



**MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**ANALİTİK OLMAYAN VE/VEYA YÜKSEK SALINIMLI FONKSİYON-
LARIN AĞIRLIK FONKSİYONU ALTINDAKİ TAYLOR AÇILIMLARI-
NIN İNTEGRAL FORMUNDAKİ KALAN TERİMİNE SENDELENİMSİZ-
LİK TEOREMİ UYGULANMAK SURETİYLE YAKLAŞTIRIMLARININ
YAPILMASI VE BUNA BAĞLI OLARAK NÜMERİK İNTEGRASYON YÖN-
TEMLERİNİN GELİŞTİRİLMESİ**

ERCAN GÜRVİT

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. N.Abdülbaki BAYKARA

EŞ DANIŞMAN

Prof. Dr. Metin DEMİRALP

İSTANBUL, 2020



**MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**ANALİTİK OLMAYAN VE/VEYA YÜKSEK SALINIMLI FONKSİYON-
LARIN AĞIRLIK FONKSİYONU ALTINDAKİ TAYLOR AÇILIMLARI-
NIN İNTEGRAL FORMUNDAKİ KALAN TERİMİNE SENDELENİMSİZ-
LİK TEOREMİ UYGULANMAK SURETİYLE YAKLAŞTIRIMLARININ
YAPILMASI VE BUNA BAĞLI OLARAK NÜMERİK İNTEGRASYON YÖN-
TEMLERİNİN GELİŞTİRİLMESİ**

ERCAN GÜRVİT
(721109001)

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA

EŞ DANIŞMAN

Prof. Dr. Metin DEMİRALP

İSTANBUL, 2020

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca çalışmalarımın her aşamasında görüş ve önerilerinden yararlandığım, bilgi ve tecrübeleriyle yardımını ve desteğini hiçbir zaman esirgemyen, bana gösterdiği her türlü emek ve sabrı hiç bir zaman unutmayacağım tezimi sabır ve titizlikle yöneten danışman hocam Prof. Dr. N. Abbdülbaki BAYKARA'ya, doktora öğrenimim boyunca gerek bilgi ve tecrübesi gerekse İ.T.Ü. Bilişim Enstitüsü nezdinde oluşturmuş olduğu ve sürdürdüğü BEBBYT çalışma grubuna beni de dahil ederek yönlendirme, bilgilendirme ve akademik çalışmalara imkan veren ve tezimde katkısı büyük olan eşdanışman hocam Prof.Dr. Metin DEMİRALP'e teşekkürü bir borç bilirim. Tüm doktoram boyunca danışmanım olmamalarına rağmen bana destek olan hocalarım Prof. Dr. A.Neşe DERNEK ve Prof. Dr. Ahmet DERNEK'e de en derin teşekkürlerimi sunarım.

MART 2020

Ercan GÜRVİT

İçindekiler

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
YENİLİK BEYANI	ix
KISALTMALAR	xii
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
TABLO LİSTESİ	xiv
1 GİRİŞ	1
2 MATERYAL ve YÖNTEM	2
2.1 Sendelenimsizlik Yaklaşırımı	2
2.2 Sendelenimsizlik Teoreminin Taylor Açılımına Uygulanması	6
2.3 Taylor Açılımının Yapısal Dönüştürölümü	6
2.3.1 Sendelenimsizlik Varsayımı Altında Yaklaşırım . .	8
2.4 Çok Değişkenliliği Yükseltirilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG)	12
3 BULGULAR ve TARTIŞMA	18
3.1 Operatör Çarpımları ve Ayrıştırırımının Sonlu Aralıktaki Mat-	
ris Gösterilimlerinde Sendelenim İncelemeleri	18
3.1.1 Teorik Altyapı	18
3.1.2 Taban Takımı	20
3.1.3 Üç Terimli Özyineleme Bağırntısı Yoluyla Matris Gös-	
terilimi	21

3.2	Operatör Çarpımları ve Ayırıştırımlarının Sonsuz Aralıktaki Matris Gösterilimlerinde Sendelenim İncelemeleri	23
3.2.1	Teorik Altyapı	24
3.3	Üç Terimli Özyineleme Bağıntısı Yoluyla Matris Gösterilimi .	27
3.4	Yüksek Salınlı Çok Değişkenli Fonksiyonların, Trigonometrik Taban Fonksiyonları Eşliğinde Sendelenimsizlik Teoremi Yardımıyla Nümerik Yaklaşırımı	30
3.4.1	Çok Değişkenli Fonksiyonlar için Taylor Formülü .	30
3.4.2	Taylor Kalan Terimine Yaklaşırım	31
3.4.3	Taban Fonksiyonları	35
3.4.4	Sendelenimsiz İntegrasyon	35
3.5	Çok Değişkenliliği Yükseltirilmiş Çarpımsal Gösterilimin Cauchy İntegral Formunda İfade Edilmiş çok Değişkenli Taylor Açılımına Uygulanması	39
3.5.1	Üçü Birarada: Taylor Açılımı	39
3.6	Sendelenimsizlik Yaklaşırımının Kontur İntegrasyonu ile Desteklenmesi: Dairesel Konturlar	42
3.6.1	Dairesel Kontur İntegral Gösterilimi	42
3.6.2	Oluşturulan Dairesel Konturlar Üzerinde Sendelenimsizlik Yaklaşırımı	47
3.6.3	Dairesel Kontur İntegral Gösterilimi	47
3.6.4	Sendelenimsizlik Yaklaşırınları	48
3.6.5	Basit bir Açıklayıcı Örnek	54
3.7	Kontur İntegrasyonu ve ÇYÜDÇG Yoluyla Fonksiyon Yaklaşırımı	56
3.7.1	İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin ÇYÇG	57
3.7.2	Kontur İntegrasyonu	60
3.7.3	Yöntem	61

3.8	Taylor Serisi Kalan Terimi Üzerinden Kontur İntegrali Yardımıyla ÇYÜDÇG Yaklaşırımı	62
3.8.1	İki Değişkenli Fonksiyonlar için ÇYÇG	63
3.8.2	Kontur İntegrasyonu	63
3.8.3	Yöntem	65
3.9	Euler Genişletmesi ve Yüksek Mertebeli Taylor Metodları . .	66
3.9.1	Başlangıç Değer Problemleri için Euler Yöntemi . .	67
3.9.2	Sendelenimsizlik Teoreminin Euler Yöntemine Uyarlanması	68
3.9.3	Sayısal Uygulamalar	69
4	SONUÇLAR	74
	KAYNAKÇA	78
	ÖZGEÇMİŞ	86

ÖZET

ANALİTİK OLMAYAN VE/VEYA YÜKSEK SALINIMLI FONKSİYONLARIN AĞIRLIK FONKSİYONU ALTINDAKİ TAYLOR AÇILIMLARININ İNTEGRAL FORMUNDAKİ KALAN TERİMİNE SENDELENİMSİZLİK TEOREMİ UYGULANMAK SURETİYLE YAKLAŞTIRMALARININ YAPILMASI VE BUNA BAĞLI OLARAK NÜMERİK İNTEGRASYON YÖNTEMLERİNİN GELİŞTİRİLMESİ

Gerek yapısal olarak gerekse doğa bilimlerine temel teşkil etmesi bakımından yaklaşık değer hesaplamaları, fonksiyon yaklaşımları ve kuadratürler matematikle uğraşanların kaçınılmaz ilgi alanlarından olagelmıştır. Bu tezde bir yaklaştırım yöntemi olarak önemli bir yer tutan ve bir çok yeni yöntemin oluşturulmasına esas olan Taylor açılımı esas alınmış ve Taylor açılımının integral formunda yazılmış kalan terimi üzerinde çalışılarak yeni ve daha verimli yaklaşımlar geliştirilmeye çalışılmıştır.

Tezin birinci bölümünde konuya kısa bir giriş yapılmış, yaklaşımların sınıflandırılmasına değinilmiş, bunlardan gerek interpolasyon gerekse eğri uydurma yoluyla yapılan yaklaşımların temel felsefesine değinilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde yapılan çalışmalara esas teşkil eden Sendelenimsizlik Yaklaştırımı, Sendelenimsizlik Teoreminin Taylor açılımına uygulanması, Taylor açılımının sendelenimsizlik uygulamasına imkan verecek biçimde düzenlenmesi ve son olarak da Çok Değişkenliliği Yükseltmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG) konuları ile ilgili yapılmış çalışmalara değinilerek bu çerçevede gerekli bilgiler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümde yeni çalışmalar ve bulgular ele alınarak varılan sonuçlar üzerinde tartışılmıştır. Öncelikle operatör çarpımları ve ayrıştırımlarının sonlu ve sonsuz aralıktaki matris gösterilimlerinde sendelenim incelemeleri ve etkileri araştırılmıştır. Sonrasında oldukça önemli bir sadeleştirme sağlayan üç terimli özyine-

leme yoluyla matris gösterilimi üzerinde durulmuştur. Sonrasında trigonometrik taban fonksiyonları kullanılarak Taylor açılımının kalan terimine sendelenimsizlik uygulanmak suretiyle çok salınımlı fonksiyonlara yaklaştırım ele alınmıştır. Bunu takiben ÇYÇG'nin Cauchy integral formunda ifade edilmiş Taylor açılımına uygulanması üzerinde çalışılmış ve yine sendelenimsizlik yaklaştırımının dairesel konturlar yoluyla kontur integrasyonu tarafından desteklenmesi üzerinde çalışılmıştır. Daha sonrasında ise önce kontur integrasyonu ve ÇYÜDÇG yoluyla ve devamında aynı işin Taylor serisi kalan terimi üzerinde nasıl sonuç vereceği sorgulanmıştır. Son olarak ise Başlangıç Değer problemlerinde temel yöntemlerden biri olan Euler metodu ve yüksek mertebeli Taylor metodları ele alınarak sendelenimsizlik yoluyla bunlarda iyileştirme sağlanmıştır.

Tezin dördüncü ve son bölümünde ise varılan sonuçlar kısaca ele alınarak özetlenmiştir.

MART 2020

Ercan GÜRVİT

ABSTRACT

APPROXIMATION OF NON-ANALYTIC AND/OR HIGHLY OSCILLATORY FUNCTIONS VIA THEIR TAYLOR EXPANSION WHOSE REMAINDER TERM IS EXPRESSED IN INTEGRAL FORM UNDER A WEIGHT FUNCTION AND DEVELOPMENT OF NUMERICAL INTEGRATION METHODS RELATED TO THIS METHOD

Approximate value calculations, function approximations and quadratures, either because of structural reasons or because they constitute a basis for natural sciences, have always been a center of attention for mathematicians. In this thesis Taylor expansion which has an important place in the approximation theory and which makes an important starting point for the construction of many new methods, is taken into consideration and some more productive methods are searched by working on the remainder term expressed in integral form

In the first part of the thesis a short introduction is given, approximations are classified and the basic philosophies of interpolation and curve fitting are mentioned.

In the second part of the thesis Fluctuation Theorem, its application to Taylor expansion, the reorganisation of Taylor expansion to make room for this application and finally theorems and applications concerning EMPR are given in detail.

In the third part new research and findings are given and discussed in details. It starts with fluctuation studies on the matrix representation of operator multiplication and decomposition. Then the approximation to highly oscillatory functions by applying trigonometric basis functions to the remainder term of Taylor expansion. This is followed by the application of EMPR to the remainder term of Taylor expansion expressed as a contour integration and the application of Fluctuationlessness Theorem on contour integration with circular contours. Then using TKEMPR on the remainder term of Taylor expansion expressed in contour integral form is taken

into consideration. Finally Euler and higher order Taylor methods for initial value problems are worked on and beter results are reached through fluctuationlessness approximation applied on them.

In the fourth section some corollaries are listed

MARCH 2020

Ercan GÜRVİT



YENİLİK BEYANI

Bu tezde operatör çarpımları ve ayrıştırımlarının sonlu ve sonsuz aralıktaki matris gösterilimlerinde sendelenim terimlerinin etkisi ilk kez incelenmiş ve gözlemlerin sonuçları verilmiştir

Polinom taban takımı dışında trigonometrik bir taban takımı ve çoklu-indis notasyonu ile çalışmak suretiyle Sendelenimsizlik Teoremi kullanarak nümerik yaklaştırım elde edilmiştir. Kullanılacak fonksiyondan bağımsız olan $\mathbf{T}_2^{(n)}$ matrislerini hesaplayarak arşivlemek ve daha sonra bu matrislerin özdeğer ve özvektörlerini hesaplayarak bulunan değerleri, istenen yaklaştırmı verecek biçimde formülde yerine koymak yoluyla matris gösterilimi konusunda ciddi bir zaman kazancı sağlanmıştır.

ÇYÇG Cauchy integral formunda yazılmış Taylor kalan terimine uygulanmış ve bu üç metodun bir arada kullanıldığı yeni bir yaklaştırım elde edilmiştir.

Sendelenimsizlik yaklaştırmı kontur integrali üzerine uygulanmış ve evrensel olma özelliğine sahip bir yaklaştırım elde edilmiştir.

Taylor açılımının integral formunda ifade edilmiş kalan terimi kontur integrali şekline dönüştürülmüş ve bu suretle iki parametreye bağlı bir fonksiyon oluşturularak ÇYÜDÇG bu fonksiyon üzerine uygulanmıştır.

Başlangıç değer problemleri için literatürde oldukça önemli bir temel oluşturan Euler ve yüksek mertebeli Taylor yöntemlerine değinilmiş, kalan terimi integral formunda yazılmış Taylor açılımı kullanılmak suretiyle yaklaştırmada oldukça etkin bir iyileştirme sağlanmıştır. Burada elde edilen yaklaştırım ifadesi aşağıdaki biçimdedir.

$$f(a) = \alpha$$
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} f(h\tau_i + aj, f(aj)) (\mathbf{e}_1^T \mathbf{t}_i)^2$$

Tezde kullanılan temel kavramlar yeterlilik sınavı öncesinde başlanan çalışmaların sonuçları olarak SCI-E kapsamında taranan "Journal of Mathematical Che-

mistry" adlı dergide, 2018'e dek yapılan çalışmalar ise "Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)" adlı uluslararası hakemli dergide yayınlanmıştır. Ayrıca bu çalışmaların sonuncusu hariç tümü aşağıda listelenen sempozyumlarda sunulmuş ve herbiri en az dört sayfa olmak üzere genişletilmiş özet şeklinde yayınlanmıştır. Sonuncu yenilik ise Haziran 2020'de Prag'da yapılması planlanan ICN-PAA'2000 adlı konferans tarafından sunum yapılmak ve American Institute of Physics (AIP) tarafından basılmak üzere kabul edilmiştir.

MAKALELER

- N. A. Baykara, Ercan Gürvit, Metin Demiralp, "*The Fluctuationlessness Approach to the Numerical Integration of Functions with a Single Variable by Integrating Taylor Expansion with Explicit Remainder Term*", Journal of Mathematical Chemistry Volume 49, Number 2, 393-406, 2011, DOI: 10.1007/s10910-010-9748-5
- Ercan Gürvit and N. A. Baykara, "*Fluctuationlessness Approximation and Its Applications on the Remainder Term of Taylor Expansion: From Scratch to Present Status*", Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA) - www.journalmesa.com, Vol. 9, No.2, pp. 189-203, 2018 CSP - Cambridge, UK; IS - Florida, USA, 2018

BİLDİRİLER

- Ercan Gürvit, N. A. Baykara and Metin Demiralp, "*Taylor Formula with Remainder Term Evaluated Under a Weight Factor at Fluctuationlessness Limit*", ICNAAM 2011, AIP Conference Proceedings 1389, pp. 1180-1183

- E. Gürvit , N.A. Baykara, and M. Demiralp, "*Enhanced Multivariate Product Representation Applied to the Remainder Term of a Multivariate Taylor Expansion Expressed as a Cauchy Integral Form*", Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12), ISBN: 978-1-61804-115-9, pp. 250-255, (2012)
- E. Gürvit, N. A. Baykara, and M. Demiralp, "*Fluctuation Studies on the Finite Interval Matrix Representations of Operator Products and Their Decompositions*", AIP Conf. Proc. Symposium 11. AIP Conference Proceedings 1504, 812 (2012); <http://doi.org/10.1063/1.4771818>
- N. A. Baykara, E. Gürvit, and M. Demiralp, "*Fluctuation Studies in the Infinite Interval Matrix Representations of Operator Products and Their Decompositions*", AIP Conf. Proc. Symposium 11, AIP Conference Proceedings 1504, 808(2012); <http://doi.org/10.1063/1.4771817>

KISALTMALAR

YBMG	: Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
ÇYÇG	: Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim
ÇYÜDÇG	: Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş Üç Köşegencil Dizey Çarpımsal Gösterilimi
σ_i	: ÇYÇG nicelik ölçeni
$P_{i-1}^{(k,0)}$	: Jacobi polinomları
$w(x)$	: Ağırlık fonksiyonu



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1 : Sayfa 69

Şekil 2 : Sayfa 71

Şekil 3 : Sayfa 71

Şekil 4 : Sayfa 72



TABLO LİSTESİ

Tablo 1 : Sayfa 69

Tablo 2 : Sayfa 70

Tablo 3 : Sayfa 70

Tablo 4 : Sayfa 73



1 GİRİŞ

Matematik her ne kadar kesin hesaplarla uğraşan bir bilim çağrışımı yaratsa da gerek sayı sistemlerinin fiili hesaplarda sonlulukları esas olduğundan kesme veya yaklaşık değer hesaplamalarını gerektirmesi, gerek bilgisayarların günümüzdeki hesap yükünü üslenmeleri sonucu olarak ikili ve onlu sayı tabanları arasındaki dönüşümlerin yoğun olarak hata birikimine yol açabilmesi, gerek transandantal denklemlerin çözümünde nümerik yöntemlerin kullanılmasının zorunlu olması ve gerekse doğa bilimlerinde yapılan ölçümlerde ölçüm aletinden kaynaklanabilecek fiziksel yanılma payları matematiğin esasen tüm bu hata payları ve hata birikimlerini en aza indirecek bir yol izlemesini zorunlu kılmaktadır. Bu yolda ilerlerken hata analizi son derece büyük bir öneme sahip olmakta, bunun yanı sıra kullanılan nümerik yöntemlerde yakınsama hızı ve işlem karmaşıklığı da dikkate alınması gereken en önemli unsurlar olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çerçevede düşünüldüğünde fonksiyonların gösterilimleri de elde edilecek sonuçların verimliliği ve hassasiyetinde oldukça önemli bir rol oynamaktadır. Yaklaşımları temel olarak eğri uydurma ve interpolasyon olarak iki büyük sınıfta toplamak mümkündür. Bunlardan eğri uydurma, eldeki veri noktaları veya diğer bir deyişle düğüm noktalarını esas alarak ama bu noktaların tümünden geçmek zorunda olmayan, modellemenin öngördüğü lineer veya nonlineer bir yapının bu noktaları dikkate aldığımızda en az hatayı verecek biçimde tasarlanması esasına dayanmaktadır. İnterpolasyon ise düzenli veya düzensiz olarak dizilmiş bir biçimde mevcut olan elimizdeki tüm veri noktalarından geçmesi öngörülen bir eğri, yüzey veya hiper yüzeyi temsil eden fonksiyonu tasarlama esasına dayanmaktadır. Bu konuda oldukça geniş bir literatür varsa da burada daha ziyade çalışmamıza esas aldığımız Taylor açılımı, fonksiyonların matris gösterilimi ve Sendelenimsizlik Teoremi ele alınarak bunların uygulamasında ihtiyacımız olacak alt başlıklara değinilecektir.

