



**ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELİRLİ ALT
SINIFLARI İÇİN HANKEL, TOEPLITZ VE
HERMİTİAN-TOEPLITZ DETERMİNANTLARI**

Mucahit BUYANKARA

Doktora Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2025

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELİRLİ ALT SINIFLARI İÇİN HANKEL,
TOEPLITZ VE HERMİTIAN-TOEPLITZ DETERMİNANTLARI

DOKTORA TEZİ
Mucahit BUYANKARA

Danışman: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

ERZURUM, 2025

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

**ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELİRLİ ALT SINIFLARI İÇİN
HANKEL, TOEPLITZ VE HERMİTİAN-TOEPLITZ DETERMİNANTLARI**

Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR danışmanlığında Mucahit BUYANKARA tarafından hazırlanan bu çalışma 8.12.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **Oy birliği ile (5/5)** kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>
Üye:	Prof. Dr. Halit ORHAN <i>Atatürk Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>
Üye:	Prof. Dr. Erhan DENİZ <i>Kafkas Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>
Üye:	Doç. Dr. İbrahim AKTAŞ <i>Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Bilal USANMAZ <i>Atatürk Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum.

Prof. Dr. İlker KAZAZ

Enstitü Müdürü

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etik ilkelere uygun davrandığımı ve tezin hazırlanması sürecinde üretken yapay zekâ programlarından destek alınmadığımı beyan ederim.

8.12.2025

İmzası

Mucahit BUYANKARA

TEŞEKKÜR

Bilgisi, desteği ve yönlendirmeleriyle bana her zaman rehberlik eden, benim için önemli bir motivasyon kaynağı olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Murat AęLAR’a katkıları, sabrı ve rehberliği için en içten dileklerim ile teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tez izleme komitesinde yer alarak yapıcı eleştirileri, önerileri ve değerlendirmeleriyle çalışmama önemli katkılar sağlayan Prof. Dr. Halit ORHAN, Prof. Dr. Erhan DENİZ ve Dr. Öğr. Üyesi Bilal USANMAZ hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan ve desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

2211-A Yurt İçi Genel Doktora Burs Programı kapsamında sağlanan finansal destek için Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu’na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Mucahit BUYANKARA

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELİRLİ ALT SINIFLARI İÇİN HANKEL, TOEPLITZ VE HERMİTİAN-TOEPLITZ DETERMİNANTLARI

Mucahit BUYANKARA

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

Bu tez çalışmasında, birim diskte subordinasyon yardımıyla analitik fonksiyonların $M(\alpha)$, $S_s^*(\varphi)$, $S_T^*(\lambda)$, $N(\beta)$ ve K_S alt sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflar için katsayı sınırları, Hankel, Toeplitz, Hermitian-Toeplitz determinantları ve Zalcman tahminleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, her bir fonksiyon sınıfı için belirlenen Hankel, Toeplitz ve Hermitian-Toeplitz determinantlarının alt ve üst sınırlarını içermekte olup, literatürdeki bilinen sonuçlarla karşılaştırıldığında bazı durumlarda daha kesin sonuçlar ortaya koymaktadır. Bu çalışma, determinant temelli yöntemlerin analitik fonksiyon sınıflarının incelenmesinde etkin bir şekilde kullanılabileceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Analitik ve ünivalent fonksiyon, Hankel determinant, Toeplitz determinant, Hermitian-Toeplitz determinant, Subordinasyon

ABSTRACT

PhD THESIS

HANKEL, TOEPLITZ AND HERMITIAN-TOEPLITZ DETERMINANTS FOR CERTAIN SUBCLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Mucahit BUYANKARA

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

In this thesis, the subclasses $M(\alpha)$, $S_s^*(\varphi)$, $S_T^*(\lambda)$, $N(\beta)$ and K_S of analytic functions in the unit disk have been defined by means of subordination, and for these classes, coefficient bounds, Hankel, Toeplitz, Hermitian-Toeplitz determinants, and Zalcman estimates have been obtained. The obtained results include the lower and upper bounds of the Hankel, Toeplitz, and Hermitian-Toeplitz determinants determined for each function class and, when compared with the known results in the literature, present more precise results in some cases. This study shows that determinant-based methods can be effectively used in the investigation of analytic function classes.

Keywords: Analytic and univalent function, Hankel determinant, Toeplitz determinant, Hermitian-Toeplitz determinant, Subordination.

İÇİNDEKİLER

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Temel Kavramlar.....	5
2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	6
2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar	11
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	27
3.1. Cauchy, Hankel, Toeplitz ve Hermitian-Toeplitz Matrisleri	27
3.1.1 Cauchy Matrisleri	27
3.1.2 Hankel Matrisleri	27
3.1.3 Toeplitz Matrisleri	28
3.1.4 Hermitian-Toeplitz Matrisleri.....	29
3.2. Hankel, Toeplitz, Hermitian-Toeplitz Determinantı	30
3.2.1 Hankel Determinantı.....	30
3.2.2 Toeplitz Determinantı	32
3.2.3 Hermitian-Toeplitz Determinantı	33
3.3. Zalcman Fonksiyoneli ve Genelleştirilmiş Zalcman Varsayımı	34
3.4. Rasyonel Fonksiyon	35
3.5. Telefon Sayıları ve Üreteç Fonksiyonu	36
3.6. Analitik Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları	38
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	40
4.1. $M(\alpha)$ Fonksiyon Sınıfı İçin Başlangıç Katsayıları	40
4.2. $M(\alpha)$ Fonksiyon Sınıfı için Hankel Determinantı	41
4.3. $M(\alpha)$ Fonksiyon Sınıfı için Toeplitz Determinantları	43

4.4. $M(\alpha)$ Fonksiyon Sınıfı için Hermitian-Toeplitz Determinantı	46
4.5. $S_s^*(\varphi)$ Fonksiyon Sınıfı için Başlangıç Katsayılarının Sınırları	50
4.6. $S_s^*(\varphi)$ Fonksiyon Sınıfı için Hankel Determinantları	53
4.7. $S_s^*(\varphi)$ Fonksiyon Sınıfı için Hermitian-Toeplitz Determinantları	56
4.8. $S_T^*(\lambda)$ Fonksiyon Sınıfı için Başlangıç Katsayılarının Sınırları	60
4.9. $S_T^*(\lambda)$ Fonksiyon Sınıfı için Toeplitz Determinantları	64
4.10. $S_T^*(\lambda)$ Fonksiyon Sınıfı için Hermitian-Toeplitz Determinantları	67
4.11. $N(\beta)$ Fonksiyon Sınıfı için Başlangıç Katsayıları	70
4.12. $N(\beta)$ Fonksiyon Sınıfı için Hankel Determinantı	71
4.13. $N(\beta)$ Fonksiyon Sınıfı için Toeplitz Determinantları	74
4.14. K_S Fonksiyon Sınıfı için Zalcman Tahminleri ve Katsayı Sınırları	77
4.15. K_S Fonksiyon Sınıfı için Hankel Determinantları	82
4.16. K_S Fonksiyon Sınıfı için Toeplitz Determinantları	91
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	96
5.1. Sonuç	96
5.2. Öneriler	96
KAYNAKÇA	97
TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR	101
1. Makaleler	101
2. Bildiriler	101

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü	12
Şekil 2. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü	13
Şekil 3. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = z - \frac{z^2}{2}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü	14
Şekil 4. $\mathcal{U}$ birim diskinin $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü	16
Şekil 5. Orijine Göre Yıldızlı Bölge	17
Şekil 6. w_0 Noktasına Göre Yıldızlı Bölge	18
Şekil 7. $\mathcal{U}$ birim diskinin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü	19
Şekil 8. Konveks Bölge	20
Şekil 9. $f < g$ Subordinasyonu	22
Şekil 10. $1 + z < \frac{1+z}{1-z}$	23
Şekil 11. $\mathcal{U}$ birim diskinin $\varphi_k(z) = \frac{k^2+z^2}{k(k-z)}$ ($k = \sqrt{2} + 1$) fonksiyonu altındaki görüntüsü	36
Şekil 12. $\mathcal{U}$ birim diskinin $\phi(z) = e^{\left(z+\lambda\frac{z^2}{2}\right)}$ fonksiyonu altındaki görüntüleri	37

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathcal{U}$	$\{z \in \mathbb{C}: z < 1\}$, açık birim disk
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
γ	$\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri
$f^{(n)}$	f fonksiyonun n . mertebeden türevi
$U(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$Jf(z)$	Jacobian determinanti
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genişletilmiş kompleks düzlem
$\mathcal{A}$	$\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı analitik fonskiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	$\mathcal{A}$ ya ait ünivalent fonskiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	Caratheodory sınıfı
Ω	Schwarz fonskiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^*$	$\mathcal{A}$ ya ait yıldızlı fonskiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ ya ait konveks fonskiyonların sınıfı
$f \prec g$	f fonskiyonunun g fonskiyonuna subordinasyonu
$\mathcal{S}^*(\beta)$	β - mertebeden yıldızlı fonskiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\beta)$	β - mertebeden konveks fonskiyonların sınıfı
$H_{n-1} = (h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$	Hankel matrisi
$H_\infty = (h_{i+j})_{i,j=0}^\infty$	Sonsuz mertebeden Hankel matrisi
$T_{n-1} = (h_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$	Toeplitz matrisi
$T_\infty = (h_{i-j})_{i,j=0}^\infty$	Sonsuz mertebeden Toeplitz matrisi
$H_q(n)$	q . mertebeden Hankel determinanı
$T_q(n)$	q . mertebeden Toeplitz determinanı
$T_{q,n}$	q . mertebeden Hermitian-Toeplitz determinanı

1. GİRİŞ

Ünivalent fonksiyonlar teorisi, diğer bir adı ile geometrik fonksiyon teorisi kompleks analizin önemli bir dalıdır. Bu teori; “Kompleks düzlemin her basit bağlantılı bölgesi konform olarak birim disk üzerine resmedilebilir.” ifadesiyle yani Riemann Dönüşüm Teoremi ile birlikte daha da önem kazanmıştır. Koebe’nin (1907) $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ birim diskindeki birebir her $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ dönüşümünün resim bölgesinde, $|w| < c$ diski kapsanacak şekilde mutlak bir c sabitinin ve sadece z ye bağlı olan $|f'(z)|$ modülü üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı çalışması da bu teorinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. Daha sonraki birçok matematikçinin çalışmaları da bu sınırları belirleme üzerinde yoğunlaşmıştır. Böylece ünivalent fonksiyonların sınıfları ile ilgili problemler üzerindeki çalışmalar artmıştır.

Bieberbach (1916) tarafından ortaya atılan “ $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $n = 2, 3, \dots$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ eşitsizliği sağlanır” tahmini uzun süre matematikçilerin çalıştığı bir problem olmuştur. Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk olarak Bieberbach tarafından 1916’da ispatlanmıştır. Daha sonra Loewner (1917), 1923’te parametrik metot olarak isimlendirdiği kendi buluşuyla $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini, 1955’te Schiffer ve Garabedian, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini, 1968’de Pederson $|a_6| \leq 6$ ve 1972’de Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ eşitsizliğini ispat etmiştir. Bu tahminin genelleştirilmiş hali yıllarca matematikçilerin üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur. 1985’te nihayet L. De-Branges, Loewner teorisini kullanarak her $n = 2, 3, \dots$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlamıştır.

Bieberbach tahmininin ispatlanmasından sonra bu konuyla ilgilenen matematikçiler $\mathcal{S}$ sınıfının bazı alt sınıfları için bir takım katsayı bağıntıları elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlerinden bazıları yıldızlı ve konveks fonksiyonlar sınıflarıdır.

Hankel determinanı probleminin ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yeri vardır. Çünkü Hankel determinanı yardımıyla birim diskte tanımlı fonksiyonların sınırlılığı araştırılabilir; yani, integral katsayılarına sahip, orijinin komşuluğunda Laurent serileriyle temsil edilen iki sınırlı analitik fonksiyonun oranı olarak gösterilen bir fonksiyonun rasyonel olduğu gösterilebilir. Ayrıca, Hankel determinanı yardımıyla Fekete-Szegő problemi olarak bilinen $|a_3 - a_2^2|$ ve ikinci Hankel determinanı olarak tanımlanan $|a_2a_4 - a_3^2|$ için üst sınır bulunabilir. 1966-1967 yılında Pommerenke (1966, 1967). Yıldızlı fonksiyonların yanı sıra ünivalent fonksiyonlar için de Hankel

determinantını çalıştı. Noor (1983) sınırlı sınıra sahip ünivalent fonksiyonlar için $|H_q(n)(f)|$ Hankel determinantının büyüme (growth) oranını inceledi. Bu doğrultuda Hayman (1968), $|H_q(2)(f)|$ Hankel determinantının en iyi muhtemel değerinin κ bir tamsayı olmak üzere $\kappa n^{\frac{1}{2}}$ olduğunu hesapladı. Janteg et al. (2007), yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıflarının ikinci Hankel determinanı için kesin sonuçlar elde etti.

Matematiğin bazı alanlarında özellikle ünivalent fonksiyonların yanı sıra operatör teorisi, matris ölçüm, matris polinom, sinyal işleme, zaman seri analizi, integral denklemlerde Hankel, Toeplitz matrisleri ve buna bağlı determinantlar önemli bir yere sahiptir. Hankel determinantları ters köşegen boyunca sabit elemanlar içerir. Toeplitz determinantları ise köşegen boyunca sabit elemanlar içerir.

Toeplitz-Hankel sistemlerinin çeşitli uygulamaları lineer filtreleme teorisi, ayrık ters saçılma ve matematiksel fizikteki bazı integrallerin ayrışmasında ortaya çıkar (Wilkes et al., 1991). Hermitian-Toeplitz matrislerinin determinanı sinyal işlemedeki uygulamalarda kullanılır (Kumar, 2021; Trench, 1994). Böttcher ve Grudsky (2000) tarafından yazılan kitapta Toeplitz matrisleri ile ilgili bir bölüm içerir. Bu bölümde, belirli bir uzayda sınırlı bir operatör içeren Toeplitz matrisi altında elemanları kompleks sayılar dizisinden oluşan Toeplitz matrisi üzerine bir koşul tanımlanır. Toeplitz matrisleri hakkında daha fazla ayrıntı için Chan ve Kwong (1985), Gray (2006) ve Kurt ve Simsek (1992) çalışmalarına bakılabilir.

Thomas ve Halim (2017) yıldızıl ve konvekse yakın fonksiyonların katsayı sınırlarını Toeplitz determinantlarını kullanarak hesapladı. Ali et al. (2018) ünivalent ve tipik reel fonksiyonların katsayı sınırları için simetrik Toeplitz determinantını kullanarak kesin sonuçlar elde etti. Son zamanlarda Cudna et al. (2020), birim diskte α –mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfı için ikinci ve üçüncü mertebeden Hermitian-Toeplitz determinantları yardımıyla kesin alt ve üst sınırlar elde etti.

Kumar et al. (2020), Janowski yıldızıl ve konveks fonksiyonların katsayı sınırlarını Hermitian-Toeplitz determinantları yardımıyla elde etti. Kumar (2021), konvekse yakın belirli alt sınıflar için ikinci ve üçüncü Hermitian-Toeplitz determinantları yardımıyla alt ve üst sınırlar elde etti. Bu yönde daha fazla sonuç için Cho et al. (2021), Kumar, V. (2021) ve Kumar, S., & Kumar, V. (2021) çalışmalarına bakılabilir.

Geometrik fonksiyon teorisinde, birim disk üzerinde tanımlı analitik fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için katsayılar arasındaki ilişkiler uzun yıllardır araştırma konusu olmuştur. Bu bağlamda, özellikle Hankel determinanı ve onun özel bir durumu olan Fekete–Szegő problemi, iki katsayı arasındaki farkın sınır değerinin tahmin edilmesinde önemli bir rol oynamıştır. Literatürde, analitik fonksiyonların farklı alt sınıfları tanımlanarak bu determinant için kesin veya yaklaşık sınırlar elde edilmiştir.

Ancak, günümüzde Hankel determinanı üzerine yapılan çalışmaların büyük ölçüde doygunluğa ulaştığı ve artık sınırlı yenilik sunduğu görülmektedir. Bu noktadan hareketle, “literatürdeki bu klasik problemler farklı determinant türleri kullanılarak yeniden güncel hale getirilebilir mi?” sorusu araştırmamızın çıkış noktasını oluşturmuştur.

Yapılan ön araştırmalar sonucunda, Toeplitz ve Hermitian–Toeplitz determinantlarının geometrik fonksiyon teorisine uygulanabilir nitelikte olduğu belirlenmiştir. Elde edilen bulgular, bu determinantların Hankel determinantına kıyasla daha genel ve güçlü sonuçlar verebileceğini göstermektedir. Özellikle bu determinantlar sayesinde yalnızca iki katsayı arasındaki farkın sınırı değil, birden fazla katsayı arasındaki farklara ilişkin sınırların da elde edilebileceği sonucuna ulaşılmıştır.

Ayrıca, söz konusu determinantların kullanım alanı yalnızca geometrik fonksiyonlarla sınırlı kalmamakta; operatör teorisi, matris ölçümü ve matris polinomları, sinyal işleme, zaman serisi analizi, matematiksel analiz ve integral denklemler gibi pek çok farklı alanda da önemli uygulamalara sahip olduğu görülmektedir. Bu durum, Toeplitz ve Hermitian–Toeplitz determinantlarının sadece geometrik fonksiyon teorisinde değil, geniş bir matematiksel çerçevede de araştırılmaya değer yapılar olduğunu ortaya koymaktadır.

Bu tezde, analitik fonksiyonların belirli alt sınıfları için Hankel, Toeplitz ve Hermitian–Toeplitz determinantları kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Tez, beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, literatür bilgisinin verildiği giriş bölümünden oluşmaktadır. İkinci bölümde, çalışmada kullanılacak temel tanımlar, teoremler ve lemmalar ile bazı problemler ve örnekler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ise, araştırmada kullanılan materyallerin özellikleri ve uygulanan yöntemler ayrıntılı biçimde açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, araştırma bulguları ve tartışmalar yer almakta olup, $M(\alpha)$, $S_s^*(\varphi)$, $S_T^*(\lambda)$, $N(\beta)$ ve K_S fonksiyon sınıfları için başlangıç katsayıları, Hankel,

Toeplitz ve Hermitian-Toeplitz determinantları; ayrıca Zalcman tahminleri ve katsayı sınırları sistematik olarak hesaplanmış ve sonuçları yorumlanmıştır. Beşinci bölümde ise tez kapsamında elde edilen sonuçlar özetlenmiş, literatürle karşılaştırılmış ve ileriye dönük öneriler sunulmuştur. Böylece bu bölüm, hem teorik katkıları hem de determinant temelli katsayı analizlerinin kapsamlı bir değerlendirmesini içermektedir.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışmasında yer alan bazı tanım, teorem ve sonuçlar hakkında bilgi verilmiştir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (r -komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $\mathcal{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının r -komşuluğu) olarak adlandırılır. $\overline{\mathcal{U}}(z_0, r)$ ile $\mathcal{U}(z_0, r)$ nin kapanışı $\partial\mathcal{U}(z_0, r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı disk $\mathcal{U}(0, r) = \mathcal{U}_r$ ile gösterilecektir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $\mathcal{U} = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $\mathcal{U}(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \emptyset$, $S \cap S_2 \neq \emptyset$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \emptyset$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Örneğin; $\mathbb{C}$ nin kendisi bağlantılıdır.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümeler bölge denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

$\mathbb{C}$ hem açık hem de bağlantılı olduğundan bir bölgedir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (ya da yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.1.10 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t , a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır (Ponnusamy & Silverman, 2006).

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlarla ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferansiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Örneğin; $f(z) = \cos z$ bir tam fonksiyon olup $f(z) = \frac{1}{z}$ bir tam foksiyon değildir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 2.2.3 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ fonksiyonu tam ve sınırlı ise bu fonksiyon sabittir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy-Türev Formülü): f , pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

olur (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f , bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (2.1)$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada 1. mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz.

Örneğin, $f(x) = x^{4/3}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.2.5 (Ayrık Tekil nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $\mathcal{U}(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Teorem 2.2.6 (Laurent Teoremi): c_0 ve c_1 , merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere c_0, r_0 yarıçaplı ve c_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu c_0 ile c_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (2.2)$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.2.7 (Kutup Noktası): $z_0, f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Tanım 2.2.8 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Örneğin; $f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-z}$ ve $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ fonksiyonları $\mathbb{C}$ de meromorf fonksiyonlardır.

Teorem 2.2.9 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Sonuç 2.2.10: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.2.9' in önemli bir sonucu olan Schwarz lemması aşağıdaki gibidir.

Lemma 2.2.11 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ olur. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Teorem 2.2.12 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Sonuç 2.2.13: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.2.14 (Ünivalent fonksiyon): f , $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalnıkat veya schlicht) fonksiyon denir (Duren, 1983).

Örneğin; $f(z) = 2z + 1$ bir ünivalent fonksiyondur.

Eğer f , z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.15: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren, 1983).

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ dır. Tersini daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.16: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z: 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinanti $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.15'den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.17 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminde konformdur.

Teorem 2.2.18: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Ponnusamy & Silverman, 2006).

Bundan dolayı bir bölgede analitik ve ünivalent fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ ve $T: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ veya } T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

biçiminde tanımlanır. Neden $ad - bc \neq 0$ olmalıdır? Çünkü $z \neq w$ için

$$\begin{aligned} T(z) - T(w) &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} \end{aligned}$$

olup, $ad - bc = 0$ ise $T(z) = T(w)$ olur. Bu da T 'nin sabit olması anlamına gelir. Sabit fonksiyonun bire bir olmadığı açıktır. Aynı zamanda $ad - bc \neq 0$ alınması T 'nin bire bir olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.19 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ($\mathcal{D} \neq \mathbb{C}$) basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ bölgesini $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren, 1983).

2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyon teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine $\mathcal{U}$ açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (2.3)$$

şeklini alır. Burada (2.3) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile gösterilir ve kısaca

$$\mathcal{A} = \{f: \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon} \} \quad (2.4)$$

şeklinde yazılır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

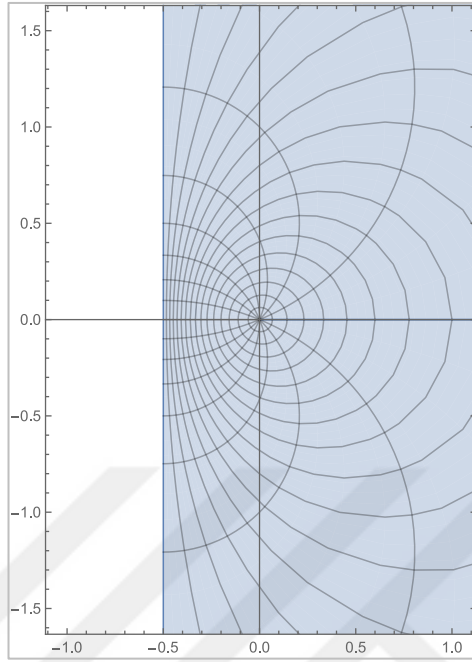
2.3.1. ($\mathcal{S}$ Sınıfı) : $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{A}: \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f - \text{ünivalent}\}$$

şeklinde gösterilir (Duren, 1983).

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verilmiştir.

(i) $w = f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $Re(w) > -\frac{1}{2}$ sağ yarı düzlemine resmeder.



Şekil 1. $\mathcal{U}$ birim diskini $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

(ii) $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \left\{u + iv : v \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, \infty)\right\}$ bölgesi üzerine resmeder.

Burada $z = e^{i\theta}$ denirse,

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = \frac{1}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos\theta - i\sin\theta - \cos\theta - i\sin\theta} \\ &= \frac{1}{-2i\sin\theta} \Rightarrow \frac{i}{2\sin\theta} \end{aligned}$$

olur ve

$$f(e^{i\theta}) = u + iv = \frac{i}{2\sin\theta}$$

denirse,

$$u = 0, v = \frac{1}{2\sin\theta}$$

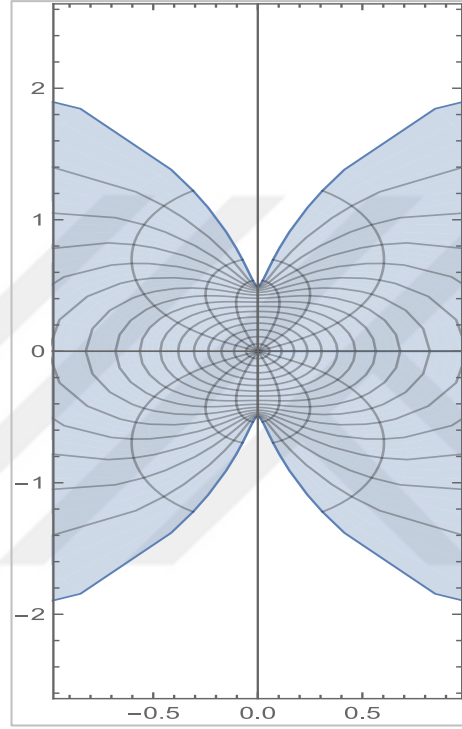
elde edilir. Buradan $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ olduğundan

$$v = \frac{1}{2\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2v}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{1}{2v} \leq 1$$

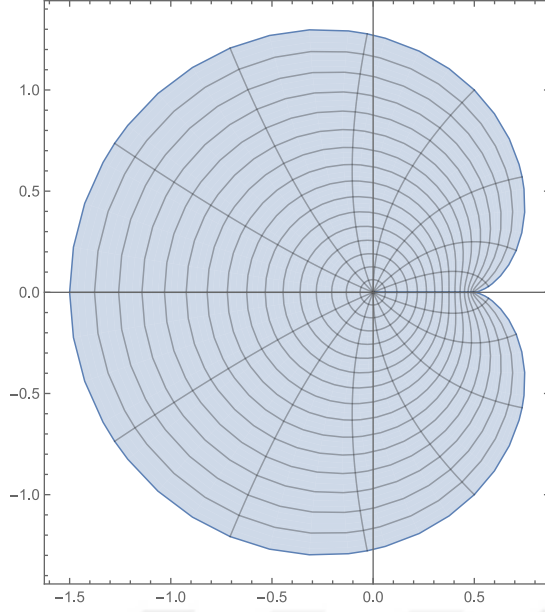
$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2v} \geq 0 \text{ ve } \frac{1}{2v} - 1 \leq 0$$

elde edilir. Eşitsizlikler çözüldüğünde $v = 0, v = -\frac{1}{2}, v = \frac{1}{2}$ olarak bulunur. $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu altında $\mathcal{U}$ birim diskinin görüntüsü geometrik olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir:



Şekil 2. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

(iii) $f(z) = z - \frac{z^2}{2}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim bir kardioidin içine resmeder.



Şekil 3. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = z - \frac{z^2}{2}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2 - 2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \frac{1+i}{2} \in \mathcal{U}$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Yani, $f_1 + f_2 \notin \mathcal{S}$. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \bar{a}_2 z^2 + \dots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.
- (ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathcal{U})$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(\mathcal{U})$ olsun. Bu durumda,

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{w}} \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n . kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, \dots$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2} (2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \dots, \quad (z \in \mathcal{U})$$

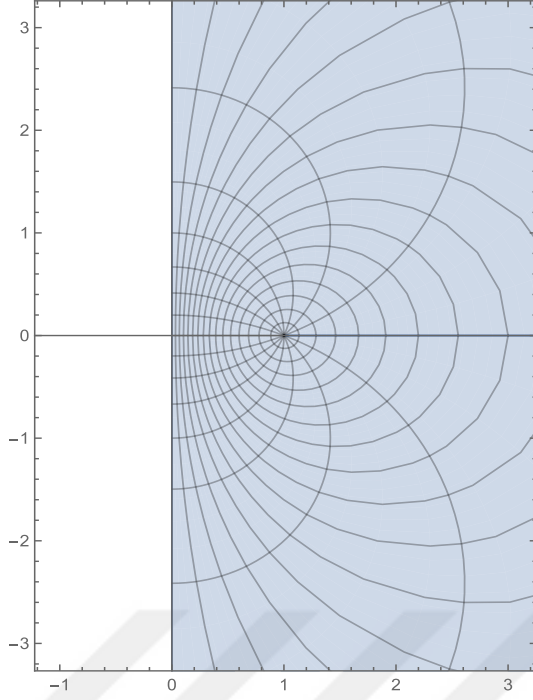
fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir (Duren, 1983).

Tanım 2.3.3 ($\mathcal{P}$ sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $p(0) = 1$, $Re p(z) > 0$ koşullarını sağlayan

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k \quad (2.5)$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir (Duren, 1983).

