



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN HANKEL DETERMİNANTININ
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gizem ATLI

HAZİRAN

GİZEM ATLI	MATEMATİK ANABİLİM DALI	HAZİRAN 2022
-------------------	--------------------------------	---------------------

**ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN HANKEL DETERMİNANTININ
UYGULAMALARI**

Gizem ATLI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2022

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gizem ATLI

(24.06.2022)

ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN HANKEL DETERMİNANTININ
UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Gizem ATLI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2022

ÖZET

Bu tez çalışmasında, birim diskte tanımlı farklı sınıflar için Schwarz lemmasının bazı versiyonları verilmiştir. Hankel determinantı kullanılarak, analitik fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler ve bu determinant için bir üst sınır elde edilmiştir. Ayrıca birim diskin sınır noktasında açısız limitin mevcut olduğu varsayılarak, açısız türevinin modülünün aşağıdan değerlendirmeleri verilmiştir. Son olarak, sunulmuş teoremlerde elde edilen eşitsizliklerin kesinliği ispatlanmıştır.

Sayfa Adedi	: 31
Anahtar Kelimeler	: Jack's lemma, Analitik fonksiyon, Schwarz lemma.
Danışman	: Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

APPLICATIONS OF HANKEL'S DETERMINANT FOR ANALYTICAL FUNCTIONS
(M. Sc. Thesis)

Gizem ATLI

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2022

ABSTRACT

In this thesis, some versions of Schwarz lemma are given for different classes which were defined on the unit disk. New inequalities for analytic functions were obtained using Hankel's determinant and obtained an upper bound for this determinant. Moreover, estimations from below of the modulus of the angular derivative were given assuming the angular limit at the boundary point of the unit disk. Finally, the sharpness of the inequalities obtained in the presented theorems were proved.

Number of pages : 31
Keywords : Jack's lemma, Analytic function, Schwarz lemma.
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca engin tecrübe ve bilgi birikimiyle beni yönlendiren ve destek olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e yardımlarından ötürü teşekkürü bir borç bilirim. Tez jürimde yer almayı kabul edip, değerli vakitlerini ayırdıkları için Sayın Doç. Dr. Öznur KULAK ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Tuğba AKYEL'e çok teşekkür ederim.

Beni her daim maddi ve manevi olarak destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. HANKEL DETERMİNANTININ UYGULAMALARI	6
2.1.Temel Sonuçlar	10
3. SONUÇLAR.....	27
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ.....	31

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathcal{K}$	Birim disk
$\partial\mathcal{K}$	Birim diskin sınırı
$f(z)$	Analitik fonksiyon
c_2	Taylor açılımının katsayısı
c_3	Taylor açılımının katsayısı
$f''(z_0)$	Açısal türev
$H_2(1)$	Fekete-Szegö fonksiyonu
$B(z)$	Blaschke Çarpım

1. GİRİŞ

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlem, $\mathcal{K} = \{z : |z| < 1\}$ sıfır merkezli birim daire ve $\partial\mathcal{K} = \{z : |z| = 1\}$ olsun. Schwarz lemması kompleks analizin çeşitli araştırma alanlarında, önemli sonuçların elde edilmesinde güçlü bir araçtır. Bu sebeple bu lemmanın çeşitli versiyonları üzerinde çalışmalar oldukça yoğundur. Schwarz lemması, analitik fonksiyonların modülü için verilen maksimum modül ilkesine dayanmaktadır ve basitçe aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Schwarz Lemması. g fonksiyonu $\mathcal{K}$ diskinde analitik, $g(0) = 0$ ve $z \in \mathcal{K}$ için $|g(z)| < 1$ olsun. Bu durumda $z \in \mathcal{K}$ noktaları için $|g(z)| \leq |z|$ ve $|g'(0)| \leq 1$ eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak $g(z) = e^{i\theta} z$ olduğunda mümkündür (Ahlfors, 1979; Dineen, 1989; Markushevich, 2005).

Kompleks analizi oluşturan teoremlerin ispatlarında da Schwarz lemmasının önemini görmek mümkündür. Buna örnek olarak Liouville Teoremi gösterilebilir. Ayrıca, elektrik-elektronik mühendisliğinde kullanılan devrelerin oluşturulmasında bu lemma yer almaktadır. Teoride pozitif reel fonksiyonlar önemli bir yer tutmaktadır (Örnek & Düzenli, 2018; Reza, 1962; Richards, 1947).

Schwarz lemma, Pick tarafından aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir:

Schwarz-Pick Lemması. $m : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ analitik fonksiyon ve $z, z_1 \in \mathcal{K}$ olsun. Bu takdirde

$$\left| \frac{m(z) - \overline{m(z_1)}}{1 - m(z)\overline{m(z_1)}} \right| \leq \left| \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}z} \right|$$

ve

$$\frac{|m'(z)|}{1 - |m(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik halleri yalnızca $m(z)$ fonksiyonunun birim dairenin kendi kendine konform tasvir olması durumunda mümkündür (Ahlfors, 1979).

Schwarz-Pick lemma, yukarıda verdiğimiz Schwarz lemmasındaki $g(0)=0$ koşulunun kaldırılabilirliğini ifade etmektedir (Beardon & Minda, 2004; Beardon & Carne, 1992; Mercer, 1997, 2006; Osserman, 1999).

Kompleks analizin merkezi konularından olan Schwarz lemmasının önemli uygulama alanlarından birisi de bu lemmanın sınır versiyonu hakkındadır. Bu uygulamalardan bir kısmı birim dairenin sınırında $|g(\zeta)|=1$ şartını sağlayan noktalarında fonksiyonun türevinin modülünün aşağıdan değerlendirilmesi ile alakalıdır (Akyel & Örnek, 2016; Aydınoglu, 2020; Azeroğlu & Örnek, 2013; Boas, 2010; Çatal, 2019; Krantz, 2011; Örnek, 2013; Osserman, 2000; Unkelbach, 1938).