2 MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Sendelenimsizlik Yaklaşırımı

M. Demiralp tarafından ortaya konulan Sendelenimsizlik Teoremi[1-5, 8-13, 17-24, 44-46] , kendi argümanını skaler tek değışkenli bir fonksiyonla çarpırmaktan ibaret olan bir cebirsel operatörün matris gösteriliminin, bağımsız değışkenin matris gösteriliminin aynı alt uzay ve aynı taban takımı altında aynı fonksiyon altındaki görüntüsüne, sendelenimsizlik terimleri gözardı edilmek koşulu altında eş olacağını söylemektedir.

Karesi integrallenebilir sürekli fonksiyonların $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında çalışıyor olalım. $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları arasında bir iç çarpım tanımlamamız mümkündür.

$$(f_1, f_2) = \int_a^b dx w(x) f_1(x) f_2(x) \quad (2.1)$$

Burada $w(x)$ aşağıdaki koşulu sağlayan bir ağırlık fonksiyonu oluşturmaktadır. Bir ağırlık fonksiyonunun her zaman pozitif ya da sonlu sayıda noktada sıfır olma koşulunu da belirtmemizde fayda vardır.

$$\int_a^b dx w(x) = 1 \quad (2.2)$$

Herhangi bir sonlu aralığını genellikle kaybetmeksizin, afin bir dönüşüm yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebileceğini bilmekteyiz.

Şimdi $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ biçiminde bir ortonormal taban takımı oluşturalım.

$$\mathcal{U} = \{u_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \quad (2.3)$$

Öyle ki

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (2.4)$$

Şimdi de $f(x)$ fonksiyonu üzerine etki eden ve söz konusu Hilbert uzayında ka-

palılık özelliğine sahip bir $\widehat{x}$ işleci tanımlayalım.

$$\widehat{x}f(x) = xf(x), \quad f(x) \in \mathcal{H} \quad (2.5)$$

Bu bize $\widehat{x}$ işlecini aşağıdaki biçimde yazma imkanı verir.

$$\widehat{x}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad (2.6)$$

ve

$$g(x) \equiv \widehat{x}f(x) = xf(x), \quad f(x), g(x) \in \mathcal{H} \quad (2.7)$$

Bu uzaydan alınma $f(x)$ ve $g(x)$ gibi herhangi iki fonksiyon taban takımı bileşenlerinin doğrusal birleşimi biçiminde yazılabilir.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j u_j(x), \quad g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j u_j(x) \quad (2.8)$$

Burada f_j 'ler ve g_j 'ler doğrusal birleşim katsayılarını oluşturmaktadır. Dolayısı ile problem bu katsayıları bulma üzerine kuruludur. İlk adım olarak şunu yazarak başlayalım.

$$\begin{aligned} (u_i, f) &= \sum_{j=1}^{\infty} f_j (u_i, u_j) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \delta_{ij}, \\ (u_i, g) &= \sum_{j=1}^{\infty} g_j (u_i, u_j) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Böylece

$$f_i = (u_i, f), \quad g_i = (u_i, g), \quad 1 \leq i < \infty \quad (2.10)$$

Ayrıca f_j 'ler ve g_j 'ler arasındaki bağıntıyı da bulabiliriz.

$$\begin{aligned} g_i = (u_i, g) &= (u_i, \widehat{x}f) = \left(u_i, \widehat{x} \sum_{j=1}^{\infty} f_j u_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (u_i, \widehat{x} u_j) f_j, \quad 1 \leq i < \infty \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dolayısı ile aşağıdaki biçimde ifade edebileceğimiz sonsuz sayıda denklem elde ederiz.

$$\mathbf{f}^T \equiv [f_1 \cdots f_n \cdots], \quad \mathbf{g}^T \equiv [g_1 \cdots g_n \cdots] \quad (2.12)$$

Bunlar da sonsuz boyutlu bir $\mathbf{X}$ matrisi ile ifade edilebilir.

$$\mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1j} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{i1} & \cdots & X_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{X}\mathbf{f} \quad (2.13)$$

Aynı matrisin bileşenler türünden ifadesi ise şöyle yapılabilir.

$$X_{ij} = (u_i, \widehat{x} u_j) = \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x u_j(x), \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (2.14)$$

Ancak pratik ve hesapsal gerekçelerle bir kesme yapılması gerekeceği aşîkardır. Buna yönelik olarak n boyutlu bir Hilbert alt uzayında $\mathcal{H}_n$ çalışacağız. Hilbert uzayında izdüşüm işleci aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$P_i f(x) \equiv u_i(x) (u_i, f) \quad , \quad f(x) \in \mathcal{H}, 1 \leq i \leq n \quad (2.15)$$

Yukarıdaki tanım yardımıyla n -boyutlu alt uzaya iz düşürecek işleci de tanımlamamız mümkündür.

$$P^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^n P_i, \quad 1 \leq n < \infty \quad (2.16)$$

Birim işleç şöyle tanımlanabilir.

$$P^{(n)} \equiv I^{(n)} \quad (2.17)$$

n sonsuza gittiğinde $P^{(n)}$ 'in $\widehat{I}$ 'ye yakınsayacağı aşikardır.

Sendelenim işleci olarak adlandıracağımız $\widehat{I} - P^{(n)}$, n sonsuza giderken $\widehat{0}$ 'a gidecektir.

Sendelenimsizlik Teoremi matematiksel olarak şöyle ifade edilebilir.

$$\mathbf{F}^{(n)} \approx f(\mathbf{X}^{(n)}) \quad (2.18)$$

Burada $\mathbf{X}^{(n)}$ matris gösterilimi olup açık biçimde şöyle ifade edilebilir.

$$\mathbf{X}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{11}^{(n)} & \cdots & X_{1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}^{(n)} & \cdots & X_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad X_{jk}^{(n)} \equiv (u_j, \widehat{x}u_k), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (2.19)$$

Şimdi artık evrensel matrisi elde ettiğimize göre, hesaplamaları sürdürebilmek için matris cebrinden skaler sayılara geçiş yapmamız gerekmektedir. Bu amaçla elimizde bulunan evrensel matrisin spektral ayrıştırımını yaparak işe başlarız.

$$\mathbf{X}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \quad (2.20)$$

Burada ξ_i 'lar özdeğerleri ve $\mathbf{x}_i$ 'ler de özvektörleri göstermektedir. Dolayısı ile sendelenimsizlik yaklaşıtlırımının son ifadesini şöyle elde ederiz.

$$f(\mathbf{X}^{(n)}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \quad (2.21)$$

2.2 Sendelenimsizlik Teoreminin Taylor Açılımına Uygulanması

Bu kısımda kalan terimi integral formunda ifade edilmiş Taylor açılımının üzerine kurgulanan tek değişkenli fonksiyon yaklaşılrlımını ele alacağız. Bu yöntemde Taylor kalan terimini integral cinsinden ifade etmekle kalmayacak aynı zamanda bu integrali genellikle kaybetmeksizin sınırları $[0, 1]$ olacak biçimde düzenleyecek ve uygun bir ağırlık terimi altında ifade edecek biçimde dönüştüreceğiz. Bir sonraki adımda ortonormal bir taban takımı oluşturacak ve üç terimli özyineleme formülü [47] yardımıyla katsayıları nasıl elde edeceğimizi ifade edeceğiz. Bunu takiben bağımsız değişkenin matris gösterilimini oluşturacak ve nihayet kalan terimi Sendelenimsizlik Teoremi ışığında tekrar yazmak suretiyle tek değişkenli fonksiyon yaklaşılrlımını elde edeceğiz.

2.3 Taylor Açılımının Yapısal Dönüştürölümü

Taylor teoremi $f \in C^k[a, b]$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı üzerinde $f^{(k+1)}$ 'nin mevcut olduğunu ve $x_0, [a, b]$ üzerinde bir nokta olmak üzere her $x \in [a, b]$ için $f(x)$ fonksiyonunun $P_k(x)$ ve $R_k(x)$ fonksiyonlarının toplamı olarak yazılabileceğini ifade eder. Burada P_k, f fonksiyonunun x_0 civarındaki k-ıncı mertebeden Taylor Polinomu olup aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \quad (2.22)$$

ve $R_k(x)$ ise $P_k(x)$ 'ya ilişkin kalan terimidir. Her ne kadar kalan terimi ifade etmenin birçok yolu mevcut ise de biz buradaki hesaplama pratiğimize bakımından

integral formunda ifade etmeyi tercih ediyoruz.

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x dy (x-y)^k f^{(k+1)}(y) \quad (2.23)$$

İntegrasyon değişkenine değişken dönüşümü uygulamak suretiyle bu terim aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$R_k(x) = \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \int_0^1 dy w_k(y) f^{(k+1)}((x-x_0)y + x_0) \quad (2.24)$$

Burada $w_k(y)$ söz konusu integral için bir ağırlık fonksiyonu olup aşağıdaki biçimde tanımlıdır.

$$w_k(y) = (k+1)(1-y)^k \quad (2.25)$$

Şimdi integralimize biraz daha yakından bakalım

$$\mathcal{I}_k(x) \equiv \int_0^1 dy w_k(y) f^{(k+1)}((x-x_0)y + x_0) \quad (2.26)$$

$R_k(x)$ yeni tanımlanan fonksiyon cinsinden şu biçimde ifade edilebilir.

$$R_k(x) = \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \mathcal{I}_k(x) \quad (2.27)$$

Burada k 'nın küçük değerleri için ağırlık fonksiyonunun integranda $y = 0$ yakınında daha büyük önem verdiğini ve bunun da $f^{(k+1)}(x_0)$ 'a karşılık geldiğini gözlemleyebiliriz. İntegranda en düşük önemi ise $y = 1$ civarında verdiğini ve bunun da $f^{(k+1)}(x)$ 'a karşılık geldiğini gözlemlememiz mümkündür. Daha büyük k değerleri için durumun ne olduğunu incelememizde de fayda vardır. Bunun için şu asimptotik analizi yapabiliriz.

$$h(y) \equiv f^{(k+1)}((x-x_0)y + x_0) \quad (2.28)$$

Bu yeni tanımlamış olduğumuz fonksiyonu kullanarak

$$\mathcal{I}_k = (k+1) \int_0^1 dy (1-y)^k h(y) = (k+1) \int_0^1 dy y^k h(1-y) \quad (2.29)$$

$y = z^{1/k}$ almak suretiyle integrasyon değişkenini değiştirecek olursak

$$\mathcal{I}_k = \frac{(k+1)}{k} \int_0^1 dz z^{1/k} h(1 - z^{1/k}) \quad (2.30)$$

elde edilir. Asimptotik olarak, k sınırsız büyüdüğünde aşağıdaki

$$\mathcal{I}_k \approx h(0) \int_0^1 dz \frac{(k+1)}{k} z^{1/k} \quad (2.31)$$

yaklaşırımı geçerli olur. Bu da yeterince büyük k değerleri için integrandın Dirac delta fonksiyonunun iki katına yaklaşacağı sonucunu doğurur. Çünkü delta fonksiyonunun desteği aralığın uç noktası olan $z = 0$ 'da bulunmaktadır. Şimdi şunu hatırlayalım,

$$h(0) = f^{(k+1)}(x_0) \quad (2.32)$$

Buradan çıkaracağımız sonuç yeterince büyük k değerleri için en büyük önem x_0 'daki $f^{(k+1)}$ 'e atfedilmektedir ki bu nokta da aslında Taylor açılımının yapıldığı noktadır.

2.3.1 Sendelenimsizlik Varsayımı Altında Yaklaşım

Sendelenimsizlik teoremini kullanabilmek için söz konusu Hilbert uzayını örten bir taban takımı oluşturmak zorundayız. Bu taban takımının elemanları olan u_i 'ler şu şekilde seçilebilirler.

$$u_i(t) = \frac{\sqrt{2i+k-1}}{\sqrt{k+1}} P_{i-1}^{(k,0)}(2t-1), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Burada P Jacobi Polinomlarını temsil etmektedir. Bu seçim bize bir ortonormal küme verir ve iç çarpımı da şu biçimde tanımlarız.

$$(u_i, u_j) = \int_0^1 dt w_k(t) u_i(t) u_j(t), \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Bu da bize Kronecker's deltasını verir.

Şimdi artık $\mathbf{T}$ matrisinin bileşenlerini oluşturabiliriz. Bu matris üç köşegencil bir matris olup temelde sonsuz boyutludur çünkü $\widehat{t}$ operatörü sonsuz boyutlu Hilbert uzayında tanımlıdır. Ancak hesaplama pratiği açısından $\mathbf{T}^{(n)}$ ile sembolize ettiğimiz n -boyutlu bir kesme yapar ve bu kesmeyi kullanırız.

$\mathbf{T}$ matrisini oluştururken iç çarpımları kullanmak yerine Jacobi polinomları $P_j^{(k,0)}$ için var olan üç terimli öz yineleme[47] bağıntısını kullanırız. Bu da bize taban fonksiyonları arasında şöyle bir bağıntı yazmamızı sağlar.

$$tu_j(t) = \alpha_j u_{j+1}(t) + \beta_j u_j(t) + \alpha_{j-1} u_{j-1}(t), \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Burada

$$\alpha_j = \frac{j(j+k)}{2j+k} \frac{1}{\sqrt{2j+k-1}} \frac{1}{\sqrt{2j+k+1}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

ve

$$\beta_j = \frac{2j(j-1) + k(2j-1)}{(2j+k)(2j+k-2)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

(2.35) denkleminin her iki tarafını da $u_i(t)$ ile çarpıp $w_k(t)$ ağırlık fonksiyonu altında 0'dan 1'e integre ettiğimizde doğrudan $\mathbf{T}$ matrisinin bileşenlerini buluruz. Taban fonksiyonlarının ortonormalliğini dikkate alarak aynı ağırlık fonksiyonu altında ve aynı integrasyon aralığında aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz. Burada $\delta_{i,j}$ Kronecker deltasını göstermektedir..

$$(\mathbf{T})_{i,j} = \beta_i \delta_{i,j} + \alpha_i \delta_{i,j-1} + \alpha_{i-1} \delta_{i,j+1} \quad (2.38)$$

Sonuç olarak, $\mathbf{T}$ aşağıdaki biçimde α_i 'lar ve β_i 'lar cinsinden yazılabilir.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \alpha_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Şimdi Sendelenimsizlik Teoremini kullanmak suretiyle Taylor açılımının kalan terimi $R_k(x)$ için şu yaklaşıtırmı yazabiliriz.

$$R_k(x) \approx \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \mathbf{e}_1^T f^{(k+1)} \left((x - x_0) \mathbf{T}^{(n)} + x_0 \mathbf{I}_n \right) \mathbf{e}_1 \quad (2.40)$$

Burada $\mathbf{e}_1$ birinci elemanı bir kalan elemanları sıfır olan n-boyutlu kartezyen birim vektördür. $\mathbf{I}_n$ ise yine n-boyutlu birim matrisi temsil etmektedir. (2.40)'deki yaklaştıran matris cebrinden ifadeler içermektedir. Skaler ifadelerle çalışabilmek amacıyla bu yaklaştıran soldan $\mathbf{e}_1^T$, sağdan da $\mathbf{e}_1$ ile çarpılmalıdır. Devamında da $\mathbf{T}^{(n)}$ 'nın spektral gösterilimi ele alınacaktır. Bu amaçla $\mathbf{T}^{(n)}$ 'nin özdeğer ve özvektörlerinin hesaplanması gerekmektedir.

$$\mathbf{T}^{(n)} \mathbf{t}_i = \tau_i \mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.41)$$

Buradaki özdeğerlerin hiçbiri katlı olmayıp özvektörlerin tümü Frobenius anlamında normalize edilmiştir. Bu matris üzerine normalize edilmiş vektörler yardımıyla inşa edilen kuadratik form her zaman 0 ile 1 arasında değerler alacaktır. Bu da $\mathbf{T}^{(n+1)}$ matrisinin özdeğerlerinin de 0 ile 1 arasında değerler alacağı anlamına gelir. Bunu göstermek için normalize edilmiş n-boyutlu bir $\mathbf{x}$ vektörü alarak üzerine kurulu

kuadratik formu inceleyelim.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T \mathbf{T}^{(n)} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j T_{i,j}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 dt w_k(t) u_i(t) t u_j(t) \\
&= \int_0^1 dt w_k(t) t \sum_{i=1}^n x_i u_i(t) \sum_{j=1}^n x_j u_j(t) = \int_0^1 dt w_k(t) t \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i(t) \right)^2
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Şurası aşıkardır ki bu integral hiçbir zaman negatif olamaz, çünkü ne integrand ne de ağırlık fonksiyonu integrasyon aralığı olan $[0, 1]$ üzerinde negatif değer alamaz. Sıfır değeri de alamaz çünkü sıfır olması ancak karesi alınan toplam sıfır olursa mümkündür. $u_i(t)$ 'ler lineer bağımsızdır, bu da yukarıda sözü geçen kuadratik formun alt sınırının sıfır olması ve buna hiçbir zaman erişilememesindendir. Diğer yandan üst limiti bulmak için basit bir şekilde $t = 1$ almamız yeterli olacaktır. Bu da integrandın maksimum değerini verecektir.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{T}^{(n)} \mathbf{x} < \int_0^1 dt w_k(t) \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i(t) \right)^2 = \int_0^1 dt w_k(t) \sum_{i=1}^n x_i u_i(t) \sum_{j=1}^n x_j u_j(t) \tag{2.43}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{T}^{(n)} \mathbf{x} < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 dt w_k(t) u_i(t) t u_j(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \delta_{i,j} \tag{2.44}$$

Çünkü $u_i(t)$ 'ler ortonormaldir. Dolayısı ile aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{T}^{(n)} \mathbf{x} < \sum_{i=1}^n x_i^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1 \tag{2.45}$$

Pozitif tanımlı $\mathbf{T}^{(n)}$ matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri kullanılmak suretiyle bu matrisin spektral gösterilimini aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\mathbf{T}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \tau_i \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i^T \tag{2.46}$$

Bu gösterilimi de yerine koyacak olursak şu yazılımı elde ederiz.

$$\mathbf{f}^{(k+1)} \left((x - x_0) \mathbf{T}^{(n)} + x_0 \mathbf{I}_n \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^{(k+1)} \left((x - x_0) \tau_i + x_0 \right) \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i^T \quad (2.47)$$

Bu da bize $R_k(x)$ kalan terimine şu yaklaştırmayı yapmamızı sağlar.

$$R_k(x) \approx \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \mathbf{e}_1^T \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{f}^{(k+1)} \left((x - x_0) \tau_i + x_0 \right) \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i^T \right) \mathbf{e}_1 \quad (2.48)$$

ve böylelikle

$$R_k(x) \approx \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^{(k+1)} \left((x - x_0) \tau_i + x_0 \right) \left(\mathbf{e}_1^T \mathbf{t}_i \right)^2 \quad (2.49)$$

Burada $(\mathbf{e}_1^T \mathbf{t}_i)$ skaler bir büyüklük olup i 'ninci özvektör $\mathbf{t}_i$ 'nin ilk elemanından ibarettir.

