



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

**AMORF YAPILARDA ALTERNATİF İLETKENLİĞE
FRAKSİYONEL VE STOKASTİK YAKLAŞIMLAR**

Uğur SAĞLAM

Fizik Anabilim Dalı

Genel Fizik Programı

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Deniz DEĞER ULUTAŞ**

Haziran, 2022

İSTANBUL

Bu çalışma 14.06.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Genel Fizik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Deniz DEĞER ULUTAŞ (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Uğur YAHŐI
Marmara Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Nevin KALKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Merih SERİN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Şahin Yakut
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

[1] Sağlam, U. and Deger, D., 2021, A phenomenological approach to anomalous transport in complex or disordered media, *Can. J. Phys.*, 100(3), 180-184.

ÖNSÖZ

Akademik çalışmalarımı özgürce sürdürebilmem için bana zemin hazırlayan ve her zaman güvenen danışman hocam Prof. Dr. Deniz Değer Ulutaş'a teşekkürü bir borç bilirim.

Pozitif bakış açısı ile yardım esirgemez tutum ve yaklaşımını tüm süreçlerimin başından sonuna çekinmeden sergileyen Doç. Dr. H. Kemal Ulutaş'a teşekkür ederim.

Bitmek bilmeyen akademik çalışmalarına ayırdığım zamanı, kendisinin de değerli zamanından almak zorunda kaldığım sevgili eşim Yağmur'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2022

Uğur SAĞLAM

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	x
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. OLASILIK TEORİSİ	6
2.1.1. Kesikli Olasılıksal Dağılımlar	6
2.1.1.1. Bernoulli Dağılımı	7
2.1.1.2. Binomial Dağılım	7
2.1.1.3. Geometrik Dağılım	7
2.1.2. Sürekli Olasılıksal Dağılımlar	7
2.1.2.1. Uniform Dağılım	8
2.1.2.2. Normal Dağılım	8
2.1.2.3. Ekspansiyel Dağılım	8
2.1.3. Ağır ve Uzun-Kuyruklu Olasılıksal Dağılımlar	8
2.1.3.1. Pareto Dağılımı	9
2.1.3.2. Cauchy Dağılımı	9
2.1.3.3. Lognormal Dağılım	9
2.1.3.4. Weibull Dağılımı	10
2.2. STOKASTİK MEKANİK	10
2.2.1. Kesikli Zamanlı Stokastik Süreçler	10
2.2.1.1. Markov Zinciri	10
2.2.1.2. Bernoulli Süreci	11
2.2.1.3. Kesikli-Zamanlı Rassal Yürüyüş	11

2.2.2. Sürekli Zamanlı Stokastik Süreçler	12
2.2.2.1. Markov Süreci	12
2.2.2.2. Wiener Süreci	13
2.2.2.3. Sürekli-Zamanlı Rassal Yürüyüş	13
2.2.3. Stokastik Diferansiyel Denklemler	14
2.2.3.1. Chapman-Kolmogorov Denklemi	14
2.2.3.2. Master Denklem	14
2.2.3.3. Langevin Denklemi	15
2.2.3.4. Fokker-Planck Denklemi	16
2.2.3.5. Ito Analizi	17
2.2.3.6. Stratonovich Analizi	19
2.3. FRAKSİYONEL ANALİZ	20
2.3.1. Fraksiyonel Operatörler	23
2.3.1.1. Liouville Fraksiyonel İntegrali ve Türevi	23
2.3.1.2. Riemann Fraksiyonel İntegrali ve Türevi	23
2.3.1.3. Riemann-Liouville Fraksiyonel İntegrali ve Türevi	24
2.3.1.4. Caputo Fraksiyonel Türevi	25
2.3.1.5. Prabhakar Fraksiyonel İntegral ve Türevi	25
2.4. İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ	27
2.4.1. Uzay ve Zaman Dönüşümleri	27
2.4.1.1. Fourier Dönüşümü	27
2.4.1.2. Laplace Dönüşümü	28
2.5. KOMPLEKS RELAKSASYON VE İLETKENLİK TEORİSİ	29
2.5.1. Alternatif İletkenlik Teorisi	35
2.5.1.1. Debye Tipi Relaksasyon ve İletkenlik	35
2.5.1.2. Kompleks Düzlem ya da Argand Diyagramı	36
2.5.1.3. Cole-Cole Tipi Relaksasyon ve İletkenlik	39
2.5.1.4. Cole-Davidson Tipi Relaksasyon ve İletkenlik	43
2.5.1.5. Havriliak-Negami Tipi Relaksasyon ve İletkenlik	46
3. MALZEME VE YÖNTEM	51
4. BULGULAR	57
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	59

KAYNAKLAR	62
EKLER	72
EK 1. Fraksiyonel Diferansiyel Operatörler	72
EK 2. Riemann-Liouville and Caputo Fraksiyonel Operatörleri.....	72
EK 3. Pseudo-Fraksiyonel Operatörler	74
ÖZGEÇMİŞ	79



ŞEKİL LİSTESİ

Page No

Şekil 2.1: Değişken bir elektrik alanında kompleks dielektrik sabitinin (ϵ^*), gerçekte (ϵ') ve imajiner (ϵ'') kısımları.	31
Şekil 2.2: Bir polar dielektrikte polarizasyon oluşumu.	33
Şekil 2.3: $\log \omega$ fonksiyonu olarak çizilen Debye denklemlerinin şematik gösterimi. (ϵ' için pik noktası $\omega\tau = 1$ 'da gerçekleşir. $\tan \delta$ ve ϵ'' için ise pik noktaları aynı frekansta oluşmaz.)	36
Şekil 2.4: Debye denklemlerinin ϵ^* için bir yarım daireyi gösteren Cole-Cole diyagramı.	38
Şekil 2.5: Cole-Cole relaksasyonuna göre bir polar dielektrikte ϵ' 'un gerçekte kısmının şematik gösterimi. $\alpha = 0$ Debye relaksasyonunu sağlar.	40
Şekil 2.6: Cole-Cole relaksasyonuna göre bir polar dielektrikte ϵ'' 'un imajiner kısmının şematik gösterimi. $\alpha = 0$ Debye relaksasyonunu sağlar.	40
Şekil 2.7: Cole-Cole denkleminde geometrik bağıntılar.	42
Şekil 2.8: Farklı β değerleri için $\omega\tau$ fonksiyonu olarak ϵ' 'nin şematik gösterimi.	44
Şekil 2.9: Farklı β değerleri için $\omega\tau$ fonksiyonu olarak ϵ'' 'nin şematik gösterimi.	45
Şekil 2.10: Davidson-Cole relaksasyonuna göre ϵ kompleks düzlem gösterimi. (Kayıp tepe noktası asimetrik ve düşük-frekanslı kısımda ω ile orantılıdır. Yüksek-frekanslı kısmın eğimi β 'ya bağlıdır.)	45
Şekil 2.11: ϵ 'in Havriliak-Negami fonksiyonuna göre kompleks düzlem gösterimi. (Yüksek frekanslarda doğrusal ve düşük frekanslarda dairesel bir davranış görülür.)	50
Şekil 4.1: Sb_2Te_3 için çeşitli sıcaklık ve kalınlıklarda frekansa bağlı iletkenlik ölçümleri ve Havriliak-Negami tipi iletkenlik davranışı.	59
Şekil 4.2: $TlSbTe$ için çeşitli sıcaklık ve kalınlıklarda frekansa bağlı iletkenlik ölçümleri ve Havriliak-Negami tipi iletkenlik davranışı.	59
Şekil 4.3: $pPEO$ için çeşitli sıcaklık ve kalınlıklarda frekansa bağlı iletkenlik ölçümleri ve Havriliak-Negami tipi iletkenlik davranışı.	60

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
t	: Zaman
z	: Konum
v	: Hız
ω	: Açısal frekans
η	: Sürtünme katsayısı
γ_α	: Sönümlenme katsayısı
κ_α^μ	: Genelleştirilmiş difüzyon katsayısı
$\xi(t)$	: Gaussian beyaz gürültü
σ_0	: Doğru akım iletkenliği
$\sigma(\omega)$	: Alternatif akım iletkenliği
$f(v,t)$	: Olasılık yoğunluğu fonksiyonu
$\delta(v,t)$	: Dirac delta fonksiyonu
$\langle \dots \rangle$	: Ortalama değer ya da grup ortalaması
${}^{RL}D_t^\alpha$	: Riemann-Liouville fraksiyonel türevi
${}^CD_t^\alpha$	: Caputo fraksiyonel türevi
$D_{\alpha,\rho,\lambda}^\beta$	: Prabhakar fraksiyonel türevi
${}^CD_{\alpha,\rho,\lambda}^\beta$	: Caputo düzeninde Prabhakar fraksiyonel türevi

Kısaltmalar	Açıklama
RW	: Rassal Yürüyüş
$RWRE$	: Rassal Çevrede Rassal Yürüyüş
$DTRW$	: Kesikli-Zamanlı Rassal Yürüyüş
$CTRW$	: Sürekli-Zamanlı Rassal Yürüyüş
PDF	: Olasılık Yoğunluğu Fonksiyonu
LE	: Langevin Denklemi
ME	: Master Denklem
GME	: Genelleştirilmiş Master Denklem
FME	: Fraksiyonel Master Denklem

<i>KKE</i>	: Klein-Kramers Denklemi
<i>FPE</i>	: Fokker-Planck Denklemi
<i>FFPE</i>	: Fraksiyonel Fokker-Planck Denklemi
<i>DDE</i>	: Sürüklenme-Yayılım Denklemi
<i>DAE</i>	: Yayılım-Taşınım Denklemi
<i>TE</i>	: Telegraf Denklemi
<i>FLT</i>	: Fourier-Laplace Dönüşümü
<i>CC</i>	: Cole-Cole
<i>CD</i>	: Cole-Davidson
<i>HN</i>	: Havriliak-Negami



ÖZET

DOKTORA TEZİ

AMORF YAPILARDA ALTERNATİF İLETKENLİĞE FRAKSİYONEL VE STOKASTİK YAKLAŞIMLAR

Uğur SAĞLAM

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Deniz DEĞER ULUTAŞ

Fraksiyonel analiz ve stokastik teoriye dayanan anormal taşıma teorilerini Debye, Cole-Cole, Cole-Davidson ve Havriliak-Negami tipi iletkenlik denklemlerini içeren yarı-ampirik iletkenlik formalizmine dayanan iletkenlik davranışı ile ilişkilendirmek için fenomenolojik bir yaklaşım geliştirmeyi hedeflemekteyiz. Amorf yarı iletkenler ve yalıtkanların karmaşık veya düzensiz ortamlarındaki anormal taşıma süreçlerini bilinen matematiksel metot ve yöntemler aracılığıyla belirlemeyi istemekteyiz. Bu nedenle, Langevin denklemi olarak adlandırılan stokastik hareket denklemi üzerinden hareketle Klein-Kramers veya Fokker-Planck denklemi adı verilen denk master denklemini geliştirildi ve master denklemin uzay ve zaman-fraksiyonel genelleştirmesi türetildi. Fraksiyonel master denklemi türetildikten sonra, bazı hesaplamalar ve koşullar aracılığıyla beklenen değer ya da değişkenlerin ortalama değeri belirlendi. Son olarak, ortalama iletkenlik davranışını elde etmek için iletkenlik formalizmindeki ortalama değerler kullanıldı.

Haziran, 2022, 79 sayfa.

Anahtar kelimeler: Anormal iletim, fraksiyonel master denklem, uzun-kuyruklu dağılımlar, Prabhakar türevi, Caputo düzenlemesi, Havriliak-Negami tipi davranış

SUMMARY

Ph.D. THESIS

FRACTIONAL AND STOCHASTIC APPROACHES TO ALTERNATIVE CONDUCTIVITY IN AMORPHOUS STRUCTURES

Uğur SAĞLAM

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor: Prof. Deniz DEĞER ULUTAŞ

We aim to derive a phenomenological approach to link the theories of anomalous transport governed by fractional calculus and stochastic theory with the conductivity behavior governed by the semi-empirical conductivity formalism involving Debye, Cole-Cole, Cole-Davidson, and Havriliak-Negami type conductivity equations. We want to determine the anomalous transport processes in complex or disordered media such as those occurring in the amorphous semiconductors and insulators via some familiar mathematical instruments and methods. Thus, we have started with the stochastic equation of motion called the Langevin equation, developed its equivalent master equation called Klein-Kramers or Fokker-Planck equation, and considered the space and time-fractional generalization of the master equation. Once we have derived the fractional master equation, then determined the observables or the mean value of the variables through some calculations and conditions. Finally, we have used the mean values in the conductivity formalism to obtain the average conductivity behavior.

June, 2022, 79 pages.

Keywords: Anomalous transport, fractional master equations, long-tailed distributions, Prabhakar derivative, Caputo regularization, Havriliak-Negami type behavior

1. GİRİŞ

Amorf yarı iletkenler ve yalıtkanlarda anormal taşıma olarak da adlandırılan karmaşık veya düzensiz ortam dinamiği, stokastik mekanik ve fraksiyonel analizin enstrüman, metot ve yaklaşımları kullanılarak yorumlanabilir ve tasvir edilebilir. Anormal taşıma sürecinde gözlenebilirlerin ortalama davranışı, ağır veya uzun kuyruklu olasılıksal dağılım ya da kuvvet-kanunu kuyruklu olasılıksal dağılımlı ve asimetrik, üstel ya da Gaussyen olmayan dağılımlara sahip, yönelmiş anormal difüzyon hareketini ifade eder (1; 2).

Anormal taşıma, anormal difüzyon ve fraksiyonel sürüklenme süreçlerini içeren zaman ve/veya uzay-fraksiyonel sürüklenme-difüzyon denklemi aracılığıyla tanımlanabilir. Anormal difüzyonun göstergesi, ikinci yer değiştirme momentinin veya $\langle z^2(t) \rangle \sim t^\alpha$ formunda bir ortalama kare yer değiştirmesinin ortaya çıkmasıdır, burada $\alpha \neq 1$ ve α üssüne bağlı olarak difüzyon süreci $0 < \alpha < 1$ durumu için alt difüzyon veya $\alpha > 1$ (3; 4) için süperdifüzyon olarak ayırt edilebilir. Fraksiyonel sürüklenme, zaman-fraksiyonel Fokker-Planck denklemi aracılığıyla yorumlanabilir, çünkü hem sürüklenme hem de difüzyon terimleri zaman-fraksiyonel operatörden etkilenir, ancak uzay-fraksiyonel denklemde, sürüklenme terimi uzay-fraksiyonel operatörden etkilenmez (5).

Stokastik süreçler indeks değişkenine göre, her ikisi de üstel olasılık dağılımlarına sahip olan kesikli-zamanlı ve sürekli-zamanlı stokastik süreçler olarak adlandırılan iki ana gruba ayrılabilir. Binom süreci, Bernoulli süreci, kesikli-zamanlı rassal yürüyüş gibi kesikli-zamanlı stokastik süreçler, temel bir rassal süreç tanımlar ve bazı özel limit durumlarında normal veya Gauss dağılımına sahiptir (6–8). Wiener süreci, Ornstein-Uhlenbeck süreci, sürekli-zamanlı rassal yürüyüş gibi sürekli-zamanlı stokastik süreçler, bir difüzyon veya sürüklenme-difüzyon sürecini tanımlar ve Gauss(normal) veya kaymış Gauss dağılımı gibi üstel tipte bir olasılık dağılımına sahiptir (6–8).

Rassal ortamda rassal yürüyüş (RWRE) veya sürekli-zamanlı rassal yürüyüş (CTRW), anormal taşıma süreçlerini ifade etmekte analog yöntemler olarak kullanılır. CTRW, bir parçacığın bir örgü noktasından diğerine rassal hareketini, stokastik bir süre bekleyip stokastik olarak (9; 10) atlayarak tanımlar. Bir adım uzunluğundan ve bir bekleme süresi

olasılık dağılımından türetilen bir CTRW'den bir genelleştirilmiş master denklem (GME) elde edilir. Özel uzaya ve zamana bağlı olasılık dağılımlarıyla tanımlanan bazı GME'ler de, difüzyon limitinde standart Fokker-Planck denklemine yakınsar (11).

Bir CTRW modeli, bir GME ve ayrıca ikinci hareket yasasının genellemesi olarak deterministik ve stokastik terimlerin kompozit bir birleşiminden oluşan Langevin denklemi(LE) ile tanımlanabilir (12). LE, Langevin denklemi ile ilgili Kramers-Moyal açılımı katsayıları türetilerek veya Langevin denklemi bir olasılık yoğunluğu denkliğinde kullanılarak Fokker-Planck denklemine dönüştürülebilir (13–15). Hem GME'ler hem de LE'ler, her biri farklı stokastik süreçleri ifade eden Klein-Kramers(KKE), Fokker-Planck(FPE), Telegraph Denklemi(TE), Difüzyon-Advection(DAE) denklemleri gibi denk master denklemlere(ME'ler) sahiptir (16–19).

Fraksiyonel dinamiğin, Markovyen olmayan (hafızalı) ve yerel olmayan stokastik süreçler üzerinden karmaşık ortamlarda anormal taşımayı modellemede merkezi bir rol oynadığı düşünülmüştür (20–22). Normal taşıma süreçlerini tanımlayan farklı GME'lerden ve LE'lerden master denklemler elde edilebilmesine rağmen, anormal süreçleri anlamak için master denklemlerin fraksiyonel genelleştirilmeleri üzerinde durmak gerekir. Zaman ve uzay-fraksiyonel master denklemler, uzun-kuyruklu bekleme süresi dağılımı ve dış bir yönelim varlığında üstel olmayan ve asimetric uzun menzilli sıçrama uzunluğu dağılımının belirteci olarak ortaya çıkar (23; 24).

Anormal taşıma problemi için seçilen fraksiyonel master denklemin analitik çözümü, uzay-zamanın FL domaini ile değiştirilmesine izin veren Fourier-Laplace(FL) dönüşümü kullanılarak elde edilebilir (25–27). Fraksiyonel master denklem ve bunun FL dönüşümü türetildiğinde, olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) için analitik bir çözüm elde edilebilir ve ardından bazı terimleri yok etmek üzere PDF için doğal sınır koşulları düşünülebilir. PDF'nin ters FL dönüşümü genellikle Fox H-fonksiyonu cinsinden verilir. Bir paralel, analitik türetme yoluyla aynı matematiksel yaklaşımlar kullanılarak değişkenlerin veya gözlenebilirlerin ortalaması veya beklenen değeri elde edilebilir.

Literatürde, dielektrik relaksasyon için düzensiz ya da karmaşık sistemlerin deneysel verilere göre Cole-Cole, Cole-Davidson, Havriliak-Negami denklemleri olarak adlandırılan üç ifade tanımlanmıştır. Zaman-fraksiyonel operatörleri de içeren, yanıt-uyarma veya olasılık yoğunluk fonksiyonlarının relaksasyon mekanizmalarına karşılık gelen diferansiyel

denklemleri elde edildi ve mevcut yarı-ampirik formalizmin relaksasyon fonksiyonlarını vermek üzere Fourier-Laplace dönüşümü kullanılarak çözüldü (28–32). Relaksasyon modellerinin kapsamlı bir şekilde çalışılmış olmasına rağmen, ne relaksasyon-iletkenlik analogisine dayalı bir iletkenlik formalizmi elde edilmiş (33), ne de iletkenlik formalizmini ve anormal taşıma süreçlerinin yorumlarını elde etmek için stokastik-fraksiyonel dinamik araçları kullanılarak teorik model ve yaklaşımlar geliştirilmiş olduğuna rastlanmamıştır.

Amorf yarı iletkenler ve yalıtkanları da içeren karmaşık veya düzensiz ortamlarda anormal taşıma, analitik olarak türetilmiş Debye ve yarı-ampirik Cole-Cole(CC), Cole-Davidson(CD) ve Havriliak-Negami(HN) tipi iletkenlik denklemlerine karşılık gelen bazı doğrusal olmayan ve yerel olmayan süreçler tarafından yönetilir (34–38). HN tipi iletkenlik denklemi, stokastik ve fraksiyonel dinamiğin matematiksel araçları ve yaklaşımları kullanılarak analitik olarak türetilir ve bu, iletkenlik sürecinde meydana gelen anormal davranış türlerine ışık tutar. LE ile başlayarak, denk master denklemin türetilmesi ve bu denklem üzerinden gözlenebilirlerin ortalama değerlerinin elde edilmesi, karmaşık ortamlardaki iletkenliği anormal sürüklenme ve difüzyon süreçleri bakımından yorumlamakta etkili bir metodoloji olarak kullanılabilir.

Amorf yarı iletkenler ve yalıtkanlarda, stokastik-fraksiyonel dinamik araçlar kullanarak iletkenlik formalizminin doğrudan teorik olarak geliştirilmek istenmekte ve ayrıca anormal taşıma süreçleri aracılığıyla formalizmin yorumu da araştırılmaktadır. Bu çalışmada, doğal sınır koşulları altında fraksiyonel-stokastik bir diferansiyel denklemden türetilen ortalama hız ifadesi, akım yoğunluk bağıntısında kullanılarak ortalama iletkenlik davranışı elde edilmiştir. Literatürde, bir gözlemlenebilirin ortalama değeri ifadesinin birçok makalede elde edildiği, ancak fiziksel bir ilişki kullanarak başka bir gözlemlenebilirin analitik ortalama davranışını türetmek için hiç kullanılmadığı görülmektedir. Çalışmanın yeniliği, ortalama hız ifadesinin, fraksiyonel operatörleri içeren stokastik diferansiyel denklemden elde edilmesinden ve karmaşık veya düzensiz ortamlarda anormal taşıma süreçleriyle ilgili analitik bir ortalama iletkenlik davranışını türetmek için kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Motivasyonumuz, özellikle HN tipi yarı-ampirik iletkenlik denklemleri ile anormal taşıma süreçleri arasındaki ilişkiyi fraksiyonel ve stokastik dinamik yaklaşımlarıyla, yarı-ampirik iletkenlik formalizmi ile ilişkili karmaşık ortamdaki anormal süreç türlerini belirlemek ve yarı-ampirik formülasyonu iletkenlik denklemlerinin analitik türetimiyle ilişkilendirmektir.

2. GENEL KISIMLAR

Doğadaki birçok olgunun anlaşılması ve açıklanabilmesi amacıyla geliştirilen teori ve yapılan gözlemler süreçlerin lineer olmadığına dair sayısız kanıt sunmasına rağmen, lineer davranışsal mekanizmaların analizinde kullanılan matematiksel enstrümanlara fazlaca güvenilmesi ve süreçlerin lineerize edilerek çözülmesi eğiliminden yaklaşık son otuz yıllık sürece kadar neredeyse hiç vazgeçilmemiştir (39–45).

Son yıllarda hızla değişen çalışma eğilimi ise stokastik mekanik ve fraksiyonel analiz çalışmaları doğrultusunda olmuştur. Fraksiyonel stokastik mekaniğin yaklaşım ve enstrümanları birçok alanda özellikle de anormal süreçlerin analizinde kullanılarak yeni modeller geliştirilmiş, bu disiplinin yeterliği ve geçerliği üzerine de fazlaca gidilmiş, geliştirilen tüm normal dışı fenomenleri açıklamaktaki başarısı kabul görmüştür.

Fizikte, özellikle katıhal çalışmalarında anormal davranışların birçok türü ile karşılaşmış, birçok problem ya da olgu yeniden bir fraksiyonel stokastik mekanik problemi olarak ele alınmış ve çözülmüş, lineer teorilerin ve tamamlayıcı yarı-ampirik yaklaşımların bulgu ve tahminleri ile tutarlı ve hatta bunların ötesinde sonuçlara ulaşılmıştır (46–60).

Karmaşık ya da düzensiz yapılarda iletkenlik davranışının analizine yönelik yapılan öncül teorik yaklaşımların rassal yürüyüş veya rassal çevrede-rassal yürüyüş modellerine dayandığı söylenebilir. Bu çalışmaları yarı-stokastik veya yarı-determinist hareket denklemleri olarak adlandırabileceğimiz Langevin denklemi ve de denk master denklem sınıflarının tanımlanması ve türetilmesi takip etmiştir (52; 56; 61–65).

Rassal yürüyüş modelleri, Langevin denklemi ve denk master denklemlerin literatürde yer alan ve hemen her alanda ve geniş yelpazelerde ilgilenilen pek çok problemin analizinde, klasik veya kuantum mekaniksel formalizm kullanılarak anormal süreçlerin modellenmesi ve kuramsal temellerinin geliştirilmesinde son yıllarda sıkça kullanıldığı görülmektedir (41; 43–45; 54; 66–69).

Literatür derlendiğinde iki temel tip rassal yürüyüş modeli ile karşılaşmak mümkündür: Genel Rassal Yürüyüş(GRW) ve Maksimal Entropi Rassal Yürüyüş(MERW). GRW

ise üç temel modele indirgenebilir: Kuantum Stokastik Yürüyüş(QSW), Klasik Yürüyüşler(CRWs), Kuantum Yürüyüşler(QWs). QSW tamamen klasik ya da tamamen kuantum rassal yaklaşımları öngörebilen kompozit modelleri tanımlar. MERW ise literatürün gelişim doğrultusundan bağımsız bir yaklaşım olarak karşımıza çıkar (12; 70–79).

Yarı-determinist ya da yarı-stokastik bir hareket denklemi olarak adlandırabileceğimiz Langevin denklemleri, Langevin denklemleri üzerinde birtakım dönüşümler tanımlanarak türetilen ve Klein-Kramers denklemi olarak adlandırılan bir denk master denklem ve Klein-Kramers denkleminin indirgenmiş bir formu olarak karşımıza çıkan Fokker-Planck denklemi olarak adlandırılan diğer bir master denklem literatürde iyi tanımlı birer denklem sınıfını oluşturmaktadır.

Langevin denklemi Riemann integrallerinin temel olduğu determinist analiz yöntemlerinin, Riemann-Stieltjes integrali üzerinden geliştirilerek stokastik süreçlere de uygulanabilir hale getirildiği, Ito ve Stratonovich analiz formalizmlerinden ayrı ayrı tanımlanabilen bir stokastik diferansiyel denklemi ifade etmektedir. Ito ve Stratonovich analiz incelendiğinde Langevin denklemi ve Fokker-Planck denkleminin bu iki formalizme ait farklı formlarının türetilebileceği, stokastik diferansiyel denklemlerin ilgilenilen fenomene uygun formalizm kullanılarak çalışılması gerektiği ve ayrıca ilgili iki formalizm arasındaki geçiş ve denklik bağıntılarını türetebilmek üzere gerekli matematiksel enstrüman ve analiz yöntemlerinin tanımlı olduğu görülür (80–84).