Schwarz lemmasının sınır versiyonu basit halde şu şekilde verilir:

Lemma. $g(z)$, $\mathcal{K}$ diskinde analitik, $g(0)=0$ ve $|z|<1$ için $|g(z)|<1$ olsun. Varsayalım ki, $g(z)$ fonksiyonu $|g(\zeta)|=1$ olmak üzere $\zeta \in \partial\mathcal{K}$ noktasına sürekli devam ettiriliyor ve $g'(\zeta)$ mevcut olsun. Bu takdirde

$$|g'(\zeta)| \geq 1 \quad (1.1)$$

ve

$$|g'(\zeta)| \geq \frac{2}{1+|g'(0)|} \quad (1.2)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (1.1)'de eşitlik hali sadece $g(z) = ze^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olduğunda mümkündür. Ayrıca, (1.2) eşitsizliğinde eşitlik hali ($\zeta = 1$ olduğunda)

$g(z) = z \frac{z+\kappa}{1+\kappa z}$, $0 \leq \kappa \leq 1$ fonksiyonu için gerçekleşir (Osserman, 2000; Unkelbach, 1938).

V. N. Dubinin tarafından (1.2) eşitsizliği daha da kuvvetlendirilmiştir (Dubinin, 2004). Tezdeki sonuçlarda g fonksiyonunun ζ noktasında açısal limitin var olması koşulu konularak, g fonksiyonun ζ noktasında açısal türevi incelenmiştir. Bu incelemeler için kullandığımız tanım ve teoremler aşağıda verilmiştir.

Tanım 1. Köşe noktası ζ hariç, kapanışı birim disk içerisinde yer alan ve $[0, \zeta]$ aralığına göre simetrik olan $\mathcal{K}$ ’deki herhangi bir üçgene $\zeta \in \partial\mathcal{K}$ noktasında Stolz açısı denir ve Δ ile gösterilir. Çalışmada açısal limit ve açısal türev notasyonları temel unsurlardır. $\zeta \in \partial\mathcal{K}$ olsun. Eğer ζ noktasındaki her Δ Stolz açısı için

$$f(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta, z \in \Delta} f(z)$$

mevcut ise, o halde f fonksiyonu ζ noktasında $f(\zeta)$ açısal limitine sahiptir denir.

Eğer ζ noktasındaki her Stolz açısı için açısal limit $f(\zeta)$ ve

$$f'(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta, z \in \Delta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

mevcut ise, o halde f fonksiyonu ζ noktasında $f'(\zeta)$ açısal türevine sahiptir denir (Pommerenke, 1992).

Tanım 2 (Blaschke çarpımı). z_k kompleks sayısı $|z_k| < 1$ koşulunu sağlasın. Açık ki, $\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}$ fonksiyonu birim daireyi kendine tasvir eden yalıncat analitik fonksiyondur ve z_k noktasında sıfır değerini alır. Özel halde $z_k = 0$ olursa z fonksiyonu elde edilir. Bu takdirde $z_0 = 0, z_1, \dots, z_n, |z_k| < 1, k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$B(z) = z^p \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z} \quad (1.3)$$

fonksiyonu birim daireyi kendisine dönüştüren analitik fonksiyon olup, sadece $z_0, z_1, \dots, z_n$ noktalarında sıfıra sahiptir. $|z|=1$ için ise $|B(z)|=1$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. Bu z_k 'ların bazıları tekrarlanabilir. Örneğin, bir z_k , p kez tekrar ediyorsa bu durumda $B(z)$ fonksiyonunun bu z_k noktasında p . mertebeden sıfırı vardır. (1.3) çarpımına sonlu Blaschke çarpımı denir. Çoğu zaman z_k noktaları $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$ olacak şekilde sıralandırılırlar. z_k noktaları sonsuz sayıda da alınabilir. Bu takdirde ele alınan $B^*(z) = z^p \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$ sonsuz çarpımının yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum (1 - |z_k|)$ serisinin yakınsak olmasıdır. İspat edilmiştir ki Blaschke çarpımı yakınsak ise onun birim çemberdeki sınır değerlerinin modülü hemen hemen her yerde (çember üzerindeki sıfır ölçülü küme hariç) 1'dir. Açıktır ki, birim dairede analitik olup, $z_1, \dots, z_n$ noktalarında sıfıra sahip ve $|f(z)| < 1$ koşulunu sağlayan fonksiyon

$$|f(z)| \leq |B(z)|, \quad |z| < 1 \quad (1.4)$$

ilişkisini sağlar, burada $B(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$. (1.4) eşitsizliği maksimum prensibinin basit bir sonucudur. Sonlu veya sonsuz Blaschke çarpımları kompleks analizde birçok yerde kullanılmakta olup, analitik fonksiyonların incelenmesinde önemli bir rol üstlenir (örneğin, Hardy uzayları v.s.).

Bu tezde sonlu Blaschke çarpımları kullanılmıştır. Bu çarpımlar başka denk şekillerde de yazılabilmektedir. Sonlu Blaschke çarpımını, sonsuz Blaschke çarpımından ayıran en önemli özellik bütün sınır noktalarında modülünün 1 olmasıdır. Buna karşılık sonsuz Blaschke çarpımları, dahili (inner) fonksiyon olup, sınırın sonsuz bir alt kümesinin noktalarındaki limit değerlerinin modülü 1 olmayabilir (Markushevich, 2005).

Bu çalışmamızda, yukarıda verilen (1.1) ve (1.2) eşitsizlikleri daha genel sınıflar için yapılmıştır. Ek olarak, sonuçlarımızda açılal limitin mevcudluğu koşulunun yer alması, açılal limitler hakkında Julia-Wolff teorisinin kullanılmasını zorunlu hale getirir.

Julia-Wolff Lemma. $g: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ analitik fonksiyonu $\zeta \in \partial\mathcal{K}$ noktasında $g(\zeta) \in \partial\mathcal{K}$ açısallık limitine sahip ve $g(0)=0$ olsun. Bu takdirde $g'(\zeta)$ açısallık türevi mevcuttur ve $1 \leq |g'(\zeta)| \leq \infty$ 'dir (Pommerenke, 1992).

Sonuç. $g(z)$ analitik fonksiyonunun sonlu bir $g'(\zeta)$ açısallık türevinin olması için gerek ve yeter koşul $g(\zeta) \in \partial\mathcal{K}$ noktasında sonlu $g'(\zeta)$ açısallık limitinin olmasıdır (Pommerenke, 1992).

Bu tezde Schwarz lemmasının sınır versiyonları incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, farklı fonksiyonlar sınıfında Hankel determinanı kullanılarak f fonksiyonunun ikinci türevinin modülü incelenmiştir. Bu incelemede f fonksiyonunun Taylor açılımındaki katsayıları ile Hankel determinantının katsayıları arasında bir ilişki kurulmuştur.