$\mathbf{T}^{(n)}$ pozitif tanımlılığı buna karşılık gelen $\mathbf{T}^{(n+1)}$ matrisinin spektrumundaki özdeğerlerin $\mathbf{T}^{(n)}$ 'nininkilerin arasında yuvalanmış olduğu anlamına gelir. Kesme uygulanmış en küçük boyutlu matris $\mathbf{T}^{(1)}$ 'nin özdeğeri $\tau_1 = 1/(k+2)$ olup bu da t 'nin $w_k(t)$ ağırlık fonksiyonu altındaki ortalama değeridir. k sonsuza giderken bu özdeğerin sıfıra yaklaşacağı aşikardır. Kesme yapılmış $\mathbf{T}^{(2)}$ matrisi için iki özdeğer bulunacak ve bunlardan biri söz konusu ortalama değerden küçük, diğeri ise bu ortalama değerden büyük olacak, ancak her ikisi de 1'den ziyade sıfıra daha yakın olacaktır. Bu durum daha yüksek boyutlu kesme matrisleri için de geçerli olmaya devam edecektir. Dolayısı ile açılımımızdaki spektral ifadelerin hesaplanması x 'teki fonksiyon değerleri olan $f(x)$ 'lerin hesaplanmasından daha kolay olacaktır.

2.4 Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG)

Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG)[16,25-39] Metin Demiralp önderliğinde BEBBYT grubu tarafından ortaya konmuştur. ÇYÇG, daha öncesinde I.M. Sobol tarafından önerilen ve H. Rabitz, M. Demiralp ve grubu tarafın-

dan son yirmi senede geliştirilen YBMG üzerine inşa edilmiştir. ÇYÇG, YBMG'nin [25,27-29] terimlerine, her terim aynı dereceden olacak biçimde birer destek fonksiyonu eşlik ettirmektedir. Destek fonksiyonları, her biri ayrı bir değişkene bağlı tek değişkenli fonksiyonlardan oluşmaktadır. YBMG, ÇYÇG'nin tüm destek fonksiyonları 1 seçilmiş özel durumuna karşılık gelmektedir.

ÇYÇG'nin bu gösteriliminde bir N -değişkenli fonksiyon $f(x_1, \dots, x_N)$ daha az değişkenli ve destek fonksiyonları ile çarpılmış terimler cinsinden ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
 f(x_1, \dots, x_N) = & f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) \\
 & + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) \\
 & + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \\
 & \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) \\
 & + \dots + f_{1\dots N}(x_1, \dots, x_N)
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Burada f_0 sabit terimi, $f_i(x_i)$ 'ler tek değişkenli terimleri v.b. gösterir. Ayrıca daha önce de belirtmiş olduğumuz gibi $s_j(x_j) = 1$ ÇYÇG'yi YBMG'ye dönüştürür. ÇYÇG terimlerini hesaplayabilmek için aşağıdaki koşulları ortaya koymamız gerekir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1; \quad 1 \leq i \leq N \tag{2.51}$$

Bunu takiben normalizasyon koşulu da şöyle ifade edilebilir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) s_i(x_i)^2 = 1; \quad 1 \leq i \leq N \tag{2.52}$$

Son olarak ta integral altında sıfırlanma koşulu gelir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) s_i(x_i) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 0, \\ x_i \in (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), 1 \leq i \leq k \leq N \quad (2.53)$$

Tüm ÇYÇG bileşenlerinin tek türlü ifadesi mümkündür.

$$\mathcal{I}_0 f(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.54)$$

$\mathcal{I}_0$ işlecini ve yukarıda ifade ettiğimiz iki koşulu kullanmak suretiyle sabit terimi elde etmek mümkündür.

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.55)$$

Benzer bir yapı altında ve $\mathcal{I}_i$ işleçlerinin yardımı ile tek değişkenli terimleri bulmak mümkündür. Burada vurgulanması gereken önemli bir nokta $\mathcal{I}_i$ işlecinin x_i hariç tüm değişkenler üzerinde integral alan bir işleç olduğudur.

$$\mathcal{I}_i f(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \cdots \\ \times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.56)$$

Bu işleç kullanılmak suretiyle $f_i(x_i)$ tek değişkenli terimleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
f_i(x_i) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \\
&\times \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \\
&\times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) - s_i f_0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Tüm ÇYÇG terimlerini benzer bir biçimde bulmak mümkündür. İkinci mertebeden bir kesme yapmak, sıfır, bir ve ikinci mertebeden terimleri hesaplamak anlamına gelecektir.

$$S_0(x_1, \dots, x_N) = f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) \tag{2.58}$$

$$S_1(x_1, \dots, x_N) = S_0(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) \tag{2.59}$$

$$S_2(x_1, \dots, x_N) = S_1(x_1, \dots, x_N) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) \tag{2.60}$$

Burada $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k$, k' inci mertebeden terimleri göstermekte olup (2.58) ifadesinde geçen yaklaşıtııcı, sabit terim adını alır. Bunun gerekçesi bu terimin tümüyle sabit bir elemandan oluşmasından dolayı değil de f_0 'ın sabit olması kalanın da bir tür katsayı olarak düşünülmesindendir.

Buna ek olarak $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$, $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N$, $1 \leq k < l \leq N$ ile

ÇYÇĞ bileşenleri arasındaki ortogonaliteyi de tanımlamış oluruz.

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, \dots, j_l}}^N s_j(x_j) f_{i_1 \dots i_k} f_{j_1 \dots j_l} = 0 \quad (2.61)$$

Bu da bize $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq N$ koşulu altında bir iç çarpım tanımlama olanağı verir.

$$\left(f_{i_1 \dots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i, f_{j_1 \dots j_l} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, \dots, j_l}}^N s_j \right) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \\ \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i(x_i) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, \dots, j_l}}^N s_j(x_j) f_{j_1 \dots j_l}(x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) \quad (2.62)$$

Yine $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$ ve $1 \leq k \leq N$ koşulları altında norm tanımlamak da olanaklıdır.

$$\left\| f_{i_1 \dots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i(x_i) \right\|^2 = \left(f_{i_1 \dots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i, f_{i_1 \dots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i \right) \quad (2.63)$$

ve buradan da aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\|f\|^2 = \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j \right\|^2 + \sum_{i=1}^N \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j \right\|^2 + \dots + \|f_{12 \dots N}\|^2 \quad (2.64)$$

ve her iki tarafı da $\|f\|^2$ ile bölerek şu ifadeyi elde ederiz.

$$1 = \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j \right\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j \right\|^2 + \dots + \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12 \dots N}\|^2 \quad (2.65)$$

Tüm bunlar bize $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ diye adlandıracağımız nicelik ölçenlerini hesaplama imkanını tanır.

$$\sigma_0 = \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j \right\|^2 \quad (2.66)$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j \right\|^2 \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_1 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \left\| f_{i_1 i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j \right\|^2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.68)$$

Kolayca gözlemlenebileceği gibi bu ölçenler birikimli olarak hesaplanmakta olup sıralıdırlar

$$0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_N = 1 \quad (2.69)$$

3 BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1 Operatör Çarpımları ve Ayrıştırımlarının Sonlu Aralıktaki Matris Gösterilimlerinde Sendelenim İncelemeleri

M. Demiralp tarafından ortaya konulan Sendelenimsizlik Teoreminin gerek tek değişkenli gerekse çok değişkenli fonksiyonların yaklaşıtımları ve nümerik integrasyonunda oldukça verimli olarak kullanıldığı kanıtlanmıştır. Söz konusu teoremin adi ve kısmi diferansiyel denklemler gibi alanlarda da uygulamaları da gelecek vaatmektedir.

Bu bölüme öncelikle operatör çarpımına ilişkin özellikleri vererek başlayacağız. Daha sonra hesaplamalarımızda kullanacağımız taban takımlarını tanımlayacağız. Son olarak da bir operatörün matris gösterilimini [6, 7, 50] tanımlayacak ve bu yolla kalan matrisini elde edeceğiz. Bu tanımları takiben kuantum mekaniğinde kullanılan pozisyon ve momentum operatörlerine karşılık gelen matrisleri ve bu matrislerin farklı kuvvetlerini hesaplama yöntemini açıklayacağız.

3.1.1 Teorik Altyapı

$\mathcal{H}$ sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı olsun ve $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ 'de $\mathcal{H}$ 'dan $\mathcal{H}$ 'ya iki operatörü temsil etsin. Sendelenimsizlik Teoremi uyarınca şu ifadeyi yazabiliriz.

$$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) = \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1) \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_2) \quad (3.1)$$

Burada $\mathcal{M}^{(n)}(.)$, sendelenim terimleri ihmal edildiğinde $\mathcal{H}$ uzayının n boyutlu alt-uzayı üzerinde $(.)$ parantezi içindeki operatörün matris gösterilimidir. Aslında (3.1) bir yaklaşıtımlar olup $n \times n$ matrisler sonsuz boyutlu karşılıkları ile yer değiştirildiğinde kesin eşitlik haline gelecektir. Yani $\mathcal{M}^{(n)}(.)$ ifadesinin yerini $\mathcal{M}(.)$ alacaktır. Bahsi geçen Hilbert uzayı kareleri integrallenebilen ve sonlu, yarı-sonlu ve sonsuz aralıkların her noktasında analitik olan fonksiyonların uzayı olarak tanımlanmaktadır. Bu çalışmada $[a, b]$ şeklinde bir sonlu aralık üzerinde çalışacak olup yuka-

rıdaki yaklaşırtırımın farklı $\mathcal{L}_1$ ve $\mathcal{L}_2$ operatörleri için ne derecede iyi işlediğinin analizini yapacağız. Ayrıca boyut arttırırımının sonuçları ne ölçüde etkilediğinin de inceleyeceğiz. Hilbert uzayında iç çarpımı aşağıdaki biçimde tanımlayabiliriz:

$$(g_1, g_2) \equiv \int_a^b dx w(x) g_1(x) g_2(x), \quad (3.2)$$

Burada $g_1(x)$ ve $g_2(x)$, $\mathcal{H}$ uzayından alınma iki fonksiyon ve $w(x)$ bir ağırlık fonksiyonudur. Bu iç çarpım tanımı kullanılarak Hilbert uzayı için ortonormal bir taban takımı oluşturulacaktır.

$$\mathbf{u} \equiv \{u_j(x)\}_{j=1}^{\infty} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_n \equiv \{u_j(x)\}_{j=1}^n \quad (3.4)$$

tarafından örtülen ve $\mathcal{H}^{(n)}$ ile temsil edilen uzayın $\mathcal{H}$ uzayının n boyutlu bir alt uzayı olduğu açıktır.

$\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ 'den $\mathcal{H}$ 'a bir operatörü temsil etsin. Bu operatörün $\mathcal{H}^{(n)}$ üzerinde kısıtlanması aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$\mathcal{L}^{(n)} \equiv P^{(n)} \mathcal{L} P^{(n)} \quad (3.5)$$

Burada, $P^{(n)}$, $\mathcal{H}^{(n)}$ alt uzayına iz düşürme operatörüdür ve şu biçimde yazılabilir:

$$P^{(n)} g(x) \equiv \sum_{j=1}^n (u_j, g) u_j(x) \quad (3.6)$$

$\mathcal{L}^{(n)}$ operatörünün $\mathcal{H}^{(n)}$ üzerindeki matris gösterilimi şöyle ifade edilebilir:

$$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}^{(n)}) \equiv \begin{bmatrix} (u_1, \mathcal{L}^{(n)} u_1) & \cdots & (u_1, \mathcal{L}^{(n)} u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_n, \mathcal{L}^{(n)} u_1) & \cdots & (u_n, \mathcal{L}^{(n)} u_n) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Dikkatli bir inceleme bize şunu verir:

$$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}^{(n)}) = \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}) \quad (3.8)$$

Bir operatörün $\mathcal{H}^{(n)}$ üzerindeki matris gösteriliminin daha açık bir ifadesinden bahsetmek istiyorsak bu alt uzaya kısıtlanışı ile çalışmak zorunluluğumuz yoktur. Daha önceden de (3.1) ifadesinin kesin eşitlik anlatması için gerek ve yeter koşul tüm sendelenim terimlerinin ihmal edilmesi olduğunu belirtmiştik. Bu ancak n sonsuza gittiğinde mümkün olabilir. n sonlu tutulacak olursa kesin eşitlik (3.1)ifadesinin aşağıdaki ifade ile yer değiştirmesi suretiyle sendelenim terimleri ihmal edilmeden de sağlanabilir.

$$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) = \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1) \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_2) + \mathbf{R} \quad (3.9)$$

Burada $\mathbf{R}$ kalan matrisidir ve aşağıdaki biçimde tanımlanabilir:

$$\mathbf{R} \equiv \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) - \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1) \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_2) \quad (3.10)$$

Bu çalışmanın özünde $\mathbf{R}$ matrislerinin tavrı ve bu tavırların farklı n değerleri ve farklı $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ operatörleri için ne yönde değişikliklerinin incelenmesi yatmaktadır. Bu da $\mathbf{R}$ matrislerinin normları gözönüne alınarak gerçekleştirilebilir.

3.1.2 Taban Takımı

Bu çalışmada seçilen taban takımı Jacobi polinomları cinsinden yazılacaktır. Jacobi polinomları genellikle literatürde $P_j^{(\kappa_1, \kappa_2)}(x)$ olarak ifade edilirler ve $[-1, 1]$ aralığında $w(x) \equiv (1-x)^{\kappa_1}(1+x)^{\kappa_2}$ ağırlığı altında ortogonal bir küme oluştururlar. Burada κ_1 ve κ_2 reel parametrelerdir. Ancak normalize edilmemişlerdir. Jacobi polinomlarını aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz.

$$P_j^{(\kappa_1, \kappa_2)}(x) = \frac{(-1)^j}{2^j j!} (1-x)^{-\kappa_1} (1+x)^{-\kappa_2} \frac{d^j}{dx^j} \left[(1-x)^{j+\kappa_1} (1+x)^{j+\kappa_2} \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Daha sonra bu yapıyı $[0, 1]$ aralığında normalize etmek için gerekli değişken dönüşümünü yapar ve m keyfi bir non-negatif sayı olmak üzere $w_m(x) = (1+m)(1-x)^m$ ağırlığı altında taban takımımızın son halini elde ederiz.

$$u_k(x) = \frac{\sqrt{2j+m-1}}{\sqrt{m+1}} e^{i\gamma x} P_{k-1}^{(m,0)}(2x-1), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Burada $e^{i\gamma x}$ kuantum mekaniğinden gelen türev operatörünün uygulanmasında oynadığı rol nedeniyle taban takımı tercihinde dahil edilmiştir.

3.1.3 Üç Terimli Özyineleme Bağıntısı Yoluyla Matris Gösterilimi

(3.12) ifadesinde tanımlanmış taban takımının elemanları üç terimli özyineleme bağıntısını sağlar.

$$\hat{x}u_k = \alpha_k u_{k+1} + \beta_k u_k + \alpha_{k-1} u_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Burada $\hat{x}$ kuantum mekaniğinde kullanılan konum operatörüdür ve

$$\alpha_k = \frac{k(k+m)}{2k+m} \frac{1}{\sqrt{2k+m-1}} \frac{1}{\sqrt{2k+m+1}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

ve

$$\beta_k = \frac{2k(k-1) + m(2k-1)}{(2k+m)(2k+m-2)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Katsayılar için yukarıdaki tanımları kullanmak suretiyle $\hat{x}^2$ ve $\hat{x}^3$ için özyineleme bağıntılarını sırası ile şöyle verebiliriz.

$$\begin{aligned} \hat{x}^2 u_k &= \alpha_k \alpha_{k+1} u_{k+2} + \alpha_k (\beta_k + \beta_{k+1}) u_{k+1} + (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_{k-1}^2) u_k \\ &+ \alpha_{k-1} (\beta_k + \beta_{k-1}) u_{k-1} + \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} u_{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}^3 u_k &= \alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} u_{k+3} + \alpha_k \alpha_{k+1} (\beta_k + \beta_{k+1} + \beta_{k+2}) u_{k+2} \\
&+ \alpha_k (\alpha_{k+1}^2 + \alpha_k^2 + \alpha_{k-1}^2 + \beta_{k+1}^2 + \beta_{k+1} \beta_k + \beta_k^2) u_k \\
&+ \left[\alpha_k^2 (\beta_k + \beta_{k+1}) + (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_{k-1}^2) \beta_k + \alpha_{k-1}^2 (\beta_k + \beta_{k-1}) \right] u_k \\
&+ \left[\alpha_{k-1} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_{k-1}^2) + \alpha_{k-1} (\beta_k + \beta_{k-1}) \beta_{k-1} + \alpha_{k-1} \alpha_{k-2}^2 \right] u_{k-1} \\
&+ \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} (\beta_k + \beta_{k-1} + \beta_{k-2}) u_{k-2} + \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \alpha_{k-3} u_{k-3}, \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Tüm bu özyineleme bağıntılarında, taban fonksiyonlarının indisinin negatif olmasını sağlayan k değerleri aynı zamanda karşılık gelen katsayının sıfır olmasını da sağladığından bu durumdan endişe duymamıza gerek yoktur. Şimdi artık tüm özyineleme bağıntılarını ifade ettiğimize göre sırasıyla karşılık gelen matris gösterimlerini kolayca elde edebiliriz.

$$(u_j, \hat{x} u_k) = \alpha_k \delta_{j,k+1} + \beta_k \delta_{j,k} + \alpha_{k-1} \delta_{j,k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
(u_j, \hat{x}^2 u_k) &= \alpha_k \alpha_{k+1} \delta_{j,k+2} + \alpha_k (\beta_k + \beta_{k+1}) \delta_{j,k+1} + (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_{k-1}^2) \delta_{j,k+2} \\
&+ \alpha_{k-1} (\beta_k + \beta_{k-1}) \delta_{j,k-1} + \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \delta_{j,k-2}, \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
(u_j, \hat{x}^3 u_k) &= \alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \delta_{j,k+3} + \alpha_k \alpha_{k+1} (\beta_k + \beta_{k+1} + \beta_{k+2}) \delta_{j,k+2} \\
&+ \alpha_k (\alpha_{k+1}^2 + \alpha_k^2 + \alpha_{k-1}^2 + \beta_{k+1}^2 + \beta_{k+1} \beta_k + \beta_k^2) \delta_{j,k} \\
&+ \left[\alpha_k^2 (\beta_k + \beta_{k+1}) + (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_{k-1}^2) \beta_k + \alpha_{k-1}^2 (\beta_k + \beta_{k-1}) \right] \delta_{j,k} \\
&+ \left[\alpha_{k-1} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_{k-1}^2) + \alpha_{k-1} (\beta_k + \beta_{k-1}) \beta_{k-1} + \alpha_{k-1} \alpha_{k-2}^2 \right] \delta_{j,k-1} \\
&+ \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} (\beta_k + \beta_{k-1} + \beta_{k-2}) \delta_{j,k-2} + \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \alpha_{k-3} \delta_{j,k-3}, \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Şimdi, bu gösterilimleri kullanmak suretiyle durum hangisini gerektiriyorsa üç köşegenli, beş köşegenli veya yedi köşegenli matrisleri inşa edebiliriz.

