

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARDAKİ MİNİMAL UZUNLUKLU YOLLARIN ÖZEL KÖŞE
DEĞERLERİ İLE ÜRETİLEN BAĞINTILAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba TUYLU

**ŞUBAT 2021
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARDAKİ MİNİMAL UZUNLUKLU YOLLARIN ÖZEL KÖŞE
DEĞERLERİ İLE ÜRETİLEN BAĞINTILAR**

Tuğba TUYLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31 / 12 / 2020

Tezin Savunma Tarihi : 03 / 02 / 2021

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER

Trabzon 2021

ÖNSÖZ

Bu çalışma, alt yörüngesel graflarındaki minimal uzunluklu yolların özel köşe değerleri kullanılarak yeni bağıntılar üretilmesi amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tez çalışması olarak yapılmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam sayın Doç. Dr. Ali Hikmet Değer'e en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki tüm değerli öğretim üyeleri ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, özel olarak değerli arkadaşım Ümmügülsün Akbaba'ya teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşlerime çok teşekkür ederim.

Tuğba TUYLU

Trabzon 2021

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Alt Yörüngesel Graflarındaki Minimal Uzunluklu Yolların Özel Köşe Değerleri İle Üretilen Bağıntılar” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER‘ in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 03/02/21

Tuğba TUYLU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ.....	IX
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Hiperbolik Geometri[16].....	2
1.3. Özel Sayı Dizileri[20]	7
1.4. Sürekli Kesirler[19]	10
1.5. Özel Bir Periyodik Sürekli Kesir.....	22
1.6. Modüler Grup	24
1.7. Graf Teorisi	27
1.8. Γ Modüler Grubunun $\mathbb{Q}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları[2]	30
1.9. Farey Grafi[2]	32
1.10. $G_{u,N}$ ve $F_{u,N}$ Grafları[2].....	34
1.11. $F_{u,N}$ Alt Yörüngesel Grafların Özel Köşeleri	36
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	41
2.1. $K(-1/-k)$ Sürekli Kesri İçin Uygulamalar.....	41
2.2. Minimal Uzunluklu Hiperbolik Yolların Poincare Diskinde Resimleri	52
3. İRDELEME.....	58
4. SONUÇLAR.....	59
5. ÖNERİLER	60
6. KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARDAKİ MİNİMAL UZUNLUKLU YOLLARIN ÖZEL KÖŞE DEĞERLERİ İLE ÜRETİLEN BAĞINTILAR

Tuğba TUYLU
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER
2021, 62 Sayfa

Bu tezde esas amaç alt yörüngesel grafların minimal uzunluklu yollarının köşelerinin değerleri ile bağlantılı olan kavramları kullanarak yeni bağlantılar üretmektir. Bu çalışma ile genel amaç, bu bağlantılar ile yeni sonuçlar elde etmek ve yeni uygulama alanları oluşturmaya çalışmaktır.

Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgilerden bahsedildi ve sırası ile hiperbolik geometri, özel sayı diziler, sürekli kesirler ve graf teorisi ile ilgili temel bilgiler verildi. Ayrıca, literatürdeki bazı önemli teorem ve sonuçlara yer verildi.

İkinci bölümde $F_{u,N}$ grafında minimal uzunluklu yollardaki köşe değerleri için sürekli kesirlerin yinelenme bağıntıları kullanılarak bazı sonuçlar elde edildi. Daha sonra $F_{1,2}$ grafında minimal uzunluklu yolların özel köşe değerleri kullanılarak Poincare diskine aktarımı sağlandı.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik geometri, Sürekli kesirler, Özel sayı dizileri, Graf teorisi, Alt yörüngesel graflar, Minimal uzunluklar, Poincare Disk Modeli

Master Thesis

SUMMARY

RELATIONS GENERATED BY SPECIAL VERTICES OF MINIMAL LENGTHS PATHS ON SUBORBITAL GRAPHS

Tuğba TUYLU

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali Hikmet DEĞER
2021, 62 Pages

The main goal in this thesis is to generate new connections using concepts related to the values of the vertices of the minimal length paths of the suborbital graphs. The overall goal with this study is to achieve new results with these connections and try to create new application areas.

In the first chapter, general informations about the subject were discussed and basic informations about the concepts of hyperbolic geometry, special number sequences, continued fractions and graph theory were given respectively. In addition, some important theorems and conclusions in the literature were included.

In the second chapter, Some results were obtained by using recurrence relations of continued fractions for vertex values in minimal length paths on the $\mathbf{F}_{u,N}$. Then, on graph $\mathbf{F}_{1,2}$, minimal length paths were transferred to the Poincare disk using special vertex values.

Key Words: Hyperbolic geometry, Continued fractions, Special number sequences, Graph theory, Suborbital graphs, Continued fractions, Minimal lengths, Poincare disk model

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Öklid'in beşinci postulatı.....	3
Şekil 2. $\mathbb{H}$ da bazı hiperbolik doğrular[16]	4
Şekil 3. $\mathbb{H}$ da bazı paralel doğrular[16].....	5
Şekil 4. $\mathbb{D}$ deki bazı hiperbolik doğrular[16]	7
Şekil 5. $G_{1,2}$ Grafi[2]	35
Şekil 6. $F_{1,2}$ grafi[2]	36
Şekil 7. $k = 2$ için K_n kapalı dairesel diskleri.....	46
Şekil 8. $k = 3$ için K_n kapalı dairesel diskleri.....	51
Şekil 9. $F_{1,2}$ grafında sağ yönlü minimal uzunluklu hiperbolik yol	54
Şekil 10. ℓ_{c_1} doğrusunun Poincare diskindeki resmi	54
Şekil 11. ℓ_{c_2} doğrusunun Poincare diskindeki resmi	55
Şekil 12. ℓ_{c_3} doğrusunun Poincare diskindeki resmi	56

SEMBOLLER DİZİNİ

Gx	: x in G yörüngesi
S_x	: x noktasının sabitleyeni
Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(n)$	: Modüler grubun $c \equiv 0 \pmod{n}$ olan alt grubu
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	: Üst yarı düzlemi
$\mathbb{D}$	: Poincare Diski
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
∞	: sonsuz
Γ_∞	: ∞ un Γ Modüler grubundaki sabitleyeni
$PSL(2, \mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$SL(2, \mathbb{Z})$	: Katsayıları tamsayı olan lineer matrislerin grubu
$[\alpha]$	: Alfa bloğu
F	: Farey grafi
F_m	: Farey dizisi
$O(\alpha, \beta)$	: (α, β) nın yörüngesi
$\gamma \rightarrow \delta$	: γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar
K	: Sürekli kesirler için toplam sembolü
$b_0 + \mathbf{K}(a_m/b_m)$	: Sürekli kesirin toplamsal sembol ile gösterimi
$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$	: Sürekli kesirin klasik gösterimi
f_n	: Sürekli kesir için klasik yaklaşım
F_n	: n . Fibonacci sayısı
$\approx$	: G-invaryant denklik bağıntısı
$[G, X]$	: Topolojik dönüşüm grubu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Graf teorisi hakkında araştırma yapıldığında, literatürde pek çok çalışma olduğu görülür. Bunlardan biri alt yörüngesel graflardır. İlk olarak Sims [1] çalışmasında graflar ile permütasyon grupları arasındaki ilişkiyi araştırdı. Bu çalışmada transitif gruplar ve graflar arasındaki bağlantılar ile bilinen bazı sonuçlara yeni bakış açısı kazandırıldı. Ayrıca yönlü ve yönsüz grafların yapısı analiz edildi ve primitif gruplar üzerinde uygulamaları yapıldı. Daha sonra [2] çalışmasında Jones, Singerman ve Wicks, Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerinde transitif hareketi için alt yörüngesel graflar tanımladılar. Bu tip bir transitif harekete benzer şekilde, modüler grubun uygun kongürans alt gruplarından $\Gamma_0(N)$ kullanılarak imprimitif hareket özelliği de [2] çalışmasında tanımlandı ve [1] çalışmasındaki alt yörüngesel graflar kavramları ile birlikte $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafları için önemli sonuçlar elde edildi. Ayrıca [2] çalışmasında $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarında kenar şartları, bağlantılılık ile devre ve orman şartları da incelendi. Bunlara ek olarak aynı çalışmada $\mathbf{G}_{u,N}$ grafinin orman olabilmesi için gerek ve yeter şartın hiçbir üçgen içermemesi, yani $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \pmod{N}$ olması gerektiği varsayıldı, bu varsayım ise [3] çalışmasında M. Akbaş tarafından ispatlandı. Yine [3] çalışmasında $\Gamma_0(N)$ grubunun özel bir elemanı kullanılarak bir sürekli kesir ortaya konuldu.

Değer (Beşenk ve Güler ile birlikte) [6] çalışmasında, $\Gamma_0(N)$ alt grubunun alt yörüngesel graflarını araştırarak minimal uzunluklu hiperbolik yollar ile ilgili önemli sonuçlar elde etti. Sürekli kesirler ile bağlantılı alt yörüngesel grafların bazı özelliklerini verdi ve bu özellikleri Pringsheim teoremi ile kullanarak bazı sonuçlar elde etti. Ayrıca [7-11] çalışmalarında yazarlar $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarında tanımlanan minimal uzunluklu yolların özel köşe değerleri için sürekli kesirler ile özel sayı dizileri arasındaki bağlantılar incelediler.

Bu tez çalışmasında, daha önceki çalışmalarda tanımlanan $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafların sürekli kesirler ve minimal uzunluklu yolların köşe değerleri ile ilgili bağlantıları kullanarak yeni sonuçlar elde etmek ve yeni uygulama alanları oluşturmaya çalışmak

amaçlandı. $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $(u, N) = 1$ için $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ kongrüans denklemini sağlayan farklı k değerleri için özel bir Möbiüs dönüşümü kullanılarak $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}: |w| \leq 1\}$ kompleks diskinin resimleri incelendi ve özel sayı dizilerinin terimleri ile bu resimler arasında bağlantı elde edilmeye çalışıldı. Ayrıca üst yarı düzlemde elde edilen minimal uzunluklu yoldaki köşe değerlerinin Poincare diskine özel bir Möbiüs dönüşümü ile aktarımı yapıldı.

Literatür araştırmasında bu çalışmaların matematiğin pek çok dalına değindiği görülmektedir. Bunlardan birkaçı hiperbolik geometri, sayılar teorisi, graf teorisidir. Dolayısıyla bu alanlar için temel bilgiler verilirse çalışılan konular daha anlaşılır olacaktır.

1.2. Hiperbolik Geometri[16]

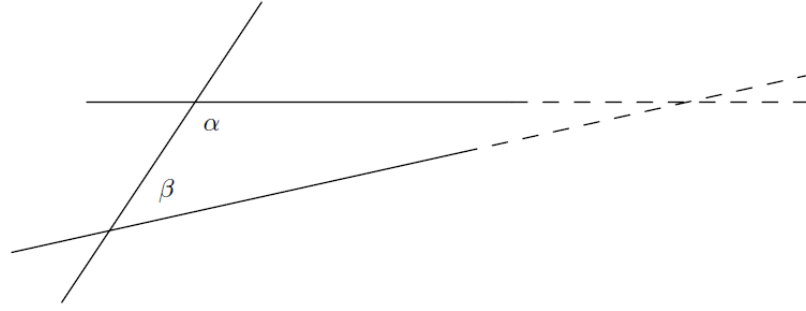
Geometrinin temelleri Öklid'in beş temel postulatına dayanmaktadır. Bu beş postulat şöyledir:

1. İki noktadan sadece ve sadece bir doğru geçer.
2. Herhangi bir doğru her iki yönde sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
3. Bir merkez noktası ile yarıçap verildiğinde bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5. İki doğruyu kesen bir doğru, aynı taraftaki iç açıları iki dik açıdan daha az yaparsa iki doğru sınırsız olarak uzatıldığında açıların iki dik açıdan daha az olduğu tarafta kesişir.

İlk dört postulata bakıldığında beşincisinin paralellik postulatına eşit olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu postulat şöyledir:

- Düzleme bir nokta ile bu noktayı içermeyen bir doğru verildiğinde bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel bir tek doğru geçer.



Şekil 1. Öklid'in beşinci postulatı

Uzun yıllardır matematikçiler ilk dört postulatı kullanarak beşinci postulatı oluşturmaya çalışmışlardır. İlave postulatlar ekleyerek beşinci postulata indirgenmeye çalışılmış, sonuç olarak bunların beşinci postulata denk olduğu görülmüştür. Paralellik postulatı ile birçok bilim adamı ilgilenmiştir. 19. yüzyılda bu konu üzerine çalışmalar yoğunlaşmış ve beşinci postulat farklı bakış açılarıyla incelenmeye çalışılmıştır. Bu çalışmalar neticesinde şöyle bir postulat elde edilmiştir.

- Bir doğru ile bu doğru üzerinde olmayan bir nokta verilirse, bu noktadan geçen ve bu doğruya paralel birçok doğru bulunabilir.

Bunun sonucunda geometri, sabit eğrilikli sonsuz üç farklı dalda varlık göstermiştir. Bunlardan birincisi Parabolik geometri olarak da isimlendirilen Öklid geometrisidir. Diğer iki geometriye de ortak olarak Öklid olmayan geometriler adı verilir. Öklid olmayan geometrilerden biri Eliptik geometri, diğeri ise Hiperbolik geometridir. Bunlar Öklid'in ilk dört postulatını olduğu gibi alırlar. Beşinci postulatı ise her bir geometri kendi paralellik kavramına göre değerlendirmeye alır. Bildiğimiz manada paralellik Öklid geometrisinde tanımlanmış olandır. Ayrıca paralellik Eliptik geometri için “bir doğruya bu doğru dışındaki bir noktadan hiçbir paralel doğru çizilemez” ile ve Hiperbolik geometri için “bir doğruya bu doğru dışındaki bir noktadan birden çok paralel doğru çizilebilir” şeklinde tanımlara sahiptir. Hiperbolik geometrinin paralellik kavramına getirdiği bu yeni bakış açısı, birçok kavrama da alışılmadık ifadeler eklemiştir. Örneğin; Hiperbolik geometride bir üçgenin iç açılarının toplamı 180° den küçüktür. Ayrıca Hiperbolik uzayda bir doğruya birden fazla paralel doğru çizilebildiği için daha fazla alt dallara sahiptir. Bu tezde çalışılan konu büyük oranda Hiperbolik geometri içermektedir. Bu nedenle bu kısmı yeterince anlaşılır kılmak gerekmektedir.

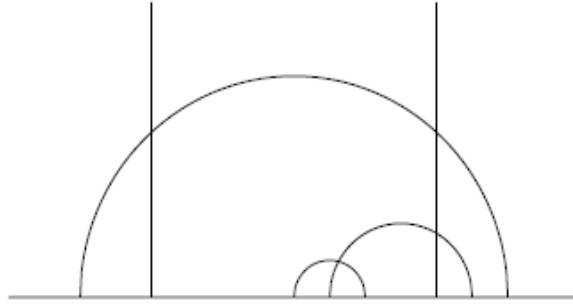
Hiperbolik geometri, paralellik versiyonu sebebiyle üzerinde çalışılan pek çok modele sahiptir. Bunlardan en kullanışlı olanlardan biri üst yarı düzlem modelidir. Bu kısımda öncelikle üst yarı düzlem modeli için bilgiler verilecek devamında Poincare disk modelinden bahsedilecektir.

Tanım 1.2.1. $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem modelinin uzayı

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \quad (1)$$

ile verilir.

Üst yarı düzlemde iki eğri arasında kalan açı teğet doğrular arasındaki açı olarak tanımlanır. Hiperbolik doğrular görünüş itibariyle iki farklı şekildedir. İlki $\mathbb{C}$ den $\mathbb{R}$ ye olan Öklid doğrularının $\mathbb{H}$ da kesişimleri; ikincisi ise $\mathbb{C}$ de merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde olan çemberlerin $\mathbb{H}$ ile kesişimleridir. Hiperbolik doğrular yarıçapı ∞ olan çemberler olarak düşünülürse bu doğrular reel eksene dik yarı çemberler olarak verilebilir.



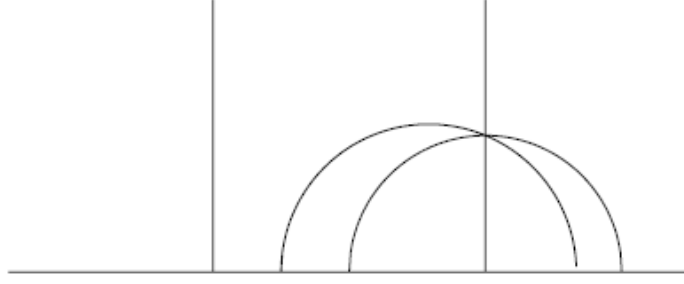
Şekil 2. $\mathbb{H}$ da bazı hiperbolik doğrular[16]

Önerme 1.2.2. [16] p ve q , $\mathbb{H}$ nın farklı iki noktası olmak üzere $\mathbb{H}$ da p ve q dan geçen sadece ve sadece bir tek doğru vardır.

Tanım 1.2.3. İki hiperbolik doğrunun kesişimi boş ise bu iki doğru için paraleldir, denir.

Öklid geometrisinden bilindiği üzere $a \in \mathbb{C}$ ve L bir Öklid doğrusu ise a dan geçen ve L ye paralel sadece ve sadece bir tek paralel K doğrusu vardır. Bu bağlamda Hiperbolik geometri ile Öklid geometrisi farklılık gösterir. Bunun için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 1.2.4. [16] l , $\mathbb{H}$ da bir hiperbolik doğru ve $p \notin l$ ile verilen p , $\mathbb{H}$ da bir nokta olsun. Bu durumda p den geçen ve l ye paralel sonsuz farklı hiperbolik doğru vardır.



Şekil 3. $\mathbb{H}$ da bazı paralel doğrular[16]

Tanım 1.2.5. $m: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ için $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$z \rightarrow m(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (2)$$

dönüşümü Möbiüs Dönüşümü olarak adlandırılır. Bütün Möbiüs dönüşümlerinin kümesi ise $Möb^+$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.6. $f: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu Möbiüs dönüşümleri altında invarianttır, denir : $\Leftrightarrow$ her $m \in Möb^+$ için $f(z_1, z_2, \dots, z_k) = f(m(z_1), m(z_2), \dots, m(z_n))$ dir.