2. HANKEL DETERMİNANTININ UYGULAMALARI

Analitik fonksiyonların katsayıları arasında ilişki kurmak için çalışılan önemli problemlerden birisi de Hankel determinantıdır. Özellikle Fekete-Szegö fonksiyonu olarak bilinen $H_2(1)$ Hankel determinantının modülü için üst sınır çalışmaları önem taşımaktadır. 1976 yılında Noonan ve Thomas, $n \geq 0, q \geq 1$ olmak üzere $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu için q^{th} Hankel determinantını

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+q-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+q-1} & c_{n+q} & \cdots & c_{n+2q-2} \end{vmatrix}, c_1 = 1$$

olarak tanımlamıştır (Noonan & Thomas, 1976).

Burada $n = 1$ ve $q = 2$ için Hankel determinantından

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = c_3 - c_2^2$$

elde edilir. $H_2(1) = c_3 - c_2^2$ ile tanımlı $H_2(1)$ Hankel determinantı Fekete-Szegö fonksiyonu olarak verilmektedir.

Ayrıca, $n = 2$ ve $q = 2$ için Hankel determinantından

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} = c_2 c_4 - c_3^2$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu $H_2(2)$ eşitliği ikinci Hankel determinantı olarak bilinmektedir. Analitik fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantı $H_2(2)$ ve Fekete-Szegö fonksiyonu $H_2(1)$ üzerindeki çalışmalar popülerliğini korumaktadır (Altinkaya & Yalcin, 2016c, 2018a, 2018b; Fekete & Szegö, 1933; Noonan & Thomas, 1976; Obradovic

& Ponnusamy, 2011; Obradović & Ponnusamy, 2005; Pommerenke, 1967; Sokół & Thomas, 2018; Vasudevarao & Yanagihara, 2013).

Bu bölümde, vereceğimiz yeni bir sınıf için Hankel determinantından elde edilen Fekete-Szegö fonksiyonu yukarıdan değerlendirilecektir. Yani $H_2(1)$ ifadesinin modülü için bir üst sınır elde edeceğiz.

$\mathcal{A}$ ile $\mathcal{K} = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ fonksiyonlarının bir sınıfını işaretleyelim. Ayrıca, $\mathcal{N}(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ 'nın bir alt sınıfı olmak üzere

$$\left| \left(\frac{z}{f(z)} \right)^2 f'(z) - \alpha \right| < 1 \quad (2.1)$$

koşulunu sağlayan tüm $f(z)$ fonksiyonlarını içersin.

Bu çalışmada (2.1) koşulunu sağlayacak $f \in \mathcal{A}$ analitik fonksiyonlar sınıfından Hankel determinanı için kesin tahminler vereceğiz. Ayrıca $\mathcal{N}(\alpha)$ sınıfından f fonksiyonunun açılal türevi ile Hankel determinantının katsayıları arasındaki ilişki incelenecektir. Bu incelemede c_2, c_3, c_4 katsayıları kullanılacaktır. $f(z) \in \mathcal{N}(\alpha)$ ve

$$p(z) = \left(\frac{z}{f(z)} \right)^2 f'(z) - \alpha = 1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots$$

olsun. $p(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik ve $p(0) = 1 - \alpha$ 'dır. Şimdi aşağıdaki fonksiyonu düşünelim:

$$m(z) = \frac{p(z) - p(0)}{1 - \overline{p(0)}p(z)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}}.$$

Burada, $m(z)$, $\mathcal{K}$ 'de bir analitik fonksiyondur, $m(0)=0$ ve $z \in \mathcal{K}$ için $|m(z)| < 1$ 'dir.

Böylece, $m(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmanın koşullarını sağlar. Schwarz lemmadan;

$$\begin{aligned}
 m(z) &= \frac{p(z) - p(0)}{1 - \overline{p(0)}p(z)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}} \\
 &= \frac{1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots - (1 - \alpha)}{\left[1 - (1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots)\right] \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}} \\
 &= \frac{(c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots}{\left[1 - (1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots)\right] \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}} \\
 \frac{m(z)}{z^2} &= \frac{(c_3 - c_2^2) + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z + \dots}{\left[1 - (1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots)\right] \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}}, \\
 &= \frac{|c_3 - c_2^2|}{(1 - |\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|} = \frac{|H_2(1)|}{\left(1 - |\alpha|^2 \prod_{i=1}^n |z_i|\right)} \leq 1
 \end{aligned}$$

ve

$$|H_2(1)| \leq (1 - |\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|$$

elde edilir. Şimdi bu eşitsizliğin kesinliğini gösterelim.

$$\frac{p(z) - p(0)}{1 - \overline{p(0)}p(z)} = z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}$$

ve

$$p(z) = \frac{z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z} + p(0)}{1 + \overline{p(0)}z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}}$$

olsun.

$p(z)$ fonksiyonunun tanımından

$$\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 f'(z) - \alpha = \frac{z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z} + p(0)}{1 + \overline{p(0)} z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}},$$

$$1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots = \frac{z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z} + p(0)}{1 + \overline{p(0)} z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}},$$

$$(c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots = \frac{z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z} + p(0)}{1 + \overline{p(0)} z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}} - (1 - \alpha),$$

$$(c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots = \frac{(1 - |1 - \alpha|^2) z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}}{1 + (1 - \overline{\alpha}) z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}}$$

ve

$$(c_3 - c_2^2) + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z + \dots = \frac{(1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}}{1 + (1 - \overline{\alpha}) z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}}$$

alınır.

Son eşitlikte limite ($z \rightarrow 0$) geçerse

$$|c_3 - c_2^2| = |H_2(1)| = (1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|$$

eşitliği elde edilir. Böylece aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

Lemma. $f(z) \in \mathcal{N}(\alpha)$ ve $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları $f(z) - z$ fonksiyonunun $\mathcal{K}$ diskindeki $z = 0$ noktasından farklı sıfırları olsun. Bu takdirde

$$|H_2(1)| \leq (1 - |\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sonuç kesindir.

2.1. Temel Sonuçlar

Bu bölümde, $\mathcal{N}(\alpha)$ sınıfı için sınırdaki Schwarz lemması ve Hankel determinanı arasındaki ilişki verilecektir. $f(z) - z$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olan $z_1, z_2, \dots, z_n$ sıfırları ve $H_2(1)$ Hankel determinanı dahil edilerek, $f(z)$ fonksiyonunun modülünün ikinci türevi aşağıdan değerlendirilecektir. Elde edilen eşitsizliklerde, Hankel determinanı ile $f(z)$ fonksiyonunun ikinci açısız türevi arasındaki ilişki kurulacaktır. Bu sonuçlar (Atli & Ornek, 2021) çalışmasında yer almaktadır.