Kuantum mekaniğindeki momentum operatöründe ise herhangi bir özyineli bağıntı sağlanamaz.

$$\hat{p} \equiv -i \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.21)$$

Bu durumda (3.1) için sonuçları test etmekte uzun yolu tercih edip, bir operatörün matris gösteriliminin tanımında var olan iç çarpımlar yoluyla matris gösterilimlerini hesaplamayı öngördük.

Bu çalışmanın bir yan ürünü olarak, iki ayrı kabustan da kurtulmuş oluyoruz. Bunlardan ilki taban takımının ortonormalizasyonu ile ilgili olmalı. Ortogonalleştirme için klasik Gram-Schmidt yöntemini kullanmak yerine Jacobi polinomlarının özel bir durumunu kullanmış olduk. İkinci ve daha vakit kaybettirici olan unsur ise operatörlerin matris gösterilimini oluşturmaktı. Bunun da üç terimli özyineleme bağıntısı sayesinde üstesinden gelmiş olduk. Dolayısı ile oldukça büyük oranda işlem yükünden kurtulmuş olduk. Genel olarak sonuçlarla ilgili gözlemlenebilecek nokta (3.1) ifadesindeki mutlak eşitliğin sendelenim terimlerinin etkisinden arındırılmış biçimde sonlu aralıkta sağlanmasıdır.

3.2 Operatör Çarpımları ve Ayırıştırımlarının Sonsuz Aralıktaki Matris Gösterilimlerinde Sendelenim İncelemeleri

Kuantum mekaniği metodları ile moleküler yapı hesaplamalarında taban takımı tercihleri üzerine çok sayıda makale mevcuttur. Fakat şaşırtıcı bir biçimde kuantum mekaniği operatörlerine yapılan ve taban takımı kullanılarak oluşturulan sonlu boyutlu matris yaklaşıtlarına ilişkin çok az sayıda sistematik çalışma vardır. Aslında bu hiç de sanıldığı kadar aşık bir yapı değildir, çünkü pozisyon ve momentum operatörleri gibi sınırsız operatörler sonlu matrisler yardımıyla gösterilemezler [51]. Bu bölümdeki incelememizin temel fikri sendelenimsizlik teoremini kullanmak suretiyle, sözkonusu alt uzayın boyutundaki değişime göreli olarak kalan mat-

risinin normundaki değişimi gözlemlemektir. İlk olarak operatörlerin çarpımının matris gösterilimine dair özelliği vererek başlayacağız. Daha sonra hesaplamalarımızda kullanacağımız taban takımını tanımlayacağız. Bir sonraki adımda ise bir operatörün matris gösterilimini tanımlamak ve incelenecek matrisin kalan terimini elde etmek olacaktır. Bu tanımların yapılmasını takiben, çeşitli kuantum mekaniği operatörlerinin matris gösterilimlerine karşılık gelen matrislerin üç terimli özyineleme bağıntıları yardımıyla hesaplanması üzerinde duracağız.

3.2.1 Teorik Altyapı

Sendelenimsizlik teoreminin temelini oluşturan fikirler bize sendelenim terimlerinin ihmal edilmesi koşulu altında aşağıdaki eşitliği yazma imkanı verir.

$$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) = \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1)\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_2) \quad (3.22)$$

Burada $\mathcal{M}(\cdot)$ parantez içindeki operatörün $\mathcal{H}^{(n)}$ uzayı üzerinde matris gösterilimidir. $\mathcal{H}^{(n)}$, sonlu, yarı-sonlu ve sonsuz aralıkların her yerinde analitik olan ve kareleri integrallenebilir fonksiyonların ayrılabilir sonsuz Hilbert uzayının n boyutlu alt uzayıdır. Bu çalışmada $(-\infty, \infty)$ şeklinde tüm reel eksen ele alınacaktır ve kullanılacak taban takımı $\{u_j(x)\}$ aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

$$u_j(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{(j-1)!} 2^{\frac{j-1}{2}} \pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2} + i\alpha x} H_{j-1}(x), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Burada $H_j(x)$ ler fizikçiler tarafından çoğunlukla kullanıldığı üzere Hermite polinomlarını temsil etmektedir.

$$H_j(x) \equiv (-1)^j e^{x^2} \frac{d^j(e^{-x^2})}{dx^j}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.24)$$

Her ne kadar $u_j(x)$ lerin bu seçimi başta hedeflenen genel formüle bir kısıtlama getiriyor gibi gözükse de genellikten kaybedilmemektedir.

$$u_j(x) \equiv e^{-\alpha_1(x-x_c)^2 + i\alpha_2 x} x^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

Buradan yola çıkarak, α_2 'nin indisini korumanın bir gereği kalmamıştır. α 'nın taban takımı için yapılan tercih içinde yer alması tamamıyla türev operatörü uygulamasındaki rolü nedeniyledir. Burada bahsi geçen taban fonksiyonlarının ortogonalitesinden bahsedebilmek için $\mathcal{H}$ uzayında bir iç çarpım tanımı yapılmalıdır. Bu iç çarpım tanımı aşağıdaki biçimde yapılabilir.

$$(g_1, g_2) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx g_1(x) g_2(x), \quad g_1(x), g_2(x) \in \mathcal{H} \quad (3.26)$$

İntegrallenebilirliğin korunabilmesi için hem $g_1(x)$ hem de $g_2(x)$ fonksiyonlarının eksi ve artı sonsuzda sıfırlanmaları gerekir. Gerçekten de $\mathcal{H}$ uzayının tanımında var olan karesi integrallenebilirlik kavramı bunu da içermektedir. Bunun yanısıra seçilen taban fonksiyonlarının yapısı bu sıfırlanmanın üstel yapıda olması gerektiğini söylemektedir. Diğer yandan uzayda, bu üstel sıfırlanma varsayımına aykırı karesi integrallenebilir fonksiyonlar da mevcut olabilir. Böyle durumlarda bu taban takımlarının kullanımında az sayıda terim alındığı takdirde yavaş bir yakınsama beklenebilir. (3.23) tarafından verilen $u_j(x), \mathcal{H}$ Hilbert uzayı için ortonormal bir taban takımı oluşturur.

$$\mathbf{u} \equiv \left\{ u_j(x) \right\}_{j=1}^{\infty} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u}_n \equiv \left\{ u_j(x) \right\}_{j=1}^n \quad (3.28)$$

tarafından örtülen $\mathcal{H}^{(n)}$ uzayının $\mathcal{H}$ uzayının n -boyutlu bir alt uzayı olduğu aşikardır. $\mathcal{L}, \mathcal{H}$ uzayından $\mathcal{H}$ uzayına bir operatör olsun. Bu operatörün $\mathcal{H}^{(n)}$ uzayına

kısıtlanması aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\mathcal{L}^{(n)} \equiv P^{(n)} \mathcal{L} P^{(n)} \quad (3.29)$$

Burada, $P^{(n)}$, $\mathcal{H}^{(n)}$ alt uzayı üzerine izdüşüm operatörünü gösterir ve aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$P^{(n)} g(x) \equiv \sum_{j=1}^n (u_j, g) u_j(x) \quad (3.30)$$

$\mathcal{L}^{(n)}$ operatörünün $\mathcal{H}^{(n)}$ üzerinde matris gösterilimi şu biçimde ifade edilebilir.

$$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}^{(n)}) \equiv \begin{bmatrix} (u_1, \mathcal{L}^{(n)} u_1) & \cdots & (u_1, \mathcal{L}^{(n)} u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_n, \mathcal{L}^{(n)} u_1) & \cdots & (u_n, \mathcal{L}^{(n)} u_n) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Dikkatli bir inceleme aşağıdaki ifadenin yazılabileceğini gösterir.

$$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}^{(n)}) = \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}) \quad (3.32)$$

Bir operatörün $\mathcal{H}^{(n)}$ üzerindeki matris gösteriliminin daha açık bir ifadesinden bahsetmek istiyorsak bu alt uzaya kısıtlanması ile çalışmak zorunluluğumuz yoktur. Daha önceden de (3.22) ifadesinin kesin eşitlik anlatması için gerek ve yeter koşul tüm sendelenim terimlerinin ihmal edilmesi olduğunu belirtmiştik. Bu ancak n sonsuza gittiğinde mümkün olabilir. n sonlu tutulacak olursa kesin eşitlik (3.22) ifadesinin aşağıdaki ifade ile yer değiştirmesi suretiyle sendelenim terimleri ihmal edilmeden de sağlanabilir.

$$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) = \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1) \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_2) + \mathbf{R} \quad (3.33)$$

Burada $\mathbf{R}$ kalan matrisi olup

$$\mathbf{R} \equiv \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) - \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_1) \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{L}_2) \quad (3.34)$$

tanımı geçerlidir.

Bu çalışmadaki amacımız $\mathbf{R}$ matrislerinin çeşitli $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ operatörleri için tavrını analiz etmektir. Bu da $\mathbf{R}$ matrislerinin normları dikkate alınarak gerçekleştirilebilir.

3.3 Üç Terimli Özyineleme Bağıntısı Yoluyla Matris Gösterilimi

Taban takımının (3.23)'da tanımlanan bileşenleri sırasıyla $\hat{x}, \hat{x}^2, \hat{p}, \hat{p}^2, \hat{x}\hat{p}$ ve $\hat{p}\hat{x}$ operatörleri altında aşağıdaki özyineli bağıntıları sağlarlar.

$$\hat{x}u_k = \sqrt{\frac{k}{2}}u_{k+1} + \sqrt{\frac{k-1}{2}}u_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Burada $\hat{x}$ kuantum mekaniği bağlamında pozisyon operatörünü göstermektedir.

$$\hat{x}^2u_k = \frac{\sqrt{k(k+1)}}{2}u_{k+2} + \frac{2k-1}{2}u_k + \frac{\sqrt{(k-1)(k-2)}}{2}u_{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}u_k &= (\alpha + i\hat{x})u_k - i\sqrt{2k-2}u_{k-1} \\ &= i\sqrt{\frac{k}{2}}u_{k+1} + \alpha u_k - i\sqrt{\frac{k-1}{2}}u_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Burada $\hat{p}$ kuantum mekaniği bağlamında momentum operatörü olup $\hat{p} \equiv -i\frac{\partial}{\partial x}$ şeklinde ifade edilir. Diğer tüm çapraz operatörler için aşağıdaki özyineleme bağıntıları elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \hat{p}^2u_k &= -\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2}u_{k+2} + 2\alpha i\sqrt{\frac{k}{2}}u_{k+1} + \left(\frac{2k-1}{2} + \alpha^2\right)u_k \\ &\quad - 2\alpha i\sqrt{\frac{k-1}{2}}u_{k-1} - \frac{\sqrt{(k-1)(k-2)}}{2}u_{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}\hat{p}u_k &= i\sqrt{\frac{k}{2}}\hat{x}u_{k+1} + \alpha\hat{x}u_k - i\sqrt{\frac{k-1}{2}}\hat{x}u_{k-1} \\
&= i\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2}u_{k+2} + \alpha\sqrt{\frac{k}{2}}u_{k+1} + \frac{1}{2}iu_k \\
&+ \alpha\sqrt{\frac{k-1}{2}}u_{k-1} - i\frac{\sqrt{(k-1)(k-2)}}{2}u_{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}\hat{x}u_k &= \hat{p}\left[\sqrt{\frac{k}{2}}u_{k+1} + \sqrt{\frac{k-1}{2}}u_{k-1}\right] \\
&= i\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2}u_{k+2} + \alpha\sqrt{\frac{k}{2}}u_{k+1} - \frac{1}{2}iu_k \\
&+ \alpha\sqrt{\frac{k-1}{2}}u_{k-1} - i\frac{\sqrt{(k-1)(k-2)}}{2}u_{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Tüm bu öz-yineleme bağıntılarında, taban fonksiyonlarının indisinin negatif olmasını sağlayan k değerleri aynı zamanda karşılık gelen katsayının sıfır olmasını da sağladığından bu durumdan endişe duymamıza gerek yoktur. Şimdi artık tüm öz-yineleme bağıntılarını ifade ettiğimize göre sırasıyla karşılık gelen matris gösterimlerini kolayca elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
(u_j, \hat{x}u_k) &= \sqrt{\frac{k}{2}}\delta_{j,k+1} + \sqrt{\frac{k-1}{2}}\delta_{j,k-1}, \\
j, k &= 1, 2, \dots \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_j, \hat{x}^2u_k) &= \frac{\sqrt{k(k+1)}}{2}\delta_{j,k+2} + \frac{2k-1}{2}\delta_{j,k} + \frac{\sqrt{(k-1)(k-2)}}{2}\delta_{j,k-2}, \\
j, k &= 1, 2, \dots \quad (3.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_j, \hat{p}u_k) &= i\sqrt{\frac{k}{2}}\delta_{j,k+1} + \alpha\delta_{j,k} - i\sqrt{\frac{k-1}{2}}\delta_{j,k-1}, \\
j, k &= 1, 2, \dots \quad (3.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_j, \hat{p}^2 u_k) = & - \frac{\sqrt{k(k+1)}}{2} \delta_{j,k+2} + 2\alpha i \sqrt{\frac{k}{2}} \delta_{j,k+1} + \left(\frac{2k-1}{2} + \alpha^2 \right) \delta_{j,k} \\
& - 2\alpha i \sqrt{\frac{k-1}{2}} \delta_{j,k-1} - \frac{\sqrt{(k-1)(k-2)}}{2} \delta_{j,k-2}, \\
& j, k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
(u_j, \hat{x} \hat{p} u_k) = & i \frac{\sqrt{k(k+1)}}{2} \delta_{j,k+2} + \alpha \sqrt{\frac{k}{2}} \delta_{j,k+1} + \frac{1}{2} i \delta_{j,k} \\
& + \alpha \sqrt{\frac{k-1}{2}} \delta_{j,k-1} - i \frac{\sqrt{(k-1)(k-2)}}{2} \delta_{j,k-2}, \\
& j, k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
(u_j, \hat{p} \hat{x} u_k) = & i \frac{\sqrt{k(k+1)}}{2} \delta_{j,k+2} + \alpha \sqrt{\frac{k}{2}} \delta_{j,k+1} - \frac{1}{2} i \delta_{j,k} \\
& + \alpha \sqrt{\frac{k-1}{2}} \delta_{j,k-1} - i \frac{\sqrt{(k-1)(k-2)}}{2} \delta_{j,k-2}, \\
& j, k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Şimdi, bu gösterilimleri kullanarak üç köşegenli veya beş köşegenli matrisleri inşa edebiliriz.

İşin hesaplama tarafında iki önemli problemin çözülmüş olduğunu görebiliriz. Bunlardan ilki, taban takımının ortonormalizasyonudur. (3.25)'de tanımlanan taban takımının klasik yolla ortogonalleştirmek yerine (3.23)'deki formülü kullanmak suretiyle bu zorluğun üstesinden gelinmiştir. Üstesinden gelinen ikinci zorluk ise çeşitli operatörlerin matris gösterilimlerinin hesaplanmasıdır. Bu da (3.41)'den (3.46)'e kadar olan formülleri kullanmak suretiyle aşılmıştır. Dolayısı ile oldukça büyük bir zaman tasarrufu sağlanmıştır.

3.4 Yüksek Salınlı Çok Değişkenli Fonksiyonların, Trigonometrik Taban Fonksiyonları Eşliğinde Sendelenimsizlik Teoremi Yardımıyla Nümerik Yaklaşırımı

Gauss kuadratürünün sendelenimsizlik teoreminin bir alt başlığı gibi düşünölebileceğini dikkate alarak sendelenimsizlik teoreminin uygulamasında taban takımının polinom dışında bir yapıyla da alınabileceğini bilmekteyiz. Bu çalışmada bu özelliğı kullanmak suretiyle çok salınlı fonksiyonlarla[14, 15] başa çıkmayı öngörmekteyiz.

Yaklaşırım prosedürünü sendelenim teoremini kullanarak yapacağız. Öncelikle çoklu-indis notasyonunu vererek başlayacağız, sonrasında algoritmamızı adım adım ele alacağız. İlk olarak Taylor açılımının kalan teriminin açık yazılımı ile başlayacağız, daha sonra taban takımını oluşturacak ve son olarak ta bu yapıya sendelenimsizlik teoremini uygulamak suretiyle yaklaşırımı elde edeceğiz.