Tanım 1.2.7. z_1, z_2, z_3, z_4 noktaları kompleks sayılar kümesinde farklı noktalar olsun. Bu durumda

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] := \frac{(z_1 - z_4) \cdot (z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}$$

ifadesine z_1, z_2, z_3 ve z_4 noktalarının çapraz oranı adı verilir.

Teorem 1.2.8. [16] $\mathbb{H}$ nın Möbiüs dönüşümlerinin her elemanı, $\mathbb{H}$ daki hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmeder.

Önerme 1.2.9. [16] $\mathbb{H}$ nın Möbiüs dönüşümlerinin her elemanı, $\mathbb{H}$ üzerinde transitiftir.

Tanım 1.2.10. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ türevlenebilir bir yol verildiğinde, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı sürekli kesir olmak üzere f nin

$$g(z)|dz|$$

yay uzunluğu elemanına göre uzunluğu

$$Ug(f) := \int_f g(z) |dz| = \int_a^b g(f(t)) \cdot |f'(t)| dt$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.2.11. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ parçalı türevlenebilir bir yol olsun. Bu durumda

$$U_{\mathbb{H}}(f) := \int_f \frac{1}{Im(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{Im(f(t))} |f'(t)| dt$$

reel değerine f nin hiperbolik uzunluğu adı verilir.

Bu kısma kadar $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem modelinde olan tanımlar ve özellikler verildi. Ancak üst yarı düzlem modeli dışında başka kullanışlı modeller de vardır. Bunlardan biri $\mathbb{D}$ Poincare disk modelidir.

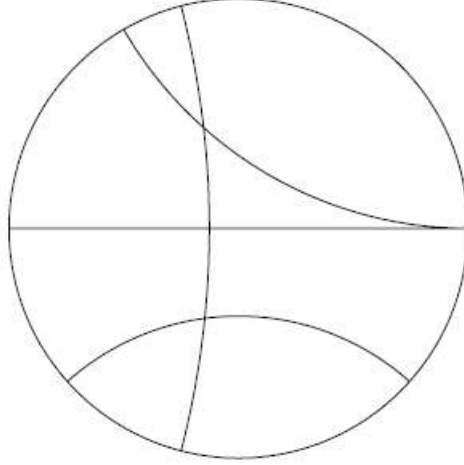
Tanım 1.2.12. (Poincare Disk Modeli) [16] Bir $\mathbb{D}$ Poincare disk modelinin temel uzayı $\mathbb{C}$ de

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad (3)$$

açık birim diskidir.

$\mathbb{H}$ ve $\mathbb{D}$ modellerinin her ikisi de $\bar{\mathbb{C}}$ Riemann küresinde diskler olduklarından, $\mathbb{D}$ den $\mathbb{H}$ ya Möbiüs dönüşümlerinin birçok m elemanı vardır. Burada hiperbolik geometriyi $\mathbb{H}$ dan $\mathbb{D}$ ye taşımak için Möbiüs dönüşümlerin $m: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ olacak şekildeki bir elemanı için $\mathbb{H}$ daki bir hiperbolik doğrunun m^{-1} altındaki görüntüsü $\mathbb{D}$ de bir hiperbolik doğru tanımlar.

$\mathbb{H}$ da her hiperbolik doğrunun reel eksene dik ve $\bar{\mathbb{C}}$ de bir çemberde bulunduğu, Möbiüs dönüşümlerinin her elemanının $\bar{\mathbb{C}}$ deki çemberleri yine $\bar{\mathbb{C}}$ deki çemberlere resmettiği ve Möbiüs dönüşümlerinin her elemanının $\bar{\mathbb{C}}$ de çemberler arasında açıyı koruduğu bilinir. Böylece $\mathbb{D}$ de her hiperbolik doğru, $\mathbb{D}$ nin sınırı olan birim çembere dik $\bar{\mathbb{C}}$ de bir çember ile $\mathbb{D}$ nin kesişimidir ve bu şekildeki her kesişim $\mathbb{D}$ de hiperbolik doğrudur. Burada $\mathbb{D}$ nin hiperbolik doğru tanımı, $\mathbb{D}$ den $\mathbb{H}$ ya alınan Möbiüs dönüşümlerinin elemanlarından bağımsızdır. Şekil 4 de $\mathbb{D}$ deki bazı hiperbolik doğrular resmedilmiştir.



Şekil 4. $\mathbb{D}$ deki bazı hiperbolik doğrular[16]

Şimdi Poincare disk modeli için yay uzunluğundan bahsedilecek olunursa, $\mathbb{H}$ dan $\mathbb{D}$ ye yay uzunluğu elemanını taşımak için şu ifadeler verilir: herhangi bir $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ parçalı türevlenebilir yolu için $\mu \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ bileşimi $\mathbb{H}$ da parçalı türevlenebilir bir yoldur. Burada $\mu \circ f$ nin hiperbolik uzunluğu, bu bileşimin $\mathbb{H}$ üzerindeki yay uzunluğunun hiperbolik elemanı $\frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$ nin integrali alınarak kolaylıkla hesaplanır. Böylelikle $\mathbb{D}$ de f nin hiperbolik uzunluğu

$$U_{\mathbb{D}}(f) = U_{\mathbb{H}}(\mu \circ f)$$

şeklinde verilir.

Teorem 1.2.13. [16] $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ parçalı türevlenebilir yolunun hiperbolik uzunluğu

$$U_{\mathbb{D}}(f) = \int_f \frac{2}{1 - |z|^2} dz$$

ile verilir.

1.3. Özel Sayı Dizileri[20]

Bu kısımda Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinden bahsedilecektir. Genel bir ifade ile Fibonacci dizisi, $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ şeklinde devam eden, her terimi önceki iki teriminin toplamı ile oluşan dizidir. Lucas dizisi ise $1, 3, 4, 7, 11, \dots$ şeklinde devam eden, Fibonacci dizisi ile aynı yineleme bağıntısına sahip ancak farklı başlangıç koşullarına sahiptir. Bu

diziler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Devamında ise bu dizilerin bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 1.3.1. $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \quad (4)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan F_n sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi ve bu dizinin elemanlarına da Fibonacci sayıları denir.

Fibonacci yineleme bağıntısını kullanarak Fibonacci sayılarının kısmi toplamaları;

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

dir. Bu toplamdan hareketle, tek indisli Fibonacci sayılarının kısmi toplamı;

$$\sum_{i=0}^n F_{2i-1} = F_{2n}$$

ve benzer şekilde çift indisli Fibonacci sayılarının kısmi toplamı;

$$\sum_{i=0}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

şeklinde dir. Ayrıca Fibonacci sayılarının kareleri toplamını veren ifade de

$$\sum_{i=0}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

dir.

Teorem 1.3.2. (Cassini Formülü) $n \geq 1$ olmak üzere $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ dir.

Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ dir. Bu denklemin karakteristik kökleri $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ ve $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ şeklindedir.

Bu durumda n . Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

dir. Bu ifadeye özel olarak Binet formülü denir. Buradan hareketle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

olduğu görülür. Buradaki α altın oran olarak isimlendirilir. $n \geq 1$ olmak üzere Fibonacci sayıları için şu formüller de verilebilir:

- i. $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$
- ii. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$

Ayrıca Cassini formülünün daha genel hali olan şu özdeşlik de kullanışlı bir özdeşliktir:

$$F_m F_{n+k} - F_k F_{m+n} = (-1)^k F_{m-k} F_n \quad (5)$$

Burada $n = 1$ ve $m = k + 1$ alınarak Cassini formülü elde edilir.

Tanım 1.3.3. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2 \quad (6)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan L_n sayı dizisine Lucas sayı dizisi ve bu dizinin elemanlarına da Lucas sayıları denir.

Lucas sayıları ile üretilen bazı toplam formülleri şöyledir:

$$\text{i. } \sum_{i=0}^n L_i = L_{n+2} - 3$$

$$\text{ii. } \sum_{i=0}^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2$$

$$\text{iii. } \sum_{i=0}^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1$$

$$\text{iv. } L_{n-1} L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

$$\text{v. } \sum_{i=0}^n L_{2i}^2 = L_n L_{n+1} - 2$$

n . Lucas sayısı olan L_n , Binet formülünce

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde ifade edilir ve burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha$$

dir. Fibonacci ile Lucas sayıları ile ilgili birkaç özellik aşağıda verilmiştir:

- i. $F_{2n} = F_n L_n$
- ii. $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$
- iii. $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$
- iv. $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
- v. $5F_n^2 + 4(-1)^n = L_n^2$

1.4. Sürekli Kesirler[19]

Bir sürekli kesir, $a_n \neq 0$ olmak üzere $a_1, a_2, \dots$ ve $b_0, b_1, b_2, \dots$ kompleks sayılar ve $\{f_n\}$ genişletilmiş kompleks düzlemde bir dizi olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlanan bir $\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle, \{f_n\}$ sıralı ikilisidir:

$$S_0(w) = s_0(w); \quad S_n(w) = S_{n-1}(S_n(w)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

ve

$$s_0(w) = b_0 + w; \quad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

olmak üzere

$$f_n = S_n(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

dir. Sürekli kesir algoritması, her bir $\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle$ sıralı ikilisini (9) ile tanımlanan $\{f_n\}$ dizisine karşılık getiren, Almanca Kettenbruch kelimesinden gelen, **K** fonksiyonudur. Burada a_n sayısına sürekli kesrin n . kısmi payı, b_n sayısına sürekli kesrin n . kısmi paydası ve genel olarak da bu sayılara sürekli kesrin elemanları denir. f_n ise n . yaklaşım olarak adlandırılır. Eğer $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ sonsuz diziler ise $\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle, \{f_n\}$ sonsuz (sonlu olmayan) sürekli kesir olarak adlandırılır. Eğer $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ sınırlı sayıda terimlere sahip ise bu sürekli kesir sonlu sürekli kesirdir. Bundan sonra aksi söylenmedikçe bir sürekli kesir sonsuz olarak alınacaktır.

Bir sürekli kesir için n . yaklaşım

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots + \frac{a_n}{b_n}}}}$$

ile verilir. Bu durumda bir $\langle\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle, \{f_n\}\rangle$ sürekli kesri sıklıkla

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$$

veya

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots,$$

$$b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{\infty} (a_n/b_n) \text{ ya da kısaca } b_0 + \mathbf{K} (a_n/b_n) \quad (10)$$

sembolleri ile gösterilir. Burada (10) gösterimi kısalık açısından daha avantajlı kullanıma sahiptir. Benzer olarak $f_n = S_n(0)$ n . yaklaşımı

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad (11)$$

veya

$$f_n = b_0 + \mathbf{K}_{j=1}^n (a_j/b_j)$$

sembolleri ile ifade edilebilir. Ayrıca

$$b_0 + \frac{(-a_1)}{b_1} + \frac{(-a_2)}{b_2} + \frac{(-a_3)}{b_3} + \dots$$

sürekli kesri

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} - \dots$$

şekline dönüşür.

Bir sürekli kesrin $\{f_n\}$ yaklaşımlarının dizisi genişletilmiş kompleks düzlemde bir f noktasına yakınsıyor ise bu sürekli kesire yakınsaktır, denir. Yakınsak olduğunda sürekli kesrin değeri $\lim f_n = f$ şeklindedir.

Her $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesrine karşılık gelen

$$A_{-1} := 1, A_0 := b_0, B_{-1} := 0, B_0 := 1 \quad (12)$$

başlangıç koşulları olmak üzere

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \quad (13)$$

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \quad (14)$$

ikinci dereceden lineer fark denklemleri(yineleme bağıntıları) ile tanımlanan $\{A_n\}, \{B_n\}$ kompleks sayı dizileri vardır. Burada A_n 'ye $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesrinin n . payı ve B_n 'ye de aynı sürekli kesrin n . paydası denir.

Teorem 1.4.1. [19] Bir $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesrinin n . payı A_n , n . paydası B_n ve n . yaklaşımı f_n olmak üzere ve $\{S_n\}$, (7) ile tanımlanan lineer kesirli dönüşümlerinin bir dizisi ise

$$S_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$f_n = S_n(0) = \frac{A_n}{B_n}, \quad f_{n-1} = S_n(\infty) = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

dir. Ayrıca (13) ve (14) yineleme bağıntılarından determinant formülü

$$\Delta_n := A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1} = (-1)^{n-1} \prod_{t=1}^n (a_t) \quad (17)$$

şeklindedir. (15) ve (16) ile birlikte A_n ve B_n tek bir şekilde tanımlı değildir ancak (13) ve (14) yineleme bağıntıları ile tek bir şekilde tanımlanabilirler. Bu aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 1.4.2. [19] $\{A_n\}, \{B_n\}$ kompleks sayı dizileri (12) başlangıç koşulları ve

$$A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

olarak verilsin. Bu durumda her n için A_n n . pay ve B_n n . payda ile tanımlanan $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesri tek olarak vardır. Dahası,

$$b_0 := A_0, \quad b_1 := B_1, \quad a_1 := A_1 - A_0B_1 \quad (19)$$

$$a_n := -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad b_n := \frac{A_{n-2}B_n - B_{n-2}A_n}{\Delta_{n-1}}, \quad n \geq 2 \quad (20)$$

dir.

$\{t_n\}$, tekil olmayan lineer kesirli dönüşümlerinin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$t_n(w) = \frac{a_n + c_n w}{b_n + d_n w}, \quad a_n d_n - b_n c_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

dir. Bir lineer kesirli dönüşüm Möbiüs dönüşümü olarak da adlandırılır. Eğer

$$T_0(w) = t_0(w); \quad T_n(w) = T_{n-1}(t_n(w)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

ise $\{t_n\}$ dizisinin, $\{T_n\}$ dizisini ürettiği söylenir.

(21) ile verilen lineer kesirli dönüşümlerin bir dizisine karşılık gelen ve ikinci dereceden lineer fark denklemleri sistemi tarafından tanımlanan $\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\}, \{D_n\}$ kompleks sayı dizileri aşağıdaki gibidir:

$$A_0 = a_0, \quad B_0 = b_0, \quad C_0 = c_0, \quad D_0 = d_0 \quad (23)$$

$$A_n = a_n C_{n-1} + b_n A_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

$$B_n = a_n D_{n-1} + b_n B_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

$$C_n = c_n C_{n-1} + d_n A_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

$$D_n = c_n D_{n-1} + d_n B_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

Teorem 1.4.3. [19] $\{t_n\}$, (21) ile verilen lineer kesirli dönüşümlerinin bir dizisi ve $\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\}, \{D_n\}$ dizileri, (24), (25), (26) ve (27) fark denklemleri ile tanımlanan

kompleks sayı dizileri olsun. Eğer $\{T_n\}, \{t_n\}$ ile üretilen lineer kesirli dönüşümlerin bir dizisi ise

$$T_n(w) = \frac{A_n + C_n w}{B_n + D_n w}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ve

$$A_n D_n - B_n C_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dir.

Bir $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesri tanımında, $n.$ yaklaşımı $f_n = S_n(0)$ ile tanımlanmıştır; burada $\{S_n\}$, her n için $a_n \neq 0$ ile birlikte

$$s_0(w) = b_0 + w; \quad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

dizisi tarafından üretilen lineer kesirli dönüşümlerin bir dizisidir. Böylece (28) formundaki lineer kesirli dönüşümlerinin bir dizisi bir *sürekli kesir üreten* dizi olarak adlandırılır. Sürekli kesir üreten diziler tarafından üretilen dizilerin bir karakterizasyonu aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.4.4. [19] Lineer kesirli dönüşümlerin bir $\{T_n\}$ dizisi sürekli kesir üreten dizi tarafından üretilmiştir $\Leftrightarrow$

$$T_0(w) = A_0 + w; \quad (29)$$

$$T_n(\infty) = T_{n-1}(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

dir.

Tanım 1.4.5. (Sürekli Kesirlerin Matris Bağlantısı) $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesrinin $n.$ payı A_n ve $n.$ paydası B_n olmak üzere

$$s_n(w) := \frac{a_n}{b_n + w}, \quad x_n := \begin{pmatrix} 0 & a_n \\ 1 & b_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

verilsin. Bu durumda (22) denklemindeki işlem ve (15) ile verilen $S_n(w)$ lineer kesirli dönüşümü

$$X_n := x_1 x_2 \dots x_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{pmatrix}, n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

matrisi şeklinde yazılır. Bu durumda 2×2 tipindeki bu matrislerin çarpımı $\{A_n\}, \{B_n\}$ ile (9) ve (11) ile verilen f_n n . yaklaşımının $\{f_n\}$ dizilerinin oluşumunda kullanılabilir.

Tanım 1.4.6. Eğer bir $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesrinin elemanları, k periyot olmak üzere

$$a_{rk+m} = a_m, \quad b_{rk+m} = b_m, \quad m = 1, 2, \dots, k, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

şartını sağlıyor ise bu sürekli kesir periyodik sürekli kesir olarak adlandırılır. Bir periyodik sürekli kesrin yakınsaması aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 1.4.7. [19] $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ periyodu k olan periyodik bir sürekli kesir ve

$$s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$S_1(w) = s_1(w); \quad S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$P(w) = S_k(w)$$

olsun. w_1 ve w_2 (farklı olmak zorunda değil) P [$P(w) \neq w$] lineer kesirli dönüşümünün sabit noktaları ve B_n , $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesrinin n . paydasını temsil etsin. Bu durumda aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlanırsa $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesri w_1 sabit noktasına yakınsar:

$$w_1 = w_2;$$

$$\text{ya da } w_1 \neq w_2, \quad \left| \frac{B_{k-1}w_2 + B_k}{B_{k-1}w_1 + B_k} \right| < 1;$$

$$\text{ve } S_m(0) \neq w_2, \quad m = 1, 2, \dots, k.$$

Diğer tüm durumlarda sürekli kesir ıraksaktır.