Örneğin; $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathcal{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür.



Şekil 4. $\mathcal{U}$ birim diskinin $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Ayrıca, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^2$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen ünivalent değildir.

Tanım 2.3.4 (Ω sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ koşullarını sağlayan

$$\omega(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (2.6)$$

şeklindeki analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir (Duren, 1983).

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir ilişki vardır:

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)}, \quad \omega(z) \in \Omega.$$

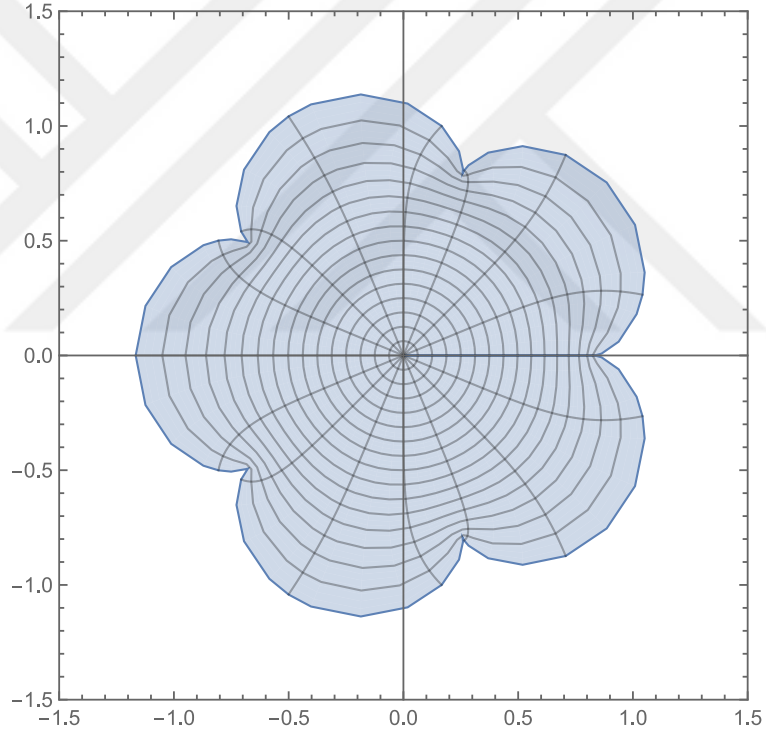
Dolayısıyla $\omega(z)$ ile ifade edildiğinde

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \omega(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \in \Omega \quad (2.7)$$

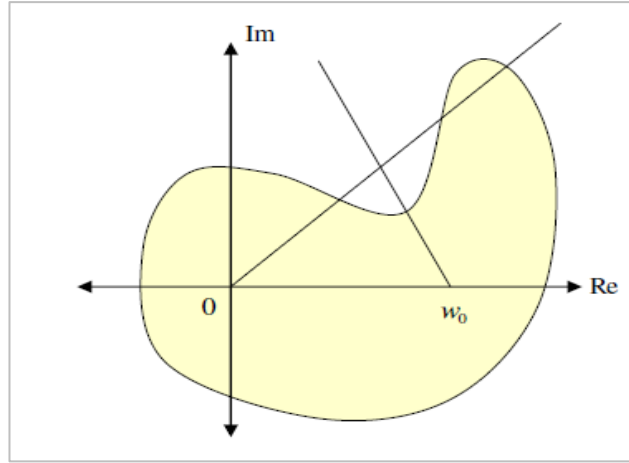
olur. Bu ilişki, $\mathcal{P}$ sınıfındaki her fonksiyonun uygun bir Schwarz fonksiyonuna (Ω sınıfındaki bir fonksiyona) dönüştürülebileceğini ve bunun tersinin de geçerli olduğunu gösterir.

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B}$ kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in \mathcal{B}$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ kümesinde kalıyorsa, $\mathcal{B}$ ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme (starlike küme) denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in \mathcal{S}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir (Duren, 1983).



Şekil 5. Orijine Göre Yıldızıl Bölge



Şekil 6. w_0 Noktasına Göre Yıldızıl Bölge

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.6: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

olmasıdır. Ayrıca,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \leq n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

değerlendirmesi doğrudur (Goodman, 1983).

Yıldızıl fonksiyonların sınıfını

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A}: \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

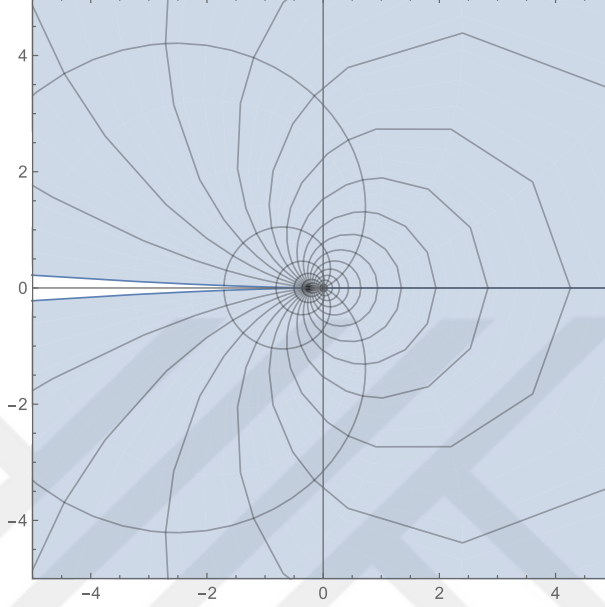
$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyonu $k(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$

şeklinde de yazılabilir. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4}[g(z) - 1]$$

biçiminde yazılarak $\mathcal{U}$ birim diskini $-\infty$ dan $-\frac{1}{4}$ e kadar negatif reel eksenı çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 7. $\mathcal{U}$ birim diskini Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^*$ olduğu görülebilir. Ayrıca Teorem 2.3.6 kullanılarak da $z = re^{i\theta}$ ve $(0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right) \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \geq \frac{1+r}{1-r} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $k(z) \in \mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

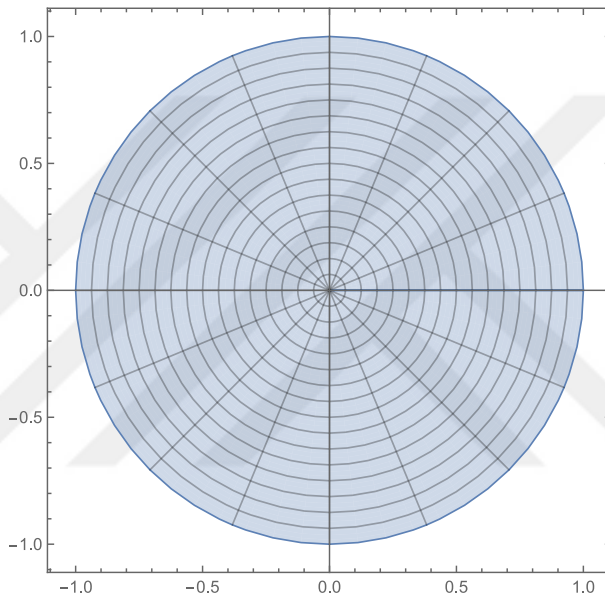
Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z \in \mathcal{U}$ için,

$$k_{\theta}(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta}z)^2}$$

biçiminde tanımlanır ve $k_{\theta}(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm altında birim diskin görüntüsü $-\infty$ dan $-\frac{e^{-i\theta}}{4}$ ışıını hariç kompleks düzlem olur. $\alpha \in (0,2]$

ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $f(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right]$ fonksiyonu, “genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu” olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.7 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ içinde kalıyorsa $\mathcal{B}$ ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f \in \mathcal{S}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir (Pommerenke, 1975; Duren, 1983).



Şekil 8. Konveks Bölge

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.8: $f \in \mathcal{S}$ olsun. O halde

$$f(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

dır. Ayrıca, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \leq 1$ ($n = 2, 3, \dots$) değerlendirmesi doğrudur (Pommerenke, 1975; Godman, 1983).

Örneğin; $f(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} z^{2n-1} \in \mathcal{C}$ dır. Gerçekten $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) olmak üzere,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+r^2e^{i2\theta}}{1-r^2e^{i2\theta}} \right) \\ &= \frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta} \geq \frac{1-r^2}{1+r^2} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.6 ve 2.3.8'in bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.3.9 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere, $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda, $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır (Pommerenke, 1975; Godman, 1983).

İspat : $f \in \mathcal{C}$ olsun. İspatlamalıyız ki $g \in \mathcal{S}^*$ dır. $f \in \mathcal{C}$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

yazılır. $g(z) = zf'(z)$ ise $g'(z) = f'(z) + zf''(z)$ yazılabileceğinden,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = z \frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)} = \frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z)} = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

olduğundan

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zg'(z)}{g(z)} \right) > 0$$

olup, $g \in \mathcal{S}^*$ dır.

Şimdi de $g \in \mathcal{S}^*$ olduğunu kabul ederek $f \in \mathcal{C}$ olduğunu gösterelim. $g \in \mathcal{S}^*$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zg'(z)}{g(z)} \right) > 0$$

yazılır. $g(z)$ nin tanımı kullanılırsa,

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)} \right) > 0$$

yazılabileceğinden

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

elde edilir. O halde, $f \in \mathcal{C}$ dir. Bununla teoremin ispatı tamamlanır.

Ayrıca yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Ünivalentlikle ilgili kriterlerden en kolay ifade edilen ve ispatlananlardan biri aşağıdaki Noshiro, Warschawski ve Wolff' un kriteridir:

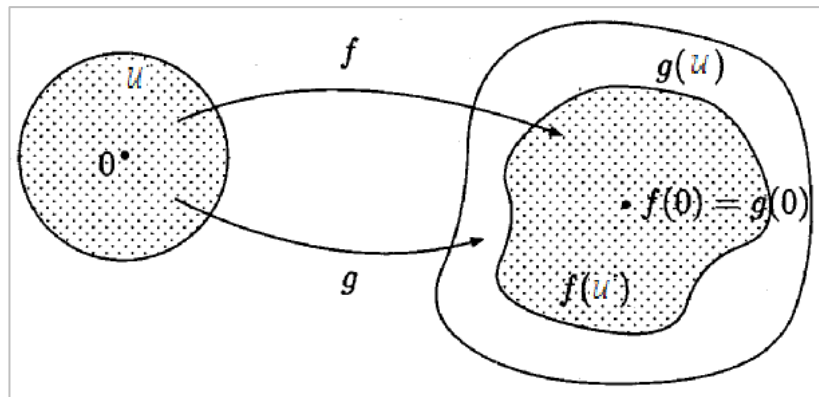
• ‘ f fonksiyonu konveks bir $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z \in \mathcal{D}$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesi üzerinde ünivalenttir.’

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan subordinasyon kavramını verelim.

Tanım 2.3.10: f ve g fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. $\mathcal{U}$ birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ da g fonksiyonuna subordinatedir denir ve $f < g$ ile gösterilir (Duren, 1983).

Eğer g ünivalent ise $f < g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U})$ gerektirmesi doğrudur.

f nin g ye subordinasyonu kavramı, aşağıdaki şekilde görsel olarak ifade edilmiştir.

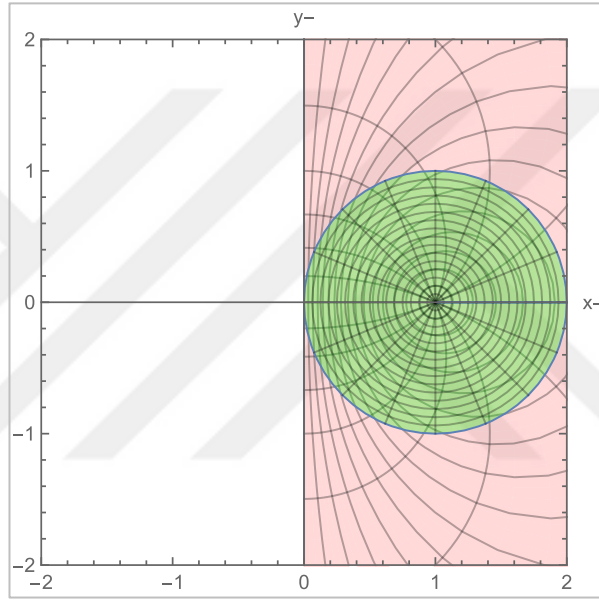


Şekil 9. $f < g$ Subordinasyonu

Örneğin; $\mathcal{U}$ da analitik olan $f(z) = 1 + z$ ve $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. f nin $\mathcal{U}$ da g ye subordinate olması için $\forall z \in \mathcal{U}$ için $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonunun varlığını göstermeliyiz. Böylece,

$$f(z) = g(\omega(z)) \Rightarrow 1 + z = \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} \Rightarrow \omega(z) = \frac{z}{z + 2}$$

bulunur. Dolayısıyla $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| = \left| \frac{z}{z+2} \right| \leq \frac{1}{|z+2|} \leq 1$ olup $\omega \in \Omega$ dır. Böylece $f \prec g$ dir. Ayrıca g ünivalent olduğundan $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U})$ dur. Bu durum aşağıdaki şekilde açık olarak görülebilir.



Şekil 10. $1 + z \prec \frac{1+z}{1-z}$

Teorik olarak subordinasyon, özellikleri tam olarak bilinmeyen bir fonksiyonun, özellikleri bilinen bir fonksiyon aracılığıyla incelenmesi anlamına gelir.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon, ayrıca $g(0) = f(0)$ ve $g(\mathcal{U}) \subset f(\mathcal{U})$ ise, bu durumda $\mathcal{U}_r$ diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ ve $g(\mathcal{U}_r) \subset f(\mathcal{U}_r)$ dir (Duren, 1983).

Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|, \quad (r \in (0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) < \frac{1+z}{1-z} \text{ ve } \phi(z) \in \Omega \Leftrightarrow \phi(z) < z$$

gerektirmeleri yazılır.

Tanım 2.3.11 ($\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere,

$$Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β . mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da β . mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir (Godman, 1983).

Tanım 2.3.12 ($\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere,

$$Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β . mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da β . mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir (Godman, 1983).

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\beta)$ ve $\mathcal{C}(\beta)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} < \frac{1 + (1 - 2\beta)z}{1 - z}, 0 \leq \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} < \frac{1 + (1 - 2\beta)z}{1 - z}, 0 \leq \beta < 1 \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 2.3.13 ($M(\alpha)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$Re \left((1 - z^2) \frac{f(z)}{z} \right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ yerel ünivalent fonksiyonuna α . mertebeden $M(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $M(\alpha)$ fonksiyonlar sınıfı denir.

Tanım 2.3.14 ($N(\beta)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere,

$$Re \left((1 - z)^2 \frac{f(z)}{z} \right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ yerel ünivalent fonksiyonuna β . mertebeden $N(\beta)$ sınıfına ait fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $N(\beta)$ fonksiyonlar sınıfı denir.

Bu sınıflara ait fonksiyonlar, geometrik özellikleri nedeniyle önemlidir: her $f \in M(\alpha), N(\beta)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ alanını, imajiner eksen yönünde konveks olan bir alana, yani $\omega_1, \omega_2 \in f(\mathcal{U})$ için $Re(\omega_1) = Re(\omega_2)$ koşulunda, $[\omega_1, \omega_2]$ doğrusu $f(\mathcal{U})$ içinde yer alacak şekilde tek değerli olarak resmeder. Ayrıca, $f(\mathcal{U})$ sınırında, $\{\omega_1 + it: t > 0\} \subset \mathbb{C} \setminus f(\mathcal{U})$ ve $\{\omega_2 - it: t > 0\} \subset \mathbb{C} \setminus f(\mathcal{U})$ koşulunu sağlayan iki nokta vardır (Goodman, 1983).

1959 yılında Sakaguchi, birim diskte simetrik noktalara bağlı yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıflarını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.3.15 ($\mathcal{S}_s^*$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ için,

$$Re \left\{ \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)} \right\} > 0$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna Sakaguchi fonksiyonu (veya simetrik noktaya göre yıldızıl fonksiyon) ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\mathcal{S}_s^*$ fonksiyonlar sınıfı denir (Sakaguchi, 1959).

Tanım 2.3.16 (K_S sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ için,

$$Re \left\{ \frac{2[zf'(z)]'}{[f(z) - f(-z)]'} \right\} > 0$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonları, simetrik konveks fonksiyonlar veya Sakaguchi konveks fonksiyonları olarak tanımlanır (Sakaguchi, 1959). Bu tür fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da K_S fonksiyonlar sınıfı denir.

Ünivalent fonksiyonların önemli ve ilk çalışmalarından birisi $\mathcal{S}$ sınıfına ait katsayı eşitsizliklerinin elde edilmesidir. Bu probleme ilk cevabı Bieberbach 1916 yılında aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.3.17 (Bieberbach Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik hali $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere Koebe fonksiyonunun dönmeleri için yani $k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ şeklindeki fonksiyonlar için geçerlidir (Pommerenke, 1975; Duren, 1983).

Teorem 2.3.18 (Bieberbach Tahmini): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $n = 2, 3, 4, \dots$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliği vardır. Eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun dönmeleri olmasıdır (Pommerenke, 1975; Duren, 1983).

Bu tahmin için bulunan sonuçlar aşağıdaki tarihsel seyir içerisinde elde edilmiştir.

$$|a_2| \leq 2, \quad \text{Bieberbach (1916)}$$

$$|a_3| \leq 3, \quad \text{Löwner (1923) (Löwner diferensiyel denklemi)}$$

$$|a_4| \leq 4, \quad \text{Garabedian, Schiffer (1955), (Grunsky eşitsizliği)}$$

$$|a_6| \leq 6, \quad \text{Pederson (1968), Ozawa (1969)}$$

$$|a_5| \leq 5, \quad \text{Pederson, Schiffer (1972)}$$

$$|a_n| \leq e \cdot n, \quad \text{Littlewood (1925)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{n} = 1, \quad \text{Hayman (1955)}$$

$$|a_n| \leq \sqrt{7/6}n < 1.081n, \quad \text{FitsGerald (1972)}$$

$$|a_n| \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 \quad \text{L. De Branges (1984).}$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, tezde kullanılan materyallerin özellikleri ve uygulanan yöntemler ayrıntılı biçimde açıklanmıştır.

3.1. Cauchy, Hankel, Toeplitz ve Hermitian-Toeplitz Matrisleri

Bu başlık altında, Cauchy, Hankel, Toeplitz ve Hermitian-Toeplitz matrislerin tanımı yapılmış, temel yapısal özellikleri ayrıntılı bir şekilde açıklanmış ve uygulama alanları hakkında bilgi verilmiştir.

3.1.1 Cauchy Matrisleri

Cauchy matrisi, matematikte özel bir yapıdaki matristir ve birçok uygulama alanında karşımıza çıkar. Özellikle sayısal analizde doğrusal denklem sistemlerinin çözümü, determinant ve ters hesaplamalarında yüksek doğruluk ve kararlılık sağlar. Kriptografi alanında, özel matris yapıları ve permütasyonlar kullanılarak güvenli şifreleme algoritmalarında rol oynar. Sinyal işlemede Fourier dönüşümleri, filtreleme ve veri sıkıştırma algoritmalarında kullanılırken, istatistikte kovaryans matrisleri ve regresyon analizlerinde parametrik modellemelerde teorik incelemelerde önem taşır. Ayrıca hesaplamalı matematik ve optimizasyon çalışmalarında, Cauchy matrisleri özel algoritmaların hızlandırılmasında ve doğrusal sistemlerin etkin çözümünde uygulanmaktadır.

Tanım 3.1.1: $x_i \neq y_i$ ($x_i, y_i \in \mathbb{C}$) $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere elemanları

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j}$$

ile tanımlı $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisine Cauchy matrisi denir (Calivetti & Reichel, 1997).

3.1.2 Hankel Matrisleri

Hankel matrisleri, elemanları sabit ters köşegen üzerinde olan özel bir matris türüdür ve birçok uygulama alanında önemli rol oynar. Özellikle sayısal analizde, sinyal ve sistem analizinde, zaman serisi verilerinin modellenmesinde ve doğrusal sistemlerin çözümünde kullanılırlar. Sinyal işleme alanında filtre tasarımı, spektral analiz ve veri sıkıştırma gibi uygulamalarda önemli bir araçtır. İstatistikte, moment matrisleri ve

kovaryans matrislerinin oluşturulmasında ve parametrik modellemelerde Hankel matrisleri teorik ve pratik olarak değerlidir. Ayrıca kontrol mühendisliği ve hesaplamalı matematikte, özellikle lineer sistemlerin çözümü ve optimizasyon problemlerinin çözümünde Hankel matrisleri etkin bir şekilde uygulanmaktadır.

Tanım 3.1.2: $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_{n-1}(x, x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} h_{i+j} x_i x_j$$

kuadratik formuna Hankel formu denir. Bu forma uyan matrise de Hankel matrisi denir ve $H_{n-1} = (h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$ olarak gösterilir (Iohvidov, 1982).

Bir Hankel matrisinin açık gösterimi,

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n & h_{n+1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n+1} & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklinde. Görüldüğü gibi Hankel matrisi simetriktir. Ayrıca sonsuz mertebeden Hankel matrisi de

$$H_{\infty} = (h_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

3.1.3 Toeplitz Matrisleri

Toeplitz matrisleri, esas köşegen boyunca sabit elemanlara sahip özel matrislerdir ve birçok uygulama alanında önemli rol oynar. Sayısal analizde doğrusal denklem sistemlerinin çözümü ve hızlı algoritmaların geliştirilmesinde kullanılırlar. Sinyal işleme ve iletişim mühendisliğinde, filtre tasarımı, veri sıkıştırma ve Fourier dönüşümleri gibi uygulamalarda yaygın olarak yer alırlar. İstatistikte, özellikle zaman serisi analizinde ve kovaryans matrislerinin modellenmesinde önem taşırlar. Ayrıca kontrol mühendisliği, hesaplamalı matematik ve optimizasyon alanlarında, lineer sistemlerin etkin çözümü ve özel algoritmaların uygulanmasında Toeplitz matrisleri sıkça kullanılır.

Tanım 3.1.3: $n \geq 1$ ve t_{i-j} ler kompleks sayılar olmak üzere

$$T_{n-1}(x, x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} t_{i-j} x_i \bar{x}_j$$

kuadratik formuna Toeplitz formu denir (Iohvidov, 1982). Bu forma tekabül eden,

$$T_{n-1} = (t_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$$

matrise de Toeplitz matrisi denir. Toeplitz matrisi açık olarak,

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n+2} & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{-n+3} & t_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ t_{n-2} & t_{n-3} & \dots & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada görüldüğü gibi bir Toeplitz matrisinin elemanları esas köşegene paralel köşegenler boyunca aynıdır. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Toeplitz matrisi

$$T_{\infty} = (t_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

3.1.4 Hermitian-Toeplitz Matrisleri

Hermitian-Toeplitz matrisleri, her esas köşegen boyunca sabit elemanlara sahip ve kompleks eşleniği ile simetrik olan özel bir matris sınıfıdır. Bu matrisler özellikle sayısal analiz ve lineer cebir uygulamalarında, doğrusal sistemlerin çözümü ve spektral analiz gibi işlemlerde kullanılır. Sinyal işleme ve telekomünikasyon alanında, özellikle zaman serisi verilerinin modellenmesi, filtre tasarımı ve frekans analizinde önemli bir rol oynar. Ayrıca istatistik ve olasılık teorisi uygulamalarında, özellikle kovaryans ve korelasyon matrislerinin yapılandırılmasında, Hermitian-Toeplitz matrisleri teorik ve pratik olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bunun yanında kontrol mühendisliği ve hesaplamalı matematik alanlarında, optimizasyon ve sistem çözümü problemlerinde de etkin bir şekilde uygulanmaktadır.

Tanım 3.1.4: $n \geq 1$ ve t_{i-j} ler kompleks sayılar olmak üzere

$$T_{n-1} = (t_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$$

bir Toeplitz matrisi olsun. Eğer bu matris Hermitian ise, yani

$$T_{n-1} = T_{n-1}^*$$

ise bu matrise Hermitian-Toeplitz matrisi denir (Iohvidov, 1982) ve

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} t_0 & \bar{t}_1 & \bar{t}_2 & \dots & \bar{t}_{n-1} \\ t_1 & t_0 & \bar{t}_1 & \dots & \bar{t}_{n-2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & \bar{t}_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \dots & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada T_{n-1}^* , T_{n-1} nin eşleniğinin transpozudur. Görüldüğü gibi, matrisin üst ve alt köşegenleri esas köşegene paralel şekilde düzenlenmiş olup, her üst köşegen alt köşegenin kompleks eşleniği ile simetrik bir düzen oluşturur. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Hermitian-Toeplitz matrisi

$$T_\infty = (t_{i-j})_{i,j=0}^\infty$$

şeklinde tanımlanır.

3.2. Hankel, Toeplitz, Hermitian-Toeplitz Determinantı

Bu başlık altında, Hankel, Toeplitz ve Hermitian-Toeplitz determinantlarının tanımı yapılmış, temel yapısal özellikleri ayrıntılı bir şekilde açıklanmış ve uygulama alanları hakkında bilgi verilmiştir.

3.2.1 Hankel Determinantı

Hankel determinantları, elemanları sabit ters köşegen üzerinde olan Hankel matrislerinden elde edilen determinantlardır ve çeşitli uygulama alanlarında önemli bir rol oynar. Özellikle moment problemlerinde, bir moment dizisinin belirli özelliklerini analiz etmek için kullanılırlar. Ortogonal polinomların katsayıları ve normlarının hesaplanmasında, polinomların lineer bağımsızlığı ve kök dağılımı hakkında bilgi verirler. Ayrıca zaman serisi analizinde ve sinyal işleme çalışmalarında, veri dizilerinin korelasyon yapısını incelemek, sinyal tanımlama ve tahmin yapmak amacıyla kullanılırlar. Matematiksel fizik ve sayısal analiz alanlarında da Hankel determinantları, diferansiyel denklemlerin çözümünde ve özel fonksiyonların hesaplanmasında yaygın olarak kullanılmaktadır. Hankel determinantı, integral katsayılı kuvvet serisi teorisinde ve singülerlik çalışmasında önemli bir rol oynamaktadır.

$f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda, $q \geq 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_q(n)(f) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & \cdots & \cdots & a_{n+2(q-1)} \end{vmatrix} \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

determinantına q .mertebeden Hankel determinanı denir (Pommerenke, 1966).

$H_q(n)$ ile tanımlanan Hankel determinantında; $q = 2$ ve $n = 1$ alınır;

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_3 - a_2^2$$

dir. $a_1 = 1$ olduğunda,

$$H_2(1) = a_3 - a_2^2 \quad (3.1)$$

olur. Bu determinanta Fekete-Szegő fonksiyoneli denir. Fekete-Szegő (1933) bu fonksiyoneli reel μ için $|a_3 - \mu a_2^2|$ şeklinde genelleştirmiştir (Fekete & Szegő, 1933).

$q = 2$ ve $n = 2$ alınır;

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2 \quad (3.2)$$

yazılır. Bu determinant ikinci Hankel determinanı olarak bilinir. $q = 2$ ve $n = 3$ alınır;

$$H_2(3) = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} = a_3 a_5 - a_4^2 \quad (3.3)$$

olur. $q = 3$ ve $n = 1$ alınır;

$$H_3(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = a_1(a_3 a_5 - a_4^2) - a_2(a_2 a_5 - a_3 a_4) + a_3(a_2 a_4 - a_3^2)$$

ifadesi elde edilir. $a_1 = 1$ olduğunda,

$$\begin{aligned} H_3(1) &= (a_3 a_5 - a_4^2) - a_2(a_2 a_5 - a_3 a_4) + a_3(a_2 a_4 - a_3^2) \\ &= a_3(a_2 a_4 - a_3^2) - a_4(a_2 a_3 - a_4) + a_5(a_3 - a_2^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

yazılır. Bu determinant üçüncü Hankel determinanı olarak bilinir. $q = 3$ ve $n = 2$ alınır;

$$H_3(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_5 & a_6 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} a_3 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} + a_4 \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$H_3(2) = a_2(a_4 a_6 - a_5^2) - a_3(a_3 a_6 - a_4 a_5) + a_4(a_3 a_5 - a_4^2) \quad (3.5)$$

olur. $q = 3$ ve $n = 3$ alınır;

$$H_3(3) = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_7 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_6 & a_7 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_5 & a_7 \end{vmatrix} + a_5 \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Daha açık olarak

$$H_3(3) = a_3(a_5a_7 - a_6^2) - a_4(a_4a_7 - a_5a_6) + a_5(a_4a_6 - a_5^2) \quad (3.6)$$

dir. $q = 4$ ve $n = 1$ alınır;

$$H_4(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{vmatrix} = a_7H_3(1) - a_6\Delta_1 + a_5\Delta_2 - a_4\Delta_3 \quad (3.7)$$

ifadesi elde edilir. Bu determinant dördüncü Hankel determinanı olarak bilinir.