3.4.1 Çok Değişkenli Fonksiyonlar için Taylor Formülü

Bu kısımda kalan terimi açık ifadesi ile verilmiş olan çok terimliler için Taylor açılımını inceleyeceğiz. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, B topu içinde olsun ve topun merkezi de $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ olsun. f ise $\overline{B}$ 'nin kapanışında tanımlı ve her noktada $(k + 1)$ adet kısmi türeve sahip reel değerli bir fonksiyon olarak alınmış olsun. Çok değişkenli fonksiyon k 'ıncı mertebeden $P_k(x)$ Taylor polinomu olarak ifade edilebilir ve buna karşılık gelen $R_k(x)$ kalan terimi de aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(\mathbf{x}) = P_k(\mathbf{x}) + R_k(\mathbf{x}) \quad (3.47)$$

Burada Taylor polinomu terimi aşağıdaki biçimdedir.

$$P_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{|\sigma|=1}^k \frac{1}{\sigma!} (D^\sigma f)(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\sigma \quad (3.48)$$

Yukarıdaki formülde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$, aslında N boyutlu bir vektör benzeri yapıdan ibaret olan bir çoklu indis olup bileşenleri nonnegatif tamsayılardır. σ üzerinde bazı işlemler şu şekilde tanımlanabilir.

$$|\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_N \quad (3.49)$$

$$\sigma! = \sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_N! \quad (3.50)$$

$$\mathbf{x}^\sigma = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_N^{\sigma_N} \quad (3.51)$$

$$D^\sigma f = \frac{\partial^{\sigma_1}}{\partial x_1^{\sigma_1}} \frac{\partial^{\sigma_2}}{\partial x_2^{\sigma_2}} \dots \frac{\partial^{\sigma_N}}{\partial x_N^{\sigma_N}} f \quad (3.52)$$

kalan terim açık biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} R_k(\mathbf{x}) &= \sum_{|\sigma|=k+1} \frac{k+1}{\sigma!} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^\sigma \int_0^1 (1-t)^k \\ &\times (D^\sigma f)((\mathbf{x} - \mathbf{a})t + \mathbf{a}) dt \end{aligned} \quad (3.53)$$

Burada

$$\begin{aligned} (D^\sigma f)((\mathbf{x} - \mathbf{a})t + \mathbf{a}) &= \\ (D^\sigma f)((x_1 - a_1)t + a_1, \dots, (x_N - a_N)t + a_N) \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.4.2 Taylor Kalan Terimine Yaklaştırım

Bir ağırlık fonksiyonu tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} w_k(t) &\equiv (k+1)(1-t)^k, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

ve bu ağırlık fonksiyonunu kalan terimi aşağıdaki biçimde yazmak için kullanabiliriz.

$$\begin{aligned}
R_k(\mathbf{x}) &= \sum_{|\sigma|=k+1} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^\sigma}{\sigma!} \\
&\times \int_0^1 dt w_k(t) (D^\sigma f)((\mathbf{x}-\mathbf{a})t + \mathbf{a})
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Her ne kadar integralin bu formunu birçok uygulamamızda kullanmış olsak da burada simetrik yapılarla çalışmak daha cazip olacaktır, çünkü yüksek salınımlarla[14, 15] başa çıkabilmek için taban fonksiyonu olarak polinom yapısında olmayan fonksiyonlar da kullanmamız gerekecektir. (3.56) ifadesinin son terimindeki integral 0 ile 1 arasındadır ve integralin orta noktası olan $\frac{1}{2}$ noktasına göre görülebilir bir simetri mevcut değildir. Şimdiki amacımız çekirdekte bu noktaya göre bir simetri oluşturmaktır. Bu amaçla aşağıdaki tek-çift ayrıştırımını kullanabiliriz.

$$\begin{aligned}
(D^\sigma f)((\mathbf{x}-\mathbf{a})t + \mathbf{a}) &\equiv \varphi_{\sigma,+}(t) \\
&+ \varphi_{\sigma,-}(t) \left(t - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

burada

$$\begin{aligned}
\varphi_{\sigma,+}(t) &\equiv \frac{1}{2} [(D^\sigma f)((\mathbf{x}-\mathbf{a})t + \mathbf{a}) \\
&+ (D^\sigma f)(\mathbf{x} - (\mathbf{x}-\mathbf{a})t)]
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\sigma,-}(t) &\equiv \frac{1}{2t-1} [(D^\sigma f)((\mathbf{x}-\mathbf{a})t + \mathbf{a}) \\
&- (D^\sigma f)(\mathbf{x} - (\mathbf{x}-\mathbf{a})t)]
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Bu da, φ fonksiyonları ve dolayısı ile f 'nin $(k + 1)$ 'inci kısmi türevi integrasyon aralığında analitik olmak şartıyla simetri bağıntılarını sağlar.

$$\begin{aligned}\varphi_{\sigma,+}(1-t) &= \varphi_{\sigma,+}(t), \\ \varphi_{\sigma,-}(1-t) &= \varphi_{\sigma,-}(t)\end{aligned}\tag{3.60}$$

Şimdi aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dt w_k(t) (D^\sigma f)((\mathbf{x} - \mathbf{a})t + \mathbf{a}) \\ &= \int_0^1 dt w_k(t) \varphi_{\sigma,+}(t) \\ &\quad + \int_0^1 dt w_k(t) \left(t - \frac{1}{2}\right) \varphi_{\sigma,-}(t)\end{aligned}\tag{3.61}$$

Her ne kadar verilen ağırlık altında integrali alınacak fonksiyon iki çift fonksiyona ayrıştırılmış olsa da bu integrandlar ağırlıklarının simetrik olmamasından dolayı hala simetriden yoksundurlar. Ağırlık fonksiyonları da iki toplamsal ve integrasyon aralığının orta noktasına göre simetrik parçaya ağırlık fonksiyonu özelliğini koruyacak biçimde ayrıştırılacak olursa integraller istenen forma gelecektir.

$$\begin{aligned}w_{k,+}(t) &\equiv \frac{k+1}{2} \left[t^k + (1-t)^k \right], \\ w_{k,-}(t) &\equiv \frac{k+1}{2} \left[(1-t)^k - t^k \right] \left(\frac{1}{2} - t \right)\end{aligned}\tag{3.62}$$

Burada her bir fonksiyon t , $(1-t)$ dönüşümü altında simetrik olup nonnegatif kalmaktadır. Simetrinin varlığı aşıkâr olmakla birlikte nonnegatifliğin ikincisi için açıkça gösterilmesinde fayda vardır. Birincisi zaten t , $[0, 1]$ aralığında kaldığı müddetçe nonnegatif parçaların toplamı halinde olduğundan bu bağlamda açıklama gerektirmemektedir. $\left(\frac{1}{2} - t\right)$ ifadesini çarpan terimin $t = 1/2$ de kökü olduğunu

göstermek zor değildir. Bu çarpanın t 'ye göre $[0, 1]$ aralığındaki ilk türevi hep pozitif olduğundan bu kök tektir ve dolayısı ile bu çarpan bir simetrik fonksiyonun $\left(\frac{1}{2} - t\right)$ ile çarpımından oluşmaktadır. Bu da (3.62)'deki ikinci fonksiyonun söz konusu dönüşüm altında çift olduğu anlamına gelmektedir. Bununla birlikte ağırlık fonksiyonunun varlığı da garanti altına alınmış olmaktadır.

Şimdi aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt w_k(t) \varphi_{\sigma,+}(t) &= \int_0^1 dt w_{k,+}(t) \varphi_{\sigma,+}(t) \\ &+ \int_0^1 dt \frac{2}{2t-1} w_{k,-}(t) \varphi_{\sigma,+}(t) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Burada t , $(1-t)$ ile yer değiştirdiğinde integrand işaret değiştirdiğinden ikinci integral sıfırlanır. Dolayısı ile,

$$\int_0^1 dt w_k(t) \varphi_{\sigma,+}(t) = \int_0^1 dt w_{k,+}(t) \varphi_{\sigma,+}(t). \quad (3.64)$$

Benzer bir tartışma bizi aşağıdaki eşitliğe götürür.

$$\int_0^1 dt w_k(t) \varphi_{\sigma,-}(t) = - \int_0^1 dt w_{k,-}(t) \varphi_{\sigma,-}(t). \quad (3.65)$$

Son iki eşitlikten şu sonucu çıkarabiliriz.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dt (k+1)(1-t)^k (D^\sigma f)((\mathbf{x}-\mathbf{a})t + \mathbf{a}) \\ &= \int_0^1 dt w_{k,+}(t) \varphi_{\sigma,+}(t) - \int_0^1 dt w_{k,-}(t) \varphi_{\sigma,-}(t) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Burada sağ yan integrandları integral değişkenine göre çift fonksiyonlardır.

3.4.3 Taban Fonksiyonları

Bu aşamada ortonormal $u_i(t)$ taban fonksiyonlarını inşa edeceğiz. Salınlı fonksiyonlara yaklaştırım yapmak için kullanacağımız fonksiyonlar saf polinom fonksiyonları olmayıp trigonometrik ve polinomial formların bir birleşimi olarak düşünülmelidir. Nihai olarak oluşturacağımız $u_i(t)$ fonksiyonlarına ulaşmak için aşağıdaki lineer bağımsız fonksiyonlardan yola çıkacağız.

$$v_i(t) \equiv \cos\left(t - \frac{1}{2}\right) \left(t - \frac{1}{2}\right)^{2i-2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.67)$$

Bu yapılar Filon kuadratörü benzeri durumlarda kullanılmaktadır. Bu fonksiyonları seçmemizin nedeni çift fonksiyon yapısını elde etmektir, bu da t yerine $(1 - t)$ konulduğunda fonksiyonun değişmemesi anlamına gelir. Çift fonksiyon yapısını kosinüs yerine aynı tipten sinüs fonksiyonu ile $(t - 1/2)$ 'nin tek kuvvetlerinin çarpımını kullanarak da elde edebilirdik. Bu durumda salınımlarda faz kayması olurdu. Hatta karma bir yapı bile kullanabilirdik. Yapısal olarak ne seçtiğimize bağlı olmaksızın (3.67)'da verilen kümeden veya yukarıda tanımladığımız diğer yapılardan bir ortonormal taban takımı üretebiliriz. Buradan elde edilecek ortonormal taban takımı üç ardışık terimli özyineleme bağıntısını sağlayacaktır ve buradaki lineer birleşim katsayıları bazı sabitler ve $(t - 1/2)^2$ 'lerden oluşacaktır. $(t - 1/2)^2$ 'in matris gösterilimi de bu kümeye göre üç köşegenli olacaktır. Bu sonuç ortogonal polinomların teorisinden gelmektedir. $(t - 1/2)^2$ 'in nonnegatif tamsayı katlarını alıp uygun trigonometrik yapılarla çarparak ortogonalleştiriyoruz. Şimdi artık sendelenimsiz integrasyona devam edebilmek için yeterince donanıma sahip durumdayız.

3.4.4 Sendelenimsiz İntegrasyon

(3.66) ifadesindeki sağ yan integralleri t 'nin $(1 - t)$ ile yer değiştirmesi koşulu altında simetrik ağırlıklar altında tanımlanmıştır. İntegralleri alınacak fonksiyonlarda aynı yer değiştirme altında simetriktirler. Burada integre edilecek fonksiyon-

lar olan φ ler, $[0, 1]$ aralığında analitik olup çift olmaları onları $(t - 1/2)^2$ 'in de birer analitik fonksiyonu olarak görmemizi sağlar. Böylelikle sendelenimsizlik teoremi sadece t 'nin değil fakat aynı zamanda $(t - 1/2)^2$ 'nin de matris gösterilimini kullanacaktır. Bu da sendelenimsiz integrasyon metodunun salınımlardan dolayı kalitesinin düşmesini önleyecektir.

Şimdi (3.66) ifadesinin sağ yan integralleri şu integralin özel durumları olarak algılanabilir.

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^1 dt w(t) \varphi \left(\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \quad (3.68)$$

Burada $w(t)$ ağırlık fonksiyonunun $w(1 - t) = w(t)$ 'yi sağladığı kabul edilmektedir. $[0, 1]$ aralığı üzerinde ve $w(t)$ ağırlık fonksiyonunun taban fonksiyonunun polinom olmayan ortak çarpanının karesi ile çarpımı altında karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayının sonlu boyutlu bir alt uzayını tanımlamak üzere yukarıda tanımlamış olduğumuz $u_1(t), \dots, u_m(t), \dots$ taban takımının ilk n elemanını aldığımızda aşağıdaki tanıımı yapabiliriz.

$$\mathbf{h}_n^T \equiv [h_1 \dots h_n], \quad h_i \equiv \int_0^1 dt w(t) u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.69)$$

$$\mathbf{T}_2^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} T_{11}^{(n)} & \dots & T_{1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1}^{(n)} & \dots & T_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

$$T_{ij}^{(n)} \equiv \left(u_i, \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 u_j \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.71)$$

Burada $\mathbf{T}_2^{(n)}$ 'deki 2 alt-indisi, matris gösterilimi söz konusu olan operatörün kare yapısını çağrıştırmak için kullanılmıştır. Şimdi artık sendelenimsiz integral için aşağı-

ğıdaki formülü yazabiliriz.

$$I \approx \mathbf{h}_n^T \varphi \left(\mathbf{T}_2^{(n)} \right) \mathbf{h}_n \quad (3.72)$$

$w_{k,+}(t)$ and $w_{k,-}(t)$ ağırlık fonksiyonlarına karşılık gelen iki ayrı $\mathbf{T}_2^{(n)}$ matrisi olacaktır. Bunların bileşenleri aşağıda verildiği gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} T_{ij,+} &\equiv \int_0^1 dt w_{k,+}(t) u_i(t) \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 u_j(t), \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ T_{ij,-} &\equiv \int_0^1 dt w_{k,-}(t) u_i(t) \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 u_j(t), \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.73)$$

Bunu (3.66) ifadesine uygulayalım

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dt w_{k,+}(t) \varphi_{\sigma,+}(t) - \int_0^1 dt w_{k,-}(t) \varphi_{\sigma,-}(t) \\ &\approx \mathbf{h}_n^T \varphi_{\sigma,+} \left(\mathbf{T}_{2,+}^{(n)} \right) \mathbf{h}_n - \mathbf{h}_n^T \varphi_{\sigma,-} \left(\mathbf{T}_{2,-}^{(n)} \right) \mathbf{h}_n \end{aligned} \quad (3.74)$$

Şimdi, yukarıdaki ifadenin skaler karşılığını bulabilmek amacıyla $\mathbf{T}_{2,+}^{(n)}$ ve $\mathbf{T}_{2,-}^{(n)}$ matrislerinin özdeğer ve özvektörlerini buluruz.

$$\mathbf{T}_{2,+}^{(n)} \mathbf{t}_{i,+} = \tau_{i,+} \mathbf{t}_{i,+}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.75)$$

$$\mathbf{T}_{2,-}^{(n)} \mathbf{t}_{i,-} = \tau_{i,-} \mathbf{t}_{i,-}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.76)$$

Burada hiçbir özdeğer katlı olmayıp özvektörler de Frobenius anlamında normalize edilmişlerdir. Devamında $\mathbf{T}_{2,+}^{(n)}$ ve $\mathbf{T}_{2,-}^{(n)}$ matrislerinin spektral ayrıştırmalarını

aşağıdaki biçimde yazarız.

$$\mathbf{T}_{2,+}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \tau_{i,+} \mathbf{t}_{i,+} \mathbf{t}_{i,+}^T \quad (3.77)$$

$$\mathbf{T}_{2,-}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \tau_{i,-} \mathbf{t}_{i,-} \mathbf{t}_{i,-}^T \quad (3.78)$$

Şimdi, (3.66) ifadesini (3.53) ifadesinde yerine koyacak olursak

$$\begin{aligned} R_k(\mathbf{x}) &= \sum_{|\sigma|=k+1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\sigma}{\sigma!} \\ &\times \int_0^1 dt w_k(t) (D^\sigma f)((\mathbf{x} - \mathbf{a})t + \mathbf{a}) \\ &\approx \sum_{|\sigma|=k+1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\sigma}{\sigma!} \\ &\times \left[\mathbf{h}_n^T \varphi_{\sigma,+} \left(\mathbf{T}_{2,+}^{(n)} \right) \mathbf{h}_n - \mathbf{h}_n^T \varphi_{\sigma,-} \left(\mathbf{T}_{2,-}^{(n)} \right) \mathbf{h}_n \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

Özdeğer ve özvektörleri de yerlerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned} R_k(\mathbf{x}) &\approx \sum_{|\sigma|=k+1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\sigma}{\sigma!} \sum_{i=1}^n \varphi_{\sigma,+}(\tau_{i,+}) \\ &\times \left(\mathbf{h}_n^T \mathbf{t}_{i,+} \right)^2 \\ &+ \sum_{|\sigma|=k+1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\sigma}{\sigma!} \sum_{i=1}^n \varphi_{\sigma,-}(\tau_{i,-}) \\ &\times \left(\mathbf{h}_n^T \mathbf{t}_{i,-} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Böylelikle yaklaştırım formülü son şeklini almış olacaktır.

Kolayca gözlemlenebileceği gibi, çoklu-indis notasyonu ile çalışmak hiç de kolay değildir. Bu durum trigonometrik taban takımı için de benzer bir zorluk arz etmek-

tedir. Ancak bu algoritma bir kez oluşturulduktan sonra tek yapılacak iş kullanılacak fonksiyondan bağımsız olan $\mathbf{T}_2^{(n)}$ matrislerini hesaplayarak arşivlemek ve daha sonra bu matrislerin özdeğer ve özvektörlerini hesaplayarak bulunan değerleri, istenen yaklaşıtırmı verecek biçimde formülde yerine koymak olacaktır. Sendelenimsizlik teoreminin fonksiyonun analitik olduğu bölgelerde geçerli olduğunu dikkate alarak yaklaşıtırlacak fonksiyonun analitik olmadığı bölgelerden uzak duracak biçimde seçim yapmak akıllıca olacaktır. İncelenecek tanım bölgesinde analitikliği bozan bir unsur olmasa bile analitikliği bozan noktaların yakınlarında da yaklaşıtırmının zayıflayacağını unutmamak gerekecektir.

3.5 Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilimin Cauchy İntegral Formunda İfade Edilmiş çok Değişkenli Taylor Açılımına Uygulanması

ÇYÇG metodunu Sendelenimsizlikle birleştirmek ve analitik bir fonksiyonun, kalan terimi integral formunda olacak biçimde Taylor açılımını almak suretiyle çok değişkenli fonksiyonlar için daha iyi sonuçlar elde edilebilmektedir. Şimdi önce bu iki metodu tanımlayalım sonrasında devam edelim.

3.5.1 Üçü Birarada: Taylor Açılımı

İşe şöyle başlayalım:

$$\int_a^x d\xi f'(\xi) = f(x) - f(a) \quad (3.81)$$

ve $f(x)$ 'i bulmamızı takiben bir dönüşüm ve kısmi türev alma işlemi yapalım.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x d\xi f'(\xi) \\
&= f(a) - \int_a^x d(x-\xi) f'(\xi) \\
&= f(a) - \left\{ (x-\xi) f'(\xi) \Big|_a^x - \int_a^x d\xi (x-\xi) f''(\xi) \right\} \\
&= f(a) + (x-a) f'(a) + \int_a^x d\xi (x-\xi) f''(\xi) \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Bu bize kalan terimi integral formunda ifade edilmiş Taylor açılımını verir. Şimdi çok değişkenli fonksiyonlarla çalıştığımız dikkate alarak aynı yapıyı çok değişkenli $f(\mathbf{x})$ fonksiyonları için kuralım. $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ olsun. Sadece tek bir değişken üzerinde çalışabilme amaçlı olarak $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{a}$ 'yi başlayan doğru parçasını $\mathbf{a}$ 'yı $t = 0$ 'a ve $\mathbf{x}$ 'i $t = 1$ 'e bağlayan bağıntıyı elde edecek biçimde parametrelememiz gerekmektedir. Böylelikle aşağıdaki koşullar altında $f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$, $t = 0$ 'da bulunur.

$$f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = f(\mathbf{a} + t \{f'(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))\}) \tag{3.83}$$

Şimdi parametrelediğimiz fonksiyonun t 'ye göre türevini alalım ve bu türevin $t = 0$ 'daki değerini bulalım. Bu da aslında fonksiyonun $\mathbf{a}$ 'daki türevini almak anlamına gelecektir.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{df}{dt} \right)_{t=0} &= (x_1 - a_1) \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{a}} \\
&\quad + (x_2 - a_2) \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{a}} \\
&\quad + \dots + (x_N - a_N) \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right)_{\mathbf{a}} \tag{3.84}
\end{aligned}$$

Bu ifadeyi yerine koyduğumuzda, kalan terimi integral formunda ifade edilmiş çok değişkenli Taylor açılımını elde etmiş oluruz.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + t \left(\frac{df}{dt} \right)_{t=0} + \dots + \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{dt^n} \right)_{t=0} + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^t d\tau (t-\tau)^{(n+1)} \left(\frac{d^{n+1} f}{dt^{n+1}} \right) \quad (3.85)$$

$t = 0$ 'da aldığımız türevlerin dışında $t = 0$ 'ı ayrıca $f(x)$ 'i sol yan olarak elde etme amaçlı olarak alırız.