Teorem 2.1. $f(z) \in \mathcal{N}(\alpha)$ ve $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları $f(z) - z$ fonksiyonunun $\mathcal{K}$ diskindeki $z = 0$ noktasından farklı sıfırları olsun. Ayrıca, varsayalım ki $\zeta \in \partial\mathcal{K}$ noktasında f fonksiyonu $f(\zeta)$ açısız limitine sahip, $f(\zeta) = \frac{\zeta}{1+\alpha}$ ve $f'(\zeta) = \frac{1}{1+\alpha}$ olsun.

O halde

$$|f''(\zeta)| \geq \frac{|\alpha|^2}{(1 - |\alpha|^2)|1 + \alpha|^2} \left(2 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{|\zeta - z_i|^2} \right. \quad (2.2)$$

$$\left. + \frac{2 \left((1 - |\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| - |H_2(1)| \right)^2}{\left(\left(1 - |\alpha|^2 \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2 + (1 - |\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \left| 2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i} \right| \right)} \right)$$

elde edilir. Bu sonuç, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}^+$ için kesindir.

İspat. $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları $f(z) - z$ fonksiyonunun $\mathcal{K}$ diskindeki $z = 0$ noktasından farklı sıfırları,

$$g(z) = \frac{p(z) - p(0)}{1 - \overline{p(0)}p(z)}$$

ve

$$B(z) = z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}$$

olsun. $B(z)$ fonksiyonu $\mathcal{K}$ diskinde analitik ve $|z| < 1$ için $|B(z)| < 1$ olur. Maksimum prensibine göre her $z \in \mathcal{K}$ için $|g(z)| \leq |B(z)|$ eşitsizliği elde edilir.

$$r(z) = \frac{g(z)}{B(z)}$$

yardımcı fonksiyonu tanımlayalım. Açıktır ki $r(z)$ fonksiyonu $\mathcal{K}$ 'de analiktir ve $|z| < 1$ için $|r(z)| < 1$ eşitsizliği sağlanır.

Özel halde,

$$\begin{aligned}
r(z) &= \frac{\mathcal{G}(z)}{B(z)} = \frac{p(z) - p(0)}{1 - \overline{p(0)p(z)}} \frac{1}{z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i z}}} \\
&= \frac{1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots - (1 - \alpha)}{1 - (1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots)} \frac{1}{z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i z}}} \\
&= \frac{(c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots}{1 - (1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots)} \frac{1}{z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i z}}} \\
&= \frac{(c_3 - c_2^2) + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z + \dots}{1 - (1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i z}}} \\
|r(0)| &= \frac{|c_3 - c_2^2|}{(1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|} = \frac{|H_2(1)|}{(1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|}
\end{aligned}$$

ve

$$|r'(0)| = \frac{\left| 2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3 - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i} \right|}{(1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|} = \frac{\left| 2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i} \right|}{(1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|}$$

elde edilir.

Ek olarak, $\varsigma \in \partial\mathcal{K}$ için

$$\frac{\varsigma \mathcal{G}'(\varsigma)}{\mathcal{G}(\varsigma)} = \left| \frac{\varsigma \mathcal{G}'(\varsigma)}{\mathcal{G}(\varsigma)} \right| = |\mathcal{G}'(\varsigma)|$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca $|\mathcal{G}(z)| \leq |B(z)|$ olduğundan basit hesaplamalarla

$$\frac{1 - |\mathcal{G}(z)|}{1 - |z|} \geq \frac{1 - |B(z)|}{1 - |z|}$$

olur. Bu eşitsizlikte açısıl limite geçerse

$$|\mathcal{G}'(\varsigma)| \geq |B'(\varsigma)|$$

elde edilir. Bu takdirde yukarıdaki ifadelerden

$$\frac{z_0 \mathcal{G}'(\varsigma)}{\mathcal{G}(\varsigma)} = \left| \frac{\varsigma \mathcal{G}'(\varsigma)}{\mathcal{G}(\varsigma)} \right| = |\mathcal{G}'(\varsigma)| \geq |B'(\varsigma)| = \left| \frac{\varsigma B'(\varsigma)}{B(\varsigma)} \right| = \frac{\varsigma B'(\varsigma)}{B(\varsigma)}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, basit işlemler ile

$$\begin{aligned} |B'(\varsigma)| = \frac{\varsigma B'(\varsigma)}{B(\varsigma)} &= \frac{\varsigma \left[2\varsigma \prod_{i=1}^n \frac{\varsigma - \overline{z_i}}{1 - \overline{z_i}\varsigma} + \varsigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{(1 - \overline{z_i}\varsigma)^2} \prod_{\substack{s=1 \\ i \neq s}}^n \frac{\varsigma - \overline{z_s}}{1 - \overline{z_s}\varsigma} \right]}{\varsigma^2 \prod_{i=1}^n \frac{\varsigma - \overline{z_i}}{1 - \overline{z_i}\varsigma}} \\ &= 2 + \frac{\varsigma \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{(1 - \overline{z_i}\varsigma)^2} \prod_{\substack{s=1 \\ i \neq s}}^n \frac{\varsigma - \overline{z_s}}{1 - \overline{z_s}\varsigma}}{\prod_{i=1}^n \frac{\varsigma - \overline{z_i}}{1 - \overline{z_i}\varsigma}} \\ &= 2 + \varsigma \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{(1 - \overline{z_i}\varsigma)^2} \frac{1 - \overline{z_i}\varsigma}{\varsigma - \overline{z_i}} \\ &= 2 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{|\varsigma - \overline{z_i}|^2} \end{aligned}$$

ve

$$|B'(\varsigma)| = 2 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{|\varsigma - \overline{z_i}|^2}$$

sonucu bulunur.

$$\Phi(z) = \frac{r(z) - r(0)}{1 - \overline{r(0)}r(z)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Açıktır ki $\Phi(z)$ fonksiyonun sınırda Schwarz lemmasının koşullarını sağlar. Bu nedenle,

$$\frac{2}{1 + |\Phi'(0)|} \leq |\Phi'(\zeta)| = \frac{1 - |r(0)|^2}{|1 - \overline{r(0)}r(\zeta)|^2} |r'(\zeta)|$$

sağlanır.