Bu kısımda sürekli kesirlerin $b_0 = 0$ olmak üzere $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ formu kullanılacaktır. Burada yakınsama ile ilgilenileceği için başlangıç elemanı $b_0 = 0$ olarak almanın genellikle hiçbir şekilde uzak olmadığı açıktır. Böylece (7), (8) ve (9) ifadelerine uygun olarak, $s_0(w) = w$ olur ve

$$s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

ve

$$S_1(w) = s_1(w); \quad S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \quad n = 2, 3, \dots \quad (34)$$

dir. Dolayısıyla

$$S_n(w) = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n(w), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

dir. Bölge terimi, genel olarak, sırasıyla, $\hat{\mathbb{C}}$ veya $\mathbb{C}x\mathbb{C}$ kümelerinin herhangi bir alt kümesini ifade etmek için kullanılır. Daha önemli uygulamalar için kümeler genellikle tam anlamıyla bölgelerdir (Örneğin açık bağlantılı kümelerin pozitif kısmı, tamamı ya da sınırlarının hiçbiri). Bazı temel teoremler ancak daha genel kümeler için geçerlidir.

Sürekli kesirler için yakınsama kriterlerinin çoğu yakınsama bölgesi (convergence-region) tipidir. Bununla birlikte eleman ve değer bölgeleri değerlendirilmelidir. Daha özel olarak, $\emptyset \neq V_n \subseteq \hat{\mathbb{C}}, n = 0, 1, 2, \dots$ ve $\emptyset \neq \Omega_n \subseteq \mathbb{C}x\mathbb{C}, n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$\langle a_n, b_n \rangle \in \Omega_n \text{ için } a_n/b_n \in V_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

$$\langle a_n, b_n \rangle \in \Omega_n \text{ için } s_n(V_n) \subseteq V_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (37)$$

koşullarının sağlandığı $\{V_n\}$ ve $\{\Omega_n\}$ dizilerinden bahsedilecektir. Dikkat edilmelidir ki

$$0 \in V_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile birlikte (36), (37) ifadelerini (eşdeğer olarak değil) belirtir.

(36) ve (37) ile verilen $\{\Omega_n\}$ dizisine eleman bölgelerinin bir dizisi ve $\{V_n\}$ dizisine de değer bölgelerinin bir dizisi denir. (36) ve (37) ifadelerinde, $\{V_n\}$ dizisinin $\{\Omega_n\}$ dizisine karşılık gelen veya $\{\Omega_n\}$ tarafından indüklenen bir değer bölgesi dizisi olduğu veya $\{\Omega_n\}$ dizisinin $\{V_n\}$ değer bölgeleri dizisine ait bir eleman bölgeleri dizisi olduğu gösterilir. Eğer değer bölgelerinin bir $\{V_n\}$ dizisi, eleman bölgelerinin bir $\{\Omega_n\}$ dizisine karşılık gelirse ve $\{\Omega_n\}$ dizisine karşılık gelen değer bölgelerinin her $\{V_n'\}$ dizisi için $V_n \subseteq V_n', n = 0, 1, 2, \dots$ oluyorsa, o zaman $\{V_n\}$ dizisi eleman bölgelerinin $\{\Omega_n\}$ dizisine karşılık gelen değer bölgelerinin en iyi dizisi olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teoremden eleman bölgelerinin verilen herhangi bir dizisi için değer bölgelerinin bir en iyi dizisinin var ve tek olduğu verildi.

Teorem 1.4.9. [19] $\{\Omega_n\}$ eleman bölgelerinin bir dizisi ve $\{V_n\}$ de onun değer bölgelerine karşılık gelen bir dizisi olsun. O halde

i. $k = 1, 2, 3, \dots$ ve her m için $1 \leq k \leq m$ olacak şekilde

$$s_k \circ s_{k+1} \circ \dots \circ s_m(0) \in V_{k-1} \quad (38)$$

ve $k \leq v \leq m$ için $\langle a_v, b_v \rangle \in \Omega_v$ sağlanır.

ii. Eğer, $k = 1, 2, 3, \dots$, biri için

$$W_{k-1} = \{s_k \circ s_{k+1} \circ \dots \circ s_m(0) : \langle a_v, b_v \rangle \in \Omega_v, \quad 1 \leq k \leq v \leq m\} \quad (39)$$

ifadesi tanımlı ise o halde $\{W_n\}, \{\Omega_n\}$ ya karşılık gelen değer bölgelerinin bir dizisidir. (39) ifadesinde m değerinin tüm $m \geq k$ üzerinde değişmesine izin verilir.

iii. $n = 0, 1, 2, \dots$ için $W_n \subseteq V_n$ dir ve dolayısıyla $\{W_n\}, \{\Omega_n\}$ ya karşılık gelen değer bölgelerinin tek olarak belirlenmiş en iyi dizisidir.

Eğer $\{\Omega_n\}, \mathbb{C}x\mathbb{C}$ de boş olmayan bölgelerin herhangi bir dizisi ise, bu durumda (39) ile tanımlanan W_n bölgeleri her zaman mevcuttur. Bu noktada $\wp$ ailesini tanıtmak uygundur ki bu $\wp$;

$$\wp = \{V : V \subseteq \hat{\mathbb{C}} \text{ öyle ki } V \text{ kapalıdır ve } V \text{ nin sınırı çember veya düz çizgidir}\}$$

dir. Bu durumda $\wp$, tüm kapalı dairesel disklerin, yarı düzlemlerin ve dairesel disklerin tümleyenlerinin ailesidir.

Teorem 1.4.9. [19] $\{\Omega_n\}$ eleman bölgelerinin bir dizisi ve $\{V_n\}$ de karşılık gelen değer bölgelerinin bir dizisi ve

$$K_n = S_n(V_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

tanımlansın. O halde:

$$i. \quad K_{n+1} \subseteq K_n \subseteq V_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Eğer, bir de her $n \geq n_0$ için $V_n \in \wp$ ve K_{n_0} kapalı dairesel bir disk ise, bu durumda:

ii. $n \geq n_0$ için her K_n kapalı dairesel disklerdir. Eğer K_n nin yarıçapı R_n , merkezi C_n ise, o halde $\lim R_n = R$ ve $\lim C_n = C$ limitleri vardır.

iii. Eğer $R > 0$ ise yarıçapı R , merkezi C olan K kapalı dairesel disk sınır çemberi olarak adlandırılır ve

$$K = \bigcap \{K_n : n \geq n_0\}.$$

iv. Eğer $R = 0$ ise C sınır noktası olarak adlandırılır ve

$$[C] = \bigcap \{K_n : n \geq n_0\}.$$

İspat: Öncelikle bu disklerin iç içe oldukları gösterilsin. $n \geq 1$ için (33), (34), (35) ve (36), (37) ifadeleri kullanılarak

$$K_{n+1} = S_{n+1}(V_{n+1}) = S_n(s_{n+1}(V_{n+1})) \subseteq S_n(V_n) = K_n \subseteq V_0 \quad (42)$$

olduğu görülür. Yani bu diskler iç içe disklerdir.

V_n nin S_n lineer kesirli dönüşümleri altındaki görüntüsü K_n ve $V_n \in \wp$ olduğundan $K_n \in \wp$ dir. Her $n \geq n_0$ için $K_n \subseteq K_{n_0}$ ve dairesel bir diskin alt kümeleri olan $\wp$ nin tek elemanları dairesel diskler olduğundan $n \geq n_0$ için tüm K_n resimleri kapalı dairesel disklerdir. (41) ifadesinden

$$|C_{n+1} - C_n| + R_{n+1} \leq R_n, \quad n \geq n_0 \quad (43)$$

dır. Buradan $\{R_n\}$ dizisinin pozitif sayıların monoton azalan bir dizisi olduğu açıktır ve böylece $\lim R_n = R$ vardır ve pozitif ya da sıfırdır. (43) ün art arda uygulanmasından

$$|C_{n+m} - C_n| \leq R_n - R_{n+m}$$

sağlanır. $R_{n+m} \geq R$ olduğundan

$$|C_{n+m} - C_n| \leq R_n - R \quad (44)$$

dır, yani $\{C_n\}$, $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir ve böylece $\mathbb{C}$ de bir sınıra yakınsar. Şimdi $P \in K$ olsun. Bu durumda $|P - C| \leq R$ ve böylece $n \geq n_0$ için

$$|P - C_n| \leq |P - C| + |C - C_n| \leq R + R_n - R = R_n \quad (45)$$

dir. Burada $|C - C_n| \leq R_n - R$ eşitsizliği, (44) eşitsizliğinde $m \rightarrow \infty$ alındığında sağlanır. (45) eşitsizliğinden K nın (ya da $R = 0$ için $[C]$ nin) kesişim özelliğinden iii. ve iv. doğrulanır.

Burada Teorem 1.4.9. da $R > 0$ ve $R = 0$ durumlarına bağlı olarak, $\{K_n\}$ dizisi için sınır çember veya sınır noktası durumlarından söz edilebilir.

Verilen eleman bölgelerinin bir $\{\Omega_n\}$ dizisi için, 1.4.8. Teoremdeki gibi tanımlanan en iyi karşılık gelen $\{W_n\}$ değer bölgelerinin belirlenmesi doğal görünecektir. Ancak bu işlemin gerçekleştirilmesi genel olarak son derece zordur. Bunun yerine verilen bir $\{V_n\}$ dizisi için $\{\Omega_n\}$ yi hesaplamamanın daha uygun olduğu kanıtlanmıştır. Bunun için burada iki yaklaşımdan bahsedildi[19].

Teorem 1.4.10. [19] Dairesel disklerin bir dizisi $\{V_n\}$

$$V_n = \{w : |w - \Gamma_n| \leq \rho_n\}, \quad |\Gamma_n| < \rho_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

ve

$$\Omega_n = \{ \langle a_n, b_n \rangle : |a_n(\bar{b}_n + \bar{\Gamma}_n) - \Gamma_{n-1}(|b_n + \Gamma_n|^2 - \rho_n^2)| + |a_n|\rho_n \leq \rho_{n-1}(|b_n + \Gamma_n|^2 - \rho_n^2) \}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

olsun. O halde $\{V_n\}$, eleman bölgelerinin $\{\Omega_n\}$ dizisine karşılık gelen değer bölgelerinin bir dizisidir.

İspat. Öncelikle Ω_n bölgesinin boş olmadığı gözlemlensin. Bu (47) ile verilen ifadede $a_n = 0$ alınarak (46) ile verilen ikinci eşitsizlikten doğrulanır. (47) eşitsizliğinin bir $\langle a_n, b_n \rangle$ kompleks sayı çifti ile sağlanması için $|b_n + \Gamma_n| \geq \rho_n$ olması; eğer $a_n \neq 0$ ise

$$|b_n + \Gamma_n| > \rho_n \quad (48)$$

olması gereklidir. $(b_n + V_n)$ bölgesi, $(b_n + \Gamma_n)$ merkezi ve ρ_n yarıçapı olacak şekilde bir kapalı dairesel disk. (48) şartı $0 \notin (b_n + V_n)$ olmasını garanti eder; böylece $1/(b_n + V_n)$ bölgesinin kendisi de dairesel bir disk. $\gamma_n = \arg(b_n + \Gamma_n)$ olsun, ve

$$c_n = b_n + \Gamma_n - \rho_n e^{i\gamma_n}, \quad d_n = b_n + \Gamma_n + \rho_n e^{i\gamma_n}$$

$\partial(b_n + V_n)$ çemberinin çapının zıt taraflarında bulunan iki nokta olsun. O halde $1/c_n$ ve $1/d_n$, $\partial(1/(b_n + V_n))$ çemberinin bir çapının zıt taraftarı üzerindedirler. Bu $\arg w = \gamma_n$ yarı doğrusunun $\partial(b_n + V_n)$ çemberine dik olduğu gözlemlenebilir, böylece $\arg w = -\gamma_n$ yarı doğrusu $\partial(1/(b_n + V_n))$ çemberine dik olmalıdır. $\partial(1/(b_n + V_n))$ çemberinin merkezi k_n ve yarıçapı h_n olmak üzere

$$h_n = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{c_n} - \frac{1}{d_n} \right|, \quad k_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_n} + \frac{1}{d_n} \right)$$

elde edilir. $a_n \neq 0$ olmak üzere $a_n/(b_n + V_n)$ dairesel disk için p_n yarıçapı ve q_n merkezi

$$p_n = |a_n| h_n, \quad q_n = a_n k_n$$

ile verilir. c_n ve d_n değerleri yerlerine yazılarak,

$$p_n = \frac{|a_n| \rho_n}{|b_n + \Gamma_n|^2 - \rho_n^2}, \quad q_n = \frac{a_n (\bar{b}_n + \bar{\Gamma}_n)}{|b_n + \Gamma_n|^2 - \rho_n^2}$$

elde edilir. $a_n/(b_n + V_n) = s_n(V_n)$ dairesel diskinin V_{n-1} bölgesinde yer alması şartı, (47) ifadesindeki Ω_n için tanımlayıcı eşitsizliğe karşılık geldiği kolayca görülen

$$|\Gamma_{n-1} - q_n| + p_n \leq \rho_{n-1}$$

olur. Bu teorem, aşağıdaki teoremden verilen sürekli kesrin yakınsamasını sağlar.

Teorem 1.4.11. [19] Eğer bir $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesri, $|c| < r$ olacak şekilde

$$|a_n(\bar{b}_n + \bar{c}) - c(|b_n + c|^2 - r^2)| + |a_n|r \leq r(|b_n + c|^2 - r^2), \quad (49)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

ise bu sürekli kesir sonlu bir değere yakınsar. Bu sürekli kesrin yakınsadığı değer f ise $|f - c| \leq r$ ifadesi sağlanır.

Şimdi bir $v(w)$ idempotent lineer kesirli dönüşümün varlığına bağlı iki sonuçtan bahsedilecektir öyle ki

$$s_n(w) = v \circ s_n^{-1} \circ v(w), \quad \forall \langle a_n, b_n \rangle \in \Omega \text{ için} \quad (50)$$

burada $s_n(w) = a_n/(b_n + w)$ ve v, Ω_n nin ayrık elemanlarından bağımsızdır. Bir v dönüşümü, $(v \circ v)(w) = v(v(w)) = w$ şartını sağlıyor ise bu v dönüşümü idempotent olarak adlandırılır. Sadece üç tip idempotent lineer kesirli dönüşüm vardır. Bunlar

$$v(w) = w, \quad v(w) = \frac{\beta}{w}, \quad v(w) = \frac{w + \beta}{\gamma w - 1} \quad (51)$$

şeklindedir. Burada bahsi geçen durumlar Thron [22] ile ortaya çıktı ve sonrasında Jones ve Thron [23] de geliştirildi.

Teorem 1.4.12. [19]

$$S_n(w) = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (52)$$

olsun ve aynı v ler ile tüm $s_m(w) = a_m/(b_m + w)$, $1 \leq m \leq n$ için (50) sağlansın. O halde

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = -S_n^{-1}(w) = -v \circ s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1 \circ v(\infty)$$

dır.

Teorem 1.4.13. [19] $\{\Omega_n\}$ eleman bölgelerine karşılık gelen ve

$$V_{2n+1} = V_1, \quad V_{2n} = V_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ile verilen $\{V_n\}$ değer bölgelerinin bir en iyi dizisi olsun. Ayrıca her Ω_n ve aynı $v(w)$ için (60) ifadesinin sağlandığı farz edilsin. O halde

$$v(0) \in V_1 \cup V_2 \quad \text{ya da} \quad V_1 \cap v(V_2) = \emptyset \quad (53)$$

dir.

Teorem 1.4.14. (Pringsheim Teoremi) [19] Bir $K(a_n/b_n)$ sürekli kesri eğer

$$|b_n| \geq 1 + |a_n|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (54)$$

ise bu sürekli kesir sonlu bir değere yakınsar. Eğer f_n , bu sürekli kesrin n . yaklaşımı ise bu durumda

$$|f_n| < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

dir. Burada her n için $|b_n| \geq 1 + |a_n|$ ise $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesri bir Pringsheim kesri olarak isimlendirilir.

(54) şartından, $U = \{w: |w| \leq 1\}$ olmak üzere $s_n(U) \subset U$ olduğundan 1.4.9. Teoremden $K_n = S_n(U)$ diskleri iç içedir ve burada bir K sınır çemberi durumu ya da bir C sınır noktası durumu vardır.

Teorem 1.4.15. [19] $D, |c| < r$ olmak üzere $D = \{w: |w - c| \leq r\}$ ile tanımlanan dairesel bölge olsun. $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ sürekli kesri $s_n(w) = a_n/(b_n + w)$ olmak üzere

$$s_n(D) \subseteq D, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olsun. O halde bu sürekli kesir bir $f \in D$ değerine yakınsar.

Lemma 1.4.16. [19] $\{t_n(w)\}, U = \{w: |w| \leq 1\}$ olmak üzere

$$t_n(U) \subseteq U, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (56)$$

lineer kesirli dönüşümlerinin bir dizisi ve $|k| < 1$ olacak şekilde herhangi bir k kompleks sayısı için

$$t_n(\infty) = k, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (57)$$

olsun. $\{T_n\}$ de $\{t_n\}$ ile üretilen lineer kesirli dönüşümlerinin dizisini gösterebilirsin, yani $T_n = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n$ olsun. O halde $\{T_n(w)\}, U$ nun içindeki tüm w ler için sonlu bir değere yakınsar.

1.5. Özel Bir Periyodik Sürekli Kesir

Bu kısımda, özel olarak (13) ve (14) yineleme bağıntılarında $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = -1$ ve $b_n = -k$ alınarak elde edilen $\mathbf{K}(-1/-k)$ sürekli kesrinden bahsedilecektir. $\mathbf{K}(-1/-k)$ sürekli kesrinin Pringsheim kesri olması için $|k| \geq 2$ olmalıdır. [6] da, $\mathbf{K}(-1/-k)$ sürekli kesrinin Pringsheim kesri olduğu kullanılarak yakınsaklığı hakkında aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 1.5.1. [6] $\mathbf{K}(-1/-k)$ sürekli kesri $|k| \geq 2$ için $\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$ değerine yakınsar.