Burada

$$\Delta_1 = (a_3a_6 - a_4a_5) - a_2(a_2a_6 - a_3a_5) + a_4(a_2a_4 - a_3^2) \quad (3.8)$$

$$\Delta_2 = (a_4a_6 - a_5^2) - a_2(a_3a_6 - a_4a_5) + a_3(a_3a_5 - a_4^2) \quad (3.9)$$

$$\Delta_3 = a_2(a_4a_6 - a_5^2) - a_3(a_3a_6 - a_4a_5) + a_4(a_3a_5 - a_4^2) \quad (3.10)$$

dir.

Hankel determinantları, farklı fonksiyon sınıflarında katsayı tahminleri ve yapısal özellikleri incelemek için de kullanılır. Özellikle yıldızlı(starlike), konveks ve bi-ünivalent fonksiyonlar için $H_2(1)$, $H_2(2)$, $H_3(1)$ ve $H_4(1)$ değerleri fonksiyonların ünivalentlik ve konvekslik koşullarını belirlemede önemli rol oynar.

Pommerenke (1966) ayrıca $H_q(n)$ nin $n \rightarrow \infty$ durumunda büyüme hızını göstermiş ve bu sayede üst sınır tahminleri yapmıştır:

$$H_q(n) = \mathcal{O}(n^{(k\sqrt{q}-1/2)q}),$$

burada k fonksiyon sınıfına bağlı bir sabittir. Bu asimptotik sonuçlar, Hankel determinantlarının yalnızca küçük mertebelerde değil, genel q mertebeleri için de fonksiyon davranışını kontrol etmede kullanılabileceğini gösterir (Pommerenke, 1966).

3.2.2 Toeplitz Determinantı

Toeplitz determinantları, fonksiyon katsayılarının simetrik yapısını incelemek ve bu yapının matematiksel özelliklerini analiz etmek amacıyla tanımlanan önemli bir

fonksiyoneldir. Bu determinantlar, özellikle doğrusal sistemlerin çözümü, spektral analiz, sinyal işleme ve zaman serisi analizinde kullanılır ve matematiksel modellemelerde fonksiyonların kararlılık ve yapısal özelliklerini araştırmak için yaygın şekilde kullanılmaktadır.

$f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda, $q \geq 1$ ve $n \geq 0$ olmak üzere

$$T_q(n)(f) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n+q-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

determinantına q . Toeplitz determinantı denir (Szegő, 1915).

$T_q(n)(f)$ ile tanımlanan Toeplitz determinantında; $q = 2$ ve $n = 2$ alınırsa;

$$T_2(2) = a_3^2 - a_2^2 \quad (3.11)$$

olur. $q = 2$ ve $n = 3$ alınırsa;

$$T_2(3) = a_4^2 - a_3^2 \quad (3.12)$$

elde edilir. $q = 3$ ve $n = 1$ alınırsa;

$$T_3(1) = 1 - 2a_2^2 + 2a_2^2a_3 - a_3^2 \quad (3.13)$$

olur. $q = 3$ ve $n = 2$ alınırsa;

$$T_3(2) = a_2^3 - 2a_2a_3^2 + 2a_3^2a_4 - a_2a_4^2 = (a_2 - a_4)(a_2^2 - 2a_2^2 + a_2a_4) \quad (3.14)$$

determinantı yazılır. $q = 4$ ve $n = 2$ alınırsa;

$$T_4(2) = (a_2^2 - a_3^2)^2 + 2(a_3^2 - a_2a_4)(a_2a_4 - a_3a_5) - (a_2a_3 - a_3a_4)^2 + (a_4^2 - a_3a_5)^2 - (a_3a_4 - a_2a_5)^2 \quad (3.15)$$

determinantı elde edilir.

Szegő (1915) tarafından ortaya konan limit teoremi, Toeplitz determinantlarının büyüme hızını ve asimptotik davranışını incelemeye imkân tanımaktadır. Bu sayede, sadece küçük mertebelerde değil, genel q -mertebeleri için de fonksiyonların katsayı tahminleri ve davranışları kontrol edilebilir (Szegő, 1915).

3.2.3 Hermitian-Toeplitz Determinantı

Hermitian-Toeplitz determinantları, Hermitian-Toeplitz matrislerinin simetrik ve kompleks eşlenik yapısını analiz etmek amacıyla tanımlanmıştır. Bu determinantlar,

özellikle sinyal işleme, spektral analiz ve kontrol mühendisliği alanlarında, fonksiyonların kararlılığı ve veri korelasyonlarının incelenmesinde kullanılmaktadır.

$f \in \mathcal{A}$, $q \geq 1$, $n \geq 0$ ve $\bar{a}_n = \overline{a_n}$ olmak üzere

$$T_{q,n}(f) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ \bar{a}_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n+q-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n+q-1} & \bar{a}_{n+q-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

olsun. Eğer a_n bir reel sayı ise $T_{q,n}(f)$ determinantına q . Hermitian-Toeplitz determinanı denir (Hartman & Wintner, 1954).

$q = 2$ ve $n = 1$ alınır;

$$|T_{2,1}(f)| = 1 - |a_2|^2 \quad (3.16)$$

olur. $q = 3$ ve $n = 1$ alınır;

$$|T_{3,1}(f)| = 1 - 2|a_2|^2 + 2\operatorname{Re}(a_2^2 \bar{a}_3) - |a_3|^2 \quad (3.17)$$

determinantı elde edilir.

Hermitian-Toeplitz determinanı, matrisin alt üçgenindeki elemanların üst üçgen elemanlarının karmaşık eşleniği olacak şekilde düzenlenmiş özel bir matris yapısına sahiptir. Bu nedenle determinant, matrisin yapısal özelliklerine bağlı olarak rasyonel dönüşümlere karşı değişmez (Kumar & Cho, 2021).

3.3. Zalcman Fonksiyoneli ve Genelleştirilmiş Zalcman Varsayımı

$f \in \mathcal{A}$ olsun. Burada $n \geq 1$ olmak üzere Zalcman fonksiyoneli:

$$J_n(f) = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonel, ünivalent fonksiyonların katsayıları arasındaki özel bağıntıları ifade eder (Zalcman, 1960).

$n = 2$ alınır;

$$J_2(f) = a_3 a_4 - a_2 a_5 \quad (3.19)$$

olur. $n, m \geq 2$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için genelleştirilmiş Zalcman fonksiyoneli ise,

$$\varphi(f, n, m; \lambda) = |\lambda a_n a_m - a_{n+m-1}|$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyonel, klasik Zalcman fonksiyonelinin $n = m$ durumu için bir genelleştirmesidir. Genelleştirilmiş Zalcman varsayımı,

$$|a_n a_m - a_{n+m-1}| \leq (n-1)(m-1) \quad (3.20)$$

eşitsizliğini öne sürer (Ma, 1999).

Bu eşitsizlik, ünivalent fonksiyonların katsayıları arasındaki daha genel bağıntıları ifade eder. Ayrıca, Zalcman (1960) ünivalent fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ için

$$|a_n^2 - a_{2n-1}| \leq (n-1)^2, \quad n \geq 2 \quad (3.21)$$

eşitsizliğini öne sürmüştür. Bu eşitsizlik, ünivalent fonksiyonların katsayıları arasındaki bağıntıları ifade eder ve Bieberbach varsayımına alternatif bir yaklaşım olarak kabul edilir (Zalcman, 1960).

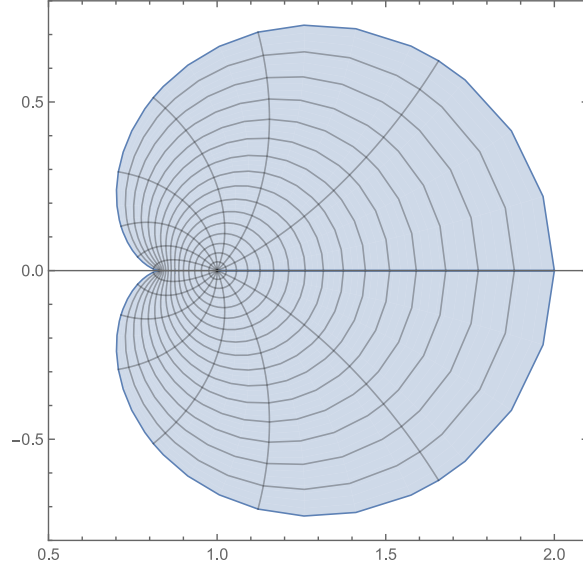
3.4. Rasyonel Fonksiyon

Tanım 3.4.1: Her $z \in \mathcal{U}$ için,

$$\varphi_k(z) = \frac{k^2 + z^2}{k(k-z)} \quad (k = \sqrt{2} + 1) \quad (3.22)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona φ_k rasyonel fonksiyonu denir.

Bu fonksiyon $\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzlemde kardioid şeklinde sınırlı bir bölgeye resmeder ve 1'e göre yıldızlı bir fonksiyon olarak kabul edilir. Sınıfın yapısal formülü, büyüme özellikleri, örtme ve döndürme teoremleri, radyal kestirimler ile ikinci ve üçüncü katsayılar için kesin sınırlar gibi birçok önemli araştırmalar 2016 yılında Kumar ve Ravichandran tarafından yapılmıştır (Kumar & Ravichandran, 2016).



Şekil 11. $\mathcal{U}$ birim diskinin $\varphi_k(z) = \frac{k^2 + z^2}{k(k-z)}$ ($k = \sqrt{2} + 1$) fonksiyonu altındaki görüntüsü

3.5. Telefon Sayıları ve Üreteç Fonksiyonu

Klasik telefon sayıları başlangıç koşulları $T(0) = T(1) = 1$, olmak üzere

$$T(n) = T(n-1) + (n-1)T(n-2), \quad (n \geq 2)$$

şekilde tanımlanır.

Bu sayılar, ilk olarak 1800 yılında Heinrich August Rothe tarafından, simetrik gruplarla olan ilişkisi bağlamında incelenmiş olup, $T(n)$ ifadesi simetrik gruptaki involüsyonların (kendinin tersi olan permütasyonlar) sayısını temsil etmektedir (Chowla vd., 1951; Knuth, 1973).

2017 yılında Wloch ve Wołowiec-Musiał tarafından, başlangıç koşulları

$$T(\lambda, 0) = 1, \quad T(\lambda, 1) = \lambda$$

olmak üzere genelleştirilmiş telefon sayıları

$$T(\lambda, n) = \lambda T(\lambda, n-1) + (n-1) T(\lambda, n-2)$$

şeklinde tanımlanmış ve literatüre kazandırılmıştır (Wloch & Wołowiec-Musiał, 2017).

2019 yılında Bednarz ve Wołowiec-Musiał tarafından ise, başka bir genelleme olarak, başlangıç koşulları

$$T_\lambda(0) = T_\lambda(1) = 1$$

olmak üzere

$$T_\lambda(n) = T_\lambda(n-1) + \lambda(n-1)T_\lambda(n-2)$$

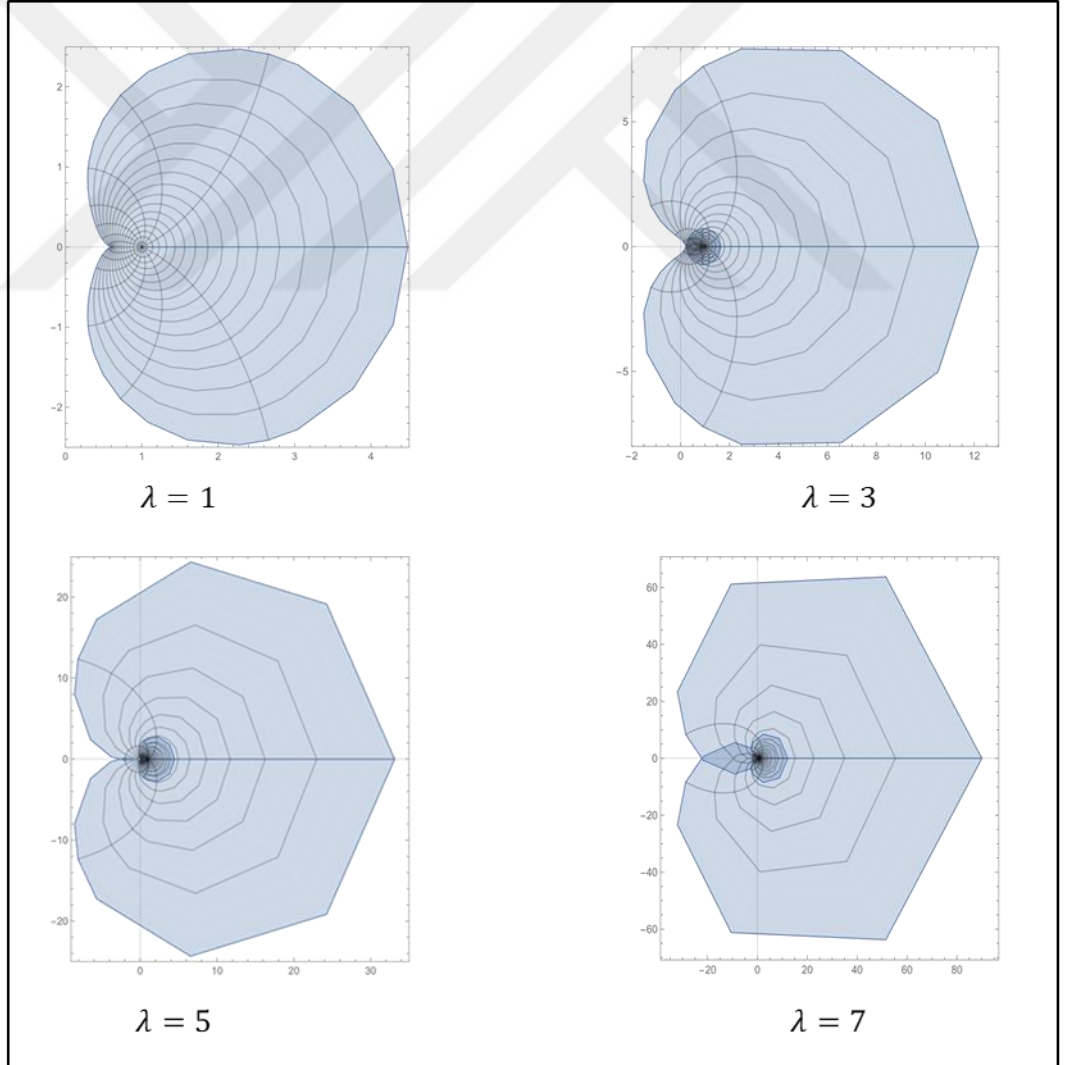
şeklinde bir bağıntı önerilmiştir. Bu bağıntı, $n \geq 2$ ve $\lambda \geq 1$ olmak üzere tam sayılar için geçerlidir. Bu sayıların üreteç fonksiyonu, doğrudan formülleri, matris gösterimleri ve çeşitli aritmetik özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Burada $\lambda = 1$ seçilirse klasik telefon sayıları $T(n)$ elde edilmektedir.

Genelleştirilmiş telefon sayıları $T_\lambda(n)$ için üstel üreteç fonksiyonu

$$\phi(z) = e^{\left(x + \lambda \frac{z^2}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} T_\lambda(n) \frac{z^n}{n!}, \quad (\lambda \geq 1) \quad (3.23)$$

ile tanımlanmıştır (Bednarz & Wołowiec-Musiał, 2019).

$\phi(z)$ üreteç fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlıdır. Özel olarak $\lambda = 1$ için $S_T^* = S_T^*(1)$ yazılır.



Şekil 12. $\mathcal{U}$ birim diskinin $\phi(z) = e^{\left(z + \lambda \frac{z^2}{2}\right)}$ fonksiyonu altındaki görüntüleri

3.6. Analitik Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Şimdi $\varphi_k(z)$ rasyonel fonksiyonu ve $\phi(z)$ telefon sayılarını kullanarak subordinasyon yardımıyla aşağıdaki alt sınıfları tanımlayalım.

Tanım 3.6.1: $f \in \mathcal{A}$ olmak üzere, $\mathcal{S}_s^*(\varphi)$ sınıfı

$$\mathcal{S}_s^*(\varphi) = \left\{ f: f \in \mathcal{S} \text{ ve } \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)} < \varphi_k(z) \quad (\forall z \in \mathcal{U}) \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\varphi_k(z)$ ifadesi (3.22) ile verilmiştir (Buyankara & Çağlar, 2025b).

Tanım 3.6.2: $f \in \mathcal{A}$ ve $1 \leq \lambda < 5$ ise $\mathcal{S}_T^*(\lambda)$ sınıfı

$$\mathcal{S}_T^*(\lambda) = \left\{ f: f \in \mathcal{S} \text{ ve } \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)} < \phi(z), \quad (\forall z \in \mathcal{U}) \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\phi(z)$ ifadesi (3.23) ile verilmiştir (Buyankara & Çağlar, 2025d).

Ana sonuçlarımızın ispatında kullanacağımız lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.6.3: $p(z) = 1 + d_1z + d_2z^2 + d_3z^3 + \dots \in \mathcal{P}$ olsun. O halde, $k \geq 1$ için $|d_k| \leq 2$ dir. Ayrıca,

$$\left| d_2 - \frac{\mu}{2} d_1^2 \right| \leq \max\{2, 2|\mu - 1|\} = \begin{cases} 2, & 0 \leq \mu \leq 2, \\ 2|\mu - 1|, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır (Duren, 1983).

Lemma 3.6.4: $p(z) = 1 + d_1z + d_2z^2 + d_3z^3 + \dots \in \mathcal{P}$ olsun. $\mu \in \mathbb{C}$ ve $1 \leq k \leq r - 1$ için

$$|d_r - \mu d_k d_{r-k}| \leq 2 \max\{1, |1 - 2\mu|\}$$

eşitsizliği sağlanır (Efraimidis, 2016).

Lemma 3.6.5: $p(z) = 1 + d_1z + d_2z^2 + d_3z^3 + \dots \in \mathcal{P}$ ve $d_1 \geq 0$ olsun. O halde $|\zeta| \leq 1$ ve $|y| \leq 1$ ($\zeta, y \in \mathbb{C}$) için

$$2d_2 = d_1^2 + y(4 - d_1^2)$$

ve

$$4d_3 = d_1^3 + 2(4 - d_1^2)d_1y - d_1(4 - d_1^2)y^2 + 2(4 - d_1^2)(1 - |y|^2)\zeta$$

olur (Libera & Zlotkiewicz, 1983).

Lemma 3.6.6: $\omega \in \Omega$ ve $\mu, v \in \mathbb{R}$ için

$$|c_3 + \mu c_1 c_2 + v c_1^3| \leq \begin{cases} |v| & ((\mu, v) \in \mathcal{M}) \\ \frac{2}{3}(|\mu| + 1) \left(\frac{|\mu| + 1}{3(|\mu| + 1 + v)} \right)^{1/2} & ((\mu, v) \in \mathcal{N}) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\mathcal{M} = \left\{ (\mu, v): (\mu, v) \in \mathbb{R}^2, \quad |\mu| \geq 4, \quad v \geq \frac{2}{3}(|\mu| - 1) \right\}$$

ve

$$\mathcal{N} = \left\{ (\mu, v): (\mu, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} \leq |\mu| \leq 2, -\frac{2}{3}(|\mu| + 1) \leq v \leq \frac{4}{27}(|\mu| + 1)^3 - (|\mu| + 1) \right\}$$

dir (Prokhorov & Szynal, 1981).

Lemma 3.6.7: $p(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \dots \in \mathcal{P}$ olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ için,

$$|\mu d_n d_m - d_{n+m}| \leq \begin{cases} 2 & 0 \leq \mu \leq 1 \\ 2|2\mu - 1| & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bu sınırlar kesindir. Eğer $0 < \mu < 1$ ise, eşitsizlik

$$p(z) = \frac{1 + z^{n+m}}{1 - z^{n+m}}$$

fonksiyonu için kesindir. Diğer durumlarda, eşitsizlik

$$p(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$$

fonksiyonu için kesindir (Ravichandran & Verma, 2015).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde;

1. $M(\alpha)$ fonksiyon sınıfı için başlangıç katsayıları ile ikinci Hankel, Toeplitz ve Hermitian–Toeplitz determinantları incelenmiştir.
2. $S_s^*(\varphi)$ fonksiyon sınıfı için başlangıç katsayılarının sınırları, ikinci ve üçüncü Hankel determinantları ile Hermitian–Toeplitz determinantları elde edilmiştir.
3. $S_T^*(\lambda)$ fonksiyon sınıfı için başlangıç katsayılarının sınırları ile Toeplitz ve Hermitian–Toeplitz determinantları hesaplanmıştır.
4. $M(\beta)$ fonksiyon sınıfı için başlangıç katsayılarının sınırları, ikinci Hankel ve Toeplitz determinantları incelenmiştir.
5. K_S fonksiyon sınıfı için Zalcman tahminleri, katsayı sınırları ile ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden Hankel ve Toeplitz determinantları elde edilmiştir.

4.1. $M(\alpha)$ Fonksiyon Sınıfı İçin Başlangıç Katsayıları

Bu kısımda, $f(z) \in M(\alpha)$ alt sınıfı için başlangıç katsayıları aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

Lemma 4.1.1: $f \in M(\alpha)$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda,

$$a_2 = (1 - \alpha)d_1 \quad (4.1)$$

$$a_3 = (1 - \alpha)d_2 + 1 \quad (4.2)$$

$$a_4 = (1 - \alpha)(d_3 + d_1) \quad (4.3)$$

$$a_5 = (1 - \alpha)(d_2 + d_4) + 1 \quad (4.4)$$

dir. Burada d_1, d_2, d_3 ve d_4 , (2.5) ifadesinde verilen $p(z)$ fonksiyonun katsayılarıdır (Buyankara & Çağlar, 2023).

İspat: $\alpha \in [0,1)$ ve $f \in M(\alpha)$ olsun. $M(\alpha)$ sınıfının tanımına göre, her $z \in \mathcal{U}$ için

$$Re \left((1 - z^2) \frac{f(z)}{z} \right) > \alpha$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$(1 - z^2) \frac{f(z)}{z} = p(z) (1 - \alpha) + \alpha \quad (4.5)$$

olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ vardır. (2.4) ve (2.5) ifadelerinde verilen $f(z)$ ve $p(z)$ fonksiyonları (4.5) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & 1 + a_2 z + (a_3 - 1)z^2 + (a_4 - a_2)z^3 + (a_5 - a_3)z^4 + \dots \\ &= 1 + (1 - \alpha)d_1 z + (1 - \alpha)d_2 z^2 + (1 - \alpha)d_3 z^3 + (1 - \alpha)d_4 z^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) eşitliğindeki eşit üslü terimlerin katsayıları birbirine eşitlendiğinde (4.1)–(4.4) ifadeleri doğrudan elde edilir. Böylece Lemma 4.1.1 ispatlanmış olur.

4.2. $M(\alpha)$ Fonksiyon Sınıfı için Hankel Determinantı

Bu kısımda, $f(z) \in M(\alpha)$ alt sınıfı için ikinci mertebeden Hankel determinantının kesin üst sınırı elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1: $f(z) \in M(\alpha)$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$|H_2(2)(f)| \leq \frac{4(1 - \alpha)(64 - 37\alpha) + 27}{27} \quad (4.7)$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2023). Bu eşitsizlik kesindir.

İspat: Lemma 4.1.1 de elde edilen (4.1) – (4.3) ifadeleri (3.2) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$H_2(2)(f) = (1 - \alpha)^2 d_1^2 + (1 - \alpha)^2 d_1 d_3 - 2(1 - \alpha)d_2 - (1 - \alpha)^2 d_2^2 - 1 \quad (4.8)$$

elde edilir.

$f(z)$ fonksiyonu birim çember rotasyonu yani $f(z) \rightarrow e^{i\theta} f(z)$ altında korunduğundan $M(\alpha)$ sınıfı ve $H_2(2)(f)$ fonksiyonelde bu dönüşüm altında korunur. Bu nedenle Lemma 3.6.5 de verilen d_2 ve d_3 ifadeleri (4.8) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} H_2(2)(f) &= (1 - \alpha)^2 d_1^2 + (1 - \alpha)^2 \frac{d_1}{4} \left[\frac{d_1^3 + 2(4 - d_1^2)d_1 y - d_1(4 - d_1^2)y^2}{+2(4 - d_1^2)(1 - |y|^2)\zeta} \right] \\ &\quad - 2(1 - \alpha) \frac{1}{2} [d_1^2 + y(4 - d_1^2)] - (1 - \alpha)^2 \frac{1}{4} [d_1^2 + y(4 - d_1^2)]^2 - 1 \\ &= (1 - \alpha)^2 d_1^2 + \frac{(1 - \alpha)^2}{4} d_1 \left[\frac{d_1^3 + 2(4 - d_1^2)d_1 y - d_1(4 - d_1^2)y^2}{+2(4 - d_1^2)(1 - |y|^2)\zeta} \right] \end{aligned}$$

$$-(1-\alpha)[d_1^2 + y(4-d_1^2)] - \frac{(1-\alpha)^2}{4}[d_1^4 + 2d_1^2y(4-d_1^2) + (4-d_1^2)^2y^2] - 1 \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) eşitliğinde $d_1 = u$ ($0 \leq u \leq 2$) alındığında;

$$\begin{aligned} H_2(2)(f) &= (1-\alpha)^2u^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{4}u \left[\begin{aligned} &u^3 + 2(4-u^2)uy - u(4-u^2)y^2 \\ &+ 2(4-u^2)(1-|y|^2)\zeta \end{aligned} \right] \\ &- (1-\alpha)[u^2 + y(4-u^2)] - \frac{(1-\alpha)^2}{4}[u^4 + 2u^2y(4-u^2) + (4-u^2)^2y^2] - 1 \\ &= -\alpha(1-\alpha)u^2 - \frac{(1-\alpha)^2}{4}u^2(4-u^2)y^2 - \frac{(1-\alpha)^2}{4}(4-u^2)^2y^2 - (1-\alpha)(4-u^2)y \\ &+ \frac{(1-\alpha)^2}{2}u(4-u^2)(1-|y|^2)\zeta - 1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) ifadesinde her iki tarafın modülü alındığında ve ardından üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |H_2(2)(f)| &\leq \alpha(1-\alpha)u^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{4}u^2(4-u^2)|y|^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{4}(4-u^2)^2|y|^2 \\ &+ (1-\alpha)(4-u^2)|y| + \frac{(1-\alpha)^2}{2}u(4-u^2)(1-|y|^2)\zeta + 1 \\ &\leq \alpha(1-\alpha)u^2 + (1-\alpha)(4-u^2)|y| + \frac{(1-\alpha)^2}{2}(4-u^2)(u+2)|y|^2 + \\ &\frac{(1-\alpha)^2}{2}(4-u^2)u + 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) ifadesini daha kompakt hâle getirmek için $\varphi(u, |y|)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi(u, |y|) &= \alpha(1-\alpha)u^2 + (1-\alpha)(4-u^2)|y| + \frac{(1-\alpha)^2}{2}(4-u^2)(u+2)|y|^2 \\ &+ \frac{(1-\alpha)^2}{2}(4-u^2)u + 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanır. $|y| \in [0,1]$ aralığında türev alındığında,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial |y|} = (1-\alpha)(4-u^2) + (1-\alpha)^2(4-u^2)(u+2)|y| \geq 0 \quad (4.13)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.13) ifadesine göre $\varphi(u, |y|)$ fonksiyonu $|y| \in [0,1]$ aralığında monoton artandır. Bu nedenle fonksiyon maksimum değerini $|y| = 1$ noktasında alır. Yani

$$\begin{aligned} |H_2(2)(f)| &\leq \varphi(u, |y|) \leq \varphi(u, 1) \\ &= \alpha(1-\alpha)u^2 + (1-\alpha)(4-u^2) + \frac{(1-\alpha)^2}{2}(4-u^2)(u+2) + \frac{(1-\alpha)^2}{2}(4-u^2)u + 1 \\ &= (1-\alpha)[-(1-\alpha)u^3 - 2(1-\alpha)u^2 + 4(1-\alpha)u + 8 - 4\alpha] + 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

dir. (4.14) ifadesinin maksimum değerini bulmak için türev alındığında,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(u, 1)}{\partial u} &= (1 - \alpha)[-3(1 - \alpha)u^2 - 4(1 - \alpha)u + 4(1 - \alpha)] \\ &= (1 - \alpha)^2(-3u^2 - 4u + 4) = 0\end{aligned}\quad (4.15)$$

olur. Dolayısıyla, $[0, 2] \ni u \rightarrow \varphi(u, 1)$ fonksiyonunun kritik noktaları sırasıyla, $u = -2$ ve $u = \frac{2}{3} = u_0$ bulunur. Bu değerler (4.14) ifadesinde sırasıyla yerine yazıldığında,

$$\varphi(2, 1) = 4\alpha(1 - \alpha) + 1 \quad (4.16)$$

$$\varphi\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \frac{4(1-\alpha)(64-37\alpha)}{27} + 1 \quad (4.17)$$

değerleri elde edilir. Burada $0 \leq \alpha < 1$ aralığında, $\varphi(u, 1)$ fonksiyonu maksimum değerini $u = \frac{2}{3}$ noktasında alır. Böylece

$$|H_2(2)(f)| \leq \frac{4(1-\alpha)(64-37\alpha)+27}{27} \quad (4.18)$$

dir. Bu eşitsizlik

$$p(z) = \frac{1 - z^2}{1 - u_0 z + z^2} = 1 + u_0 z + (u_0^2 - 2)z^2 - (2u_0 - u_0(u_0^2 - 1))z^3 - \dots, z \in \mathcal{U}$$

fonksiyonu için kesindir. Bu fonksiyonun katsayıları

$$d_1 = \frac{2}{3}, \quad d_2 = \frac{-14}{9} \quad \text{ve} \quad d_3 = \frac{-46}{27}$$

olduğundan, (4.18) ifadesinde eşitlik sağlanır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.1 de $\alpha = \frac{1}{2}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2: $f(z) \in M(\frac{1}{2})$ olsun. Bu durumda

$$|H_2(2)(f)| \leq \frac{118}{27}$$

dir. Bu sonuç kesindir.