Şimdi artık son geri sayım için kalan terimindeki integrali adlandıralım.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{(n+1)} \left(\frac{d^{n+1} f}{dt^{n+1}} \right) \quad (3.86)$$

ve karşılığı olan Cauchy çevirge integralini yerine koyalım.

$$\mathcal{I} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int d\tau \oint_c d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\tau)^{n+2}} (1-\tau)^{n+1} \quad (3.87)$$

Bu aşamada aynı parametreleme işleminin bir benzerini yapmak suretiyle t 'nin yerine ζ koyarak ifadesini elde ederiz. Şimdi artık bu ifadenin $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{x}$ şeklinde iki bağımsız değişkeni olduğuna göre uygun destek işlevleri seçimi altında ÇYÇG'ye açabiliriz.

Aslında Taylor açılımı, ÇYÇG ve sendelenimsizlik yaklaşıtlarını gibi üç ayrı metodun bir arada kullanılması ilk bakışta hata birikimi endişesine yol açmakla birlikte, fonksiyonun çok değişkenliliği hangi metod altında olursa olsun ele alınması sıkıntılı olacağından bu endişe yersiz olacaktır. Ancak tabii destek fonksiyonu eniyilemesi gelecekte önemli bir çalışma hedefi olarak karşımıza çıkmaktadır.

3.6 Sendelenimsizlik Yaklaşımının Kontur İntegrasyonu ile Desteklenmesi: Dairesel Konturlar

Sendelenim teoremi uyarınca bir fonksiyonun veya argümanının matris gösteriliminin iç çarpımlar yoluyla tanımlanıyor olması tanım kümeleri üzerinde analitik ve karesi integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayında çalışmamızı gerektirmektedir. Çalışmamızın bu bölümünde ortaya konulan fark integralin Cauchy Kontur formunda ifade edilmesi ve sonuçların öncekilerle kıyaslanmasıdır.

3.6.1 Dairesel Kontur İntegral Gösterilimi

Bağımsız x değişkeninin $[0, 1]$ aralığı üzerinde değerler aldığı $f(x)$ reel değerli fonksiyonunu ele alalım. Gerek bağımsız değişken gerekse fonksiyon üzerindeki reel değerlilik önemli bir kısıt getirmemektedir. Çünkü, belli yolların kullanılması ve reel ile sanal kısımların ayrılması suretiyle kompleks değerler reel değerlere dönüştürülebilir. Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu için Cauchy kontur integrali gösterilimini aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} \quad (3.88)$$

Burada $C[0, 1]$ aralığı konturun içinde kalacak ve kontur tarafından çevrelenen tekillik olmayacak biçimde seçilmiş, saatin ters yönünde tanımlı bir konturdur. Daha net bir tanım için konturun merkezini reel ve sanal eksenlerin negatif bölgelerini de içerecek biçimde kompleks düzlemin pozitif çeyreğinde yer alan (x_c, y_c) noktası olarak seçeriz. Dairesel konturun yarıçapını da r ile sembolize ederiz. r 'nin değeri $[0, 1]$ aralığının kontur içinde kalması garantilenecek biçimde seçilmelidir. Pozitif bölge içindeki pozisyonu ise o denli büyük bir kısıtlama getirmemektedir, çünkü diğer bölgelere genişletme sorunsuz olarak yapılabilir. Buna karşın bu bölgede seçim yapmak geometrik nedenlerle analizi kolaylaştırmaktadır.

Biz burada kutupsal koordinatları kullanmayı tercih edeceğiz. Dolayısı ile kon-

tur noktalarını aşağıdaki gösterilimle göstermemiz mümkün olacaktır.

$$\zeta \equiv r_{\zeta}(\theta_{\zeta})e^{i\theta_{\zeta}} \quad (3.89)$$

Burada çizgisel/radyal kısım, konturun merkezi kompleks düzlemin orijininde yer almamak şartıyla açıya bağlı olarak değişmektedir. Açısal değişken θ_{ζ} , ilgili nokta orijinden başlayan ışının üzerinde olmak ve konturun merkezinden geçmek koşuluyla merkez koordinatlarının açısal kısmına eşit olacaktır. (Bunu “Orijin-merkez ışını” olarak adlandırabiliriz). Konturun merkezi için de aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$x_c = r_c \cos \theta_c, \quad y_c = r_c \sin \theta_c, \quad (x_c + iy_c) = r_c e^{i\theta_c} \quad (3.90)$$

Bu da bizim simetrilere dayanarak faydalanabilmek amaçlı olarak θ_{ζ} tanım bölgesini $\theta_{\zeta} = 0$ Orijin-merkez ışınına karşılık gelecek biçimde $[-\pi, \pi]$ aralığı üzerinde alabilmemize olanak sağlar. Bu da bir anlamda kompleks düzlem eksenlerinin θ_c açısı kadar döndürülmesine karşılık gelir.

Herhangi bir kontur noktasının kontur merkezine uzaklığının sabit kalması gerekliliği nedeniyle yarıçapı da şöyle ifade edebiliriz.

$$(r_{\zeta} \cos \theta_{\zeta} - x_c)^2 + (r_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} - y_c)^2 = r^2 \quad (3.91)$$

Bu da aşağıdaki yazım biçimine denk gelir.

$$r_{\zeta}^2 + r_c^2 - 2r_c r_{\zeta} \cos(\theta_{\zeta}) = r^2 \quad (3.92)$$

r_{ζ} için çözüm ise şöyledir

$$r_{\zeta}(\theta_{\zeta}) = r_c \cos(\theta_{\zeta}) + \sqrt{r^2 - r_c^2 \sin^2(\theta_{\zeta})} \quad (3.93)$$

Burada pozitif işaretin seçilmesi θ_{ζ} sıfırlandığında gerçek çözümü verecek olma-

sındandır. Sıfırlanma değeri kontur noktasını orijin merkez ışını üzerinde iki farklı yerde oluşturabilir ki biz bunlardan orijine uzak olanı seçiyoruz.

Şimdi artık konturun açık yapısı elimizde mevcut olup kontur integrali gösterimini aşağıdaki biçimde yazmamız mümkündür.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} d[r_{\zeta}(\theta_{\zeta}) e^{i\theta_{\zeta}}] \frac{f(r_{\zeta}(\theta_{\zeta}) e^{i\theta_{\zeta}})}{r_{\zeta}(\theta_{\zeta}) e^{i\theta_{\zeta}} - x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_{\zeta} K(\theta_{\zeta}) f(r_{\zeta}(\theta_{\zeta}) e^{i\theta_{\zeta}}) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Burada

$$K(\theta_{\zeta}) \equiv K_1(\theta_{\zeta}) K_2(\theta_{\zeta}) K_3(\theta_{\zeta}) \quad (3.95)$$

ve

$$K_j(\theta_{\zeta}) \equiv K_{j,1}(\theta_{\zeta}) + i \sin(\theta_{\zeta}) K_{j,2}(\theta_{\zeta}), \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.96)$$

ve buna paralel olarak

$$s_{\zeta,x}(\theta_{\zeta}, x) \equiv r_{\zeta}(\theta_{\zeta})^2 + 2x r_{\zeta}(\theta_{\zeta}) \cos(\theta_{\zeta}) + x^2 \quad (3.97)$$

Bu da ζ ve x noktaları ile karakterize edilen noktalar arası mesafenin karesi olup

$$\begin{aligned} K_{1,1}(\theta_{\zeta}) &\equiv r_{\zeta}(\theta_{\zeta}), & K_{1,2}(\theta_{\zeta}) &\equiv \frac{\partial r_{\zeta}(\theta_{\zeta})}{\partial \cos(\theta_{\zeta})} \\ K_{2,1}(\theta_{\zeta}) &\equiv \cos(\theta_{\zeta}), & K_{2,2}(\theta_{\zeta}) &\equiv 1 \\ K_{3,1}(\theta_{\zeta}) &\equiv \frac{1}{s_{\zeta,x}(\theta_{\zeta}, x)} (r_{\zeta}(\theta_{\zeta}) \cos(\theta_{\zeta}) - x), & K_{3,2}(\theta_{\zeta}) &\equiv \frac{1}{s_{\zeta,x}(\theta_{\zeta}, x)} r_{\zeta}(\theta_{\zeta}) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Kolayca farkedilebileceği gibi $\sin(\theta_{\zeta})$ çarpanının ötesinde tüm sanal kısımlar $\cos(\theta_{\zeta})$ ifadesine bağlıdır. Aynı şey f fonksiyonunun sanal kısmı için de geçerlidir.

Gerçekten de integrandın f çarpanını reel ve sanal kısımlarını ayırmak suretiyle şöyle yazabiliriz.

$$f\left(r_{\zeta}(\theta_{\zeta})e^{i\theta_{\zeta}}\right) \equiv f_1\left(\cos(\theta_{\zeta})\right) + i\sin(\theta_{\zeta})f_2\left(\cos(\theta_{\zeta})\right) \quad (3.99)$$

ve burada

$$\begin{aligned} f_1\left(\cos(\theta_{\zeta})\right) &\equiv \frac{1}{2}\left[f\left(r_{\zeta}(\theta_{\zeta})e^{i\theta_{\zeta}}\right) + f\left(r_{\zeta}(\theta_{\zeta})e^{-i\theta_{\zeta}}\right)\right], \\ f_2\left(\cos(\theta_{\zeta})\right) &\equiv \frac{-i}{2\sin(\theta_{\zeta})}\left[f\left(r_{\zeta}(\theta_{\zeta})e^{i\theta_{\zeta}}\right) - f\left(r_{\zeta}(\theta_{\zeta})e^{-i\theta_{\zeta}}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.100)$$

Bu ifadenin $\sin(\theta_{\zeta})$ 'ya bağlı olmadığı aşıkardır.Şimdi (3.96) ve (3.97) ifadelerini birleştirmek suretiyle aşağıdaki ifadeyi yazmamız mümkündür

$$K\left(\theta_{\zeta}\right) = \kappa_1\left(\cos(\theta_{\zeta})\right) + i\sin(\theta_{\zeta})\kappa_2\left(\cos(\theta_{\zeta})\right) \quad (3.101)$$

yine burada

$$\begin{aligned} \kappa_1\left(\cos(\theta_{\zeta})\right) &\equiv K_{1,1}(\theta_{\zeta})K_{2,1}(\theta_{\zeta})K_{3,1} - \\ &\quad \left(1 - \cos(\theta_{\zeta})^2\right)\left[K_{1,2}(\theta_{\zeta})K_{2,2}(\theta_{\zeta})K_{3,1}(\theta_{\zeta})\right. \\ &\quad \left.+ K_{1,1}(\theta_{\zeta})K_{2,1}(\theta_{\zeta})K_{3,2}(\theta_{\zeta}) + K_{1,2}(\theta_{\zeta})K_{2,1}(\theta_{\zeta})K_{3,2}(\theta_{\zeta})\right] \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \kappa_2\left(\cos(\theta_{\zeta})\right) &\equiv K_{1,1}(\theta_{\zeta})K_{2,1}(\theta_{\zeta})K_{3,2}(\theta_{\zeta}) + K_{1,1}(\theta_{\zeta})K_{2,2}(\theta_{\zeta})K_{3,1}(\theta_{\zeta}) \\ &\quad + K_{1,2}(\theta_{\zeta})K_{2,1}(\theta_{\zeta})K_{3,1}(\theta_{\zeta}) \\ &\quad - \left(1 - \cos(\theta_{\zeta})^2\right)K_{1,2}(\theta_{\zeta})K_{2,2}(\theta_{\zeta})K_{3,2}(\theta_{\zeta}) \end{aligned} \quad (3.103)$$

Şimdi (3.100) ve (3.101) bizi aşağıdaki tanıma götürür.

$$K(\theta_\zeta) f(r_\zeta(\theta_\zeta) e^{i\theta_\zeta}) \equiv \chi_1(\cos(\theta_\zeta)) + i \sin(\theta_\zeta) \chi_2(\cos(\theta_\zeta)) \quad (3.104)$$

burada

$$\begin{aligned} \chi_1(\cos(\theta_\zeta)) &\equiv \kappa_1(\cos(\theta_\zeta)) f_1(\cos(\theta_\zeta)) \\ &\quad - (1 - \cos(\theta_\zeta))^2 \kappa_2(\cos(\theta_\zeta)) f_2(\cos(\theta_\zeta)) \\ \chi_2(\cos(\theta_\zeta)) &\equiv \kappa_1(\cos(\theta_\zeta)) f_2(\cos(\theta_\zeta)) + \kappa_2(\cos(\theta_\zeta)) f_1(\cos(\theta_\zeta)) \end{aligned} \quad (3.105)$$

Tüm bunların ışığında aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_\zeta \chi_1(\cos(\theta_\zeta)) + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_\zeta \sin(\theta_\zeta) \chi_2(\cos(\theta_\zeta)) \quad (3.106)$$

Burada $\cos(\theta_\zeta)$ ifadesinin sıfırdan farklı her tamsayı üssü $\sin(\theta_\zeta)$ ile çarpılmasını takiben $[-\pi, \pi]$ aralığında integre edildiğinde sıfır değerini vereceğinden dolayı ikinci integral sıfırlanacaktır. Diğer yandan $\chi_2(\cos(\theta_\zeta))$ fonksiyonu θ_ζ 'nın bir değer aldığı ve eş ifadesinin zıt işaretli değeri aldığı durumların her birinde aynı değeri üretecektir. Bu da bizim aşağıdaki ifadeyi yazmamıza imkan verir.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta_\zeta \chi_1(\cos(\theta_\zeta)) \quad (3.107)$$

Burada koordinatları değiştirmek suretiyle kosinüs argümanı yerine doğrudan integrasyon değişkenini tercih etmemiz de mümkündür.

$$\mu \equiv \cos(\theta_\zeta) \quad (3.108)$$

Bununla birlikte artık (3.107)'deki integral gösterilimine son şeklini verebiliyor ola-

cağız.

$$f(x) = \int_{-1}^1 d\mu W(\mu) \chi_1(\mu) \quad (3.109)$$

$$W(\mu) \equiv \frac{1}{\pi \sqrt{1-\mu^2}}. \quad (3.110)$$

Kolayca görülebileceği gibi $W(\mu)$ gerçek bir ağırlık fonksiyonu olabilmenin tüm koşullarını sağlamaktadır ve bunun da ötesinde $W(\mu)$ nın $[-1, 1]$ aralığı üzerindeki integrali bize 1 verecektir. Bu da daha sonraki çalışmamızda uygulayacağımız sendelenimsizlik yaklaşıtlırımını kolaylaştırmacı bir faktör olacaktır.

Çalışmanın bu bölümünde yaklaşıtlırım uygulanmak istenen fonksiyonun sendelenim yaklaşıtlırımına uygun bir biçimde kontur integrali gösterilimine adapte edilmesi hedeflenmiştir. Söz konusu kontur, fonksiyonun tüm tekilliklerini dışlayacak ve tüm integrasyon aralığını kapsayacak şekilde oluşturulmuştur. Ağırlık benzeri çarpanlar için karşımıza çıkabilecek umulmadık tekillikler de uygun dal kesimleri kullanılmak suretiyle dışlanabilecektir.

3.6.2 Oluşturulan Dairesel Konturlar Üzerinde Sendelenimsizlik Yaklaşıtlırımı

Bir fonksiyonun veya argümanının matris gösteriliminin iç çarpımlar yoluyla tanımlanıyor olması tanım kümeleri üzerinde analitik ve karesi integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayında çalışmamızı gerektirmektedir. Bu çalışmada ortaya konulan fark integralin Cauchy Kontur formunda ifade edilmesi ve bazı özelliklerin öncekilerle kıyaslanmasıdır.

3.6.3 Dairesel Kontur İntegral Gösterilimi

Bir önceki alt başlıkta çalışmamızda dairesel kontur integrali gösterilimine sendelenimsizlik teoremini uygulayabileceğimiz son şeklini vermiştik.

Kolayca görülebileceği gibi $W(\mu)$ gerçek bir ağırlık fonksiyonu olabilmenin tüm koşullarını sağlamaktadır ve bunun da ötesinde $W(\mu)$ nın $[-1, 1]$ aralığı üzerindeki integrali bize 1 verecektir. Bu da çalışmanın devamında uygulayacağımız sen-

delenimsizlik yaklaşırtırımını kolaylaştırıcı bir faktör olacaktır.