$\mathbf{K}(-1/-k)$ sürekli kesrinin $\{s_n\}$ lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi

$$s_n(w) = \frac{-1}{-k + w}$$

dir. Sürekli kesirlerin $A_{-1} := 1, A_0 := b_0, B_{-1} := 0, B_0 := 1$ başlangıç koşulları olmak üzere (13) ile (14) yineleme bağıntıları kullanılarak;

$$A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1} = (-k).0 + (-1).1 = -1$$

$$B_1 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1} = (-k).1 + (-1).0 = -k$$

$$A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0 = (-k).(-1) + (-1).0 = k$$

$$B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0 = (-k).(-k) + (-1).1 = k^2 - 1$$

$$A_3 = b_3 A_2 + a_3 A_1 = (-k).k + (-1).(-1) = -k^2 + 1$$

$$B_3 = b_3 B_2 + a_3 B_1 = (-k).(k^2 - 1) + (-1).(-k) = -k^3 + 2k$$

$$A_4 = b_4 A_3 + a_4 A_2 = (-k).(-k^2 + 1) + (-1).(k^2 - 1) = k^3 - 2k$$

$$B_4 = b_4 B_3 + a_4 B_2 = (-k).(-k^3 + 2k) + (-1).(k^2 - 1) = k^4 + 3k^2 - 1$$

⋮

şeklindedir. Burada

$$B_n = -A_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (58)$$

dir. Özel olarak $k = 2$ alınması durumunda $\mathbf{K}(-1/-2)$ sürekli kesri her $n \geq 1$ için $A_n = (-1)^n n$ elde edilir. Dolayısıyla $\{S_n\}$ lineer kesirli dönüşümleri

$$S_n(w) = \frac{(n-1)w - n}{nw - (n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (59)$$

ile ifade edilir. $k = 3$ alındığında oluşan $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesri için yineleme bağıntıları ve Fibonacci sayılarından

$$A_1 = (-3).0 + (-1).1 = -1 = -F_2$$

$$A_2 = (-3).(-1) + (-1).0 = 3 = F_4$$

$$A_3 = (-3).3 + (-1).(-1) = -8 = -F_6$$

$$A_4 = (-3).(-8) + (-1).(3) = 21 = F_8$$

$$A_5 = (-3).(21) + (-1).(-8) = -55 = -F_{10}$$

$$A_6 = (-3).(-55) + (-1).(21) = 21 = F_{12}$$

$\vdots$

biçimindedir.

Teorem 1.5.2. [11] $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesrinin n . payı A_n ve F_n de n . Fibonacci sayısı olmak üzere $A_n = (-1)^n F_{2n}$ dir.

$\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesrinin $\{S_n\}$ lineer kesirli dönüşümleri

$$S_n(w) = \frac{-F_{2n-2}w + F_{2n}}{-F_{2n}w + F_{2n+2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (60)$$

şeklindedir. [11] çalışmasında Değer, $k = 3$ için $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesrinin yapısı ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi inceledi. Bunlar aşağıdaki gibidir:

Lemma 1.5.3. [11] A_n , $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesrinin n . payı ve F_n de n . Fibonacci sayısı olmak üzere

- i. $F_{2n}A_{n+1} + F_{2n+2}A_n = 0, \quad n \geq 1$
- ii. $F_{2n+1} = (-1)^{n+1}(A_{n+1} + A_n), \quad n \geq 0$
- iii. $F_{4n+2} = -A_{2n+1}, \quad n \geq 0$
- iv. $F_{2n} = \frac{1}{3}(F_{2n+2} + F_{2n-2}), \quad n \geq 1.$

1.6. Modüler Grup

$SL(2, \mathbb{Z})$ grubunun $\{\pm I\}$ ile verilen bölüm grubu, Γ modüler grubu olarak tanımlanır. Bu grup ayrıca $\Gamma := PSL(2, \mathbb{Z}) \cong SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\}$ şeklinde verilir. Burada Γ modüler grubunun elemanları $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1$ olmak üzere $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matris çiftlerinden

oluşur. Kolaylık açısından bu kısımda her bir matris negatifiyle eş alınacaktır. Γ 'nın bu elemanları üst yarı düzlemde

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (61)$$

Möbiüs dönüşümleri ile hareket eder. Γ 'nın hareketini açıklamak için kullanılan en uygun küme rasyonel projektif doğrusu olan $\hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesidir.

Tanım 1.6.1. $\hat{\mathbb{Q}}$ 'nın her bir elemanı, $k, t \in \mathbb{Z}$ ve $(k, t) = 1$ olmak üzere $\frac{k}{t}$ indirgenmiş kesri biçimde ifade edilebilir.

$\frac{k}{t} = \frac{-k}{-t}$ gösterimi tek biçimde olmadığından $\infty = \frac{1}{0} = -\frac{1}{0}$ olarak alınır.

Tanım 1.6.2. Γ 'nın elemanları $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{k}{t} \rightarrow \frac{a\frac{k}{t} + b}{c\frac{k}{t} + d} = \frac{ak + bt}{ck + dt}$$

dönüşümü ile hareket eder. Burada $T \in \Gamma$ için

$$T(k/t) = \frac{a\frac{k}{t} + b}{c\frac{k}{t} + d} = \frac{ak + bt}{ck + dt} = \frac{-ak - bt}{-ck - dt} = \frac{a\frac{-k}{-t} + b}{c\frac{-k}{-t} + d} = T(-k/-t)$$

olduğundan Γ 'nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki bu hareketi iyi tanımlıdır.

Lemma 1.6.3.

- i. Γ 'nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.
- ii. Bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirlidir.

Tanım 1.6.4. (G, Ω) bir Ω kümesi üzerinde hareket eden bir G grubundan oluşan permütasyon grubu olmak üzere $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ olduğunda her $g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyor ise " $\approx$ " denklik bağıntısına Ω kümesi üzerinde G -invariant denklik bağıntısı adı verilir. Denklik sınıflarına ise bloklar denir.

Bu bağıntılara örnek olarak; " $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ " ile tanımlanan özdeşlik bağıntısı ve " $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ " ile tanımlanan evrensel bağıntı verilebilir. Burada eğer Ω üzerinde bu iki bağıntı dışında bir G -invariant denklik bağıntısı var ise (G, Ω) imprimitif; aksi halde

primitif olarak tanımlanır. Sonuç olarak primitif bir grubun transitif olarak hareket etmesi gerektir.

Önerme 1.6.5. [2] (G, Ω) bir transitif permütasyon grubu ise bu taktirde bu grup primitiftir $\Leftrightarrow$ bir $\alpha \in \Omega$ noktasının sabitleyeni G_α olmak üzere bu sabitleyen $\forall \alpha \in \Omega$ için G 'nin bir maksimal alt grubudur.

$G < H < G_\alpha$ alınsın. G transitif olarak hareket ettiğinden herhangi bir $g \in G$ için Ω 'nın her elemanı $g(\alpha)$ şeklinde yazılabilir. Buradan görülür ki Ω üzerinde

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH \quad (62)$$

ifadesi ile verilen " $\approx$ " denklik bağıntısı, iyi tanımlı bir G -invariant denklik bağıntısıdır. İncelenecek olursa bu denklik bağıntısı özdeşlik veya evrensel bağıntı olmadığından (G, Ω) imprimitiftir.

Sonuç 1.6.6. [2] $\beta \in \Omega$ alındığında $\exists g \in G$ için $\beta = g(\alpha)$ vardır. Bu durumda β 'yi içeren $[\beta]$ bloğu $K := \{gh(\alpha) : h \in H\}$ kümesi şeklinde verilir.

Özel olarak $[\alpha]$ bloğu $H(\alpha) := \{h(\alpha) : h \in H\}$ şeklindeki H -yörüngesidir. H 'nin G 'deki sol yan sınıf gösterimlerinin bir kümesi $\{l_i \mid i \in I\}$ ise $i \in I$ olmak üzere bloklar, $H(\alpha)$ 'nin $l_i H(\alpha)$ görüntüleridir. Bu durumda blokların sayısı H 'nin G 'deki $|I| := |G:H|$ indeksidir. Blokların $\Omega/\approx$ kümesi üzerinde, G 'nin apaçık indirgenmiş bir hareketi mevcuttur. $[\alpha]$ bloğunun sabitleyeni H alt grubunu oluşturur.

Şimdi bu bilgiler G 'yi Γ Modüler grubu ve Ω 'yı da $\hat{\mathbb{Q}}$ kümesi alınacak şekilde uygulansın. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ keyfi olmak üzere $\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olup $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a = 1$ ve $c = 0$ elde edilir. Bu durumda $d = 1$ dir ve böylece $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ olur. Bu çıkarımlar sonucunda ∞ un sabitleyeni Γ_∞ , $Z := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile üretilen Γ 'nin bir alt grubudur. Böylece Γ_∞ sabitleyenini içeren Γ 'nin H alt gruplarını bulunarak $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ -invariant denklik bağıntıları bulunabilir. $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğundan, H için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

kongrüans alt grupları kullanışlı bir seçimdir. Açıkça görülür ki, her $N \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(N) \leq \Gamma$ ve $N > 1$ ise $\Gamma_\infty < \Gamma_0(N) < \Gamma$ dir. Dolayısıyla Γ Modüler grubu $\hat{\mathbb{Q}}$

üzerinde imprimitif olarak hareket eder. " $\approx$ ", $\Gamma_0(N)$ 'nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde indirgenmiş Γ -invariant denklik bağıntısını temsil etsin. $\widehat{\mathbb{Q}}$ 'nin elemanları $v = \frac{k}{t}$ ve $w = \frac{x}{y}$ ise buradan Γ 'nin $g = \begin{pmatrix} k & * \\ t & * \end{pmatrix}$ ve $g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ formundaki $g, g' \in \Gamma$ elemanları için $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ dir. $v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H = \Gamma_0(N)$ ve böylece $g^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ -t & k \end{pmatrix}$ olduğundan

$$v \approx w \Leftrightarrow ky - tx \equiv 0 \pmod{N} \quad (63)$$

dir. Bu ifade

$$\exists u \in U_N: x \equiv uk \pmod{N} \text{ ve } y \equiv ut \pmod{N} \quad (64)$$

şeklinde de yazılabilir. (63) ve (64) denklemlerinin ikisi de $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ -invariant denklik bağıntısı olarak tanımlanır.

Lemma 1.6.7. [2] " $\approx$ " altındaki denklik sınıflarının sayısı, N 'yi bölen farklı p asalları üzerinden

$$\Phi(N) := |\Gamma: \Gamma_0(N)| = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

dir. Özellikle N bir p asalına eşit ise $\Phi(p) = p + 1$ tane blok mevcuttur ve bu bloklar

$$[j] = \{x/y \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid x \equiv jy \pmod{p}\}, j \neq \infty$$

$$[\infty] = \{x/y \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid y \equiv 0 \pmod{p}\}$$

olmak üzere $[0], [1], \dots, [p-1], [\infty]$ şeklindedir.

1.7. Graf Teorisi

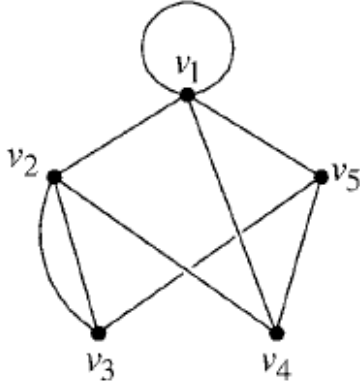
Basitçe bir graf, köşelerden ve her biri bu köşeleri veya sadece köşenin kendisini birleştiren kenar olarak adlandırılan çizgilerden oluşur. Bir grafi tanımlamak için öncelikle köşe ve kenarların kümesi tanımlanmalıdır. Daha sonra hangi köşeler ile hangi kenarların bağlandığı belirtilmelidir. Bir kenar, her ucunda köşe olacak şekilde tanımlandığından graftaki tüm kenarların uç noktaları köşeler ile ilişkilendirilir. Bu sebeple v_1 ve v_2 köşelerini bağlayan bir e kenarı için $\{v_1, v_2\}$ kümesi tanımlanır. Burada $v_1 = v_2$ olabilir.

Tanım 1.7.1. Köşe ve kenarlar ile ilgili tanımlar aşağıda verilmiştir:

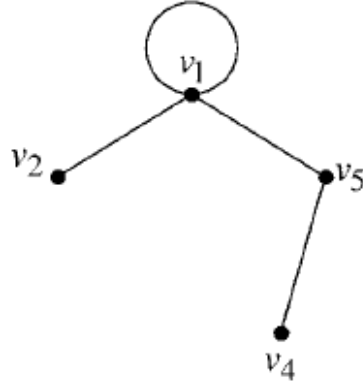
- i. V , boş olmayan sonlu köşeler kümesi ve E , sonlu bir kenarlar kümesi olmak üzere $G = (V, E)$ bir (yönlendirilmemiş) graf temsil eder. Burada her kenarın bitiş noktası olarak adlandırılan bir veya iki köşesi vardır.
- ii. Bir e kenarının bitiş noktası v ise e , v ile bitişiktir(incident) denir.
- iii. u ve v köşeleri bir e kenarı ile ilişkilendiriliyor ise bu iki köşe komşu köşeler adını alır. Bu durumda hem v hem de u köşeleri e kenarına değer ve ayrıca e de v ve u köşelerine değer denir.
- iv. İki kenar ortak bir bitiş noktasına sahip ise bu kenarlar komşu kenarlardır.
- v. Bir kenar bir köşeyi yine kendisine bağluyor ise düğüm adını alır.
- vi. u ve v köşeleri arasında birden fazla kenar bağlanıyor ise bu kenarlara paralel kenar denir.
- vii. Bir v köşesine bağlı kenarların sayısına v köşesinin derecesi denir ve $d(v)$ ile gösterilir.

Tanım 1.7.2. Eğer $V_T \subseteq V$, $E_T \subseteq E$ ve G grafının tüm kenarları aynı zamanda T grafının da kenarı ise $T = (V_T, E_T)$ grafi, $G = (V, E)$ grafının bir altgrafıdır.

Örnek 1.7.3. Aşağıda bir G grafi ile birlikte G grafının bir T altgrafı verilmiştir.



Şekil 5. G grafi[14]



Şekil 6. G grafının bir T altgrafı[14]

Bir G grafında n uzunluğunda kenar dizisi; $i = 1, 2, \dots, n-1$ için e_i ve e_{i+1} komşu olmak üzere $e_1, e_2, \dots, e_n$ kenarlarının dizisidir. Kenar dizisi, $\{v_{i-1}, v_i\}$ olmak üzere $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ köşe dizisini belirler. v_0 a ilk düğüm, v_n e son düğüm denir. Tüm

kenarları birbirinden ayrı olan kenar dizisine *yol* adı verilir. Ayrıca bunun yanında tüm köşeler de birbirinden ayrı ise bu yol bir basit yoldur. $v_0 = v_n$ ise kenar dizisi kapalıdır. En az bir kenar içeren basit kapalı bir yol devre olarak isimlendirilir. $m \geq 3$ ve $v_1, v_2, \dots, v_m$ farklı köşelerin bir dizisi olmak üzere, $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_1$ şeklindeki bir yapılandırma bir yönlü (yönlendirilmiş) devre, en az bir ok (hepsi değil) ters ise ters yönlendirilmiş devre adını alır.

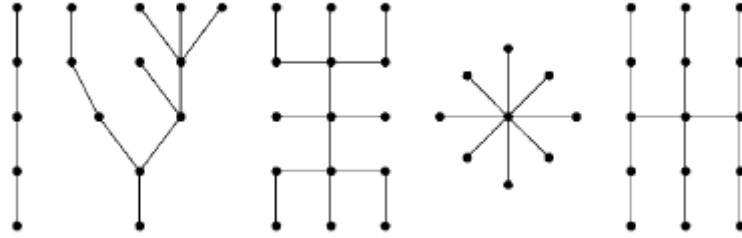
Tanım 1.7.4. $v_1, v_2, \dots, v_m$ farklı köşelerin dizisi olmak üzere $m = 3$ ise, yönlendirilmiş olsun veya olmasın devreye bir üçgen denir. Eğer $m = 2$ ise, $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$ yapılandırılmasını kendisiyle eşleşmiş bir kenar olarak adlandırılır.

Tanım 1.7.5. Bir grafta birbirinden ayrı köşelerini bağlayan bir yol varsa bu graf bağlantılıdır.

Tanım 1.7.6. İçinde devre içermeyen bağlantılı grafa ağaç denir. Bu tanıma göre bir ağaçta düğüm veya çoklu kenar mevcut değildir. Ayrıca n köşeli ağacın tam olarak $n - 1$ kenarı vardır.

Devre içermeyen (bağlantılı olmayan) grafa ise orman adı verilir.

Bazı ağaç örnekleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 7. Bazı ağaç örnekleri[14]

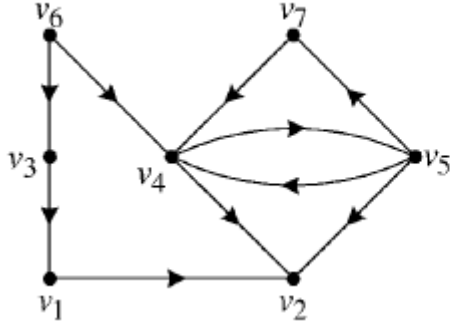
Bu kısma kadar verilen grafların hepsi temelde yönlendirilmemiş graftır. Bu demektir ki kenarların tercih edilen bir yönü yoktur. Bazı uygulamalarda, kenarların belirli bir yöne sahip olduğu graflara ihtiyaç duyulur. Bu graflardaki kenarların yönü oklar ile belli edilir. Buradan anlaşılacağı gibi, yönlendirilmemiş bir grafın tanımından yola çıkarak her bir kenara yön vermek zor bir yol değildir.

Yönlendirilmiş bir kenar, eşit duruma sahip iki bitiş noktasından ziyade bir v başlangıç noktası ve bir de u son noktaya sahip olarak düşünülebilir. Bu sıralı köşe çifti (v, u) şeklinde tanımlanır. Burada köşelerin sırası kenarın yönünü belirler.

