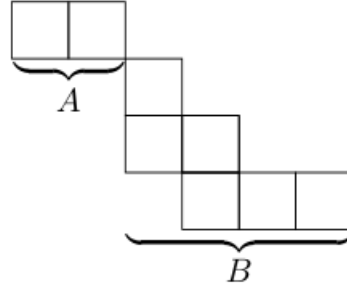
tahtasının kale polinomu $R_{A \cup B}(x) = R_A(x) \cdot R_B(x)$ olur (Alayont & Krzywonos, 2013, s.37).

Örnek 3.2.5. Şekil 3.5’te verilen C tahtasının kale polinomunu bulalım.



Şekil 3.5. C tahtası

C tahtasını aşağıdaki gibi A ve B şeklinde 2 ayrı alt tahtaya ayıralım.



A tahtasının kale polinomunun

$$R_A(x) = 1 + 2x$$

olduğu açıktır.

Örnek 3.2.3’ten B tahtasının kale polinomunun

$$R_B(x) = 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3$$

olduğunu biliyoruz. Ayrık tahta ayrıştırma teoreminden

$$\begin{aligned} R_C(x) &= R_{A \cup B}(x) \\ &= R_A(x) \cdot R_B(x) \\ &= (1 + 2x) \cdot (1 + 6x + 9x^2 + 2x^3) \\ &= 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 4x^4 \end{aligned}$$

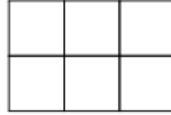
olarak elde edilir.

Teorem 3.2.6. $R_{p,q}(x)$, $p \times q$ şeklindeki bir dikdörtgenin kale polinomunu gösterebilir. O zaman

$$R_{p,q}(x) = \sum_{k=0}^{\min(p,q)} \binom{p}{k} \binom{q}{k} k! x^k$$

biçimindedir (Riordan, 1978:170-171).

Örnek 3.2.7. Şekil 3.6’da verilen 2×3 boyutlarındaki dikdörtgen tahtanın kale polinomunu bulalım.



Şekil 3.6. 2×3 boyutlarında dikdörtgen bir tahta

Dikdörtgenin kale polinomunu Teorem 3.2.6’yı kullanarak bulalım. O zaman

$$\begin{aligned} R_{2,3}(x) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \binom{3}{k} k! x^k \\ &= \binom{2}{0} \binom{3}{0} 0! x^0 + \binom{2}{1} \binom{3}{1} 1! x^1 + \binom{2}{2} \binom{3}{2} 2! x^2 \\ &= 1 + 6x + 6x^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

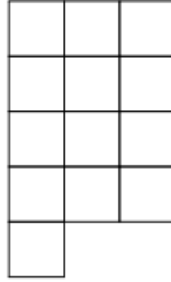
3.2.1. Kale polinomlarını hesaplamak için bazı algoritmalar

3.2.1.1. Hücre ayrıştırma algoritması

Teorem 3.2.1.1.1. (Hücre Ayrıştırma Teoremi) Bir B tahtası verilsin. B tahtası üzerinde bir hücre seçelim. Seçtiğimiz hücreye karşılık gelen satır ve sütunun çıkarılmasıyla elde

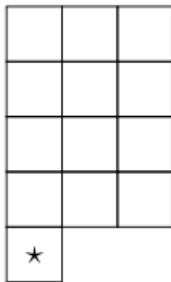
edilen tahta D ve B 'den yalnızca seçtiğimiz hücreyi silerek elde edilen tahta E olsun. O zaman B tahtası için kale polinomu $R_B(x) = xR_D(x) + R_E(x)$ olur (Alayont & Krzywonos, 2013, s.38).

Örnek 3.2.1.1.2. Şekil 3.7'de verilen B tahtasının kale polinomunu bulalım.

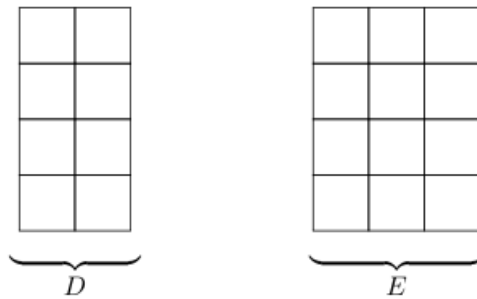


Şekil 3.7. B tahtası

B tahtasının kale polinomunu bulmak için hücre ayrıştırma teoremini kullanalım. B tahtasının üzerinde bir hücre seçelim ve bunu $*$ ile işaretleyelim.



$*$ hücresine karşılık gelen satır ve sütunun çıkarılmasıyla elde edilen tahta D ve B 'den yalnızca $*$ ile belirtilen hücreyi silerek elde edilen tahta E aşağıdaki gibidir.



D ve E dikdörtgenlerin kale polinomlarını Teorem 3.2.6'yı kullanarak bulalım. Buradan

$$\begin{aligned}
R_D(x) &= \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} \binom{2}{k} k! x^k \\
&= \binom{4}{0} \binom{2}{0} 0! x^0 + \binom{4}{1} \binom{2}{1} 1! x^1 + \binom{4}{2} \binom{2}{2} 2! x^2 \\
&= 1 + 8x + 12x^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
R_E(x) &= \sum_{k=0}^3 \binom{4}{k} \binom{3}{k} k! x^k \\
&= \binom{4}{0} \binom{3}{0} 0! x^0 + \binom{4}{1} \binom{3}{1} 1! x^1 + \binom{4}{2} \binom{3}{2} 2! x^2 + \binom{4}{3} \binom{3}{3} 3! x^3 \\
&= 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Hücre ayrıştırma teoreminden

$$\begin{aligned}
R_B(x) &= xR_D(x) + R_E(x) \\
&= x(1 + 8x + 12x^2) + 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3 \\
&= 1 + 13x + 44x^2 + 36x^3
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.2.1.2. Blok ayrıştırma algoritması

Bu bölümde, bir tahtayı biçimsel olarak \mathbb{F}_2 üzerinde bir $p \times q$ matrisi olarak göreceğiz.

Tanım 3.2.1.2.1. Bir B tahtasının bir H alt tahtası, H 'nin satır ve sütun indekslerinden B 'ye ω_1 ve ω_2 birebir eşlemeleriyle birlikte $h_{i,j} = b_{\omega_1(i), \omega_2(j)}$ özelliğine sahiptir ve \mathbb{F}_2 üzerinde bir $(h_{i,j})$ matrisyle temsil edilir (Mitchell, 2004, s.4).

Örnek 3.2.1.2.2. Şekil 3.8'de verilen B tahtasını düşünelim.

Şekil 3.8. B tahtası

Bu tahtaya karşılık gelen matris:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde. Şimdi B matrisinin birinci, ikinci ve üçüncü satırları ile üçüncü ve dördüncü sütunlardaki hücreleri seçerek bir H alt tahtasını tanımlayalım. Bu bize şunu verir:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla H matrisi B tahtası üzerinde aşağıda kırmızı renkle gösterdiğimiz bölgeye karşılık gelir.

Bu durumda, ω_1 ve ω_2 eşlemeleri H 'nin satır ve sütunlarını B 'nin karşılık gelen satır ve sütunlarıyla aşağıdaki gibi eşleyecektir:

- ω_1 için:

$$\omega_1(1)=1$$

$$\omega_1(2)=2$$

$$\omega_1(3)=3$$

- ω_2 için:

$$\omega_2(1)=3$$

$$\omega_2(2)=4$$

Daha sonra bu eşleştirmeleri kullanarak H 'nin elemanlarının B 'nin elemanlarına karşılık geldiğini şu şekilde görebiliriz:

- $h_{1,1} = b_{\omega_1(1),\omega_2(1)} = b_{1,3} = 1$
- $h_{1,2} = b_{\omega_1(1),\omega_2(2)} = b_{1,4} = 1$
- $h_{2,1} = b_{\omega_1(2),\omega_2(1)} = b_{2,3} = 1$
- $h_{2,2} = b_{\omega_1(2),\omega_2(2)} = b_{2,4} = 0$
- $h_{3,1} = b_{\omega_1(3),\omega_2(1)} = b_{3,3} = 1$
- $h_{3,2} = b_{\omega_1(3),\omega_2(2)} = b_{3,4} = 1$

Dolayısıyla H , tanımlandığı gibi B 'nin bir alt tahtasıdır.

Tanım 3.2.1.2.3. Eğer i (sırasıyla j) ω_1 (sırasıyla ω_2) görüntüsünde bulunuyorsa, B 'nin bir alt tahtası H , B 'nin bir i satırını (sırasıyla bir j sütununu) kapsar denir (Mitchell, 2004, s.4).