$$\begin{aligned} r'(z) &= \frac{\mathcal{G}'(z)B(z) - B'(z)\mathcal{G}(z)}{B^2(z)} = \frac{\mathcal{G}'(z)}{B(z)} - \frac{B'(z)\mathcal{G}(z)}{B^2(z)} \\ &= \frac{\mathcal{G}(z)}{zB(z)} \left(\frac{z\mathcal{G}'(z)}{\mathcal{G}(z)} - \frac{zB'(z)}{B(z)} \right), \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\mathcal{G}(\zeta)}{\zeta B(\zeta)} \right| = 1,$$

$$|1 - \overline{r(0)}r(\zeta)|^2 \geq (1 - |r(0)||r(\zeta)|)^2 = (1 - |r(0)|)^2$$

ve

$$\begin{aligned} |\Phi'(0)| &= \frac{|r'(0)|}{1 - |r(0)|^2} = \frac{\frac{\left| 2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i} \right|}{\left((1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)}}{1 - \left(\frac{|H_2(1)|}{\left((1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)} \right)^2} \\ &= \left((1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right) \frac{\left| 2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i} \right|}{\left(\left((1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2 \right)} \end{aligned}$$

olduğu için

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{1 + \left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i|} \left| \frac{2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i}}{\left(\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2} \right| \\
& \leq \frac{1 + \frac{|H_2(1)|}{\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i|}}{1 - \frac{|H_2(1)|}{\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i|}} \left| \frac{\mathcal{G}(\varsigma)}{\varsigma B(\varsigma)} \right| \left| \frac{\varsigma \mathcal{G}'(\varsigma)}{\mathcal{G}(\varsigma)} - \frac{\varsigma B'(\varsigma)}{B(\varsigma)} \right| \\
& \frac{2}{1 + \left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i|} \left| \frac{2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i}}{\left(\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2} \right| \\
& \leq \frac{\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| + |H_2(1)|}{\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| - |H_2(1)|} (|\mathcal{G}'(\varsigma)| - |B'(\varsigma)|)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \left(\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2}{\left(\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2 + \left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i|} \left| \frac{2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i}}{\left(\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2} \right| \\
& \leq \frac{\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| + |H_2(1)|}{\left(1 - |\alpha|^2\right) \prod_{i=1}^n |z_i| - |H_2(1)|} (|\mathcal{G}'(\varsigma)| - |B'(\varsigma)|)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda elde ettiğimiz eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \left((1-|\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| - |H_2(1)| \right)^2}{\left((1-|\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2 + (1-|\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \left| 2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1-|z_i|^2}{z_i} \right|} \\
& \leq \left\{ \frac{1-|\alpha|^2}{|\alpha|^2} |f''(\zeta)| |1+\alpha|^2 - \left(2 + \sum_{i=1}^n \frac{1-|z_i|^2}{|\zeta-z_i|^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|f''(\zeta)| & \geq \frac{|\alpha|^2}{(1-|\alpha|^2)|1+\alpha|^2} \left(2 + \sum_{i=1}^n \frac{1-|z_i|^2}{|\zeta-z_i|^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2 \left((1-|\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| - |H_2(1)| \right)^2}{\left((1-|\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2 + (1-|\alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \left| 2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1-|z_i|^2}{z_i} \right|} \right)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Şimdi (2.2) eşitsizliğinin kesin olduğunu gösterelim.

$$\frac{p(z) - p(0)}{1 - \overline{p(0)}p(z)} = z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z - \underline{z_i}}{1 - \overline{z_i}z}$$

olsun. Buradan

$$p(z) = \frac{z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z - \underline{z_i}}{1 - \overline{z_i}z} + p(0)}{1 + \overline{p(0)}z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z - \underline{z_i}}{1 - \overline{z_i}z}}$$

elde edilir. Burada her iki tarafın türevini alırsak

$$p'(z) = \frac{\left(3z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\overline{z_i}z} + z^3 \sum_{i=1}^n \frac{1-|z_i|^2}{\left(1-\overline{z_i}z\right)^2} \prod_{\substack{s=1 \\ i \neq s}}^n \frac{z-z_s}{1-\overline{z_s}z} \right) \left(1 + \overline{p(0)} z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\overline{z_i}z} \right)}{\left(1 + \overline{p(0)} z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\overline{z_i}z} \right)^2} \\ - \frac{\overline{p(0)} \left(3z^2 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\overline{z_i}z} + z^3 \sum_{i=1}^n \frac{1-|z_i|^2}{\left(1-\overline{z_i}z\right)^2} \prod_{\substack{s=1 \\ i \neq s}}^n \frac{z-z_s}{1-\overline{z_s}z} \right) \left(z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\overline{z_i}z} + p(0) \right)}{\left(1 + \overline{p(0)} z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\overline{z_i}z} \right)^2}$$

olur. $z=1$ için

$$p'(1) = \frac{\left(3 \prod_{i=1}^n \frac{1-z_i}{1-\overline{z_i}} + \sum_{i=1}^n \frac{1-|z_i|^2}{\left(1-\overline{z_i}\right)^2} \prod_{\substack{s=1 \\ i \neq s}}^n \frac{1-z_s}{1-\overline{z_s}} \right) \left(1 + \overline{p(0)} \prod_{i=1}^n \frac{1-z_i}{1-\overline{z_i}} \right)}{\left(1 + \overline{p(0)} \prod_{i=1}^n \frac{1-z_i}{1-\overline{z_i}} \right)^2} \\ - \frac{\overline{p(0)} \left(3 \prod_{i=1}^n \frac{1-z_i}{1-\overline{z_i}} + \sum_{i=1}^n \frac{1-|z_i|^2}{\left(1-\overline{z_i}\right)^2} \prod_{\substack{s=1 \\ i \neq s}}^n \frac{1-z_s}{1-\overline{z_s}} \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1-z_i}{1-\overline{z_i}} + p(0) \right)}{\left(1 + \overline{p(0)} \prod_{i=1}^n \frac{1-z_i}{1-\overline{z_i}} \right)^2}$$

elde edilir. Ayrıca $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ olduğu için

$$p'(1) = \frac{1-|1-\alpha|^2}{(2-\overline{\alpha})^2} \left(3 + \sum_{i=1}^n \frac{1+z_i}{1-z_i} \right)$$

eşitliği sağlanır.