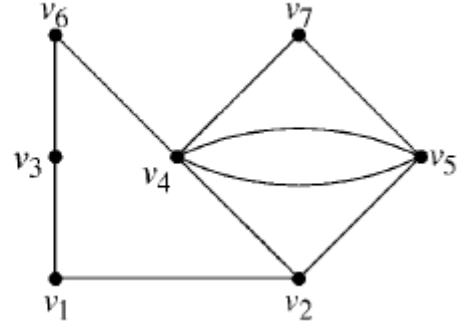
Tanım 1.7.7. Bir yönlendirilmiş graf veya digraf, bir sonlu boş olmayan köşelerin kümesi ile bir sonlu (yönlü) kenarların kümesinden oluşur ki burada kenarlar, sıralı köşe çiftleriyle ifade edilir.

Verilen bir D yönlü grafında kenarların yönü unutulabilir ve dolayısıyla yönlendirilmemiş bir G grafi elde edilirse, bu G grafi, D grafının temel(underlying) grafi denir. Eğer bir digrafta düğüm yoksa ve paralel kenarlara sahip değilse bu digraf basittir.

Örnek 1.7.8. Aşağıdaki yönlendirilmiş graf ile temel graf örneği verilmiştir. Burada v_4 ve v_5 köşelerinin oluşturduğu yönlendirilmiş grafın iki kenarı, farklı yönlerde olduklarından, yani ilk ve son noktaları farklı olduğundan paralel kenar değildirler. Fakat temel grafta, yön olmadığından, aynı kenarlar paraleldir.



Şekil 8. Yönlü bir graf[14]



Şekil 9. Temel graf[14]

Yönlendirilmemiş graftaki tanımların çoğu kenarların yönleri hesaba katılarak ya hiç değişmeden ya da belirgin değişikliklere uğrayarak yönlendirilmiş graflara aktarılabilir. Özellikle, komşu, bitişik ve derece kavramları değişmeden kalır.

1.8. Γ Modüler Grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları[2]

(G, Ω) transitif permütasyon grubu ise aynı zamanda bir topolojik dönüşüm grubudur. Bu durumda G , $\Omega \times \Omega$ üzerinde $g \in G$ ve $\alpha, \beta \in \Omega$ için

$$g: (\alpha, \beta) \longrightarrow (g(\alpha), g(\beta))$$

ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri adı verilir. (α, β) yı içeren alt yörünge

$$O(\alpha, \beta) := \{g(\alpha, \beta): g \in G\}$$

şekildeki $O(\alpha, \beta)$ ile temsil edilir. Yani, $(x, y) \in O(\alpha, \beta)$ dır ancak ve ancak en az bir $g \in G$ vardır öyle ki $(x, y) = g(\alpha, \beta) = (g(\alpha), g(\beta))$ dir.

$O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesi kullanılarak bir $G(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafi elde edilebilir. Burada köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın elemanları olmak üzere $(\nu, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise ν den δ ya bir yönlendirilmiş kenar mevcuttur. Bu kenar $\nu \rightarrow \delta$ ile gösterilir. Açıkça $O(\beta, \alpha)$ da bir alt yörüngedir ve bu yörünge ya $O(\alpha, \beta)$ ya eşit ya da $O(\alpha, \beta)$ dan farklıdır. Farklı olması durumunda $G(\beta, \alpha)$, $G(\alpha, \beta)$ grafinin oklarının ters yönlendirilmiş halidir ve bu $G(\alpha, \beta)$ ile $G(\beta, \alpha)$ graflarına eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Aynı olması durumunda ise $G(\beta, \alpha) = G(\alpha, \beta)$ dır ve bu graf karşı yönlendirilmiş kenar çifti içerir. Böyle verilen her kenar çifti basit yönlendirilmiş kenar ile değiştirmek uygundur. Sonuç olarak kendisiyle eşleşmiş graf olarak tanımlanan yönlendirilmemiş bir kenar elde edilir. Burada $O(\beta, \alpha) = O(\alpha, \beta)$ ve $(\nu, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ olması durumunda ν den δ ya tanımlanan kenar $\nu - \delta$ ile gösterilir.

Önerme 1.8.1. [2] (G, α) transitif permütasyon grubunun bir alt yörüngesel grafi G olsun. Bu taktirde;

- i. G, G' nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder;
- ii. G, G' nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder;
- iii. Eğer G kendisiyle eşleşmiş ise bu taktirde G, G' nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder;
- iv. G kendisiyle eşleşmemiş ise bu taktirde G, G' nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.

$\Omega \times \Omega$ nın köşegeni, $O(\alpha, \alpha) = \{(\nu, \nu) : \nu \in \Omega\}$ ile belirtilir. $\nu \in \Omega$ köşesi için $G(\alpha, \alpha)$ alt yörüngesel grafi sadece bir düğüm içerir ve bu graf kendisiyle eşleşmiştir. Bu grafa aşikar alt yörüngesel graf denir. Bu kısımda aşikar olmayan alt yörüngesel graflar ele alınacaktır.

Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi için alt yörüngesel graflardan bahsedilmek istenirse Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan bir $\nu \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için her bir alt yörünge (∞, ν) çiftini içerir. $N \geq 0$ ve $(u, N) = 1$ olmak üzere $\nu = \frac{u}{N}$ şeklinde yazılırsa bu alt yörünge $O_{u,N}$ ile ve buna karşılık gelen $G(\infty, \nu)$ alt yörüngesel grafi da $G_{u,N}$ ile gösterilir. Burada $\nu = \infty$ ise bu graf $G_{1,0} = G_{-1,0}$ aşikâr alt yörüngesel grafıdır ve böylece $\nu \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğu kabul edilir.

Lemma 1.8.2. Eğer $v' \in \mathbb{Q}$ ise bu taktirde $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v$ ve v', Γ'_∞ un aynı yörüngesindedir. Burada $\Gamma_\infty, Z: v \rightarrow v + 1$ ile üretildiğinden bu ifade $u \equiv u' \pmod{N}$ olacak şekilde $v' = \frac{u'}{N}$ ifadesi ile denktir.

Böylece $G_{u,N} = G_{u',N'} \Leftrightarrow N = N'$ ve $u \equiv u' \pmod{N}$ dir. Buradan $\forall N \geq 1$ tamsayı olmak üzere her bir $u \in U_N$ birimi için $\Phi(N)$ tane farklı $G_{u,N}$ alt yörüngesel grafi mevcuttur. $G_{u,N}$ de $\frac{k}{t}$ den $\frac{x}{y}$ ye bir yönlendirilmiş kenar(ya da $G_{u,N}$ kendisiyle eşleşmiş ise yönlendirilmemiş kenar) varsa $G_{u,N}$ de $\frac{k}{t} \rightarrow \frac{x}{y}$ ile gösterilir.

Teorem 1.8.3. [2] $G_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\frac{k}{t} \rightarrow \frac{x}{y}$ kenarı mevcuttur : $\Leftrightarrow x \equiv \pm uk \pmod{N}, y \equiv \pm ut \pmod{N}$ ve $ky - tx = \pm n$ olmasıdır.

Sonuç 1.8.4. [2] $\bar{u}, u\bar{u} \equiv 1 \pmod{N}$ kongrüans denklemini sağlıyor ise, $G_{u,N}$ ile eşleşmiş alt yörüngesel graf $G_{-\bar{u},N}$ dir.

Sonuç 1.8.5. $G_{u,N}$ alt yörüngesel grafi kendisiyle eşleşmiştir : $\Leftrightarrow u^2 \equiv -1 \pmod{N}$ dir.

Sonuç 1.8.6. $G_{u,N}$ en az $\Phi(N)$ tane bağlantılı bileşene sahiptir; özellikle $N > 1$ ise $G_{u,N}$ bağlantılı değildir.

1.9. Farey Grafı[2]

Aşık ar olmayan en temel alt yörüngesel graf $G_{1,1}$ grafıdır. Bu grafın köşelerinin kümesi genişletilmiş rasyonel sayılar kümesidir. Sonuç 1.8.5. sağlandığından $G_{1,1}$ grafi kendisiyle eşleşmiştir ve böylece bu graf yönlendirilmiş bir graf olarak kabul edilebilir. Teorem 1.8.3. uygulanırsa $\frac{k}{t}$ ve $\frac{x}{y}$ köşeleri komşudur $\Leftrightarrow ky - tx = \pm 1$ dir. Buna örnek olarak, ∞ 'a komşu olan köşelerin tamsayılar olduğu verilebilir. Önerme 1.8.1. den $\Gamma, G_{1,1}$ 'in otomorfizmalarının köşeler ve kenarlar üzerinde hareket eden bir grubudur. Aslında $Aut G_{1,1}$, $ad - bc = \pm 1$ koşulunu sağlayan elemanlardan oluşan $PGL(2, \mathbb{Z})$ genişletilmiş modüler grubudur.

$G_{1,1}$ grafi, Farey dizileriyle olan alakasından dolayı Farey grafı olarak isimlendirilir ve F ile gösterilir. $\forall m \geq 1$ tamsayısı için m mertebeli F_m Farey dizisi, $|y| \leq m$ olmak üzere artan sıralanan tüm $\frac{x}{y}$ rasyonel sayılarından oluşur. Örneğin,

$$\mathbf{F}_3 : \dots, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \dots$$

dir. Açıkça Farey dizilerinin elemanlarının birleşimi rasyonel sayılar kümesini verir. Yani $\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}_2 \subset \mathbf{F}_3 \subset \dots$ ve $\bigcup_{m \geq 1} \mathbf{F}_m = \mathbb{Q}$ 'dur.

Lemma 1.9.1. $\frac{k}{t}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyonel sayılar olsun. Bu durumda aşağıdaki üç koşul denktir;

- i. $\frac{k}{t}$ ve $\frac{x}{y}$, $\mathbf{F}$ 'de komşu köşelerdir;
- ii. $ky - tx = \pm 1$;
- iii. Bir $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{k}{t}$ ve $\frac{x}{y}$, $\mathbf{F}_m$ de komşu terimlerdir.

Bu verilen bilgilerle artık $\mathbf{F}$ 'nin basit yapısı oluşturulabilir. Şöyle ki, her bir terime bir öncesindeki ve bir sonrasındaki terimler eklenerek oluşturulan her $\mathbf{F}_m$, 2 değerli bir ağaç teşkil eder. Lemma 1.9.1. den bu ağaçların birleşiminin $\mathbf{F}$ 'nin $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmiş alt grafıdır ve böylece ∞ ile işaretlenmiş bir köşe eklenip tamsayılar ile birleştirilirse $\mathbf{F}$ grafi oluşturulur. $\mathbf{F}$ grafinin kenarları, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemdeki Öklid yarı-çemberleri veya $\mathbb{R}$ 'ye dik Öklid yarı-doğruları şeklindeki hiperbolik geodezikler ile gösterilebilir. Genelde olduğu gibi burada da yarı-doğrular “ ∞ ile birleşmiş” kabul edilir. $\mathbb{H}$ 'nın hiperbolik izometrilere bir grubu olarak Möbiüs dönüşümü, Γ ile bir hareketi tanımlamak için alınırsa bu hareket altında geodezikler geodeziklere resmedilir. Böylece $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemindeki $\mathbf{F}$ gösterimi Γ altında invarianttır.

Sonuç 1.9.2. $\mathbf{F}$ grafinin kenarları $\mathbb{H}$ 'de kesişmez.

Son olarak Farey grafinin sürekli kesirler ile ilişkisi incelensin. Burada Farey grafinin bağlantılı olduğu aşikârdır. Örneğin; ∞ 0'a bitişikken, herhangi bir rasyonel köşe çifti $\mathbf{F}_m$ 'de bir yol ile bağlanır. Buradan yola çıkarak $\mathbf{F}$ 'de herhangi iki $x, y \in \hat{\mathbb{Q}}$ köşesi için x 'den y 'ye herhangi bir yoldaki minimum kenar sayısı, bu köşeler arasındaki $d(x, y)$ Farey uzaklığı olarak tanımlanabilir. Böylece d , $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir metrik teşkil eder ve Γ izometrilere bir grubudur. ∞ 'dan 2 uzaklıktaki köşeler için $p + q^{-1}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, |q| \geq 2$) rasyonelleri var iken $d(\infty, y) = 1$ olan y köşeleri tamsayıdır.

[25] çalışmasında, $\mathbf{F}$ grafında y 'yi, $c_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{c_3 - \ddots - \frac{1}{c_m}}}$$

biçiminde bir sürekli kesir ile belirterek ∞ 'dan y 'ye en kısa yolun nasıl bulunabileceği gösterildi. Örneğin,

$$4/7 = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{-3}}$$

kesrine karşılık gelen 3 uzunluklu yol

$$\infty \rightarrow 1 \rightarrow 1 - 1/2 = 1/2 \rightarrow 1 - (2 - (-5)^{-1})^{-1} = 4/7$$

şeklindedir.

Eğer $y = \frac{a}{b}$ ise $d(\infty, y)$ aynı zamanda (a, b) 'nin en büyük ortak çarpanını veren en küçük kalan algoritmasında yer alan bölümlerin sayısıdır. Yukarıdaki örnek için bu algoritma şöyledir:

$$\begin{array}{ll} 4 = 1 \cdot 7 - 3 & \left(|3| \leq \frac{1}{2} |7| \right) \\ 7 = (-2) \cdot (-3) + 1 & \left(|1| \leq \frac{1}{2} |-3| \right) \\ -3 = (-3) \cdot 1 & (0 \text{ kalanı ile}) \end{array}$$

1.10. $\mathbf{G}_{u,N}$ ve $\mathbf{F}_{u,N}$ Grafları[2]

Bu kısımda $\mathbf{F} = \mathbf{G}_{1,1}$ grafının özelliklerinin diğer $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletileceği durumundan bahsedilmiştir. Her bir $\mathbf{G}_{u,N}$ grafının $\Phi(N)$ tane alt grafının ayrık birleşimi olduğundan her bir alt grafın köşeleri $ky - tx = 0 \pmod{N}$ ile tanımlanan

$\approx_N$ Γ -invariant denklik bağıntısına göre tek blok oluşturur. Γ , $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan bu blokları transitif olarak permüte eder ve böylece alt grafların hepsi izomorfik olduğu sonucuna varılır. $\mathbf{F}_{u,N}$, köşeleri ∞ 'u içeren

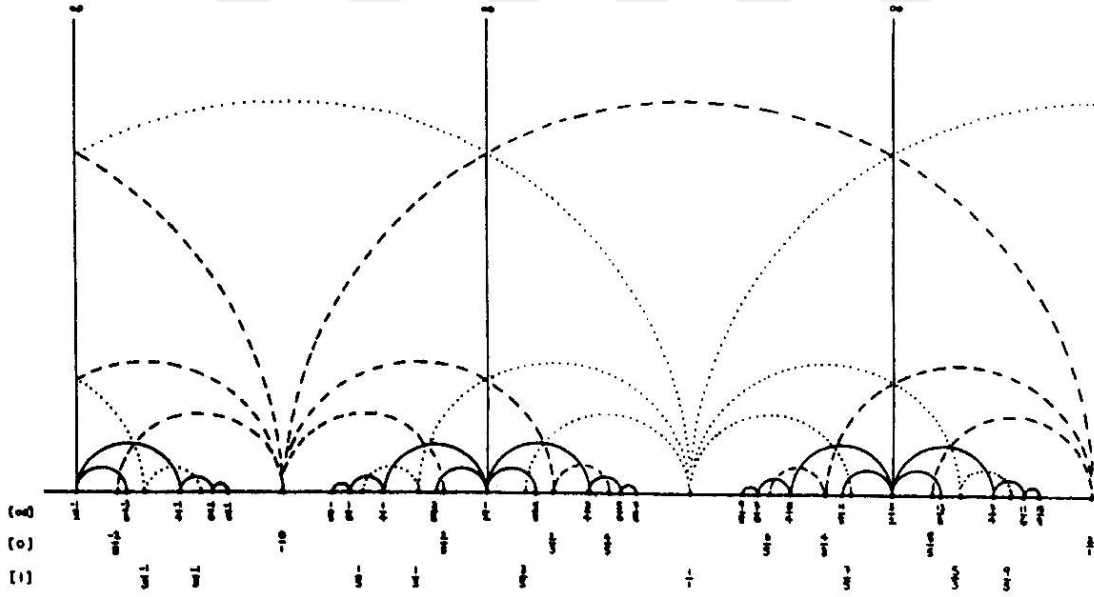
$$[\infty] = \{x, y \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \pmod{N}\}$$

bloğundan oluşan $\mathbf{G}_{u,N}$ 'nin alt grafi ise $\mathbf{G}_{u,N}$, $\mathbf{F}_{u,N}$ 'nin $\Phi(N)$ tane ayrık kopyasından oluşur.

Teorem 1.10.1 $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında $\frac{k}{t} \rightarrow \frac{x}{y}$ kenarı vardır $:\Leftrightarrow x \equiv \pm uk \pmod{N}$ ve $ky - tx = \pm N$ dir.

Teorem 1.10.2. $\Gamma_0(N)$, $\mathbf{F}_{u,N}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

$N = 1$ olması durumunda en basit graf $\mathbf{F}_{1,1} = \mathbf{G}_{1,1} = \mathcal{F}$ elde edilir. Sonraki basit graf olan $\mathbf{G}_{1,2}$ aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 5. $\mathbf{G}_{1,2}$ Grafı[2]

Bu graf t çift, k çift veya her ikisi tek olmak üzere $\frac{k}{t} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanlarını içeren $\mathbf{F}_{1,2}$ 'nin $\psi(2) = 3$ tane izomorfik kopyası olan $[\infty], [0]$ ve $[1]$ bloklarından oluşur. Bu bloklar şekilde sırasıyla kesik olmayan, kesik ve noktalı olarak gösterilmiştir. 1.8.4. Sonuç'tan $\mathbf{G}_{1,2}$ yönlendirilmemiş olduğundan $\mathbf{F}_{1,2}$ de yönlendirilmemiştir.

Tanım 1.10.3. $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

Tanım 1.10.3. $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

Tanım 1.10.3. $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

Tanım 1.10.3. $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

- Tanım 1.10.3.** $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

Tanım 1.10.3. $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

Tanım 1.10.3. $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

Tanım 1.10.3. $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

Tanım 1.10.3. $v_1, v_2, \dots, v_m$ $\mathbf{F}_{1,N}$ de farklı köşelerin bir dizisi olma

uzak köşe tespit edildi. [11] çalışmasında ise bazı özel durumlarda $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki köşelerin sürekli kesir ve Fibonacci sayı dizisi arasında bir takım bağlantılar elde edildi. Bunlara ek olarak [7], [8] ve [9] çalışmalarında elde edilen bağıntılardan bu kısımda bahsedildi.