Örnek 3.2.1.2.4. Örnek 3.2.1.2.2'de ω_1 'in görüntüsü $\{1,2,3\}$ ve ω_2 'nin görüntüsü $\{3,4\}$ şeklindedir. B 'nin alt tahtası H , B 'nin $i = 1$ satırını ve $j = 3$ sütununu kapsar (çünkü $i = 1$, ω_1 'in görüntüsünde $j = 3$, ω_2 'nin görüntüsünde vardır). Fakat H , B 'nin $j = 1$ sütununu kapsamaz (çünkü $j = 1$, ω_2 'nin görüntüsünde yoktur).

Tanım 3.2.1.2.5. B 'deki bir H bloğu aşağıdaki koşulları sağlar ise B 'nin bir alt tahtası olur.

1. H tarafından kapsanan herhangi bir i, i' satırı ve H tarafından kapsanmayan herhangi bir j sütunu için $b_{i,j} = b_{i',j}$ 'dir.
2. H tarafından kapsanmayan herhangi bir i satırı ve H tarafından kapsanan herhangi bir j, j' sütunu için $b_{i,j} = b_{i,j'}$ 'dir.

Sezgisel olarak bir $s \times t$ bloğu H , bir s satır kümesi ile bir t sütun kümesinin kesişiminden oluşan B 'nin bir alt tahtasıdır. Bu blok dışında tüm hücreler aynıdır. Her hücrenin aslında 1×1 boyutunda bir blok olduğu unutulmamalıdır (Mitchell, 2004, s.4).

Tanım 3.2.1.2.6. B , $p \times q$ şeklinde bir tahta ve H , B 'deki bir $s \times t$ blok olsun.

$0 \leq j \leq \min(s, t)$ için $B_{H,j}$, B 'den

1. H tarafından kapsanan s satırın j tanesini
2. H tarafından kapsanan t sütunun j tanesini
3. H 'nin tüm hücreleri

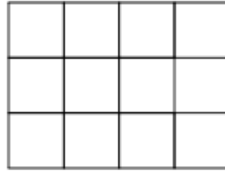
silinmesiyle elde edilen tahtayı gösterebilirsin. Bu durumda $B_{H,j}$, H 'ye göre B 'nin j 'inci dahil etme tahtası olarak adlandırılır. $B_{H,j}$ tahtasının iyi tanımlı olduğunu belirtmek gerekir, çünkü ilgili satır ve sütunlar, silinen H bloğu hariç aynıdır (Mitchell, 2004, s.4).

Teorem 3.2.1.2.7. (Blok Ayrıştırma Teoremi) B bir $p \times q$ tahtası ve H , B 'nin içinde bir $s \times t$ blok olsun. H 'nin kale polinomunda x^k 'nin katsayısı $r_k(H)$ olsun. $1 \leq j \leq \min(s, t)$ için $B_{H,j}$, B 'nin H 'ye göre j 'inci dahil etme tahtası olsun. O zaman

$$R_B(x) = \sum_{j=0}^{\min(s,t)} r_j(H)x^j R_{B_{H,j}}(x)$$

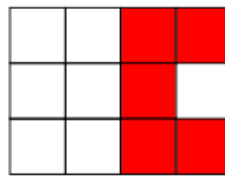
şekindedir (Mitchell, 2004, s.4).

Örnek 3.2.1.2.8. Şekil 3.9'da, örnek 3.2.1.2.2'de verilen B tahtasını tekrar sunup kale polinomunu bulalım.



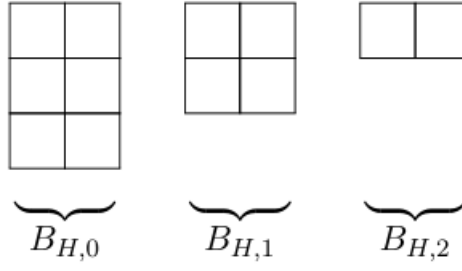
Şekil 3.9. B tahtası

Şekil 3.10'da, H , B 'nin içinde kırmızıyla işaretlenmiş 3×2 'lik bir blok olsun.



Şekil 3.10. B tahtası içinde kırmızıyla işaretlenmiş H tahtası

Tanım 3.2.1.2.6'ya göre



yazarız. Ayrıca, $R_H(x) = 1 + 5x + 4x^2$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.2.1.2.7'ye göre

$$R_B(x) = \sum_{j=0}^2 r_j(H)x^j R_{B_{H,j}}(x)$$

ve

$$\left[\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \color{red} & \color{red} \\ \hline & & \color{red} & \\ \hline & & \color{red} & \color{red} \\ \hline \end{array} \right] = \left[\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right] + 5x \left[\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right] + 4x^2 \left[\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \right]$$

yazarız. Teorem 3.2.6'yı kullanarak yukarıdaki dikdörtgenlere karşılık gelen kale polinomlarını yerine koyalım. Buradan

$$\begin{aligned} R_B(x) &= r_0(H)x^0 R_{B_{H,0}}(x) + r_1(H)x^1 R_{B_{H,1}}(x) + r_2(H)x^2 R_{B_{H,2}}(x) \\ &= 1(1 + 6x + 6x^2) + 5x(1 + 4x + 2x^2) + 4x^2(1 + 2x) \\ &= 1 + 11x + 30x^2 + 18x^3 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Bulgular

Bu kesimde tez boyunca elde ettiğimiz sonuçlar ayrıntılarıyla aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.1.1. Eğer bir S sayısal yarıgrubu hem almost simetrik yarıgrup hem de Arf ise o zaman S 'ye almost simetrik Arf yarıgrup denir (Gümüşbaş et al., 2020, s.2189).

Tanım 4.1.2. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ parçalanışı verilsin. O zaman

1. Almost simetrik yarıgrup S için eğer $\lambda = \psi^{-1}\varphi(S)$ ise o zaman λ 'ya bir almost simetrik parçalanış denir.
2. Almost simetrik Arf yarıgrup S için eğer $\lambda = \psi^{-1}\varphi(S)$ ise o zaman λ 'ya bir almost simetrik Arf parçalanış denir.

(Gümüşbaş et al., 2020, s.2190).

Teorem 4.1.3. $\alpha \in \mathbb{N}$ ve $\beta \in \{1,3,5, \dots, 2\alpha - 1, \rightarrow\}$ olmak üzere, herhangi bir almost simetrik Arf parçalanış λ ya $\lambda = [\alpha]$ ya da $\lambda = [\alpha + \beta, \alpha, \alpha - 1, \dots, 2, 1]$ formundadır (Gümüşbaş et al., 2020, s.2190).

Sonuç 4.1.4. $\alpha \in \mathbb{N}$ için, $\lambda = [\alpha]$ parçalanışına ait almost simetrik Arf yarıgrubu $S = \{0, \alpha + 1, \rightarrow\}$ formundadır.

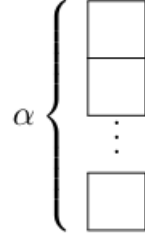
Sonuç 4.1.5. $\alpha \in \mathbb{N}$ ve $\beta \in \{1,3,5, \dots, 2\alpha - 1, \rightarrow\}$ olmak üzere, $\lambda = [\alpha + \beta, \alpha, \alpha - 1, \dots, 2, 1]$ parçalanışına ait almost simetrik Arf yarıgrubu $S = \{0, \beta + 1, \beta + 3, \dots, 2\alpha + \beta + 1, \rightarrow\}$ formundadır.

Teorem 4.1.6. $S = \{0, \alpha + 1, \rightarrow\}$, Sonuç 4.1.4'teki gibi almost simetrik bir Arf yarıgrup ve S 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S ile gösterildiğini varsayalım. O zaman Y_S 'nin kale polinomu

$$R_{Y_S}(x) = 1 + \alpha x$$

formundadır.

İspat. $S = \{0, \alpha + 1, \rightarrow\}$, Sonuç 4.1.4'teki gibi almost simetrik bir Arf yarıgrup ve S 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S ile gösterildiğini varsayalım. O zaman, Young diyagramı Y_S , Şekil 4.1'deki gibidir.



Şekil 4.1. $S=\{0,\alpha+1,\rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S

Teorem 3.2.6 kullanılarak yukarıdaki dikdörtgenin kale polinomu aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
 R_{Y_S}(x) &= \sum_{k=0}^1 \binom{\alpha}{k} \binom{1}{k} k! x^k \\
 &= \binom{\alpha}{0} \binom{1}{0} 0! x^0 + \binom{\alpha}{1} \binom{1}{1} 1! x^1 \\
 &= 1 + \alpha x
 \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, ana sonucumuzu ispatlamak için aşağıdaki yardımcı teoremi vereceğiz.