$p'(1) = f''(1)(1+\alpha)^2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$f''(1) = \frac{\alpha}{(2-\alpha)(1+\alpha)^2} \left(3 + \sum_{i=1}^n \frac{1+z_i}{1-\bar{z}_i} \right)$$

eşitliği gerçekleşir. Diğer yandan

$$p(z) = \frac{z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z} + p(0)}{1 + \overline{p(0)} z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}},$$

$$1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots = \frac{z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z} + 1 - \alpha}{1 + (1 - \bar{\alpha})z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}},$$

$$(c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots = \frac{(1 - |1 - \alpha|^2)z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}}{1 + (1 - \bar{\alpha})z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}}$$

ve

$$(c_3 - c_2^2) + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z + \dots = \frac{(1 - |1 - \alpha|^2)z \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}}{1 + (1 - \bar{\alpha})z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}}$$

elde edilir. Son ifadede limite geçerse $(z \rightarrow 0)$, $c_3 - c_2^2 = H_2(1) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde, basit hesaplamaları kullanarak,

$$(2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z + \dots = \frac{(1 - |1 - \alpha|^2)z \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}}{1 + (1 - \bar{\alpha})z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}},$$

$$(2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3) + \dots = \frac{(1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}}{1 + (1 - \bar{\alpha})z^3 \prod_{i=1}^n \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}}$$

ve

$$|2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3| = (1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} & \frac{|\alpha|^2}{(1 - |1 - \alpha|^2)|1 + \alpha|^2} \left(2 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{|\zeta - z_i|^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2 \left((1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| - |H_2(1)| \right)^2}{\left((1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 - |H_2(1)|^2 + (1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \left| 2(c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))) - H_2(1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{z_i} \right|} \right) \\ & = \frac{\alpha}{(2 - \alpha)(1 + \alpha)^2} \left(2 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - |z_i|^2}{|\zeta - z_i|^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2 \left((1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2}{\left((1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| \right)^2 + (1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i| (1 - |1 - \alpha|^2) \prod_{i=1}^n |z_i|} \right) \\ & = \frac{\alpha}{(2 - \alpha)(1 + \alpha)^2} \left(3 + \sum_{i=1}^n \frac{1 + z_i}{1 - z_i} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer Teorem 2.1’de $f(z) - z$ fonksiyonunun $z = 0$ ’dan başka sıfırlarının olmaması koşulu konulursa yeni teorem aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 2.2. $f(z) \in \mathcal{N}(\alpha)$ ve $c_3 > c_2^2$ ($c_2 > 0, c_3 > 0$) olsun. $f(z) - z$ ’nin $z = 0$ ’dan başka sıfırları olmasın. Ayrıca, varsayalım ki $\zeta \in \partial\mathcal{K}$ noktasında f fonksiyonu $f(\zeta)$ açısıl

limitine sahip, $f(\zeta) = \frac{\zeta}{1 + \alpha}$ ve $f'(\zeta) = \frac{1}{1 + \alpha}$ olsun. O halde

$$|f''(\zeta)| \geq \frac{|\alpha|^2}{(1-|\alpha|^2)|1+\alpha|^2} \left(2 - \frac{\ln^2 \left(\frac{H_2(1)}{1-|\alpha|^2} \right) |H_2(1)|}{\ln \left(\frac{H_2(1)}{1-|\alpha|^2} \right) |H_2(1)| - |c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))|} \right) \quad (2.3)$$

ve

$$|c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))| \leq \left| H_2(1) \ln \left(\frac{H_2(1)}{1-|\alpha|^2} \right) \right| \quad (2.4)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (2.4) eşitsizliği kesindir.

İspat. $\mathcal{G}(z)$ fonksiyonu Teorem 2.1'in ispatındaki gibi olsun. Ayrıca $s(z) = z^2$ alalım.

Maksimum prensibine göre, her $z \in \mathcal{K}$ için $|\mathcal{G}(z)| \leq |s(z)|$ eşitsizliği sağlanır.

$$t(z) = \frac{\mathcal{G}(z)}{s(z)}$$

fonksiyonu $z \in \mathcal{K}$ için analitik ve $|t(z)| < 1$ 'dir. Özel halde,

$$\begin{aligned} t(z) &= \frac{p(z) - p(0)}{(1 - \overline{p(0)}p(z))z^2} = \frac{1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots - (1 - \alpha)}{\left[1 - (1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots) \right] z^2} \\ &= \frac{(c_3 - c_2^2) + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z + \dots}{1 - (1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots)}, \\ |t(0)| &= \frac{|H_2(1)|}{1 - |\alpha|^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ve

$$|t'(0)| = \frac{|2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3|^3}{1 - |\alpha|^2} = \frac{2|c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))|}{1 - |\alpha|^2}$$

elde edilir.

(2.5) eşitliğini hesaba katalım ve logaritmik formun analitik dal tanımından $\ln t(z)$ için

$$\ln t(0) = \ln \left(\frac{H_2(1)}{1 - |1 - \alpha|^2} \right) < 0$$

olarak yazılabilir.

$$g(z) = \frac{\ln t(z) - \ln t(0)}{\ln t(z) + \ln t(0)}$$

yardımcı fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon $\mathcal{K}$ birim diskinde analitik, $g(0) = 0$, $|z| < 1$ için $|g(z)| < 1$ ve $\varsigma \in \partial\mathcal{K}$ için $|g(\varsigma)| = 1$ 'dir. Ayrıca $g(z)$ fonksiyonunun türevini alırsak

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{\frac{t'(z)}{t(z)}(\ln t(z) + \ln t(0)) - \frac{t'(z)}{t(z)}(\ln t(z) - \ln t(0))}{(\ln t(z) + \ln t(0))^2} \\ &= \frac{2 \ln t(0)}{(\ln t(z) + \ln t(0))^2} \frac{t'(z)}{t(z)} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (1.2) 'den

$$\frac{2}{1 + |g'(0)|} \leq |g'(\varsigma)| = \frac{|2 \ln t(0)|}{|\ln t(\varsigma) + \ln t(0)|^2} \left| \frac{t'(\varsigma)}{t(\varsigma)} \right|$$

olur. $|t(\varsigma)| = 1$,

$$\begin{aligned} |t'(\varsigma)| &= \left| \frac{\mathcal{G}'(\varsigma)s(\varsigma) - s'(\varsigma)\mathcal{G}(\varsigma)}{s^2(\varsigma)} \right| \\ &= \left| \frac{\mathcal{G}(\varsigma)}{\varsigma s(\varsigma)} \left| \frac{\varsigma \mathcal{G}'(\varsigma)}{\mathcal{G}(\varsigma)} - \frac{\varsigma s'(\varsigma)}{s(\varsigma)} \right| \right|, \\ &= |\mathcal{G}'(\varsigma)| - |s'(\varsigma)| \end{aligned}$$