Langevin denklemleri ile başlanan analiz sürecini, Klein-Kramers ve Fokker-Planck master denklemlerinin karşılık geldiği süreç ve fenomenlerin incelenmesi takip eder. Ancak anormal süreçlerin anlaşılmasında stokastik metodolojiden bağımsız başka bir analiz yöntemi olarak ise fraksiyonel dinamik karşımıza çıkarak, fraksiyonel analizin matematiksel enstrümanlarından Riemann-Liouville, Caputo ve Prabhakar fraksiyonel integral ve türevleri gibi birçok fraksiyonel operatör ve bu operatörlerin açıklamakta kullanıldığı fenomenlerin karşılaştırmalı olarak değerlendirilmesine olanak sağlar (2; 46; 85–91).

Master denklemlerin zamansal ve konumsal fraksiyonel formda geliştirilmiş hallerinin türetilmesi, Fourier-Laplace transformu kullanılarak faz uzayları arasında geçiş yapılması yoluyla stokastik cebirsel denklemlere dönüştürülmesi ve değişken ya da gözlenebilirlerle ait ortalama davranış ifadelerinin türetilmesi gerekmektedir. Ancak pek çok durumda bu denklemlerden kolayca değişkenlerin ya da gözlenebilirlerin ortalama davranışına

dair bir ifade geliştirilememekte; bu sebeple de başlangıç ya da sınır değer koşulları tanımlanarak stokastik diferansiyel denklemlerin ilgili hesapların yapılabileceği biçime getirilmesi gerekmektedir (92–96).

Gözlenebilirlerin ortalama davranışına dair matematiksel ifadelerin elde edilmesiyle, bilinen ve iyi tanımlanmış relaksasyon-iletkenlik analogisi kullanılarak da elde edilmiş, amorf yapılarda iletkenlik davranışını açıklamakta kullanılan yarı-ampirik Havriliak-Negami iletkenlik denklemi ve tabii olarak diğer indirgemiş formları olan Davidson-Cole, Cole-Cole, Debye denklemlerine paralel bir teorik formülasyona ulaşılabileceği öngörülmektedir.

2.1. OLASILIK TEORİSİ

Bir deneyle ilişkili örnek uzay, tüm olaylar üzerinden tanımlanan bir olasılık fonksiyonuyla birlikte, o deneyin tam bir olasılıksal tasviridir. Genellikle bu tasvirin yalnızca belli özellikleriyle ilgilenilir ve rastgele değişkenler kullanarak bu özelliklere odaklanılır. Bu kısımda alt başlıklar halinde, kesikli rassal değişkenleri ve sürekli rassal değişkenleri incelenecek; Bernoulli, binom ve geometrik rastgele değişkenler üzerine odaklanılacaktır (97–102).

2.1.1. Kesikli Olasılıksal Dağılımlar

Ω örnek uzay olmak üzere, bir rassal değişken $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ üzerinde tanımlanır ve sonlu $a_1, a_2, \dots, a_n$ ya da sonsuz $a_1, a_2, \dots$ sayıda değer alabilir.

Rassal bir değişkenin, X , olasılık kütle fonksiyonu, p , $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tanımlanmış bir fonksiyondur ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$p(a) = P(X = a) \quad \text{for } -\infty < a < \infty \quad (2.1)$$

Bir rassal değişkenin, X , kümülatif dağılım fonksiyonu, F , $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tanımlanmış bir fonksiyondur ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$F(a) = P(X \leq a) \quad \text{for } -\infty < a < \infty \quad (2.2)$$

2.1.1.1. Bernoulli Dağılımı

Bir kesikli rassal değişken, X , p parametrelili Bernoulli dağılımına sahip ise, ki burada $0 \leq p \leq 1$ olmak üzere, olasılık kütle fonksiyonu verilen formdadır:

$$p_X(1) = P(X = 1) = p \quad \text{ve} \quad p_X(0) = P(X = 0) = 1 - p. \quad (2.3)$$

Bu dağılım $\text{Ber}(p)$ ile gösterilir.

2.1.1.2. Binomial Dağılım

Bir kesikli rassal değişken, X , p ve p parametrelili binomiyal dağılıma sahip ise, ki burada $n = 1, 2, \dots$ ve $0 \leq p \leq 1$ olmak üzere, olasılık kütle fonksiyonu verilen formdadır:

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Bu dağılım $\text{Bin}(n, p)$ ile gösterilir.

2.1.1.3. Geometrik Dağılım

Bir kesikli rassal değişken, X , p parametrelili geometrik dağılıma sahip ise, ki burada $0 < p \leq 1$ olmak üzere, olasılık kütle fonksiyonu verilen formdadır:

$$p_X(k) = P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad \text{for } k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Bu dağılım $\text{Geo}(p)$ ile gösterilir.

2.1.2. Sürekli Olasılıksal Dağılımlar

Bir rassal değişken, X , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı olsun ve a ile b sayıları için $a \leq b$ verilsin.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (2.6)$$

Tüm x değerleri için $f(x) \geq 0$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ koşulları sağlanıyor ise, f fonksiyonuna olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da olasılık yoğunluğu adı verilir.

2.1.2.1. Uniform Dağılım

Bir sürekli rassal değişken, $[\alpha, \beta]$ aralığında uniform dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu verilen formdadır:

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \text{for } \alpha \leq x \leq \beta \quad (2.7)$$

Bu dağılım $U(\alpha, \beta)$ ile gösterilir.

2.1.2.2. Normal Dağılım

Bir sürekli rassal değişken, μ and $\sigma^2 > 0$ parametrelili normal dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu verilen formdadır:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{for } -\infty < x < \infty. \quad (2.8)$$

Bu dağılım $N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir.

2.1.2.3. Eksponansiyel Dağılım

Bir sürekli rassal değişken, λ parametrelili eksponansiyel dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu verilen formdadır:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{for } x \geq 0. \quad (2.9)$$

Bu dağılım $\text{Exp}(\lambda)$ ile gösterilir.

2.1.3. Ağır ve Uzun-Kuyruklu Olasılıksal Dağılımlar

$\mathbb{R}$ üzerindeki bir F dağılımının ağır-kuyruklu olduğu söylenir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} F(dx) = \infty \quad \text{for all } \lambda > 0$$

burada F herhangi bir pozitif üstel momente sahip olamaz. Aksi takdirde F 'in hafif-kuyruklu olduğu söylenir. F dağılımının, ancak ve ancak kuyruk fonksiyonu üstel olarak azalan herhangi bir fonksiyon tarafından sınırlandırılmaması ağır-kuyruklu olduğunu gösterir.

$\mathbb{R}$ üzerindeki bir F dağılımının, herhangi bir $y > 0$ sabiti için F sağdan sınırsız ise uzun kuyruklu olduğu söylenir:

$$\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} \rightarrow 1 \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

Açıkça uzun-kuyruklu olmak yine bir dağılımın kuyrukluluk özelliğidir. Ayrıca, uzun-kuyruklu bir dağılımın da ağır-kuyruklu olduğunu görmek oldukça kolaydır.

2.1.3.1. *Pareto Dağılımı*

Pareto dağılımına sahip F olasılık fonksiyonu verilen formdadır:

$$F(x) = \left(\frac{\kappa}{x + \kappa} \right)^\alpha \quad (2.10)$$

burada $\kappa > 0$ ölçek parametresi ve $\alpha > 0$ şekil parametresini gösterir. Açıkça $x \rightarrow \infty$ 'a giderken $f(x) \sim (x/\kappa)^{-\alpha}$ olduğu görülür ve bu nedenle Pareto dağılımları bazen kuvvet yasası dağılımları olarak adlandırılır. Pareto dağılımının tüm $\gamma < \alpha$ mertebe momentleri sonluyken, tüm $\gamma \geq \alpha$ mertebe momentleri sonsuzdur.

2.1.3.2. *Cauchy Dağılımı*

Cauchy dağılımına sahip f olasılık yoğunluk fonksiyonu verilen formdadır:

$$f(x) = \frac{\kappa}{\pi((x-a)^2 + \kappa^2)} \quad (2.11)$$

burada $\kappa > 0$ ölçek parametresini ve $a \in \mathbb{R}$ konum parametresini gösterir. $\gamma < 1$ mertebe momentleri sonluyken, $\gamma \geq 1$ mertebe momentleri sonsuzdur.

2.1.3.3. *Lognormal Dağılım*

Lognormal dağılımına sahip f olasılık yoğunluk fonksiyonu verilen formdadır:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.12)$$

μ ve $\sigma > 0$ parametreleri için tanımlıdır. Lognormal dağılımın tüm momentleri sonludur. Bir (pozitif) rastgele değişken ξ , ancak ve ancak $\log \xi$ ortalama μ ve varyans σ^2 ile normal bir dağılıma sahipse μ ve σ parametreleriyle bir lognormal dağılıma sahiptir.

2.1.3.4. Weibull Dağılımı

Weibull dağılımına sahip F olasılık fonksiyonu verilen formdadır:

$$F(x) = e^{-(x/\kappa)^\alpha} \quad (2.13)$$

burada $\kappa > 0$ ölçek parametresi ve $\alpha > 0$ şekil parametresini gösterir. Bu dağılım ancak ve ancak $\alpha < 1$ ise ağır kuyruklu dağılıma ve $\alpha = 1$ durumunda ise üstel dağılıma sahiptir. Weibull dağılımının tüm momentleri sonludur.

2.2. STOKASTİK MEKANİK

Olasılık teorisinin gerçek dünyadaki birçok uygulaması, verilerin zaman içinde sırayla toplanması gibi belirli bir özelliğe sahiptir. Bunların aynı zamanda, ardışık gözlemlerin tipik olarak bağımsız olmadığı ortak bir özelliği daha vardır. Bu tür herhangi bir gözlem koleksiyonuna stokastik bir süreç diyoruz. Biçimsel olarak, bir stokastik süreç, durum uzayı olan bir Ω kümesinde değerler alan rastgele değişkenlerin bir koleksiyonudur. Koleksiyon, indeks kümesi olan başka bir T kümesi tarafından indekslenir. En yaygın iki indeks kümesi, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ doğal sayılar ve $T = [0, \infty)$ negatif olmayan gerçek sayılardır ve genellikle sırasıyla kesikli ve sürekli zamanı temsil eder. Böylece ilk indeks kümesi $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ rastgele değişkenlerin bir dizisini ve ikinci indeks kümesi $\{X(t), t \geq 0\}$ ise, her bir zaman t için bir rastgele değişken tanımlayarak, rasgele değişkenlerin bir koleksiyonunu verir. Genel olarak, indeks kümesinin zamanı tanımlaması gerekmez ve ayrıca yaygın olarak uzamsal konumu tanımlamak için de kullanılır. Durum uzayı uygulamaya bağlı olarak sonlu, sayılabilir sonsuz veya sayılamaz olabilir. Bu kısımda, stokastik süreçleri anlayabilmek ve analiz edebilmek için bilinen kesikli ve sürekli-zamanlı stokastik süreçler üzerine odaklanılacaktır (103–125).

2.2.1. Kesikli Zamanlı Stokastik Süreçler

2.2.1.1. Markov Zinciri

$X_0, X_1, X_2, \dots$ kesikli rassal değişkenler ve Ω durum uzayı olmak üzere,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (2.14)$$

Ω uzayındaki tüm $i, j, i_0, \dots, i_{n-1}$ ve tüm n değerleri için tanımlı olsun. $\{X_n\}$ dizisi, Markov zinciri olarak adlandırılır.

Genellikle n indeksi kesikli zaman olarak düşünülür ve X_n için zincirin n anındaki durumu olduğunu söylenir, ki burada Ω durum uzayı sonlu veya sayılabilir sonsuz olabilir. Markov zincirini tanımlayıcı özelliğe ise Markov özelliği denir ve bu özellik şimdiki zamana bağıllığı, gelecek ya da geçmişten bağımsızlığı yani hafızasız süreci ifade eder.

Genellikle $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ olasılığı i, j , and n değişkenlerine bağlıdır. Ancak bu zincirler, pek çok durumda, n değişkenine bağlı değildir ve zaman-homojenitesine sahiptir. Dolayısıyla koşullu olasılık tanımından sadece i ve j değişkenlerine bağlı olduğundan,

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad i, j \in S \quad (2.15)$$

gösterimi kullanılır ve bu geçiş olasılıklarına Markov zinciri adı verilir. Bu nedenle, p_{ij} olasılıkları zincirin i durumundan bir sonraki duruma nasıl atlayacağını seçtiğini tanımlar. Açıkçası, geçiş olasılıkları aşağıdaki iki kriteri karşılamalıdır:

$$(a) p_{ij} \geq 0 \text{ for all } i, j \in S, \quad (b) \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \text{ for all } i \in S \quad (2.16)$$

2.2.1.2. Bernoulli Süreci

Ω bir örnek uzay ve P , Ω üzerinde bir olasılık ölçüsü olsun. $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$, Ω üzerinde tanımlanan ve yalnızca 0 ve 1 değerlerini alan bir rastgele değişkenler dizisi olsun.

$\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ stokastik süreci olmak üzere,

(a) $X_1, X_2, \dots$ bağımsız ve

(b) $P\{X_n = 1\} = p, P\{X_n = 0\} = q = 1 - p$ tüm n

değerleri için tanımlı olsun. $\{X_n\}$ dizisi, başarı olasılığı p olan, Bernoulli süreci olarak adlandırılır.

2.2.1.3. Kesikli-Zamanlı Rassal Yürüyüş

Kesikli rassal yürüyüş, $\{S_n\}$ sistematik bir Markov zinciri olarak tanımlanabilir, öyle ki

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad (2.17)$$

burada X_k değerleri, bağımsız ve özdeş dağılmış rastgele değişkenlerdir ve $P(X_k = 1) = p, P(X_k = -1) = 1 - p$ olarak tanımlanır.

Kesikli rassal yürüyüş, yalnızca birim adımların mümkün olduğu basit bir rassal yürüyüşü ifade edebilir; daha genel olarak X_k 'ın tamsayılar üzerinde herhangi bir dağılımına da izin verilebilir. Başlangıç durumu S_0 genellikle sabittir, ancak bazı olasılık dağılımlarına göre farklı seçilebilir. $p = \frac{1}{2}$ ise, yürüyüşün simetrik olduğu söylenir. Rastgele yürüyüşün $S = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ durum uzayına sahip bir Markov zinciri olduğu yapıdan açıkça görülmektedir.

Rassal yürüyüşün indirgenemez olduğu açıktır, bu nedenle geçici, sıfır tekrarlayan veya pozitif tekrarlayan olmalıdır ve hangisi olduğu p 'ye bağlı olabilir. Rastgele yürüyüş, n -adım geçiş olasılıklarını hesaplayabildiğimiz bir Markov zinciridir.

2.2.2. Sürekli Zamanlı Stokastik Süreçler

2.2.2.1. Markov Süreci

$\{X(t), t \geq 0\}$, Ω durum uzayından rassal değerler alan ve zaman içinde aşağıdaki gibi gelişen kesikli rastgele değişkenlerin bir koleksiyonu olsun:

- (a) Mevcut durum i ise, durum değişene kadar geçen süre $\lambda(i)$ parametrelili üstel bir dağılıma sahiptir,
 - (b) i durumunun değişimi için kesikli zamanlı bir Markov zincirinin geçiş olasılıklarına göre yeni bir $j \neq i$ durumu seçilir,
- o halde $\{X(t)\}$ sürekli-zamanlı Markov zinciri olarak adlandırılır.

Durum uzayı Ω olan bir sürekli-zamanlı Markov zinciri için geçiş matrisi $P(t)$ olsun. Bu durumda,

- (a) $P(0) = I$, birim matris,
 - (b) $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ tüm $i \in S$ ve $t \geq 0$,
 - (c) $P(s+t) = P(s)P(t)$ (Chapman-Kolmogorov denklemleri),
- özelliklerini sağlar.

Böylece, bir sürekli-zamanlı Markov zinciri $\{X(t)\}$, geçişler için kesikli-zamanlı bir Markov zinciri $\{X_n\}$, sıçrama dizisi ve bekleme süreleri için üstel rassal değişkenlerden oluşur. $\lambda(i)$, bekleme süresi parametresi olarak adlandırılır. Kesikli/sürekli ayrımı, zamanın nasıl

ölçüldüğünü ifade ettiğinden, durum uzayının hala sonlu veya sayılabilir sonsuz olduğuna dikkat edilmelidir. Genellikle Markov süreci terimi sürekli-zaman için kullanılır ve Markov özelliği ise zincirin bir sonraki uzay ve zamana sıçrayışının, zincirin tüm geçmişinden bağımsız olarak, yalnızca mevcut durum ve zamana bağlı olduğunu ifade eder.

2.2.2.2. Wiener Süreci

Reel-değerli bir stokastik süreç $W = \{W_t, t \geq 0\}$, aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa (standart) Wiener süreci olarak adlandırılır:

- a) $W_0 = 0$,
- b) W süreci bağımsız artış gösterir,
- c) Herhangi bir $0 \leq s < t$ için $W_t - W_s$ artışları, sıfır ortalama ve $t - s$ varyanslı Gauss dağılımına sahiptir. Başka bir ifadeyle, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Wiener süreci genellikle Brownian hareketi olarak adlandırılır. Bazen, özellikle Markov süreçleri teorisinde, Brown hareketinin 0'dan değil, başka bir $x \in \mathbb{R}$ noktasından başladığı varsayılır.

2.2.2.3. Sürekli-Zamanlı Rassal Yürüyüş

$\{X_t : t \geq 0\}$ stokastik süreci, Ω durum uzayında rassal değerler alan ve her $0 \leq s < t$ için, X_t koşullu dağılımına sahip ise, $\{S_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ ve $\{N_t : t \geq 0\}$ olmak üzere,

$$X(t) = X_n \quad \text{for} \quad S_n \leq t < S_{n+1}; \quad S_0 = 0; \quad S_n = \sum_{m=1}^n U_m \quad \text{for} \quad n \geq 1 \quad (2.18)$$

burada U_n , diğer tüm U_m ve X_m süreçlerinden koşullu olarak bağımsız olmak üzere $S_{N_t}, t \geq 0$ sürekli-zamanlı rassal yürüyüşü ifade eder.

Bir p artış dağılımına sahip sürekli-zamanlı rastgele yürüyüş, p oranlı sürekli zamanlı Markov zincirine S_t eşdeğerdir. Başka bir deyişle, her x için, $y \in S$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{t+\Delta t} = y \mid S_t = x\} &= p(y-x)\Delta t + o(\Delta t), \quad y \neq x, \\ \mathbb{P}\{S_{t+\Delta t} = x \mid S_t = x\} &= 1 - \left[\sum_{y \neq x} p(y-x) \right] \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

$p_t(x, y) = \mathbb{P}\{S_t = y \mid S_0 = x\}$ olsun ve $p_t(y) = p_t(0, y) = p_t(x, x + y)$. Böylece, yukarıdaki

eşitlikler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\frac{d}{dt}p_t(x) = \sum_{y \in S} p(y) [p_t(x-y) - p_t(x)]. \quad (2.20)$$

2.2.3. Stokastik Diferansiyel Denklemler

2.2.3.1. Chapman-Kolmogorov Denklemi

Bir Markov süreci tamamen $P_1(y_1, t_1)$ ve $P_{1|1}(y_2, t_1 | y_1, t_1)$ tarafından belirlenir; tüm hiyerarşi onlardan oluşturulabilir. Gerçekten de, örneğin, $t_1 < t_2 < t_3$ alarak,

$$\begin{aligned} P_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) P_{1|2}(y_3, t_3 | y_1, t_1; y_2, t_2) \\ &= P_1(y_1, t_1) P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) P_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bu eşitliği, $t_1 < t_2 < t_3$ için integre edelim.

$$P_2(y_1, t_1; y_3, t_3) = P_1(y_1, t_1) \int P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) P_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2) dy_2. \quad (2.22)$$

Denklemin iki tarafını da $P_1(y_1, t_1)$ ile bölelim,

$$P_{1|1}(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int P_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2) P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2. \quad (2.23)$$

Buna Chapman-Kolmogorov denklemi denir. Herhangi bir Markov sürecinin geçiş olasılığına uyması gereken bir özdeşliktir. Zaman sıralaması önemlidir: t_2 , t_1 ile t_3 arasındadır. Elbette, y r bileşenlerine sahip bir vektör olduğunda da denklem geçerlidir; veya y yalnızca kesikli değerler aldığında, böylece integral aslında bir toplam olur.

2.2.3.2. Master Denklem

Geçiş olasılığı yazabilmemiz için kolaylık olması açısından homojen bir Markov süreci düşünün. Chapman-Kolmogorov denklemi, gerçek uygulamalarda ele alınması kolay olmayan işlevsel bir bağıntıdır. Master denklem, aynı denklemin daha uygun bir versiyonudur: zaman farkının süreklilik sınırına gidilerek elde edilen bir diferansiyel denklemdir. Bu amaçla, ilk önce zaman farkı sıfıra yaklaşırken nasıl davrandığını tespit etmek gerekir.

$$T_{\tau'}(y_2 | y_1) = (1 - a_0 \tau') \delta(y_2 - y_1) + \tau' W(y_2 | y_1) + o(\tau'). \quad (2.24)$$

Burada $W(y_2 | y_1)$ birim zaman başına y_1 'den y_2 'ye geçiş olasılığıdır ve dolayısıyla

$$W(y_2 | y_1) \geq 0. \quad (2.25)$$

Delta fonksiyonunun önündeki $1 - a_0 \tau'$ katsayısı, τ' sırasında hiçbir geçişin gerçekleşmeme olasılığıdır;

$$a_0(y_1) = \int W(y_2 | y_1) dy_2, \quad (2.26)$$

bu denklemin genel olarak geçerli olarak kabul edelim.

Şimdi Chapman-Kolmogorov denkleminde $T_{\tau'}$ için bu ifadeyi ekleyelim.

$$T_{\tau+\tau'}(y_3 | y_1) = [1 - \alpha_0(y_3) \tau'] T_{\tau}(y_3 | y_1) + \tau' \int W(y_3 | y_2) T_{\tau}(y_2 | y_1) dy_2. \quad (2.27)$$

τ' ile bölelim, $\tau' \rightarrow 0$ sınırına gidelim:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T_{\tau}(y_3 | y_1) = \int \{W(y_3 | y_2) T_{\tau}(y_2 | y_1) - W(y_2 | y_3) T_{\tau}(y_3 | y_1)\} dy_2. \quad (2.28)$$

Chapman-Kolmogorov denkleminin bu diferansiyel formuna master denklem denir. Denklem genellikle basitleştirilmiş, daha sezgisel biçimde ifade edilir.

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = \int \{W(y | y') P(y', t) - W(y' | y) P(y, t)\} dy'. \quad (2.29)$$

Bu denklemi yorumlamak gerekirse, t_1 zamanı ve y_1 değerini aldığımız $t \geq t_1$ ve başlangıç koşulu $P(y, t_1) = \delta(t - t_1)$ için çözümü düşünelim. Bu çözüm, Markov sürecinin herhangi bir t_1 ve y_1 seçimi için $T_{t-t_1}(y | y_1)$ geçiş olasılığıdır.

2.2.3.3. Langevin Denklemini

Langevin denklemini verilen formda tanımlanan bir diferansiyel denklemdir:

$$\frac{dy}{dt} = A(y, t) + B(y, t) \xi(t) \quad (2.30)$$

burada $\xi(t)$ bir stokastik süreçtir. $y(t)$ 'yi bir Markov süreci yapan $\xi(t)$ için Gaussian olan Langevin süreci (beyaz gürültü) seçilir ve istatistiksel özellikleri şöyledir:

$$\begin{aligned}\langle \xi(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle &= 2D\delta(t_1 - t_2)\end{aligned}\tag{2.31}$$

Bu birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir ve $\xi(t)$ 'nin verilmiş her bir fonksiyonu için, $y(t_0)$ verildiğinde $y(t)$ 'yi tam olarak belirler. Dahası, farklı zamanlarda dalgalanan terimin değerleri, $\xi(t)$ 'nin delta-bağıntılı doğasından dolayı istatistiksel olarak bağımsızdır. Bu nedenle, $\xi(t)$ 'in önceki zamanlardaki değerleri $t' < t_0$, $t > t_0$ zamanlarındaki koşullu olasılıkları etkileyemez. Bu argümanlardan Langevin denkleminin çözümünün Markov karakterini belirler.

$A(y,t)$ ve $B(y,t)\xi(t)$ terimleri genellikle sırasıyla sürüklenme (taşıma) ve difüzyon terimleri olarak adlandırılır. $\xi(t)$ 'in varlığından dolayı, denklem stokastik bir diferansiyel denklemdir, yani belirli stokastik özelliklere sahip rastgele terimler içeren bir diferansiyel denklemdir. Bir Langevin denklemini çözmek demek, $y(t)$ sürecinin istatistiksel özelliklerini belirlemek demektir.

2.2.3.4. Fokker-Planck Denklemi

Fokker-Planck denklemi, ikinci dereceden bir diferansiyel operatör içeren bir master denklemdir.

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}A(y)P + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}B(y)P.\tag{2.32}$$

y aralığı zorunlu olarak sürekli ve $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlı olması gerekir. $A(y)$ ve $B(y)$ katsayıları, yalnızca $B(y) > 0$ kısıtlaması olan herhangi bir gerçek türevlenebilir fonksiyon olabilir. Denklem, olasılık yoğunluğu için bir süreklilik denklemine dönüştürülebilir.

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(y,t)}{\partial y},\tag{2.33}$$

$J(y,t)$ burada olasılık akısıdır ve bir "yapısal denklem" tanımlanır:

$$J(y,t) = A(y)P - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}B(y)P.\tag{2.34}$$

Daha genel Fokker-Planck denklemleri de mevcuttur. Bu denklem ayrıca "Smoluchowski denklemi", "genelleştirilmiş difüzyon denklemi" veya "ikinci Kolmogorov denklemi" olarak da adlandırılır. Sağ taraftaki ilk terim taşıma terimi, konveksiyon terimi veya sürüklenme terimi; ikincisi difüzyon terimi veya dalgalanma terimi olarak adlandırılmıştır.

2.2.3.5. Ito Analizi

Itô integrali, sürekli stokastik süreç durumunda Riemann-Stieltjes toplamlarının limiti ile ifade edilebilir.