Yardımcı Teorem 4.1.7. $\alpha \in \mathbb{N}$ için, $S = \{0,2,4, \dots, 2\alpha + 2, \rightarrow\}$, Sonuç 4.1.5'teki gibi almost simetrik bir Arf yarıgrup ve S 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S ile gösterildiğini varsayalım. O zaman Y_S 'nin kale polinomu

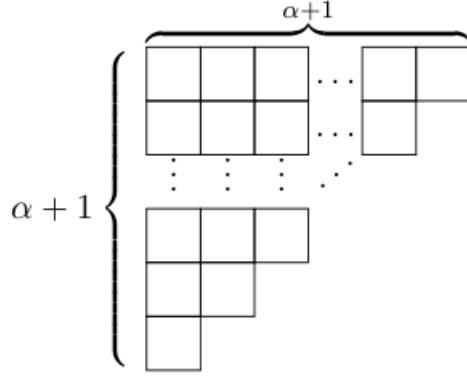
$$R_{Y_S}(x) = s_0(Y_S) + s_1(Y_S)x + s_2(Y_S)x^2 + \dots + s_{\alpha+1}(Y_S)x^{\alpha+1}$$

olup, burada $s_0(Y_S) = s_{\alpha+1}(Y_S) = 1$ ve $\mu = 1,2, \dots, \alpha$ için

$$s_\mu(Y_S) = \sum_{\varepsilon_\mu=1}^{\alpha+2-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \dots \right) \right)$$

formundadır.

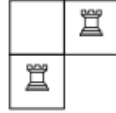
İspat. Sonuç 4.1.5'te $\beta = 1$ olduğunda, S 'nin almost simetrik bir Arf yarırubü olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda, S 'ye karşılık gelen Young diyagramı Şekil 4.2'deki gibi olur.



Şekil 4.2. $S = \{0, 2, 4, \dots, 2\alpha + 2, \to\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S

Bu yardımcı teoremi tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayalım. İspatı, α üzerinde tümevarım yoluyla gerçekleştireceğiz.

Temel Durum: $\alpha = 1$ iken, $S = \{0, 2, 4, \to\}$ olur. Bu durumda, S 'ye karşılık gelen Young diyagramı Şekil 4.3'teki gibi olur.



Şekil 4.3. $S = \{0, 2, 4, \to\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S

Kale polinomu tanımından, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

- $s_0(Y_S) = 1$.
- $\mu = 1$ için $s_1(Y_S) = \sum_{\varepsilon_1=1}^2 \varepsilon_1 = 1 + 2 = 3$ olup, bu da Y_S 'deki hücrelerin sayısını verir.
- Ayrıca, Y_S tahtasına yerleştirilebilecek iki kale yalnızca Şekil 4.3'teki gibi yerleştirilebilir. Dolayısıyla, $s_2(Y_S) = 1$ olur.

Buradan, $R_{Y_S}(x) = 1 + 3x + x^2$ olduğundan verilen ifade $\alpha = 1$ için doğrudur.

Tümevarım Varsayımı: Şimdi sonucun $\alpha = n$ için geçerli olduğunu varsayalım. Yani, $S = \{0, 2, \dots, 2n + 2, \to\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S 'nin kale polinomu

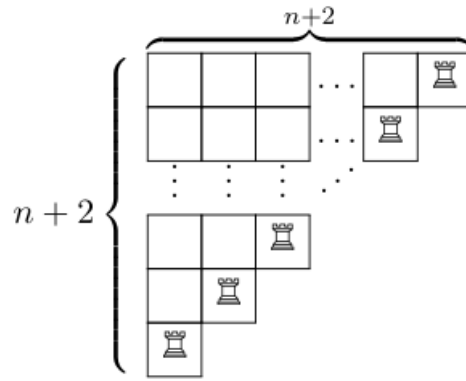
$$R_{Y_S}(x) = s_0(Y_S) + s_1(Y_S)x + s_2(Y_S)x^2 + \cdots + s_{n+1}(Y_S)x^{n+1}$$

olup, burada $s_0(Y_S) = s_{n+1}(Y_S) = 1$ ve $\mu = 1, 2, \dots, n$ için

$$s_\mu(Y_S) = \sum_{\varepsilon_\mu=1}^{n+2-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right)$$

formundadır.

Tümevarım Adımı: Şimdi sonucun $\alpha = n + 1$ için doğru olduğunu göstereceğiz. $\alpha = n + 1$ için $B = \{0, 2, 4, \dots, 2n + 2, 2n + 4, \rightarrow\}$ ile gösterilsin. Bu durumda, B 'ye karşılık gelen Young diyagramı Şekil 4.4'teki gibi olur.



Şekil 4.4. $B = \{0, 2, 4, \dots, 2n + 2, 2n + 4, \rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_B

Buradan,

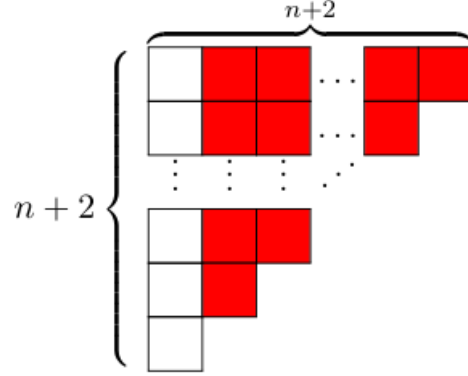
$$R_{Y_B}(x) = b_0(Y_B) + b_1(Y_B)x + b_2(Y_B)x^2 + \cdots + b_{n+1}(Y_B)x^{n+1} + b_{n+2}(Y_B)x^{n+2}$$

olarak yazılır.

Kale polinomu tanımından, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

- $b_0(Y_B) = 1$.
- Ayrıca, Y_B tahtasına yerleştirilebilecek $n + 2$ kale yalnızca Şekil 4.4'teki gibi yerleştirilebilir. Dolayısıyla, $b_{n+2}(Y_B) = 1$ olur.

- Şimdi Y_S , Şekil 4.5'te gösterildiği gibi $(n + 2) \times (n + 2)$ bloğuna sahip Y_B 'nin içinde kırmızıyla işaretlenmiş bir $(n + 1) \times (n + 1)$ blok olsun.



Şekil 4.5. Y_B tahtası içinde kırmızıyla işaretlenmiş Y_S tahtası

Teorem 3.2.1.2.7'yi kullanarak

$$R_{Y_B}(x) = \sum_{j=0}^{n+1} s_j(Y_S) x^j R_{(Y_B)_{(Y_S),j}}(x)$$

elde ederiz.

Şekil 4.5'teki $(n + 1) \times (n + 1)$ boyutundaki kırmızı blokların ayrıştırılması Tanım 3.2.1.2.6'ya göre aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} \square & \color{red}\square & \color{red}\square \\ \color{red}\square & \color{red}\square & \color{red}\square \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}\square & \color{red}\square & \color{red}\square \end{array} \right]}^{n+2} \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \color{red}\square & \color{red}\square \\ \color{red}\square & \color{red}\square & \color{red}\square \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \square & \color{red}\square & \color{red}\square \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \color{red}\square & \color{red}\square \\ \color{red}\square & \color{red}\square & \color{red}\square \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \square & \color{red}\square & \color{red}\square \end{array} \right] \end{array} \right]_{n+2} = s_0(Y_S) x^0 \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right]_{n+2} + s_1(Y_S) x^1 \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right]_{n+1} + \dots + s_{n+1}(Y_S) x^{n+1} \left[\begin{array}{c} \square \end{array} \right]_1 \end{array} \right]$$

Bu ayrıştırmada, genişliği 1 ve uzunluğu i ($i = 1, 2, \dots, n + 2$) olan $n + 2$ dikdörtgen blok elde edilir. Bu dikdörtgenlerin kale polinomları Teorem 3.2.6'ya göre $1 + ix$ biçimindedir. Bu nedenle, aşağıdaki denklemleri yazabiliriz.

$$R_{Y_B}(x) = s_0(Y_S) x^0 R_{(Y_B)_{(Y_S),0}}(x) + s_1(Y_S) x^1 R_{(Y_B)_{(Y_S),1}}(x) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& +s_{n+1}(Y_S)x^{n+1}R_{(Y_B)(Y_S),n+1}(x) \\
& = s_0(Y_S)[1 + (n + 2)x] + s_1(Y_S)x[1 + (n + 1)x] + \dots + s_{n+1}(Y_S)x^{n+1}[1 + x] \\
& = s_0(Y_S) + [s_1(Y_S) + (n + 2)s_0(Y_S)]x + \dots + [s_{n+1}(Y_S) + 2s_n(Y_S)]x^{n+1} \\
& \quad + s_{n+1}(Y_S)x^{n+2}
\end{aligned}$$

Tümevarım varsayımında $s_0(Y_S) = s_{n+1}(Y_S) = 1$ olduğunu biliyoruz. Bunu kullanarak

$$\begin{aligned}
R_{Y_B}(x) & = 1 + [s_1(Y_S) + (n + 2)s_0(Y_S)]x + \dots \\
& \quad + [s_{n+1}(Y_S) + 2s_n(Y_S)]x^{n+1} + x^{n+2}
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

denklemini elde ederiz.