$$|g'(0)| = \left| \frac{1}{2\ln t(0)} \frac{t'(0)}{t(0)} \right| = \frac{-1}{2\ln^2 \left(\frac{H_2(1)}{1-|1-\alpha|^2} \right)} \frac{2|c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))|}{|H_2(1)|}$$

ve

$$|g'(\varsigma)| = \frac{1-|p(0)|^2}{|1-\overline{p(0)}p(\varsigma)|^2} |p'(\varsigma)| = \frac{1-|1-\alpha|^2}{|\alpha|^2} |f''(\varsigma)| |1+\alpha|^2$$

olduğu için bu değerleri yerine yazarsak

$$\frac{2}{1 - \frac{1}{2\ln^2 \left(\frac{H_2(1)}{1-|1-\alpha|^2} \right)} \frac{2|c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))|}{|H_2(1)|}} \leq \frac{-2\ln t(0)}{\arg^2 t(\varsigma) + \ln^2 t(0)} \left\{ \frac{1-|1-\alpha|^2}{|\alpha|^2} |f''(\varsigma)| |1+\alpha|^2 - 2 \right\}$$

Elde edilir. $\arg^2 t(\varsigma)$ ifadesinin yerine sıfır yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$|f''(\varsigma)| \geq \frac{|\alpha|^2}{(1-|1-\alpha|^2)|1+\alpha|^2} \left(2 - \frac{\ln^2 \left(\frac{H_2(1)}{1-|1-\alpha|^2} \right) |H_2(1)|}{\ln \left(\frac{H_2(1)}{1-|1-\alpha|^2} \right) |H_2(1)| - |c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))|} \right)$$

sonucu elde edilir.

Benzer şekilde, $g(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının hipotezlerini sağladığından dolayı

$$1 \geq |g'(0)| = \frac{|2\ln t(0)|}{|\ln t(0) + \ln t(0)|^2} \left| \frac{t'(0)}{t(0)} \right| = \frac{-1}{2\ln \left(\frac{H_2(1)}{1-|1-\alpha|^2} \right)} \frac{2|c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))|}{|H_2(1)|}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\left| c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1)) \right| \leq \left| H_2(1) \ln \left(\frac{H_2(1)}{1 - |1 - \alpha|^2} \right) \right|$$

eşitsizliğinin sağlandığını görürüz.

Şimdi, (2.4) eşitsizliğinin kesin olduğunu gösterelim.

$$\frac{\ln t(z) - \ln t(0)}{\ln t(z) + \ln t(0)} = z$$

olsun. Buradan,

$$\ln t(z) = \frac{1+z}{1-z} \ln t(0),$$

$$t(z) = e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)},$$

$$\mathcal{G}(z) = z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)},$$

$$\frac{p(z) - p(0)}{(1 - p(0)p(z))} = z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}$$

ve

$$p(z) = \frac{1 - \alpha + z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}{1 + (1 - \bar{\alpha}) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}} = 1 - \alpha + \frac{(1 - |1 - \alpha|^2) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}{1 + (1 - \bar{\alpha}) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}$$

elde edilir. Burada $p(z) = 1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots$ değeri yerine yazılırsa

$$1 - \alpha + (c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots = 1 - \alpha + \frac{\left(1 - |1 - \alpha|^2\right) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}{1 + (1 - \bar{\alpha}) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}},$$

$$(c_3 - c_2^2)z^2 + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z^3 + \dots = \frac{\left(1 - |1 - \alpha|^2\right) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}{1 + (1 - \bar{\alpha}) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}$$

ve

$$(c_3 - c_2^2) + (2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3)z + \dots = \frac{\left(1 - |1 - \alpha|^2\right) e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}{1 + (1 - \bar{\alpha}) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak,

$$(2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3) + \dots = \left(1 - |1 - \alpha|^2\right) \left(\frac{\frac{2}{(1-z)^2} \ln t(0) e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)} \left(1 + (1 - \bar{\alpha}) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}\right)}{\left(1 + (1 - \bar{\alpha}) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}\right)^2} \right. \\ \left. + \frac{(1 - \bar{\alpha}) \left(2z e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)} + \frac{2}{(1-z)^2} \ln t(0) e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)} z^2\right) e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}}{\left(1 + (1 - \bar{\alpha}) z^2 e^{\frac{1+z}{1-z} \ln t(0)}\right)^2} \right)$$

elde edilir.

Son eşitlikte limite geçilirse ($z \rightarrow 0$)

$$2c_4 - 4c_2c_3 + 2c_2^3 = \left(1 - |1 - \alpha|^2\right) 2t(0) \ln t(0) = \left(1 - |1 - \alpha|^2\right) 2 \frac{H_2(1)}{1 - |1 - \alpha|^2} \ln \left(\frac{H_2(1)}{1 - |1 - \alpha|^2} \right) \\ = 2H_2(1) \ln \left(\frac{H_2(1)}{1 - |1 - \alpha|^2} \right)$$

ve

$$|c_4 - c_2(c_2^2 + 2H_2(1))| = \left| H_2(1) \ln \left(\frac{H_2(1)}{1 - |1 - \alpha|^2} \right) \right|$$

sonucu elde edilir.

Teorem 2.1 ve Teorem 2.2'nin ispatlarında (1.2) eşitsizliğinin kullanıldığını not edelim.

Bu nedenle eşitsizliklerin sağ tarafında hem c_2, c_3 hem de c_4 vardır. Ancak (1.2) yerine (1.1) eşitsizliğini kullanırsak daha zayıf fakat daha basit bir eşitsizlik elde ederiz (c_4 hariç). Bu aşağıdaki teoremden formüle edilmiştir.

Teorem 2.3. $f(z) \in \mathcal{N}(\alpha)$ ve $c_3 > c_2^2 (c_2 > 0, c_3 > 0)$ olsun. $f(z) - z$ 'nin $z = 0$ 'dan başka sıfırları olmasın. Ayrıca, varsayalım ki $\zeta \in \partial\mathcal{K}$ noktasında f fonksiyonu $f(\zeta)$ açılal limitine sahip, $f(\zeta) = \frac{\zeta}{1+\alpha}$ ve $f'(\zeta) = \frac{1}{1+\alpha}$. O halde

$$|f''(\zeta)| \geq \frac{2|\alpha|^2}{(1 - |1 - \alpha|^2)|1 + \alpha|^2} \left(1 - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{H_2(1)}{1 - |1 - \alpha|^2} \right) \right) \quad (2.6)$$

ilişkisi sağlanır.