4.3. $M(\alpha)$ Fonksiyon Sınıfı için Toeplitz Determinantları

Bu kısımda, $f(z) \in M(\alpha)$ alt sınıfı için ikinci ve üçüncü mertebeden Toeplitz determinantlarının üst sınırı elde edilmiştir.

Teorem 4.3.1: $f(z) \in M(\alpha)$ ve $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)(f)| \leq 2(15 - 8\alpha^3 + 30\alpha^2 - 36\alpha)$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2023).

İspat: Lemma 4.1.1 de verilen (4.1) ve (4.2) ifadeleri (3.13) eşitliğinde yerine yazıldığında ve daha sonra her iki tarafın modülü alınarak üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |T_3(1)(f)| &= |1 - 2a_2^2 + 2a_2^2a_3 - a_3^2| \\ &\leq 1 + 2|a_2|^2 + |a_3||a_3 - 2a_2^2| \\ &\leq 1 + 8(1 - \alpha)^2 + (3 - 2\alpha)|a_3 - 2a_2^2| \end{aligned} \quad (4.19)$$

yazılır. (4.19) eşitliğindeki $|a_3 - 2a_2^2|$ ifadesini hesaplamak için (4.1) ve (4.2) ifadeleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_3 - 2a_2^2 &= (1 - \alpha)d_2 + 1 - 2(1 - \alpha)^2d_1^2 \\ &= (1 - \alpha)(d_2 - 2(1 - \alpha)d_1^2) + 1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

bulunur. (4.20) eşitliğinde her iki tarafın modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_3 - 2a_2^2| \leq (1 - \alpha)|d_2 - 2(1 - \alpha)d_1^2| + 1 \quad (4.21)$$

olur. (4.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki $|d_2 - 2(1 - \alpha)d_1^2|$ ifadesine Lemma 3.6.3 uygulandığında,

$$|d_2 - 2(1 - \alpha)d_1^2| \leq 2|3 - 4\alpha| \quad (4.22)$$

yazılır. (4.22) ifadesi (4.21) eşitsizliğinde yerine yazıldığında,

$$|a_3 - 2a_2^2| \leq 2(1 - \alpha)(3 - 4\alpha) + 1 \quad (4.23)$$

bulunur. (4.23) eşitsizliği (4.19) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} |T_3(1)(f)| &\leq 1 + 8(1 - \alpha)^2 + (3 - 2\alpha)[2(1 - \alpha)(3 - 4\alpha) + 1] \\ &\leq 2(15 - 8\alpha^3 + 30\alpha^2 - 36\alpha) \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.3.1 de $\alpha = \frac{1}{2}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2: $f(z) \in M(\frac{1}{2})$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)(f)| \leq 7$$

dir.

Teorem 4.3.3: $f(z) \in M(\alpha)$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)(f)| \leq 6(1 - \alpha)(12\alpha^2 - 32\alpha + 22)$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2023).

İspat: (3.14) eşitliğinin her iki tarafının modülü alındığında,

$$|T_3(2)(f)| = |(a_2 - a_4)(a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2)| \quad (4.25)$$

yazılır. (4.25) eşitliğindeki $|a_2 - a_4|$ fonksiyoneli hesaplamak için

$$|a_2 - a_4| \leq |a_2| + |a_4| \quad (4.26)$$

eşitsizliği dikkate alındığında ve (4.1) ve (4.3) eşitlikleri (4.26) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|a_2 - a_4| \leq 6(1 - \alpha) \quad (4.27)$$

bulunur. Son olarak, (4.1) – (4.3) eşitlikleri (4.25) ifadesinde yer alan $|a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2|$ fonksiyoneli yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & |a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2| \\ &= |2(1 - \alpha)^2d_1^2 + (1 - \alpha)^2d_1d_3 - 2(1 - \alpha)^2d_2^2 - 4(1 - \alpha)d_2 - 2| \\ &= \left| -4(1 - \alpha) \left(d_2 - \frac{(1 - \alpha)}{2}d_1^2 \right) + (1 - \alpha)^2d_1d_3 - 2(1 - \alpha)^2d_2^2 - 2 \right| \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28) ifadesinin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2| \leq 12(1 - \alpha)^2 + 2 + 4(1 - \alpha) \left| d_2 - \frac{(1 - \alpha)}{2}d_1^2 \right| \quad (4.29)$$

yazılır. (4.29) eşitsizliğinde $\left| d_2 - \frac{(1 - \alpha)}{2}d_1^2 \right|$ ifadesine Lemma 3.6.3 uygulandığında,

$$\left| d_2 - \frac{(1 - \alpha)}{2}d_1^2 \right| \leq 2 \quad (4.30)$$

bulunur. (4.30) ifadesi, (4.29) eşitsizliğinde dikkate alındığında,

$$|a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2| \leq 12(1 - \alpha)^2 + 2 + 8(1 - \alpha) \quad (4.31)$$

olur. Böylece, (4.27) ve (4.31) eşitsizlikleri (4.25) ifadesinde yerine yazıldığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|T_3(2)(f)| \leq 6(1 - \alpha)(12\alpha^2 - 32\alpha + 22)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.3.3 de $\alpha = \frac{1}{2}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.4: $f(z) \in M(\frac{1}{2})$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)(f)| \leq 27$$

dir.

4.4. $M(\alpha)$ Fonksiyon Sınıfı için Hermitian-Toeplitz Determinantı

Bu kısımda, $f(z) \in M(\alpha)$ alt sınıfı için üçüncü mertebeden Hermitian-Toeplitz determinantının alt ve üst sınırı elde edilmiştir.

Teorem 4.4.1: $f(z) \in M(\alpha)$ ve $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$T_{3,1}(f) \leq \begin{cases} 2, & \alpha \in [0, 0.0554] \\ 4\alpha(1 - \alpha)(4\alpha - 5) + 2, & \alpha \in [0.0554, \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (4.32)$$

ve

$$T_{3,1}(f) \geq \frac{(2\alpha^2 - 3\alpha + 2)^2}{(2\alpha - 1)} + 4\alpha(1 - \alpha) + 2 \quad (4.33)$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025c).

İspat: Lemma 4.1.1 de verilen (4.1), (4.2) ifadeleri (3.17) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} T_{3,1}(f) &= 2\operatorname{Re} \left((1 - \alpha)^2 d_1^2 ((1 - \alpha)d_2 + 1) \right) - 2|(1 - \alpha)^2 d_1^2| \\ &\quad - |((1 - \alpha)d_2 + 1)|^2 + 1 \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. Öncelikle $M(\alpha)$ ve $T_{3,1}(f)$ rotasyon altında korunduğundan $x \in [0,1]$ için $d_1 = 2x$ olur. (4.34) eşitliğinde Lemma 3.6.5 uygulandığında, y bir kompleks sayı olmak üzere $|y| \leq 1$ için

$$\begin{aligned} T_{3,1}(f) &= 8(1 - \alpha)^2 [2(1 - \alpha)x^4 + 2x^2(1 - \alpha)(1 - x^2)\operatorname{Re}(y)] - 4(1 - \\ &\quad \alpha)^2 [x^4 + 2x^2(1 - x^2)\operatorname{Re}(y) + |y|^2(1 - x^2)^2] - 4(1 - \alpha)(x^2 + (1 - \\ &\quad x^2)\operatorname{Re}(y)) \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir.

(4.35) eşitliğinde $y \neq 0$ ve $y = 0$ olma durumları aşağıdaki gibi incelenir:

A. Öncelikle $y \neq 0$ olduğunu varsayalım. O halde, $y = |y|e^{i\varphi}$, $y \in (0,1]$ ve $\varphi \in [0,2\pi)$ alınır. Böylece (4.35) ifadesinde $t \in [0,1]$, $u \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ için $x^2 = t$, $y = |y|e^{i\varphi} = |y|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ve $|y| = u$ yazılırsa

$$\begin{aligned} T_{3,1}(f) &= 16(1-\alpha)^3[t^2 + t(1-t)u\cos\varphi] \\ &\quad -4(1-\alpha)^2[t^2 + 2t(1-t)u\cos\varphi + u^2(1-t)^2] \\ &\quad -4(1-\alpha)(t + (1-t)u\cos\varphi) \end{aligned} \quad (4.36)$$

bulunur. Burada

$$T_{3,1}(f) = G(t, u, \varphi) \quad (4.37)$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} G(t, u, \varphi) &= -4(1-\alpha)^2(1-t)^2u^2 + 4(1-\alpha)(2(1-\alpha)(1-2\alpha)t - 1)(1-t) \\ &\quad u\cos\varphi + 4(1-\alpha)^2(3-4\alpha)t^2 - 4(1-\alpha)t \end{aligned} \quad (4.38)$$

olur. Bu durumda $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, $t \in [0,1]$, $u \in [0,1]$ ve $\varphi \in [0,2\pi]$ için

$$L(t, u) \leq G(t, u, \varphi) \leq P(t, u) \quad (4.39)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada alt sınır ve üst sınır sırasıyla

$$L(t, u) = G(t, u, \pi) \text{ ve } P(t, u) = G(t, u, 0) \text{ olarak tanımlanır.}$$

(4.38) ifadesinde üst sınırı bulmak için $\varphi = 0$ alındığında,

$$\begin{aligned} P(t, u) &= -4(1-\alpha)^2(1-t)^2u^2 + 4(1-\alpha)(2(1-\alpha)(1-2\alpha)t - 1)(1-t) \\ &\quad u + 4(1-\alpha)^2(3-4\alpha)t^2 - 4(1-\alpha)t \end{aligned} \quad (4.40)$$

bulunur.

$t = 1$ için $x^2 = t$ eşitliğinden $x^2 = 1$ elde edilir. $x \in [0,1]$ olduğundan $x = 1$ olur. O halde, $d_1 = 2$ dir. Böylece (4.40) ifadesi

$$P(1, u) = 4(1-\alpha)(4\alpha^2 - 7\alpha + 2), \quad u \in [0,1] \quad (4.41)$$

şeklinde yazılır. (4.40) ifadesinin maksimum değerini belirlemek için u ya göre türev alındığında

$$\frac{\partial P(t, u)}{\partial u} = -8(1 - \alpha)^2(1 - t)^2u + 4(1 - \alpha)(2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)t - 1)(1 - t)$$

olur. $\frac{\partial P(t, u)}{\partial u} = 0$ eşitliği için kritik nokta

$$u_\omega = \frac{2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)t - 1}{2(1 - \alpha)(1 - t)} \quad (4.42)$$

dir. Bu kritik nokta maksimum veya minimum değerleri belirlememize olanak sağlar. Ancak u yalnızca $[0, 1]$ aralığında tanımlı olduğu için, kritik noktanın aralık içinde olup olmadığına göre maksimum veya minimum değeri belirlenir:

1. Durum: Farz edelim ki $u_\omega \geq 1$ olsun. Yani

$$\frac{(3 - 2\alpha)}{4(1 - \alpha)^2} \leq t \leq 1 \quad (4.43)$$

dir. (4.43) ifadesindeki t aralığında kritik nokta u_ω aralığın dışında olduğundan maksimum değer $u = 1$ noktasında alınır. Böylece

$$P(t, u) \leq P(t, 1) = 8(1 - \alpha)^2(1 - 2\alpha)t - 4(1 - \alpha)(2 - \alpha) + 2 \quad (4.44)$$

yazılır.

Maksimum değer ayrıca $t = 1$ noktasında da kontrol edilmelidir, çünkü t aralığının üst sınırında $P(t, 1)$ fonksiyonu en büyük değeri alabilir. Bu durumda $P(t, 1)$ fonksiyonun kritik noktası $t_\omega = \frac{2(1 - \alpha)(2 - \alpha) - 1}{4(1 - \alpha)^2(1 - 2\alpha)}$ dir. Dolayısıyla kritik nokta (4.43) ifadesinde belirtilen aralığın dışındadır. Yani,

$$t_\omega = \frac{2(1 - \alpha)(2 - \alpha) - 1}{4(1 - \alpha)^2(1 - 2\alpha)} < \frac{(3 - 2\alpha)}{4(1 - \alpha)^2} \quad (4.45)$$

dir. Bu nedenle $P(t, 1)$ fonksiyonu maksimum değerini kritik noktada değil, aralığın üst sınırı olan $t = 1$ noktasında alır, dolayısıyla

$$P(t, 1) \leq P(1, 1) = 4\alpha(1 - \alpha)(4\alpha - 5) + 2 \quad (4.46)$$

olur.

2. Durum: Farz edelim ki $0 \leq u_\omega < 1$ olsun. Yani

$$0 \leq t < \frac{(3 - 2\alpha)}{4(1 - \alpha)^2} \quad (4.47)$$

dir. Böylece, (4.47) ifadesindeki t kritik nokta aralık içinde olur. Bu durumda fonksiyon maksimum değerini $u = u_\omega$ noktasında alır. Böylece

$$P(t, u) \leq P(t, u_\omega) = 16(1 - \alpha)^4 t^2 - 8(1 - \alpha)^2 t + 1 \leq P(0, u_\omega) = 1 \quad (4.48)$$

yazılır. Maksimum değerlerin uygun şekilde belirlenebilmesi için (4.48) ile 1. durumdaki uç değerlerin karşılaştırılması gerekir. Yani,

$$P(1, 1) = 4\alpha(1 - \alpha)(4\alpha - 5) + 2 < 1 = P(0, u_\omega) \quad (4.49)$$

olur. (4.49) ifadesi $\alpha \in (0, 0.0554)$ için sağlanır. Böylece (4.37) ve (4.39) ifadeleri (4.41) eşitliğinde dikkate alındığında, $y \neq 0$ durumunda (4.32) eşitsizliği elde edilir. (4.38) ifadesinin alt sınırını elde etmek için $L(t, u) = G(t, u, \pi)$ olarak tanımlandığında ve $\varphi = \pi$ alındığında, $t \in [0, 1]$ ve $u \in [0, 1]$ için,

$$\begin{aligned} L(t, u) = & -4(1 - \alpha)^2(1 - t)^2 u^2 - 4(1 - \alpha)(2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)t - 1)(1 - t)u \\ & + 4(1 - \alpha)^2(3 - 4\alpha)t^2 + 4(1 - \alpha)(2\alpha - 3)t + 2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

elde edilir.

$t = 1$ için $x^2 = t$ eşitliğinden $x^2 = 1$ elde edilir. $x \in [0, 1]$ olduğundan $x = 1$ olur. O halde, $d_1 = 2$ dir. Böylece (4.50) ifadesi,

$$L(1, u) = 4\alpha(1 - \alpha)(4\alpha - 5) + 2, \quad u \in [0, 1] \quad (4.51)$$

şeklinde yazılır. (4.50) ifadesinin minimum değerini belirlemek için türev alındığında,

$$\frac{\partial L(t, u)}{\partial u} = -8(1 - \alpha)^2(1 - t)^2 u + 4(1 - \alpha)(2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)t - 1)(1 - t)$$

olur. $\frac{\partial L(t, u)}{\partial u} = 0$ eşitliği için kritik nokta

$$\tilde{u}_\omega = \frac{-2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)t - 1}{2(1 - \alpha)(1 - t)} \quad (4.52)$$

olur. Buradan, $\alpha \in [0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için $\tilde{u}_\omega \leq 0$ olduğu görülür. Bu nedenle, $L(t, u)$ fonksiyonu $u \in [0, 1]$ aralığında en küçük değerini $u = 1$ noktasında alır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} L(t, u) & \geq L(t, 1) = -4(1 - \alpha)^2(1 - t)^2 - 4(1 - \alpha)(2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)t - 1)(1 - t) \\ & + 4(1 - \alpha)^2(3 - 4\alpha)t^2 + 4(1 - \alpha)(2\alpha - 3)t + 2 \\ & = 16(1 - \alpha)^2(1 - 2\alpha)t^2 - 8(1 - \alpha)(2\alpha^2 - 3\alpha + 2)t + 4\alpha(1 - \alpha) + 2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

yazılır. (4.53) ifadesindeki $L(t, 1)$ fonksiyonunun minimum noktasını bulmak için türev alındığında,

$$\frac{\partial L(t, 1)}{\partial t} = -32(1 - \alpha)^2(1 - 2\alpha)t - 8(1 - \alpha)(2\alpha^2 - 3\alpha + 2)$$

olur. $\frac{\partial L(t, 1)}{\partial t} = 0$ eşitliği için kritik nokta

$$\tilde{t}_\omega = \frac{(2\alpha^2 - 3\alpha + 2)}{4(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)} \quad (4.54)$$

olur. Burada $\alpha \in [0, 1)$ için $\tilde{t}_\omega \leq 1$ olduğundan, kritik nokta $t \in [0, 1)$ aralığındadır. Dolayısıyla minimum değer

$$L(t, 1) \geq L(\tilde{t}_\omega, 1) = \frac{-(2\alpha^2 - 3\alpha + 2)^2}{(1 - 2\alpha)} + 4\alpha(1 - \alpha) + 2 \quad (4.55)$$

dir. (4.51) ifadesi ile (4.55) ifadesi karşılaştırıldığında;

$$L(1, u) \geq L(\tilde{t}_\omega, 1) \quad (4.56)$$

olur, yani

$$4\alpha(1 - \alpha)(4\alpha - 5) + 2 \geq \frac{-(2\alpha^2 - 3\alpha + 2)^2}{(1 - 2\alpha)} + 4\alpha(1 - \alpha) + 2 \quad (4.57)$$

dir. Böylece, (4.37), (4.39) ve (4.51) ile birlikte (4.55) dikkate alındığında (4.33) ifadesi ispatlanmış olur. A durumunun ispatı tamamlanır.

B. $y = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $t \in [0, 1]$ ve $\varphi \in [0, 2\pi]$ için

$$T_{3,1}(f) = 4(1 - \alpha)^2(3 - 4\alpha)t^2 - 4(1 - \alpha)t = G(t, 0, \varphi) \quad (4.58)$$

elde edilir. Ayrıca $u = 0$ için daha önce elde edilmiş olan (4.39) ifadesi doğrudur. Bu nedenle, (4.32) ve (4.33) ifadeleri $y = 0$ koşulu altında sağlanır. Böylece, teoremin tüm durumları incelenmiş ve ispat tamamlanmıştır.

4.5. $S_s^*(\varphi)$ Fonksiyon Sınıfı için Başlangıç Katsayılarının Sınırları

Bu kısımda, $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ alt sınıfı için başlangıç katsayılarının sınırları elde edilmiştir.

Teorem 4.5.1: $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

$$|a_3| \leq 3\sqrt{2} - 4$$

$$|a_4| \leq \frac{1}{6}(\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{25549\sqrt{2} - 28698}{4008}}$$

$$|a_5| \leq \frac{211 - 148\sqrt{2}}{8}$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025b). Burada $|a_5|$ katsayısı için verilen tahmin dışında, diğer tüm tahminler kesindir.

İspat: (2.5) ve (2.6) ifadelerinde verilen $p(z)$ ve $\omega(z)$ fonksiyonları (2.7) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots = \frac{1}{2} d_1 z + \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_1^2}{4} \right) z^2 - \left(\frac{d_1 d_2}{4} - \frac{d_3}{2} + \frac{d_1 d_2}{4} - \frac{d_1^3}{8} \right) z^3 + \dots \quad (4.59)$$

elde edilir. (4.59) ifadesindeki eşit üslü terimlerin katsayıları birbirine eşitlendiğinde,

$$c_1 = \frac{d_1}{2}, \quad c_2 = \frac{2d_2 - d_1^2}{4}, \quad c_3 = \frac{4d_3 - 4d_1 d_2 + d_1^3}{8} \quad (4.60)$$

katsayıları elde edilir. $f \in S_s^*(\varphi)$ olduğundan,

$$\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} = \frac{k^2 + \omega^2(z)}{k^2 - k\omega(z)} \quad (4.61)$$

dir. (2.4) ve (2.6) ifadelerinde verilen $f(z)$ ve $\omega(z)$ fonksiyonları (4.61) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & 1 + 2a_2 z + 2a_3 z^2 + (4a_4 - 2a_2 a_3) z^3 + (4a_5 - 2a_2^2) z^4 + \dots \\ & = 1 + \frac{c_1}{k} z + \left(\frac{2c_1^2}{k^2} + \frac{c_2}{k} \right) z^2 + \left(\frac{c_1^3}{k^3} + \frac{c_3}{k} + \frac{3c_1 c_2}{k^2} + \frac{c_1}{k} \left(\frac{c_1^2}{k^2} + \frac{c_2}{k} \right) \right) z^3 \dots \end{aligned} \quad (4.62)$$

elde edilir. (4.60) ifadesinde elde edilen katsayılar, (4.62) ifadesinde yerine yazıldığında ve eşit üslü terimlerin katsayıları birbirine eşitlendiğinde,

$$a_2 = \frac{d_1}{4k} \quad (4.63)$$

$$a_3 = \frac{-kd_1^2 + 2kd_2 + 2d_1^2}{8k^2} \quad (4.64)$$

$$a_4 = \frac{(2k^2 - 9k + 6)d_1^3 + 8k^2 d_3 + 2k(9 - 4k)d_1 d_2}{64k^3} \quad (4.65)$$

$$a_5 = \frac{T}{128k^4} \quad (4.66)$$

katsayıları elde edilir. Burada

$$T = 4k(3k^2 - 13k + 8)d_1^2d_2 - 16k^2(k - 2)d_1d_3 + (13k^2 - 2k^3 - 16k + 8)d_1^4 + 4k^2[(5 - 2k)d_2^2 + 4kd_4]$$

dir. (4.63) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0.2071 \quad (4.67)$$

olur. (4.64) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $|d_n| \leq 2$ için üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_3| \leq \frac{|2-k||d_1^2|+2k|d_2|}{8k^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)^2} = 3\sqrt{2} - 4 \quad (4.68)$$

bulunur. (4.60) ifadesindeki katsayılar (4.65) eşitliğinde yerine yazıldığında, a_4 katsayısı Schwarz katsayıları cinsinden

$$a_4 = \frac{3c_1^3}{4k^3} + \frac{9c_1c_2}{8k^2} + \frac{c_3}{4k} = \frac{1}{4k}(c_3 + \mu c_1c_2 + \nu c_1^3) \quad (4.69)$$

bulunur. Burada,

$$\mu = \frac{9}{2k} \text{ ve } \nu = \frac{3}{k^2}$$

dir. Şimdi $|c_3 + \mu c_1c_2 + \nu c_1^3|$ ifadesinin sınırını hesaplayalım. $k = \sqrt{2} + 1$ için $\mu = \frac{9}{2}(\sqrt{2} - 1)$, $\nu = 3(\sqrt{2} - 1)^2$ dir. Dolayısıyla Lemma 3.6.6'e göre $(\mu, \nu) \in \mathcal{N}$ olduğundan

$$|c_3 + \mu c_1c_2 + \nu c_1^3| \leq \frac{2k+9}{3k} \sqrt{\frac{k(2k+9)}{6k^2+27k+18}} \quad (4.70)$$

elde edilir. (4.70) eşitsizliği, (4.69) ifadesinde yerine yazıldıktan sonra, her iki tarafın modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_4| \leq \frac{2k+9}{12k^2} \sqrt{\frac{k(2k+9)}{6k^2+27k+18}} = \frac{1}{6}(\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{25549\sqrt{2}-28698}{4008}} \quad (4.71)$$

yazılır. Eşitsizlikler

$$\frac{2zf_2'(z)}{f_2(z)-f_2(-z)} = \frac{k^2+\omega^2(z)}{k^2-k\omega(z)}$$

ifadesi için kesindir. Burada

$$\omega(z) = \frac{z \left(\sqrt{\frac{k(2k+9)}{6k^2+27k+18}} - z \right)}{1 - \sqrt{\frac{k(2k+9)}{6k^2+27k+18}} z}$$

dir. (4.66) eşitliğinde $k = \sqrt{2} + 1$ yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{1}{128(\sqrt{2}+1)^4} [17d_1^4 - 4(10 + 3\sqrt{2})d_1^2 d_2 - 16(1 + \sqrt{2})d_1 d_3 + 4d_2^2 + \\ &16(7 + 5\sqrt{2})d_4] \\ &= \frac{1}{128(\sqrt{2}+1)^4} \left[-4(10 + 3\sqrt{2})d_1^2 \left(d_2 - \frac{17}{4(10+3\sqrt{2})} d_1^2 \right) - 16(7 + \right. \\ &\left. 5\sqrt{2}) \left(\frac{1+\sqrt{2}}{7+5\sqrt{2}} d_1 d_3 - d_4 \right) + 4d_2^2 \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$

elde edilir. (4.72) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_5| &\leq \frac{1}{128(\sqrt{2}+1)^4} \left[4(10 + 3\sqrt{2})|d_1^2| \left| d_2 - \frac{17}{4(10+3\sqrt{2})} d_1^2 \right| + 16(7 + \right. \\ &\left. 5\sqrt{2}) \left| \frac{1+\sqrt{2}}{7+5\sqrt{2}} d_1 d_3 - d_4 \right| + 4|d_2^2| \right] \end{aligned} \quad (4.73)$$

elde edilir. (4.73) ifadesinde Lemma 3.6.7 uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_5| &\leq \frac{1}{128(\sqrt{2} + 1)^4} [32(10 + 3\sqrt{2}) + 32(7 + 5\sqrt{2}) + 16] \\ &= \frac{211-148\sqrt{2}}{8} \approx 0,212049 \end{aligned} \quad (4.74)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.6. $S_s^*(\varphi)$ Fonksiyon Sınıfı için Hankel Determinantları

Bu kısımda, $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ alt sınıfı için ikinci ve üçüncü mertebeden Hankel determinantları ile Zalcman fonksiyonelinin üst sınırları elde edilmiştir.

Teorem 4.6.1: $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|H_2(3)(f)| = |a_3 a_5 - a_4^2| \leq \frac{24388\sqrt{2} - 34483}{128} \approx 0,0534$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025b).

İspat: (4.64), (4.65) ve (4.66) eşitlikleri, (3.3) ifadesinde yerine yazıldıktan sonra, her iki tarafın modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|H_2(3)(f)| \leq \frac{1}{4096(\sqrt{2}+1)^6} \left[64(17 + 12\sqrt{2})|d_3^2| + 4(37 + 44\sqrt{2})|d_1^4| \left| \frac{38\sqrt{2}-9}{4(37+44\sqrt{2})} d_1^2 - d_2 \right| + 128(17 + 12\sqrt{2})|d_2| \left| \frac{32(7+5\sqrt{2})}{128(17+12\sqrt{2})} d_1 d_3 - d_4 \right| + 48(5 + 3\sqrt{2})|d_1^2| \left| d_1 d_3 - \frac{64(3+2\sqrt{2})}{48(5+3\sqrt{2})} d_4 \right| + 4(102\sqrt{2} - 113)|d_2^2| \left| d_1^2 - \frac{32(1+\sqrt{2})}{4(102\sqrt{2}-113)} d_2 \right| \right] \quad (4.75)$$

elde edilir. (4.75) ifadesinde Lemma 3.6.7 uygulandığında,

$$|H_2(3)(f)| \leq \frac{1}{4096(\sqrt{2}+1)^6} [256(17 + 12\sqrt{2}) + 128(37 + 44\sqrt{2}) + 512(17 + 12\sqrt{2}) + 384(5 + 3\sqrt{2}) + 32(102\sqrt{2} - 113)] \leq \frac{24388\sqrt{2}-34483}{128} \approx 0,0534 \quad (4.76)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.6.2: $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|J_2| = |a_3 a_4 - a_2 a_5| \leq \frac{43 - 30\sqrt{2}}{8} \approx 0,0716$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025b).