Lemma 1.11.1. [6] $(u, N) = 1$ ise $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olan bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

Sonuç 1.11.2. [8] $(u, N) = 1$ ise $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olan bir $l \in \mathbb{Z}$ vardır.

Teorem 1.11.3. Aşağıdaki sonuçlar birbirine denktir:

- i. $\mathbf{F}_{u,N}$ grafinda bir K kapalı eğrisi vardır
- ii. K kapalı eğrisi bir üçgendir
- iii. $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{N}$.

Teorem 1.11.4. $k \in \mathbb{N}$ ve $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olsun. Bu takdirde;

- i. $1 < k < N$ için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki her yol minimal uzunlukludur;
- ii. $k = 1$ için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki herhangi bir yolun minimal uzunluklu olması gerekmez.

Teorem 1.11.5. [6] $\mathbf{F}_{u,N}$ grafi için $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $1 \leq k \leq N$ olsun. Buradan;

- i. $\frac{u}{N}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\frac{u+\frac{1}{k}}{N} = \frac{ku+1}{kN}$ ve $\frac{u}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur;
- ii. $\frac{u+\frac{1}{k}}{N}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\frac{u+\frac{1}{k}}{N} = \frac{(k^2-1)u+k}{(k^2-1)N}$ ve $\frac{u+\frac{1}{k}}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur.

Sonuç 1.11.6. [8] $1 \leq k, l \leq N$ olmak üzere $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olsun. Eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ kendisiyle eşleşmiş ise $k = l = N$ dir. Aksi takdirde $l = N - k$ dir.

Sonuç 1.11.7. [8] $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $1 \leq k \leq N$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ grafinda sağ yönlü minimal uzunluklu sonsuz bir yol

$$\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k}}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}}}{N} \rightarrow \dots$$

vardır öyle ki bu köşelerin kümesi

$$M := \bigcup_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{u + T_m(0)}{N} : T_m = t_1 t_2 \dots t_m, t_m(z) = \frac{-1}{-k + z} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{0} \right\}$$

şeklindedir.

Sonuç 1.11.8. [8] $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $1 \leq l \leq N$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında sol yönlü minimal uzunluklu sonsuz bir yol

$$\dots \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l - \frac{1}{l - \frac{1}{l - \frac{1}{l}}}}}{N} \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l - \frac{1}{l - \frac{1}{l}}}}{N} \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l - \frac{1}{l}}}{N} \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l}}{N} \leftarrow \frac{u}{N} \leftarrow \frac{1}{0}$$

vardır öyle ki bu köşelerin kümesi

$$P := \bigcup_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{u - T_m(0)}{N} : T_m = t_1 t_2 \dots t_m, t_m(z) = \frac{-1}{-l + z} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{0} \right\}$$

şeklindedir.

Her $n \geq 1$ için $a_n := -1$ ve $b_n := -k$ olmak üzere, yineleme bağıntılarından $B_n = -A_{n+1}$ ve böylece $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu sağ yönlü yolu için n . köşe

$$\overrightarrow{v_n} = \frac{u + T_n(0)}{N} = \frac{u + \frac{A_n}{B_n}}{N} = \frac{A_{n+1}u - A_n}{A_{n+1}N} \quad (65)$$

ile verilir. Benzer olarak sol yön için n . köşe, her $n \geq 1$ için $a_n := -1$ ve $b_n := -l$ olmak üzere

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{u - T_n(0)}{N} = \frac{u - \frac{A_n}{B_n}}{N} = \frac{A_{n+1}u + A_n}{A_{n+1}N} \quad (66)$$

şeklindedir.

Sonuç 1.11.9. [8] Yineleme bağıntılarından $kA_{n+1} + A_{n+2} + A_n = 0$ dir.

Sonuç 1.11.10. [8] $A_n = -kA_{n+1} - A_{n+2}$ karakteristik denklemin çözümünden; $k = 2$ ise $A_n = (-1)^n n$ ve eğer $k > 2$ ise

$$A_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^n \left(k + \sqrt{k^2 - 4}\right)^{n-t} \left(k - \sqrt{k^2 - 4}\right)^{t-1}$$

elde edilir. $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında sol yönü için çözüm k ile l yer değiştirirse elde edilir.

Sonuç 1.11.11. [9] $k = 2$ ise bu durumda sağ yön için $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\frac{u}{N}$ ile başlayan minimal uzunluklu yolda n . köşe

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{(n+1)u + n}{N} = \frac{u + \frac{n}{n+1}}{N}$$

dir.

Sonuç 1.11.12. [9] $l = 2$ ise bu durumda sol yön için $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\frac{u}{N}$ ile başlayan minimal uzunluklu yolda n . köşe

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{(n+1)u - n}{N} = \frac{u - \frac{n}{n+1}}{N}$$

dir.

Sonuç 1.11.13. [9] $k = 3$ ise $u^2 + 3u + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ dir. Sağ yön için $A_n = (-1)^n F_{2n}$ ile birlikte (65) ile verilen ifadeden, $v_0 = \frac{u}{N}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yolda n . köşe

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{u + \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}$$

şeklinde verilir.

Sonuç 1.11.14. [9] $l = 3$ ise $u^2 - 3u + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ dir. Sol yön için $A_n = (-1)^n F_{2n}$ ile birlikte (66) ile verilen ifadeden, $v_0 = \frac{u}{N}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yolda n . köşe

$$\overleftarrow{v}_n = \frac{u - \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}$$

şeklinde verilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. $\mathbf{K}(-1/-k)$ Sürekli Kesri İçin Uygulamalar

Sürekli kesirler, V_n değer bölgeleri ve bu bölgelere karşılık gelen Ω_n eleman bölgeleri ile tanımlanabilir. Yani, $\{\Omega_n\}$ eleman bölgeleri dizisi ve $\{V_n\}$ değer bölgeleri dizisi olmak üzere her $\langle a_n, b_n \rangle \in \Omega_n$ için

$$s_n(V_n) \subseteq V_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dir. Burada $a_n = -1$ ve $b_n = -k$ olacak şekilde $\mathbf{K}(-1/-k)$ sürekli kesrinin dizisi

$$s_n(w) = \frac{-1}{-k + w}$$

şeklinde Möbiüs dönüşümlerinin $\{s_n\}$ dizisidir. $\{S_n\}$ de $\{s_n\}$ ile üretilen lineer kesirli dönüşümlerinin dizisidir ve sürekli kesirlerin yineleme bağıntıları ile

$$S_n(w) = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

biçiminde tanımlanır. Bu şekildeki $\{S_n\}$ lineer dönüşümleri için $K_n = S_n(V_n)$ bölgeleri alınsın. $w \in V_n$ için $S_n(w) \in K_n$ olduğu açıktır. Burada $\mathbb{D}$ kompleks sayılar kümesinde birim disk olmak üzere $V_0 = \mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ alınarak $\{S_n\}$ lineer kesirli dönüşümleri altında V_n değer bölgelerine karşılık gelen K_n resimleri $K_n = S_n(\mathbb{D})$ biçimindeki disklerdir. Daha açık bir ifade ile bu K_n resimleri

$$K_n = S_n(w) = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n(w), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile belirlenir. Ayrıca bir $\mathbf{K}(-1/-k)$ sürekli kesri, $|b_n| \geq 1 + |a_n|$ şartı için $|k| \geq 2$ olduğunda bir Pringsheim kesridir. Bu bilgiler ışığında $k = 2$ ve $k = 3$ değerleri için $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $\mathbf{K}(-1/-k)$ sürekli kesrinin bir Pringsheim kesri olduğu göz önüne alınarak $\mathbb{D}$ kompleks diskinin $\{S_n\}$ lineer kesirli dönüşümleri altında K_n resimlerinin formları incelendi.

2.1.1. $\mathbf{K}(-1/-2)$ Sürekli Kesrinin K_n Diskleri

İlk olarak $k = 2$ için $\mathbf{K}(-1/-2)$ sürekli kesrine bakılsın. Bu sürekli kesrin dizisi $s_n(w) = \frac{-1}{-2+w}$ şeklindedir. Yineleme bağıntıları ve $k = 2$ için $A_n = (-1)^n n$ olduğundan $\{s_n\}$ ile üretilen $\{S_n\}$ lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi

$$S_n(w) = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n(w) = \frac{(n-1)w - n}{nw - (n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile ifade edilir. Burada S_n dönüşümlerinin tersinin dizisi

$$S_n^{-1}(w) = \frac{(n+1)w - n}{nw - (n-1)}$$

şeklindedir. $K_n = S_n(\mathbb{D})$ için $S_n^{-1}(K_n) = \mathbb{D}$ olacağından her $n \geq 1$ tamsayısı için K_n bölgelerinin $\{S_n\}$ dönüşümlerinin tersinin altındaki resimleri $\mathbb{D}$ diskinin elemanlarıdır. Yani, her $u_n \in K_n$ için $S_n^{-1}(u_n) \in \mathbb{D}$ dir. Bu özelliklere sahip $\mathbf{K}(-1/-2)$ sürekli kesri için K_n bölgesinin yeri aşağıdaki gibi belirlenir.

Sonuç 2.1.1.1. $\mathbf{K}(-1/-2)$ sürekli kesri ve $\{S_n\}$ de onun lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi olmak üzere $\mathbb{D}$ bölgesi için $K_n = S_n(\mathbb{D})$ tanımlansın. O halde K_n resimleri

$$K_n = \left\{ u_n \in \mathbb{C} : \left| u_n - \frac{2n}{2n+1} \right| \leq \frac{1}{2n+1} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde, merkezi $C_n = \frac{2n}{2n+1}$ ve yarıçapı $R_n = \frac{1}{2n+1}$ olan kapalı dairesel disklerdir.

İspat. Matematiksel induksiyon yöntemi kullanılmak üzere $n = 1$ için S_1 dönüşümleri

$$S_1(w) = s_1(w) = \frac{-1}{-2+w}$$

ve bu dönüşümün tersi

$$S_1^{-1}(w) = \frac{2w-1}{w}$$

şeklindedir. $S_1^{-1}(u_1) \in \overline{\mathbb{D}}$ olduğundan K_1 diskinin yeri

$$K_1 = \left\{ u_1 \in \mathbb{C} : \left| u_1 - \frac{2}{3} \right| \leq \frac{1}{3} \right\}$$

şeklinde, merkezi $C_1 = \frac{2}{3}$ ve yarıçapı $R_1 = \frac{1}{3}$ olan kapalı dairesel disktr.

Şimdi $K_n = \left\{ u_n \in \mathbb{C} : \left| u_n - \frac{2n}{2n+1} \right| \leq \frac{1}{2n+1} \right\}$ olduğu kabul edilsin ve K_{n+1} bölgesinin yeri elde edilmeye çalışılsın. O halde

$$S_{n+1}(w) = S_n(S_{n+1}(w)) = \frac{nw - (n+1)}{(n+1)w - (n+2)}$$

dir. Burada S_{n+1} lineer kesirli dönüşümünün tersi

$$S_{n+1}^{-1}(w) = \frac{(n+2)w - (n+1)}{(n+1)w - n}$$

şeklinde elde edilir. $K_{n+1} = S_{n+1}(\overline{\mathbb{D}})$ için $S_{n+1}^{-1}(K_{n+1}) = \overline{\mathbb{D}}$ olduğundan $u_{n+1} \in K_{n+1}$ için $S_{n+1}^{-1}(u_{n+1}) \in \overline{\mathbb{D}}$ olduğu açıktır. O halde $u_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ olmak üzere

$$\left| \frac{(n+2)u_{n+1} - (n+1)}{(n+1)u_{n+1} - n} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(n+2)x_{n+1} + iy_{n+1}(n+2) - (n+1)}{(n+1)x_{n+1} + iy_{n+1}(n+1) - n} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |(n+2)x_{n+1} + iy_{n+1}(n+2) - (n+1)| \leq |(n+1)x_{n+1} + iy_{n+1}(n+1) - n|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [(n+2)x_{n+1} - (n+1)]^2 + [y_{n+1}(n+2)]^2 \\ \leq [(n+1)x_{n+1} - n]^2 + [y_{n+1}(n+1)]^2 \end{aligned}$$

ifadesi düzenlenirse;

$$\begin{aligned} [(n+2)^2 - (n+1)^2]x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}(2n+2) + [(n+2)^2 - (n+1)^2]y_{n+1}^2 + 2n \\ + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği $[(n+2)^2 - (n+1)^2]$ ile bölünürse;

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1 \left(\frac{2n+2}{2n+3} \right) + y_1^2 + \frac{2n+1}{2n+3} &\leq 0 \\ \Rightarrow \left(x_{n+1} - \frac{2n+2}{2n+3} \right)^2 + y_{n+1}^2 &\leq \left(\frac{1}{2n+3} \right)^2 \\ \Rightarrow \left(x_{n+1} - \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \right)^2 + y_{n+1}^2 &\leq \left(\frac{1}{2(n+1)+1} \right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla K_{n+1} diski

$$K_{n+1} = \left\{ u_{n+1} \in \mathbb{C} : \left| u_{n+1} - \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \right| \leq \frac{1}{2(n+1)+1} \right\}$$

olur. Yani K_n disklerinin yeri merkezi $C_n = \frac{2n}{2n+1}$ yarıçapı $R_n = \frac{1}{2n+1}$ olan kapalı dairesel disklerdir. Bu şekilde ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.1.2. $\mathbf{K}(-1/-2)$ sürekli kesri ve $\{S_n\}$ de onun lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi olmak üzere $\bar{\mathbb{D}}$ bölgesi için $K_n = S_n(\bar{\mathbb{D}})$ tanımlansın. O halde K_n diskleri

$$\bar{\mathbb{D}} \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n$$

şeklinde iç içe kapalı dairesel disklerdir.

İspat. $\mathbf{K}(-1/-2)$ sürekli kesrinde $k = 2$ olduğundan bu sürekli kesir bir Pringsheim kesridir. Dolayısıyla $\bar{\mathbb{D}}$ dairesel diski ve $\mathbf{K}(-1/-2)$ sürekli kesrinin lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi $\{s_n\}$ olmak üzere $s_n(\bar{\mathbb{D}}) \subset \bar{\mathbb{D}}$ dir. O halde

$$K_n = S_n(\bar{\mathbb{D}}) = S_{n-1}(s_n(\bar{\mathbb{D}})) \subseteq S_{n-1}(\bar{\mathbb{D}}) = K_{n-1}$$

$$K_{n-1} = S_{n-1}(\bar{\mathbb{D}}) = S_{n-2}(s_{n-1}(\bar{\mathbb{D}})) \subseteq S_{n-2}(\bar{\mathbb{D}}) = K_{n-2}$$

$\vdots$

$$K_2 = S_2(\bar{\mathbb{D}}) = S_1(s_2(\bar{\mathbb{D}})) \subseteq S_1(\bar{\mathbb{D}}) = K_1$$

dir. Dolayısıyla buradan

$$K_n \subset K_{n-1} \subset \dots \subset K_2 \subset K_1 \subset \overline{\mathbb{D}}$$

olduğu görülür.

$k = 2$ için K_n kapalı dairesel diskleri görsel olarak incelenmek istenirse Python programlama dilinde ilk beş disk için şu algoritma kullanılır:

```
import matplotlib.pyplot as plt

circle1 = plt.Circle((2/3,0), 1/3, color='black')
circle2 = plt.Circle((4/5,0), 1/5, color='dimgrey')
circle3 = plt.Circle((6/7,0), 1/7, color='slategrey')
circle4 = plt.Circle((8/9,0), 1/9, color='darkgrey')
circle5 = plt.Circle((10/11,0), 1/11, color='lightgrey',clip_on=False)

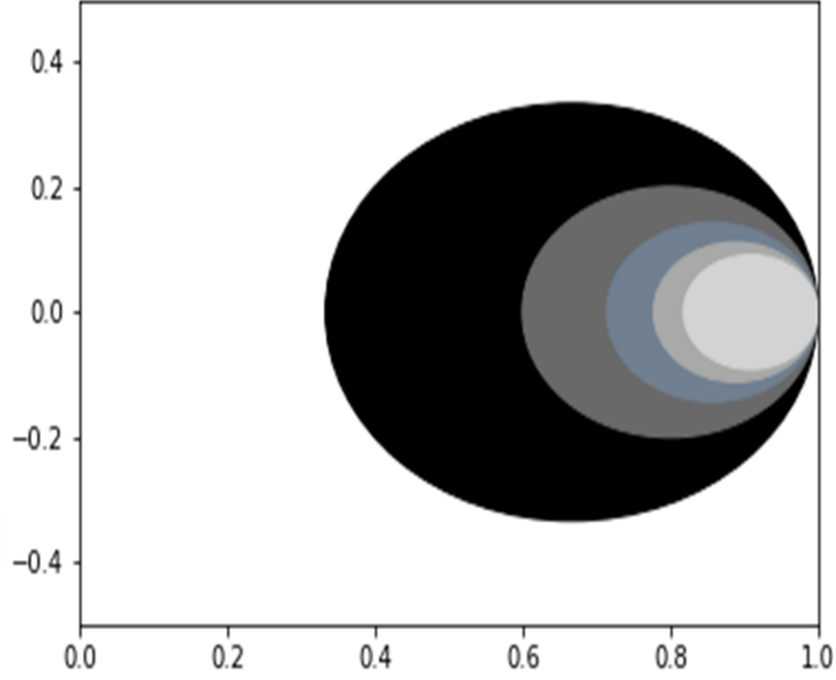
fig, axes = plt.subplots()

plt.xlim(0,1,)
plt.ylim(-0.5,0.5)

axes.add_artist(circle1)
axes.add_artist(circle2)
axes.add_artist(circle3)
axes.add_artist(circle4)
axes.add_artist(circle5)

fig.savefig('plotcircles.png')
```

Bu algoritma ile çizdirilen diskler Şekil 7. de olduğu gibidir. Burada K_n disklerin 1 noktasında teğet oldukları görülür. $k = 2$ için K_n disklerinin yakınsaklık durumu ile ilgili sonuç aşağıda verilmiştir.