3.6.4 Sendelenimsizlik Yaklaştıranları

(3.109) eşitliğindeki sağ yan integrali $[-1, 1]$ aralığı üzerinde μ analitik fonksiyonlarının kullanımını akla getirmektedir. Bu fonksiyonların bir lineer vektör uzayı oluşturacakları kolayca gösterilebilir. Eğer aşağıdaki ağırlıklı iç çarpımları tanımlayacak olursak bu uzay Hilbert uzayı haline gelecektir.

$$(g_1, g_2) \equiv \int_{-1}^1 d\mu \frac{1}{\pi \sqrt{1-\mu^2}} g_1(\mu) g_2(\mu), \quad g_1(\mu), g_2(\mu) \in \mathcal{H} \quad (3.111)$$

Burada $\mathcal{H}$ söz konusu Hilbert uzayını göstermektedir. Tanımından da çıkarılabileceği gibi $\mathcal{H}$, μ 'nın negatif olmayan tamsayı üslûleri olarak tanımlanan üslû fonksiyonlar tarafından örtülmektedir. Bu fonksiyonlar aralarında ortogonal olmayıp, analizimizde kolaylık sağlamak amacıyla ortonormalleştirilmeleri gerekmektedir. Bunun için ya Gram-Schmidt ya da Cholesky algoritmaları kullanılabilir. Eğer ortonormalizasyon azalan üslûlere göre yapılacak olursa, reel değerli bileşenlerin kareköklerini alma işlemi sırasında pozitif köklerin kullanılması şartıyla sonuç tek türlü olacaktır. Bu ifadelerin açık biçimi şu formülde verilmektedir:

$$u_j(\mu) \equiv \begin{cases} 1 & j = 1; \\ \sqrt{2} T_{j-1}(\mu) & j \geq 2 \end{cases} \quad (3.112)$$

Burada $T_{j-1}(\mu)$ Chebyshev fonksiyonunu temsil etmektedir ve j matris bileşenlerinin indislenme biçimi uyarınca 0'dan değil 1'den başlamaktadır. Bu formül bize (3.109) ifadesini aşağıdaki gibi yazma imkanı verir

$$f(x) = \int_{-1}^1 d\mu W(\mu) u_1(\mu) \chi_1(\mu) u_1 \equiv (u_1, \widehat{\chi}_1 u_1) \quad (3.113)$$

Burada $\widehat{\chi}_1$ operandını fonksiyon değeri $\chi_1(\mu)$ ile çarpan fonksiyon operatörüdür. Dolayısı ile aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$\widehat{\chi}_1 \equiv \chi_1(\widehat{\mu}) \quad (3.114)$$

Şimdi artık verilen taban takımı üzerinde $\widehat{\chi}_1$ 'nin matris gösterilimini belirleyebiliriz.

$$\mathcal{U} \equiv \{u_j(\mu)\}_{j=1}^{\infty} \quad (3.115)$$

ve devamında da şunu yazmak mümkündür.

$$\mathbf{M}(\widehat{\chi}_1) \equiv (\mathbf{u}, \widehat{\chi}_1 \mathbf{u}^T) \quad (3.116)$$

Burada

$$\mathbf{u} \equiv [u_1(\mu) \dots u_j(\mu) \dots]^T. \quad (3.117)$$

(3.116) eşitliğinin sağ yanı bir dış çarpımın integrali olup matris yapısındadır. Taban takımı sonsuz sayıda sayılabilir elemandan oluştuğundan matris gösterilimi de sonsuz x sonsuz yapısındadır. Taban takımının tamlığını dikkate alacak olursak şunu yazabiliriz.

$$\mathbf{M}(\widehat{\chi}_1) \equiv \chi_1(\mathbf{M}(\widehat{\mu})). \quad (3.118)$$

Bir tanım yaparız,

$$\mu \equiv \mathbf{M}(\widehat{\mu}) \quad (3.119)$$

ve şunu elde ederiz

$$\mathbf{M}(\widehat{\chi}_1) \equiv \chi_1(\mu) \quad (3.120)$$

Bu da $\mathcal{U}$ taban takımı tam olduğu müddetçe geçerli olacaktır. Aksi takdirde sıfırlanmayan sendelenimler nedeniyle hatalar doğacaktır. $\boldsymbol{\mu}$ matrisi f fonksiyonundan bağımsız olduğundan evrensel bir matristir ve bağımsız değişkenin matris gösterilimidir. Tüm bunlar bizi (3.113) ifadesini aşağıdaki biçimde tekrar yazmaya götürür.

$$f(x) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}(\widehat{\chi}_1) \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^T \chi_1(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{e}_1 \quad (3.121)$$

(3.120) ifadesindeki sonsuz boyutluluk, uygulama pratiğinde bize bu gösterimde kesme yapma zorunluluğu doğurur. Şöyle yazabiliriz:

$$f(x) = \mathbf{e}_1^{(n)T} \mathbf{M}^{(n)}(\widehat{\chi}_1) \mathbf{e}_1^{(n)} \approx \mathbf{e}_1^{(n)T} \chi_1(\boldsymbol{\mu}^{(n)}) \mathbf{e}_1^{(n)} \quad (3.122)$$

Buradaki üst indis (n) ilgili birimin üzerinde kesme yapılmış taban takımı üzerindeki kesme mertebesini göstermektedir.

$$\mathcal{U}^{(n)} \equiv \{u_j\}_{j=1}^{j=n}. \quad (3.123)$$

(3.121) ifadesinde yapılan yaklaştırım daha önce de tanımını yapmış olduğumuz “Sendelenimsizlik Teoremi” adını alır.

$\chi_1(\boldsymbol{\mu}^{(n)})$ matrisinin hesaplanması farklı yöntemler kullanarak yapılabilir. Biz bunlardan spektral gösterilimi tercih ediyoruz.

$$\chi_1(\boldsymbol{\mu}^{(n)}) = \sum_{j=1}^n \chi_1(\bar{\boldsymbol{\mu}}_j^{(n)}) \bar{\boldsymbol{\mu}}_j^{(n)} \quad (3.124)$$

Burada üst çizgili terimler özdeğerlere, üst çizgili hem koyu yazılmış olanlar da özvektörlere karşılık gelmektedir. Bu formül(3.122) ifadesinde kullanılacak olursa aşağıdaki sonucu verecektir.

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^n \chi_1(\bar{\boldsymbol{\mu}}_j^{(n)}) \left(\mathbf{e}_1^{(n)T} \bar{\boldsymbol{\mu}}_j^{(n)} \right)^2. \quad (3.125)$$

$\mu^{(n)}$ matrisi üç köşegencil bir yapıdadır. Özdeğerler de birinci türden Chebyshev polinomlarının sıfırlarına karşılık gelmektedir. $T_n(\mu) = \cos(n\theta_\zeta)$. Buradan şu ifadeyi yazabiliriz.

$$\bar{\mu}_j^{(n)} = \cos\left[\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right], \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.126)$$

(3.125) eşitliğinin sağ yanındaki toplam ifadesindeki karesi alınmış terim aslında j 'inci normalize özvektörün birinci elemanından ibarettir. Açık ifade için bu yapıyı hesaplamamız gerekmektedir. Bu amaçla, birinci türden Chebyshev polinomları arasındaki ilişkilerden üretebileceğimiz ve aşağıda verilmiş olan vektör eşitliğini kullanabiliriz.

$$\mu^{(n)} \mathbf{u}^{(n)}(\mu) = \mu \mathbf{u}^{(n)}(\mu) + \sqrt{2} T_{n+1}(\mu) \mathbf{e}_1^{(n)} \quad (3.127)$$

Burada analizi kolaylaştırmak adına $\mathbf{u}^{(n)}$ vektörünün μ bağımlılığı da gösterilmektedir. Bu formül $\mu^{(n)}$ matrisinin j 'inci özvektörünün $\mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mu}_j^{(n)})$ vektörüne orantılı olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısı ile

$$\bar{\mu}_j^{(n)} = \frac{1}{\left\| \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mu}_j^{(n)}) \right\|^2} \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mu}_j^{(n)}) \quad (3.128)$$

ve

$$\left(\mathbf{e}_1^{(n)T} \bar{\mu}_j^{(n)} \right)^2 = \frac{1}{\left\| \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mu}_j^{(n)}) \right\|_{vec}^2} \quad (3.129)$$

Burada vec alt-indisi vektör normu anlamına kullanılmaktadır. İfadeyi açık biçimde yazacak olursak,

$$\left\| \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mu}_j^{(n)}) \right\|_{vec}^2 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} T_k(\bar{\mu}_j^{(n)})^2 \quad (3.130)$$

Bu da bizi Birinci türden Chebyshev polinomları arasındaki rekürsif ilişkiye odaklanmamızı getirir.

$$T_{k+1}(\mu) + T_{k-1}(\mu) = 2\mu T_k(\mu), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.131)$$

Bu da bize her iki tarafın da karesini aldığımızda aşağıdaki formülü verir.

$$T_{k+1}(\mu)^2 + T_{k-1}(\mu)^2 + 2T_{k+1}(\mu)T_{k-1}(\mu) = 4\mu^2 T_k(\mu)^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.132)$$

Bu ifadedeki karma çarpım terimleri aşağıdaki formül kullanılmak suretiyle yok edilebilir.

$$T_k(\mu)^2 - T_{k+1}(\mu)T_{k-1}(\mu) = 1 - \mu^2, \quad \mu \in [-1, 1]. \quad (3.133)$$

Bu yok etme işlemi Chebyshev polinomlarının kareleri arasındaki rekürsif ilişkiyi üretir.

$$T_{k+1}(\mu)^2 + T_{k-1}(\mu)^2 + (2 - 4\mu^2)T_k(\mu)^2 = 2(1 - \mu^2), \quad \mu \in [-1, 1] \quad (3.134)$$

ki bu da k 'nın 1 ile $n - 1$ arasındaki değerleri için her iki tarafın toplamını aldığımızda ve elde edilen denklemi birinci türden Chebyshev polinomlarının 1 ile $n - 1$ 'inci dereceler için çözdüğümüzde aşağıdaki formülü verir.

$$\sum_{k=1}^{n-1} T_k(\mu)^2 = \frac{T_{n-1}(\mu)^2 - T_n(\mu)^2}{4(1 - \mu^2)} + \frac{2n - 3}{4}. \quad (3.135)$$

Böylelikle (3.130) eşitliğini aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{u}^{(n)} \left(\bar{\mu}_j^{(n)} \right) \right\|_{vec}^2 &= 1 + 2 \left[\frac{T_{n-1}(\bar{\mu}_j^{(n)})^2}{4(1 - \bar{\mu}_j^{(n)2})} + \frac{2n-3}{4} \right] \\
&= n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 - \bar{\mu}_j^{(n)2})} T_{n-1} \left(\bar{\mu}_j^{(n)} \right)^2 \\
&= n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 - \bar{\mu}_j^{(n)2})} \cos \left[(n-1) \left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right]^2. \quad (3.136)
\end{aligned}$$

Tüm bunlar bizim (3.125) ifadesini aşağıdaki biçimde yazmamızı sağlar.

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^n \sigma_{j,n} \chi_1 \left(\cos \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right] \right) \quad (3.137)$$

Burada

$$\begin{aligned}
\sigma_{j,n} &\equiv \frac{2 \sin \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right]^2}{(2n-1) \sin \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right]^2 + \cos \left[(n-1) \left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right]^2}, \\
&j = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.138)
\end{aligned}$$

(3.137) ifadesini daha açık biçimde şöyle yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx \sum_{j=1}^n \sigma_{j,n} \kappa_1 \left(\cos \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right] \right) f_1 \left(\cos \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right] \right) \\
&+ \sum_{j=1}^n \sigma_{j,n} \sin \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right]^2 \kappa_2 \left(\cos \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right] \right) f_2 \left(\cos \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} \right] \right) \quad (3.139)
\end{aligned}$$

Burada tüm κ_1 , κ_2 , f_1 , f_2 fonksiyonları x 'in değerine ve dairesel konturun seçimine bağlı olarak değişebilir. Dört ayrı durum gözlemlenebilir: (1) Ne merkezi ne yarıçapı x 'e bağlı değildir. (2) Sadece merkez x 'e bağlıdır, (3) Sadece yarıçap x 'e bağ-

lıdır, (4) Hem merkez, hem de yarıçap x' e bağlıdır. Birinci hariç tüm bu durumlar f_1 ve f_2 değerlerinin x' e bağlı değişmesi sonucunu doğurur ve yukarıdaki yaklaşı-
 rım $f(x)$ 'in değerini x' e bağlı noktalarda hesaplanan bir takım başka f değerlerine
 bağlar. Bu durumlar ilk bakışta pek pratik yararlılıkları yokmuş gibi gözükme-
 dirler. Bununla birlikte ilk durum için yukarıdaki yaklaşırtım $f(x)$ değerini κ 'lar
 üzerinden x' in bazı fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak verir ve buradaki lineer
 birleşim katsayıları x' ten bağımsız bazı f değerlerine eşittir. Bu yaklaşırtım kuadra-
 tür benzeri bir formül olup x' ten bağımsız sonlu sayıda fonksiyon değerine ihtiyaç
 duymaktadır. Aslında reel eksen üzerindeki düğüm-lerin değerleri dairesel düğüm
 değerlerine karşılık gelmektedir. Bu düğüm-ler bir çember üzerinde olup ardışık iki
 düğüm arasındaki açı sabittir. Bir başka deyişle çember $2n$ adet düğüm-den oluşan
 eşit çember yaylarına bölünmüştür.

3.6.5 Basit bir Açıklayıcı Örnek

Bu bölümde sendelenim teoreminin doğrudan orijinal integrale uygulanması ile bir
 önceki çalışmada bahsi geçen kontur integraline uygulanması kıyaslanacaktır. Ori-
 jinal integralimizde sabit $f(x) = 1$ fonksiyonu kullanılmış olup integrasyon aralığı
 da 1 olduğundan sonuç da 1 olmaktadır ki bu da birim aralık üzerinde ve sabit
 birim ağırlık altında oluşturulacak polinom taban takımının en küçük dereceli te-
 rimidir. Bu durumda eğer işlevi operandını fonksiyon değeri olan $f(x)$ ile çarpmak
 olan fonksiyon çarpım operatörü $\widehat{f}$ 'nin matris gösterilimini kullanacak olursak ev-
 rensel $\mathbf{X}$ matrisinden yapılacak bir boyutlu bir kesme işlemi bize $1/2$ verecektir ki
 bu işlem de bağımsız değişken x' in operandı ile çarpımından ibaret olan $\widehat{x}$ opera-
 törünün matris gösteriliminden ibarettir. Dolayısı ile en kaba yaklaşırtımımız şöyle
 ifade edilebilir:

$$\mathcal{I} \approx f\left(\frac{1}{2}\right). \quad (3.140)$$

Diğer yandan integrallerde $\mathcal{I}_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) olarak ifade edilen ve değeri $\frac{1}{2\pi}$ olan
 ağırlık fonksiyonu uzunluğu 2π olan $[0, 2\pi]$ aralığında çalışıyor olmamız nede-

niyle bir sabit fonksiyon olarak kabul edilebilir. Bunu vurgulamamızdaki amaç, ağırlık fonksiyonunun ω bağlantılı yapısal tanımından kaynaklanabilecek karmaşayı önlemektir. Bu durumda evrensel matris, işlevi operandını bağımsız değişken olan θ ile çarpmak olan $\widehat{\theta}$ operatörünün matris gösterilimi olacaktır. Bu matristen yapılacak bir boyutlu kesme bize tek elemanı 0 olan bir matris verecektir. Buradan yola çıkarak, dairesel kontur integrasyonu kullanarak aşağıdaki yaklaşıtlım formülünü yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\approx rK_1(0) - rK_2(0) \\ &= r[\omega_{re}(0)f_{re}(0) - \omega_{im}(0)]\end{aligned}\quad (3.141)$$

Burada

$$\omega_{re}(0) = \ln \left(\frac{\sqrt{r_c^2 + 2rx_c + r^2}}{\sqrt{r_{c,1}^2 + 2r(x_c - 1) + r^2}} \right) \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned}\omega_{im}(0) &= \arctan\left(\frac{y_c}{x_c + r}\right) \\ &\quad - \arctan\left(\frac{y_c}{x_c - 1 + r}\right)\end{aligned}\quad (3.143)$$

Son üç eşitlik göstermektedir ki tek düğümlü sendelenimsizlik yaklaşıtlımını ile elde edilen integral yaklaşıtlımını r , x_c ve y_c olmak üzere üç parametreye bağılıdır. Bu durum bize yaklaşıtlım kalitesini iyileştirmek için üç ayrı esneklik vermektedir. Bu üç parametreye bağılı olarak yaklaşıtlımımız bazı durumlarda kesin eşitlik haline de gelebilecektir. Örneğin $f(x) = 1$ olduğu durumu ele alalım. Bu koşulda $\mathcal{I}$ integrali de 1 olacaktır. r 'yi sonsuza götürecekt olursak (3.141) yaklaşıtlımını yine 1 verecektir. Tüm diğert olası durumlar farklı kalitede yaklaşık değertler verecektir. Benzer analizler farklı fonksiyonlar üzerinde de yapılabilir.

Nümerik integrasyonda önemli problemlerden biri ile integre edilecek fonksi-

yonun eğri uzunluğunun büyüdüğü durumlarda karşılaşırız. Bu, ya eğriliğin arttığı ya da salınımların arttığı durumlarda geçerlidir. Böyle durumlarda integrale sendelenimsizlik teoremi uygulanmak suretiyle elde edilecek yaklaştırım yararlı olmayabilecektir, çünkü daha yüksek mertebeden kesme yapmak gerekecektir. Kontur integrasyonu esnek elemanlar olarak bazı parametreler ürettiğinden bu zorluğu aşmakta bize yardımcı olabilir.

Bu çalışmada amaç önceki bölümde elde edilmiş olan kontur integrali gösteriliminin üzerine sendelenimsizlik yaklaştırımının uygulanması suretiyle iyileştirilmiş bir yaklaştırım elde etmektir. Burada ortaya koyduğumuz metodun parametreleri bize tek düğüm noktalı sendelenimsizlik uygulandığında bile yaklaştırımın iyi çalışacağı izlenimini güçlendirmektedir. Parametrelerin sayısı tasarlanan konturun biçimine bağlı olacaktır. Ancak parametrelerin sayısının arttırılması genel olarak kontur integralinde de artan komplikasyonlara neden olacaktır. Bu çalışmada ağırlık fonksiyonu olarak basit bir biçimde sabit fonksiyon kullanılmıştır. Bu da ω fonksiyonundan kaynaklanan tüm olumsuzlukları integranda taşımakta olup muhtemel tekilliklere sebep olabilecektir. Dolayısı ile kontur integrasyonundan kazanılan avantajların bir kısmı bu nedenle kaybedilebilecektir. Yine de bu yolla elde edilen yaklaşım evrensel olma özelliğine sahiptir.

3.7 Kontur İntegrasyonu ve ÇYÜDÇG Yoluyla Fonksiyon Yaklaştırımı

Bu çalışma Metin Demiralp tarafından yaratılan ÇYÇG kullanmak suretiyle bir lineer integral operatörünü tek değişkenli fonksiyonlara ayrıştıran “Çok Değişkenliliği Yükseltmiş üç Köşegencil Dizey/Matris Çarpımsal Gösterilimi (ÇYÜDÇG)[41-43]” yöntemini kullanmaktadır. Burada kullanılan gösterilim genel anlamda ÇYÇG kullanmamakta, iki değişkenli ÇYÇG’ a dayanmaktadır. Bu ayrıştırmaya ÇYÜDÇG adını vermekteyiz. Bu metod ardışık olarak iki değişkenli ÇYÇG metodunu kullanmakta ve her adımda kalan terimi farklı destek fonksiyonları altında tekrar iki değişkenli ÇYÇG ayrıştırmına tabii tutarak sürmektedir. Tabi önce fonksiyonu kon-

tur integrali biçiminde yazarız, sonrasında ÇYÜDÇG’da kullanabileceğimiz iki değişkenli biçime sokmak için gereken dönüşümler yapılır ve son olarak ta ÇYÜDÇG uygulanır.