İspat: (4.63), (4.64), (4.65) ve (4.66) eşitlikleri, (3.19) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{512k^5} (4(k+1)d_1^5 + 16kd_1^3d_2 + 8k^2(k-2)d_1^2d_3 - 8k^2(k-2)d_1d_2^2 + 16k^3d_2d_3 - 16k^3d_1d_4) \\ &= \frac{1}{512k^5} (I_1 + 16k^3d_2d_3 - 8k^2(k-2)d_1d_2^2 - 16k^3d_1d_4) \end{aligned} \quad (4.77)$$

elde edilir. Burada

$$I_1 = 4(k+1)d_1^5 + 16kd_1^3d_2 + 8k^2(k-2)d_1^2d_3 \quad (4.78)$$

dir. (4.77) ifadesinde her iki tarafın modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|J_2| \leq \frac{1}{512k^5} \left(|I_1| + 16k^3|d_2d_3| + 16k^3|d_1| \left| d_4 - \frac{(k-2)}{2k} d_2^2 \right| \right) \quad (4.79)$$

yazılır. (4.60) ifadesindeki eşitlikler, (4.78) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$I_1 = 32c_1^2[2k^2(k-2)c_3 + 4(k^3 - 2k^2 + 2k)c_1c_2 + 2(k^3 - 2k^2 + 6k + 2)c_1^3] \quad (4.80)$$

bulunur. (4.80) eşitliğinin her iki tarafının modülü alındığında,

$$|I_1| = 64k^2(k-2)|c_1^2|[c_3 + \mu c_1c_2 + \nu c_1^3] \quad (4.81)$$

olur. Burada $\mu = \frac{2(k^2-2k+2)}{k(k-2)}$ ve $\nu = \frac{k^3-2k^2+6k+2}{k^2(k-2)}$ dir. $k = \sqrt{2} + 1$ için $\mu = 6$, $\nu = 2\sqrt{2} + 5$ dir. Dolayısıyla Lemma 3.6.6'e göre $(\mu, \nu) \in \mathcal{N}$ olduğundan (4.81) ifadesinde Lemma 3.6.6 uygulandığında,

$$|I_1| \leq 64k^2(k-2) \left| \frac{k^3-2k^2+6k+2}{k^2(k-2)} \right| \approx 64(9 + 7\sqrt{2}) \quad (4.82)$$

yazılır. (4.82) eşitsizliği (4.79) ifadesinde yerine yazılır, daha sonra Lemma 3.6.7 uygulandığında,

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{1}{512(\sqrt{2}+1)^5} \left[64(9 + 7\sqrt{2}) + 128(\sqrt{2}+1)^3 \right] \\ &\leq \frac{43-30\sqrt{2}}{8} \approx 0,0716 \end{aligned} \quad (4.83)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.6.3: $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)(f)| \leq 0,0817$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025b).

İspat: (4.63)- (4.65) eşitlikleri (3.2) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$H_2(2) = \frac{1}{256k^4} [(-2k^2 + 7k - 10)d_1^4 + (8k^2 - 14k)d_1^2d_2 + 8k^2d_1d_3 - 16k^2d_2^2] \quad (4.84)$$

bulunur. (4.84) eşitliğinde her iki tarafın modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |H_2(2)| &\leq \frac{1}{256(\sqrt{2}+1)^4} \left[(3\sqrt{2} - 9)|d_1^4| + (24 + 16\sqrt{2})|d_1d_3| + 16(3 + \right. \\ &\quad \left. 2\sqrt{2})|d_2| \left| d_2 - \frac{(10+2\sqrt{2})}{16(3+2\sqrt{2})} d_1^2 \right| \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

elde edilir. (4.85) eşitsizliğinde Lemma 3.6.7 uygulandığında,

$$\begin{aligned}
|H_2(2)| &\leq \frac{1}{256(\sqrt{2}+1)^4} [16(3\sqrt{2}-9) + 16(6+4\sqrt{2}) + 64(3+2\sqrt{2})] \\
&\leq \frac{3(49\sqrt{2}-69)}{16} \approx 0,055587
\end{aligned} \tag{4.86}$$

bulunur. (3.4) ifadesinde her iki tarafın modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|H_3(1)(f)| = |H_2(3) + a_2J_2 + a_3H_2(2)| \leq |H_2(3)| + |a_2||J_2| + |a_3||H_2(2)| \tag{4.87}$$

yazılır. Teorem 4.5.1, (4.76), (4.83), (4.86) ifadelerinde elde edilen sonuçlar, (4.87) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
|H_3(1)| &\leq 0,053440 + (0,207106) \cdot (0,071699) + (0,242640) \cdot (0,055587) \\
&= 0,081776
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.7. $S_s^*(\varphi)$ Fonksiyon Sınıfı için Hermitian-Toeplitz Determinantları

Bu kısımda, $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ alt sınıfı için ikinci ve üçüncü mertebeden Hermitian-Toeplitz determinantlarının alt ve üst sınırları elde edilmiştir.

Teorem 4.7.1: $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{2\sqrt{2}+1}{4} \leq |T_{2,1}(f)| \leq 1$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025b).

İspat: (4.63) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \tag{4.88}$$

olur. (4.88) eşitsizliği, (3.16) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\frac{2\sqrt{2}+1}{4} \leq |T_{2,1}(f)| \leq 1$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Bu sınırlar,

$$f_1(z) = z + \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)}z^2 + \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}z^3 + \dots$$

ile tanımlanan fonksiyon için en iyi alt sınırı verir.

Teorem 4.7.2: $f(z) \in S_s^*(\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$0,8995 \approx 7\sqrt{2} - 9 \leq |T_{3,1}(f)| \leq 1 \quad (4.89)$$

dir. Bu sınırlar mümkün olan en iyi sınırlardır (Buyankara & Çağlar, 2025b).

İspat: (4.63) ve (4.64) eşitlikleri (3.17) ifadesinde yerine yazılır ve $\zeta \in \bar{\mathcal{U}}$ için, Lemma 3.6.5 uygulandığında,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(a_2^2\overline{a_3}) &= \frac{d_1^2}{64k^4}\operatorname{Re}((2-k)d_1^2 + 2kd_2) \\ &= \frac{d_1^2}{64k^4}[(2-k)d_1^2 + k\operatorname{Re}(2\overline{d_2})] \\ &= \frac{d_1^2}{64k^4}[2d_1^2 + (4-d_1^2)k\operatorname{Re}(\zeta)] \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$2|a_2|^2 = \frac{d_1^2}{8k^2} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} |a_3|^2 &= \frac{1}{64k^4}[(2-k)^2d_1^4 + k^2|2d_2|^2 + 2k(2-k)d_1^2\operatorname{Re}(2\overline{d_2})] \\ &= \frac{1}{64k^4}[(2-k)^2d_1^4 + k^2(d_1^2 + (4-d_1^2)\zeta)^2 + 2k(2-k)d_1^2(2\overline{d_2})] \\ &= \frac{1}{64k^4}[(2-k)^2d_1^4 + k^2(d_1^4 + 2d_1^2(4-d_1^2)\operatorname{Re}(\zeta) + (4-d_1^2)^2|\zeta|^2) + \\ &\quad 2k(2-k)d_1^2(d_1^2 + (4-d_1^2)\operatorname{Re}(\bar{\zeta}))] \end{aligned} \quad (4.92)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.90), (4.91) ve (4.92) eşitlikleri (3.17) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} |T_{3,1}(f)| &= 1 + \frac{d_1^2}{64k^4}[2d_1^2 + k(4-d_1^2)\operatorname{Re}(\zeta)] - \frac{d_1^2}{8k^2} - \frac{1}{64k^4}[(2-k)^2d_1^4 + \\ &\quad k^2d_1^4 + 2k^2d_1^2(4-d_1^2)\operatorname{Re}(\zeta) + k^2(4-d_1^2)^2|\zeta|^2 + 2k(2-k)d_1^4 + \\ &\quad 2k(2-k)d_1^2(4-d_1^2)\operatorname{Re}(\zeta)] \\ &= 1 + \left(\frac{2 - ((2-k)^2 + k^2 + 2k(2-k))}{64k^4} \right) d_1^4 - \frac{k^2(4-d_1^2)^2}{64k^4} |\zeta|^2 + \\ &\quad \left(\frac{k d_1^2(4-d_1^2) - 2k^2 d_1^2(4-d_1^2) - 2k(2-k) d_1^2(4-d_1^2)}{64k^4} \right) \operatorname{Re}(\zeta) - \frac{d_1^2}{8k^2} \end{aligned}$$

$$|T_{3,1}(f)| = 1 - \frac{2}{64k^4}d_1^4 - \frac{3(4-d_1^2)d_1^2}{64k^3}Re(\zeta) - \frac{k^2(4-d_1^2)^2}{64k^4}|\zeta|^2 - \frac{d_1^2}{8k^2} = F(d_1^2, |\zeta|, Re(\zeta)) \quad (4.93)$$

elde edilir. $-Re(\zeta) \leq |\zeta|$ olduğundan, üst sınır için $Re(\zeta) = -|\zeta|$, alt sınır için $Re(\zeta) = |\zeta|$ alındığında,

$$|T_{3,1}(f)| \leq F(d_1^2, |\zeta|, -|\zeta|) \text{ ve } |T_{3,1}(f)| \geq F(d_1^2, |\zeta|, |\zeta|) \quad (4.94)$$

yazılır. Bu nedenle, (4.93) eşitliği

$$|T_{3,1}(f)| \leq 1 - \frac{2}{64k^4}d_1^4 + \frac{3(4-d_1^2)d_1^2}{64k^3}|\zeta| - \frac{(4-d_1^2)^2}{64k^2}|\zeta|^2 - \frac{d_1^2}{8k^2} = F(d_1^2, |\zeta|) \quad (4.95)$$

şeklinde yazılır. (4.95) ifadesinde $d_1^2 = x \in [0,4]$ ve $|\zeta| = y \in [0,1]$ yazıldığında,

$$|T_{3,1}(f)| \leq 1 - \frac{2}{64k^4}x^2 + \frac{3(4-x)x}{64k^3}y - \frac{(4-x)^2}{64k^2}y^2 - \frac{x}{8k^2} = F(x, y) \quad (4.96)$$

elde edilir. $F(x, y)$ fonksiyonunun $(0,4) \times (0,1)$ dikdörtgensel bölgesinde maksimum değerini belirlemek için öncelikle sınır değerler üzerinde inceleme yapıldığında;

(4.96) ifadesinde $\forall y \in [0,1]$ için, $x = 0$ ve $x = 4$ yazıldığında, sırasıyla

$$F(0, y) = 1 - \frac{y^2}{4k^2} \leq 1$$

ve

$$F(4, y) = \frac{2k^4 - 1 - k^2}{2k^4} = 7\sqrt{2} - 9 \approx 0,89949$$

değerleri elde edilir. (4.96) ifadesinde $\forall x \in [0,4]$ için, $y = 0$ ve $y = 1$ yazıldığında, sırasıyla

$$F(x, 0) = 1 - \frac{x}{8k^2} - \frac{2x^2}{64k^4}$$

ve

$$F(x, 1) = 1 - \frac{2}{64k^4}x^2 + \frac{3(4-x)x}{64k^3} - \frac{(4-x)^2}{64k^2} - \frac{x}{8k^2}$$

değerleri elde edilir.

$|T_{3,1}(f)|$ ifadesinin maksimum değerini bulmak için $F(x, 0)$, $F(x, 1)$ fonksiyonlarının türevi alındığında,

$$\frac{\partial F(x, 0)}{\partial x} = -\frac{x}{16k^4} - \frac{1}{8k^2} = 0$$

ve

$$\frac{\partial F(x, 1)}{\partial x} = -\frac{x}{16k^4} + \frac{12 - 6x}{64k^3} - \frac{(2x - 8)}{64k^2} - \frac{1}{8k^2} = 0$$

dir. Dolayısıyla $x \in [0, 4]$ için $F'(x, 0)$ fonksiyonunun kritik noktası $x = -2k^2$ olur. Burada $k = \sqrt{2} + 1$ için bu değer aralık dışında kaldığı için dikkate alınmaz. Dolayısıyla $F'(x, 1)$ fonksiyonunun kritik noktası $x = \frac{9\sqrt{2}-6}{7}$ olur. Bu nokta $[0, 4]$ aralığında olduğundan $F(x, 1)$ fonksiyonunda yerine yazıldığında ve $k = \sqrt{2} + 1$ alındığında

$$F\left(\frac{9\sqrt{2}-6}{7}, 1\right) = \frac{113}{56} - \frac{167\sqrt{2}}{224} \approx 0,96$$

bulunur. Tüm sınır ve kritik noktalar dikkate alındığında

$$|T_{3,1}(f)| \leq \max\left\{F(0, y), F(4, y), F\left(\frac{9\sqrt{2}-6}{7}, 1\right)\right\} = \max\{1, 0.8994, 0.96\} = 1$$

yazılır.

$|T_{3,1}(f)|$ ifadesinin minimum değerini bulmak için (4.93) eşitliğinde (4.94) ifadesi dikkate alındığında,

$$|T_{3,1}(f)| \geq 1 - \frac{2}{64k^4}d_1^4 - \frac{3(4-d_1^2)d_1^2}{64k^3}|\zeta| - \frac{(4-d_1^2)^2}{64k^2}|\zeta|^2 - \frac{d_1^2}{8k^2} = G(d_1^2, |\zeta|) \quad (4.97)$$

elde edilir. (4.97) ifadesinde $d_1^2 = x \in [0, 4]$ ve $|\zeta| = y \in [0, 1]$ yazıldığında,

$$|T_{3,1}(f)| \geq 1 - \frac{2}{64k^4}x^2 - \frac{3(4-x)x}{64k^3}y - \frac{(4-x)^2}{64k^2}y^2 - \frac{x}{8k^2} = G(x, y) \quad (4.98)$$

bulunur. $G(x, y) \geq G(x, 1)$ olduğundan, $G(x, 1)$ fonksiyonunun minimum değerini bulmak yeterlidir.

$$G(x, 1) = 1 - \frac{2}{64k^4}x^2 - \frac{3(4-x)x}{64k^3} - \frac{(4-x)^2}{64k^2} - \frac{x}{8k^2} \quad (4.99)$$

dir. $|T_{3,1}(f)|$ ifadesinin minimum değerini bulmak için $G(x, 1)$ fonksiyonunun türevi alındığında,

$$\frac{\partial G(x, 1)}{\partial x} = -\frac{x}{16k^4} - \frac{(12 - 6x)}{64k^3} - \frac{(2x - 8)}{64k^2} - \frac{1}{8k^2} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla fonksiyonun kritik noktası $x = -(9\sqrt{2} + 12) \approx -24,7279$ dir.

Bu nedenle $G(x, 1)$ fonksiyonunun $(0,4) \times (0,1)$ bölgesinde bir kökü yoktur. (4.99) ifadesinde sırasıyla $x = 0$ ve $x = 4$ yazıldığında, sırasıyla

$$G(0,1) = 1 - \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,9571$$

ve

$$G(4,1) = \frac{-1 - k^2 + 2k^4}{2k^4} = 7\sqrt{2} - 9 \approx 0,8995$$

değerleri elde edilir. Tüm sınır ve kritik noktalar dikkate alındığında,

$$|T_{3,1}(f)| \geq \min\{G(0,1), G(4,1)\} \approx \min\{0,9571, 0,8995\} = 0,8995$$

sonucu elde edilir. (4.89) ifadesinde üst sınır eşitliği

$$\frac{2zf_1'(z)}{f_1(z) - f_1(-z)} = 1 + \frac{z(z+k)}{k-z}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon için elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.8. $S_T^*(\lambda)$ Fonksiyon Sınıfı için Başlangıç Katsayılarının Sınırları

Bu kısımda, $f(z) \in S_T^*(\lambda)$ alt sınıfı için başlangıç katsayılarının sınırları elde edilmiştir.

Teorem 4.8.1: $f(z) \in S_T^*(\lambda)$ ve $1 \leq \lambda < 5$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{1}{2}$$

$$|a_3| \leq \frac{\lambda + 1}{4}$$

$$|a_4| \leq \frac{15\lambda + 7}{48}$$

$$|a_5| \leq \frac{3\lambda^2 + 18\lambda + 2}{48}$$

$$|a_6| \leq \frac{19}{96}\lambda^2 + \frac{21}{48}\lambda + \frac{49}{720}$$

dir. Burada tüm tahminler kesindir (Buyankara & Çağlar, 2025d).

İspat: $f \in S_T^*(\lambda)$ olduğundan,

$$\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} = \phi(\omega(z)) \quad (4.100)$$

eşitliği sağlanır. (2.5) ile verilen $p(z)$ fonksiyonu, (2.7) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{p(z)-1}{p(z)+1} = \frac{d_1}{2}z + \frac{1}{2}\left(d_2 - \frac{d_1^2}{2}\right)z^2 + \frac{1}{2}\left(d_3 - d_1d_2 + \frac{d_1^3}{4}\right)z^3 \\ &+ \frac{1}{2}\left(d_4 - d_1d_3 + \frac{3d_1^2d_2}{4} - \frac{d_2^2}{2} - \frac{d_1^4}{8}\right)z^4 \\ &+ \frac{1}{2}\left(d_5 - \frac{1}{2}d_1^3d_2 + \frac{3}{4}d_1d_2^2 + \frac{3}{4}d_1^2d_3 - d_2d_3 - d_1d_4 + \frac{1}{16}d_1^5\right)z^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.101)$$

olur. (4.101) ifadesi (3.23) eşitliğindeki $\phi(z)$ fonksiyonunda yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \phi(\omega(z)) &= 1 + \frac{d_1}{2}z + \frac{1}{8}((-1+\lambda)d_1^2 + 4d_2)z^2 + \frac{1}{48}((1-3\lambda)d_1^3 + 12(-1+\lambda)d_1d_2 + 24d_3)z^3 \\ &+ \frac{1}{384}((1+6\lambda+3\lambda^2)d_1^4 + 24(1-3\lambda)d_1^2d_2 + 96(-1+\lambda)d_1d_3 + 48((-1+\lambda)d_2^2 + 4d_4))z^4 \\ &+ \frac{\left((-19+10\lambda-45\lambda^2)d_1^5 + 40(1+6\lambda+3\lambda^2)d_1^3d_2 - 240(-1+3\lambda)d_1^2d_3 - 240d_1((-1+3\lambda)d_2^2 - 4(-1+\lambda)d_4) + 960((-1+\lambda)d_2d_3 + 2d_5)\right)}{3840}z^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.102)$$

elde edilir. (2.4) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} &= 1 + 2a_2z + 2a_3z^2 + (4a_4 - 2a_2a_3)z^3 + (4a_5 - 2a_3^2)z^4 \\ &- (2a_2(a_5 - a_3^2) - 6a_6 + 4a_3a_4)z^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.103)$$

bulunur. (4.102) ve (4.103) eşitlikleri (4.100) ifadesinde yerine yazılır ve eşit üslü terimlerin katsayıları eşitlendiğinde,

$$a_2 = \frac{d_1}{4} \quad (4.104)$$

$$a_3 = \frac{1}{16}((-1+\lambda)d_1^2 + 4d_2) \quad (4.105)$$

$$a_4 = \frac{1}{384}((-1-3\lambda)d_1^3 + 12(-1+2\lambda)d_1d_2 + 48d_3) \quad (4.106)$$

$$a_5 = \frac{1}{768}((3\lambda^2 + 2)d_1^4 - 24\lambda d_1^2d_2 + 48(-1+\lambda)d_1d_3 + 24\lambda d_2^2 + 96d_4) \quad (4.107)$$

$$a_6 = \frac{\left(\begin{array}{l} (-38+60\lambda-105\lambda^2)d_1^5+120(3\lambda^2+2)d_1^3d_2-960\lambda d_1^2d_3 \\ -840\lambda d_1d_2^2+480(4\lambda-3)d_1d_4+960(2\lambda-1)d_2d_3+3840d_5 \end{array} \right)}{46080} \quad (4.108)$$

katsayıları elde edilir.

a_j ($j = 2,3,4,5$) terimlerinin katsayıları $\lambda \geq 1$ için pozitif olduğundan, (4.104) – (4.107) eşitliklerinde her iki tarafın modülü alınıp $|d_n| \leq 2$ ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_2| &\leq \frac{1}{2} \\ |a_3| &= \frac{1}{16} ((-1 + \lambda)|d_1|^2 + 4|d_2|) \leq \frac{\lambda + 1}{4} \\ |a_4| &= \frac{1}{384} ((1 + 3\lambda)|d_1|^3 + 12(-1 + 2\lambda)|d_1||d_2| + 48|d_3|) \leq \frac{15\lambda+7}{48} \\ |a_5| &= \frac{(|(3\lambda^2+2)d_1^4+48(-1+\lambda)d_1d_3+96d_4|+24\lambda|d_2||d_2-d_1^2|)}{768} \leq \frac{3\lambda^2+18\lambda+2}{48} \end{aligned}$$

katsayı sınırları elde edilir. (4.108) eşitliğinde her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_6| &= \frac{\left| \begin{array}{l} -(105\lambda^2-60\lambda+38)d_1^5+120(3\lambda^2+2)d_1^3d_2-960\lambda d_1^2d_3 \\ -840\lambda d_1d_2^2+480(4\lambda-3)d_1d_4+960(2\lambda-1)d_2d_3+3840d_5 \end{array} \right|}{46080} \\ &\leq \frac{\left(\begin{array}{l} |(105\lambda^2-60\lambda+38)d_1^5+120(3\lambda^2+2)d_1^3d_2+840\lambda d_1d_2^2| \\ +480(4\lambda-3)d_1d_4 \\ +|960(2\lambda-1)d_2d_3-960\lambda d_1^2d_3|+3840|d_5| \end{array} \right)}{46080} \end{aligned} \quad (4.109)$$

bulunur. (4.109) eşitsizliğindeki $|960(2\lambda - 1)d_2d_3 - 960\lambda d_1^2d_3|$ ifadesi

$$|960(2\lambda - 1)d_2d_3 - 960\lambda d_1^2d_3| = 960(2\lambda - 1)|d_3| \left| d_2 - \frac{\lambda}{2\lambda-1} d_1^2 \right| \quad (4.110)$$

şeklinde elde edilir. (4.110) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadeye Lemma 3.6.7 uygulandığında, $\lambda \geq 1$ için $\mu = \frac{\lambda}{2\lambda-1} \leq 1$ olduğundan,

$$\left| d_2 - \frac{\lambda}{2\lambda-1} d_1^2 \right| \leq 2 \quad (4.111)$$

yazılır. (4.111) ifadesi ve $|d_n| \leq 2$, (4.110) eşitliğinde dikkate alındığında,

$$960(2\lambda - 1)|d_3| \left| d_2 - \frac{\lambda}{2\lambda-1} d_1^2 \right| \leq 3840(2\lambda - 1) \quad (4.112)$$

bulunur. (4.112) ifadesi ve $|d_n| \leq 2$, (4.109) eşitsizliğinde göz önüne alındığında,

$$|a_6| \leq \frac{19}{96}\lambda^2 + \frac{21}{48}\lambda + \frac{49}{720}$$

elde edilir.

$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ekstremal fonksiyonu,

$$f(z) = z \exp \left(\int_0^z \frac{\phi(t) - 1}{t} dt \right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun kuvvet serisi açılımı

$$f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{\lambda+1}{4}z^3 + \frac{15\lambda+7}{48}z^4 + \frac{3\lambda^2+18\lambda+2}{48}z^5 + \left(\frac{19}{96}\lambda^2 + \frac{21}{48}\lambda + \frac{49}{720} \right)z^6 + \dots \quad (4.113)$$

şeklindedir. Hesaplanan değerlerle birebir örtüşen katsayılar, bu sonuçların kesin olduğunu göstermektedir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.8.2: $f(z) \in S_T^*(1)$ sınıfındaki fonksiyonlar için katsayılar aşağıdaki şekilde sınırlandırılmıştır:

$$|a_2| \leq \frac{1}{2}, |a_3| \leq \frac{1}{2}, |a_4| \leq \frac{11}{24}, |a_5| \leq \frac{23}{48}, |a_6| \leq \frac{1013}{1440}$$

Burada belirtilen sınırlar kesindir.

2019 yılında Kumar ve arkadaşı (Kumar vd., 2019), Bell sayıları ile ilişkili yıldızlı fonksiyonların alt sınıfı olan $\frac{zf'(z)}{f(z)} < Q(z)$ fonksiyon sınıfını tanımlamışlardır. Bu sınıf için bazı kesin katsayı sınırları elde etmişlerdir. Elde edilen sonuçlar şu şekildedir:

$$|a_2| \leq 1, |a_3| \leq 1, |a_4| \leq \frac{17}{18}, |a_5| \leq \frac{245}{288}, |a_6| \leq \frac{5309}{7200}$$

2021 yılında Deniz (2021), genelleştirilmiş Telefon sayıları ile ilişkili yıldızlı fonksiyonların alt sınıfı olan $\frac{zf'(z)}{f(z)} < \Phi(z)$ fonksiyon sınıfını tanımlamıştır. Bu sınıf için bazı kesin katsayı sınırları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar şu şekildedir:

$$|a_2| \leq 1, |a_3| \leq 1, |a_4| \leq \frac{8}{9}, |a_5| \leq \frac{107}{144}, |a_6| \leq \frac{2381}{3600}$$

Bu sonuçlar, Sonuç 4.8.2 ile karşılaştırıldığında, elde ettiğimiz sonuçların daha iyi olduğu görülmektedir.

4.9. $S_T^*(\lambda)$ Fonksiyon Sınıfı için Toeplitz Determinantları

Bu kısımda, $f(z) \in S_T^*(\lambda)$ alt sınıfı için ikinci ve üçüncü mertebeden Toeplitz determinantlarının üst sınırları elde edilmiştir.

Teorem 4.9.1: $f(z) \in S_T^*(\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)(f)| \leq \begin{cases} \frac{\lambda + 13}{8}, & 1 \leq \lambda \leq 3 \\ \frac{\lambda^2 + 23}{16}, & 3 < \lambda < 5 \end{cases}$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025d).

İspat: (4.104) ve (4.105) ifadeleri (3.13) eşitliğinde yerine yazılıp sonrasında her iki tarafın modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |T_3(1)(f)| &= |1 - 2a_2^2 + 2a_2^2a_3 - a_3^2| \\ &\leq 1 + 2|a_2|^2 + |a_3||a_3 - 2a_2^2| \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{\lambda+1}{4}\right)|a_3 - 2a_2^2| \end{aligned} \quad (4.114)$$

yazılır. (4.114) ifadesindeki $|a_3 - 2a_2^2|$ fonksiyoneli hesaplamak için (4.104) ve (4.105) ifadeleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_3 - 2a_2^2 &= \frac{1}{16} ((-1 + \lambda)d_1^2 + 4d_2) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 d_1^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(d_2 - \frac{(3-\lambda)}{4} d_1^2 \right) \end{aligned} \quad (4.115)$$

bulunur. (4.115) ifadesinde her iki tarafın modülü alındığında,

$$|a_3 - 2a_2^2| = \frac{1}{4} \left| d_2 - \frac{(3-\lambda)}{4} d_1^2 \right| \quad (4.116)$$

yazılır. (4.116) eşitliğinin sağ tarafındaki $\left| d_2 - \frac{(3-\lambda)}{4} d_1^2 \right|$ ifadesinde $1 \leq \lambda \leq 3$ için $0 \leq \mu = \frac{3-\lambda}{4} \leq 1$ olduğundan Lemma 3.6.7 ye göre,

$$\left| d_2 - \frac{(3-\lambda)}{4} d_1^2 \right| \leq 2 \quad (4.117)$$

dir. (4.117) eşitsizliği (4.116) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|a_3 - 2a_2^2| \leq \frac{1}{2} \quad (4.118)$$

bulunur. (4.118) eşitsizliği (4.114) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|T_3(1)(f)| \leq \frac{\lambda + 13}{8}$$

olur. (4.116) eşitsizliğinin sağ tarafındaki $\left| d_2 - \frac{(3-\lambda)}{4} d_1^2 \right|$ ifadesinde $3 < \lambda < 5$ için Lemma 3.6.7 uygulandığında,

$$\left| d_2 - \frac{(3-\lambda)}{4} d_1^2 \right| \leq \lambda - 1 \quad (4.119)$$

elde edilir. (4.119) eşitsizliği (4.116) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|a_3 - 2a_2^2| \leq \frac{\lambda-1}{4} \quad (4.120)$$

bulunur. (4.120) eşitsizliği (4.114) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|T_3(1)(f)| \leq \frac{\lambda^2 + 23}{16}$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.9.1 de $\lambda = 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.9.2: $f(z) \in S_T^*(1)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)(f)| \leq 1,75$$

dir.