Denklem (4.1.1)'den $\mu = 1, 2, \dots, n + 1$ için

$$b_\mu(Y_B) = s_\mu(Y_S) + (n + 3 - \mu)s_{\mu-1}(Y_S) \tag{4.1.2}$$

olduğu açıktır.

Tümevarım varsayımı ile

$$s_\mu(Y_S) = \sum_{\varepsilon_\mu=1}^{n+2-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \dots \right)$$

ve

$$s_{\mu-1}(Y_S) = \sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{n+3-\mu} \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \dots \right)$$

katsayılarına sahibiz.

$s_\mu(Y_S)$ ve $s_{\mu-1}(Y_S)$ değerlerini Denklem (4.1.2)'de yerine yazalım. Böylece aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$\begin{aligned}
b_\mu(Y_B) &= \left[\sum_{\varepsilon_\mu=1}^{n+2-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right] \\
&\quad + (n+3-\mu) \left[\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{n+3-\mu} \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right] \quad (4.1.3)
\end{aligned}$$

$s_\mu(Y_S)$ katsayısı aşağıdaki şekilde yazılabileceğine dikkat edelim.

$$\begin{aligned}
s_\mu(Y_S) &= \left[\sum_{\varepsilon_\mu=1}^{n+2-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right] \\
&= 1 \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^1 \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right) \\
&\quad + 2 \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^2 \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right) + \cdots \\
&\quad + (n+2-\mu) \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{n+2-\mu} \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right) \quad (4.1.4)
\end{aligned}$$

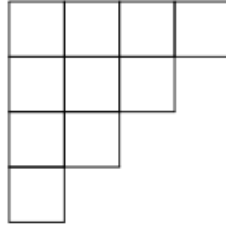
Denklem (4.1.4)'ü, Denklem (4.1.3)'te yerine yazalım. Böylece aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$\begin{aligned}
b_\mu(Y_B) &= 1 \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^1 \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right) \\
&\quad + 2 \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^2 \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right) + \cdots \\
&\quad + (n+2-\mu) \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{n+2-\mu} \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right) \\
&\quad + (n+3-\mu) \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{n+3-\mu} \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \cdots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \cdots \right) \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\varepsilon_{\mu}=1}^{n+3-\mu} \varepsilon_{\mu} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_{\mu}} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \dots \right)$$

Dolayısıyla, ifade $\alpha = n$ için geçerliyse $\alpha = n + 1$ için de geçerlidir. Bu nedenle, tümevarım yoluyla ifade tüm $\alpha \in \mathbb{N}$ değerleri için geçerlidir.

Örnek 4.1.8. $\alpha = 3$ ve $\beta = 1$ için, almost simetrik Arf yarıgrubu $S = \{0,2,4,6,8, \rightarrow\}$ 'nin kale polinomunu bulalım. S 'ye karşılık gelen Young diyagramı Şekil 4.6 gibi olur.



Şekil 4.6. $S=\{0,2,4,6,8, \rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S

Y_S 'nin kale polinomunun

$$R_{Y_S}(x) = s_0(Y_S) + s_1(Y_S)x + s_2(Y_S)x^2 + s_3(Y_S)x^3 + s_4(Y_S)x^4$$

olduğunu varsayalım. Yardımcı Teorem 4.1.7'den $s_0(Y_S) = s_4(Y_S) = 1$ ve $\mu = 1,2,3$ için

$$s_{\mu}(Y_S) = \sum_{\varepsilon_{\mu}=1}^{5-\mu} \varepsilon_{\mu} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_{\mu}} \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \right) \right)$$

formundadır. Buradan biz

$$\begin{aligned} s_1(Y_S) &= \sum_{\varepsilon_1=1}^4 \varepsilon_1 \\ &= (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2(Y_S) &= \sum_{\varepsilon_2=1}^3 \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \\
&= \sum_{\varepsilon_2=1}^3 \varepsilon_2 (1 + \dots + \varepsilon_2) \\
&= 1(1) + 2(1 + 2) + 3(1 + 2 + 3) \\
&= 25
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
s_3(Y_S) &= \sum_{\varepsilon_3=1}^2 \varepsilon_3 \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \\
&= \sum_{\varepsilon_3=1}^2 \varepsilon_3 \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 (1 + \dots + \varepsilon_2) \right) \\
&= \sum_{\varepsilon_3=1}^2 \varepsilon_3 (1(1) + \dots + \varepsilon_3(1 + \dots + \varepsilon_3)) \\
&= 1(1(1)) + 2(1(1) + 2(1 + 2)) \\
&= 15
\end{aligned}$$

buluruz.

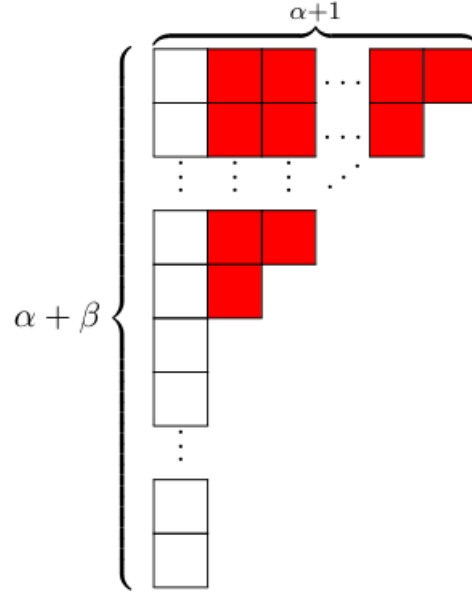
Dolayısıyla,

$$R_{Y_S}(x) = 1 + 10x + 25x^2 + 15x^3 + x^4$$

olur.

Teorem 4.1.9. $C = \{0, \beta + 1, \beta + 3, \dots, 2\alpha + \beta + 1, \rightarrow\}$, Sonuç 4.1.5'teki gibi almost simetrik bir Arf yarıgrup ve C 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_C ile gösterilsin. Bu durumda, Y_C 'nin kale polinomu

$$R_{Y_C}(x) = c_0(Y_C) + c_1(Y_C)x + c_2(Y_C)x^2 + \dots + c_{\alpha+1}(Y_C)x^{\alpha+1}$$



Şekil 4.8. Y_C tahtası içinde kırmızıyla işaretlenmiş Y_S tahtası

Varsayalım ki Y_C 'nin kale polinomu $R_{Y_C}(x) = c_0(Y_C) + c_1(Y_C)x + c_2(Y_C)x^2 + \dots + c_{\alpha+1}(Y_C)x^{\alpha+1}$ ve Y_S 'nin kale polinomu ise $R_{Y_S}(x) = s_0(Y_S) + s_1(Y_S)x + s_2(Y_S)x^2 + \dots + s_\alpha(Y_S)x^\alpha$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.1.7'ye göre $s_0(Y_S) = s_\alpha(Y_S) = 1$ ve $\mu = 1, 2, \dots, \alpha - 1$ için

$$s_\mu(Y_S) = \sum_{\varepsilon_\mu=1}^{\alpha+1-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \dots \right) \right)$$

olduğunu biliyoruz.

Teorem 3.2.1.2.7 ve Tanım 3.2.1.2.6'dan aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$R_C(x) = \sum_{j=0}^{\alpha} s_j(Y_S) x^j R_{(Y_C)_{(Y_S),j}}(x)$$

ve

- $\mu = 2, \dots, \alpha$ için

$$c_\mu(Y_C) = s_\mu(Y_S) + s_{\mu-1}(Y_S)(\alpha + \beta - \mu + 1)$$

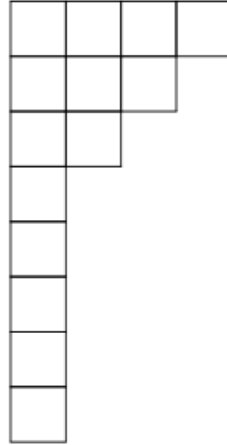
olduğu açıktır.

Bu durumda,

$$c_\mu(Y_C) = \left[\sum_{\varepsilon_\mu=1}^{\alpha+1-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \dots \right) \right) \right] \\ + (\alpha + \beta - \mu + 1) \left[\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\alpha+2-\mu} \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \dots \right) \right) \right]$$

olur.

Örnek 4.1.10. $\alpha = 3$ ve $\beta = 5$ için, almost simetrik Arf yarıgrubu $C = \{0,6,8,10,12, \rightarrow\}$ 'nin kale polinomunu bulalım. C 'ye karşılık gelen Young diyagramı Şekil 4.9 gibi olur.