$f(t)$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a,b]}$ filtrelemesine uyarlanmış sürekli bir stokastik süreç olsun. Dolayısıyla $f(t) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([a,b]))$ ve

$$\int_a^b f(s)dB(s) = \lim_{\|\pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) [B(t_i) - B(t_{i-1})] \quad (2.35)$$

burada $\pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ $[a, b]$ aralığının bir bölümüdür ve $\|\pi_n\|$ bölümün normudur. Buna ek olarak, $f(t) \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ ve $\mathbb{E}[f(t)f(s)]$ ise t ve s 'in sürekli bir fonksiyonu,

$$\int_a^b f(s)dB(s) = \lim_{\|\pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) [B(t_i) - B(t_{i-1})] \text{ in } L^2(\Omega). \quad (2.36)$$

$\pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $[a, b]$ aralığının bir bölümü olsun ve

$$f_n(t, \omega) := \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t) \quad (2.37)$$

f sürekli bir stokastik süreç olduğundan,

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad (2.38)$$

$f(t) = t, t \in \mathbb{R}$ fonksiyonu, yukarıda verilmiş tanımdaki varsayımları sağladığından, şu sonuç çıkar:

$$\int_a^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2} [B(t)^2 - B(a)^2 - (t - a)] \quad (2.39)$$

Bu nedenle, Itô integrali, Riemann-Stieltjes integralinin olağan kurallarına uymaz. Öyleyse,

yukarıdaki eşitliği başka bir biçimde yeniden yazalım.

$$B(t)^2 = B(a)^2 + 2 \int_a^t B(s)dB(s) + (t - a), \forall t \in [a, b]. \quad (2.40)$$

Şimdi, $f(t) = t^2, t \in \mathbb{R}$ yazarsak, eşitlik aşağıdaki gibi olur:

$$f(B(t)) = f(B(a)) + \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(s))ds. \quad (2.41)$$

Itô formülü olarak adlandırılan formül, bu formülün tüm $f \in C^2([a, b])$ fonksiyonları için geçerli olduğunu gösterir.

Itô formülü, stokastik hesabın geliştirilmesini sağlar; bu nedenle, stokastik hesabın temel teoremi olarak kabul edilebilir.

$f \in C^2([a, b])$ ise,

$$f(B(t)) = f(B(a)) + \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(s))ds \quad (2.42)$$

burada birinci integral bir Ito integrali ve ikincisi $B(s)$ 'nin her örnek yolu için bir Riemann integralidir.

$\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$ daha önce ifade edilen iki koşulu karşılayan bir filtreleme olsun. $X(a)$ $\mathcal{F}_a$ -ölçülebilirse ve $f \in \mathcal{L}$ varsa, bir stokastik $X(t, \omega)$ işlemi Itô işlemi olarak adlandırılır. $f \in L_{ad}(\Omega, L^2([a, b]))$ ve $g \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1([a, b]))$ öyle ki

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, a \leq t \leq b, \quad (2.43)$$

Denklem bir Itô işleminin integral formu olarak adlandırılır ve şu şekilde de yazılabilir:

$$dX(t) = f(t)dB(t) + g(t)dt, \quad (2.44)$$

ve bir Itô sürecinin stokastik diferansiyel formu olarak adlandırılır. Bu ifade, doğrudan hesap yapmak için oldukça kullanışlıdır, ancak biçimsel bir anlamı yoktur çünkü Brown hareketinin örnek yolları hiçbir yerde türevlenemez.

2.2.3.6. Stratonovich Analizi

$$I\left(B(t), t \in [a, b], \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} [B(b)^2 - B(a)^2]. \quad (2.45)$$

Bu eşitlik, hesabın olağan kurallarını karşılayan bir stokastik integral tanımlamaya çalışılırsa, o zaman $\alpha = \frac{1}{2}$ 'in gerekli olduğunu gösterir. Bu stokastik integral Stratonovich integrali olarak adlandırılacak ve bir Itô sürecinin Itô integrali cinsinden tanımlanabilir.

$X(t, \omega)$ bir Itô süreci olsun.

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (2.46)$$

$S(X, [a, b])$ ile gösterilen, $B(t, \omega)$ Brown hareketine göre $X(t, \omega)$ 'ın Stratonovich integrali şu şekilde tanımlanır:

$$\int_a^b X(s) \circ dB(s) := \int_a^b X(s)dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^b f(s)ds. \quad (2.47)$$

Genel olarak, her Itô süreci $X(t), t \in [a, b]$ için, Stratonovich integralini veren Itô formülünün değiştirilmiş bir versiyonu vardır.

$X(t)$ bir Itô süreci olsun.

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (2.48)$$

$F(t, x)$ 'nin F_x ve F_{xx} sürekli kısmi türevli, bir sürekli fonksiyon olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} \int_a^t F_x(s, X(s))f(s) \circ dB(s) &= \int_a^t F_x(s, X(s))f(s)dB(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^t F_{xx}(s, X(s))f(s)^2 ds. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Böylece Stratonovich integrali için Itô formülünü elde ederiz.

$X(t)$ tekrar bir Itô süreci olarak tanımlansın.

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (2.50)$$

$F(t, x)$, sürekli kısmi türevleri F_t, F_x ve F_{xx} olan sürekli bir fonksiyon ise $F(t, X(t))$ aynı zamanda bir Itô sürecidir.

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) = & F(a, X(a)) + \int_a^t F_x(s, X(s)) f(s) \circ dB(s) \\ & + \int_a^t [F_t(s, X(s)) + F_x(s, X(s)) g(s)] ds. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Bu denklik bağıntısı Itô süreci $X(t), t \in [a, b]$ ve Itô formülü uygulanarak elde edilir. Özellikle, $X(t) = B(t)$ ($f(t) = 1$ ve $g(t) = 0$) için Stratonovich integrali, kısmi integrasyon formülünü sağlar.

$h(t, x)$ bir sürekli fonksiyon, $H(t, x)$ $h(t, x)$ x içinde bir ters türev olsun ve H_t, h_t ve h_x 'in sürekli olduğunu varsayalım.

$$\int_a^b h(t, B(t)) \circ dB(s) = H(t, B(t)) \Big|_a^b - \int_a^b H_t(s, B(s)) ds. \quad (2.52)$$

$h(t, x)$ 'nin t 'ye bağlı olmaması durumunda bağıntı aşağıda verildiği gibidir.

$$\int_a^b h(t, B(t)) \circ dB(s) = H(t, B(t)) \Big|_a^b. \quad (2.53)$$

2.3. FRAKSİYONEL ANALİZ

Bu bölümde keyfi analitik fonksiyonlar için ortak genellemeler yapılacaktır. Başlangıç noktası olarak, fraksiyonel integrallere genişletilecek olan tekrarlı integrasyon için Cauchy formülü kullanılacaktır. I^α fraksiyonel integralini doğru bir şekilde türetildikten sonra, bir fraksiyonel türevin tatmin edici bir tanımı elde edilecektir. Varsayalım ki,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = I^{-\alpha} \quad (2.54)$$

ifadesi verilsin. Bu fraksiyonel bir integralin, bir fraksiyonel türevin tersi olduğunu gösterir.

Bu türev, genel olarak hesaplanması çok daha kolay olan standart bir klasik türevin aksine daha zordur. Sonuç olarak, belirli bir fonksiyon için fraksiyonel türevi hesaplamının karmaşıklık düzeyi ve zorlukları, integral hesabı ile benzer olacaktır.

Bu kısımda birinci türev için olası genellemeleri, yani fraksiyonel integral ve türev

için operatörlerin farklı olası uygulama dizileri temelinde Liouville, Liouville-Caputo, Riemann-Liouville ve Caputo fraksiyonel türev tanımları ve daha karmaşık operatör türlerine kolayca genişletilebilmesi üzerine odaklanılacaktır (127–138).

İntegral operatörü için ${}_aI$ kısaltmasını kullanırsak,

$${}_aI f = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad (2.55)$$

bir fonksiyonun integrasyonu, diferansiyelin ters işlemi olarak düşünülebilir:

$$\left(\frac{d}{dx} \right) ({}_aI) f = f \quad (2.56)$$

Bu nedenle, genel olarak analitik fonksiyonların fraksiyonel türevi hakkında açıklamalar yapmak için ilk önce fraksiyonel integrasyon yöntemini araştırmak ve bir sonraki adımı da bu araştırmaya dayanarak geliştirmek mantıklıdır.

İtere integral ifadesini inceleyerek başlayalım.

$${}_aI^n f = \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 \dots dx_{n-1} \quad (2.57)$$

Cauchy'nin itere integrasyon formülü kullanılarak tek bir integrale indirgenebilir:

$${}_aI^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi \quad (2.58)$$

Bu formül kolayca fraksiyonel duruma genelleştirilebilir:

$$\begin{aligned} {}_aI_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \\ {}_bI_-^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\xi-x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.59)$$

Bu iki denklemden birincisi $x > a$ için, ikincisi ise $x < b$ için geçerlidir. a, b sabitleri, integral alanının alt ve üst sınırını belirler ve ilk başta keyfi olarak seçilebilir. İki durumu ayırt etmek için onlara sırasıyla sol ve sağ taraflı haller denilir. Bu geometrik bir bakış açısıyla anlaşılabilir. Sol-taraflı integral, $\xi < x$ için ağırlıklı fonksiyon değerlerini toplarken, sağ-taraflı integral, $\xi > x$ için ağırlıklı fonksiyon değerlerini toplar. x zamana benzer bir koordinat ise, o zaman sol taraftaki integral nedenseldir, sağ taraftaki integral nedensizdir.

Bu kısımda ise fraksiyonel türevin, fraksiyonel integrasyon ile bağlantısına yönelik faydalı bir tanım elde etmek üzere, türev operatörünün aşağıda verilen kısaltmasını tanımlayarak işe başlayalım.

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = D^\alpha \quad (2.60)$$

fraksiyonel integrasyon ve fraksiyonel türev kavramlarının yakından ilişkili olduğu göstermek için kesirli türev operatörünü yeniden ifade edelim.

$$\begin{aligned} D^\alpha &= D^m D^{\alpha-m} \quad m \in \mathbb{N} \\ &= \frac{d^m}{dx^m} {}_a I^{m-\alpha} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Bu bağıntı bir fraksiyonel türevin, bir bayağı standart türevin izlediği fraksiyonel bir integral olarak yorumlanabileceği anlamına gelir. Fraksiyonel integralin bir tanımı verildiğinde, fraksiyonel türev de belirlenir.

Terslenmiş operatör dizisi,

$$\begin{aligned} D^\alpha &= D^{\alpha-m} D^m \quad m \in \mathbb{N} \\ &= {}_a I^{m-\alpha} \frac{d^m}{dx^m} \end{aligned} \quad (2.62)$$

fraksiyonel türevi, bir fraksiyonel integralin izlediği sıradan bir standart türev halinde alternatif bir ayrışmasını gösterir.

Ayrıştırma elbette farklı sonuçlara da yol açar. Bu ayrıştırmalar neticesinde nonlokalitenin fraksiyonel hesaba nasıl girdiğine dair mekanizmayı anlayabiliriz. Standart türev elbette yerel bir operatördür, ancak fraksiyonel integral kesinlikle değildir. Fraksiyonel türev, nonlokal bir işlem olan fraksiyonel integrasyonun tersi olarak anlaşılmalıdır. Sonuç olarak, fraksiyonel türev ve fraksiyonel integral aynı zorluk derecesine sahiptir.

2.3.1. Fraksiyonel Operatörler

2.3.1.1. Liouville Fraksiyonel İntegrali ve Türevi

Fraksiyonel integrali, sınırları $a = -\infty$, $b = +\infty$ olacak şekilde Liouville ayarına göre tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} {}_L I_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \\ {}_L I_-^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.63)$$

Basit $0 < \alpha < 1$ durumu için operatör dizisi kullanılarak bir fraksiyonel türevin Liouville tanımını elde edilir:

$$\begin{aligned} {}_L D_+^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx} {}_L I_+^{1-\alpha} f(x) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x (x - \xi)^{-\alpha} f(\xi) d\xi \\ {}_L D_-^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx} {}_L I_-^{1-\alpha} f(x) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{+\infty} (\xi - x)^{-\alpha} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.3.1.2. Riemann Fraksiyonel İntegrali ve Türevi

Fraksiyonel integrali, sınırları $a = 0$, $b = 0$ olacak şekilde Riemann ayarına göre tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} {}_R I_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \\ {}_R I_-^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^0 (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.65)$$

Basit $0 < \alpha < 1$ durumu için operatör dizisi kullanılarak bir fraksiyonel türevin Riemann tanımını elde edilir.

$$\begin{aligned}
 {}_R D_+^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx} {}_R I_+^{1-\alpha} f(x) \\
 &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} f(\xi) d\xi \\
 {}_R D_-^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx} {}_R I_-^{1-\alpha} f(x) \\
 &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^0 (\xi-x)^{-\alpha} f(\xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

2.3.1.3. Riemann-Liouville Fraksiyonel İntegrali ve Türevi

Fraksiyonel integrali, sınırları a ve b olacak şekilde Riemann-Liouville ayarına göre tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
 {}_{RL} I_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \\
 {}_{RL} I_-^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\xi-x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Riemann-Liouville diferansiyel operatörü ${}_{RL} D_{0,t}^\alpha$ ile gösterilir ve anormal fenomenleri karakterize eden fraksiyonel diferansiyel denklemlerde kullanılır. Bu nedenle, bu türden fraksiyonel türevleri incelemek gereklidir.

Basit $0 < \alpha < 1$ durumu için operatör dizisi kullanılarak bir fraksiyonel türevin Riemann-Liouville tanımını elde edilir.

$$\begin{aligned}
 {}_{RL} D_{a,x}^\alpha f(x) &= \frac{d^m}{dx^m} \left({}_{RL} D_{a,x}^{-(m-\alpha)} f(x) \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-m+1}} d\xi, \quad x > a, \\
 {}_{RL} D_{x,b}^\alpha f(x) &= (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \left({}_{RL} D_{x,b}^{-(m-\alpha)} f(x) \right) \\
 &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_x^b \frac{f(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha-m+1}} d\xi, \quad x < b,
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

burada $m, m-1 \leq \alpha < m$ aralığında tanımlı pozitif bir tam sayıdır.

2.3.1.4. Caputo Fraksiyonel Türevi

Basit $0 < \alpha < 1$ durumu için operatör dizisi kullanılarak bir fraksiyonel türevin Caputo tanımını elde edilir.

$$\begin{aligned} {}_C D_{a,x}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-m+1}}, \quad x > a, \\ {}_C D_{x,b}^{\alpha} f(x) &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(m)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-m+1}}, \quad x < b, \end{aligned} \quad (2.69)$$

burada $m, m-1 \leq \alpha < m$ aralığında tanımlı pozitif bir tam sayıdır.

2.3.1.5. Prabhakar Fraksiyonel İntegral ve Türevi

Nedensel fonksiyonlar sınıfını, yani $t < 0$ için $u(t) = 0$ olduğu durumu düşünelim. Konvolüsyon(evrişim) tipi (doğrusal) Volterra operatörleri şu şekilde yazılabilir:

$$\mathcal{V}_{(k)} u(t) = \int_0^t k(t-\tau) u(\tau) d\tau \equiv (k \star u)(t), \quad (2.70)$$

burada $\star$, Laplace anlamında konvolüsyon çarpımını gösterir.

Kolayca görülebileceği gibi konvolüsyon bağıntısı fraksiyonel hesapta anahtar rol oynar. Gerçekten de, fraksiyonel integral kavramını tanıtmamanın en basit yolunun, teoremin matematiksel olarak tutarlı bir formülasyonunu geliştirmek için hala değişmez standardı temsil eden Riemann ve Liouville tarafından öncülük edilen Cauchy'nin itere integrasyon formülünün kullanılması olduğu bilinir.

$$\begin{aligned} I^n f(t) &:= \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n f(\tau_n) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.71)$$

İterasyon ifadesi $(n-1)! \equiv \Gamma(n)$ ve Euler'in gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$, $\Re(z) > 0$ için mutlak yakınsak bir integral cinsinden temsil edilerek genelleştirilebilir. Spesifik olarak, bu yaklaşım Riemann-Liouville fraksiyonel integralini türetir.

$$I^{\alpha} f(t) := (\Phi_{\alpha} \star f)(t), \quad t > 0, \alpha > 0, \quad (2.72)$$

burada $\Phi_\alpha(t)$ kernel fonksiyonudur:

$$\Phi_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2.73)$$

ve yalnızca $t > 0$ için tanımlıdır. Bu nedenle, Riemann-Liouville fraksiyonel integralinin belli bir kernele sahip Volterra operatöründen başka bir şey olmadığı ortaya çıkar.

Prabhakar analizinin birkaç temel tanımını hatırlamakta fayda vardır. İlk olarak bu analiz, Prabhakar fonksiyonu olarak bilinen Mittag-Leffler fonksiyonunun üç parametrelili genelleştirilmesine dayanmaktadır;

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad (2.74)$$

burada $(\gamma)_k$, $(\gamma)_k = \Gamma(\gamma + k)/\Gamma(\gamma)$ olarak da yeniden yazılabilen Pochhammer(artan faktöriyel) sembolüdür.

Prabhakar kerneli şu şekilde tanımlanır:

$$e_{\alpha,\beta}^\gamma(\lambda; t) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\lambda t^\alpha), \quad t \in \mathbb{R}^+, \alpha, \beta, \lambda, \gamma \in \mathbb{C}, \Re(\alpha), \Re(\beta) > 0. \quad (2.75)$$

Genel fraksiyonel analiz teorisinin ilkelerini takip ederek, Prabhakar kernelinden genelleştirilmiş bir fraksiyonel integral ve buna karşılık gelen türevler tanımlanabilir.

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta,\lambda}^\gamma f(t) = \left(e_{\alpha,\beta}^\gamma(\lambda; \cdot) \star f \right)(t), \quad \alpha, \beta, \lambda, \gamma \in \mathbb{C}, \Re(\alpha), \Re(\beta) > 0. \quad (2.76)$$

Prabhakar türevi de aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{D}_{\alpha,\beta,\lambda}^\gamma f(t) = D^m \mathcal{E}_{\alpha,m-\beta,\lambda}^{-\gamma} f(t), \quad m := \lceil \beta \rceil \quad (2.77)$$

Caputo formunda düzenlenmiş Prabhakar türevi ise şöyledir:

$${}^C \mathcal{D}_{\alpha,\beta,\lambda}^\gamma f(t) = \mathcal{E}_{\alpha,m-\beta,\lambda}^{-\gamma} (D^m f)(t), \quad m := \lceil \beta \rceil \quad (2.78)$$

$f(t)$, türevleri $\mathbb{R}^+$ üzerinde $m-1$ derecesine kadar sürekli ve $D^{m-1}f$ kesinlikle sürekli olacak şekilde tanımlı gerçekteğerli fonksiyonu ifade eder.

2.4. İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ

Fourier ve Laplace dönüşümleri, fiziksel bir problemi matematiksel bir modele çevirirken sıklıkla ortaya çıkan diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan bir tekniktir. Fourier ve Laplace dönüşümleri, diferansiyel denklemleri çözmenin yanı sıra, sinyallerin analiz edilmesinde ve sinyallerin sistemler tarafından aktarılmasında önemli araçlardır. Bu nedenle, Fourier ve Laplace dönüşümleri, sinyaller ve sistemler teorisinde baskın bir rol oynar.

Sinyaller ve sistemler bir dizi özellik temelinde uygulamalarla ilgili belirli sınıflara ayrılır. Temel sinyaller, sinüzoidal (yani sinüs-şekli) ve zaman-harmonik sinyallerdir. Zaman harmonik sinyaller, yalnızca bir frekans içeren kompleks değerli fonksiyonlardır. Bunlar Fourier ve Laplace dönüşümlerinin temel yapı taşlarını oluşturur.

Ele alınan sistemlerin en önemli özellikleri doğrusallık ve zamanla değişmezliktir. Fourier ve Laplace dönüşümlerini kullanışlı birer araca dönüştüren bu iki özelliktir. Lineer, zamanla değişmeyen bir sistem giriş sinyali olarak bir zaman-harmonik sinyal aldığında, ortaya çıkan sinyal yine aynı frekansa sahip bir zaman harmonik sinyaldir. Bu kısımda, Fourier-Laplace dönüşümleri ve denklik bağıntıları üzerine odaklanılacaktır (139).

2.4.1. Uzay ve Zaman Dönüşümleri

2.4.1.1. Fourier Dönüşümü

Belirli bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu için $F(\omega)$ ($\omega \in \mathbb{R}$) fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.79)$$

integralin bir uygunsuz Riemann integrali olarak var olması şartıyla $F(\omega)$ fonksiyonuna, $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü veya spektrumu denir.

Bazen $F(\omega)$, $f(t)$ 'ın spektral yoğunluğu olarak adlandırılır. $F(\omega)$ fonksiyonunu $f(t)$ fonksiyonuna eşlemeye Fourier dönüşümü denir. Bazen $F(\omega)$ yerine, çok zarif olmasa da kullanışlı olduğundan $(\mathcal{F}f)(\omega)$ notasyonu kullanılır. Matematik literatüründe $F(\omega)$ genellikle $f(\omega)$ ile gösterilir. Genellikle, $f(t)$ zamana bağlı bir fonksiyonu temsil ederken, $F(\omega)$ genellikle frekansa bağlıdır. Dolayısıyla, $f(t)$ 'nin zaman alanını tanımlandığı ve $F(\omega)$ 'nın frekans alanında tanımlandığı anlaşılır. $e^{-i\omega t}$ karmaşık değerli bir fonksiyon olduğundan, $F(\omega)$ genel olarak karmaşık değerli bir fonksiyon olacaktır, dolayısıyla $F: \mathbb{R} \rightarrow$

$\mathbb{C}$ şeklinde tanımlıdır. Genellikle $F(\omega)$ daha sonra gerçek ve imajiner kısımlarla ifade edilir. Ayrıca f fonksiyonunun genlik spektrumu $|F(\omega)|$ (bazen spektral genlik yoğunluğu olarak adlandırılır) ve faz spektrumu $\arg F(\omega)$ üzerine de çalışılır. Son olarak, sinyal teorisinde $|F(\omega)|^2$, $f(t)$ enerji spektrumu veya spektral enerji yoğunluğu olarak adlandırılır.

2.4.1.2. Laplace Dönüşümü

$f(t)$ nedensel bir fonksiyon olsun, dolayısıyla $t < 0$ için $f(t) = 0$ olmalıdır. $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $s \in \mathbb{C}$ için $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.80)$$

integralin var olması şartıyla, verilen biçimde tanımlanan bir kompleks fonksiyondur.

Birçok $f(t)$ fonksiyonu için $F(s)$ Laplace dönüşümünün var olduğu görülebilir (belirli bir $\mathbb{C}$ alt kümesinde). $F(s)$ Laplace dönüşümünü zaman alanındaki bir $f(t)$ fonksiyonuna eşlemeye de Laplace dönüşümü adı verilir. Ayrıca, $F(s)$ ögesinin s -alanında tanımlıdır ve bazen bu s -alanına kompleks frekans alanı da denir (her ne kadar rastgele $s \in \mathbb{C}$ için fiziksel bir yorum yapılamaz olsa da). $F(s)$ gösteriminin yanı sıra $(\mathcal{L}f)(s)$ gösterimi de kullanılır, dolayısıyla $(\mathcal{L}f)(s) = F(s)$ şeklinde tanımlıdır. Genellikle $(\mathcal{L}f(t))(s)$ gösterimi, çok şık olmasa da, somut bir fonksiyon durumunda faydalı olacaktır.

Fonksiyonların her zaman nedensel olduğunu varsayılrırsa, bundan özellikle, $\int_0^R f(t)e^{-st} dt$ 'ın herhangi bir $R > 0$ için kesinlikle var olacağı sonucu çıkar. İntegralin varlığı, $\mathbb{R}$ üzerindeki uygunsuz Riemann integralinin, yani $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t)e^{-st} dt$ var olmak zorunda olduğu gerçeğine indirgenir.

Ayrıca, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere $s = \sigma + i\omega$ için kompleks üstel tanımını aşağıdaki integral dönüşümü ifade eder:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt \quad (2.81)$$

Bu formül $s = \sigma + i\omega$ noktasındaki $f(t)$ fonksiyonunun $F(s)$ Laplace dönüşümünün, ω noktasında tüm integrallerin mevcut olması koşuluyla $\varepsilon(t)f(t)e^{-\sigma t}$ Fourier dönüşümüne eşit olduğunu gösterir. Bu durum, ancak $\varepsilon(t)f(t)e^{-\sigma t}$ kesinlikle integrallenebilir ise geçerlidir. Laplace ve Fourier dönüşümü arasındaki bu bağıntı kabaca gösterildiği biçimde tanımlıdır.

2.5. KOMPLEKS RELAKSASYON VE İLETKENLİK TEORİSİ

Polar bir malzemenin alternatif alandaki davranışını incelerken polar malzemelerde özellikle önemli olan kompleks permitivite ve dielektrik kaybının tanımını yapmak gereklidir. Polarizasyon oluşumunun analizi Debye relaksasyon denklemlerinin geliştirilmesiyle sonuçlanır. Bu kısımda, tarihsel bakımdan Debye relaksasyonu fenomenini takip eden, Cole-Cole, Davidson-Cole ve Havriliak-Negami relaksasyon teorilerine karşılaştırmalı olarak odaklanılacaktır (140–144).

Vakum ortamında, iki düzlem paralel elektrottan oluşan ve üzerine alternatif gerilim uygulanan bir kapasitör düşünün. Alternatif gerilim:

$$v = V_m \cos \omega t \quad (2.82)$$

burada v anlık gerilim, V_m v geriliminin maksimum değeri ve $\omega = 2\pi f$ radyan/saniye cinsinden açısal frekanstır. Kondansatörden geçen akım i_1 ile verilir.

$$i_1 = I_m \left(\cos \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.83)$$

ve

$$I_m = \frac{V_m}{z} = \omega C_0 V_m \quad (2.84)$$

Bu denklemde C_0 vakum kapasitesidir, bazen geometrik kapasite olarak da adlandırılır.

İdeal bir dielektrikte akım, voltajı 90° faz farkıyla takip eder ve dolayısıyla akımın voltajla aynı fazda olan hiçbir bileşeni yoktur. Bu kez, plakalar arasına ϵ dielektrik sabitine sahip bir malzeme yerleştirilirse, kapasite $C_0\epsilon$ 'a yükselir ve akım şu şekilde verilir:

$$i_2 = I_m \cos \left[\omega t + \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right] \quad (2.85)$$

ve

$$I_m = \omega C_0 \epsilon V_m \quad (2.86)$$

Dielektrik sabiti için olağan sembolün ϵ_r , olduğuna dikkat edilmelidir, ancak ϵ 'ın boyutsuz

olduğu düşünülerek alt simge yazılmayabilir. Mevcut fazör şimdi voltajla aynı fazda olmayacak, ancak $(90^\circ - \delta)$ faz farkı olacak ve burada δ kayıp açısı olarak adlandırılacaktır. Dielektrik sabiti, şu şekilde temsil edilen kompleks bir niceliktir:

$$\epsilon^* = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (2.87)$$

Akım Şekil 2.1'de gösterildiği gibi iki bileşene ayrılabilir; uygulanan voltajla aynı fazdaki bileşen $I_x = v\omega\epsilon''c_o$ ve önde olan bileşen 90° tarafından uygulanan voltaj $I_y = v\omega\epsilon'c_o$. Bu bileşen, ideal kapasitörün şarj akımıdır.