Teorem 4.9.1 de $\lambda = 2$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.9.3: $f(z) \in S_T^*(2)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)(f)| \leq 1,875$$

dir.

Teorem 4.9.4: $f(z) \in S_T^*(\lambda)$ ve $\frac{11}{6} \leq \lambda < 5$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)(f)| \leq \frac{1}{4608} (15\lambda + 31)(12\lambda^2 + 15\lambda + 31)$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025d).

İspat: (3.14) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında,

$$|T_3(2)(f)| = |(a_2 - a_4)(a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2)| \quad (4.121)$$

yazılır. (4.121) ifadesindeki $|a_2 - a_4|$ fonksiyoneli hesaplandığında,

$$|a_2 - a_4| \leq |a_2| + |a_4| \quad (4.122)$$

olduğundan, (4.104) ve (4.106) eşitlikleri (4.122) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|a_2 - a_4| \leq \frac{15\lambda+31}{48} \quad (4.123)$$

bulunur. Son olarak, (4.104) – (4.106) eşitlikleri (4.121) ifadesinde yer alan $|a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2|$ fonksiyoneline yerine yazıldığında,

$$a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2 = \frac{d_1^2}{16} - \frac{d_2^2}{8} - \frac{(6\lambda-7)}{128}d_1^2d_2 + \frac{d_1d_3}{32} - \frac{(12\lambda^2-21\lambda+13)}{1536}d_1^4 \quad (4.124)$$

elde edilir. (4.124) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2| &\leq \frac{|d_1^2|}{16} + \frac{|d_2^2|}{8} + \frac{|12\lambda^2-21\lambda+13|}{1536}|d_1^4| \\ &+ \frac{|d_1|}{32} \left| d_3 - \frac{(6\lambda-7)}{4}d_1d_2 \right| \end{aligned} \quad (4.125)$$

bulunur. (4.125) eşitsizliğindeki $\left| d_3 - \frac{(6\lambda-7)}{4}d_1d_2 \right|$ ifadesine Lemma 3.6.4 uygulandığında,

$$\left| d_3 - \frac{(6\lambda-7)}{4}d_1d_2 \right| \leq 6\lambda - 9 \quad (4.126)$$

olur. (4.126) ifadesi (4.125) eşitsizliğinde yerine yazıldığında,

$$|a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2| \leq \frac{12\lambda^2+15\lambda+31}{96} \quad (4.127)$$

bulunur. Böylece, (4.122) ve (4.127) eşitsizlikleri, (4.121) ifadesinde yerine yazıldığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|T_3(2)(f)| \leq \frac{1}{4608} (15\lambda + 31)(12\lambda^2 + 15\lambda + 31)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.9.4 de $\lambda = \frac{11}{6}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.9.5: $f(z) \in S_T^* \left(\frac{11}{6} \right)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)(f)| \leq 1,255$$

dir.

Teorem 4.9.4 de $\lambda = 2$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.9.6: $f(z) \in S_T^*(2)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)(f)| \leq 1,4429$$

dir.

4.10. $S_T^*(\lambda)$ Fonksiyon Sınıfı için Hermitian-Toeplitz Determinantları

Bu kısımda, $S_T^*(\lambda)$ alt sınıfı için ikinci ve üçüncü mertebeden Hermitian–Toeplitz determinantlarının alt ve üst sınırları elde edilmiştir.

Teorem 4.10.1: $f(z) \in S_T^*(\lambda)$ ve $1 \leq \lambda < 5$ olsun. Bu durumda

$$\frac{3}{4} \leq |T_{2,1}(f)| \leq 1$$

$$\frac{3}{4} \leq |T_{3,1}(f)| \leq 1$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025d).

İspat: (4.104) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$|a_2| \leq \frac{1}{2} \tag{4.128}$$

olur. (4.128) eşitsizliği, (3.16) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|T_{2,1}(f)| = 1 - |a_2|^2 = 1 - \left|\frac{d_1}{4}\right|^2 \leq 1$$

bulunur. Diğer taraftan (4.128) eşitsizliğinden,

$$|T_{2,1}(f)| \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\frac{3}{4} \leq |T_{2,1}(f)| \leq 1 \tag{4.129}$$

elde edilir. (4.104) ve (4.105) eşitlikleri (3.17) ifadesinde yerine yazıldığında ve $\zeta \in \bar{\mathcal{U}}$ için, Lemma 3.6.5 uygulandığında,

$$\begin{aligned} 2Re(a_2^2 \bar{a}_3) &= 2Re \left[\frac{d_1^2}{16} \cdot \frac{1}{16} \left((\lambda - 1)d_1^2 + 4\bar{d}_2 \right) \right] \\ &= \left(\frac{d_1^2}{256} \right) 2Re[(\lambda - 1)d_1^2 + 4(\bar{d}_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d_1^2}{256} [4(d_1^2 + (4 - d_1^2))Re\zeta + 2(\lambda - 1)d_1^2] \\
&= \frac{d_1^2}{256} [4d_1^2 + 2(\lambda - 1)d_1^2 + 4(4 - d_1^2)Re\zeta] \\
&= \frac{d_1^2}{256} [2(\lambda + 1)d_1^2 + 4(4 - d_1^2)Re\zeta], \tag{4.130}
\end{aligned}$$

$$2|a_2|^2 = \frac{d_1^2}{8}, \tag{4.131}$$

ve

$$\begin{aligned}
|a_3|^2 &= \frac{1}{256} |(\lambda - 1)d_1^2 + 4d_2|^2 \\
&= \frac{1}{256} [(\lambda - 1)^2 d_1^4 + 16|d_2|^2 + 8(\lambda - 1)d_1^2 Re(\overline{d_2})] \\
&= \frac{1}{256} [(\lambda - 1)^2 d_1^4 + 16|d_2|^2 + 8(\lambda - 1)d_1^2 d_2] \\
&= \frac{1}{256} \left[(\lambda - 1)^2 d_1^4 + 16 \left| \frac{1}{2} (d_1^2 + (4 - d_1^2)\zeta) \right|^2 + 8(\lambda - 1)d_1^2 \left(\frac{1}{2} (d_1^2 + (4 - d_1^2)\zeta) \right) \right] \\
&= \frac{1}{256} [(\lambda + 1)^2 d_1^4 + 4(\lambda + 1)d_1^2 (4 - d_1^2)Re(\zeta) + 4(4 - d_1^2)^2 |\zeta|^2] \tag{4.132}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.17) ifadesinde (4.130), (4.131) ve (4.132) eşitlikleri sırasıyla yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
|T_{3,1}(f)| &= 1 + \frac{d_1^2}{256} [2(\lambda + 1)d_1^2 + 4(4 - d_1^2)Re\zeta] - \frac{d_1^2}{8} \\
&\quad - \frac{1}{256} [(\lambda + 1)^2 d_1^4 + 4(4 - d_1^2)^2 |\zeta|^2 + 4(\lambda + 1)d_1^2 (4 - d_1^2)Re(\zeta)] \\
&= \frac{(1-\lambda^2)}{256} d_1^4 - \frac{4\lambda}{256} (4 - d_1^2)d_1^2 Re(\zeta) - \frac{4(4-d_1^2)^2}{256} |\zeta|^2 - \frac{32}{256} d_1^2 + 1 \\
&= F(d_1^2, |\zeta|, Re(\zeta)) \tag{4.133}
\end{aligned}$$

elde edilir. $-Re(\zeta) \leq |\zeta|$ olduğundan, üst sınır için $Re(\zeta) = -|\zeta|$, alt sınır için $Re(\zeta) = |\zeta|$ alındığında,

$$|T_{3,1}(f)| \leq F(d_1^2, |\zeta|, -|\zeta|) \text{ ve } |T_{3,1}(f)| \geq F(d_1^2, |\zeta|, |\zeta|) \tag{4.134}$$

olur. Bu nedenle, (4.133) ifadesi

$$|T_{3,1}(f)| \leq \frac{(1-\lambda^2)}{256} d_1^4 + \frac{4\lambda}{256} (4 - d_1^2)d_1^2 |\zeta| - \frac{4(4-d_1^2)^2}{256} |\zeta|^2 - \frac{32}{256} d_1^2 + 1$$

$$= F(d_1^2, |\zeta|) \quad (4.135)$$

şeklinde yazılır. (4.135) ifadesinde $d_1^2 = x \in [0,4]$ ve $|\zeta| = y \in [0,1]$ yazıldığında,

$$\begin{aligned} |T_{3,1}(f)| &\leq 1 + \frac{1}{256} [(1 - \lambda^2)x^2 + 4\lambda(4 - x)xy - 4(4 - x)^2y^2 - 32x] \\ &= F(x, y) \end{aligned} \quad (4.136)$$

bulunur. $F(x, y)$ fonksiyonunun $(0,4) \times (0,1)$ dikdörtgensel bölgesinde maksimum değerini belirlemek için öncelikle sınır değerler üzerinde inceleme yapıldığında

(4.136) ifadesinde $\forall y \in [0,1]$ için, $x = 0$ ve $x = 4$ yazıldığında, sırasıyla

$$F(0, y) = 1 - \frac{y^2}{4} \leq 1$$

ve

$$F(4, y) = 1 - \frac{1}{16}(\lambda^2 + 7) \leq 1$$

değerleri elde edilir. Benzer şekilde, (4.136) ifadesinde $\forall x \in [0,4]$ için, $y = 0$ ve $y = 1$ yazıldığında, sırasıyla

$$F(x, 0) = 1 - \frac{1}{256}[(\lambda^2 - 1)x^2 + 32x] \leq 1$$

ve

$$F(x, 1) = 1 - \frac{1}{256}[(\lambda^2 + 4\lambda + 3)x^2 - 16\lambda x + 64] \leq 1$$

değerleri elde edilir.

İkinci türev testine göre $(0,4) \times (0,1)$ bölgesinde $|T_{3,1}(f)|$ ifadesinin herhangi bir kritik noktası yoktur. Dolayısıyla, yapılan sınır analizleri doğrultusunda, fonksiyonun ekstremal değerlerini yalnızca bölgenin sınır noktalarında aldığı sonucuna varılır.

Buna göre tüm sınır ve kritik noktalar dikkate alındığında

$$|T_{3,1}(f)| \leq \max\{F(0, y), F(4, y), F(x, 0), F(x, 1)\} = 1 \quad (4.137)$$

sonucu elde edilir. $|T_{3,1}(f)|$ ifadesinin minimum değerini bulmak için (4.133) ifadesinde, (4.134) eşitsizliği dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} |T_{3,1}(f)| &\geq \frac{(1-\lambda^2)}{256}d_1^4 - \frac{4\lambda}{256}(4 - d_1^2)d_1^2 Re(\zeta) - \frac{4(4-d_1^2)^2}{256}|\zeta|^2 - \frac{32}{256}d_1^2 + 1 \\ &= G(d_1^2, |\zeta|) \end{aligned} \quad (4.138)$$

yazılır. (4.138) ifadesinde $d_1^2 = x \in [0,4]$ ve $|\zeta| = y \in [0,1]$ yazıldığında,

$$\begin{aligned} |T_{3,1}(f)| &\geq 1 - \frac{1}{256} [(\lambda^2 - 1)x^2 + 4(4 - x)^2 y^2 + 32x + 4\lambda(4 - x)xy] \\ &= G(x, y) \end{aligned} \quad (4.139)$$

bulunur. $G(x, y)$ fonksiyonunun $(0,4) \times (0,1)$ dikdörtgensel bölgesinde minimum değerinin belirlenmesi için öncelikle sınır değerler üzerinde inceleme yapıldığında,

(4.139) ifadesinde $\forall y \in [0,1]$ için, $x = 0$ ve $x = 4$ yazıldığında, sırasıyla

$$G(0, y) = 1 - \frac{y^2}{4} \leq 1$$

ve

$$G(4, y) = 1 - \frac{1}{16} (\lambda^2 + 7) \leq 1$$

değerleri elde edilir. Aynı şekilde, (4.139) ifadesinde $\forall x \in [0,4]$ için, $y = 0$ ve $y = 1$ yazıldığında ise, sırasıyla

$$G(x, 0) = 1 - \frac{1}{256} [(\lambda^2 - 1)x^2 + 32x] \leq 1$$

ve

$$G(x, 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{256} [(\lambda^2 - 4\lambda + 3)x^2 + 16\lambda x] \leq \frac{3}{4}$$

değerleri elde edilir. Buna göre tüm sınır ve kritik noktalar dikkate alındığında

$$|T_{3,1}(f)| \geq \min\{G(x, 1), G(x, 0)\} = \min\left\{\frac{3}{4}, 1\right\} = \frac{3}{4} \quad (4.140)$$

sonucu elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.11. $N(\beta)$ Fonksiyon Sınıfı İçin Başlangıç Katsayıları

Bu kısımda, $f(z) \in N(\beta)$ alt sınıfı için başlangıç katsayıları aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

Lemma 4.11.1: $f(z) \in N(\beta)$ ve $0 \leq \beta < 1$ olsun. Bu durumda

$$a_2 = (1 - \beta)d_1 + 2 \quad (4.141)$$

$$a_3 = (1 - \beta)(d_2 + 2d_1) + 3 \quad (4.142)$$

$$a_4 = (1 - \beta)(d_3 + 2d_2 + 3d_1) + 4 \quad (4.143)$$

$$a_5 = (1 - \beta)(d_4 + 2d_3 + 3d_2 + 4d_1) + 5 \quad (4.144)$$

dir. Burada d_1, d_2, d_3 ve d_4 , (2.5) ifadesinde verilen $p(z)$ fonksiyonun katsayılarıdır (Buyankara & Çağlar, 2025f).

İspat: $\beta \in [0,1)$ ve $f \in N(\beta)$ olsun. $N(\beta)$ sınıfının tanımına göre, her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\frac{1}{(1-\beta)} \left[(1-z)^2 \frac{f(z)}{z} - \beta \right] = p(z) \quad (4.145)$$

olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ vardır. (2.4) ve (2.5) ifadelerinde verilen $f(z)$ ve $p(z)$ fonksiyonları (4.145) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & 1 + (a_2 - 2)z + (a_3 - 2a_2 + 1)z^2 + (a_4 - 2a_3 + a_2)z^3 + (a_5 - 2a_4 + a_3)z^4 + \dots \\ &= 1 + (1 - \beta)d_1z + (1 - \beta)d_2z^2 + (1 - \beta)d_3z^3 + (1 - \beta)d_4z^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.146)$$

elde edilir. (4.146) ifadesindeki eşit üslü terimlerin katsayıları birbirine eşitlendiğinde (4.141) – (4.144) ifadeleri elde edilir. Böylece Lemma 4.11.1 ispatlanmış olur.

4.12. $N(\beta)$ Fonksiyon Sınıfı için Hankel Determinantı

Bu kısımda, $f(z) \in N(\beta)$ alt sınıfı için ikinci mertebeden Hankel determinantının kesin üst sınırı elde edilmiştir.

Teorem 4.12.1: $f(z) \in N(\beta)$ ve $\frac{1}{5} \leq \beta < 1$ olsun. Bu durumda

$$|H_2(2)(f)| \leq (1 - \beta) \left[\frac{8\sqrt{6}(1+\beta)^{3/2}}{9\sqrt{\beta}} + 4(2 - \beta) \right] + 1 \quad (4.147)$$

dir. Bu eşitsizlik kesindir (Buyankara & Çağlar, 2025f).

İspat: Lemma 4.11.1 de verilen (4.141) – (4.143) ifadeleri (3.2) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} H_2(2)(f) &= -(1 - \beta)^2 d_1^2 - 2(1 - \beta)d_1 - 2(1 - \beta)^2 d_1 d_2 \\ &\quad - 2(1 - \beta)d_2 + 2(1 - \beta)d_3 + (1 - \beta)^2 d_1 d_3 - (1 - \beta)^2 d_2^2 - 1 \end{aligned} \quad (4.148)$$

bulunur. $f(z)$ fonksiyonu birim çember rotasyonu yani $f(z) \rightarrow e^{i\theta} f(z)$ altında korunduğundan $N(\beta)$ sınıfı ve $H_2(2)(f)$ fonksiyoneli de bu dönüşüm altında korunur. Bu nedenle, Lemma 3.6.5 de verilen d_2 ve d_3 ifadeleri (4.148) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
H_2(2)(f) &= -\frac{1}{2}(2\beta - 1)(\beta - 1)u^3 - (\beta - 1)(\beta - 2)u^2 - \frac{(1-\beta)^2}{4}(4 - u^2)u^2y^2 - 2(1 - \beta)u + \beta(1 - \beta)(4 - u^2)uy - (1 - \beta)(4 - u^2)y - \\
&\quad \frac{(1-\beta)}{2}(4 - u^2)uy^2 - \frac{(1-\beta)^2}{4}(4 - u^2)^2y^2 + (1 - \beta)(4 - u^2)(1 - |y|^2)\zeta + \\
&\quad \frac{(1-\beta)^2}{2}(4 - u^2)u(1 - |y|^2)\zeta - 1 \\
&= -\frac{1}{2}(2\beta - 1)(\beta - 1)u^3 - (\beta - 1)(\beta - 2)u^2 - 2(1 - \beta)u - \frac{(1-\beta)}{2}(4 - u^2)(u + 2 - 2\beta)y^2 + \beta(1 - \beta)(4 - u^2)uy - (1 - \beta)(4 - u^2)y + (1 - \beta)(4 - u^2)(1 - |y|^2)\zeta + \frac{(1-\beta)^2}{2}(4 - u^2)u(1 - |y|^2)\zeta - 1. \tag{4.149}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.149) eşitliğinde her iki tarafın modülü alındığında ve ardından üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned}
|H_2(2)(f)| &\leq \frac{1}{2}(1 - 2\beta)(1 - \beta)u^3 + (1 - \beta)(2 - \beta)u^2 + 2(1 - \beta)u + \\
&\quad \frac{(1-\beta)}{2}(4 - u^2)(u + 2 - 2\beta)|y|^2 + \beta(1 - \beta)(4 - u^2)u|y| + (1 - \beta)(4 - u^2)|y| + (1 - \beta)(4 - u^2)(1 - |y|^2) + \frac{(1-\beta)^2}{2}(4 - u^2)u(1 - |y|^2) + 1 \\
&= \frac{1}{2}(2\beta - 1)(1 - \beta)u^3 + (1 - \beta)(2 - \beta)u^2 + 2(1 - \beta)u + \frac{\beta(1-\beta)}{2}(4 - u^2)(u - 2)|y|^2 + (1 - \beta)(4 - u^2)(u\beta + 1)|y| + \frac{(1-\beta)^2}{2}(4 - u^2)u + (1 - \beta)(4 - u^2) + 1 \tag{4.150}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.150) eşitliğinin sağ tarafında $|y| = \mu$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
|H_2(2)(l)| &\leq \frac{1}{2}(1 - 2\beta)(1 - \beta)u^3 + (1 - \beta)(2 - \beta)u^2 + 2(1 - \beta)u + \\
&\quad \frac{\beta(1-\beta)}{2}(4 - u^2)(u - 2)\mu^2 + (1 - \beta)(4 - u^2)(u\beta + 1)\mu + \frac{(1-\beta)^2}{2}(4 - u^2)u + \\
&\quad (1 - \beta)(4 - u^2) + 1 = \phi(u, \mu) \tag{4.151}
\end{aligned}$$

bulunur. $|y| = \mu$ olup, Lemma 3.6.5 göre $y \leq 1$ ve mutlak değer özelliği nedeniyle $0 \leq \mu \leq 1$ alınır. Burada

$$\begin{aligned}
\phi(u, \mu) &= \frac{1}{2}(1 - 2\beta)(1 - \beta)u^3 + (1 - \beta)(2 - \beta)u^2 + 2(1 - \beta)u + \\
&\quad \frac{\beta(1-\beta)}{2}(4 - u^2)(u - 2)\mu^2 + (1 - \beta)(4 - u^2)(u\beta + 1)\mu + \frac{(1-\beta)^2}{2}(4 - u^2)u + \\
&\quad (1 - \beta)(4 - u^2) + 1. \tag{4.152}
\end{aligned}$$

dir. Şimdi $\phi(u, \mu)$ fonksiyonu $[0, 2] \times [0, 1]$ dikdörtgensel bölge üzerinde maksimize etmek için (4.152) eşitliğindeki $\phi(u, \mu)$ fonksiyonunun türevi alındığında,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \beta(1 - \beta)(4 - u^2)(u - 2)\mu + (4 - u^2)(1 - \beta)(u\beta + 1) \quad (4.153)$$

bulunur. $0 < u < 2$ ve $0 < \mu < 1$ için (4.153) ifadesinden

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} > 0$$

dir. Bu durumda $\phi(u, \mu)$, μ değişkenine göre artan bir fonksiyondur. Bundan dolayı maksimum değerini iç noktada alamaz. Dolayısıyla, sabit $u \in [0, 2]$ için maksimum değer $\mu = 1$ noktasında alınır. Dolayısıyla

$$\max_{0 \leq \mu \leq 1} \phi(u, \mu) = \phi(u, 1) = \Psi(u) \quad (4.154)$$

olsun. (4.152) ve (4.154) eşitliğinden

$$\Psi(u) = (1 - \beta)[-2\beta u^3 + 4(1 + \beta)u + 4(2 - \beta)] + 1 \quad (4.155)$$

yazılır. $\Psi(u)$ fonksiyonunun maksimum değerini bulmak için türev alındığında

$$\Psi'(u) = (1 - \beta)[-6\beta u^2 + 4(1 + \beta)] = 0 \quad (4.156)$$

bulunur. (4.156) ifadesinde, $0 \leq u \leq 2$ ve $\frac{1}{5} \leq \beta < 1$ için kritik nokta $u_c = \sqrt{\frac{2(1+\beta)}{3\beta}}$ dir.

Dolayısıyla $\Psi(u)$ fonksiyonu monoton artan veya monoton azalan olmadığı için maksimum değerini $u = 0$ veya $u = 2$ sınırında değil, $u = u_c$ iç noktasında alır. (4.155) eşitliğinden, maksimum değer:

$$\max_{0 \leq u \leq 2} \Psi(u) = \Psi(u_c) = (1 - \beta)[-2\beta u_c^3 + 4(1 + \beta)u_c + 4(2 - \beta)] + 1 \quad (4.157)$$

dir. Dolayısıyla $u_c = \sqrt{\frac{2(1+\beta)}{3\beta}}$ kritik noktası (4.157) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|H_2(2)(l)| \leq \Psi(u_c) = (1 - \beta) \left[\frac{8\sqrt{6}}{9} \frac{(1 + \beta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\beta}} + 4(2 - \beta) \right] + 1$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.12.1 ispatlanmış olur.

Teorem 4.12.1 de $\beta = \frac{1}{5}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.12.2: $f(z) \in N\left(\frac{1}{5}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|H_2(2)(f)| \leq 11,88$$

dir.

Teorem 4.12.1 de $\beta = \frac{1}{2}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.12.3: $f(z) \in N\left(\frac{1}{2}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|H_2(2)(f)| \leq 6,828$$

dir.

Lecko and Sim (2019) da

$$|H_2(2)(f)| \leq 17$$

sonucunu elde etmiştir (Lecko & Sim, 2019). Buna karşılık, bu çalışmada $\beta = \frac{1}{2}$ için

$$|H_2(2)(f)| \leq 6,828$$

eşitsizliği elde edilmiştir. Dolayısıyla, elde edilen sonuç söz konusu parametre için literatürdeki mevcut sonuca göre daha iyi bir üst sınırdır.

4.13. $N(\beta)$ Fonksiyon Sınıfı için Toeplitz Determinantları

Bu kısımda, $f(z) \in N(\beta)$ alt sınıfı için ikinci ve üçüncü mertebeden Toeplitz determinantlarının üst sınırı elde edilmiştir.

Teorem 4.13.1: $f(z) \in N(\beta)$ ve $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)(f)| \leq 92\beta^2 - 272\beta + 204$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025e).

İspat: Lemma 4.11.1 de verilen (4.141) ve (4.142) ifadeleri (3.13) eşitliğinde yerine yazıldığında, elde edilen ifadenin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |T_3(1)(f)| &= |1 - 2a_2^2 + 2a_2^2a_3 - a_3^2| \\ &\leq 1 + 2|a_2|^2 + |a_3||a_3 - 2a_2^2| \\ &\leq 9 + 8(1 - \beta)^2 + 16(1 - \beta) + (9 - 6\beta)|a_3 - 2a_2^2| \end{aligned} \quad (4.158)$$

yazılır. (4.158) ifadesindeki $|a_3 - 2a_2^2|$ fonksiyoneli hesaplamak için (4.141) ve (4.142) ifadeleri yerine yazıldığında,

$$a_3 - 2a_2^2 = (1 - \beta)(d_2 - 2(1 - \beta)d_1^2 - 6d_1) - 5 \quad (4.159)$$

bulunur. (4.159) eşitliğinde her iki tarafın modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_3 - 2a_2^2| \leq (1 - \beta)|d_2 - 2(1 - \beta)d_1^2| + 12(1 - \beta) + 5 \quad (4.160)$$

yazılır. (4.160) eşitsizliğinin sağ tarafındaki $|d_2 - 2(1 - \beta)d_1^2|$ ifadesine Lemma 3.6.3 uygulandığında,

$$|d_2 - 2(1 - \beta)d_1^2| \leq 2 \quad (4.161)$$

olur. (4.161) ifadesi (4.160) eşitsizliğinde yerine yazıldığında,

$$|a_3 - 2a_2^2| \leq 19 - 14\beta \quad (4.162)$$

bulunur. (4.162) eşitsizliği (4.158) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} |T_3(1)(f)| &\leq 9 + 8(1 - \beta)^2 + 16(1 - \beta) + (9 - 6\beta)(19 - 14\beta) \\ &\leq 92\beta^2 - 272\beta + 204 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.13.1 de $\beta = \frac{9}{10}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.13.2: $f(z) \in N\left(\frac{9}{10}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)(f)| \cong 33,72$$

dir.

Teorem 4.13.1 de $\beta = \frac{99}{100}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.13.3: $f(z) \in N\left(\frac{99}{100}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)(f)| \cong 24,88$$

dir.

Teorem 4.13.4: $f(z) \in N(\beta)$ ve $0 \leq \beta < 1$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)(f)| \leq -504\beta^3 + 1616\beta^2 - 1756\beta + 680$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025e).

İspat: (3.14) eşitliğinin her iki tarafının modülü alındığında,

$$|T_3(2)(f)| = |(a_2 - a_4)(a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2)| \quad (4.163)$$

yazılır. (4.163) eşitliğindeki $|a_2 - a_4|$ fonksiyonelini hesaplamak için

$$|a_2 - a_4| \leq |a_2| + |a_4| \quad (4.164)$$

eşitsizliği dikkate alındığında ve (4.141) ve (4.143) eşitlikleri (4.164) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$|a_2 - a_4| \leq 14(1 - \beta) + 6 \quad (4.165)$$

bulunur. Son olarak, (4.141) – (4.143) eşitlikleri (4.163) ifadesinde yer alan $|a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2|$ fonksiyoneline yerine yazıldığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2| &\leq (1 - \beta)[10d_1 - (1 - \beta)d_1d_3 + 2(1 - \beta)d_2^2] \\ &+ 8(1 - \beta) \left| d_2 - \frac{(\beta-1)}{2}d_1^2 \right| + 6 + 2(1 - \beta)|d_3 - 3(1 - \beta)d_1d_2| \end{aligned} \quad (4.166)$$

elde edilir. (4.166) ifadesinin sağ tarafına Lemma 3.6.3 ve Lemma 3.6.4 uygulandığında,

$$\left| d_2 - \frac{(\beta-1)}{2}d_1^2 \right| \leq 2(2 - \beta) \quad (4.167)$$

$$|d_3 - 3(1 - \beta)d_1d_2| \leq 2(5 - 6\beta) \quad (4.168)$$

bulunur. (4.167) ve (4.168) ifadeleri, (4.166) eşitsizliğinde dikkate alındığında,

$$|a_2^2 + a_2a_4 - 2a_3^2| \leq 4(1 - \beta)(7 - 9\beta) + 6 \quad (4.169)$$

bulunur. Böylece, (4.165) ve (4.169) eşitsizlikleri (4.163) ifadesinde yerine yazıldığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|T_3(2)(l)| \leq -504\beta^3 + 1616\beta^2 - 1756\beta + 680$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.13.4 de $\beta = \frac{9}{10}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.13.5: $f(z) \in N\left(\frac{9}{10}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)(f)| \cong 41,14$$

dir.