Şekil 4.9. $S=\{0,6,8,10,12, \rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_C

Y_C 'nin kale polinomunun

$$R_{Y_C}(x) = c_0(Y_C) + c_1(Y_C)x + c_2(Y_C)x^2 + c_3(Y_C)x^3 + c_4(Y_C)x^4$$

olduğunu varsayalım. Teorem 4.1.9'dan $c_0(Y_C) = 1$, $c_1(Y_C) = \frac{3.4}{2} + (3 + 5) = 14$, $c_4(Y_C) = 5$ ve $\mu = 2,3$ için

$$\begin{aligned}
c_2(Y_C) &= \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^2 \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) + 7 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^3 \varepsilon_1 \right) \\
&= \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^2 \varepsilon_2 (1 + \dots + \varepsilon_2) \right) + 7 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^3 \varepsilon_1 \right) \\
&= (1(1) + 2(1 + 2)) + 7(1 + 2 + 3) \\
&= 49
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
c_3(Y_C) &= \left(\sum_{\varepsilon_3=1}^1 \varepsilon_3 \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \right) + 6 \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^2 \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \\
&= \left(\sum_{\varepsilon_3=1}^1 \varepsilon_3 \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 (1 + \dots + \varepsilon_2) \right) \right) + 6 \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^2 \varepsilon_2 (1 + \dots + \varepsilon_2) \right) \\
&= \left(\sum_{\varepsilon_3=1}^1 \varepsilon_3 (1(1) + \dots + \varepsilon_3(1 + \dots + \varepsilon_3)) \right) + 6 \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^2 \varepsilon_2 (1 + \dots + \varepsilon_2) \right) \\
&= (1(1(1))) + 6(1(1) + 2(1 + 2)) \\
&= 43
\end{aligned}$$

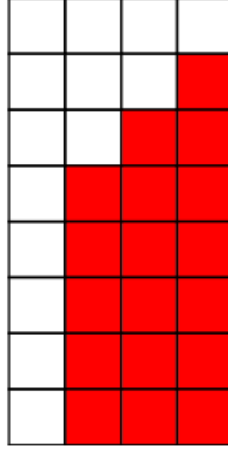
bulunur. Dolayısıyla,

$$R_{Y_C}(x) = 1 + 14x + 49x^2 + 43x^3 + 5x^4$$

olur.

Tanım 4.1.11. Bir Young diyagramının tamamlayıcısı, ilk satırdaki kutu sayısı kadar genişliğe ve ilk sütundaki kutu sayısı kadar yüksekliğe sahip dikdörtgen bir ızgarayı tamamlayarak bulunur (Guhl et al., 2020).

Örnek 4.1.12. Örnek 4.1.10’da verilen Y_C ’nin tamamlayıcısı Şekil 4.10’da kırmızı renk ile gösterilmiştir.



Şekil 4.10. Y_C ’nin tamamlayıcısı kırmızı renkli bölgedir

Teorem 4.1.13. $C = \{0, \beta + 1, \beta + 3, \dots, 2\alpha + \beta + 1, \rightarrow\}$, Sonuç 4.1.5’teki gibi almost simetrik bir Arf yarıgrup olsun. C ’ye karşılık gelen Young diyagramı Y_C ve Y_C ’nin tamamlayıcısı $Y_{C'}$ ile gösterilsin. O zaman, $Y_{C'}$ ’nin kale polinomu $R_{Y_{C'}}(x) = c_0(Y_{C'}) + c_1(Y_{C'})x + c_2(Y_{C'})x^2 + \dots + c_\alpha(Y_{C'})x^\alpha$ ve $R_{Y_{C'}}(x)$ ’in katsayıları

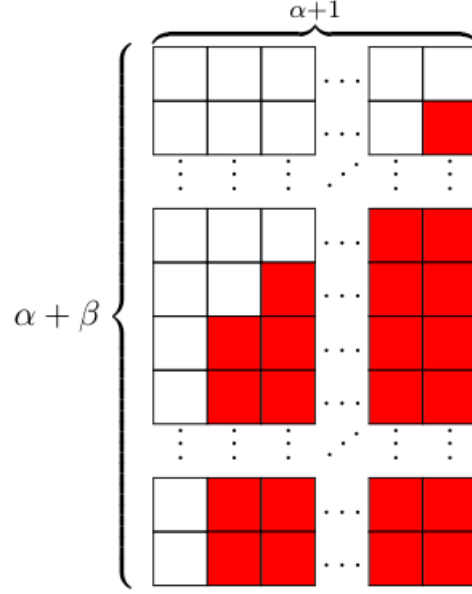
$$c_j(Y_{C'}) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } j = 0 \text{ ise} \\ \sum_{\mu=0}^j h_\mu(H) \binom{\alpha - \mu}{j - \mu} \binom{\beta}{j - \mu} (j - \mu)! & \text{eğer } 1 \leq j \leq \alpha < \beta \text{ ise} \\ \sum_{\mu=0}^j h_\mu(H) \binom{\alpha - \mu}{j - \mu} \binom{\beta}{j - \mu} (j - \mu)! & \text{eğer } 1 \leq j < \beta \leq \alpha \text{ ise} \\ \sum_{\mu=j-\beta}^j h_\mu(H) \binom{\alpha - \mu}{j - \mu} \binom{\beta}{j - \mu} (j - \mu)! & \text{eğer } \beta \leq j \leq \alpha \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $h_0(H) = h_{\alpha-1}(H) = 1$ ve $\mu = 1, 2, \dots, \alpha - 2$ için

$$h_\mu(H) = \sum_{\varepsilon_\mu=1}^{\alpha-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \dots \right)$$

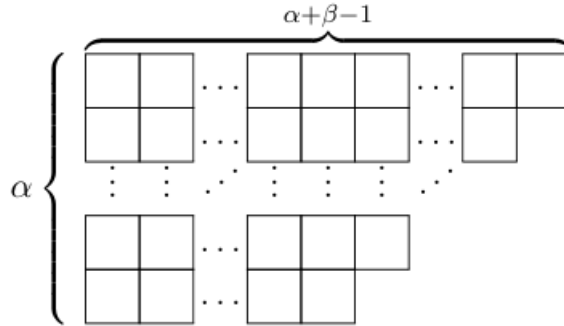
formundadır.

İspat. $C = \{0, \beta + 1, \beta + 3, \dots, 2\alpha + \beta + 1, \rightarrow\}$, Sonuç 4.1.5'teki gibi almost simetrik bir Arf yarıgrup olsun. Ayrıca, C 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_C , Şekil 4.7'de gösterilmektedir. Y_C tahtasının tamamlayıcısı ise Şekil 4.11'de kırmızıyla belirtilmiştir. Kırmızıyla gösterilen Y_C tahtasının tamamlayıcısını $Y_{C'}$ ile gösterelim.



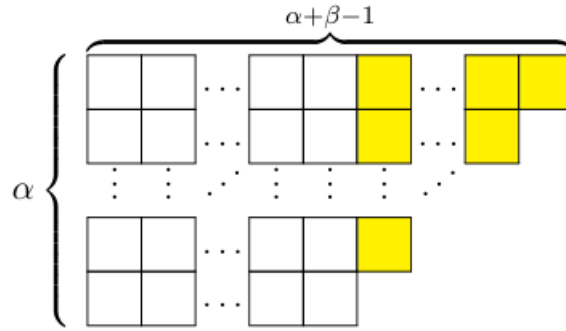
Şekil 4.11. Şekil 4.7'deki Y_C tahtasının tamamlayıcısı olan $Y_{C'}$ tahtası kırmızıyla işaretlenmiştir

$Y_{C'}$ tahtasını saat yönünde 90 derece döndürüp daha sonra x eksenine göre simetrisini aldığımızda, Şekil 4.12'deki B tahtasını elde ederiz. Bu tahta, $Y_{C'}$ tahtasıyla aynı kale polinomuna sahiptir.



Şekil 4.12. B tahtası

Şimdi H , Şekil 4.13'te gösterildiği gibi B tahtasında sarıyla işaretlenmiş bir $(\alpha - 1) \times (\alpha - 1)$ blok olsun.