Uygulanan voltaj ile aynı fazdaki bileşen, dielektrik kaybına neden olur. δ kayıp açısıdır ve şu şekilde verilir:

$$\delta = \tan^{-1} \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (2.88)$$

ϵ'' genellikle kayıp faktörü ve $\tan \delta$ dağılma faktörü olarak adlandırılır.

$$I_x = v\omega C_o \epsilon'' = \frac{v\omega\epsilon_o \epsilon'' A}{d} = A\omega\epsilon_o \epsilon'' E \quad (2.89)$$

Kayıp faktörü ϵ'' , dielektrik sabitinin imajiner kısmı olarak tanımlanır.

$$\epsilon'' = \epsilon' D \quad (2.90)$$

Dağılma faktörü (D) veya kayıp tanjantı veya $\tan \delta$ şu şekilde tanımlanır:

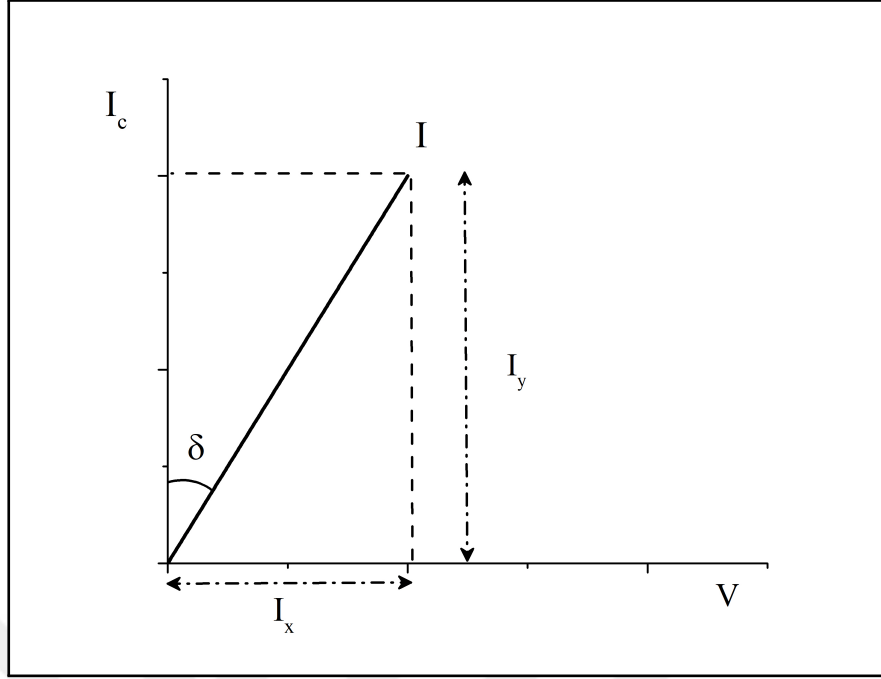
$$D = \tan \delta \quad (2.91)$$

Akım yoğunluğu verilen gibidir:

$$J_x = \frac{I_x}{A} = \omega\epsilon_o \epsilon'' E \quad (2.92)$$

Alternatif akım iletkenliği şöyle verilir:

$$\sigma_{ac} = \sigma' + j\sigma'' = \omega\epsilon_o [\epsilon'' + j(\epsilon' - \epsilon_\infty)] \quad (2.93)$$



Şekil 2.1: Değişken bir elektrik alanında kompleks dielektrik sabitinin (ϵ^*), gerçek (ϵ') ve imajiner (ϵ'') kısımları.

Toplam iletkenlik şu şekilde tanımlanır:

$$\sigma_T = \sigma_{ac} + \sigma_{dc} = \omega \epsilon_0 \epsilon'' + \sigma_{dc} \quad (2.94)$$

Yeterince uzun bir süre boyunca, bir yalıtkana uygulanan dc voltaj aniden kaldırıldığında, polarizasyonun sıfır değerine düşmesi anlık olarak değil, sınırlı bir süre içerisinde gerçekleşir. Bu, dipollerin alan yönelimli bir hizalamadan ortamın sıcaklığı ile dengede rastgele bir dağılıma dönmesi için gereken süredir. Benzer şekilde, dc voltajın aniden uygulanmasının ardından polarizasyonun oluşması, polarizasyonun maksimum değerine ulaşmasından önce sonlu bir zaman aralığı alır. Bu fenomen, genel dielektrik relaksasyon süreci olarak tanımlanır.

Polar bir yalıtkana dc gerilim uygulandığında, polarizasyonun üstel bir yasaya göre Şekil 2.2'de gösterildiği gibi sıfırdan nihai bir değere ulaştığını varsayalım.

$$P(t) = P_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.95)$$

Burada $P(t)$, t anındaki polarizasyondur ve τ , relaksasyon zamanı olarak adlandırılır. τ sıcaklığın bir fonksiyonudur ve zamandan bağımsızdır.

Polarizasyon oluşum hızı, denklemin diferansiyel ifadesi üzerinden elde edilebilir:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P_{\infty} \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{P_{\infty} e^{\frac{-t}{\tau}}}{\tau} \quad (2.96)$$

Denklemini yerine yazarsak ve toplam polarizasyonun dipollerden kaynaklandığını varsayarsak denklem yeniden ifade edilebilir.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{P_{\infty} - P(t)}{\tau} \cong \frac{P_{\mu} - P(t)}{\tau} \quad (2.97)$$

Atomik polarizasyonu ihmal ederek toplam polarizasyonu $P_T(t)$, o andaki yönelimsel polarizasyonun toplamı $P_{\mu}(t)$ olarak ifade edilebilir, çünkü elektronik polarizasyonun, P_e , doyma değerine ulaşması için gereken süre optik frekans aralığında olduğundan nihai değerine t anında ulaştığı varsayılabilir. Ayrıca, alternatif gerilim altında bir ortamın anlık polarizasyonunun, o andaki alternatif gerilimin tepe noktası ile aynı büyüklüğe sahip olan dc gerilim altındaki polarizasyonla eşit olduğunu varsayıyoruz.

Toplam polarizasyonu $P_T(t)$ olarak ifade edebiliriz.

$$P_T(t) = P_{\mu}(t) + P_e \quad (2.98)$$

Toplam polarizasyon ile elde edilen nihai değeri yazalım.

$$P_T = \epsilon_0 (\epsilon_s - 1) E \quad (2.99)$$

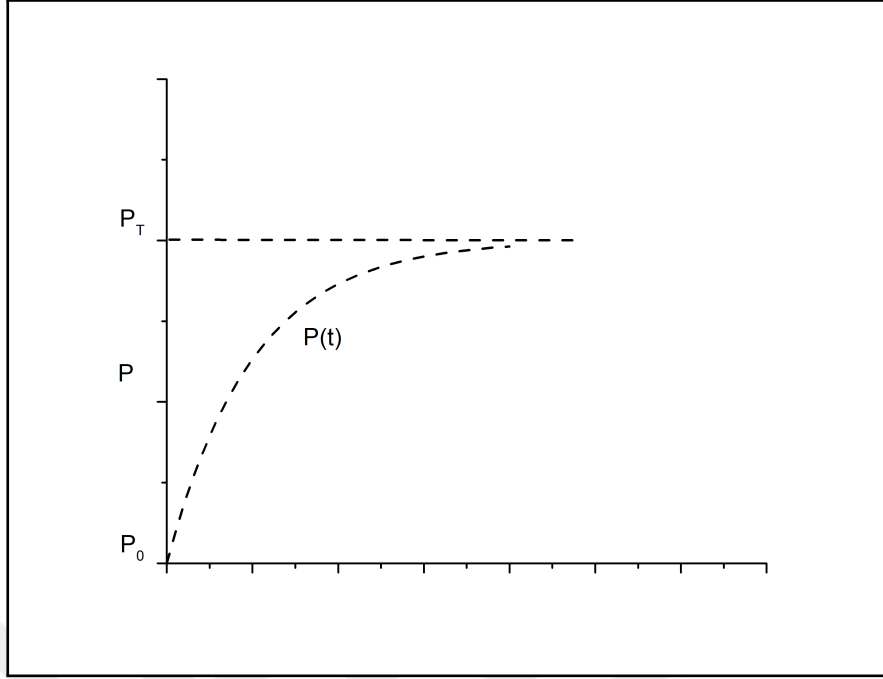
Aşağıdaki ilişkilerin sabit gerilim altında geçerli olduğunu hatırlayalım:

$$P_e = \epsilon_0 (\epsilon_{\infty} - 1) E \quad (2.100)$$

burada ϵ_s ve ϵ_{∞} sırasıyla dc gerilim altında ve sonsuz frekansta dielektrik sabitleridir.

Ayrıca Maxwell bağıntısı,

$$\epsilon_{\infty} = n^2 \quad (2.101)$$



Şekil 2.2: Bir polar dielektrikte polarizasyon oluşumu.

optik frekanslarda geçerlidir. Denklemleri yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$P_{\mu} = \epsilon_0 (\epsilon_s - 1) E - \epsilon_0 (\epsilon_{\infty} - 1) E \quad (2.102)$$

şuna indirgenir:

$$P_{\mu} = \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_{\infty}) E \quad (2.103)$$

Alternatif elektrik alanını şu şekilde gösterelim.

$$E = E_{\max} e^{j\omega t} \quad (2.104)$$

denklemini yerine yazalım.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [\epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_{\infty}) E_m e^{j\omega t} - P(t)] \quad (2.105)$$

Birinci mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$P(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} + \epsilon_0 \frac{(\epsilon_s - \epsilon_{\infty}) E_m e^{j\omega t}}{1 + j\omega \tau} \quad (2.106)$$

burada C bir sabittir. τ ile karşılaştırıldığında yeterince büyük bir t anında, denklemin sağ tarafındaki ilk terim yeterince küçük olacağından ihmal edilebilir ve $P(t)$ için çözüm elde edilmiş olur.

$$P(t) = \epsilon_0 \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty) E_m e^{j\omega t}}{1 + j\omega\tau} \quad (2.107)$$

denklemini yerine yazarsak şunu elde ederiz:

$$P(t) = \epsilon_0 (\epsilon_\infty - 1) E_m e^{j\omega t} + \frac{\epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{1 + j\omega\tau} E_m e^{j\omega t} \quad (2.108)$$

denklemini basitleştirmek üzere düzenleyelim:

$$P(t) = \left[\epsilon_\infty - 1 + \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{1 + j\omega\tau} \right] \epsilon_0 E_m e^{j\omega t} \quad (2.109)$$

Denklem, $P(t)$ polarizasyonunun uygulanan gerilimle aynı frekansta sinüzoidal bir fonksiyon olduğunu gösterir. D anlık akı yoğunluğu ifadesi şu şekilde verilir:

$$D(t) = \epsilon_0 \epsilon^* E_m e^{j\omega t} \quad (2.110)$$

Ayrıca akı yoğunluğu ifadesini yazabiliriz:

$$D(t) = \epsilon_0 E_m e^{\omega t} + P(t) \quad (2.111)$$

Bu ifadeleri eşitleyerek şunu elde ederiz:

$$\epsilon_0 \epsilon^* E_m e^{\omega t} = \epsilon_0 E_m e^{j\omega t} + P(t) \quad (2.112)$$

denklemini yerine yazalım ve sadeleştirelim:

$$(\epsilon' - j\epsilon'') = 1 + \left[\epsilon_\infty - 1 + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \right] \quad (2.113)$$

Elde ettiğimiz gerçekte ve imajiner kısımları eşitleyelim:

$$\epsilon' = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.114)$$

$$\epsilon'' = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.115)$$

Kolayca şunu buluruz:

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty) \omega \tau}{\epsilon_s + \epsilon_\infty \omega^2 \tau^2} \quad (2.116)$$

Denklemler Debye denklemleri olarak bilinir ve polar dielektriklerin çeşitli frekanslardaki relaksasyon davranışını tanımlar. Sıcaklık, τ parametresi yoluyla tartışmaya girer. $\epsilon'' - \omega$ grafiği relaksasyon eğrisi olarak bilinir ve $\epsilon''/\epsilon''_{\max} = 0.5$ bir pik ya da tepe ile karakterize edilir. Bu oran için $\omega \tau = 3.46$ göstermek kolaydır ve Debye relaksasyonunun olası bir mekanizma olup olmadığını belirlemek için bu değer bir kılavuz olarak kullanılabilir. Debye relaksasyon eğrisinin spektrumu, tüm fiziksel fenomenler söz konusu olduğunda çok geniştir, ancak çeşitli relaksasyon formülleri arasında Debye relaksasyonu en dar olanıdır.

2.5.1. Alternatif İletkenlik Teorisi

2.5.1.1. Debye Tipi Relaksasyon ve İletkenlik

Debye denklemlerini, Şekil 2.3'de şematik olarak gösterilmiştir, alternatif ve daha sade biçimde ifade edelim:

$$\epsilon^* = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \quad (2.117)$$

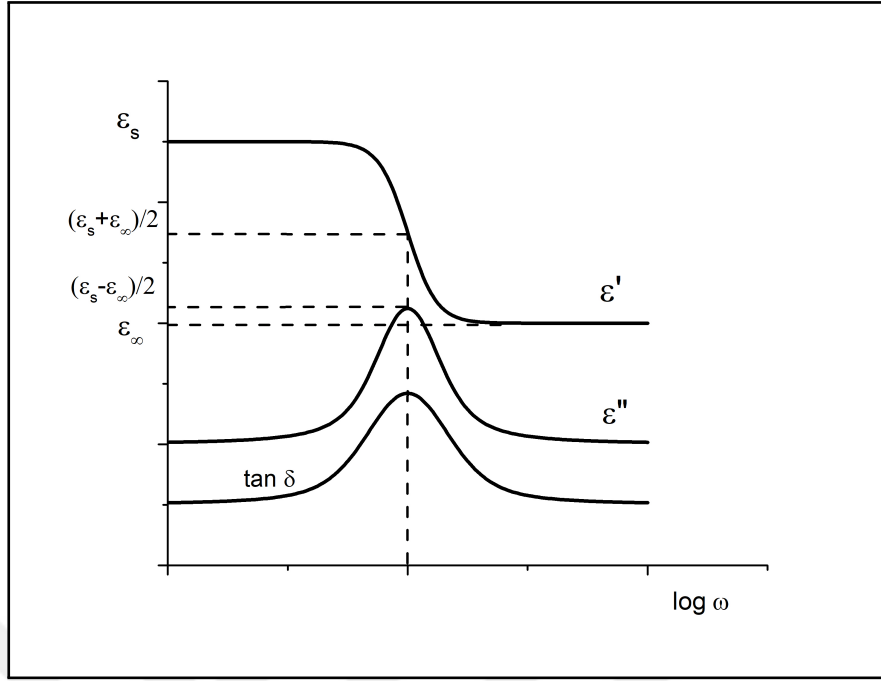
Bu denklemler incelenirse bir dizi özellik çıkarılabilir:

(1) $\omega\tau$ 'ın küçük değerleri için, denklemin paydasındaki kare terim nedeniyle reel kısmı $\epsilon' \approx \epsilon_s$ olur ve ϵ'' da aynı nedenle küçüktür. Elbette, $\omega\tau = 0$ 'da, beklendiği gibi $\epsilon'' = 0$ elde ederiz çünkü bu dc gerilimdir.

(2) Çok büyük $\omega\tau$ değerleri için, $\epsilon' = \epsilon_\infty$ ve ϵ'' küçüktür.

(3) Frekansların ara değerleri için ϵ'' , belirli bir $\omega\tau$ değerinde bir maksimumdur. ϵ'' maksimum değeri şu şekilde verilen bir frekansta elde edilir:

$$\frac{\partial \epsilon''}{\partial (\omega\tau)} = (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \frac{(\omega^2 \tau^2 - 1)}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} = 0 \quad (2.118)$$



Şekil 2.3: log ω fonksiyonu olarak çizilen Debye denklemlerinin şematik gösterimi. (ϵ' için pik noktası $\omega\tau = 1$ 'da gerçekleşir. $\tan\delta$ ve ϵ'' için ise pik noktaları aynı frekansta oluşmaz.)

ve dolayısıyla,

$$\omega_p \tau = 1 \quad (2.119)$$

burada ω_p , $\epsilon''_{\max}$ değerindeki frekanstır.

Debye relaksasyonu asimptotik olmayan formda ifade edilebilir:

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_0}{1 + j\omega\tau} \quad (2.120)$$

Debye tipi iletkenlik ifadesi ise analog formda aşağıdaki gibidir:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau} \quad (2.121)$$

2.5.1.2. Kompleks Düzlem ya da Argand Diyagramı

Cole ve Cole, Debye relaksasyonu davranışına sahip bir malzemede, ϵ'' - ϵ' grafiğinde, belirli bir frekansa karşılık gelen her noktanın bir yarım daire olduğunu göstermiştir. Bu durum

Debye denklemleri yeniden düzenlenerek kolayca gösterilebilir.

$$(\varepsilon'')^2 + (\varepsilon' - \varepsilon_\infty)^2 = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.122)$$

Denklemin sağ tarafı, tekrar Debye denklemleri kullanılarak basitleştirilebilir;

$$(\varepsilon'')^2 + (\varepsilon' - \varepsilon_\infty)^2 = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\varepsilon' - \varepsilon_\infty) \quad (2.123)$$

Biraz daha basitleştirilebilir:

$$\varepsilon'^2 - \varepsilon'(\varepsilon_s + \varepsilon_\infty) + \varepsilon_s \varepsilon_\infty + \varepsilon''^2 = 0 \quad (2.124)$$

Cebirsel özdeşlik yerine konulsun.

$$\varepsilon_s \varepsilon_\infty = \frac{1}{4} \left[(\varepsilon_s + \varepsilon_\infty)^2 - (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)^2 \right] \quad (2.125)$$

Denklem şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\left(\varepsilon' - \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2} \right)^2 + (\varepsilon'')^2 = \left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \right)^2 \quad (2.126)$$

Bu, yarıçapı $\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2}$ olan, merkezi $(\frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2}, 0)$ olan bir dairenin denklemdir. $(\varepsilon_\omega, 0)$ ve $(\varepsilon_s, 0)$ 'ın daire üzerindeki noktalar olduğu kolayca gösterilebilir. Başka bir deyişle, daire Şekil 2.4'de gösterildiği gibi yatay eksen (ε') ε_∞ ve ε_s noktalarında keser. ε'' ile ε' arasındaki bu tür çizimler, ε^* kompleks düzlem çizimleri ya da Argand diyagramı olarak bilinir.

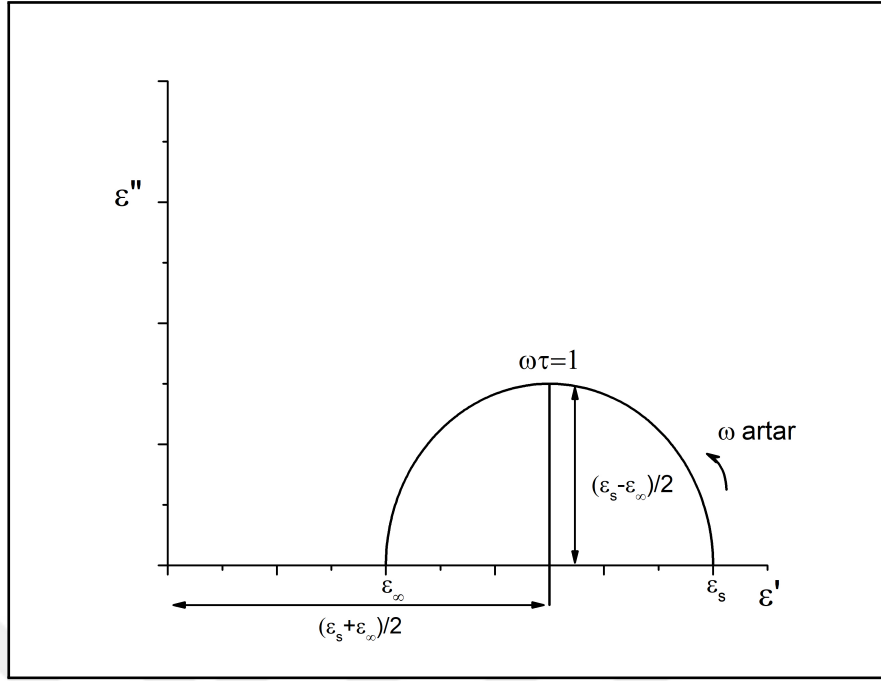
$\omega_p \tau = 1$ durumunda ε'' imajiner bileşeninin maksimum değeri şöyledir:

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \quad (2.127)$$

ε' gerçekte bileşenine karşılık gelen maksimum değeri ise şöyledir:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2} \quad (2.128)$$

Bu sonuçlar kompleks düzlem diyagramını meydana getiren denklemlerin için başlangıç noktası Debye denklemleri olduğundan olağandır.



Şekil 2.4: Debye denklemlerinin ϵ^* için bir yarım daireyi gösteren Cole-Cole diyagramı.

Belirli bir malzemede, ölçülen ϵ'' değerleri, genellikle $\omega = 0$ ile $\omega = 10^{10}$ rad/s arasında çeşitli frekanslarda ϵ'' 'nin bir fonksiyonu olarak çizilir. Eğer noktalar bir yarım daire üzerine düşerse, malzemenin Debye relaksasyonu davranışı gösterdiği sonucuna varabiliriz. Daha sonra, ölçüm yapma gerekliliğini ortadan kaldırarak, ara frekanslarda kompleks dielektrik sabitini elde etmek için bir Cole-Cole diyagramı kullanılabilir. Uygulamada, çok az malzeme Debye denklemleriyle tamamen uyumludur, tutarsızlık genellikle relaksasyon zamanlarının dağılımı olarak adlandırılan kavrama atfedilir.

Debye'in teorisi, moleküllerin şekil olarak küresel olduğunu ve bu nedenle, molekülün bir dış alanda dönme ekseninin ϵ^* değerine karar vermede hiçbir etkisi olmadığını varsayar. Bu bir kuraldan çok bir istisnadır, çünkü sadece moleküller farklı şekillere sahip olamaz; özellikle uzun zincirli polimerlerde doğrusal bir konfigürasyona sahiptirler. Ayrıca, katı fazda, dipollerin etkileşimli olmaları ve alternatif alana tepkilerinde bağımsız olmamaları daha olasıdır. Bu tür malzemelerdeki relaksasyon süreleri, dönme eksenine bağlı olarak farklı değerlere sahiptir ve sonuç olarak, dağılım genellikle daha geniş bir frekans aralığında gerçekleşir.

2.5.1.3. Cole-Cole Tipi Relaksasyon ve İletkenlik

Birden fazla relaksasyon süresi olan polar dielektrikler Debye denklemlerini sağlamaz. Debye denklemi tarafından tahmin edilenden daha düşük olacak maksimum bir ϵ'' değeri gösterirler. $\tan \delta$ ile $\log \omega \tau$ arasındaki eğri de geniş bir maksimum gösterir, maksimum değer Debye denklemi ile verilenden daha küçüktür. Bu koşullar altında ϵ'' vs. ϵ' grafiği bozulacak ve Cole-Cole grafiğinin merkezi ϵ' ekseninden aşağıya doğru yer değiştirmiş halde hala bir yarım çember olacağını gösterdi. Bu sebeplerden dolayı kompleks dielektrik sabiti için ampirik bir denklem önerdiler.

$$\epsilon^* = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + (j\omega\tau_{cc})^{1-\alpha}}; \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \quad (2.129)$$

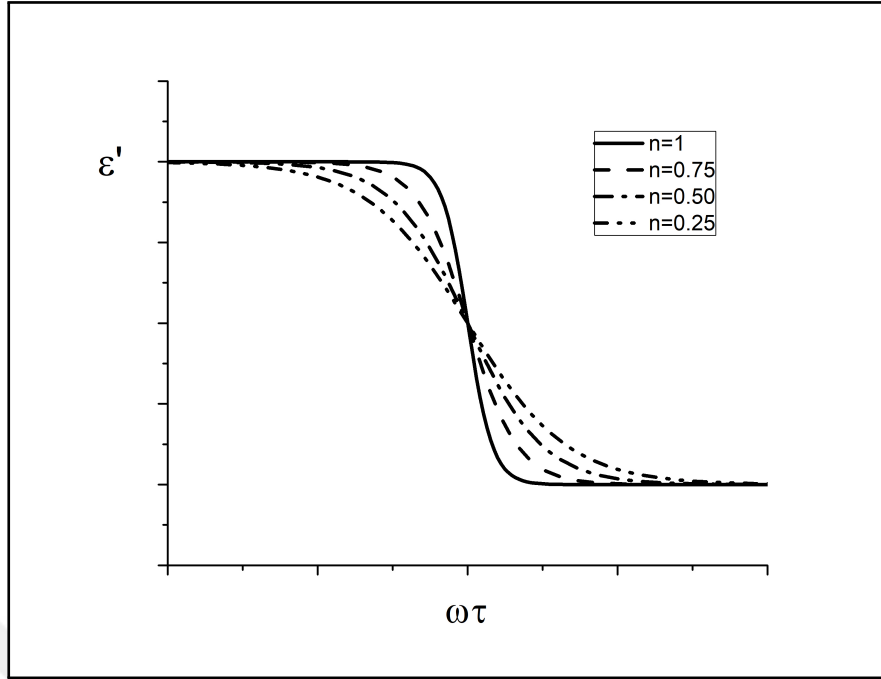
$\alpha = 0$ Debye relaksasyonu için

burada τ_{cc} ortalama relaksasyon süresi, α belirli bir malzeme için bir sabit ve $0 \leq \alpha \leq 1$ değerine sahiptir. Cole-Cole denkleminin grafiği, çeşitli α değerleri için Şekil 2.5 ve 2.6'de gösterilmiştir. Cole-Cole denkleminin grafiği çeşitli α değerleri için verilmiştir. Debye denklemleri de karşılaştırma amacıyla çizilmiştir. Yakın relaksasyon frekansları Cole-Cole relaksasyon ϵ' 'ın ω ile Debye relaksasyonundan daha yavaş azaldığını gösterir. α 'ın artmasıyla birlikte ϵ'' kayıp faktörü Debye relaksasyonundan daha geniştir ve doruk değer olan $\epsilon_{\max}$ daha küçüktür.