Şekil 7. $k = 2$ için K_n kapalı dairesel diskleri

Sonuç 2.1.1.3. $\mathbb{D}$ kapalı dairesel bölgesi ve $\mathbf{K}(-1/-2)$ sürekli kesri için $K_n = S_n(\mathbb{D})$ ile oluşturulan $\{K_n\}$ dizisi için sınır nokta durumu vardır ve $f = 1$ noktasına yakınsar.

İspat. K_n diskleri, $\mathbb{D}$ kapalı dairesel diskinin alt kümeleri olduğundan kapalı dairesel diskleridir. O halde K_n diskleri, yarıçapı $\{R_n\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n+1}\right\}$, merkezi $\{C_n\} = \left\{1, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{2n}{2n+1}\right\}$ olacak şekilde dizilerden oluştuğuna göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$$

limitleri mevcuttur. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ olduğundan sınır noktası durumu vardır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1$ noktasına yakınsar.

2.1.2. $K(-1/-3)$ Sürekli Kesrinin K_n Diskleri

$k = 3$ için $K(-1/-3)$ sürekli kesrinin dönüşümlerinin dizisi $s_n(w) = \frac{-1}{-3+w}$ biçimindedir. $\mathbb{D}$ kapalı dairesel diskinin $\{s_n\}$ ile üretilen $\{S_n\}$ lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi Fibonacci sayı dizisinin elemanları ile

$$S_n(w) = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n(w) = \frac{-F_{2n-2}w + F_{2n}}{-F_{2n}w + F_{2n+2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile temsil edilir. Burada bu dönüşümün $S_n^{-1}(w)$ ters dönüşümleri

$$S_n^{-1}(w) = \frac{F_{2n+2}w - F_{2n}}{F_{2n}w - F_{2n-2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir.

Sonuç 2.1.2.1. $K(-1/-3)$ sürekli kesri ve $\{S_n\}$ de onun lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi olmak üzere $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ için $K_n = S_n(\mathbb{D})$ tanımlansın. O halde K_n resimleri

$$K_n = \left\{ v_n \in \mathbb{C} : \left| v_n - \frac{F_{4n}}{F_{4n+2}} \right| \leq \frac{1}{F_{4n+2}} \right\}, \quad n \geq 1$$

şeklinde, merkezi $C_n = \left(\frac{F_{4n}}{F_{4n+2}}, 0 \right)$ yarıçapı $R_n = \frac{1}{F_{4n+2}}$ olan kapalı dairesel disklerdir.

İspat. Yine matematiksel induksiyon kullanılarak ispat yapılsın. Bu durumda her $v_1 \in K_1$ için $n = 1$ alınırsa $K_1 = S_1(\mathbb{D})$ olmak üzere bu dönüşümün S_1^{-1} ters dönüşümü

$$S_1^{-1}(v_1) = \frac{F_4 v_1 - F_2}{F_2 v_1 - F_0}$$

şeklindedir. $S_1^{-1}(v_1) \in \mathbb{D}$ olduğundan K_1 diskinin yeri

$$\left| \frac{F_4 v_1 - F_2}{F_2 v_1 - F_0} \right| \leq 1$$

ifadesinin çözümlenmesi ile elde edilir. O halde $v_1 = x_1 + iy_1$ olmak üzere

$$\left| \frac{F_4 x_1 + iF_4 y_1 - F_2}{F_2 x_1 + iF_2 y_1 - F_0} \right| \leq 1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |F_4x_1 + iF_4y_1 - F_2| \leq |F_2x_1 + iF_2y_1 - F_0| \\
&\Rightarrow (F_4x_1 - F_2)^2 + (F_4y_1)^2 \leq (F_2x_1 - F_0)^2 + (F_2y_1)^2 \\
&\Rightarrow (F_4x_1)^2 - 2F_4F_2x_1 + F_2^2 + (F_4y_1)^2 \leq (F_2x_1)^2 - 2F_2F_0x_1 + F_0^2 + (F_2y_1)^2 \\
&\Rightarrow (F_4^2 - F_2^2)x_1^2 - 2x_1F_2(F_4 - F_0) + (F_4^2 - F_2^2)y_1^2 + F_2^2 - F_0^2 \leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin $F_{2n} = F_nL_n$, $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$ ve $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$ özellikleri kullanılırsa bu ifade

$$F_6x_1^2 - 2F_4x_1 + F_6y_1^2 + F_2 \leq 0$$

olur. Burada son eşitsizlik F_6 ile bölünürse;

$$x_1^2 - 2\frac{F_4}{F_6}x_1 + y_1^2 + \frac{F_2}{F_6} \leq 0$$

ve buradan K_1 diskinin yeri

$$\left(x_1 - \frac{F_4}{F_6}\right)^2 + y_1^2 \leq \left(\frac{1}{F_6}\right)^2$$

şeklinde elde edilir. Bu da $F_4 = 3, F_6 = 8$ olmak üzere merkezi $\left(\frac{F_4}{F_6}, 0\right)$ ve yarıçapı $\frac{1}{F_6}$ olan K_1 kapalı dairesel diski olduğunu belirtir. Şimdi K_n verildiği gibi kabul edilsin ve buna göre K_{n+1} diski elde edilmeye çalışılsın. O halde S_{n+1} lineer kesirli dönüşümü

$$S_{n+1}(w) = S_n(S_{n+1}(w)) = \frac{-F_{2n}w + F_{2n+2}}{-F_{2n+2}w + F_{2n+4}}$$

ise S_{n+1}^{-1} lineer kesirli dönüşümün ters dönüşümü

$$S_{n+1}^{-1}(w) = \frac{F_{2n+4}w - F_{2n+2}}{F_{2n+2}w - F_{2n}}$$

şeklindedir. Her $v_{n+1} \in K_{n+1}$ için $S_{n+1}^{-1}(v_{n+1}) \in \mathbb{D}$ olacağından

$$\left| \frac{F_{2n+4}v_{n+1} - F_{2n+2}}{F_{2n+2}v_{n+1} - F_{2n}} \right| \leq 1$$

ifadesinin çözümlenmesi ile elde edilir. O halde $v_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ olmak üzere

$$\left| \frac{F_{2n+4}x_{n+1} + iF_{2n+4}y_{n+1} - F_{2n+2}}{F_{2n+2}x_{n+1} + iF_{2n+2}y_{n+1} - F_{2n}} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |F_{2n+4}x_{n+1} + iF_{2n+4}y_{n+1} - F_{2n+2}| \leq |F_{2n+2}x_{n+1} + iF_{2n+2}y_{n+1} - F_{2n}|$$

$$\Rightarrow (F_{2n+4}x_{n+1} - F_{2n+2})^2 + (F_{2n+4}y_{n+1})^2 \leq (F_{2n+2}x_{n+1} - F_{2n})^2 + (F_{2n+2}y_{n+1})^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (F_{2n+4}x_{n+1})^2 - 2F_{2n+4}F_{2n+2}x_{n+1} + F_{2n+2}^2 + (F_{2n+4}y_{n+1})^2 \\ \leq (F_{2n+2}x_{n+1})^2 - 2F_{2n+2}F_{2n}x_{n+1} + F_{2n}^2 + (F_{2n+2}y_{n+1})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (F_{2n+4}^2 - F_{2n+2}^2)x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}F_{2n+2}(F_{2n+4} - F_{2n}) \\ + (F_{2n+4}^2 - F_{2n+2}^2)y_{n+1}^2 + F_{2n+2}^2 - F_{2n}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede Fibonacci ve Lucas sayı dizi özellikleri kullanılırsa

$$F_{2n+4}^2 - F_{2n+2}^2 = F_{4n+6}, \quad F_{2n+2}(F_{2n+4} - F_{2n}) = F_{4n+4}, \quad F_{2n+2}^2 - F_{2n}^2 = F_{4n+2}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler son ifadede yerine yazıldığında

$$F_{4n+6}x_{n+1}^2 - 2F_{4n+4}x_{n+1} + F_{4n+6}y_{n+1}^2 + F_{4n+2} \leq 0$$

olur. Burada son eşitsizlik F_{4n+6} ile bölünürse;

$$x_{n+1}^2 - 2\frac{F_{4n+4}}{F_{4n+6}}x_{n+1} + y_{n+1}^2 + \frac{F_{4n+2}}{F_{4n+6}} \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(x_{n+1} - \frac{F_{4n+4}}{F_{4n+6}}\right)^2 + y_{n+1}^2 \leq \left(\frac{1}{F_{4n+6}}\right)^2$$

elde edilir. Son olarak K_{n+1} diskinin yeri

$$\left(x_{n+1} - \frac{F_{4(n+1)}}{F_{4(n+1)+2}}\right)^2 + y_{n+1}^2 \leq \left(\frac{1}{F_{4(n+1)+2}}\right)^2$$

dir. Bu şekilde ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.2.1. $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesri, $\{S_n\}$ onun lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi olmak üzere $\bar{\mathbb{D}}$ dairesel diski için $K_n = S_n(\bar{\mathbb{D}})$ tanımlansın. O halde K_n diskleri

$$\bar{\mathbb{D}} \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n$$

şeklinde iç içe kapalı dairesel disklerdir.

İspat. $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesrinde $k = 3$ olduğundan bu sürekli kesir bir Pringsheim kesridir. Dolayısıyla $\bar{\mathbb{D}}$ dairesel diski ve $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesrinin lineer kesirli dönüşümlerinin dizisi $\{s_n\}$ olmak üzere $s_n(\bar{\mathbb{D}}) \subset \bar{\mathbb{D}}$ dir. O halde

$$K_n = S_n(\bar{\mathbb{D}}) = S_{n-1}(s_n(\bar{\mathbb{D}})) \subseteq S_{n-1}(\bar{\mathbb{D}}) = K_{n-1}$$

$$K_{n-1} = S_{n-1}(\bar{\mathbb{D}}) = S_{n-2}(s_{n-1}(\bar{\mathbb{D}})) \subseteq S_{n-2}(\bar{\mathbb{D}}) = K_{n-2}$$

$\vdots$

$$K_2 = S_2(\bar{\mathbb{D}}) = S_1(s_2(\bar{\mathbb{D}})) \subseteq S_1(\bar{\mathbb{D}}) = K_1$$

dir. Dolayısıyla buradan

$$K_n \subset K_{n-1} \subset \cdots \subset K_2 \subset K_1 \subset \bar{\mathbb{D}}$$

olduğu görülür. ■

$k = 3$ için K_n kapalı dairesel diskleri Python programlama dili ile çizdirilmek istendiğinde, ilk üç disk için aşağıdaki algoritma kullanılabilir:

```

import matplotlib.pyplot as plt

circle1 = plt.Circle((3/8,0), 1/8, color='lightgrey')
circle2 = plt.Circle((21/55,0), 1/55, color='grey')
circle3 = plt.Circle((144/377,0), 1/377, color='black',clip_on=False)

fig, axes = plt.subplots()

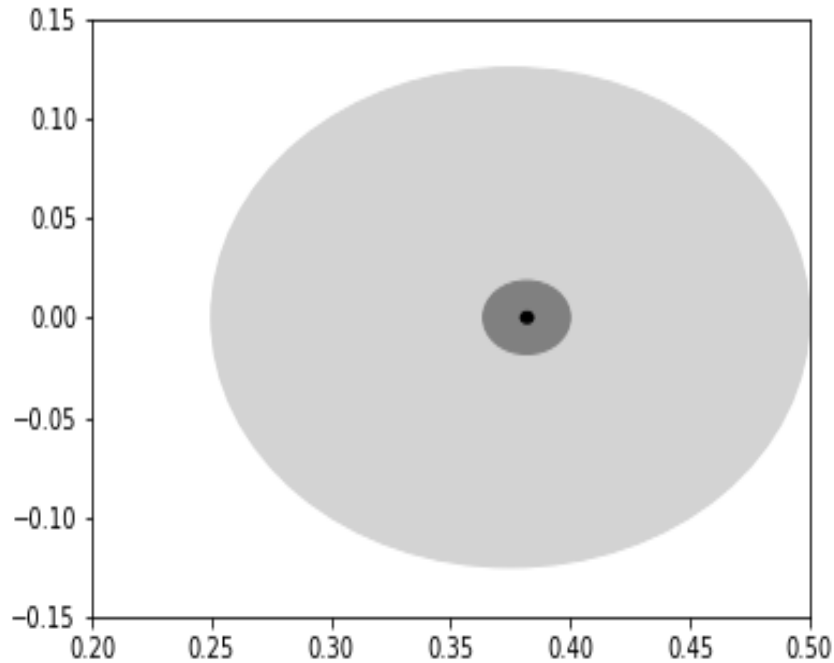
plt.xlim(0.2,0.5)
plt.ylim(-0.15,0.15)

axes.add_artist(circle1)
axes.add_artist(circle2)
axes.add_artist(circle3)

fig.savefig('plotcircles.png')

```

Bu algoritma ile çizdirilen diskler Şekil 8 de olduğu gibidir. $k = 3$ için K_n disklerinin yakınsaklık durumu ile ilgili sonuç aşağıda verilmiştir.



Şekil 8. $k = 3$ için K_n kapalı dairesel diskleri

Sonuç 2.1.2.3. $\mathbb{D}$ kapalı dairesel bölgesi ve $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesri için $K_n = S_n(\mathbb{D})$ ile tanımlanan $\{K_n\}$ dizisi için sınır nokta durumu vardır ve $f = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ noktasına yakınsar.

İspat. K_n diskleri, $\mathbb{D}$ kapalı dairesel diskinin alt kümeleri olduğundan kapalı dairesel diskleridir. O halde K_n diskleri, yarıçapı $\{R_n\} = \left\{0, \frac{1}{F_6}, \frac{1}{F_{10}}, \dots, \frac{1}{F_{4n+2}}\right\}$, merkezi $\{C_n\} = \left\{1, \frac{F_4}{F_6}, \frac{F_8}{F_{10}}, \dots, \frac{F_{4n}}{F_{4n+2}}\right\}$ olacak şekilde dizilerden oluştuğuna göre

$$\lim R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_{4n+2}} = 0 \text{ ve } \lim C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{4n}}{F_{4n+2}} = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

limitleri mevcuttur. $\lim R_n = 0$ olduğundan sınır noktası durumu vardır ve $\lim C_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ noktasına yakınsar.

2.2. Minimal Uzunluklu Hiperbolik Yolların Poincare Diskinde Resimleri

$\mathbb{D}$ Poincare diskinden $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemine alınan Möbiüs dönüşümlerinin bir elemanı

$$\mu(z) = \frac{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{i}{\sqrt{2}}}$$

şeklinde alınsın. Bu durumda $\mathbb{D}$ de bir hiperbolik doğru, $\mathbb{H}$ da bir hiperbolik doğrunun μ^{-1} altındaki görüntüsüdür[16]. $c \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde ℓ hiperbolik doğrusunun denklemi

$$\ell = \{z \in \mathbb{H}: \operatorname{Re}(z) = c\}$$

ise bu durumda

$$\ell_c = \{z \in \mathbb{D}: \operatorname{Re}(\mu(z)) = c\}$$

denklemine sahiptir ki burada

$$Re(\mu(z)) = \frac{-Re(z)}{\frac{1}{2}z\bar{z} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}(\bar{z} - z)}$$

şeklinde hesaplanır. $c = 0$ için $\mathbb{D}$ de ℓ_c hiperbolik doğrusu

$$\ell_c = \{z \in \mathbb{D} : Re(z) = 0\}$$

ve buna karşılık $c \neq 0$ için aynı doğru

$$\ell_c = \left\{z \in \mathbb{D} : \left|z - \left(-\frac{1}{c} - i\right)\right| = \frac{1}{c}\right\}$$

şeklindedir. ℓ_c yi içeren Öklid çemberi, birim çemberi dik olarak keser. Eğer $\mathbb{H}$ da ℓ hiperbolik doğrusu, $c \in \mathbb{R}$, $r > 0$ için

$$\ell = \{z \in \mathbb{H} : |z - c|^2 = r^2\}$$

ise bu durumda

$$\ell_{c,r} = \{z \in \mathbb{D} : |\mu(z) - c|^2 = r^2\}$$

dir. Burada basitçe $|\mu(z) - c|^2 = r^2$ ifadesi hesaplanmak istenirse;

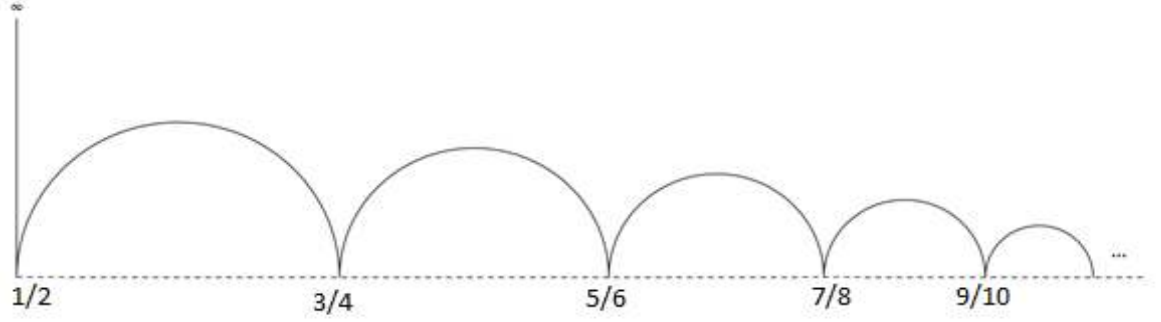
$$\left|z - \left(\frac{-2c + i(1 + r^2 - c^2)}{1 + c^2 - r^2}\right)\right|^2 = \frac{4r^2}{(1 + c^2 - r^2)^2} \quad (67)$$

denklemine dönüşür. $|\mu(z) - c|^2 = r^2$ denklemi ile tanımlanan Öklid çemberinin birim çembere dik olduğu söylenir[16].