Şekil 4.13. B tahtasında sarıyla işaretlenmiş H tahtası

Varsayalım ki B 'nin kale polinomu $R_B(x) = R_{Y_{C'}}(x) = c_0(Y_{C'}) + c_1(Y_{C'})x + c_2(Y_{C'})x^2 + \dots + c_\alpha(Y_{C'})x^\alpha$ ve H 'nin kale polinomu ise $R_H(x) = h_0(H) + h_1(H)x + h_2(H)x^2 + \dots + h_{\alpha-1}(H)x^{\alpha-1}$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.1.7'ye göre $h_0(H) = h_{\alpha-1}(H) = 1$ ve $\mu = 1, 2, \dots, \alpha - 2$ için

$$h_\mu(H) = \sum_{\varepsilon_\mu=1}^{\alpha-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \dots \right)$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.2.1.2.7 ve Tanım 3.2.1.2.6'dan aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$R_B(x) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} h_j(H)x^j R_{B_{H,j}}(x)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right]}^{\alpha+\beta-1} \\ \vdots \\ \alpha \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right] = h_0(H) x^0 \left[\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right]}^{\beta} \\ \vdots \\ \alpha \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right] + h_1(H) x^1 \left[\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right]}^{\beta} \\ \vdots \\ \alpha-1 \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right] + \dots \\
+ h_i(H) x^i \left[\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right]}^{\beta} \\ \vdots \\ \alpha-i \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right] + \dots + h_{\alpha-1}(H) x^{\alpha-1} \left[\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right]}^{\beta} \\ \vdots \\ 1 \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \\ \square & \dots & \square \end{array} \right] \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.6'yı kullanarak yukarıdaki dikdörtgenlere karşılık gelen kale polinomlarını yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
R_B(x) &= h_0(H) \left(\sum_{k=0}^{\min(\alpha, \beta)} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) \\
&+ h_1(H) x \left(\sum_{k=0}^{\min(\alpha-1, \beta)} \binom{\alpha-1}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) + \dots \\
&+ h_i(H) x^i \left(\sum_{k=0}^{\min(\alpha-i, \beta)} \binom{\alpha-i}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) + \dots \\
&+ h_{\alpha-1}(H) x^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right).
\end{aligned}$$

Burada iki durum söz konusudur.

Durum 1: Eğer $\alpha < \beta$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
R_B(x) &= h_0(H) \left(\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) + h_1(H) x \left(\sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha-1}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) + \dots \\
&+ h_i(H) x^i \left(\sum_{k=0}^{\alpha-i} \binom{\alpha-i}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h_{\alpha-1}(H)x^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) \\
& = h_0(H) + \left[h_0(H) \binom{\alpha}{1} \binom{\beta}{1} 1! + h_1(H) \binom{\alpha-1}{0} \binom{\beta}{0} 0! \right] x + \dots \\
& + \left[h_0(H) \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{i} i! + h_1(H) \binom{\alpha-1}{i-1} \binom{\beta}{i-1} (i-1)! + \dots \right. \\
& \left. + h_i(H) \binom{\alpha-i}{0} \binom{\beta}{0} 0! \right] x^i + \dots \\
& + \left[h_0(H) \binom{\alpha}{\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \alpha! + h_1(H) \binom{\alpha-1}{\alpha-1} \binom{\beta}{\alpha-1} (\alpha-1)! + \dots \right. \\
& \left. + h_{\alpha-1}(H) \binom{1}{1} \binom{\beta}{1} 1! \right] x^\alpha
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi $R_B(x)$ polinomunun katsayılarını x 'in derecelerine göre yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
R_B(x) & = h_0(H) + \left[\sum_{\mu=0}^1 h_\mu(H) \binom{\alpha-\mu}{1-\mu} \binom{\beta}{1-\mu} (1-\mu)! \right] x + \dots \\
& + \left[\sum_{\mu=0}^i h_\mu(H) \binom{\alpha-\mu}{i-\mu} \binom{\beta}{i-\mu} (i-\mu)! \right] x^i + \dots \\
& + \left[\sum_{\mu=0}^{\alpha} h_\mu(H) \binom{\alpha-\mu}{\alpha-\mu} \binom{\beta}{\alpha-\mu} (\alpha-\mu)! \right] x^\alpha.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemden aşağıdaki ifadeleri kolayca yazabiliriz.

$c_0(Y_{C'}) = h_0(H) = 1$ ve $1 \leq j \leq \alpha < \beta$ için

$$c_j(Y_{C'}) = \sum_{\mu=0}^j h_\mu(H) \binom{\alpha-\mu}{j-\mu} \binom{\beta}{j-\mu} (j-\mu)!$$

şeklinindedir.

Durum 2: Eğer $\beta \leq \alpha$ ise, bu durumda $\alpha - \beta \geq 0$ olur. Böylece, $R_B(x)$ polinomunun katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
R_B(x) &= h_0(H) \left(\sum_{k=0}^{\beta} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) \\
&+ h_1(H) x \left(\sum_{k=0}^{\beta} \binom{\alpha-1}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) + \dots \\
&+ h_{\alpha-\beta}(H) x^{\alpha-\beta} \left(\sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) \\
&+ h_{\alpha-\beta+1}(H) x^{\alpha-\beta+1} \left(\sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) + \dots \\
&+ h_{\alpha-1}(H) x^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \binom{\beta}{k} k! x^k \right) \\
&= h_0(H) \left(\binom{\alpha}{0} \binom{\beta}{0} 0! x^0 + \binom{\alpha}{1} \binom{\beta}{1} 1! x^1 + \dots + \binom{\alpha}{\beta} \binom{\beta}{\beta} \beta! x^\beta \right) \\
&+ h_1(H) x^1 \left(\binom{\alpha-1}{0} \binom{\beta}{0} 0! x^0 + \binom{\alpha-1}{1} \binom{\beta}{1} 1! x^1 + \dots \right. \\
&\quad \left. + \binom{\alpha-1}{\beta} \binom{\beta}{\beta} \beta! x^\beta \right) + \dots \\
&+ h_{\alpha-\beta}(H) x^{\alpha-\beta} \left(\binom{\beta}{0} \binom{\beta}{0} 0! x^0 + \binom{\beta}{1} \binom{\beta}{1} 1! x^1 + \dots + \binom{\beta}{\beta} \binom{\beta}{\beta} \beta! x^\beta \right) \\
&+ h_{\alpha-\beta+1}(H) x^{\alpha-\beta+1} \left(\binom{\beta-1}{0} \binom{\beta}{0} 0! x^0 + \binom{\beta-1}{1} \binom{\beta}{1} (1)! x^1 + \dots \right. \\
&\quad \left. + \binom{\beta-1}{\beta-1} \binom{\beta}{\beta-1} (\beta-1)! x^{\beta-1} \right) + \dots \\
&+ h_{\alpha-1}(H) x^{\alpha-1} \left(\binom{1}{0} \binom{\beta}{0} 0! x^0 + \binom{1}{1} \binom{\beta}{1} 1! x^1 \right).
\end{aligned}$$

$R_B(x)$ polinomunun katsayılarını x 'in derecelerine göre yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
R_B(x) &= \left[h_0(H) \binom{\alpha}{0} \binom{\beta}{0} 0! \right] x^0 \\
&+ \left[h_0(H) \binom{\alpha}{1} \binom{\beta}{1} 1! + h_1(H) \binom{\alpha-1}{0} \binom{\beta}{0} 0! \right] x^1 + \dots \\
&+ \left[h_0(H) \binom{\alpha}{\beta} \binom{\beta}{\beta} \beta! + h_1(H) \binom{\alpha-1}{\beta-1} \binom{\beta}{\beta-1} (\beta-1)! + \dots \right. \\
&+ \left. h_\beta(H) \binom{\alpha-\beta}{0} \binom{\beta}{0} 0! \right] x^\beta \\
&+ \left[h_1(H) \binom{\alpha-1}{\beta} \binom{\beta}{\beta} \beta! + \dots + h_\beta(H) \binom{\alpha-\beta}{1} \binom{\beta}{1} 1! \right. \\
&+ \left. h_{\beta+1}(H) \binom{\alpha-\beta-1}{0} \binom{\beta}{0} 0! \right] x^{\beta+1} + \dots \\
&+ \left[h_{\alpha-\beta}(H) \binom{\beta}{\beta} \binom{\beta}{\beta} \beta! + h_{\alpha-\beta+1}(H) \binom{\beta-1}{\beta-1} \binom{\beta}{\beta-1} (\beta-1)! + \dots \right. \\
&+ \left. h_{\alpha-1}(H) \binom{1}{1} \binom{\beta}{1} 1! \right] x^\alpha.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemden aşağıdaki ifadeleri kolayca yazabiliriz.

- $c_0(Y_{C'}) = h_0(H) = 1$
- $1 \leq j < \beta \leq \alpha$ için

$$c_j(Y_{C'}) = \sum_{\mu=0}^j h_\mu(H) \binom{\alpha-\mu}{j-\mu} \binom{\beta}{j-\mu} (j-\mu)!$$

Bu iki durumun Durum 1 ile aynı olduğunu dikkat edin.