Teorem 4.13.4 de $\beta = \frac{99}{100}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.13.6: $f(z) \in N\left(\frac{99}{100}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)(f)| \cong 36,37$$

dir.

4.14. K_S Fonksiyon Sınıfı için Zalcman Tahminleri ve Katsayı Sınırları

Bu kısımda, $f(z) \in K_S$ alt sınıfı için Zalcman tahminlerinin üst sınırları elde edilmiştir.

Teorem 4.14.1: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|a_2^2 - a_3| \leq \frac{1}{3}$$

dir. Bu eşitsizlik kesindir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: $f \in K_S$ olduğundan

$$\frac{2[zf'(z)]'}{[f(z)-f(-z)]'} = p(z) \quad (4.170)$$

eşitliği sağlanır. (2.4) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \frac{2[zf'(z)]'}{[f(z)-f(-z)]'} &= 1 + 4a_2z + 6a_3z^2 + (16a_4 - 12a_2a_3)z^3 + (20a_5 - 18a_3^2)z^4 \\ &\quad - (48a_3a_4 - 36a_6 + 4a_2(5a_5 - 9a_3^2))z^5 \\ &\quad - (60a_3a_5 - 42a_7 + 6a_3(5a_5 - 9a_3^2))z^6 \end{aligned} \quad (4.171)$$

yazılır. (2.5) ile verilen $p(z)$ fonksiyonu ve (4.171) eşitlikleri (4.170) ifadesinde yerine yazıldığında ve eşit üslü terimlerin katsayıları birbirine eşitlendiğinde,

$$a_2 = \frac{d_1}{4} \quad (4.172)$$

$$a_3 = \frac{d_2}{6} \quad (4.173)$$

$$a_4 = \frac{1}{32}(d_1d_2 + 2d_3) \quad (4.174)$$

$$a_5 = \frac{1}{40}(d_2^2 + 2d_4) \quad (4.175)$$

$$a_6 = \frac{1}{288}(4d_2d_3 + d_1(d_2^2 + 2d_4) + 8d_5) \quad (4.176)$$

$$a_7 = \frac{1}{336}(d_2^3 + 6d_2d_4 + 8d_6) \quad (4.177)$$

katsayıları elde edilir. (4.172) ve (4.173) eşitlikleri $n = 2$ için (3.21) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$a_2^2 - a_3 = \frac{d_1^2}{16} - \frac{d_2}{6} \quad (4.178)$$

bulunur. (4.178) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_2^2 - a_3| \leq \frac{1}{6} \left| \frac{3}{8} d_1^2 - d_2 \right| \quad (4.179)$$

yazılır. (4.179) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_2^2 - a_3| \leq \frac{1}{3}$$

olur. Eşitsizlik,

$$\frac{2[zf'(z)]'}{[f(z) - f(-z)]'} = \frac{1 + z^2}{1 - z^2} = 1 + 2z^2 + 2z^4 + \dots$$

fonksiyon için kesindir. Bu fonksiyon için katsayılar $a_2 = 0$ ve $a_3 = \frac{1}{3}$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$|a_2^2 - a_3| = \frac{1}{3}$$

eşitliği sağlanmaktadır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.14.2: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|a_2 a_4 - a_5| \leq \frac{1}{5}$$

dir. Bu eşitsizlik kesindir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (3.20) ifadesinde $m = 2, n = 4$ için (4.172), (4.174) ve (4.175) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_2 a_4 - a_5 &= \frac{1}{128} (d_1^2 d_2 + 2d_1 d_3) - \frac{1}{40} (d_2^2 + 2d_4) \\ &= \frac{1}{40} d_2 \left(\frac{5}{16} d_1^2 - d_2 \right) + \frac{1}{20} \left(\frac{5}{16} d_1 d_3 - d_4 \right) \end{aligned} \quad (4.180)$$

elde edilir. (4.180) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_2 a_4 - a_5| \leq \frac{1}{40} |d_2| \left| \frac{5}{16} d_1^2 - d_2 \right| + \frac{1}{20} \left| \frac{5}{16} d_1 d_3 - d_4 \right| \quad (4.181)$$

yazılır. (4.181) eşitsizliğinin sağ tarafındaki $\left| \frac{5}{16} d_1^2 - d_2 \right|$ ve $\left| \frac{5}{16} d_1 d_3 - d_4 \right|$ ifadelerinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_2 a_4 - a_5| \leq \frac{1}{5}$$

bulunur. Eşitsizlik

$$\frac{2[zf'(z)]'}{[f(z) - f(-z)]'} = \frac{1+z^2}{1-z^2} = 1 + 2z^2 + 2z^4 + 2z^6 + \dots$$

fonksiyon için kesindir. Bu fonksiyon için katsayılar $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = 0$ ve $a_5 = \frac{1}{5}$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$|a_2 a_4 - a_5| = \frac{1}{5}$$

eşitliği sağlanmaktadır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.14.3: $f(z) \in K_\delta$ olsun. Bu durumda

$$|a_4^2 - a_7| \leq \frac{55}{378}$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (3.21) ifadesinde $n = 4$ için (4.174) ve (4.177) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_4^2 - a_7 &= \frac{1}{1024} (d_1^2 d_2^2 + 4d_1 d_2 d_3 + 4d_3^2) - \frac{1}{336} (d_2^3 + 6d_2 d_4 + 8d_6) \\ &= \frac{1}{336} d_2^2 \left(\frac{21}{64} d_1^2 - d_2 \right) + \frac{1}{54} d_2 \left(\frac{27}{128} d_1 d_3 - d_4 \right) + \frac{1}{42} \left(\frac{21}{128} d_3^2 - d_6 \right) \end{aligned} \quad (4.182)$$

elde edilir. (4.182) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_4^2 - a_7| &\leq \frac{1}{336} |d_2^2| \left| \frac{21}{64} d_1^2 - d_2 \right| + \frac{1}{54} |d_2| \left| \frac{27}{128} d_1 d_3 - d_4 \right| \\ &\quad + \frac{1}{42} \left| \frac{21}{128} d_3^2 - d_6 \right| \end{aligned} \quad (4.183)$$

yazılır. (4.183) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_4^2 - a_7| \leq \frac{55}{378}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.14.4: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|a_3 a_4 - a_6| \leq \frac{7}{72}$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (3.20) ifadesinde $m = 3, n = 4$ için, (4.173), (4.174) ve (4.176) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_3 a_4 - a_6 &= \frac{1}{192} (d_1 d_2^2 + 2d_2 d_3) - \frac{1}{288} (4d_2 d_3 + d_1 d_2^2 + 2d_1 d_4 + 8d_5) \\ &= \frac{1}{288} d_2 \left(\frac{1}{2} d_1 d_2 - d_3 \right) - \frac{1}{36} \left(\frac{1}{4} d_1 d_4 + d_5 \right) \end{aligned} \quad (4.184)$$

elde edilir. (4.184) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_3 a_4 - a_6| \leq \frac{1}{288} |d_2| \left| \frac{1}{2} d_1 d_2 - d_3 \right| + \frac{1}{36} \left| \frac{1}{4} d_1 d_4 + d_5 \right| \quad (4.185)$$

yazılır. (4.185) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_3 a_4 - a_6| \leq \frac{7}{72}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.14.5: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|a_2 a_3 - a_4| \leq \frac{1}{8}$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (3.20) ifadesinde $m = 2, n = 3$ için (4.172), (4.173) ve (4.174) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$a_2 a_3 - a_4 = \frac{d_1 d_2}{96} - \frac{d_3}{16} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{6} d_1 d_2 - d_3 \right) \quad (4.186)$$

bulunur. (4.186) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_2 a_3 - a_4| \leq \frac{1}{16} \left| \frac{1}{6} d_1 d_2 - d_3 \right| \quad (4.187)$$

yazılır. (4.187) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_2 a_3 - a_4| \leq \frac{1}{8}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.14.6: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|a_3^2 - a_5| \leq \frac{1}{10}$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (3.21) ifadesinde $n = 3$ için, (4.173) ve (4.175) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$a_3^2 - a_5 = \frac{d_2^2}{36} - \frac{1}{40} (d_2^2 + 2d_4) = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{18} d_2^2 - d_4 \right) \quad (4.188)$$

bulunur. (4.188) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_3^2 - a_5| \leq \frac{1}{20} \left| \frac{1}{18} d_2^2 - d_4 \right| \quad (4.189)$$

yazılır. (4.189) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_3^2 - a_5| \leq \frac{1}{10}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.14.7: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|a_2 a_5 - a_6| \leq \frac{1}{9}$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (3.20) ifadesinde $m = 2, n = 5$ için, (4.172), (4.175) ve (4.176) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$a_2 a_5 - a_6 = \frac{1}{160} (d_1 d_2^2 + 2d_4) - \frac{1}{288} (4d_2 d_3 + d_1 d_2^2 + 2d_1 d_4 + 8d_5)$$

$$= \frac{1}{72}d_2 \left(\frac{1}{5}d_1d_2 - d_3 \right) + \frac{1}{36} \left(\frac{1}{5}d_1d_4 - d_5 \right) \quad (4.190)$$

bulunur. (4.190) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_2a_5 - a_6| \leq \frac{1}{72}|d_2| \left| \frac{1}{5}d_1d_2 - d_3 \right| + \frac{1}{36} \left| \frac{1}{5}d_1d_4 - d_5 \right| \quad (4.191)$$

yazılır. (4.191) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_2a_5 - a_6| \leq \frac{1}{9}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.15. K_S Fonksiyon Sınıfı için Hankel Determinantları

Bu kısımda, $f(z) \in K_S$ alt sınıfı için ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden Hankel determinantları ile ilgili üst sınır değerleri elde edilmiştir.

Teorem 4.15.1: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|H_2(2)| \leq \frac{25}{144} \cong 0,1736$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.172) – (4.174) eşitlikleri (3.2) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} H_2(2) &= \frac{1}{128}(d_1^2d_2 + 2d_1d_3) - \frac{d_2^2}{36} \\ &= \frac{1}{36}d_2 \left(\frac{9}{32}d_1^2 - d_2 \right) + \frac{d_1d_3}{64} \end{aligned} \quad (4.192)$$

bulunur. (4.192) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|H_2(2)| \leq \frac{1}{36}|d_2| \left| \frac{9}{32}d_1^2 - d_2 \right| + \frac{|d_1d_3|}{64} \quad (4.193)$$

yazılır. (4.193) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|H_2(2)| \leq \frac{25}{144} \cong 0,1736 \quad (4.194)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.15.2: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)| \leq \frac{673}{4320} \cong 0,1557$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.172) – (4.174) eşitlikleri (3.4) ifadesindeki $(a_2a_4 - a_3^2)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_2a_4 - a_3^2 &= \frac{1}{128}(d_1^2d_2 + 2d_1d_3) - \frac{d_2^2}{36} \\ &= \frac{1}{36}d_2\left(\frac{9}{32}d_1^2 - d_2\right) + \frac{d_1d_3}{64} \end{aligned} \quad (4.195)$$

bulunur. (4.195) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{36}|d_2|\left|\frac{9}{32}d_1^2 - d_2\right| + \frac{|d_1d_3|}{64} \quad (4.196)$$

yazılır. (4.196) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{25}{144} \quad (4.197)$$

bulunur. (4.172) – (4.174) eşitlikleri (3.4) ifadesindeki $(a_2a_3 - a_4)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_2a_3 - a_4 &= \frac{d_1d_2}{96} - \frac{d_3}{16} \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{6}d_1d_2 - d_3\right) \end{aligned} \quad (4.198)$$

bulunur. (4.198) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{1}{16}\left|\frac{1}{6}d_1d_2 - d_3\right| \quad (4.199)$$

yazılır. (4.199) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{1}{8} \quad (4.200)$$

bulunur. (4.172), (4.173) eşitlikleri (3.4) ifadesindeki $(a_3 - a_2^2)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_3 - a_2^2 &= \frac{d_2}{6} - \frac{d_1^2}{16} \\ &= -\frac{1}{6} \left(\frac{3}{8} d_1^2 - d_2 \right) \end{aligned} \quad (4.201)$$

bulunur. (4.201) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{6} \left| \frac{3}{8} d_1^2 - d_2 \right| \quad (4.202)$$

yazılır. (4.202) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{3} \quad (4.203)$$

bulunur. (3.4) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|H_3(1)| \leq |a_3| |a_2 a_4 - a_3^2| + |a_4| |a_2 a_3 - a_4| + |a_5| |a_3 - a_2^2| \quad (4.204)$$

yazılır. (4.173) – (4.175) eşitlikleri ile birlikte (4.197), (4.200) ve (4.203) eşitsizlikleri (4.204) ifadesinde yerine yazıldığında ve ardından Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|H_3(1)| \leq \frac{673}{4320} \cong 0,1557$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.15.3: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(2)| \leq \frac{3637}{57600} \cong 0,0631$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.174) – (4.176) eşitlikleri (3.5) ifadesindeki $(a_4 a_6 - a_5^2)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$a_4 a_6 - a_5^2 = \frac{1}{9216} (d_1 d_2 + 2d_3)(4d_2 d_3 + d_1 d_2^2 + 2d_1 d_4 + 8d_5)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{1600}(d_2^4 + 4d_2^2d_4 + 4d_4^2) \\
& = \frac{1}{9216}(4d_1d_2^2d_3 + d_1^2d_2^3 + 2d_1^2d_2d_4 + 8d_1d_2d_5 + 8d_2d_3^2 + 2d_1d_2^2d_3 + \\
& 4d_1d_3d_4 + 16d_3d_5) - \frac{d_2^4}{1600} - \frac{d_2^2d_4}{400} - \frac{d_4^2}{400} \\
& = \frac{d_1d_2^2d_3}{1536} + \frac{d_1^2d_2^3}{9216} + \frac{d_1^2d_2d_4}{4608} + \frac{d_1d_2d_5}{1152} + \frac{d_2d_3^2}{1152} + \frac{d_1d_3d_4}{2304} + \frac{d_3d_5}{576} \\
& - \frac{d_2^4}{1600} - \frac{d_2^2d_4}{400} - \frac{d_4^2}{400} \\
& = \frac{1}{1600}d_2^3\left(\frac{25}{144}d_1^2 - d_2\right) + \frac{1}{400}d_2^2\left(\frac{25}{96}d_1d_3 - d_4\right) + \frac{1}{576}d_3\left(\frac{1}{2}d_2d_3 + d_5\right) \\
& + \frac{1}{400}d_4\left(\frac{25}{144}d_1d_3 - d_4\right) + \frac{1}{1152}d_1d_2\left(\frac{1}{4}d_1d_4 + d_5\right) \tag{4.205}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.205) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned}
|a_4a_6 - a_5^2| & \leq \frac{1}{1600}|d_2^3|\left|\frac{25}{144}d_1^2 - d_2\right| + \frac{1}{400}|d_2^2|\left|\frac{25}{96}d_1d_3 - d_4\right| \\
& + \frac{1}{576}|d_3|\left|\frac{1}{2}d_2d_3 + d_5\right| + \frac{1}{400}|d_4|\left|\frac{25}{144}d_1d_3 - d_4\right| \\
& + \frac{1}{1152}|d_1d_2|\left|\frac{1}{4}d_1d_4 + d_5\right| \tag{4.206}
\end{aligned}$$

yazılır. (4.206) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_4a_6 - a_5^2| \leq \frac{463}{7200} \tag{4.207}$$

elde edilir. (4.173) – (4.176) eşitlikleri (3.5) ifadesindeki $(a_3a_6 - a_4a_5)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
a_3a_6 - a_4a_5 & = \frac{1}{1728}(4d_2^2d_3 + d_1d_2^3 + 2d_1d_2d_4 + 8d_2d_5) \\
& - \frac{1}{1280}(2d_2^2d_3 + d_1d_2^3 + 2d_1d_2d_4 + 4d_3d_4) \\
& = \frac{13}{17280}d_2^2d_3 - \frac{7}{34560}d_1d_2^3 - \frac{7}{17280}d_1d_2d_4 + \frac{1}{216}d_2d_5 - \frac{1}{320}d_3d_4 \\
& = \frac{1}{320}d_3\left(\frac{13}{108}d_2^2 - d_4\right) - \frac{13}{34560}d_2^2\left(\frac{7}{13}d_1d_2 - d_3\right)
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{216} d_2 \left(\frac{7}{80} d_1 d_4 - d_5 \right) \quad (4.208)$$

elde edilir. (4.208) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_3 a_6 - a_4 a_5| &\leq \frac{1}{320} |d_3| \left| \frac{13}{108} d_2^2 - d_4 \right| + \frac{13}{34560} |d_2^2| \left| \frac{7}{13} d_1 d_2 - d_3 \right| + \\ &\frac{1}{216} |d_2| \left| \frac{7}{80} d_1 d_4 - d_5 \right| \end{aligned} \quad (4.209)$$

yazılır. (4.209) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_3 a_6 - a_4 a_5| \leq \frac{27}{864} \quad (4.210)$$

bulunur. (4.173) – (4.175) eşitlikleri (3.5) ifadesindeki $(a_3 a_5 - a_4^2)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_3 a_5 - a_4^2 &= \frac{1}{240} (d_2^3 + 2d_2 d_4) - \frac{1}{1024} (d_1^2 d_2^2 + 4d_1 d_2 d_3 + 4d_3^2) \\ &= \frac{1}{240} d_2^3 + \frac{1}{120} d_2 d_4 - \frac{1}{1024} d_1^2 d_2^2 - \frac{1}{256} d_1 d_2 d_3 - \frac{1}{256} d_3^2 \\ &= -\frac{1}{240} d_2^2 \left(\frac{15}{64} d_1^2 - d_2 \right) - \frac{1}{120} d_2 \left(\frac{15}{32} d_1 d_3 - d_4 \right) - \frac{1}{256} d_3^2 \end{aligned} \quad (4.211)$$

elde edilir. (4.211) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|a_3 a_5 - a_4^2| \leq \frac{1}{240} |d_2^2| \left| \frac{15}{64} d_1^2 - d_2 \right| + \frac{1}{120} |d_2| \left| \frac{15}{32} d_1 d_3 - d_4 \right| + \frac{1}{256} |d_3^2| \quad (4.212)$$

yazılır. (4.212) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_3 a_5 - a_4^2| \leq \frac{79}{960} \quad (4.213)$$

bulunur. (3.5) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|H_3(2)| \leq |a_2| |a_4 a_6 - a_5^2| + |a_3| |a_3 a_6 - a_4 a_5| + |a_4| |a_3 a_5 - a_4^2| \quad (4.214)$$

yazılır. (4.172) – (4.174) eşitlikleri ile birlikte (4.207), (4.210) ve (4.213) eşitsizlikleri (4.214) ifadesinde yerine yazılır ve ardından Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|H_3(2)| \leq \frac{3637}{57600} \cong 0,0631$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.15.4: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(3)| \leq \frac{71269}{2268000} \cong 0,0314$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.175) – (4.177) eşitlikleri (3.6) ifadesindeki $(a_5a_7 - a_6^2)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} a_5a_7 - a_6^2 &= \frac{1}{13440}(d_2^5 + 6d_2^3d_4 + 8d_2^2d_6 + 2d_2^3d_4 + 12d_2d_4^2 + 16d_4d_6) - \\ &\frac{1}{82944}(16d_2^2d_3^2 + d_1^2d_2^4 + 4d_1^2d_4^2 + 64d_5^2 + 8d_1d_2^3d_3 + 16d_1d_2d_3d_4 + \\ &64d_2d_3d_5 + 4d_1^2d_2^2d_4 + 16d_1d_2^2d_5 + 32d_1d_4d_5) \\ &= -\frac{1}{3360}d_2^2\left(\frac{35}{54}d_3^2 - d_6\right) - \frac{1}{13440}d_2^4\left(\frac{35}{216}d_1^2 - d_2\right) - \frac{1}{6720}d_4^2\left(\frac{35}{108}d_1^2 - d_2\right) - \\ &\frac{1}{2240}d_2^3\left(\frac{35}{162}d_1d_3 - d_4\right) - \frac{1}{4480}d_2d_4\left(\frac{70}{81}d_1d_3 - d_4\right) - \frac{1}{6720}d_2^2d_4\left(\frac{35}{108}d_1^2 - d_2\right) - \\ &\frac{1}{840}d_4\left(\frac{35}{108}d_1d_5 - d_6\right) - \frac{1}{3360}d_2^2\left(\frac{35}{54}d_1d_5 - d_6\right) - \frac{1}{1296}d_5^2 - \frac{1}{1296}d_2d_3d_5 \quad (4.215) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.215) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} |a_5a_7 - a_6^2| &\leq \frac{1}{3360}|d_2^2|\left|\frac{35}{54}d_3^2 - d_6\right| + \frac{1}{13440}|d_2^4|\left|\frac{35}{216}d_1^2 - d_2\right| + \\ &\frac{1}{6720}|d_4^2|\left|\frac{35}{108}d_1^2 - d_2\right| + \frac{1}{2240}|d_2^3|\left|\frac{35}{162}d_1d_3 - d_4\right| + \frac{1}{4480}|d_2d_4|\left|\frac{70}{81}d_1d_3 - \right. \\ &d_4\left| + \frac{1}{6720}|d_2^2d_4|\left|\frac{35}{108}d_1^2 - d_2\right| + \frac{1}{840}|d_4|\left|\frac{35}{108}d_1d_5 - d_6\right| + \frac{1}{3360}|d_2^2|\left|\frac{35}{54}d_1d_5 - \right. \right. \\ &d_6\left| + \frac{1}{1296}|d_5^2| + \frac{1}{1296}|d_2d_3d_5| \quad (4.216) \end{aligned}$$

bulunur. (4.216) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_5a_7 - a_6^2| \leq \frac{509}{15120} \quad (4.217)$$

bulunur. (4.174) – (4.177) eşitlikleri (3.6) ifadesindeki $(a_4a_7 - a_5a_6)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
a_4a_7 - a_5a_6 &= \frac{1}{10752}(d_1d_2^4 + 6d_1d_2^2d_4 + 8d_1d_2d_6 + 2d_2^3d_3 + 12d_2d_3d_4 + \\
&16d_3d_6) - \frac{1}{11520}(4d_2^3d_3 + d_1d_2^4 + 4d_1d_2^2d_4 + 8d_2^2d_5 + 8d_2d_3d_4 + \\
&16d_4d_5 + 4d_1d_4^2) \\
&= \frac{1}{1440}d_2^2\left(\frac{17}{56}d_1d_4 - d_5\right) + \frac{1}{720}d_4\left(\frac{16}{56}d_2d_3 - d_5\right) - \frac{17}{40320}d_2d_3\left(\frac{13}{34}d_2^2 - d_4\right) + \\
&\frac{1}{672}d_6\left(\frac{1}{2}d_1d_2 + d_3\right) + \frac{1}{161280}d_1d_2^4 + \frac{1}{2880}d_1d_4^2
\end{aligned} \tag{4.218}$$

elde edilir. (4.218) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned}
|a_4a_7 - a_5a_6| &\leq \frac{1}{1440}|d_2^2|\left|\frac{17}{56}d_1d_4 - d_5\right| + \frac{1}{720}|d_4|\left|\frac{16}{56}d_2d_3 - d_5\right| + \\
&\frac{17}{40320}|d_2d_3|\left|\frac{13}{34}d_2^2 - d_4\right| + \frac{1}{672}|d_6|\left|\frac{1}{2}d_1d_2 + d_3\right| + \frac{1}{161280}|d_1d_2^4| + \frac{1}{2880}|d_1d_4^2|
\end{aligned} \tag{4.219}$$

bulunur. (4.219) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|a_4a_7 - a_5a_6| \leq \frac{37}{1260} \tag{4.220}$$

bulunur. (3.6) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|H_3(3)| \leq |a_3||a_5a_7 - a_6^2| + |a_4||a_4a_7 - a_5a_6| + |a_5||a_4a_6 - a_5^2| \tag{4.221}$$

yazılır. (4.173) – (4.175) eşitlikleri ile birlikte (4.207), (4.217) ve (4.220) eşitsizlikleri (4.221) ifadesinde yerine yazıldığında ve ardından Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|H_3(3)| \leq \frac{71269}{2268000} \cong 0,0314$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.15.5: $f(z) \in K_{\mathcal{S}}$ olsun. Bu durumda

$$|H_4(1)| \leq 0,01916$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.173) – (4.175) ile birlikte (4.195), (4.198) ve (4.201) eşitlikleri (3.4) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$H_3(1) = \frac{d_1^2 d_2^2}{15360} + \frac{d_1 d_2 d_3}{768} - \frac{d_2^3}{2160} - \frac{d_3^2}{256} + \frac{d_2 d_4}{120} - \frac{d_1^2 d_4}{320} \quad (4.222)$$

bulunur. (4.172), (4.173), (4.175) ve (4.176) eşitlikleri (3.8) ifadesindeki $(a_2 a_6 - a_3 a_5)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$a_2 a_6 - a_3 a_5 = \frac{d_1^2 d_2^2}{1152} + \frac{d_1 d_2 d_3}{288} + \frac{d_1^2 d_4}{576} + \frac{d_1 d_5}{144} - \frac{d_2^3}{240} - \frac{d_2 d_4}{120} \quad (4.223)$$

bulunur. (4.172), (4.174) ile birlikte (4.195), (4.208) ve (4.223) eşitlikleri (3.8) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & -\frac{17}{17280} d_2^2 d_3 - \frac{1}{34560} d_1 d_2^3 + \frac{29}{17280} d_1 d_2 d_4 + \frac{1}{216} d_2 d_5 - \frac{1}{320} d_3 d_4 + \\ & \frac{1}{9216} d_1^2 d_2 d_3 + \frac{1}{36864} d_1^3 d_2^2 - \frac{1}{2304} d_1^3 d_4 - \frac{1}{576} d_1^2 d_5 + \frac{1}{1024} d_1 d_3^2 \end{aligned} \quad (4.224)$$

elde edilir. (4.172), (4.173) ile birlikte (4.205), (4.208) ve (4.211) eşitlikleri (3.9) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & -\frac{13}{69120} d_1 d_2^2 d_3 - \frac{1}{276480} d_1^2 d_2^3 + \frac{22}{69120} d_1^2 d_2 d_4 - \frac{1}{3456} d_1 d_2 d_5 + \\ & \frac{1}{4608} d_2 d_3^2 + \frac{41}{11520} d_1 d_3 d_4 + \frac{1}{576} d_3 d_5 + \frac{1}{14400} d_2^4 - \frac{1}{900} d_2^2 d_4 - \frac{1}{400} d_4^2 \end{aligned} \quad (4.225)$$

elde edilir. (4.172) – (4.174) ile birlikte (4.205), (4.208) ve (4.211) eşitlikleri (3.10) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & -\frac{1}{49152} d_1^2 d_2^2 d_3 - \frac{1}{294912} d_1^3 d_2^3 + \frac{1}{18432} d_1^3 d_2 d_4 + \frac{1}{4608} d_1^2 d_2 d_5 - \\ & \frac{11}{73728} d_1 d_2 d_3^2 + \frac{1}{9216} d_1^2 d_3 d_4 + \frac{1}{2304} d_1 d_3 d_5 + \frac{8}{1036800} d_1 d_2^4 - \frac{231}{777600} d_1 d_2^2 d_4 - \\ & \frac{1}{1600} d_1 d_4^2 + \frac{14}{103680} d_2^3 d_3 + \frac{1}{960} d_2 d_3 d_4 - \frac{1}{1296} d_2^2 d_5 - \frac{1}{4096} d_3^3 \end{aligned} \quad (4.226)$$