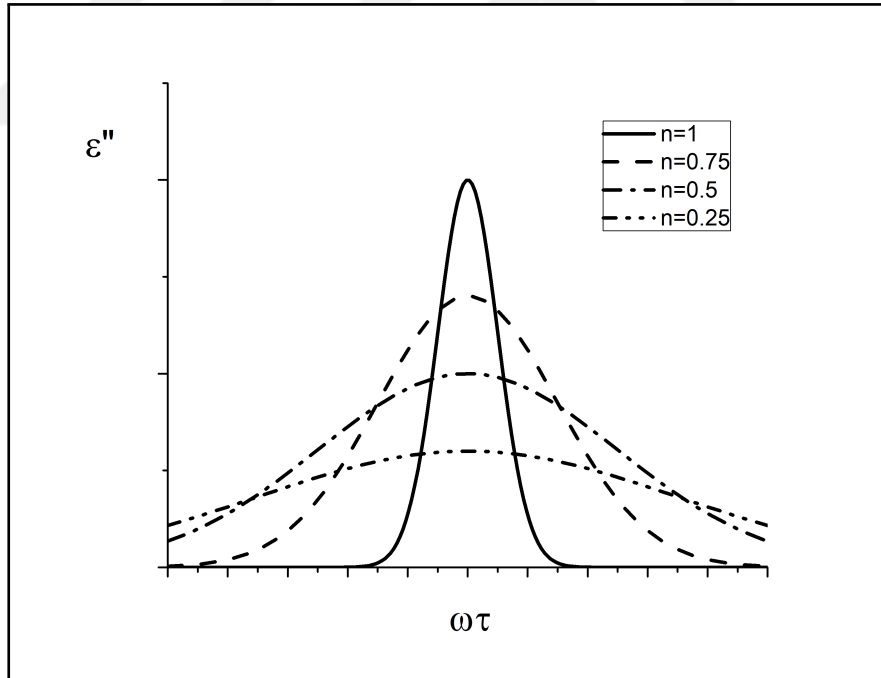
Tek bir relaksasyon süresi olan bir dielektrik, $\alpha = 0$ bu durumda Cole-Cole denklemi, Debye denklemi ile özdeş hale gelir. α değeri ne kadar büyükse, relaksasyon zamanlarının dağılımı da o kadar büyük olur.

Cole-Cole denkleminin geometrik yorumunu belirlemek için $1 - \alpha = n$ kullanılarak denklem yeniden ifade edilsin:

$$\epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + (\omega\tau_{cc})^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + j \sin \frac{n\pi}{2} \right)} \quad (2.130)$$



Şekil 2.5: Cole-Cole relaksasyonuna göre bir polar dielektrikte ϵ' 'un gerçek kısmının şematik gösterimi. $\alpha = 0$ Debye relaksasyonunu sağlar.



Şekil 2.6: Cole-Cole relaksasyonuna göre bir polar dielektrikte ϵ'' 'un imajiner kısmının şematik gösterimi. $\alpha = 0$ Debye relaksasyonunu sağlar.

Gerçek ve imajiner kısımları ayrı ayrı eşitleyelim.

$$\begin{aligned}\epsilon' &= \epsilon_{\infty} + (\epsilon_s - \epsilon_{\infty}) \frac{1 + (\omega\tau_{cc})^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1 + 2(\omega\tau_{cc})^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (\omega\tau_{cc})^{2n}} \\ \epsilon'' &= (\epsilon_s - \epsilon_{\infty}) \frac{(\omega\tau_{cc})^n \sin(n\pi/2)}{1 + 2(\omega\tau_{cc})^n \cos(n\pi/2) + (\omega\tau_{cc})^{2n}}\end{aligned}\quad (2.131)$$

Aşağıda verilen tanım kullanılarak,

$$j^\alpha \equiv e^{j\alpha\pi/2} \equiv \cos \alpha\pi/2 + j \sin \alpha\pi/2 \quad (2.132)$$

yukarıdaki denklemler alternatif bir biçimde ifade edilebilir:

$$\frac{\epsilon' - \epsilon_\infty}{\epsilon_s - \epsilon_\infty} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sinh ns}{\cosh ns + \sin(\alpha\pi/2)} \right) \quad (2.133)$$

$$\frac{\epsilon''}{\epsilon_s - \epsilon_\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\alpha\pi/2)}{\cosh ns + \sin(\alpha\pi/2)} \right) \quad (2.134)$$

burada

$$s = Ln\omega\tau \quad (2.135)$$

olarak tanımlanır.

Cole-Cole yukarıdaki denklemlerden $\omega\tau_{cc}$ 'yi elimine ederek şunu gösterdi:

$$\left(\epsilon' - \frac{\epsilon_s + \epsilon_\infty}{2} \right)^2 + \left[\epsilon'' + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{2} \cot(n\pi/2) \right]^2 = \left[\frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{2} \operatorname{cosec}(n\pi/2) \right]^2 \quad (2.136)$$

Bu denklem merkezi verilen noktada,

$$\left[\frac{\epsilon_s + \epsilon_\infty}{2}, \frac{\epsilon_\infty - \epsilon_s}{2} \cot(n\pi/2) \right] \quad (2.137)$$

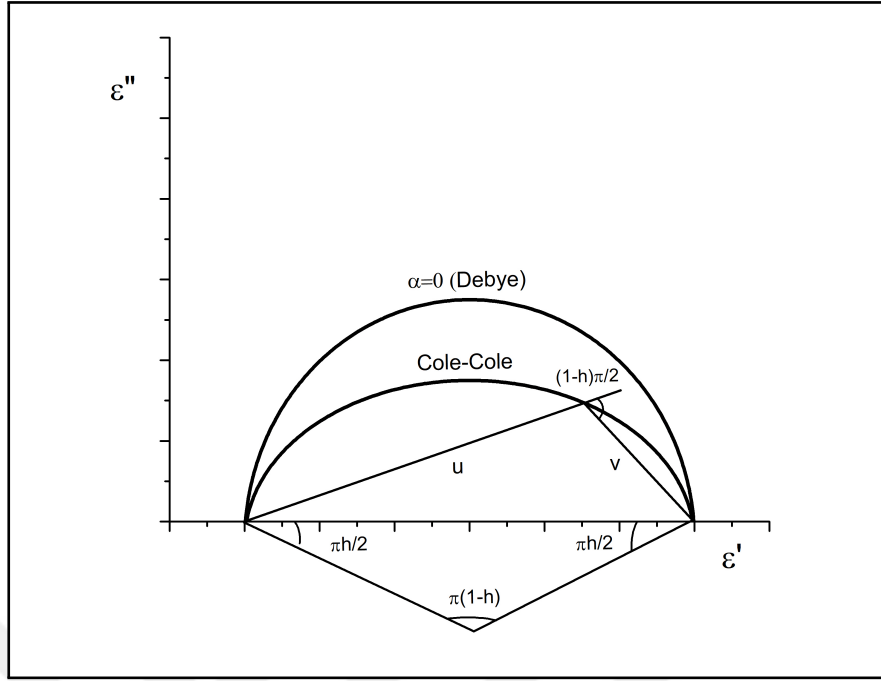
ve yarıçapına sahip

$$\left[\frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{2} \operatorname{cosec}(n\pi/2) \right] \quad (2.138)$$

olan bir dairenin denklemini temsil eder.

Merkezin y koordinatının negatif, yani merkezin ϵ' ekseninin altında olduğuna dikkat edilmelidir (Şekil 2.7).

Şekil 2.5 ve 2.6'da ϵ' ve ϵ'' değişkenlerini sırasıyla çeşitli α değerleri için $\omega\tau$ fonksiyonu olarak gösterir. Bunlar ilgili denklemlerin çizimleridir. $\omega\tau = 1$ için Şekil 2.6'da gösterilen



Şekil 2.7: Cole-Cole denkleminde geometrik bağıntılar.

ilişkiler geçerlidir:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon_s + \epsilon_\infty}{2}; \quad \epsilon'' = \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{2} \tan \frac{n\pi}{2} \quad (2.139)$$

Yukarıda belirtildiği gibi, $n = 0$ durumu, sonsuz sayıda dispersif relaksasyon zamanına karşılık gelir ve malzemenin davranışı, dielektrik sabitinin $(\epsilon_s - \epsilon_\infty)/2$ 'ye indirgenmesi dışında, dc gerilim altındaki ile aynıdır. Dielektrik sabitinin imajiner kısmı da dc gerilimle tutarlı olarak bu n değerinde sıfıra eşittir. n değeri ϵ' arttıkça artan $\omega\tau$ ile değiştikçe, eğriler $\omega\tau = 1$ 'de kesişir. $n = 1$ 'de $\omega\tau$ 'nın artmasıyla ϵ' 'de meydana gelen değişiklik, Debye gevşemesiyle aynıdır, bu durumda malzeme tek bir relaksasyon süresine sahiptir.

ϵ'' 'nün $\omega\tau$ ile değişimi de n değerine bağlıdır. n değeri arttıkça eğriler daralır ve pik değeri artar. Bu davranış, Şekil 2.6'da gösterilenle tutarlıdır.

Cole-Cole diyagramındaki herhangi bir noktayı ϵ_∞ ve ϵ_s 'a karşılık gelen noktalarla birleştiren çizgiler Şekil 2.7'da görüldüğü üzere u ve v sırasıyla ile gösterilsin. Ardından, herhangi bir frekansta aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$u = \epsilon^* - \epsilon_\infty; \quad v = \frac{\epsilon^* - \epsilon_\infty}{(\omega\tau)^{1-n}}; \quad \frac{v}{u} = (\omega\tau)^{1-n} \quad (2.140)$$

$\log \omega - (\log v - \log u)$ çizilerek n değeri belirlenebilir. n değeri arttıkça moleküllerin dönme serbestlik derecesi sayısı azalır. Malzemenin sıcaklığının daha da düşürülmesi, n parametresinin değerinde bir artışa yol açar.

Cole-Cole relaksasyonu asimptotik olmayan formda ifade edilebilir:

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_0}{1 + (j\omega\tau_{cc})^{1-\alpha}} \quad (2.141)$$

Cole-Cole tipi iletkenlik ifadesi ise analog formda aşağıdaki gibidir:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0}{1 + (j\omega\tau_{cc})^{1-\alpha}} \quad (2.142)$$

2.5.1.4. Cole-Davidson Tipi Relaksasyon ve İletkenlik

Cole-Davidson ise başka bir ampirik denklem önermiştir.

$$\epsilon^* = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{(1 + j\omega\tau_{dc})^\beta} \quad (2.143)$$

$0 \leq \beta \leq 1$ ortamın karakteristik bir özelliğidir. Cole-Davidson denkleminin gerçel ve imajiner kısımları şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \epsilon' - \epsilon_\infty &= (\epsilon_s - \epsilon_\infty) (\cos \phi)^\beta \cos \phi \beta \\ \epsilon'' &= (\epsilon_s - \epsilon_\infty) (\cos \phi)^\beta \sin \phi \beta \end{aligned} \quad (2.144)$$

burada, $\tan \phi = \omega\tau_0$ olur.

Bu denklemler Şekil 2.8 ve 2.9'da gösterilmiştir. ϵ' 'ın düşük frekans kısmı, β değeri 0'dan 1'e yükseldikçe değişmeden kalır. Bununla birlikte, β arttıkça ϵ' 'ın yüksek frekans kısmı azalır, $\beta = 1$ (Debye) en düşük değerleri verir.

Benzer gözlemler, düşük frekans kısmında β ile artan ve yüksek frekans kısmında β ile azalan ϵ'' için tutar. ϵ'' ile $\omega\tau$ arasındaki eğrinin, ϵ'' eksenine paralel olan çizginin her iki tarafındaki simetriyi kaybettiği ve pik değerinden geçtiğine dikkat edilmelidir.

Yukarıdaki denklemleri kutupsal koordinatlarda ifade edelim:

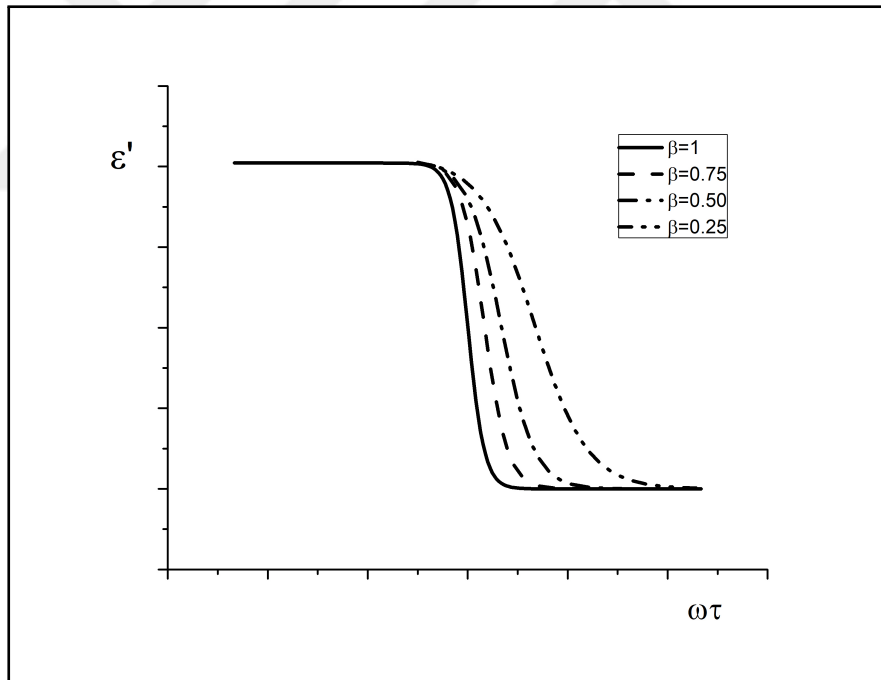
$$r = \left[(\varepsilon' - \varepsilon_\infty)^2 + \varepsilon''^2 \right] \quad (2.145)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty} \quad (2.146)$$

Cole-Davidson ilgili denklemlerden,

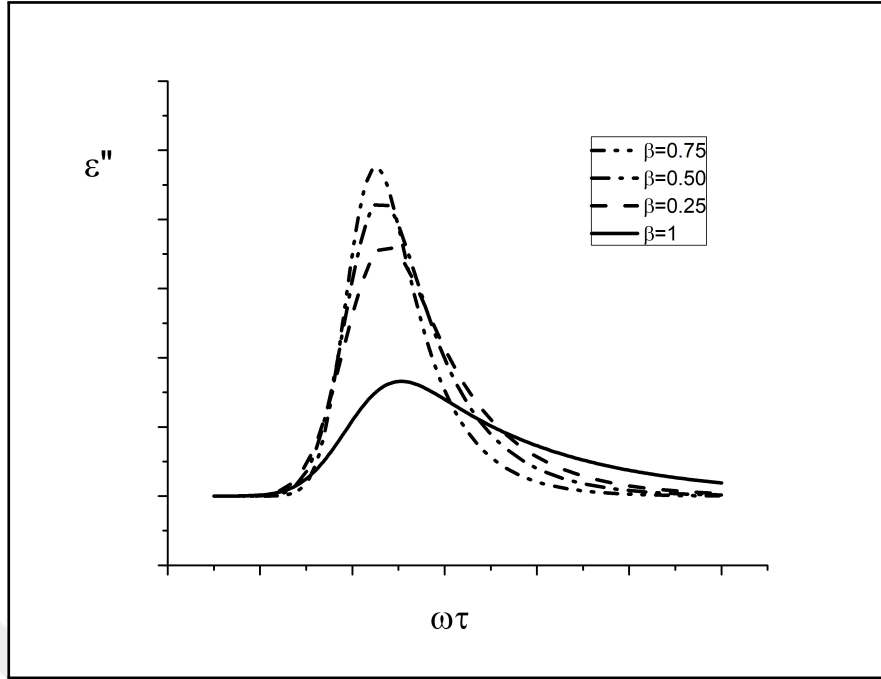
$$\begin{aligned} r &= (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \left[(\cos(\theta/\beta))^\beta \right. \\ \tan \theta &= \tan \beta \phi \\ \omega \tau_{dc} &= \tan \left(\frac{\theta}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.147)$$

olduğunu göstermiştir.



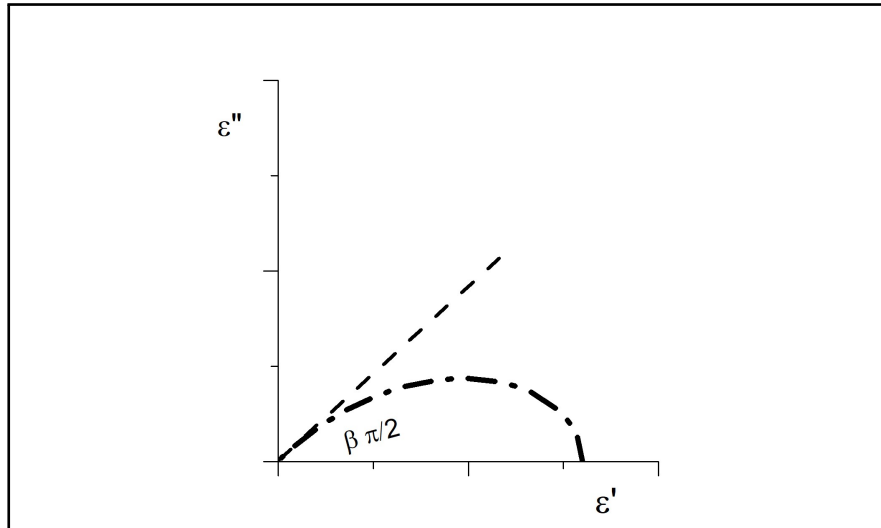
Şekil 2.8: Farklı β değerleri için $\omega\tau$ fonksiyonu olarak ε' 'nin şematik gösterimi.

Kompleks düzlemde denklem, ε' eksenini sırasıyla düşük ve yüksek frekanslarda ε_s ve ε_∞ kesen bir yaydır (Şekil 2.10). $\omega \rightarrow 0$ durumunda, sınırlayıcı eğri, merkezi ε' ekseninde olan bir yarımkredir ve $\omega \rightarrow \infty$ durumunda ise, sınırlayıcı düz çizgi, ε' eksenine $\beta\pi/2$ açısı yapar. Başka bir şekilde açıklamak gerekirse, düşük frekanslarda noktalar dairesel bir yay üzerinde, yüksek frekanslarda ise düz bir çizgi üzerinde uzanır.



Şekil 2.9: Farklı β değerleri için $\omega\tau$ fonksiyonu olarak ε'' 'nin şematik gösterimi.

Eğer Cole-Davidson denklemi geçerliyse, $\varepsilon_s, \varepsilon_\infty$ ve β değerleri, denklemin ω 'ya göre grafiğinin sağında düz bir çizgi verdiği davranışına dikkat edilerek doğrudan belirlenebilir. $\tan(\theta/\beta) = 1$ 'a karşılık gelen ω_p frekansı belirlenebilir ve τ ayrıca $\omega_p\tau = 1$ bağıntısından da belirlenebilir.



Şekil 2.10: Davidson-Cole relaksasyonuna göre ε kompleks düzlem gösterimi. (Kayıp tepe noktası asimetriktir ve düşük-frekanslı kısımda ω ile orantılıdır. Yüksek-frekanslı kısmın eğimi β 'ya bağlıdır.)

Dielektrik iletkenliğinin her iki durumda da ε'' değerinde anormal bir artışa neden

olması nedeniyle ϵ^* kompleks düzlem grafiğinde yüksek frekans ve düşük frekans uçları ile ilgilenmek gerekir. Denklem, ac iletkenliğin ϵ'' 'a katkısını gösterir ve relaksasyon mekanizmalarına karar vermeden önce bu katkı çıkarılmalıdır.

Cole-Davidson relaksasyonu asimptotik olmayan formda ifade edilebilir:

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_0}{(1 + j\omega\tau_{dc})^\beta} \quad (2.148)$$

Cole-Davidson tipi iletkenlik ifadesi ise analog formda aşağıdaki gibidir:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0}{(1 + j\omega\tau_{dc})^\beta} \quad (2.149)$$

2.5.1.5. Havriliak-Negami Tipi Relaksasyon ve İletkenlik

Yöntemimizi daha karmaşık moleküler yapılara, özellikle polimer malzemelere kadar genişletebilecek durumdayız. Küçük organik veya inorganik moleküllerdeki dağılım, mümkün olduğu kadar geniş bir frekans aralığında sabit sıcaklıkta malzemenin kompleks dielektrik sabiti ölçülerek incelenir. Ardından sıcaklık değiştirilir ve istenen sıcaklık aralığı taranıncaya kadar ölçümler tekrarlanır. Her bir izotermal veri setinden kompleks düzlem çizimleri elde edilir ve Cole-Cole denklemine göre bir yarı-dairesel yay elde edilip edilmediğini veya Davidson-Cole denklemine göre bir eğri yay elde edilip edilmediğini kontrol etmek için analiz edilir.

İzotermal ölçümlerle elde edilen polimerlerin kompleks düzlem çizimleri, basit moleküller durumunda kullanılan basit işleme uygun değildir. Bu zorluğun ana nedenleri şunlardır: (1) Polimerlerdeki dağılım genellikle çok geniştir, bu nedenle sabit bir sıcaklıktan elde edilen veriler, dağılımın analizi için yeterli değildir. Dağılımları anlamlı bir şekilde tanımlamak için çeşitli sıcaklıklardan elde edilen veriler bir araya getirilmelidir. (2) Kompleks düzlemdeki grafiklerin şekilleri, dağılım parametrelerinin belirlenmesini çok belirsiz kılan daha basit yapıya sahip moleküllerle elde edilenler kadar nadiren basittir.

Birçok polimerdeki α dağılımını inceleme girişiminde, Havriliak ve Negami birkaç polimerin dielektrik özelliklerini ölçtüler. Bir polimerde dispersiyon, birçok fiziksel özelliğin önemli ölçüde değiştiği cam geçiş sıcaklıkları ile ilişkili bir süreçtir. Birkaç polimerde, kompleks düzlem grafiği, yüksek frekanslarda doğrusal ve düşük frekanslarda dairesel

bir yaydır. Dairesel bir yayı (Cole-Cole) yerleştirme girişimleri, düşük frekanslarda başarılıdır, ancak daha yüksek frekanslarda değildir. Benzer şekilde, eğri bir dairesel yay (Davidson-Cole) ile bir uyum denemesi, daha yüksek frekanslarda başarılıdır, ancak daha düşük frekanslarda değildir.

Kolayca anlaşılmasını sağlamak için burada iki dağılım denklemi şu şekilde temsil edilmiştir:

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon^* - \epsilon_\infty}{\epsilon_s - \epsilon_\infty} &= [1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha}]^{-1} : \text{Basık çembersel yay} \quad (\text{Cole-Cole}) \\ \frac{\epsilon^* - \epsilon_\infty}{\epsilon_s - \epsilon_\infty} &= (1 + j\omega\tau_0)^{-\beta} : \text{Eğri yarı-çembersel yay} \quad (\text{Cole-Davidson})\end{aligned}\quad (2.150)$$

İki denklemi birleştiren Havriliak ve Negami, kompleks dielektrik sabiti için bir bileşke fonksiyon önerdi:

$$\frac{\epsilon^* - \epsilon_\infty}{\epsilon_s - \epsilon_\infty} = [1 + (j\omega\tau_{H-N})^{1-\alpha}]^{-\beta} \quad (2.151)$$

Bu fonksiyon, daha önce tartışılan relaksasyonları özel durumlar olarak üretir. $\beta = 1$ olduğunda, yukarıda gösterilen çembersel yay; $\alpha = 0$ olduğunda, asimetrik yarım çember; $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ olduğunda Debye fonksiyonu elde edilir.

Elde edilen denklemle verilen relaksasyon fonksiyonunu test etmek için De Moivre teoremini uygulayınız ve aşağıdaki ifadeleri elde etmek için paydayı rasyonelleştiririz.

$$\epsilon' - \epsilon_\infty = \frac{1}{r^{\beta/2}} (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \cos(\beta\theta) \quad (2.152)$$

$$\epsilon'' = \frac{1}{r^{\beta/2}} (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \sin(\beta\theta) \quad (2.153)$$

ki burada

$$r = \left[1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2 + \left[(\omega\tau)^{1-\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2 \quad (2.154)$$

Denklem ω 'ın uç değerleri için incelenebilir, yani $\omega \rightarrow \infty$ ve $\omega \rightarrow 0$. $\omega \rightarrow \infty$ olan ilk durum

için denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} &\simeq (j\omega\tau)^{\beta(\alpha-1)} \\ &= (\omega\tau)^{\beta(\alpha-1)} \{\cos[\beta(1-\alpha)\pi/2] - j\sin[\beta(1-\alpha)\pi/2]\}, \\ \tan[\beta(1-\alpha)\pi/2] &= \frac{\varepsilon''_{(\omega \rightarrow \infty)}}{\varepsilon'_{(\omega \rightarrow \infty)} - \varepsilon_\infty}\end{aligned}\quad (2.155)$$

Çok yüksek frekanslarda $\varepsilon'' \propto (\varepsilon' - \varepsilon_\infty) \propto \omega^{\beta(1-\alpha)}$ olur.

$\omega \rightarrow 0$ olan ikinci durum için,

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} &\simeq 1 - \beta(j\omega\tau)^{(1-\alpha)} \\ &= 1 - \beta(\omega\tau_H)^{(1-\alpha)} \{\cos[(1-\alpha)\pi/2] + j\sin[(1-\alpha)\pi/2]\} \\ \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) &= \frac{\varepsilon'_{(\omega \rightarrow 0)}}{\varepsilon_s - \varepsilon'_{(\omega \rightarrow 0)}}\end{aligned}\quad (2.156)$$

Çok düşük frekanslarda, $\varepsilon'' \propto (\varepsilon_s - \varepsilon') \propto \omega^{(1-\alpha)}$ olur. Bu sonuçlar, iki uç durumda gösterildiği gibi, permitivite fonksiyonlarının eğimleri olduğu önerisine yol açmıştır.

Denklemlerin dispersiyon parametresi ile ilgili olarak aşağıdakiler söylenebilir:

I. $\omega\tau \rightarrow \infty, \varepsilon' \rightarrow \varepsilon_\infty$ ve $\varepsilon'' \rightarrow 0$ için $\varepsilon^* = \varepsilon_\infty$ olur.