- $\beta \leq j \leq \alpha$ için

$$c_j(Y_{C'}) = \sum_{\mu=j-\beta}^j h_\mu(H) \binom{\alpha-\mu}{j-\mu} \binom{\beta}{j-\mu} (j-\mu)!$$

Örnek 4.1.14. Örnek 4.1.10'da verilen Y_C 'nin tamamlayıcısının kale polinomunu bulalım. Y_C 'nin tamamlayıcısı Örnek 4.1.12'de kırmızıyla verilmiştir. Şimdi polinomu Teorem 4.1.13'ü kullanarak değerlendirelim. $h_0(H) = h_2(H) = 1$ ve $\mu = 1$ için

$$\begin{aligned}
h_1(H) &= \sum_{\varepsilon_1=1}^2 \varepsilon_1 \\
&= (1 + 2) = 3
\end{aligned}$$

biçimindedir. O zaman $Y_{C'}$ 'nin kale polinomu $R_{Y_{C'}}(x) = c_0(Y_{C'}) + c_1(Y_{C'})x + c_2(Y_{C'})x^2 + c_3(Y_{C'})x^3$ ve $R_{Y_{C'}}(x)$ 'nin katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$c_0(Y_{C'}) = 1$$

ve $1 \leq j \leq 3$ için

$$\begin{aligned} c_1(Y_{C'}) &= \sum_{\mu=0}^1 h_{\mu}(H) \binom{3-\mu}{1-\mu} \binom{5}{1-\mu} (1-\mu)! \\ &= h_0(H) \binom{3}{1} \binom{5}{1} 1! + h_1(H) \binom{2}{0} \binom{5}{0} 0! \\ &= 1 \binom{3}{1} \binom{5}{1} 1! + 3 \binom{2}{0} \binom{5}{0} 0! \\ &= 18, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(Y_{C'}) &= \sum_{\mu=0}^2 h_{\mu}(H) \binom{3-\mu}{2-\mu} \binom{5}{2-\mu} (2-\mu)! \\ &= h_0(H) \binom{3}{2} \binom{5}{2} 2! + h_1(H) \binom{2}{1} \binom{5}{1} 1! + h_2(H) \binom{1}{0} \binom{5}{0} 0! \\ &= 1 \binom{3}{2} \binom{5}{2} 2! + 3 \binom{2}{1} \binom{5}{1} 1! + 1 \binom{1}{0} \binom{5}{0} 0! \\ &= 91 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c_3(Y_{C'}) &= \sum_{\mu=0}^3 h_{\mu}(H) \binom{3-\mu}{3-\mu} \binom{5}{3-\mu} (3-\mu)! \\ &= h_0(H) \binom{3}{3} \binom{5}{3} 3! + h_1(H) \binom{2}{2} \binom{5}{2} 2! + h_2(H) \binom{1}{1} \binom{5}{1} 1! \\ &\quad + h_3(H) \binom{0}{0} \binom{5}{0} 0! \\ &= 1 \binom{3}{3} \binom{5}{3} 3! + 3 \binom{2}{2} \binom{5}{2} 2! + 1 \binom{1}{1} \binom{5}{1} 1! + 0 \binom{0}{0} \binom{5}{0} 0! \\ &= 125 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$R_{Y_{C'}}(x) = 1 + 18x + 91x^2 + 125x^3$$

olur.

4.2. Tartışma

Young diyagramları ve kale polinomları kombinatorik bir kavram sayısal yarıgruplar ise cebirsel bir yapıdır. Bu tez ile bir cebirsel yapı kombinatorik yapılar ile yorumlandı. Son yıllarda sayısal yarıgruplar ve Young diyagramları ile ilgili literatürde birçok çalışma yer almakta ve güncel bir konu olarak araştırılmaktadır. Bizim çalışmamız da bu güncel araştırma konusuna destek niteliğindedir. Daha önce kale polinomları ile sayısal yarıgruplar arasındaki ilişki açıklanmamıştı. Bu bağlamda çalışmamız yeni bir problemin çözümünü ele aldı. Bu tez, gelecekte yapılacak çalışmalara rehberlik edebilecek özgün bulgular içermekte ve aynı zamanda cebirsel yapıların kombinatorik yapılar ile ilişkilerini daha derinlemesine anlama yönünde katkı sağlamaktadır. Böylece, matematiksel yapıların birbiriyle ilişkilerini inceleyen araştırmacılara hem teorik hem de pratik açılardan yeni bir bakış açısı sunarak literatüre anlamlı bir katkı sağladığımıza inanıyoruz.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, almost simetrik Arf yarıgrupları ile kale polinomları arasındaki ilişki, Young diyagramları aracılığıyla ele alınmıştır. Sayısal kümeler kümesi, parçalanışlar kümesi ve Young diyagramları kümesi arasındaki birebir eşleşmeler kullanılarak, almost simetrik Arf yarıgruplarına karşılık gelen Young diyagramları belirlenmiş ve bu diyagramlara ait kale polinomları blok ayırıştırma algoritması ile hesaplanmıştır.

Çalışma kapsamında, $\alpha \in \mathbb{N}$ için almost simetrik Arf yarıgrubu $S = \{0, \alpha + 1, \rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_S 'nin kale polinomu

$$R_{Y_S}(x) = 1 + \alpha x$$

biçiminde elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, $\alpha \in \mathbb{N}$ ve $\beta \in \{1, 3, 5, \dots, 2\alpha - 1, \rightarrow\}$ olmak üzere, almost simetrik Arf yarıgrubu $C = \{0, \beta + 1, \beta + 3, \dots, 2\alpha + \beta + 1, \rightarrow\}$ 'ye karşılık gelen Young diyagramı Y_C 'nin kale polinomu

$$R_{Y_C}(x) = c_0(Y_C) + c_1(Y_C)x + c_2(Y_C)x^2 + \dots + c_{\alpha+1}(Y_C)x^{\alpha+1}$$

olarak belirlenmiştir. Burada $c_0(Y_C) = 1$, $c_1(Y_C) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + (\alpha + \beta)$, $c_{\alpha+1}(Y_C) = \beta$ ve $\mu = 2, \dots, \alpha$ için

$$c_\mu(Y_C) = \left[\sum_{\varepsilon_\mu=1}^{\alpha+1-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \dots \right) \right) \right] \\ + (\alpha + \beta - \mu + 1) \left[\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\alpha+2-\mu} \varepsilon_{\mu-1} \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-2}=1}^{\varepsilon_{\mu-1}} \varepsilon_{\mu-2} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \dots \right) \right) \right]$$

formundadır. Ayrıca, aynı gruba karşılık gelen Young diyagramı Y_C 'nin tamamlayıcısına ait $Y_{C'}$ 'nin kale polinomu da

$$R_{Y_{C'}}(x) = c_0(Y_{C'}) + c_1(Y_{C'})x + c_2(Y_{C'})x^2 + \dots + c_\alpha(Y_{C'})x^\alpha$$

ve $R_{Y_{C'}}(x)$ 'in katsayıları

$$c_j(Y_{C'}) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } j = 0 \text{ ise} \\ \sum_{\mu=0}^j h_\mu(H) \binom{\alpha - \mu}{j - \mu} \binom{\beta}{j - \mu} (j - \mu)! & \text{eğer } 1 \leq j \leq \alpha < \beta \text{ ise} \\ \sum_{\mu=0}^j h_\mu(H) \binom{\alpha - \mu}{j - \mu} \binom{\beta}{j - \mu} (j - \mu)! & \text{eğer } 1 \leq j < \beta \leq \alpha \text{ ise} \\ \sum_{\mu=j-\beta}^j h_\mu(H) \binom{\alpha - \mu}{j - \mu} \binom{\beta}{j - \mu} (j - \mu)! & \text{eğer } \beta \leq j \leq \alpha \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde ifade edilmiştir. Burada $h_0(H) = h_{\alpha-1}(H) = 1$ ve $\mu = 1, 2, \dots, \alpha - 2$ için

$$h_\mu(H) = \sum_{\varepsilon_\mu=1}^{\alpha-\mu} \varepsilon_\mu \left(\sum_{\varepsilon_{\mu-1}=1}^{\varepsilon_\mu} \varepsilon_{\mu-1} \dots \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{\varepsilon_3} \varepsilon_2 \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \right) \right) \dots \right)$$

formundadır.

5.2 Öneriler

Bu çalışmada almost simetrik Arf yarıgruplarının kale polinomları ile ilişkisi Young diyagramları aracılığıyla incelenmiş ve bu ilişkilerin cebirsel ifadeleri ortaya konulmuştur. Bu çalışma ile sayısal kümeler ile kale polinomları arasında yapılan araştırmanın daha da genişletilmesi gerektiği anlaşılmaktadır. Bu doğrultuda, gelecekteki çalışmalarda aşağıdaki araştırma alanları ele alınabilir:

- Farklı sayısal yarıgruplar için kale polinomlarının bulunup bulunamayacağı araştırılabilir.

- Kale polinomlarının katsayıları ile sayısal kümelerin değışmezleri arasında bir ilişki olup olmadığı incelenebilir.
- Kale polinomunun literatürdeki uygulama alanlarına sayısal kümelerin dahil edilip edilemeyeceğı değerlendirilebilir.