Bu bilgiler ışığında 1.11. Bölümde verilen $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $1 \leq k \leq N$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında sağ yönlü minimal uzunluklu yolun Poincare diskine aktarılması ile ilgilenilsin. Burada $k = 2$ olmak üzere $\frac{u}{N} = \frac{1}{2}$ ile başlayan $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki köşeleri $\vec{v}_n = \frac{u + \frac{n}{n+1}}{N}$ ile verildi(Sonuç 1.11.11.[9]). Bu durumda $\mathbf{F}_{1,2}$ grafında sağ yönlü minimal uzunluklu hiperbolik yol

$$\infty \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow \frac{5}{6} \rightarrow \frac{7}{8} \rightarrow \frac{9}{10} \rightarrow \dots$$

şeklindedir. Bu hiperbolik yol Şekil 9. da gösterilmiştir.

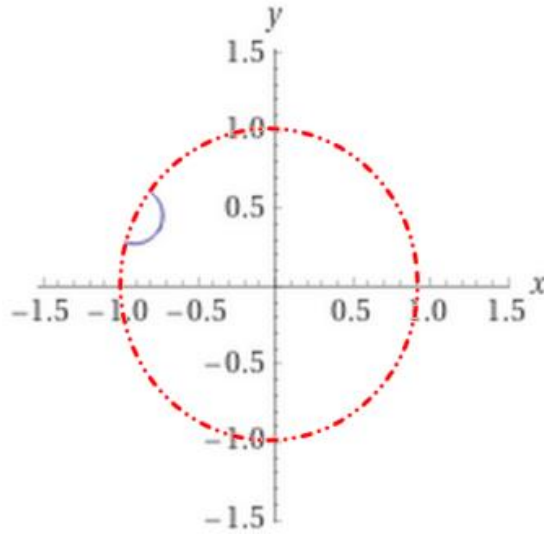


Şekil 9. $F_{1,2}$ grafında sağ yönlü minimal uzunluklu hiperbolik yol

Bu hiperbolik yol, (67) ile verilen denklem kullanılarak Poincare diskine kolayca aktarılabilir. O halde ilk olarak $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{4}$ kenarı, yarıçapı $r_1 = \frac{1}{8}$ ve merkezi $c_1 = \frac{5}{8}$ olan ℓ_1 hiperbolik doğrusunu belirtir. Bu durumda bu doğrunun $\mu(z)$ lineer kesirli dönüşümü altında $\mathbb{D}$ diskindeki resmi olan ℓ_{c_1} hiperbolik doğrusu

$$\ell_{c_1} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - \left(\frac{-10 + 5i}{11} \right) \right|^2 = \left(\frac{2}{11} \right)^2 \right\}$$

biçiminde ve bu doğrunun yeri

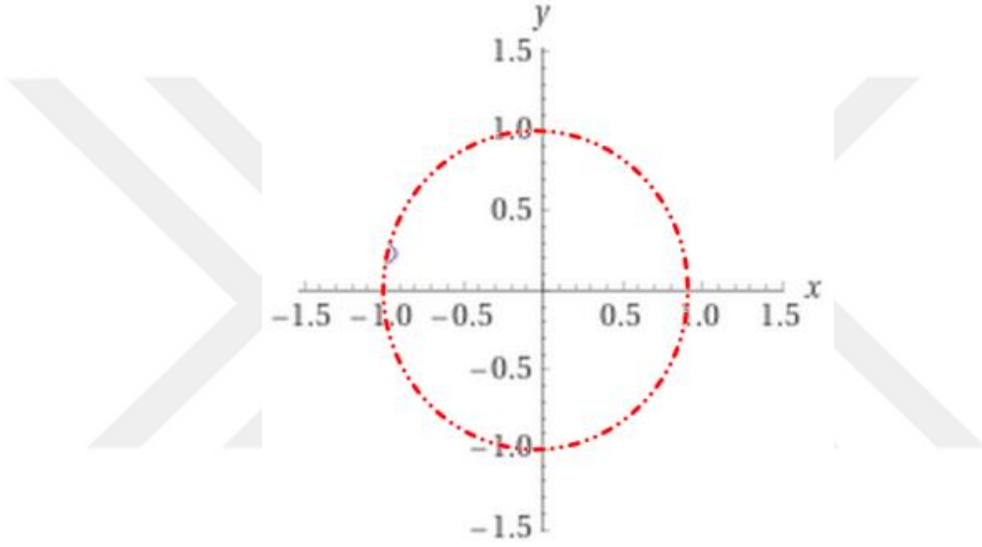


Şekil 10. ℓ_{c_1} doğrusunun Poincare diskindeki resmi

şeklindedir. $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{5}{6}$ kenarı için ise yarıçapı $r_2 = \frac{1}{24}$ ve merkezi $c_2 = \frac{19}{24}$ olan ℓ_2 hiperbolik doğrusu vardır. Bu hiperbolik doğrunun $\mu(z)$ dönüşümü altında $\mathbb{D}$ diskindeki resmi olan ℓ_{c_2} hiperbolik doğrusu

$$\ell_{c_2} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - \left(\frac{-38 + 9i}{39} \right) \right|^2 = \left(\frac{2}{39} \right)^2 \right\}$$

şeklinde elde edilir. Poincare diskinde bu doğrunun yeri

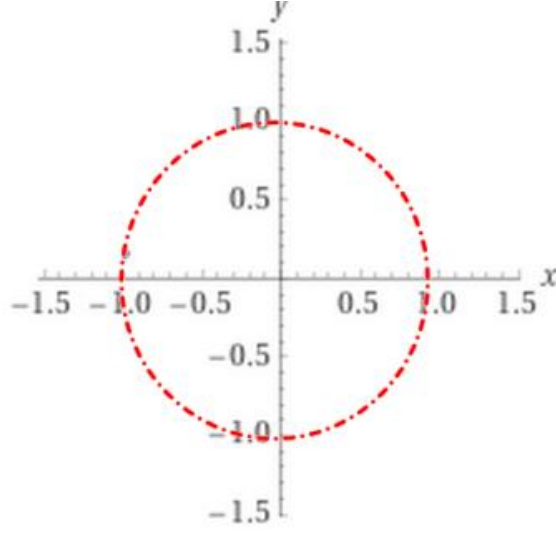


Şekil 11. ℓ_{c_2} doğrusunun Poincare diskindeki resmi

ile gösterilir. $\frac{5}{6} \rightarrow \frac{7}{8}$ kenarı ise yarıçapı $r_3 = \frac{1}{48}$ ve merkezi $c_3 = \frac{21}{48}$ olan ℓ_3 hiperbolik doğrusunu belirtir. Bu hiperbolik doğrunun $\mu(z)$ dönüşümü altında $\mathbb{D}$ diskindeki resmi olan ℓ_{c_3} hiperbolik doğrusu

$$\ell_{c_3} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - \left(\frac{-82 + 13i}{83} \right) \right|^2 = \left(\frac{2}{83} \right)^2 \right\}$$

şeklinde elde edilir. Bu doğrunun resmi ise Şekil 12 deki gibidir. Görüldüğü üzere doğrular giderek kısalır, dolayısıyla bu doğruları çizmek, gösterim açısından zorlaşır.



Şekil 12. ℓ_{c_3} doğrusunun Poincare diskindeki resmi

Benzer şekilde $\frac{7}{8} \rightarrow \frac{9}{10}$ kenarı yarıçapı $r_4 = \frac{1}{80}$ ve merkezi $c_4 = \frac{71}{80}$ olan ℓ_4 hiperbolik doğrusunu gösterir. Bu hiperbolik doğrunun $\mu(z)$ dönüşümü altında $\mathbb{D}$ diskindeki resmi olan ℓ_{c_4} hiperbolik doğrusu

$$\ell_{c_4} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - \left(\frac{-142 + 17i}{143} \right) \right|^2 = \left(\frac{2}{143} \right)^2 \right\}$$

şeklinde elde edilir. Yine aynı şekilde $\frac{9}{10} \rightarrow \frac{11}{12}$ kenarı yarıçapı $r_5 = \frac{1}{120}$ ve merkezi $c_5 = \frac{109}{120}$ olan ℓ_5 hiperbolik doğrusunu gösterir. Bu hiperbolik doğrunun $\mu(z)$ dönüşümü altında $\mathbb{D}$ diskindeki resmi olan ℓ_{c_5} hiperbolik doğrusu

$$\ell_{c_5} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - \left(\frac{-218 + 21i}{219} \right) \right|^2 = \left(\frac{2}{219} \right)^2 \right\}$$

şeklindedir ve son olarak $\frac{11}{12} \rightarrow \frac{13}{14}$ kenarı yarıçapı $r_6 = \frac{1}{168}$ ve merkezi $c_6 = \frac{155}{168}$ olan ℓ_6 hiperbolik doğrusuna bakılacak olunursa, bu hiperbolik doğrunun $\mu(z)$ dönüşümü altında $\mathbb{D}$ diskindeki resmi olan ℓ_{c_6} hiperbolik doğrusu

$$\ell_{c_6} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - \left(\frac{-310 + 25i}{311} \right) \right|^2 = \left(\frac{2}{311} \right)^2 \right\}$$

şeklinde elde edilir. Bu örüntüye devam ederek $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafindeki sağ yönlü minimal uzunluklu yolların $\mathbb{D}$ Poincare diskindeki görüntüsü aşağıdaki gibidir.

Konjektür 2.2.1. $\mathbf{F}_{1,2}$ grafında $\vec{v}_{n-1} \rightarrow \vec{v}_n$ minimal uzunluklu hiperbolik yolun yarıçapı $r_n = \frac{1}{4n^2+4n}$ ve merkezi $c_n = \frac{4n^2+2n-1}{4n^2+4n}$ dir. Bu hiperbolik doğrunun $\mu(z)$ dönüşümü altında $\mathbb{D}$ diskindeki resmi olan ℓ_{c_n} hiperbolik doğrusu

$$\ell_{c_n} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - \left(\frac{-4n(2n+1) + 1 + (4n+1)i}{4n(2n+1) - 1} \right) \right|^2 = \left(\frac{2}{4n(2n+1) - 1} \right)^2 \right\}$$

olarak yazılır.



3. İRDELEME

1988 yılında Jones, Singerman ve Wicks, [2] çalışmasında Γ Modüler grubunun rasyonel projektif doğrusu üzerindeki imprimitif hareketi incelediler ve bu harekete bağlı olarak alt yörüngesel grafları araştırdılar. Bu çalışmada bir $G_{u,N}$ grafinin orman olabilmesi için gerek ve yeter şartın üçgen içermemesi olduğu konjektür olarak verildi. 2001 yılında ise M. Akbaş, [3] çalışmasında bu konjektürün ispatını verdi ve sonuç olarak $\Gamma_0(N)$ alt grubunun özel bir elemanı ile bir sürekli kesir oluşturuldu. 2011 yılında Değer, [6] çalışmasında;

- $F_{u,N}$ alt yörüngesel graflar üzerindeki minimal uzunluklu yollar ile birlikte sürekli kesirler arasında bağlantı geliştirdi.
- $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafindaki minimal uzunluklu hiperbolik yolda bir köşenin bağlanabileceği en uzak köşe değeri elde etti.

Aynı yazar 2017 yılında [11] çalışmasında ise özel durumlarda minimal uzunluklu hiperbolik yolların köşelerinin sürekli kesir bağlantısı ile Fibonacci sayı dizisi arasında bir ilişki tespit etti. Ayrıca [4], [5] çalışmalarında alt yörüngesel grafların devre şartları, [7-10] çalışmalarında da yine minimal uzunluklu hiperbolik yolların özel köşe değerleri için sürekli kesirler ile özel sayı dizileri arasında bağlantılar incelendi.

Bu tez çalışmasında, daha önce alt yörüngesel graflarda minimal uzunluklu hiperbolik yolların özel köşeleri için elde edilen bağlantılar kullanılarak yeni bağlantılar elde etmek hedeflendi. Bu bağlamda;

- $\mathbb{D}$ birim diskinin kapanışının [6] çalışmasında elde edilen sürekli kesrin özel k değerleri için lineer kesirli dönüşümleri altında K_n resimleri incelendi. Bu resimlerin formu ve yakınsaklık durumu araştırıldı (Yapılan çalışmalar 2.1.)
- Elde edilen K_n resimleri için [11] çalışması ile verilen Fibonacci sayı dizisi bağıntıları kullanılarak yeni bir bağıntı geliştirildi (Sonuç 2.1.2.1.).
- $F_{1,2}$ grafinin minimal uzunluklu hiperbolik yolları, özel bir Möbiüs dönüşümü kullanılarak Poincare diskine aktarıldı.

4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen başlıca önemli sonuçlar şu şekilde verilebilir:

1. $K(-1/-k)$ sürekli kesrinin lineer kesirli dönüşümleri altında $k = 2$ için $\bar{\mathbb{D}}$ kompleks diskinin $S_n(\bar{\mathbb{D}})$ resimleri olan K_n kapalı dairesel disklerinin;

- genel formu elde edildi(Sonuç 2.1.1.1.),
- iç içe oldukları gösterildi(Sonuç 2.1.1.2.),
- yakınsaklığı incelendi(Sonuç 2.1.1.3.).

2. $K(-1/-k)$ sürekli kesrinin lineer kesirli dönüşümleri altında $k = 3$ için $\bar{\mathbb{D}}$ kompleks diskinin $S_n(\bar{\mathbb{D}})$ resimleri olan K_n kapalı dairesel disklerinin;

- genel formu ile Fibonacci sayı dizisi arasında bir bağıntı elde edildi(Sonuç 2.1.2.1.),
- iç içe oldukları gösterildi(Sonuç 2.1.2.2.),
- yakınsaklığı incelendi(Sonuç 2.1.2.3.).

3. $k = 2$ için $F_{1,2}$ grafinin sağ yönlü minimal uzunluklu hiperbolik yollarının Poincare diskindeki yerlerinin genel formu verildi(Konjektür 2.2.1.)

4.Genel olarak yapılan çalışmalar kısmında elde edilen bağıntılar, çizimleri ile desteklendi.

5. ÖNERİLER

1. $K(-1/-k)$ sürekli kesrinin lineer kesirli dönüşümleri altında farklı kompleks disklerin resimleri incelenebilir ve elde edilen bölgelerin yeri ve yakınsaklık durumu araştırılabilir.

2. Farklı k değerleri için $K(-1/-k)$ sürekli kesrinin yakınsaklık bölgeleri incelenebilir ve bu bölgelerin yerleri ile özel sayı dizileri arasında yeni bağıntılar elde edilebilir.

3. $F_{u,N}$ grafinin sol yönlü minimal uzunluklu yolların Poincare diskindeki yerleri araştırılarak elde edilen doğruların genel formları verilebilir.

4. $F_{u,N}$ grafinde farklı k değerleri için minimal uzunluklu yolların Poincare diskindeki resimleri bulunabilir.

5. Elde edilen bağıntıların bilgisayar programlarında algoritmaları oluşturularak yeni bakış açısı geliştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Sims C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Math. Zeitschr., 95, (1967), 76-86.
2. Jones, G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 160 (1991) 316-338.
3. Akbas M., On Suborbital Graphs For The Modular Group, Bull. London Math. Soc. 33, (2001), 647-652.
4. Kader S., Guler B.O. and Deger A.H., Suborbital Graphs For A Special Subgroup Of The Normalizer Of $\Gamma_0(m)$, Iran. J.Sci. Technol. Trans. A Sci ,34,4 (2010), 305-312.
5. Guler B.O., Besenk M., Deger A.H. and Kader S., Elliptic Elements And Circuits In Suborbital Graphs, Hacet. J. Math. Stat., 40,2 (2011), 203-210.
6. Deger A.H., Besenk M., and Guler B.O., On Suborbital Graphs And Related Continued Fractions, Applied Mathematics And Computation, 218, 3, (2011), 746-750.
7. Değer A.H., Akbaba Ü., Some special values of vertices of trees on the suborbital graphs, AIP Conf. Proc., vol.1926, no.020013, (2018), 1-6.
8. Değer A.H., Vertices Of Paths Of Minimal Lengths On Suborbital Graphs, Filomat 31:4, (2017) , 913-923.
9. Akbaba Ü., Değer A.H., Tuylu T., On Some Connections Between Suborbital Graphs and Special Sequences, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, vol.10, (2018), 134-143.
10. Değer, A.H., $\Gamma_0(n)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki $\mathbb{Q}$ Köşeli Minimal Uzunluklu Eğriler, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.
11. Değer A.H., Fibonacci Sayıları ile Alt Yörüngesel Grafların Özel Köşeleri Arasındaki İlişkiler, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, cilt.7, (2017) 168-180.
12. <https://muratbeken.com.tr/wp-content/uploads/2019/05/gbyte-graf.pdf> 27.2.2020.
13. Gross, J.L. and Yellen, J., Handbook of Graph Theory, first edn. CRC Press, 2003.

14. Garnier R., Taylor J., Discrete Mathematics For New Technology, 2nd edition, IOP Publishing, 2002.
15. <https://docplayer.biz.tr/35789667-Hiperbolik-geometrinin-tarihcesi.html> 5.3.2020.
16. Anderson James W., Hyperbolic Geometry, 2nd edition, Springer-Verlay, 2005.
17. Lorentzen L., Waadeland H., Continued Fractions: Vol 1. Convergence Theory, 2nd edition, Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science 1, Atlantis Press, Paris, 2008.
18. Beardon A. F., The Geometry of Pringsheim's Continued Fractions, Geometriae Dedicata, 84, (2001), 125-134.
19. Jones W.B. and Thron W.J., Continued Fractions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 11, Addison-Wesley, 1980.
20. Koshy T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-Interscience Publication, Canada, 2001.
21. Jones G.A., D. Singerman, Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, first edition, Cambridge University Press, UK, 1987.
22. Thron W.J., A Family of Simple Convergence Regions for Continued Fractions, Duke Math. J. 11, (1944), 779-791.
23. Jones W.K. and Thron W.J., Convergence of Continued Fractions, Canad. J. Math. 20 (1968), 1037-1055.
24. Sarma R., Kushwaha S., Krishnan R., Continued Fractions Arising From $F_{1,2}$, Journal of Number Theory, 154 (2015) 179-200.
25. Wicks K., The Farey Graph and Related Topics, Project, Faculty of Mathematical Studies, University of Southampton, 1983.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise eğitimini Trabzon'da tamamladı. Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans programında eğitime başladı. İyi derecede İngilizce bilmektedir.