elde edilir. (4.174) – (4.177) ile birlikte (4.222), (4.224), (4.225) ve (4.226) eşitlikleri (3.7) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & 222953472000 H_4(1) \\ & = 2625 d_1^4 d_2^4 - 84000 d_1^4 d_2^2 d_4 + 71360 d_1^2 d_2^5 - 381440 d_1 d_2^4 d_3 + 79872 d_2^6 - \\ & 217600 d_2^3 d_3^2 - 9105408 d_2^4 d_4 + 1212800 d_1^2 d_2^3 d_4 + 18552320 d_1 d_2^2 d_3 d_4 - \\ & 17971200 d_2 d_3^2 d_4 + 6856704 d_2^2 d_4^2 - 7137280 d_1^2 d_2 d_4^2 + 983040 d_1^2 d_2^2 d_6 + \\ & 6912000 d_1 d_2 d_3 d_6 - 2457600 d_2^3 d_6 - 20736000 d_3^2 d_6 + \\ & 44236800 d_2 d_4 d_6 - 16588800 d_1^2 d_4 d_6 + 12185600 d_2^2 d_3 d_5 - \\ & 1092000 d_1^2 d_2^2 d_3^2 + 21000 d_1^3 d_2^3 d_3 - 336000 d_1^3 d_2 d_3 d_4 - \\ & 1344000 d_1^2 d_2 d_3 d_5 + 756000 d_1 d_2 d_3^2 + 358400 d_1 d_2^3 d_5 - 336000 d_1^3 d_2^2 d_5 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 20787200d_1d_2d_4d_5 + 53222400d_1d_3d_4^2 + 672000d_1^4d_4^2 + \\
& 5376000d_1^3d_4d_5 - 3024000d_1^2d_3^2d_4 - 28672000d_2d_5^2 + \\
& 38707200d_3d_4d_5 + 10752000d_1^2d_5^2 - 12096000d_1d_3^2d_5 - 27869184d_4^3 + \\
& 1323000d_1^2d_2d_3^2 + 3402000d_3^4 \\
& = 84000d_1^4d_2^2 \left(\frac{1}{32}d_2^2 - d_4 \right) - 18552320d_1d_2^2d_3 \left(\frac{149}{7247}d_2^2 - d_4 \right) + \\
& 9105408d_2^4 \left(\frac{1}{114}d_2^2 - d_4 \right) - 53222400d_1d_3d_4 \left(\frac{5}{88}d_1d_3 - d_4 \right) - \\
& 38707200d_3d_4 \left(\frac{13}{28}d_2d_3 - d_5 \right) - 12185600d_2d_3d_5 \left(\frac{105}{952}d_1^2 - d_2 \right) - \\
& 44236800d_2d_4 \left(\frac{203}{432}d_1d_5 - d_6 \right) + 28672000d_5^2 \left(\frac{3}{8}d_1^2 - d_2 \right) + \\
& 1966080d_2^2d_6 \left(\frac{1}{3}d_1^2 - d_2 \right) + 12096000d_1d_3^2 \left(\frac{1}{16}d_2d_3 - d_5 \right) + \\
& 6804000d_3^2 \left(\frac{1}{2}d_3^2 - d_6 \right) + 336000d_1^3d_2d_3 \left(\frac{1}{16}d_2^2 - d_4 \right) - \\
& 5376000d_1^3d_5 \left(\frac{1}{16}d_2^2 - d_4 \right) + 491520d_2^3 \left(\frac{35}{48}d_1d_5 - d_6 \right) + \\
& 13932000d_3d_6 \left(\frac{64}{129}d_1d_2 - d_3 \right) + 1344000d_1^2d_4^2 \left(\frac{1}{2}d_1^2 - d_2 \right) + \\
& 27869184d_4^2 \left(\frac{31}{126}d_2^2 - d_4 \right) + 5793280d_1^2d_2d_4 \left(\frac{1895}{9052}d_2^2 - d_4 \right) + \\
& 16588800d_1^2d_6 \left(\frac{8}{405}d_2^2 - d_4 \right) + 71360d_1^2d_2^5 - 217600d_2^3d_3^2 - \\
& 1092000d_1^2d_2^2d_3^2 + 1323000d_1^2d_2d_3^2
\end{aligned} \tag{4.227}$$

elde edilir. (4.227) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned}
& 222953472000H_4(1) \\
& \leq 84000|d_1^4d_2^2| \left| \frac{1}{32}d_2^2 - d_4 \right| + 18552320|d_1d_2^2d_3| \left| \frac{149}{7247}d_2^2 - d_4 \right| + \\
& 9105408|d_2^4| \left| \frac{1}{114}d_2^2 - d_4 \right| + 53222400|d_1d_3d_4| \left| \frac{5}{88}d_1d_3 - d_4 \right| + \\
& 38707200|d_3d_4| \left| \frac{13}{28}d_2d_3 - d_5 \right| + 12185600|d_2d_3d_5| \left| \frac{105}{952}d_1^2 - d_2 \right| + \\
& 44236800|d_2d_4| \left| \frac{203}{432}d_1d_5 - d_6 \right| + 28672000|d_5^2| \left| \frac{3}{8}d_1^2 - d_2 \right| + \\
& 1966080|d_2^2d_6| \left| \frac{1}{3}d_1^2 - d_2 \right| + 12096000|d_1d_3^2| \left| \frac{1}{16}d_2d_3 - d_5 \right| + \\
& 6804000|d_3^2| \left| \frac{1}{2}d_3^2 - d_6 \right| + 336000|d_1^3d_2d_3| \left| \frac{1}{16}d_2^2 - d_4 \right| + \\
& 5376000|d_1^3d_5| \left| \frac{1}{16}d_2^2 - d_4 \right| + 491520|d_2^3| \left| \frac{35}{48}d_1d_5 - d_6 \right| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 13932000|d_3d_6| \left| \frac{64}{129}d_1d_2 - d_3 \right| + 1344000|d_1^2d_4^2| \left| \frac{1}{2}d_1^2 - d_2 \right| + \\
& 27869184|d_4^2| \left| \frac{31}{126}d_2^2 - d_4 \right| + 5793280|d_1^2d_2d_4| \left| \frac{1895}{9052}d_2^2 - d_4 \right| + \\
& 16588800|d_1^2d_6| \left| \frac{8}{405}d_2^2 - d_4 \right| + 71360|d_1^2d_2^5| + 217600|d_2^3d_3^2| + \\
& 1092000|d_1^2d_2^2d_3^2| + 1323000|d_1^2d_2d_3^2|
\end{aligned} \tag{4.228}$$

elde edilir. (4.228) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|H_4(1)| \leq \frac{16689943}{870912000} \cong 0,01916 \tag{4.229}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.16. K_S Fonksiyon Sınıfı için Toeplitz Determinantları

Bu kısımda, $f(z) \in K_S$ alt sınıfı için ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden Toeplitz determinantları için üst sınır değerleri elde edilmiştir.

Teorem 4.16.1: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|T_2(2)| \leq \frac{13}{36} \cong 0,3611$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.172), (4.173) eşitlikleri (3.11) ifadesinde yerine yazıldığında ve her iki tarafının modülü alındığında,

$$|T_2(2)| = \left| \frac{d_2^2}{36} - \frac{d_1^2}{16} \right| \tag{4.230}$$

yazılır. (4.230) ifadesinde $|d_n| \leq 2$ için üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|T_2(2)| \leq \frac{13}{36} \tag{4.231}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.16.2: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|T_2(3)| \leq \frac{25}{144} \cong 0,1736$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.173), (4.174) eşitlikleri (3.12) ifadesinde yerine yazıldığında ve her iki tarafının modülü alındığında,

$$|T_2(3)| = \left| \frac{1}{1024} (d_1 d_2 + 2d_3)^2 - \frac{d_2^2}{36} \right| \quad (4.232)$$

yazılır. (4.232) ifadesinde $|d_n| \leq 2$ için üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|T_2(3)| \leq \frac{25}{144} \quad (4.233)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.16.3: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(1)| \leq \frac{232}{144} \cong 1,6111$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.172), (4.173) eşitlikleri (3.13) ifadesinde yerine yazıldığında ve her iki tarafının modülü alındığında,

$$\begin{aligned} |T_3(1)| &= |1 + 2a_2^2(a_3 - 1) - a_3^2| \\ &= \left| 1 + \frac{d_1^2}{8} \left(\frac{d_2}{6} - 1 \right) - \left(\frac{d_2^2}{36} \right) \right| \\ &= \frac{1}{144} |144 + 3d_1^2 d_2 - 18d_1^2 - 4d_2^2| \\ &= \frac{1}{144} \left| 144 + 4d_2 \left(\frac{3}{4} d_1^2 - d_2 \right) - 18d_1^2 \right| \end{aligned} \quad (4.234)$$

elde edilir. (4.234) ifadesinde üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$|T_3(1)| \leq \frac{1}{144} \left| 144 + 4|d_2| \left| \frac{3}{4} d_1^2 - d_2 \right| + 18|d_1^2| \right| \quad (4.235)$$

bulunur. (4.235) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|T_3(1)| \leq \frac{232}{144} \quad (4.236)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.16.4: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|T_3(2)| \leq \frac{11}{32} \cong 0,3437$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.172), (4.174) eşitlikleri (3.14) ifadesinde yerine yazıldığında ve her iki tarafının modülü alındığında,

$$\begin{aligned}
|T_3(2)| &= |(a_2 - a_4)(a_2^2 - 2a_2^3 + a_2a_4)| \\
&= \left| \left(\frac{d_1}{4} - \frac{1}{32}(d_1d_2 + 2d_3) \right) \left(\frac{d_1^2}{16} - \frac{d_1^3}{32} + \frac{1}{128}(d_1^2d_2 + 2d_1d_3) \right) \right| \\
&= \left| \frac{d_1^3}{64} - \frac{d_1^4}{128} + \frac{d_1^4d_2}{1024} - \frac{d_1^3d_2^2}{4096} + \frac{d_1^3d_3}{512} - \frac{d_1^2d_2d_3}{1024} - \frac{d_1d_3^2}{1024} \right| \\
&= \left| \frac{d_1^3}{64} - \frac{d_1^4}{128} - \frac{1}{512}d_1^3 \left(-\frac{1}{2}d_1d_2 - d_3 \right) + \frac{1}{1024}d_1^2d_2 \left(-\frac{1}{4}d_1d_2 - d_3 \right) - \frac{d_1d_3^2}{1024} \right| \quad (4.237)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.237) ifadesinde üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned}
|T_3(2)| &\leq \left| \frac{1}{64}|d_1^3| + \frac{1}{128}|d_1^4| + \frac{1}{512}|d_1^3| \left| -\frac{1}{2}d_1d_2 - d_3 \right| + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{1024}|d_1^2d_2| \left| -\frac{1}{4}d_1d_2 - d_3 \right| + \frac{1}{1024}|d_1d_3^2| \right| \quad (4.238)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.238) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|T_3(2)| \leq \frac{11}{32} \quad (4.239)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.16.5: $f(z) \in K_S$ olsun. Bu durumda

$$|T_4(2)| \leq 0,202398$$

dir (Buyankara & Çağlar, 2025a).

İspat: (4.172), (4.173) eşitlikleri (3.15) ifadesindeki $(a_2^2 - a_3^2)^2$ teriminde yerine yazıldığında,

$$(a_2^2 - a_3^2)^2 = \frac{1}{16} \left(\frac{d_1^4}{16} - \frac{d_1^2d_2^2}{18} + \frac{d_2^4}{81} \right) \quad (4.240)$$

bulunur. (4.172) – (4.175) eşitlikleri (3.15) ifadesindeki $(a_3^2 - a_2a_4)(a_2a_4 - a_3a_5)$ teriminde yerine yazıldığında,

$$(a_3^2 - a_2a_4)(a_2a_4 - a_3a_5) = \frac{1}{1105920} (480d_1^2d_2^3 - 135d_1^4d_2^2 - 540d_1^3d_2d_3 + 960d_1d_2^2d_3 - 540d_1^2d_3^2 - 256d_2^5 + 72d_1^2d_2^4 + 144d_1d_2^3d_3 - 512d_2^3d_4 + 144d_1^2d_2^2d_4 + 288d_1d_2d_3d_4) \quad (4.241)$$

elde edilir. (4.172) – (4.174) eşitlikleri (3.15) ifadesindeki $(a_2a_3 - a_3a_4)^2$ teriminde yerine yazıldığında,

$$(a_2a_3 - a_3a_4)^2 = \frac{1}{256} (16d_1^2d_2^2 - 8d_1^2d_2^3 - 16d_1d_2^2d_3 + 4d_1d_2^3d_3 + d_1^2d_2^4 + 4d_2^2d_3^2) \quad (4.242)$$

elde edilir. (4.173) – (4.175) eşitlikleri (3.15) ifadesindeki $(a_4^2 - a_3a_5)^2$ teriminde yerine yazıldığında,

$$(a_4^2 - a_3a_5)^2 = \frac{1}{4096} (d_1^4d_2^4 + 8d_1^3d_2^3d_3 + 24d_1^2d_2^2d_3^2 - 8d_1^2d_2^5 - 16d_1^2d_2^3d_4 + 32d_1d_2d_3^3 - 32d_1d_2^4d_3 - 64d_1d_2^2d_3d_4 + 16d_3^4 - 32d_2^3d_3^2 + 64d_2^4d_4 - 64d_2d_3^2d_4 + 16d_2^6 + 64d_2^2d_4^2) \quad (4.243)$$

bulunur. (4.172) – (4.175) eşitlikleri (3.15) ifadesindeki $(a_3a_4 - a_2a_5)^2$ teriminde yerine yazıldığında,

$$(a_3a_4 - a_2a_5)^2 = \frac{1}{64} (d_2^2d_3^2 - 2d_1d_2d_3d_4 + d_1^2d_4^2) \quad (4.244)$$

elde edilir. (4.240) – (4.244) eşitlikleri (3.15) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} 2123366400T_4(2) &= 819200d_1^4 - 11059200d_1^2d_2^2 - 259200d_1^4d_2^2 \\ &+ 1843200d_1^2d_2^3 + 1638400d_2^4 + 78336d_1^2d_2^4 + 2025d_1^4d_2^4 \\ &- 491520d_2^5 - 17280d_1^2d_2^5 + 36864d_2^6 - 1036800d_1^3d_2d_3 \\ &+ 3686400d_1d_2^2d_3 + 16200d_1^3d_2^3d_3 - 69120d_1d_2^4d_3 \\ &- 1036800d_1^2d_3^2 - 460800d_2^2d_3^2 + 48600d_1^2d_2^2d_3^2 \\ &- 69120d_2^3d_3^2 + 64800d_1d_2d_3^3 + 32400d_3^4 + 221184d_1^2d_2^2d_4 \\ &- 983040d_2^3d_4 - 34560d_1^2d_2^3d_4 + 147456d_2^4d_4 \\ &+ 1105920d_1d_2d_3d_4 - 138240d_1d_2^2d_3d_4 - 138240d_2d_3^2d_4 \\ &- 331776d_1^2d_4^2 + 147456d_2^2d_4^2 + 92160d_1d_2^3d_3 \\ &= 1843200d_1^2d_2^2 \left(\frac{259200}{1843200} d_1^2 - d_2 \right) + 491520d_2^4 \left(\frac{78336}{491520} d_1^2 - d_2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -36864d_2^5 \left(\frac{17280}{36864} d_1^2 - d_2 \right) - 3686400d_1d_2d_3 \left(\frac{1036800}{3686400} d_1^2 - d_2 \right) \\
& -147456d_2^4 \left(\frac{69120}{147456} d_1d_3 - d_4 \right) + 69120d_2^2d_3^2 \left(\frac{48600}{69120} d_1^2 - d_2 \right) \\
& +34560d_1^2d_2^3 \left(\frac{16200}{34560} d_1d_3 - d_4 \right) + 138240d_2d_3^2 \left(\frac{64800}{138240} d_1d_3 - d_4 \right) \\
& +331776d_1^2d_4 \left(\frac{221184}{331776} d_2^2 - d_4 \right) - 147456d_2^2d_4 \left(\frac{138240}{147456} d_1d_3 - d_4 \right) \\
& +983040d_2^3 \left(\frac{92160}{983040} d_1d_3 - d_4 \right) + 819200d_1^4 - 11059200d_1^2d_2^2 \\
& +1638400d_2^4 + 2025d_1^4d_2^4 - 1036800d_1^2d_3^2 - 460800d_2^2d_3^2 \\
& +32400d_3^4 + 1105920d_1d_2d_3d_4
\end{aligned} \tag{4.245}$$

elde edilir. (4.245) ifadesinin her iki tarafının modülü alındığında ve üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned}
& 2123366400T_4(2) \\
& \leq 1843200|d_1^2d_2^2| \left| \frac{259200}{1843200} d_1^2 - d_2 \right| + 491520|d_2^4| \left| \frac{78336}{491520} d_1^2 - d_2 \right| + \\
& 36864|d_2^5| \left| \frac{17280}{36864} d_1^2 - d_2 \right| + 3686400|d_1d_2d_3| \left| \frac{1036800}{3686400} d_1^2 - d_2 \right| + \\
& 147456|d_2^4| \left| \frac{69120}{147456} d_1d_3 - d_4 \right| + 69120|d_2^2d_3^2| \left| \frac{48600}{69120} d_1^2 - d_2 \right| + \\
& 34560|d_1^2d_2^3| \left| \frac{16200}{34560} d_1d_3 - d_4 \right| + 138240|d_2d_3^2| \left| \frac{64800}{138240} d_1d_3 - d_4 \right| + \\
& 331776|d_1^2d_4| \left| \frac{221184}{331776} d_2^2 - d_4 \right| + 147456|d_2^2d_4| \left| \frac{138240}{147456} d_1d_3 - d_4 \right| + \\
& 983040|d_2^3| \left| \frac{92160}{983040} d_1d_3 - d_4 \right| + 819200|d_1^4| + 11059200|d_1^2d_2^2| + \\
& 1638400|d_2^4| + 2025|d_1^4d_2^4| + 1036800|d_1^2d_3^2| + 460800|d_2^2d_3^2| + \\
& 32400|d_3^4| + 1105920|d_1d_2d_3d_4|
\end{aligned} \tag{4.246}$$

elde edilir. (4.246) ifadesinde Lemma 3.6.7 ile birlikte $|d_n| \leq 2$ eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|T_4(2)| \leq 0,202398 \tag{4.247}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç

Bu tez çalışmasında, analitik fonksiyonların belirli alt sınıfları için determinant temelli yöntemler sistematik şekilde uygulanmış ve katsayı sınırları belirlenmiştir. Subordinasyon yöntemi kullanılarak tanımlanan $M(\alpha)$, $N(\beta)$, $S_s^*(\varphi)$, $S_T^*(\lambda)$ ve K_S alt sınıfları için Hankel, Toeplitz ve Hermitian-Toeplitz determinantlarının alt ve üst sınırları elde edilmiş, bazı durumlarda literatürdeki bilinen sonuçların ötesinde daha kesin sonuçlar sağlanmıştır. Elde edilen sonuçlar, determinant temelli tekniklerin yalnızca katsayı analiziyle sınırlı kalmayıp, analitik fonksiyonların yapısal özelliklerinin incelenmesinde de etkin bir araç olduğunu göstermektedir. Bu çalışma, yöntemsel ve teorik katkılarıyla literatüre değer katmakta ve ileride farklı fonksiyon sınıfları ve farklı determinant türlerinde de uygulanabilirliği için temel oluşturmaktadır.

5.2. Öneriler

Çalışmada ele alınan fonksiyon sınıflarının dışında kalan diğer analitik fonksiyon alt sınıfları için Hankel, Toeplitz ve Hermitian-Toeplitz determinantlarının incelenmesi, alanın daha da genişlemesine katkı sağlayabilir.

Determinant temelli yöntemlerin görüntü işleme, sinyal işleme ve kontrol teorisi gibi alanlarda uygulanması araştırılabilir. Ayrıca, matematiksel fizik uygulamalarında da potansiyel kullanım olanakları incelenebilir.

Subordinasyon ilkesi ile farklı determinant türlerinin birleştirilerek yeni katsayı sınırlarının elde edilmesi mümkündür.

Bilgisayar destekli simülasyon ve hesaplamalar kullanılarak daha yüksek dereceden determinantlar ve daha karmaşık fonksiyon sınıfları için sistematik sonuçlar elde edilebilir.

Literatürdeki mevcut yöntemlerin sınırlarının aşılması ve daha kesin tahminler için yeni determinant tipleri ve kombinasyonları araştırılabilir.

KAYNAKÇA

- Ali, M. F., Thomas, D. K., & Vasudevarao, A. (2018). Toeplitz determinants whose elements are the coefficients of analytic and univalent functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 97(2), 253–264.
- Bednarz, U., & Wołowicz-Musiał, M. (2019). On a new generalization of telephone numbers. *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 1595–1603.
- Bieberbach, L. (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 138, 940–955.
- Böttcher, A., & Grudsky, S. M. (2000). *Infinite Toeplitz matrices*. In Toeplitz matrices, asymptotic linear algebra and functional analysis (pp. 1–46). Hindustan Book Agency.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2023). Hankel and Toeplitz determinants for a subclass of analytic functions. *Matematychni Studii*, 60(2), 132–137.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025a). Best possible estimates on the Zalcman conjecture and Hankel-Toeplitz determinants for Sakaguchi convex functions. Manuscript submitted for publication.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025b). Hermitian–Toeplitz and Hankel determinants for Sakaguchi-type functions defined by a rational function. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 77(6), 942–955.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025c). Hermitian-Toeplitz determinants for a subclass of analytic functions. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III: Mathematics and Computer Science*, 5(2), 81–88.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025d). Sharp coefficient bounds, Toeplitz and Hermitian-Toeplitz determinants for starlike functions associated with generalized telephone numbers. Manuscript submitted for publication.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025e, 16–18 Temmuz). Symmetric Toeplitz determinants associated with a subclass of analytic functions [Sözlü bildiri]. *International Conference on Mathematics and Computers with Applications (MCWA 2025)*, İstanbul, Türkiye.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025f, 16–18 Temmuz). The second Hankel determinant for a subclass of analytic functions [Sözlü bildiri]. *International Conference on Mathematics and Computers with Applications (MCWA 2025)*, İstanbul, Türkiye.
- Calivetti, D., & Reichel, L. (1997). Factorizations of Cauchy matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 86, 103–123.
- Chan, N. N., & Kwong, M. K. (1985). Hermitian matrix inequalities and a conjecture. *The American Mathematical Monthly*, 92(8), 533–541.
- Cho, N. E., Kumar, S., & Kumar, V. (2021). Coefficient functionals for starlike functions associated with the modified sigmoid function and the Bell numbers. *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(1), 2150004.

- Chowla, S., Herstein, I. N., & Moore, W. K. (1951). On recursions connected with symmetric groups I. *Canadian Journal of Mathematics*, 3, 328–334.
- Cudna, K., Kwon, O. S., Lecko, A., Sim, Y. J., & Smiarowska, B. (2020). The second and third-order Hermitian-Toeplitz determinants for starlike and convex functions of order α . *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 26(2), 361–375.
- Deniz, E. (2021). Sharp coefficient bounds for starlike functions associated with generalized telephone numbers. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 44, 1525–1542.
- Duren, P. L. (1983). *Univalent functions* (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259). Springer-Verlag.
- Efraimidis, I. (2016). A generalization of Livingston's coefficient inequalities for functions with positive real part. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 435, 369–379.
- Fekete, M., & Szegő, G. (1933). Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. *Journal of the London Mathematical Society*, 8(1), 85–89.
- Goodman, A. W. (1983). *Univalent functions* (Vols. 1–2). Mariner Publishing Co.
- Gray, R. M. (2006). Toeplitz and circulant matrices: A review. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2(3), 155–239.
- Hartman, P., & Wintner, A. (1954). The spectra of Toeplitz's matrices. *American Journal of Mathematics*, 76, 867–882.
- Hayman, W. K. (1968). On the second Hankel determinant of mean univalent functions. *Proceedings of the London Mathematical Society, 3rd Series*, 18, 77–94.
- Iohvidov, I. S. (1982). *Hankel and Toeplitz matrices and forms: Algebraic theory* (G. P. A. Thijssse, Trans.). Birkhäuser.
- Janteng, A., Halim, S. A., & Darus, M. (2007). Hankel determinant for starlike and convex functions. *International Journal of Mathematical Analysis*, 1, 619–625.
- Kumar, S., & Ravichandran, V. (2016). A subclass of starlike functions associated with a rational function. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 40, 199–212.
- Koebe, P. (1907). Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1907, 191–210.
- Kurt, V., & Simsek, Y. (1992). On the Hermitian matrix inequalities. *Pure and Applied Mathematical Sciences*, 36, 29–32.
- Kumar, V. (2021). Hermitian-Toeplitz determinants for certain classes of close-to-convex functions. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 47(3), 1231–1248.
- Kumar, V., & Kumar, S. (2021). Bounds on Hermitian-Toeplitz and Hankel determinants for strongly starlike functions. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 27(55), Article 16.
- Kumar, V., Srivastava, R., & Cho, N. E. (2020). Sharp estimation of Hermitian-Toeplitz determinants for Janowski type starlike and convex functions. *Miskolc Mathematical Notes*, 21(2), 939–952.

- Kumar, V., & Cho, N. E. (2021). Hermitian-Toeplitz determinants for functions with bounded turning. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(6), Article 20.
- Kumar, V., Cho, N. E., Ravichandran, V., & Srivastava, H. M. (2019). Sharp coefficient bounds for starlike functions associated with the Bell numbers. *Mathematica Slovaca*, 69(5), 1053–1064.
- Knuth, D. E. (1973). *The art of computer programming* (Vol. 3). Addison-Wesley.
- Lecko, A., & Sim, Y. J. (2019). Coefficient problems in the subclasses of close-to-star functions. *Results in Mathematics*, 74, 1–14.
- Libera, R. J., & Zlotkiewicz, E. J. (1983). Coefficient bounds for the inverse of a function with derivatives in P. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 87, 251–257.
- Loewner, C. (1917). Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. *Berichte der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, 69, 89–106.
- Ma, W. (1999). Generalized Zalcman conjecture for starlike and typically real functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 234(1), 328–339.
- Noor, K. I. (1983). Hankel determinant problem for the class of functions with bounded boundary rotation. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 28, 731–739.
- Pommerenke, C. H. (1966). On the coefficients and Hankel determinants of univalent functions. *Journal of the London Mathematical Society*, 41, 111–122.
- Pommerenke, C. H. (1967). On the Hankel determinants of univalent functions. *Mathematika*, 14, 108–112.
- Pommerenke, C. (1975). *Univalent functions* (p. 376). Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, Berlin.
- Prokhorov, D. V., & Szynal, J. (1981). Inverse coefficients for (α, β) -convex functions. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A*, 35, 125–143.
- Ponnusamy, S., & Silverman, H. (2006). *Complex variables with applications*. Birkhäuser, Boston.
- Ravichandran, V., & Verma, S. (2015). Bound for the fifth coefficient of certain starlike functions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 353, 505–510.
- Sakaguchi, K. (1959). On a certain univalent mapping. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 11(1), 72–75.
- Szegő, G. (1915). Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion. *Mathematische Annalen*, 76, 490–503.
- Thomas, D. K., & Halim, S. A. (2017). Toeplitz matrices whose elements are the coefficients of starlike and close-to-convex functions. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 40, 1781–1790.
- Trench, W. F. (1994). Some spectral properties of Hermitian Toeplitz matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 15(3), 938–942.

- Wilkes, D. M., Morgera, S. D., Noor, F., & Hayes, M. H. (1991). A Hermitian Toeplitz matrix is unitarily similar to a real Toeplitz-plus-Hankel matrix. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(9), 2146–2148.
- Włoch, A., & Wołowicz-Musiał, M. (2017). On generalized telephone numbers, their interpretations and matrix generators. *Utilitas Mathematica*, 105, 31–39.
- Zalcman, L. (1960). Über die Koeffizienten der schlicht abbildenden Funktionen. *Mathematische Annalen*, 140(1), 1–25.



TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR

1. Makaleler

- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2023). Hankel and Toeplitz determinants for a subclass of analytic functions. *Matematychni Studii*, 60(2), 132–137.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025a). Best possible estimates on the Zalcman conjecture and Hankel-Toeplitz determinants for Sakaguchi convex functions. Manuscript submitted for publication.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025b). Hermitian–Toeplitz and Hankel determinants for Sakaguchi-type functions defined by a rational function. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 77(6), 942–955.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025c). Hermitian-Toeplitz determinants for a subclass of analytic functions. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III: Mathematics and Computer Science*, 5(2), 81–88.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025d). Sharp coefficient bounds, Toeplitz and Hermitian-Toeplitz determinants for starlike functions associated with generalized telephone numbers. Manuscript submitted for publication.

2. Bildiriler

- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025e, 16–18 Temmuz). Symmetric Toeplitz determinants associated with a subclass of analytic functions [Sözlü bildiri]. *International Conference on Mathematics and Computers with Applications (MCWA 2025)*, İstanbul, Türkiye.
- Buyankara, M., & Çağlar, M. (2025f, 16–18 Temmuz). The second Hankel determinant for a subclass of analytic functions [Sözlü bildiri]. *International Conference on Mathematics and Computers with Applications (MCWA 2025)*, İstanbul, Türkiye.