İspat. Teorem 2.2 nin ispatından, $g(z)$ fonksiyonu için (1.1) eşitsizliğini kullanırsak,

$$1 \leq \frac{-2}{\ln \frac{H_2(1)}{1 - |1 - \alpha|^2}} \left\{ \frac{1 - |1 - \alpha|^2}{|\alpha|^2} |f''(\zeta)| |1 + \alpha|^2 - 2 \right\}$$

ve

$$|f''(\zeta)| \geq \frac{2|\alpha|^2}{(1-|\alpha|^2)|1+\alpha|^2} \left(1 - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{H_2(1)}{1-|\alpha|^2} \right) \right)$$

sonucu elde edilir.



3. SONUÇLAR

Bu çalışmada, $\mathcal{N}(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}$ sınıfı için Schwarz lemmasının bir uygulaması elde edilmiştir. Bu uygulamada Hankel determinanı ile ilişkisi verilmiştir. Ayrıca birim diskin sınırda Schwarz lemmasının farklı versiyonları incelenmiştir. Şöyle ki, $\mathcal{N}(\alpha)$ sınıfını sağlayan analitik $f(z)$ fonksiyonu dikkate alınarak $f''(z)$ fonksiyonunun açısıl türevi ζ sınır noktasında aşağıdan değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmede, $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki $c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$, $c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$ ve $c_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$ katsayıları kullanılmış ve yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitsizliklerde Fekete-Szegö fonksiyonu ile $|f''(\zeta)|$ arasında ilişki kurulmuştur. Ayrıca, elde edilen eşitsizliklerin bazıları için kesinlik gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Ahlfors, L. (1979). *Complex analysis*. EUA McGraw-Hill Book Company Inc.
- Akyel, T., & Örnek, B. N. (2016). Sharpened forms of the Generalized Schwarz inequality on the boundary. *Proceedings-Mathematical Sciences*, 126(1), 69-78.
- Altinkaya, S., & Yalcin, S. (2016c). Upper bound of Second Hankel determinant for Bi-Bazilevič functions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(6), 4081-4090.
- Altinkaya, S., & Yalcin, S. (2018a). Estimate For Initial Maclaurin Coefficients of General Subclasses pf Bi-Univalent Functions of Complex Order Involving Subordination. *Honam Mathematical Journal*, 40(3), 391-400.
- Altinkaya, S., & Yalcin, S. (2018b). Construction of the second Hankel determinant for a new subclass of bi-univalent functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(6), 2876-2884.
- Atli, G., & Ornek, B. N. (2021). Some Results Concerned With Hankel Determinant For $\mathcal{N}(\alpha)$ Class. . *Communications of the Korean Mathematical Society*, 36(4), 715-727.
- Aydinoğlu, S. (2020). *Applications of the Jack's lemma for the holomorphic functions* Yayınlanmış, Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Azeroğlu, T. A., & Örnek, B. (2013). A refined Schwarz inequality on the boundary. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 58(4), 571-577.
- Beardon, A., & Minda, D. (2004). A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse Mathématique*, 92(1), 81-104.
- Beardon, A. F., & Carne, T. K. (1992). A strengthening of the Schwarz-Pick inequality. *American Mathematical Monthly*, 99(3), 216-217.
- Boas, H. P. (2010). Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz lemma. *The American Mathematical Monthly*, 117(9), 770-785.

- Çatal, B. (2019). *Birim dairede holomorfik fonksiyonların sınır davranışı* Yayınlanmış, Yüksek Lisans Tezi, Amasya University Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya-.
- Dineen, S. (1989). *The Schwarz Lemma*. New York: Oxford University Press.
- Dubinin, V. (2004). The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disk. *Journal of Mathematical Sciences*, 122(6), 3623-3629.
- Fekete, M., & Szegö, G. (1933). Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. *Journal of The London Mathematical Society*, 1(2), 85-89.
- Krantz, S. G. (2011). The Schwarz lemma at the boundary. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 56(5), 455-468.
- Markushevich, A. I. (2005). *Theory of functions of a complex variable*, American Mathematical Society Vol.296, 1,5.
- Mercer, P. R. (1997). Sharpened versions of the Schwarz lemma. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 205(2), 508-511.
- Mercer, P. R. (2006). Schwarz-Pick-type estimates for the hyperbolic derivative. *Journal of Inequalities and Applications*, 2006, 1-6.
- Noonan, J., & Thomas, D. (1976). On the second Hankel determinant of areally mean p -valent functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 223, 337-346.
- Obradović, M., & Ponnusamy, S. (2011). On the class U . In Proc. *21st Annual Conference of the Jammu Math. Soc. and National Seminar on Analysis and its Application* ,pp. 11-26.
- Obradović, M., & Ponnusamy, S. (2005). Radius properties for subclasses of univalent functions, *Oldenbourg Wissenschaftsverlag* Vol 25,(3).
- Ornek, B. N. (2013). Sharpened forms of the Schwarz lemma on the boundary. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(6), 2053-2059.

- Osserman, R. (1999). A new variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors lemma. *Manuscripta Mathematica*, 100(2), 123-129.
- Osserman, R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(12), 3513-3517.
- Örnek, B. N., & Düzenli, T. (2018). Boundary analysis for the derivative of driving point impedance functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 65(9), 1149-1153.
- Pommerenke, C. (1967). On the Hankel determinants of univalent functions. *Mathematika*, 14(1), 108-112.
- Pommerenke, C. (1992). Boundary behaviour of conformal maps. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 299.
- Reza, F. (1962). A bound for the derivative of positive real functions. *SIAM Review*, 4(1), 40-42.
- Richards, P. I. (1947). A special class of functions with positive real part in a half-plane. *Duke Mathematical Journal*, 14(3), 777-786.
- Sokół, J., & Thomas, D. K. (2018). The second Hankel determinant for alpha-convex functions. *Lithuanian Mathematical Journal*, 58(2), 212-218.
- Unkelbach, H. (1938). Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung. *Mathematische Zeitschrift*, 43(1), 739-742.
- Vasudevarao, A., & Yanagihara, H. (2013). On the Growth of Analytic Functions in the Class $U(\lambda)U(\lambda)$. *Computational Methods and Function Theory*, 13(4), 613-634.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Gizem ATLI

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Atlı G. And Örnek B.N. (2021). Some results concerned with Hankel determinant for class, Commun. Korean Math. Soc. 36(4), 715-727.