II. $\omega\tau \rightarrow 0, \varepsilon' \rightarrow \varepsilon_s$ ve $\varepsilon'' \rightarrow 0$ için $\varepsilon^* \rightarrow \varepsilon_s$ olur.

Bu nedenle eğrinin gerçek eksenle kesiştiği noktadan ε_s ve ε_∞ davranışını değerlendirebiliriz. α ve β parametrelerini bulmak için denklemlerin aşağıdaki ifadeye değiştiğini görürüz.

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty} = \tan \beta \theta = \tan \varphi \quad (2.157)$$

burada $\beta \theta = \phi$ değişken değişimini kullandık. $\omega\tau \rightarrow \infty$ koşulunu denkleme uygulayarak ve buna karşılık gelen ϕ değerini ϕ_L olarak göstererek (Şekil 2.11)

$$\phi_L = (1 - \alpha)\beta\pi/2 \quad (2.158)$$

bu, ϕ_L grafik parametresi ile α ve β dispersiyon parametreleri arasında bir ilişki sağlar. Yine

gevşeme süresi $\omega\tau \equiv 1$ tanımıyla verilir ve bu frekanstaki tüm parametreleri p alt simgesiyle gösterelim. Havriliak ve Negami ayrıca ϕ_L açısının açılırtayının ϵ_p^* . noktasındaki kompleks düzlem grafiğiyle kesiştiğini kanıtlar. Kesişme noktası α değerini şu şekilde verir:

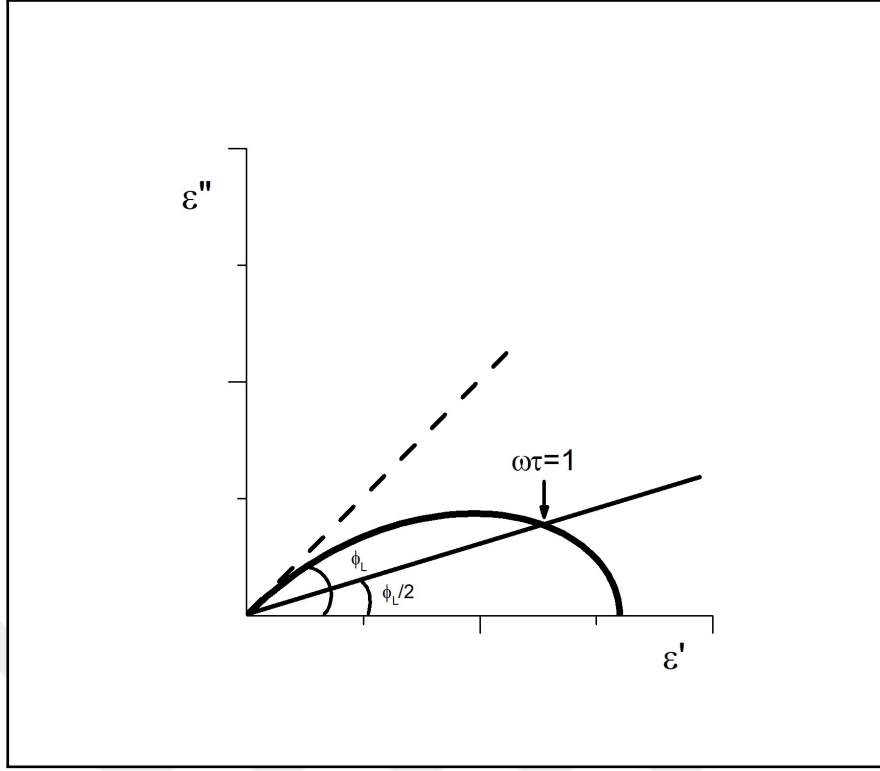
$$\frac{1}{\phi_L} \log \frac{|\epsilon_p^* - \epsilon_\infty|}{\epsilon_s - \epsilon_\infty} = -\frac{1}{\pi(1-\alpha)} \log[2 + 2 \sin \alpha(\pi/2)] \quad (2.159)$$

Dispersiyon parametrelerini değerlendirmek için deneysel verilerin analizi, kompleks düzlem grafiklerinden aşağıdaki adımlarla gerçekleştirilir:

1. Düşük frekans ölçümlerinin gerçek eksenle kesişecek biçimde ekstrapolasyonu neticesinde ϵ_s elde edilir.
2. Yüksek frekans ölçümlerinin gerçek eksenle kesişecek biçimde ekstrapolasyonu neticesinde ϵ_∞ elde edilir. Kırılma indisine ilişkin veriler mevcutsa, belirli malzemelerde $\epsilon_\infty = n^2$ ilişkisi kullanılabilir.
3. ϕ_L parametresi, yüksek frekanslardaki ölçümler kullanılarak ölçülür.
4. ϕ_L açısı ikiye bölünür ve ölçülen eğriyi kesmek için uzatılır. Kesişme noktasından frekans belirlenir ve karşılık gelen relaksasyon süresi $\omega = 1/\tau$ 'ya göre hesaplanır. $\epsilon_p' - \epsilon_\infty$ ve ϵ'' parametreleri de belirlenir.
5. α parametresi denklem ile belirlenir.
6. β parametresi denklem ile hesaplanır.

Havriliak ve Negami birkaç polimerin verilerini analiz etti ve her biri için $(\epsilon_s, \epsilon_\infty, \alpha, \beta, \tau)$ beş dağılım parametresini değerlendirdi. Havriliak ve Negami fonksiyonunun, camı geçiş sıcaklığı T_G civarında asimetrik şekil sergileyen amorf polimerlerdeki relaksasyonu tanımlamak için çok faydalı olduğu bulunmuştur. T_G civarında, $\epsilon'' - \log \omega$ eğrileri, T azaldıkça genişler. α - parametresinin zincir bağlantısını temsil ettiği ve β 'ın yerel yoğunluk dalgalanmalarıyla ilgili olduğu öne sürülmüştür. Polimerlerdeki zincir bağlantısı, sıcaklık düştükçe azalmalıdır. α -parametresi T_G sıcaklığının üzerinde yavaşça arttığından, bu durumun göstergesi olarak kabul edilebilir.

İletkenliğin dielektrik kayıp üzerindeki etkisi hakkında son bir yorum tam da bu noktada yapılabilir. Daha önce bahsedildiği gibi, $\epsilon'' - \omega$ karakteristiklerinin ölçümü, kayıp



Şekil 2.11: ϵ' 'in Havriliak-Negami fonksiyonuna göre kompleks düzlem gösterimi. (Yüksek frekanslarda doğrusal ve düşük frekanslarda dairesel bir davranış görülür.)

faktöründe daha düşük frekanslara doğru ani bir artış gösterir ve bu artış malzemenin dc iletkenliğinden kaynaklanmaktadır. Böylece Havriliak-Negami fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\epsilon^* - \epsilon_\infty}{\epsilon_s - \epsilon_\infty} = \left[1 + (j\omega\tau_0)^{(1-\alpha)} \right]^\beta - j \frac{\sigma_{dc}}{\omega\epsilon_0} \quad (2.160)$$

σ_{dc} burada dc iletkenliği göstermektedir.

Havriliak-Negami relaksasyonu asimptotik olmayan formda ifade edilebilir:

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_0}{\left[1 + (j\omega\tau_{HN})^{1-\alpha} \right]^\beta} \quad (2.161)$$

Havriliak-Negami tipi iletkenlik ifadesi ise analog formda aşağıdaki gibidir:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0}{\left[1 + (j\omega\tau_{HN})^{1-\alpha} \right]^\beta} \quad (2.162)$$

3. MALZEME VE YÖNTEM

İletkenlik probleminin çözümüne yönelik kesikli ve sürekli-zamanlı, rassal yürüyüş veya rassal çevrede-rassal yürüyüş modellerinin incelenmesine ilişkin çalışmaları, yarı-stokastik veya yarı-determinist hareket denklemleri olarak adlandırabileceğimiz Langevin denklemi ve de denk master denklemlerinin tanımlanması ve türetilmesi takip etmiştir.

Rassal süreçleri açıklamakta kullanılan Ito ve Stratonovich analizi formalizmlerine ait stokastik diferansiyel denklemler ve bu denklemlerin fraksiyonel formda ifadelerinin, bilinen belli başlı fenomenleri açıklamakta başarılı olduğu ve bu fenomenlerin konu edindiği pek çok problemin de iletkenlik formalizminin geliştirilmesine katkı sağlayacağı fark edilmiştir.

Langevin denkleminin türetilmesini Klein-Kramers ve indirgenmiş bir formu olan Fokker-Planck denklemlerinin açıkladığı fenomenlerin çalışılması takip etmiş; anormal süreçleri açıklamakta başvurulmuş metotlardan olan fraksiyonel dinamik ve bu dinamiğin matematiksel enstrümanlarının kullanılması gerektiğine dair bir sonuca varılmış; birçok fraksiyonel operatör ile birlikte Riemann-Liouville, Caputo ve Prabhakar operatörleri ve bu operatörlerin açıklamakta kullanıldığı fenomenler karşılaştırmalı olarak incelemiştir.

Zamansal ve konumsal fraksiyonel formda genelleştirilmiş master denklemler Fourier-Laplace transformu kullanılarak, faz uzayları arasında geçiş yapılması yoluyla stokastik cebirsel denklemlere dönüştürülmüştür. Değişken ya da gözlenebilirliğe ait ortalama davranışsal bağıntıların pek çok durumda ilgili fraksiyonel master denklemlerden kolayca geliştirilemediği görülmüştür. Bunun üzerine ise stokastik diferansiyel denklemler için başlangıç ya da sınır değer koşulları tanımlanarak ilgili ortalama ifadelerin türetilbileceği biçime getirilmesi gerekliliği sağlanmıştır.

Amorf yarı iletken ve yalıtkanlardaki iletkenlik davranışı, literatürde aynı zamanda anormal taşımanın formalizmi olarak karşımıza çıkan yarı-deneysel iletkenlik denklemleriyle ifade edilir. Anormal taşımanın fraksiyonel-stokastik tanımı, düzensiz veya karmaşık sistemlerde veya ortamlarda meydana gelen doğrusal olmayan ve yerel olmayan rassal süreçleri anlamaya olanak sağlar. Stokastik diferansiyel denklemler ve fraksiyonel genellemeleri kullanarak denge dışı sistemlerdeki ortalama anormal davranışlar ortaya çıkarılabilir.

LE, KKE, FPE olarak adlandırılan stokastik diferansiyel denklemler ve bunların fraksiyonel genellemeleri, uzun menzilli hafıza ve sıçrama uzunluğu açısından anormal taşıma ve davranışsal anormallik süreçlerindeki ortalama davranışı belirlemek için kullanılır. Bu sebeple, karmaşık veya düzensiz ortamlarda iletkenlik süreçlerinde meydana gelen anormal davranışların türünü anlamak için fenomenolojik bir yaklaşım geliştirilebileceği sonucuna varılır. Fraksiyonel-stokastik teorileri ile yarı-ampirik iletkenlik formalizmi arasında doğrudan bir ilişki kuran analitik bir yaklaşım geliştirmek, daha sonraki analitik çalışmalar ve anormal taşıma süreçlerinin anlaşılması için bir kilometre taşı olabilir.

Konum-hız uzayındaki bir parçacığın stokastik hareketi LE'ler ile tanımlanabilir (145):

$$\frac{dv}{dt} = -\eta v + \frac{F(z)}{m} + \xi(t), \quad \frac{dz}{dt} = v \quad (3.1)$$

Burada m , v , z sırasıyla parçacığın kütle, hız ve konumunu; η sürtünme katsayısı, $F(z)$ dış kuvvet ve $\xi(t)$ Gauss beyaz gürültüsünü göstermektedir.

(3.1)'den, Brownian hareketi tanımlayan KKE adlı denk master denklemini elde edebiliriz (146).

$$\frac{\partial \rho(z, v, t)}{\partial t} = \left[-v \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\eta v - \frac{F(z)}{m} \right) + \frac{\eta k_B T}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] \rho(z, v, t) \quad (3.2)$$

Burada $\rho(z, v, t)$ konum ve hız uzayındaki olasılık dağılım fonksiyonu, k_B ve T sırasıyla Boltzmann sabiti ve mutlak sıcaklıktır.

PDF'yi yalnızca hız-zaman uzayında tanımlamak için, dış kuvvetin yokluğunda denklem konum üzerinden integre edilerek KKE sıradan FPE'ye indirgenir.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v, t) = \eta \frac{\partial}{\partial v} (v f(v, t)) + D \frac{\partial^2}{\partial v^2} f(v, t) \quad (3.3)$$

FPE'nin (3.3) Riemann-Liouville fraksiyonel türev operatörü kullanılarak zaman-fraksiyonel genellemesi verilen formda tanımlanabilir (87; 147; 148):

$${}^{RL}D_t^\alpha f(v, t) = \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial v} (v f(v, t)) + \kappa_\alpha \frac{\partial^2}{\partial v^2} f(v, t) \quad (3.4)$$

Burada, γ_α , $[\gamma_\alpha] = \text{sec}^{-\alpha}$ boyutuna sahip fraksiyonel sönümlenme katsayısı ve κ_α ise $[\kappa_\alpha] = \text{cm/sec}^{\alpha+2}$ boyutuna sahip fraksiyonel difüzyon katsayısıdır.

Tamsayı olmayan mertebelerin fraksiyonel operatörlerini ve bunlara karşılık gelen fiziksel etkilerini, fenomenlerin ve süreçlerin tipini ayırt edebildiğimiz için, bunun yerine Riemann-Liouville türevini genelleştiren Prabhakar tipinin zaman-fraksiyonel FPE'sini düşünmeye başlarsak, bu durumda (3.3) aşağıdaki gibi yazılabilir (149; 150):

$$D_{\alpha,\rho,\lambda}^{\beta} f(v,t) = \gamma_{1-\rho} \frac{\partial}{\partial v} (v f(v,t)) + \kappa_{1-\rho} \frac{\partial^2}{\partial v^2} f(v,t) \quad (3.5)$$

(3.5)'i v ile çarptıktan sonra, sağ tarafın ikinci türevi şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$D_{\alpha,\rho,\lambda}^{\beta} f(v,t) v = \gamma_{1-\rho} \left[f(v,t) v + \frac{\partial f(v,t)}{\partial v} v^2 \right] + \kappa_{1-\rho} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f(v,t)}{\partial v} v \right) - \frac{\partial f(v,t)}{\partial v} \right] \quad (3.6)$$

Aşağıdaki gibi bazı terimler elenebilir ve diğerleri doğal sınır koşulları altında değişmeden kalabilir (86).

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} f(v,t) = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial f(v,t)}{\partial v} = 0; \quad \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \kappa_{1-\rho} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f(v,t)}{\partial v} v \right) \quad (3.7)$$

Ortalama hızı, (3.6)'yı v üzerinden integre ederek elde edebiliriz,

$$D_{\alpha,\rho,\lambda}^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v,t) v dv = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \kappa_{1-\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f(v,t)}{\partial v} v \right) dv \quad (3.8)$$

integralleri aşağıdaki gibi düzenledikten sonra,

$$D_{\alpha,\rho,\lambda}^{\beta} \langle v(t) \rangle = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \kappa_{1-\rho} \frac{\partial f(v,t)}{\partial v} v \quad (3.9)$$

ve PDF'yi bir topluluk ortalaması olarak tanımlarsak,

$$f(v,t) = \langle \delta(v - \xi t) \rangle, \quad \frac{\partial f(v,t)}{\partial v} = \langle \delta'(v - \xi t) \rangle \quad (3.10)$$

burada ξ , $[\xi] = \text{cm/sec}^2$ boyutuna sahip sabit ivmeyi gösterir ve (3.9)'u aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$D_{\alpha,\rho,\lambda}^{\beta} \langle v(t) \rangle = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \kappa_{1-\rho} \langle \delta'(v - \xi t) \rangle v \quad (3.11)$$

ve ayrıca Dirac dağılımının verilen bazı özelliklerine aşınayız:

$$\delta(v) = \delta(-v), \quad \delta'(-v) = -\delta'(v); \quad \langle \delta'(v - \xi t) \rangle v = \langle \delta(v - \xi t) \rangle \quad (3.12)$$

Dirac δ -fonksiyonunun türevini (3.12) denklemleri ışığında değerlendirebiliriz,

$$D_{\alpha,\rho,\lambda}^{\beta} \langle v(t) \rangle = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \kappa_{1-\rho} \langle \delta(v - \xi t) \rangle \quad (3.13)$$

Riemann-Liouville ve Caputo fraksiyonel türevleri arasındaki var olana benzer ilişki, Caputo biçiminde düzenlenmiş Prabhakar türevi için de verilebilir ve (3.13) alternatif olarak yeniden yazılabilir (130; 151):

$${}^C D_{\alpha,\rho,\lambda}^{\beta} \langle v(t) \rangle = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \kappa_{1-\rho} \langle \delta(v - \xi t) \rangle \quad (3.14)$$

(3.14)'teki türev $0 < \alpha\beta < 1$ varsayımı altında ve $\rho = 1 - \alpha\beta$ parametresinin özel seçimi ile yeniden tanımlanabilir,

$${}^C D_{\alpha,1-\alpha\beta,-\lambda}^{\beta} \langle v(t) \rangle = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \kappa_{\alpha\beta} \langle \delta(v - \xi t) \rangle \quad (3.15)$$

Böylece fraksiyonel operatörü pseudo-diferansiyel formda aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz (152; 153):

$${}^C (\lambda + {}_0 D_t^{\alpha})^{\beta} \langle v(t) \rangle = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \kappa_{\alpha\beta} \langle \delta(v - \xi t) \rangle \quad (3.16)$$

$\lambda = \tau^{-\alpha}$ olduğunu biliyoruz ve sonra her iki tarafı $\tau^{\alpha\beta}$ ile çarpıyoruz,

$${}^C (1 + \tau^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha})^{\beta} \langle v(t) \rangle = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \tau^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \langle \delta(v - \xi t) \rangle \quad (3.17)$$

ve genelleştirilmiş ölçekleme özelliğini aşağıdaki gibi kullanarak δ fonksiyonunun uzayını değiştirebiliriz:

$${}^C (1 + \tau^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha})^{\beta} \langle v(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}}{\xi} \langle \delta(t) \rangle \quad (3.18)$$

O zaman δ -fonksiyonunun çarpanı $\left[\frac{\tau^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}}{\xi} \right] = cm$ boyutuna sahiptir ve x ile gösterilip aşağıdaki gibi türetilir (154).

$$\frac{\tau^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}}{\xi} \langle \delta(t) \rangle = x \langle \delta(t) \rangle = (x - x_0) \langle \delta(t - t_0) \rangle \Big|_{x_0=t_0=0} = \langle v(t) \rangle \quad (3.19)$$

Böylece (3.18)'in sağ tarafındaki terim hız fonksiyonudur ve denklem şu şekilde yeniden

tanımlanabilir:

$${}^C(1 + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha)^\beta \langle v(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle v(t) \rangle \quad (3.20)$$

ve (3.20)'nin Fourier dönüşümü aşağıdaki denklemler dikkate alınarak uygulanabilir (155).

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[{}^C(1 + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha)^\beta \langle v(t) \rangle](\omega) &= [1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta \langle v(\omega) \rangle \\ \mathcal{F}\left[\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle v(t) \rangle\right](\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle v(\omega) \rangle = v_0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Karşılık gelen denklemi elde ederiz,

$$[1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta \langle v(\omega) \rangle = v_0 \quad (3.22)$$

ortalama hız denklemi şu şekilde de yazılabilir:

$$\langle v(\omega) \rangle = \frac{v_0}{[1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta} \quad (3.23)$$

(38)'de olduğu gibi Havriliak-Negami tipi iletkenliği, ortalama akım yoğunluğu bağıntısındaki ortalama hızı aşağıdaki gibi kullanarak elde edebiliriz:

$$\langle J(\omega) \rangle = nq \langle v(\omega) \rangle = \langle \sigma(\omega) \rangle \langle E(\omega) \rangle \quad (3.24)$$

Ortalama akım yoğunluğu şu şekilde gösterilir:

$$\langle J(\omega) \rangle = nq \frac{v_0}{[1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta} \quad (3.25)$$

Başlangıç koşulu için hızı biliyoruz,

$$v_0 = \left. \frac{qE(\omega)\tau}{m} \right|_{\omega=0} \quad (3.26)$$

bu aşamada yukarıdaki ilişkiyi kullanarak dc akım yoğunluğunu da tanımlayabiliriz.

$$\langle J(\omega) \rangle|_{\omega=0} = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{[1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta} E(\omega) \Big|_{\omega=0} = \langle \sigma(\omega) \rangle \langle E(\omega) \rangle|_{\omega=0} \quad (3.27)$$

dc iletkenliği tanımlayalım,

$$\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (3.28)$$

Havriliak-Negami tipi iletkenlik olarak da bilinen ac iletkenlik bağıntısını elde ederiz.

$$\langle\sigma(\omega)\rangle = \frac{\sigma_0}{[1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta} \quad (3.29)$$

Stokastik ve fraksiyonel dinamik yaklaşımlar ve matematiksel araçlar aracılığıyla anormal taşıma olaylarını anlamak için yeni bir yöntem geliştirdik. Ayrıca yarı-ampirik Havriliak-Negami tipi iletkenlik ilişkisinin, gözlenebilirlerin zaman-fraksiyonel Fokker-Planck denkleminin basitleştirilmiş bir formu üzerinden, sürüklenme-difüzyon sabitlerinin özel seçimiyle ve bu problemin doğal sınır koşulları altında elde edilmesiyle türetilebileceğini görüyoruz. Böylece yöntem, anormal tip davranışları taklit etmek için türetilen bazı yarı deneysel denklemlerin teorik arka planı hakkında yeni fikirler verir. Caputo anlamında düzenlenen ve pseudo-diferansiyel denklem olarak kullanılan Prabhakar tipi türevinin, amorf yarı iletkenler ve yalıtkanlardaki anormal taşıma fenomeni ile yakından ilişkili olduğunu doğruladık.

4. BULGULAR

Literatür incelendiğinde, bir kristal ya da iletken, düzgün kristal örgü yapısı tasvirleri ve serbest elektron modelleri üzerinden analitik iletkenlik ifadelerinin türetildiği görülür, ancak amorf yarı iletken ve yalıtkanlarda iletkenlik teorileri yerine yarı-ampirik ya da ampirik iletkenlik modellerinin yer aldığı fark edilir. Ayrıca katıhal fiziğinde karmaşık maddesel ortamda iletkenliğin teorisi ile ilgilenilmeye başlandığında ortaya nonlinearite ve nonlokalite problemleri ortaya çıkar. Determinist yaklaşımlar yerine stokastik ve fraksiyonel metotlar kullanarak nonlokalite ve nonlinearite probleminin tekrar ele alınması ve iletkenlik teorileri üzerine yeni bir bakış açısı kazandırılması gereği kaçınılmazdır. Stokastik metotların iletkenlik probleminde kullanılabilmesi ise olasılık yoğunluğu fonksiyonunun uzay-zaman değişimini, klasik ya da kuantum mekaniksel formalizm kullanarak, tanımlayan master denklem ya da manipüle edilmiş uygun master denklemin türetilmesine bağlıdır. Mevcut ya da manipüle edilmiş master denklemlerin iletkenlik davranışını açıklamakta yetersiz olması durumunda, varolan iyi tanımlı bir modelin başka matematiksel enstrümanlar kullanılarak yeniden ifade edilmesi modern çalışmaların da odak noktası olmaya başlamıştır.

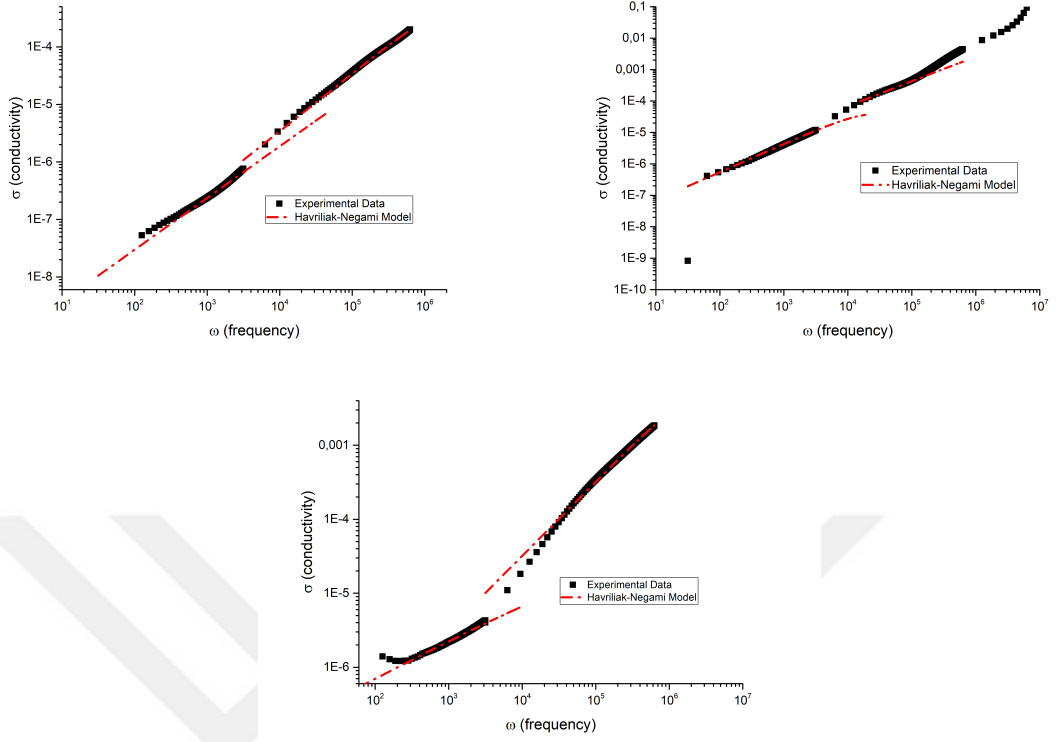
Genelleştirilmiş ya da fraksiyonel formda yazılmış master denklemler sınıflandırılmamış yeni stokastik ya da yarı-determinist hareket modellerini öngörebildiğinden, iletkenlik modelleri için önemli enstrümanlar haline gelmişlerdir. Dolayısıyla, yeni bir stokastik yaklaşımdan elde edilecek master denklemi ya da önceki stokastik modellerden türetilmiş master denklemlerinin genelleştirilmiş ya da fraksiyonel formda türetilmiş hallerini tanımlamak iletkenlik sürecini anlayabilmek için son yıllarda sıkça kullanılmaktadır.