KAYNAKLAR

- Abhyankar, S. S. (1967). Local rings of high embedding dimension. *American Journal of Mathematics*, 89(4), 1073-1077. <https://doi.org/10.2307/2373418>
- Alayont, F., & Krzywonos, N. (2013). Rook polynomials in three and higher dimensions. *Involve, a Journal of Mathematics*, 6(1), 35-52. <https://doi.org/10.2140/involve.2013.6.35>
- Arf, C. (1948). Une interpretation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algébrique. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1), 256-287. <https://doi.org/10.1112/plms/s2-50.4.256>
- Barucci, V., Dobbs, D.E., & Fontana, M. (1997). Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analitically irreducible local domains. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 125(598). <https://doi.org/10.1090/memo/0598>
- Branco, M. B., Ojeda, I., & Rosales, J. C. (2019). Almost symmetric numerical semigroups with given Frobenius number and type. *Journal of Algebra and Its Applications*, 18(11), 1950217. <https://doi.org/10.1142/S0219498819502177>
- Bras-Amorós, M. (2003). *Improvements to evaluation codes and new characterizations of Arf semigroups*. [Conference presentation]. Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, 15th International Symposium, Toulouse-France, (204-215). https://doi.org/10.1007/3-540-44828-4_22
- Brauer, A. (1942). On a problem of partitions. *American Journal of Mathematics*, 64(1), 299-312. <https://doi.org/10.2307/2371684>
- Brauer, A., & Shockley, J. E. (1962). On a problem of Frobenius. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik*, 211(19), 215-220. <https://doi.org/10.1515/crll.1962.211.215>
- Brown, W. C., & Curtis, F. (1991). Numerical semigroups of maximal and almost maximal length. *Semigroup Forum*, 42(1), 219-235. <https://doi.org/10.1007/BF02573421>
- Brown, W. C., & Herzog, J. (1992). One dimensional local rings of maximal and almost maximal length. *Journal of Algebra*, 151(2), 332-347. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(92\)90118-6](https://doi.org/10.1016/0021-8693(92)90118-6)
- Campillo, A., Farrán, J. I., & Munuera, C. (2000). On the parameters of algebraic-geometry codes related to Arf semigroups. *IEEE Transactions on information theory*, 46(7), 2634-2638. <https://doi.org/10.1109/18.887872>
- Colton, S., & Kaplan, N. (2017). The realization problem for delta sets of numerical semigroups. *Journal of Commutative Algebra*, 9(3), 313-339. <https://doi.org/10.1216/JCA-2017-9-3-313>

- Constantin, H., Houston-Edwards, B., & Kaplan, N. (2017). *Numerical sets, core partitions, and integer points in polytopes* [Conference presentation]. *Combinatorial and Additive Number Theory II*, New York- USA, 99–127. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68032-3_7
- Çelik, A. (2023). A note on half of some MED semigroups of maximal or almost maximal length. *Turkish Journal of Mathematics*, 47(5), 1528-1538. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3445>
- Davison, J. L. (1994). On the linear Diophantine problem of Frobenius. *Journal of Number Theory*, 48(3), 353-363. <https://doi.org/10.1006/jnth.1994.1071>
- Delgado, F., & Nunez, A. (1987). Monomial rings and saturated rings. *Géométrie algébrique et applications, I (La Rábida, 1984)*, 23-34.
- Djawadi, M., & Hofmeister, G. (1996). Linear diophantine problems. *Archiv Der Mathematik*, 66(1), 19–29. <https://doi.org/10.1007/BF01323979>
- Fulton, W. (1997). *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*. Cambridge University Press.
- Guhl, M., Juarez, J., Ponomarenko, V., Rechkin, R., & Singhal, D. (2020). Complementary numerical sets. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.05646>
- Gümüşbaş, N., & Tutaş, N. (2020). A decomposition of Arf semigroups. *Filomat*, 34(2), 491-498. <https://doi.org/10.2298/FIL2002491G>
- Gümüşbaş, N., Tutaş, N., & Er, N. (2020). Almost symmetric Arf partitions. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(6), 2185-2198. <https://doi.org/10.3906/mat-2003-74>
- İlhan, S., & Karakaş, H.İ. (2017). Arf numerical semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 41(6), 1448-1457. <https://doi.org/10.3906/mat-1512-46>
- Johnson, S. M. (1960). A linear Diophantine equation. *Canadian Journal of Mathematics*, 12, 390–398.
- Kaplan, N. (2017). Counting numerical semigroups. *The American Mathematical Monthly*, 124(9), 862-875. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.124.9.862>
- Kaplan, N., & O'Neill, C. (2021). Numerical semigroups, polyhedra, and posets I: The group cone. *Combinatorial Theory*, 1(19), 1-23. <https://doi.org/10.5070/C61055385>
- Kaplansky, I., & Riordan, J. (1946). The problem of the rooks and its applications. *Duke Mathematical Journal*, 13(2), 259–268. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-46-01324-5>
- Karakaş, H. İ., & Tutaş, N. (2020). A decomposition of partitions and numerical sets. *Semigroup Forum*, 101, 704–715. <https://doi.org/10.1007/s00233-019-10080-7>

- Keith, W.J., & Nath, R. (2011). Partitions with prescribed hooksets. *Journal of Combinatorics and Number Theory*, 3 (1), 39–50.
- Lipman, J. (1971). Stable ideals and Arf rings. *American Journal of Mathematics*, 93(3), 649-685. <https://doi.org/10.2307/2373463>
- Loehr, N. A., & Remmel, J. B. (2009). Rook-by-rook rook theory: bijective proofs of rook and hit equivalences. *Advances in Applied Mathematics*, 42(4), 483-503. <https://doi.org/10.1016/j.aam.2008.09.003>
- Mitchell, A. (2004). A block decomposition algorithm for computing rook polynomials. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0407004>
- Nari, H. (2013). Symmetries on almost symmetric numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 86, 140-154. <https://doi.org/10.1007/s00233-012-9397-z>
- Núñez, A. (1989). Algebro-geometric properties of saturated rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 59(2), 201-214. [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(89\)90135-7](https://doi.org/10.1016/0022-4049(89)90135-7)
- Riordan, J. (1958). *An introduction to combinatorial analysis*. Wiley Press.
- Riordan, J. (1978). *An introduction to combinatorial analysis*. Princeton University Press.
- Rosales, J.C., & Branco, M.B. (2002). Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 171(2-3), 303–314. [https://doi.org/10.1016/S0022-4049\(01\)00128-1](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(01)00128-1)
- Rosales, J.C. & García-Sánchez, P.A. (2009). *Numerical semigroups*. Springer.
- Sally, J. D. (1977). On the associated graded ring of a local Cohen-Macaulay ring. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 17(1), 19-21. <https://doi.org/10.1215/kjm/1250522807>
- Selmer, E. S. (1977). On the linear diophantine problem of Frobenius. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (293\294), 1–17. <https://doi.org/10.1515/crll.1977.293-294.1>
- Süer, M., & Yeşil, M. (2021). Symmetric and pseudo-symmetric numerical semigroups via Young diagrams and their semigroups rings. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 58(6), 1367–1383. <https://doi.org/10.4134/JKMS.j210007>
- Süer, M., & Yeşil, M. (2024). Special subdiagrams of Young diagrams and numerical semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 48(2), 346-359. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3510>
- Sylvester, J.J. (1884). Mathematical questions with their solutions. *Educational Times*, 41, 1-21.

- Tutaş, N. (2019). On partitions and Arf semigroups. *Open Mathematics*, 17(1), 343-355. <https://doi.org/10.1515/math-2019-0025>
- Tutaş, N., Karakaş, H.İ., & Gümüşbaş, N. (2019). Young tableaux and Arf partitions. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1), 448-459. <https://doi.org/10.3906/mat-1807-181>
- Zariski, O. (1971). General theory of saturation and of saturated local rings I: Saturation of complete local domains of dimension one having arbitrary coefficient fields (of characteristic zero). *American Journal of Mathematics*, 93(3), 573-648. <https://doi.org/10.2307/2373462>
- Zariski, O. (1971). General theory of saturation and of saturated local rings II: saturated local rings of dimension 1. *American Journal of Mathematics*, 93(4), 872-964. <https://doi.org/10.2307/2373741>
- Zariski, O. (1975). General theory of saturation and of saturated local rings. III. Saturation in arbitrary dimension and, in particular, saturation of algebroid hypersurfaces. *American Journal of Mathematics*, 97(2), 415-502. <https://doi.org/10.2307/2373720>
- Zindle, B. (2007). *Rook polynomials for chessboards of two and three dimensions* [Master's dissertation, Rochester Institute of Technology]. RIT Digital Institutional Repository. <https://repository.rit.edu/theses>