Kesikli ya da sürekli rassal çevrede-rasal yürüyüş modelleri ile yarı-determinist ya da yarı-stokastik Langevin denklemleri arasındaki karşılıklılık bağlantılarının belirlenmesi, bunların master denklemler ile aralarındaki denklik ilişkilerinin ve bağıntılarının da tam anlamıyla anlaşılması ve tanımlanması, klasik formalizm ya da kuantum formalizmi üzerinden ilgili stokastik diferansiyel denklemler grubunun fraksiyonel analizin enstrümanları da kullanılarak genelleştirilmesi pek çok fiziksel problemin tanımlanması ve çözümüne yönelik teorik altyapı oluşturmuştur.

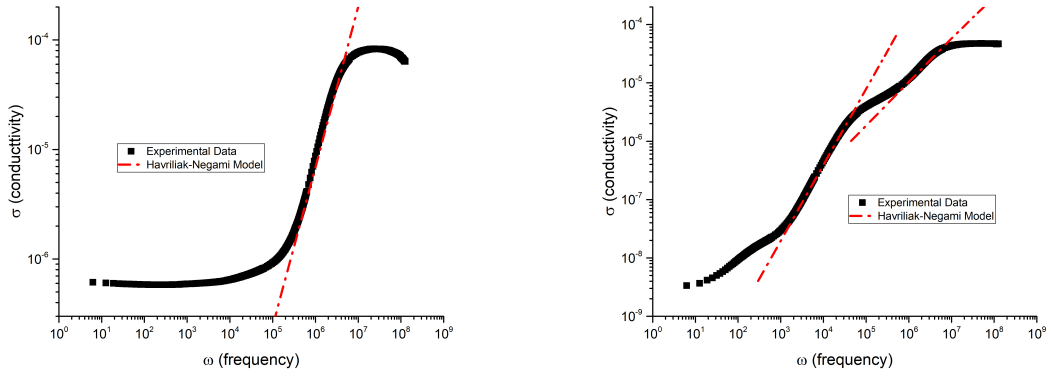
Amorf yapılarda alternatif iletkenlik modellerine bir fraksiyonel-stokastik mekanik problemi olarak yeniden yaklaşmak, ideal olmayan ya da karmaşık ortamlarda anormal davranışları belirlemek üzere stokastik mekanik ve fraksiyonel analizin temel argümanları ve matematiksel enstrümanlarından faydalanarak klasik ya da kuantum formalizmleri üzerinden bir hareket denklemi ve master denklem denklik sınıfının elde edilmesi, bulunan stokastik diferansiyel denklemin süreklilik denklemi formunda yazılmasıyla ifade ettiği fiziksel süreçlerin belirlenmesi ve yorumlanması bu çalışma gibi pek çok çalışmanın da temel motivasyonunu meydana getirmektedir.

Klasik formalizm üzerinden geliştirilen ve Langevin denklemiyle başlayıp Kramers-Klein master denkleminin tanımlanması ve bilinen bir formu olan Fokker-Planck denklemine indirgenmesi sürecini, zamansal ya da konumsal fraksiyonel formda yeniden ifade edilen Fokker-Planck denklemlerinin üretilmesi ve Fourier-Laplace dönüşümleri ile ilgili diferansiyel denklemin cebirsel denklemlere dönüştürülmesi yoluyla gözlenebilirler dair ortalama davranışın elde edilmesi takip eder. Üretilen gözlenebilirler üzerinden ilgili fiziksel geçiş bağıntıları kullanılarak geliştirilen iletkenlik modeli ile mevcut iletkenlik modelleri karşılaştırılmış, yeni modelin stokastik mekanik ve fraksiyonel dinamik enstrümanları kullanılarak geliştirilmesinin sağladığı fiziksel yorumlar ve sonuçlar tartışılmış, gerekli durumlarda aynı formalizm ve türetim metotları kullanılarak elde edilmiş teorik model geliştirilmeye ve yorumlanmaya çalışılmıştır.

Analitik olarak da türetilmiş ve yarı-ampirik denklemle aynı formda olan Havriliak-Negami tipi iletkenlik davranışının, ikili(Sb_2Te_3)-üçlü($TlSbTe$) bileşikler ve polimer($pPEO$) malzemelerde, farklı kalınlık ve sıcaklık değerlerinde, frekansa bağlı iletkenlik ölçümleriyle olan tutarlılığı bir dizi örnek üzerinde çalışılmıştır.



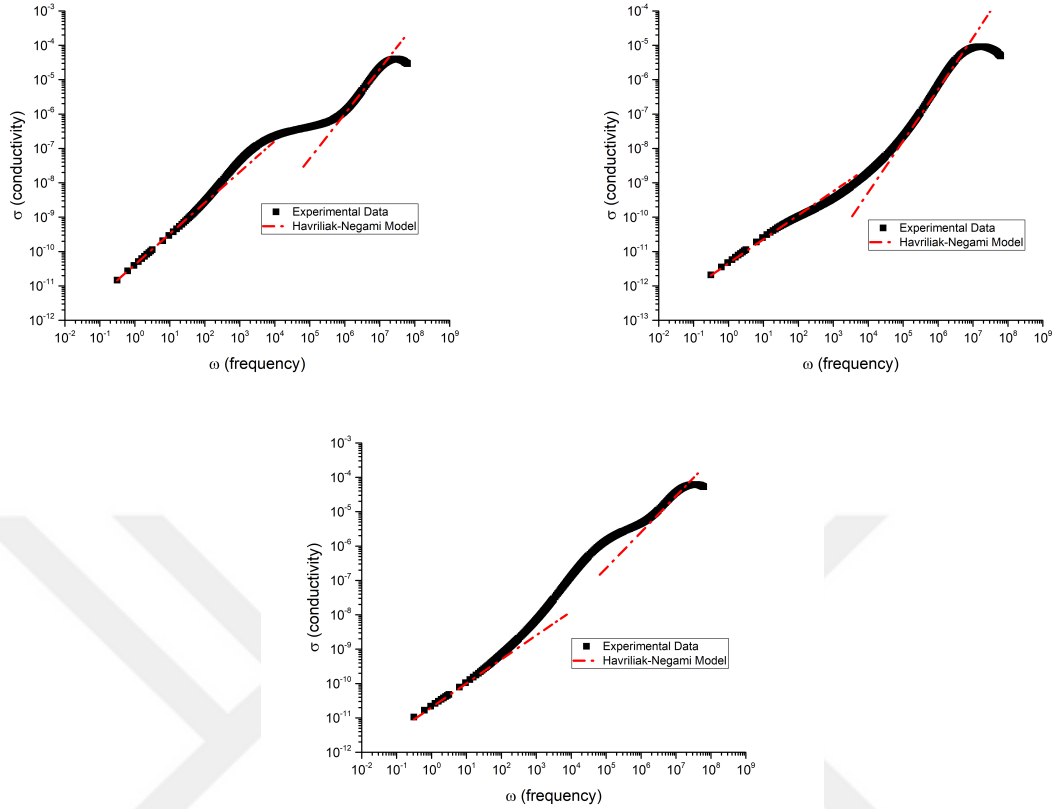
Şekil 4.1: Sb_2Te_3 için çeşitli sıcaklık ve kalınlıklarda frekansa bağlı iletkenlik ölçümleri ve Havriliak-Negami tipi iletkenlik davranışı.



Şekil 4.2: $TlSbTe$ için çeşitli sıcaklık ve kalınlıklarda frekansa bağlı iletkenlik ölçümleri ve Havriliak-Negami tipi iletkenlik davranışı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Anormal taşınım ile Havriliak-Negami(HN) tipi iletkenlik denklemi adı verilen yarı-deneysel iletkenlik denklemi arasındaki ilişkiyi fraksiyonel ve stokastik dinamik araçlarla oluşturduk.



Şekil 4.3: *pPEO* için çeşitli sıcaklık ve kalınlıklarda frekansa bağlı iletkenlik ölçümleri ve Havriliak-Negami tipi iletkenlik davranışı.

İlk adım için, stokastik bir hareket denklemi olan LE'yi tanımladık, KKE adlı denk master denklemini türettik ve bilinen Fokker-Planck denklemi olarak adlandırılan basitleştirilmiş formunu elde ettik. FPE, sürüklenmenin eşlik ettiği Ornstein-Uhlenbeck süreci veya Wiener süreci olarak da adlandırılan normal sürüklenme-difüzyon süreçlerini yorumlamak için kullanılan bir master denklemdir. Daha sonra, anormal taşıma teorilerine göre taşıma sürecini belirlemek için zaman-fraksiyonel FPE'yi kullandık.

HN tipi yarı-ampirik iletkenlik denkleminin, belirlenen doğal sınır koşulları altında zaman-fraksiyonel FPE'nin basitleştirilmiş formu ile ilişkili olduğunu kanıtladık ve aynı şekilde, HN tipi iletkenlik davranışının uzun-kuyruklu bekleme süresi dağılımı ve yenilenme sürecine göre uzun-menzilli bellek ile bağlantısını ortaya çıkardık. Benzer şekilde, Debye, CC ve CD adı verilen diğer iletkenlik denklemleri, Markovyen olmayan veya bellek özelliklerini ortaya çıkaran aynı anormal davranışlara sahiptir. Bu nedenle, yarı-ampirik iletkenlik formülasyonunun, uzun menzilli korelasyonlara karşılık gelen uzun menzilli atlama uzunluğu ile değil, sadece anormal taşımanın hafıza özellikleri ile ilgili olduğunu

geliştirdiğimiz formalizm üzerinden göstermiş olduk.

Tepki-uyarma fonksiyonunun veya olasılık yoğunluk fonksiyonunun diferansiyel denklemleri ve bunların HN ve diğer tip relaksasyon fonksiyonlarına karşılık gelen fraksiyonel genellemeleri literatürde çeşitli yöntemlerle elde edilmiş olmasına rağmen, ortalama hız için herhangi bir ifade türetilmemiş ve ortalama akım yoğunluğu ile ilişkisi kullanılarak ortalama iletkenlik davranışını elde etmekte kullanılmamıştır. Bu çalışma yalnızca ilk kez analitik ortalama iletkenlik davranışının yarı-ampirik iletkenlik formalizmine eşdeğer elde edildiğini göstermekle kalmaz, aynı zamanda anormal süreçlerle ilgili ortalama iletkenlik davranışı ifadesinin fraksiyonel-stokastik bir diferansiyel denklemden elde edilmesi ve bilinen bir fiziksel ilişkide kullanılmasıyla ortalama hız ifadesinden türetilbileceğini de gösterir. Bu çalışmanın literatüre katkısı, ortalama iletkenlik davranışının, karmaşık veya düzensiz ortamlarda anormal taşıma süreçlerinin arkasındaki stokastik ve lineer olmayan doğayı ortaya çıkaran şimdiye kadar denenmemiş bir yaklaşım kullanılarak elde edilmiş olmasıdır.

Bir iletkenlik teorisi elde etmek ve amorf yarı iletkenler ve yalıtkanlar için her türlü anormal süreci ortaya çıkarmak için zamana ve uzaya bağlı fraksiyonel FPE çalışılmalıdır. Bu çalışma, fraksiyonel analiz ve stokastik teori üzerinden tasvir edilen anormal taşıma fenomeni ile yarı-ampirik iletkenlik formülasyonu üzerinden tasvir edilen karmaşık veya düzensiz ortamdaki iletkenlik davranışı arasındaki ilişkiyi anlamaya çalışır. Bu çalışmada, yarı-ampirik HN tipi iletkenlik davranışı ile doğal sınır koşulları altında yeniden gözden geçirilen FPE arasında bağlantı kurduk. Bununla birlikte, daha ileri bir iletkenlik formalizmi inşa etmek için master denklemler, yeni sınır ve başlangıç koşulları altında fraksiyonel ve stokastik teoremin farklı matematiksel araçları aracılığıyla yeniden ele alınmalıdır.

KAYNAKLAR

- [1]. Deng, W., Hou, R., Wang, W. and Xu, P., 2020, *Modeling anomalous diffusion: from statistics to mathematics*, World Scientific, Singapore.
- [2]. Sandev, T. and Tomovski, Ž., 2019, *Fractional Equations and Models*, Springer Nature, Switzerland.
- [3]. Cairoli, A. and Baule, A., 2015, Langevin formulation of a subdiffusive continuous-time random walk in physical time, *Phys. Rev. E*, 92(1), 012102.
- [4]. Meerschaert, M. M. and Scheffler, H. P., 2004, Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times, *J. Appl. Probab.*, 623-638.
- [5]. Uchaikin, V. V., 2013, *Fractional derivatives for physicists and engineers(Vol. 1)*, Springer, Berlin.
- [6]. Livi, R. and Politi, P., 2017, *Nonequilibrium statistical physics: a modern perspective*, Cambridge University Press, United Kingdom.
- [7]. Kallenberg, O., 2017, *Random measures, theory and applications*, Springer, Switzerland.
- [8]. Florescu, I., 2014, *Probability and stochastic processes*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [9]. Barkai, E., Metzler R. and Klafter J., 2000, From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation, *Phys. Rev. E*, 61(1), 132.
- [10]. Angstmann, C. N., Donnelly, I. C., Henry, B. I., Langlands, T. A. M. and Straka, P., 2015, Generalized continuous time random walks, master equations, and fractional Fokker-Planck equations, *SIAM J. Appl. Math.*, 75(4), 1445-1468.
- [11]. Angstmann, C. N., Henry, B. I. and Ortega-Piwonka, I., 2017, Generalized master equations and fractional Fokker-Planck equations from continuous time random walks with arbitrary initial conditions, *Comput. Math. Appl.*, 73(6), 1315-1324.
- [12]. Kutner, R. and Masoliver, J., 2017, The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook, *Eur. Phys. J. B*, 90(3), 1-13.
- [13]. Schwabl, F., 2006, *Statistical Mechanics*, Springer, Berlin.
- [14]. Magdziarz, M., Weron A. and Klafter J., 2008, Equivalence of the fractional Fokker-Planck and subordinated Langevin equations: the case of a time-dependent force, *Phys. Rev. Lett.*, 101(21), 210601.
- [15]. Giuggioli, L. and Neu, Z., 2019, Fokker–Planck representations of non-Markov Langevin equations: application to delayed systems, *Philos. Trans. R. Soc. A*, 377(2153), 20180131.

- [16]. Tawfik, A. M., Fichtner, H., Schlickeiser, R. and Elhanbaly, A., 2017, Analytical study of fractional equations describing anomalous diffusion of energetic particles, *J. Phys. Conf. Ser.*, 869(1), 012-050.
- [17]. Fa, K. S. and Wang, K. G., 2013, Generalized Klein–Kramers equation: solution and application, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.*, 2013(09), 09-021.
- [18]. Metzler, R. and Compte, A., 2000, Generalized Diffusion-Advection schemes and dispersive sedimentation: A Fractional Approach, *J. Phys. Chem. B*, 104(16), 3858-3865.
- [19]. Li, C. and Cai, M., 2017, High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection–diffusion equations: Revisited, *Numer. Func. Anal. Opt.*, 38(7), 861-890.
- [20]. Saichev, A. I. and Zaslavsky, G. M., 1997, Fractional kinetic equations: solutions and applications, *Chaos*, 7(4), 753-764.
- [21]. del-Castillo-Negrete, D., 2006, Fractional diffusion models of nonlocal transport, *Phys. Plasmas*, 13(8), 082308.
- [22]. Srinivasan, G., Tartakovsky, D. M., Dentz, M., Viswanathan, H., Berkowitz B. and Robinson, B. A., 2010, Random walk particle tracking simulations of non-Fickian transport in heterogeneous media, *J. Comput. Phys.*, 229(11), 4304-4314.
- [23]. Weron, K., Stanislavsky, A., Jurlewicz, A., Meerschaert M. M. and Scheffler, H. P., 2012, Clustered continuous-time random walks: diffusion and relaxation consequences, *P. Roy. Soc. A-Math. Phys.*, 468(2142), 1615-1628.
- [24]. Metzler, R. and Klafter, J., 2000, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Rep.*, 339(1), 1–77.
- [25]. Kilbas, A. A., Luchko, Y. F., Martinez H. and Trujillo, J. J., 2010, Fractional Fourier transform in the framework of fractional calculus operators, *Integral Transform Spec. Funct.*, 21(10), 779-795.
- [26]. Medina, G. D., Ojeda, N. R., Pereira, J. H. and Romero, L. G., 2020, Fractional Laplace Transform and Fractional Calculus, *Int. Math. Forum*, 12(20), 991-1000.
- [27]. Fahad, H. M., Rehman, M. and Fernandez, A., 2020, On Laplace transforms with respect to functions and their applications to fractional differential equations, *arXiv preprint*, ArXiv:1907.04541.
- [28]. Nigmatullin, R. R. and Ryabov, Ya E., 1997, Cole-Davidson dielectric relaxation as a self-similar relaxation process, *Phys. Solid State*, 39(1), 87-90.
- [29]. Weron, K., Jurlewicz, A. and Magdziarz, M., 2005, Havriliak–Negami response in the framework of the continuous-time random walk, *Acta Phys. Pol. B*, 36(5), 1855-1868.
- [30]. Kalmykov, Y. P., Coffey, W. T., Crothers, D. S. and Titov, S. V., 2004, Microscopic models for dielectric relaxation in disordered systems, *Phys. Rev. E*, 70(4), 041103.
- [31]. Górska, K., Horzela, A., Dattoli, G. and Penson, K. A., 2018, The Havriliak–Negami relaxation and its relatives: the response, relaxation and probability density functions, *J. Phys. A Math*, 51(13), 135202.

- [32]. Sibatov, R. T. and Uchaikin, D. V., 2010, Fractional relaxation and wave equations for dielectrics characterized by the Havriliak-Negami response function, *arXiv preprint*, ArXiv:1008.3972.
- [33]. Tarasov, A. and Titov, K., 2013, On the use of the Cole–Cole equations in spectral induced polarization, *Geophys. J. Int.*, 195(1), 352-356.
- [34]. Sega, M., Kantorovich, S. S., Arnold, A. and Holm, C., 2013, Recent Advances in Broadband Dielectric Spectroscopy, *NATO Sci. Peace. Sec. B*, 103-122.
- [35]. Rosa, C. F. A. E. and Capelas de Oliveira, E., 2015, Relaxation equations: fractional models, *J. Phys. Math.*, 6(2), 1-7.
- [36]. Garrappa, R., Maione, G. and Popolizio, M., 2014, Time-domain simulation for fractional relaxation of Havriliak-Negami type, *Int. Conf. Fract. Differ. Appl.*, 1-6.
- [37]. Tarasov, V. E., 2011, *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Springer, Berlin.
- [38]. Saglam, U., Ulutas, K., Parim, Y., Yakut, S. and Deger, D., 2020, A theoretical approach to conductivity, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 17(01), 2050004.
- [39]. Cheng, C., Cirillo, M., Salina, G. and Grønbech-Jensen, N., 2018, Nonequilibrium transient phenomena in the washboard potential, *Phys. Rev. E*, 98(1), 1–8. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.012140>
- [40]. Eule, S., Zaburdaev, V., Friedrich, R. and Geisel, T., 2012, Langevin description of superdiffusive Lévy processes, *Phys. Rev. E*, 86(4), 1-7. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.041134>
- [41]. Goychuk, I. and Kharchenko, V. O., 2013, Rocking subdiffusive ratchets: Origin, optimization and efficiency, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 8(2), 127–143. <https://doi.org/10.1051/mmnp/20138210>
- [42]. Nenashev, A. V., Oelerich, J. O., Greiner, S. H. M., Dvurechenskii, A. V., Gebhard, F. and Baranovskii, S. D., 2019, Percolation description of charge transport in amorphous oxide semiconductors, *Phys. Rev. B*, 100(12), 1–8. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.125202>
- [43]. Palyulin, V. V., Chechkin, A. V. and Metzler, R., 2014, Lévy flights do not always optimize random blind search for sparse targets, *PNAS*, 111(8), 2931-2936. <https://doi.org/10.1073/pnas.1320424111>
- [44]. Shen, L., Ostoj-Starzewski, M. ve Porcu, E., 2015, Harmonic oscillator driven by random processes having fractal and Hurst effects, *Acta Mech.*, 226(11), 3653-3672. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1385-4>
- [45]. Zeng, C., Zeng, J., Liu, F. and Wang, H., 2016, Impact of correlated noise in an energy depot model, *Sci. Rep.*, 6, 1-11. <https://doi.org/10.1038/srep19591>

- [46]. Baeumer, B. and Straka, P., 2016, Fokker–Planck and Kolmogorov backward equations for continuous time random walk scaling limits, *Proc. Am. Math. Soc.*, 145(1), 399–412. <https://doi.org/10.1090/proc/13203>
- [47]. Barkai, E., 2001, Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application, *Phys. Rev. E*, 63(4), 046118. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.046118>
- [48]. Baumann, G. and Stenger, F., 2017, Fractional Fokker-Planck equation, *Mathematics*, 5(1), 1—19. <https://doi.org/10.3390/math5010012>
- [49]. Borromeo, M. and Marchesoni, F., 2005, Noise-assisted transport on symmetric periodic substrates, *Chaos*, 15(2), 026110. <https://doi.org/10.1063/1.1858651>
- [50]. Goychuk, I. and Hänggi, P., 2011, Subdiffusive dynamics in washboard potentials: Two different approaches and different universality classes, *Fractional Dynamics: Recent Advances*, 307–329. <https://doi.org/10.1142/9789814340595>
- [51]. Heinsalu, E., Patriarca, M., Goychuk, I. and Hänggi, P., 2007, Fractional diffusion in periodic potentials, *J. Condens. Matter Phys.*, 19(6), 1–13. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/19/6/065114>
- [52]. Hahn, M. G., Kobayashi, K. and Umarov, S., 2011, Fokker-Planck-Kolmogorov equations associated with time-changed fractional Brownian motion, *Proc. Am. Math. Soc.*, 139(02), 691–691. <https://doi.org/10.1090/0002-9939-2010-10527-0>
- [53]. Kang, Y. M., 2016, Simulating transient dynamics of the time-dependent time fractional Fokker–Planck systems, *Phys. Lett. A* ., 380(39), 3160–3166. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.07.049>
- [54]. Li, T. R., Chamrajnagar, A. S., Fong, X. R., Rizik, N. R. and Fu, F., 2019, Sentiment-based prediction of alternative cryptocurrency price fluctuations using gradient boosting tree model, *Front. Phys.*, 7, 1–6. <https://doi.org/10.3389/fphy.2019.00112>
- [55]. Lindner, B., Kostur, M. and Schimansky-Geier, L., 2001, Optimal Diffusive Transport in a Tilted Periodic Potential, *Fluct. Noise Lett.*, 01(01), 25–39. <https://doi.org/10.1142/s0219477501000056>
- [56]. Manca, F., Déjardin, P. M. and Giordano, S., 2016, Statistical mechanics of holonomic systems as a Brownian motion on smooth manifolds, *Ann. Phys.*, 528(5), 381–393. <https://doi.org/10.1002/andp.201500221>
- [57]. Metzler, R. and Klafter, J., 2000), From a generalized CKE to the Fractional KKE., *J. Phys. Chem. B*, (5), 3851–3857.
- [58]. Sandev, T., Chechkin, A., Kantz, H. and Metzler, R., 2015, Diffusion and Fokker-Planck-Smoluchowski equations with generalized memory kernel, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 18(4), 1006–1038. <https://doi.org/10.1515/fca-2015-0059>
- [59]. Visser, A. W., 2008, Lagrangian modelling of plankton motion: From deceptively simple random walks to Fokker-Planck and back again, *J. Mar. Syst.*, 70(3–4), 287–299. <https://doi.org/10.1016/j.jmarsys.2006.07.007>

- [60]. Xing, J., Wang, H. and Oster, G., 2005, From continuum Fokker-Planck models to discrete kinetic models, *Biophys. J.*, 89(3), 1551–1563. <https://doi.org/10.1529/biophysj.104.055178>
- [61]. Bolivar, A. O., 2015, Non-Markovian quantum Brownian motion: a non-Hamiltonian approach, Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1503.07951>
- [62]. Golovinski, P. A., 2020, Dynamics of driven Brownian inverted oscillator, *Phys. Lett. A.*, 384(10), 126203. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.126203>
- [63]. Hänggi, P. and Marchesoni, F., 2009, Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale, *Rev. Mod. Phys.*, 81(1), 387–442. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.387>
- [64]. Mentor, M. S. and Ljubljana, R. P., 2010, Biased Brownian motion Introduction. Seminar, (January).
- [65]. Yaghoubi, M., Fouladvand, M. E., Bérut, A. and Łuczka, J., 2017, Energetics of a driven Brownian harmonic oscillator, *J. Stat. Mech.*, 2017(11), 113206. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa9346>
- [66]. Bovier, A., Brydges, D., Coja-Oghlan, A., Ioffe, D., Lawler, G. F., Biskup, M., Černý J. and Kotecký, R., 2015, Random Walks, Random Fields, and Disordered Systems, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-19339-7>
- [67]. Coffey, W. T. and Kalmykov, Y. P., 2005, *Fractals, Diffusion and Relaxation in Disordered Complex Systems*, (Vol. 133), Part A, John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/0471790265>
- [68]. Place, P., 1981, Review A new understanding of the dielectric relaxation of solids, *J. Mater. Sci.*, 16(8), 2037–2060.
- [69]. Ryabov, Y. E. and Puzenko, A., 2002, Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation *Phys. Rev. B*, 66(18), 1–8. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.66.184201>
- [70]. Duda, J., 2011, From maximal entropy random walk to quantum thermodynamics, *arXiv preprint*. arXiv:1111.2253
- [71]. Landman, U., Montroll, E. W. and Shlesinger, M. F., 1977, Random walks and generalized master equations with internal degrees of freedom, *PNAS*, 74(2), 430–433.
- [72]. Breuer, H. P. and Petruccione, F., 1995, How to build master equations for complex systems, *Contin. Mech. Thermodyn.*, 7(4), 439–473.
- [73]. Whitfield, J. D., Rodríguez-Rosario, C. A. and Aspuru-Guzik, A., 2010, Quantum stochastic walks: A generalization of classical random walks and quantum walks. *Phys. Rev. A*, 81(2), 022323.
- [74]. Dalla Pozza, N. and Caruso, F., 2020, Quantum stochastic walk models for quantum state discrimination, *Phys. Rev. A*, 384(9), 126195.

- [75]. Martínez-Martínez, I. and Sánchez-Burillo, E., 2016, Quantum stochastic walks on networks for decision-making, *Sci. Rep.*, 6, 23812.
- [76]. Falloon, P. E., Rodriguez, J. and Wang, J. B., 2017, QSWalk: a Mathematica package for quantum stochastic walks on arbitrary graphs, *Comput. Phys. Commun.*, 217, 162-170.
- [77]. Kempe, J., 2003, Quantum random walks: an introductory overview, *Contemp. Phys.*, 44(4), 307-327.
- [78]. Ellinas, D., 2008, Hopf algebras, random walks and quantum master equations, *J. Gen. Lie Theory Appl.*, 2(3), 147-151.
- [79]. Huang, C. F., 2001, From quantum master equation to random walk, *arXiv preprint. arXiv:cond-mat/0111026*.
- [80]. Itô, K., 1944, Stochastic integral, *Proc. Imp. Acad.*, 20(8), 519-524.
- [81]. Stratonovich, R. L., 1966, A new representation for stochastic integrals and equations, *SIAM J. Control Optim.*, 4(2), 362-371.
- [82]. Kuo, H. H., 2006, *Stochastic differential equations*, Springer, New York.
- [83]. Evans, L. C., 2012, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, USA.
- [84]. Oksendal, B., 2013, *Stochastic differential equations: an introduction with applications*, Springer, New York.
- [85]. Palyulin, V. V., Chechkin, A. V. and Metzler, R., 2014, Space-fractional Fokker-Planck equation and optimization of random search processes in the presence of an external bias, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.*, 2014(11), 11031. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2014/11/P11031>
- [86]. Barkai, E. and Silbey, R. J., 2000, Fractional kramers equation, *J. Phys. Chem. B*, 104(16), 3866–3874. <https://doi.org/10.1021/jp993491m>
- [87]. Tawfik, A. M., Fichtner, H., Elhanbaly, A. and Schlickeiser, R., 2019, An Analytical Study of Fractional Klein–Kramers Approximations for Describing Anomalous Diffusion of Energetic Particles, *J. Stat. Phys.*, 174(4), 830–845. <https://doi.org/10.1007/s10955-018-2211-x>
- [88]. Sokolov, I. M. and Klafter, J., 2005, From diffusion to anomalous diffusion: A century after Einstein’s Brownian motion, *Chaos*, 15(2), 026103. <https://doi.org/10.1063/1.1860472>
- [89]. Tarasov, V. E. and Tarasova, S. S., 2020, Fractional derivatives and integrals: What are they needed for?, *Mathematics*, 82, 164.
- [90]. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., 2006, *Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204)*. Elsevier, Netherlands.
- [91]. Uchaikin, V. V., (2013, Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, *Chaos*, 27(2), xvi+504. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-33911-0>

- [92]. Samko, S. G., 1987, Fractional integrals and derivatives, theory and applications, Minsk; Nauka I Tekhnika.
- [93]. Denisov, S. I., Horsthemke, W. and Hänggi, P., 2009, Generalized Fokker-Planck equation: Derivation and exact solutions, *Eur. Phys. J. B*, 68(4), 567-575.
- [94]. Povstenko, Y. and Kyrylych, T., 2017, Two approaches to obtaining the space-time fractional advection-diffusion equation, *Entropy*, 19(7), 297.
- [95]. Kalmykov, Y. P., Coffey, W. T. and Rice, S. A. (Eds.). (2006). Fractals, Diffusion, and Relaxation in Disordered Complex Systems, Part A (Vol. 163). John Wiley Sons.
- [96]. Kalmykov, Y. P., Coffey, W. T. and Rice, S. A. (Eds.). (2006). Fractals, Diffusion, and Relaxation in Disordered Complex Systems, Part B (Vol. 133). John Wiley Sons.
- [97]. Dekking, F. M., Kraaikamp, C., Lopuhaä, H. P. and Meester, L. E., 2005, *A Modern Introduction to Probability and Statistics*, Springer, London.
- [98]. Mathai, A. M. and Haubold, H. J., 2017, *Probability and statistics*, De Gruyter, Berlin.
- [99]. Olofsson, P., Andersson, M., 2012, *Probability, statistics, and stochastic processes*, John Wiley Sons, New Jersey.
- [100]. Rosenthal, J. S., 2006, *A First Look At Rigorous Probability Theory*, World Scientific, Singapore.
- [101]. Soong, T. T., 2004, *Fundamentals of probability and statistics for engineers*, John Wiley Sons, Guildford.
- [102]. Wilkinson, D., 1998, *Introduction to Probability and Statistics*, School of Mathematics Statistics, London.
- [103]. Arnold, L., 1974, *Stochastic differential equations: Theory and applications*, Wiley, New York.
- [104]. Bhattacharya, R. N. and Waymire, E. C., 2021, *Random Walk, Brownian Motion, and Martingales*, Springer, Cham.
- [105]. Brémaud, P., 2020, *Probability theory and stochastic processes*, Springer, Berlin.
- [106]. Brzezniak, Z., Zastawniak, T., 2000, *Basic stochastic processes: a course through exercises*, Springer, London.
- [107]. Cinlar, E., 2013, *Introduction to stochastic processes*, Dover, New Jersey.
- [108]. Cox, D. R. and Miller, H. D., 2017, *The theory of stochastic processes*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- [109]. Del Moral, P. and Penev, S., 2017, *Stochastic Processes: From Applications to Theory*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- [110]. Devolder, P., Janssen, J. and Manca, R., 2015, *Basic stochastic processes*, John Wiley & Sons, UK.

- [111]. Fararo, T. J., 1969, Stochastic processes, *Sociol. Methodol.*, 1, 245-260.
- [112]. Gallager, R. G., 2013, *Stochastic processes: theory for applications*, Cambridge University Press, New York.
- [113]. Garcia-Palacios, J. L., 2007, Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems, *arXiv preprint*, cond-mat/0701242.
- [114]. Gardiner, C. W., 1985, *Handbook of stochastic methods*, Springer, Berlin.
- [115]. Hassler, U., 2016, *Stochastic Processes and Calculus*, Springer, Cham.
- [116]. Jones, P. W. and Smith, P., 2017, *Stochastic processes an introduction*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- [117]. Kuo, H., 2006, *Introduction to stochastic integration*, Springer, Berlin.
- [118]. Lawler, G. F. and Limic, V., 2010, *Random walk: a modern introduction*, Cambridge University Press, New York.
- [119]. Micheas, A. C., 2018, *Theory of Stochastic Objects: Probability, Stochastic Processes and Inference*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- [120]. Mishura, Y. and Shevchenko, G., 2017, *Theory and Statistical Applications of Stochastic Processes*, John Wiley Sons, UK.
- [121]. Noé, F., Keller, B., Prinz, J. H., 2013, *Lecture notes on stochastic processes*, DFG Research center Matheon, Berlin.
- [122]. Petroni, N. C., 2020, *Probability and Stochastic Processes for Physicists*, Springer, Cham.
- [123]. Rudnick, J. and Gaspari, G., 2004, *Elements of the random walk: an introduction for advanced students and researchers*, Cambridge University Press, New York.
- [124]. Sengul, S., Bekiryazici, Z. and Merdan, M., 2021, Wong-Zakai method for stochastic differential equations in engineering, *Therm. Sci.*, 25(1), 131-142.
- [125]. Umarov, S., Hahn, M. and Kobayashi, K., 2018, *Beyond The Triangle: Brownian Motion, Ito Calculus, And Fokker-planck Equation-Fractional Generalizations*, World Scientific, New Jersey.
- [126]. Van Kampen, N. G., 1992, *Stochastic processes in physics and chemistry*, Elsevier, Holland.
- [127]. Agarwal, P., Baleanu, D., Chen, Y., Momani, S., Machado, J. A. T. (Eds.). (2019). Fractional Calculus: ICFDA 2018, Amman, Jordan, July 16-18. Berlin, Germany: Springer.
- [128]. Daftardar-Gejji, V. (Ed.). (2019). Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Springer Singapore.
- [129]. Fernandez, A., Baleanu, D. and Srivastava, H. M., 2019, Series representations for fractional-calculus operators involving generalised Mittag-Leffler functions, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 67, 517-527.

- [130]. Giusti, A., 2020, General fractional calculus and Prabhakar's theory, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 83, 105114.
- [131]. Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F. and Rogosin, S. V., 2020, *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*, Springer, New York.
- [132]. Gorenflo, R. and Mainardi, F., 2008, Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, *arXiv preprint*, arXiv:0805.3823.
- [133]. Herrmann, R., 2011, *Fractional calculus: an introduction for physicists*, World Scientific, Singapore.
- [134]. Kilbas, A. A., Saigo, M. and Saxena, R. K., 2004, Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 15(1), 31-49.
- [135]. Li, C. and Cai, M., 2019, *Theory and numerical approximations of fractional integrals and derivatives*, SIAM, Philadelphia.
- [136]. Luchko, Y. (Ed.). (2021). Fractional Integrals and Derivatives: "True" versus "False". MDPI.
- [137]. Mathai, A. M. and Haubold, H. J., 2017, *An introduction to fractional calculus*, Nova Science Publishers, New York.
- [138]. Meerschaert, M. M. and Sikorskii, A., 2019, *Stochastic models for fractional calculus*, de Gruyter, Berlin.
- [139]. Beerends, R. J., ter Morsche, H. G., Van den Berg, J. C. and Van de Vrie, E. M., 2003, *Fourier and Laplace transforms*, Cambridge University Press, New York.
- [140]. Fröhlich, H., 1958, *Theory of dielectrics: dielectric constant and dielectric loss*, Oxford University Press, USA.
- [141]. Hippel, A. R., 1966, *Dielectrics and waves*, MIT Press, Massachusetts.
- [142]. Moliton, A., 2007, *Basic electromagnetism and materials*, Springer, New York.
- [143]. Kao, K. C., 2004, *Dielectric phenomena in solids*, Elsevier, California.
- [144]. Raju, G. G., 2017, *Dielectrics in electric fields: Tables, Atoms, and Molecules*, CRC press, Boca Raton.
- [145]. Klafter, J., Lim, S. C. and Metzler, R., 2012, *Fractional dynamics: recent advances*, World Scientific, Singapore.
- [146]. Kwok, S. F., 2012, *Langevin and Fokker-Planck equations and their generalizations: descriptions and solutions*, World Scientific, Singapore.
- [147]. Metzler, R. and Nonnenmacher, T. F., 2002, Space- and time-fractional diffusion and wave equations, fractional Fokker-Planck equations, and physical motivation, *Chem. Phys.*, 284(1-2), 67-90.

- [148]. Henry, B. I., Langlands, T. A. M. and Straka, P., 2010, Fractional Fokker-Planck equations for subdiffusion with space-and time-dependent forces, *Phys. Rev. Lett.*, 105(17), 170602.
- [149]. Garra, R., Gorenflo, R., Polito, F. and Tomovski, Ž., 2014, Hilfer–Prabhakar derivatives and some applications, *Appl. Math. Comput.*, 242, 576-589.
- [150]. Garra, R. and Garrappa, R., 2018, The Prabhakar or three parameter Mittag–Leffler function: Theory and application, *Commun. Nonlinear Sci.*, 56, 314-329.
- [151]. Giusti, A., Colombaro, I., Garra, R., Garrappa, R., Polito, F., Popolizio, M. and Mainardi, F., 2020, A practical guide to Prabhakar fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 23(1), 9-54.
- [152]. Garrappa, R., Mainardi, F. and Guido, M., 2016, Models of dielectric relaxation based on completely monotone functions, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 19(5), 1105-1160.
- [153]. Stanislavsky, A. and Weron, K., 2016, Atypical case of the dielectric relaxation responses and its fractional kinetic equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 19(1), 212.
- [154]. Kusse, B. R. and Westwig, E. A., 2010, *Mathematical physics: applied mathematics for scientists and engineers*, John Wiley & Sons, Germany.
- [155]. Garrappa, R. and Maione, G., 2017, *Fractional Prabhakar derivative and applications in anomalous dielectrics: a numerical approach*, in Theory and Applications of Non-Integer Order Systems, eds. A. Babiarz, A. Czornik, J. Klamka, M. Niezabitowski, pp. 429-439.

EKLER

EK 1. Fraksiyonel Diferansiyel Operatörler

Fraksiyonel diferansiyel operatörler, çeşitli modellerin türetim denklemlerini formüle etmeye ve aynı zamanda zaman domaininde elektrik alan ile polarizasyon arasındaki temel yasayı temsil etmeye izin verir.

Öncelikle, aşağıda $*$ sembolünün iki nedensel (yerel olarak integrallenebilir) $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonu arasındaki evrişim(konvolüsyon)integralini ifade ettiğini gösterelim:

$$f(t) * g(t) \equiv \int_0^t f(t-u)g(u)du \quad (1.1)$$

bu bağıntı klasik fonksiyonlar için komütatiftir. Ayrıca, Laplace dönüşümünün uygulanması,

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \div \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s), \quad (1.2)$$

burada $\div$ bir zaman fonksiyonu ile kompleks Laplace domainindeki görüntüsü arasında tanımlanan dizilim bağıntısını gösterir.

EK 2. Riemann-Liouville and Caputo Fraksiyonel Operatörleri

$\alpha > 0$ dereceli Riemann-Liouville integrali şu şekilde tanımlanır:

$${}_0J_t^\alpha f(t) \equiv \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)du, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

$0 < \alpha < 1$ varsayımı altında, (2.1) integralinin sol-tersi Riemann-Liouville kesirli türevidir.

$${}_0D_t^\alpha f(t) = D_{t0}J_t^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-u)^{-\alpha} f(u)du. \quad (2.2)$$

Grünwald-Letnikov türevi olarak bilinen eşdeğer bir tanım, fraksiyonel diferansiyel aracılığıyla fraksiyonel türevlerin şu şekilde yazılmasına izin verir:

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^{(\alpha)} f(t-kh), \quad (2.3)$$

burada $h > 0$ ve $\omega_k^{(\alpha)}$ 'lar binom katsayılarıdır.

$$\omega_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}. \quad (2.4)$$

(2.2)'deki diferansiyel ve integrasyon değişimi, Caputo fraksiyonel türevine yol açar.

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0 J_t^{1-\alpha} D_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-t')^{-\alpha} f'(u) du \quad (2.5)$$

RL ve Caputo fraksiyonel türevleri arasındaki ilişkiyi türetmek için, (2.2) ve (2.5)'in Laplace dönüşümlerinin sırasıyla olduğunu önceden gözlemlemek yeterlidir.

$$\mathcal{L}({}_0 D_t^\alpha f(t); s) = s^\alpha \mathcal{L}(f(t); s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} {}_0 J_t^{1-\alpha} f(t) \quad (2.6)$$

ve

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha f(t); s) = s^\alpha \mathcal{L}(f(t); s) - s^{\alpha-1} f(0^+) \quad (2.7)$$

bu nedenle, yeniden yazıldıktan sonra

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha f(t); s) = s^\alpha \left(\mathcal{L}(f(t); s) - \frac{1}{s} f(0^+) \right) = s^\alpha (\mathcal{L}(f(t) - f(0^+); s)) \quad (2.8)$$

zaman domainine geri dönerek iyi bilinen ilişkiyi elde ederiz,

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0 D_t^\alpha (f(t) - f(0^+)) \quad (2.9)$$

eşdeğer olarak yeniden yazılabilir.

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0 D_t^\alpha f(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0^+). \quad (2.10)$$

Bu operatörler, özellikle de Caputo tipi operatörler, tartışılan bazı modellerde elektrik ve polarizasyon alanı arasındaki ilişkiyi ifade eden türetici yasayı zaman domaininde tanımlamak için faydalı olurlar. Örneğin, CC modeli için Fourier/Laplace alanından ters dönüşümünü ifade etmek gerekirse

$${}_0^C D_t^\alpha P_{CC}(t, x) = -\frac{1}{\tau_\star^\alpha} P_{CC}(t, x) + \frac{\Delta \epsilon}{\tau_\star^\alpha} E(t, x), \quad P_{CC}(0, x) = P_0(x), \quad (2.11)$$

burada, kısaca belirtmek için $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)$ ve $P(t, x)$ ve $E(t, x)$ bir uzay değişkenine de x 'a bağlı olan sırasıyla polarizasyon ve elektrik alanıdır. Caputo'nun türevinin kullanılması sayesinde, $t = 0$ başlangıç zamanında verilen $P_0(x)$ başlangıç polarizasyonu cinsinden ifade edilen Cauchy tipi bir başlangıç koşulu (2.11) ile birleştirilir.

EK 3. Pseudo-Fraksiyonel Operatörler

HN modeline (ve dolayısıyla CD modelinin özel durumuna) uygulanan bir buluşsal prosedür, Nigmatullin ve Ryabov tarafından sunulmuş ve diğer makalelerinde de tartışılmıştır. HN relaksasyonunun ters çevrilmesinden kaynaklanan $({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma$ fraksiyonel pseudo-diferansiyel operatörünü, binom açılımlarını, komütatör operatörlerinin cebirini ve RL türevi için Leibniz formülünü kullanarak, yeniden formüle etmek mümkündür.

$$({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma = \exp\left(-\frac{t\lambda}{\alpha} {}_0D_t^{1-\alpha}\right) {}_0D_t^{\alpha\gamma} \exp\left(\frac{t\lambda}{\alpha} {}_0D_t^{1-\alpha}\right) \quad (3.1)$$

burada üstellerin fraksiyonel diferansiyel operatörler dizisi olarak anlaşılması gerekir. Bu bileşik operatör, HN modelinin teorik yönlerini anlamak için kesinlikle yararlıdır, ancak hesaplama amaçları için pratik uygulamalarda dikkatle yürütülmelidir.

Bununla birlikte, (3.1)'de önerilen karakterizasyon, CD modeliyle ortaya çıkan özel durumda $\alpha = 1$ için pratik açıdan da özellikle yararlıdır ve şuna indirgenir.

$$(D_t + \lambda)^\gamma = e^{-t\lambda} {}_0D_t^\gamma e^{t\lambda} \quad (3.2)$$

Hanyga, (3.2)'de RL türevi yerine Caputo türevinin kullanılmasını önerdi.

$${}^C(D_t + \lambda)^\gamma = e^{-t\lambda} {}_0^CD_t^\gamma e^{t\lambda} \quad (3.3)$$

ve bu operatörün Laplace dönüşümünü elde etmek için gerekli türevleri gösterdi.

$$\mathcal{L}\left({}^C(D_t + \lambda)^\gamma; s\right) = (s + \lambda)^\gamma \tilde{f}(s) - (s + \lambda)^{\gamma-1} f(0^+) \quad (3.4)$$

Aynı yaklaşım, (3.2)'nin Laplace dönüşümünü de türetmek için basit bir şekilde uygulanabilir.

$$\mathcal{L}\left((D_t + \lambda)^\gamma f(t); s\right) = (s + \lambda)^\gamma \tilde{f}(s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} {}_0J_t^{1-\gamma} \left[e^{t\lambda} f(t)\right] \quad (3.5)$$

(3.2) ve (3.3) arasındaki aşağıdaki ilişkinin geçerli olduğunu doğrulamak mümkündür.

$${}^C(D_t + \lambda)^\gamma f(t) = (D_t + \lambda)^\gamma \left(f(t) - e^{-t\lambda} f(0^+) \right) \quad (3.6)$$

Zaman domaininde, elektrik alan ile CD tipi dielektrikteki polarizasyon arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilebilir:

$${}_0D_t^\gamma \left(e^{t/\tau_\star} P_{DC}(t, x) \right) = \frac{\Delta \epsilon}{\tau_\star^\gamma} e^{t/\tau_\star} E(t, x) \quad (3.7)$$

ve beklendiği gibi, $\gamma = 1$ olduğunda Debye tipi relaksasyonu açıklayan standart diferansiyel denkleme dönüşür.

HN modeline bağlı daha genel, yani $\alpha \neq 1$ olduğu durumda operatör (3.1), hesaplama için pek de kullanışlı değildir, incelendiğinde önerilen alternatif yaklaşım da aynı zorluklara sahiptir ve $({}_0D_t^\alpha + \tau_\star^{-\alpha})^\gamma$ operatörünün sonsuz iki terimli kesirli RL türevleri dizisine açılması aracılığıyla oluşur.

$$({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\gamma}{k} \lambda^k {}_0D_t^{\alpha(\gamma-k)} \quad (3.8)$$

(3.8) sayısal hesaplamalar için kullanılmış olsa da, önceden belirlenmiş bir doğruluğu elde etmek için yukarıdaki serinin ne zaman kesilmesi gerektiği açık olmadığından birkaç dezavantaja sahiptir.

HN modeli için operatörleri tanıtmamanın alternatif bir yolu Prabhakar integralleri ve türevleriyle ilgili çalışma temelinde tasarlanabilir. Bu operatörler, standart kernel $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ yerine Prabhakar fonksiyonunun aşağıdaki genellemesi ile değiştirildikten sonra, RL ve Caputo operatörlerine benzer bir şekilde tanıtılır.

$$e_{\alpha,\beta}^\gamma(t; \lambda) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha \lambda). \quad (3.9)$$

Özellikle, $f \in L^1([0, T])$ fonksiyonu için, $\alpha, \gamma > 0$ mertebeden Prabhakar integrali ve $\lambda > 0$ parametresi herhangi bir $t \in [0, T]$ için tanımlanabilir.

$$({}_0J_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t) \equiv e_{\alpha,\gamma}^\gamma(t; -\lambda) * f(t) = \int_0^t e_{\alpha,\gamma}^\gamma(t-u; -\lambda) f(u) du \quad (3.10)$$

ve karşılık gelen Laplace dönüşümü şu şekilde açıkça verilmektedir:

$$\mathcal{L}(({}_0J_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t); s) \equiv \frac{1}{(s^\alpha + \lambda)^\gamma} \tilde{f}(s) \quad (3.11)$$

$0 < \alpha\gamma < 1$ varsayımı altında, (3.10)'un sol-tersi özel türevdir.

$$\begin{aligned} ({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t) &\equiv \frac{d}{dt} \left(e_{\alpha, 1-\alpha\gamma}^{-\gamma}(t; -\lambda) * f(t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t e_{\alpha, 1-\alpha\gamma}^{-\gamma}(t-u; -\lambda) f(u) du \end{aligned} \quad (3.12)$$

ve karşılık gelen Laplace dönüşümünün olduğunu doğrulamak basittir.

$$\mathcal{L}(({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t); s) = (s^\alpha + \lambda)^\gamma \tilde{f}(s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{E}_{\alpha, 1-\alpha\gamma, -\lambda, 0}^{-\gamma} f(t) \quad (3.13)$$

burada tanıtılan $\mathbf{E}_{\rho, \mu, \omega, 0}^\gamma$ operatörü, kerneli $t^{\mu-1} E_{\rho, \mu}^\gamma(\omega t^\rho)$ olan konvolüsyon (evrişim) integralidir.

$$\mathbf{E}_{\rho, \mu, \omega, 0}^\gamma f(t) = \int_0^t (t-u)^{\mu-1} E_{\rho, \mu}^\gamma(\omega(t-u)^\rho) f(u) du. \quad (3.14)$$

$({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma$ türevinin tanımının, değerlendirmesi genellikle oldukça zor olan Prabhakar fonksiyonunun kerneliyle ilgili (birkaç yöntem son zamanlarda önerilmiştir) olduğu için ele alınması görece zor olan integral (3.10) temelinde olduğuna dikkat etmeliyiz. Bununla birlikte, bu tür bir tanım ilginçtir, çünkü Caputo türevi için tanıtılan düzenlemeyle aynı türden bir düzenlenmenin yapılmasına izin verir. Gerçekten de integralleri ve türevleri aralarında değiştirmek mümkündür, böylece mutlak sürekli bir fonksiyon f için operatör tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} {}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t) &\equiv e_{\alpha, 1-\alpha\gamma}^{-\gamma}(t; -\lambda) * \frac{d}{dt} f(t) \\ &= \int_0^t e_{\alpha, 1-\alpha\gamma}^{-\gamma}(t-u; -\lambda) f'(u) du \end{aligned} \quad (3.15)$$

burada "C" harfi, türev (3.15) için Caputo yaklaşımının karşılığı olarak (3.12)'in kabul edilebileceğini gösterir. Bu durumda, Laplace dönüşüm domainine geçilebilir,

$$\mathcal{L}({}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t); s) = (s^\alpha + \lambda)^\gamma \tilde{f}(s) - s^{-1} (s^\alpha + \lambda)^\gamma f(0^+) \quad (3.16)$$

ve dolayısıyla zaman domainine geri dönülebilir,

$${}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t) = ({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t) - e_{\alpha,1-\alpha\gamma}^{-\gamma}(t; -\lambda) f(0^+) \quad (3.17)$$

veya eşdeğer olarak da ifade edilebilir.

$${}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma f(t) = ({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma (f(t) - f(0^+)) \quad (3.18)$$

böylece $({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma$ ile Caputo formunda düzenlenmiş versiyonu ${}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma$ arasında ilişkiler kurar, bunlar (2.9) ve (2.10) ilişkilerine benzer, RL ve Caputo türevleri arasında geçerlidir.

${}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma$ operatörü, Caputo türevinin γ dereceden ve λ kadar kaydırıldığı şeklinde ifade edilemez, yani ${}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda)^\gamma \neq ({}_0^CD_t^\alpha + \lambda)^\gamma$. Önce (3.17) ve dolayısıyla (2.7) uygulanırsa, $\gamma = 1$ limit durumunda bu fark daha iyi algılanır.

$${}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda) f(t) = {}_0^CD_t^\alpha f(t) + \lambda (f(t) - f(0^+)) \quad (3.19)$$

ve dolayısıyla ${}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda) f(t) \neq ({}_0^CD_t^\alpha + \lambda) f(t)$. Aslında, (3.18) ışığında, ${}^C({}_0D_t^\alpha + \lambda)$ öğesinin sadece kesirli türev üzerinde değil, aynı zamanda $f(t)$ yerine $f(t) - f(0^+)$ getiren birim operatörü üzerinde de etki eden düzenleyici etkisinin olduğu sonucuna varmak mümkündür. CC modelinin relaksasyon fonksiyonu için türetim denklemini HN modelinin türetim denkleminin $\gamma = 1$ için özel bir durumu olarak ele almak için, birim operatörü değil, sadece fraksiyonel türevi etkileyen bir Caputo düzenlemesini tanımlamak gerekli olacaktır.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Uğur SAĞLAM
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Fakülte	Fen-Mühendislik Fakültesi
Bölümü	Fizik Mühendisliği
Mezuniyet Yılı	2013

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Genel Fizik Programı
Mezuniyet Tarihi	2016

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Genel Fizik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Makale ve Bildiriler
Makaleler Saglam, U. and Deger, D., 2021, A phenomenological approach to anomalous transport in complex or disordered media, <i>Can. J. Phys.</i>, 100(3), 180-184. Saglam, U., Ulutas, K., Parim, Y., Yakut, S., Deger, D., 2020, A theoretical approach to conductivity, <i>Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.</i>, 17(01), 2050004.