3.7.1 İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin ÇYÇG

Temel hedef matrisler olduğunda “Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş üç Köşegencil Dizey/Matris Çarpımsal Gösterilimi (ÇYÜDÇG) ”adını verdiğimiz metod geliştirildi. Bir matrisin elemanları pozitif tamsayı değerleri alan ve diğer indislerden bağımsız olan iki indis arasında olduğundan bu bize matrisler üzerinde “Ayrık iki değişkenli ÇYÇG ”’yi inşa etme şansı verdi. Bu adımdan sonra yapacağımız iş bu yapıyı iki değişkenli bir fonksiyona nasıl uygulayacağımızdı. Bu amaçla da verilen bir iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği yazdık.

$$f(x, y) = f_0 u(x)v(y) + f_1(x)v(y) + f_2(y)u(x) + f_{1,2}(x, y) \quad (3.144)$$

Burada u ve v destek fonksiyonlarıdır. Bu inşa sırasında her bir bağımsız değişken için $[0, 1]$ birim aralığını genellikle kaybetmeksizin kullanacağız. Bunun ötesinde ağırlık çarpanları aşağıdaki gibi tanımlıdırlar.

$$W_1(x) \equiv 1, \quad W_2(y) \equiv 1, \quad x, y \in [0, 1]. \quad (3.145)$$

Destek fonksiyonlarının yukarıda verilen aralıklar üzerinde ve aşağıdaki ağırlıklar altında birim norma sahip olduklarını varsayacağız

$$\int_0^1 dx u(x)^2 = 1, \quad \int_0^1 dy v(y)^2 = 1 \quad (3.146)$$

Bu durum için sıfırlanma koşulları aşağıdaki ifadeye getirilen kısıtlamalar olarak alınmalı $f_1(x)$, $f_2(y)$ and, $f_{1,2}(x, y)$. Bu kısıtlar şöyle yazılabilir:

$$\int_0^1 dx f_1(x)u(x) = 0 \quad (3.147)$$

$$\int_0^1 dy f_2(y) v(y) = 0 \quad (3.148)$$

$$\int_0^1 dx f_{1,2}(x, y) u(x) = 0 \quad (3.149)$$

$$\int_0^1 dy f_{1,2}(x, y) v(y) = 0 \quad (3.150)$$

Bu denklemler bize ÇYÇG terimlerini tek türlü yazma imkanı verir.

$$f_0 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) u(x) v(y) \quad (3.151)$$

$$f_1(x) = \int_0^1 dy f(x, y) v(y) - f_0 u(x) \quad (3.152)$$

$$f_2(y) = \int_0^1 dx f(x, y) u(x) - f_0 v(y) \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned} f_{1,2}(x, y) = & f(x, y) - f_0 u(x) v(y) \\ & - f_1(x) v(y) - f_2(y) u(x). \end{aligned} \quad (3.154)$$

Bu dört denklem bize ÇYÇG terimlerini ve ÇYÇG'nin kendisini daha açık bir şekilde yazma imkanı verir. Bu amaçla şu integral operatörlerini tanımlayabiliriz. Bu integral operatörlerinin x 'e ve y 'ye bağlı keyfi bir g fonksiyonu üzerine etki ettirilecek

olursa şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}\widehat{P}g(x) &\equiv u(x) \int_0^1 d\xi u(\xi) g(\xi) \\ \widehat{Q}g(y) &\equiv v(y) \int_0^1 d\eta v(\eta) g(\eta)\end{aligned}\tag{3.155}$$

Bu da bize aşağıdaki eşitlikleri yazma imkanı verir.

$$f_0 u(x) v(y) = \widehat{P}\widehat{Q}f(x, y) \tag{3.156a}$$

$$f_1(x) v(y) = (\widehat{I}_x - \widehat{P})\widehat{Q}f(x, y) \tag{3.156b}$$

$$f_2(y) u(x) = \widehat{P}(\widehat{I}_y - \widehat{Q})f(x, y) \tag{3.156c}$$

$$f_{1,2}(x, y) = (\widehat{I}_x - \widehat{P})(\widehat{I}_y - \widehat{Q})f(x, y) \tag{3.156d}$$

ve son olarak ta

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \widehat{P}\widehat{Q}f(x, y) + (\widehat{I}_x - \widehat{P})\widehat{Q}f(x, y) + \widehat{P}(\widehat{I}_y - \widehat{Q})f(x, y) \\ &\quad + (\widehat{I}_x - \widehat{P})(\widehat{I}_y - \widehat{Q})f(x, y)\end{aligned}\tag{3.157}$$

Burada $\widehat{I}_x$ ve $\widehat{I}_y$ sırasıyla x 'e ve y 'ye bağlı tek değişkenli fonksiyonlar uzayındaki birim operatörlerdir.

(3.157) ifadesinden ÇYÇG hedef fonksiyonun ortogonal bir ayrıştırımı olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısı ile “ÇYÇG, destek fonksiyonları tarafından gerilen uzaylar ve onların tümler uzayları üzerine bir izdüşümsel ayrıştırım olarak değerlendirilebilir.

3.7.2 Kontur İntegrasyonu

Bir $f(x)$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde bir kontur integrali cinsinden ifade edilebilir. Bu aralık da genellikle kaybetmeksizin herhangi bir sonlu $[a, b]$ aralığına dönüştürülebilir.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\xi \frac{f(\xi)}{\xi - x}, \quad x \in [0, 1] \quad (3.158)$$

$$C \rightarrow \xi = x + re^{i\theta}$$

$$r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Karşılık gelen integrasyon aralığı olan $[0, 2\pi]$ iki parçaya bölünebilir.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(x + re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta f(x + re^{i\theta}) + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} d\theta f(x + re^{i\theta}) \end{aligned} \quad (3.159)$$

Basit bir değişken dönüşümü yardımıyla bu iki parçadan ikincisi birinci türünden yazılabilir. Böylelikle tüm ifade daha derli toplu yazılmış olur.

$$f(x) = \int_{\pi}^{2\pi} d\theta f(x + re^{i\theta}) \xrightarrow{2\pi-\theta} \int_0^{\pi} d\theta f(x + re^{-i\theta}) \quad (3.160)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{2} [f(x + re^{i\theta}) + f(x + re^{-i\theta})] \quad (3.161)$$

İki farklı argümana sahip fonksiyon reel ve sanal kısımları ayrı ayrı gösterilmek üzere aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} f(x + re^{i\theta}) &= f_g + if_s \\ f(x + re^{-i\theta}) &= f_g - if_s \end{aligned} \quad (3.162)$$

Böylece f_g şöyle yazılabilir

$$f_g = \frac{1}{2} \left[f(x + re^{i\theta}) + f(x + re^{-i\theta}) \right] \quad (3.163)$$

$\theta \rightarrow \pi\theta$ değişken dönüşümünü yapmak suretiyle aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$f(x) = \int_0^1 d\theta \frac{1}{2} \left[f(x + re^{i\pi\theta}) + f(x + re^{-i\pi\theta}) \right] \quad (3.164)$$

Şimdi Heaviside basamak fonksiyonuna karşılık gelen tanımımızı yapalım

$$1_f \equiv \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.165)$$

Buna karşılık gelen aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\mathcal{I}1_f = \int_0^1 d\theta K(\theta, x) 1_f \quad (3.166)$$

ÇYÜDÇG'de kullanılacak çekirdeğin son hali aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$K(\theta, x) = \frac{1}{2} \left[f(x + re^{i\theta}) + f(x + re^{-i\theta}) \right] \quad (3.167)$$

3.7.3 Yöntem

Şimdi artık $f(x)$ fonksiyonu için ÇYÜDÇG'da kullanılacak iki değişkenli yapıyı oluşturduğumuza göre bunu iki değişkenli ÇYÇG'de kullanılacak şekle adapte etmek kalıyor.

$$K(\theta, x) = K_0 u(\theta) v(x) + K_1(\theta) v(x) + K_2(x) u(\theta) + K_{1,2}(\theta, x) \quad (3.168)$$

Burada u ve v ilk adımda 1 olarak seçilecek destek fonksiyonlarıdır. θ ve x ise daha önce de belirtildiği gibi birim aralık üzerinde alınmışlardır. Aynı şey ağırlık fonksiyonları için de geçerli olacaktır. Şimdi ÇYÇG uygulamaya başlayacak olursak

şu ifadeyi elde ederiz.

$$K_{1,2}(\theta, x) = K(\theta, x) - K_0 u(\theta) v(x) - K_1(\theta) v(x) - K_2(x) u(\theta). \quad (3.169)$$

Bu aşamada yine ÇYÇG anlamında üzerinde durmamız gereken, iki değişkenli fonksiyon olacaktır. Bu döngü gerektiği kadar tekrarlanabilir ve her yeni adımda daha iyi bir yaklaştırım elde edilmesi hedeflenmektedir.

İki değişkenli $K_{1,2}(\theta, x)$ fonksiyonuna yaklaştırım yapmak için yeterli sayıda iterasyon yapıldıktan sonraki son aşama son elde edilen ifadenin $[0, 1]$ aralığında integralinin alınarak orijinal fonksiyona yapılması amaçlanan yaklaştırımın elde edilmesidir.

$$f(x) = \int_0^1 d\theta K(\theta, x) \quad (3.170)$$

Bir tek değişkenli fonksiyona (ÇYÜDÇG) [41-43] uygulamak suretiyle elde edilen ayrıştırım bize iki değişkenli çekirdek üzerinden iyi bir yaklaştırım vermektedir. Nihai olarak elde edilen ifadenin integralini birim aralıkta alacak olursak orijinal fonksiyona bir yaklaştırım elde etmiş oluruz.

3.8 Taylor Serisi Kalan Terimi Üzerinden Kontur İntegrali Yardımıyla ÇYÜDÇG Yaklaştırımı

Bu çalışma Metin Demiralp tarafından yaratılan ÇYÇG kullanmak suretiyle bir lineer integral operatörünü tek değişkenli fonksiyonlara ayrıştıran ÇYÜDÇG yöntemi kullanmaktadır. Burada kullanılan gösterilim genel anlamda ÇYÇG kullanmakta, iki değişkenli ÇYÇG'ye dayanmaktadır. Bu ayrıştırıma ÇYÜDÇG adını vermekteyiz. Bu metod ardışık olarak çift değişkenli ÇYÇG metodunu kullanmaktadır ve bunu sağlamak için her adımda kalan terimi farklı destek fonksiyonları altında tekrar çift değişkenli ÇYÇG ayrıştırımına tabi tutar. Önce fonksiyonu kontur integrali biçiminde yazarız, sonrasında ÇYÜDÇG'de kullanabileceğimiz iki değişkenli biçime sokmak için gereken dönüşümler yapılır ve son olarak ta ÇYÜDÇG uygu-

lanır. Ancak bu genel akışı bu kez Taylor serisinin integral biçiminde ifade edilmiş kalan terimine uygulamayı amaçlamaktayız. Yani kontur integrali biçiminde yazılacak fonksiyon bu kez Taylor'un kalan terimindeki fonksiyonun çekirdek fonksiyonu olacaktır.

3.8.1 İki Değişkenli Fonksiyonlar için ÇYÇG

İki değişkenli fonksiyonlar için ÇYÇG ile ilgili detaylı bilgilere 3.7.1 altbaşlığı altında değinmiştik.

ÇYÇG hedef fonksiyonun ortogonal bir ayrıştırımı olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısı ile "ÇYÇG, destek fonksiyonları tarafından gerilen uzaylar ve onların tümler uzayları üzerine bir izdüşümsel ayrıştırım olarak değerlendirilebilir.

ÇYÜDÇG açılımı esasen iteratif olarak iki değişkenli ÇYÇG açılımı yapmaya dayanmaktadır. Ancak tek farkla ki her adımda farklı destek fonksiyonları kullanılmaktadır.

3.8.2 Kontur İntegrasyonu

Bir fonksiyonun n 'inci mertebeden türevi kontur integrali cinsinden şöyle ifade edilebilir.

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^{n+1}}, \quad (3.171)$$

Burada bir değişken dönüşümü yapacak olursak

$$\xi = x + re^{i\theta}, \quad d\xi = ire^{i\theta} d\theta \quad (3.172)$$

Böylelikle, integrasyon aralığının iki parçaya bölünmesini takiben fonksiyonun n'inci türevi için yeni bir gösterilim elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{in!r}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{i\theta} f(x + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} \\
&= \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} f(x + re^{i\theta}) \\
&= \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{\pi} d\theta e^{-in\theta} f(x + re^{i\theta}) + \frac{n!r}{2\pi r^n} \int_{\pi}^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} f(x + re^{i\theta})
\end{aligned} \tag{3.173}$$

İntegrallerin ikincisi için bir değişken dönüşümü daha yapacak olursak

$$\theta \rightarrow 2\pi - \theta, \quad d\theta \rightarrow -d\theta \tag{3.174}$$

ve buna ek olarak ta sabitleri çarpan olarak çekip kalan terimleri yeniden düzenleyecek olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{2\pi r^n} \left[\int_0^{\pi} d\theta e^{in\theta} f(x + re^{i\theta}) + \int_0^{\pi} d\theta e^{-in\theta} f(x + re^{-i\theta}) \right] \\
&= \frac{n!}{\pi r^n} \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{2} [e^{in\theta} f(x + re^{i\theta}) + e^{-in\theta} f(x + re^{-i\theta})]
\end{aligned} \tag{3.175}$$

Şimdi $\theta = \pi\theta$ alınırsa bu da bize şunu verir

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{r^n} \int_0^1 d\theta \frac{1}{2} [e^{in\pi\theta} f(x + re^{i\pi\theta}) + e^{-in\pi\theta} f(x + re^{-i\pi\theta})] \tag{3.176}$$

Devam edebilmek için şu fonksiyonu tanımlayalım

$$1_f \equiv \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \tag{3.177}$$

Dolayısı ile aynı ifade şöyle yazılabilir

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{r^n} \int_0^1 d\theta K(\theta, x) 1_f \quad (3.178)$$

Burada $K(\theta, x)$ bize ÇYÜDÇG uygulamamız için gerekli olan iki değişkenli çekirdek fonksiyonudur.

$$K(\theta, x) \equiv \frac{1}{2} \left[e^{in\pi\theta} f(x + re^{i\pi\theta}) + e^{-in\pi\theta} f(x + re^{-i\pi\theta}) \right] \quad (3.179)$$

3.8.3 Yöntem

Aşağıdaki özdeşliği ele alalım

$$f(x) = f(a) + \int_a^x dt f'(t) \quad (3.180)$$

Bu özdeşlik şöyle de yazılabilir.

$$f(x) = f(a) - \int_a^x d(x-t) f'(t) \quad (3.181)$$

ve kısmi integrasyon yardımıyla

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x dt (x-t) f''(t) \quad (3.182)$$

Son olarak kısmi integrasyonu tekrar tekrar uygulayacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots &+ \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \\ &+ \frac{1}{k!} \int_a^x dt (x-t)^k f^{(k+1)}(t) \end{aligned} \quad (3.183)$$

Yukarıdaki ifadenin sonundaki integral şu biçimde de yazılabilir.

$$\int_a^x dt(x-t)^k f^{(k+1)}(t) = \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \int_0^1 dt(k+1)(1-t)^k f^{(k+1)}((x-a)t+a) \quad (3.184)$$

Şimdi integrandı iki değişkenli formda yazdıktan sonra onu iki değişkenli ÇYÇG uygulamaya uygun biçime getirmemiz gerekmektedir.

Bu aşamada, yine bize ÇYÇG anlamında gereken iki değişkenli fonksiyon olacaktır. Bu iterasyon istendiği kadar tekrarlanabilir. Her yeni iterasyonda daha iyi bir yaklaşım elde edilecektir

$K(\theta, x)$ fonksiyonuna yaklaşım yapmak için yeterince iterasyon yaptıktan sonra nihai adım olarak elde ettiğimiz ifadenin $[0, 1]$ aralığı üzerinde integre edilmesine gelir sıra. Böylelikle orijinal integrand olan $f^{(k+1)}(x)$ ifadesine bir yaklaşım elde edilmiş olur.

Tüm bu adımlar atıldıktan sonra elde edilen integrandı da tekrar $[0, 1]$ aralığı üzerinde integre edecek olursak nihai yaklaşımımızı elde etmiş oluruz.

3.9 Euler Genişletmesi ve Yüksek Mertebeli Taylor Metodları

Sendelenimsizlik yaklaşımının Taylor açılımının integral biçiminde yazılan kalan terimine uygulanması suretiyle gerek fonksiyon yaklaşımı gerekse sayısal integral yaklaşımı nasıl elde edeceğimizi önceki bölümlerde incelemiştik. Şimdi önce Taylor teriminin kalan terimi üzerine bu uygulamayı yapacak ve sonrasında da diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerine esas teşkil eden metodlardan olan Euler ve yüksek mertebeli Taylor metodlarını[48] ele alarak bu metodları Taylor kalan terimiyle birlikte ele almak suretiyle farklı bir yaklaşım elde etme üzerine çalışacağız.

3.9.1 Başlangıç Değer Problemleri için Euler Yöntemi

Her ne kadar Euler yöntemi pratikte çok kullanılan bir yöntem olmasa da, türetilmesindeki kolaylık, daha karmaşık tekniklerin anlaşılması için temel teşkil etmektedir. Euler yönteminin amacı iyi-tanımlı bir başlangıç değer problemine bir yaklaştırım elde etmektir.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad (3.185)$$

Bu yöntem yardımıyla ayırık ve ağ düğümleri olarak adlandırılabilirler noktalar da yaklaşıtlar elde edilmekte ve bunların dışındaki noktalardaki değerler ise interpolasyon yardımıyla bulunmaktadır. Bu düğüm noktaları işlem kolaylığı amaçlı olarak eşit aralıklı olarak seçilmektedir.

$$t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.186)$$

$h = (b - a)/N = t_{i+1} - t_i$ adım boyudur. Euler yöntemi Taylor açılımı kullanılarak türetilen bir yöntemdir. (3.185) denkleminin yegane çözümü olan $y(t)$ 'nin $[a, b]$ üzerinde $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ olacak biçimde iki adet sürekli türevinin mevcut olduğunu varsayalım.

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i) \quad (3.187)$$

$\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$. $h = t_{i+1} - t_i$ olduğuna göre

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \quad (3.188)$$

ve yine $y(t)$ (3.185) denklemini sağladığına göre

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \quad (3.189)$$

Euler yöntemi her $i = 1, 2, \dots, N$ için $w_i \approx y(t_i)$ şeklinde ve kalan terim ortadan

kaldırılarak inşa edilir.

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.190)$$

(3.190) denklemi Euler yöntemine ilişkin fark denklemi olarak adlandırılır ve Taylor açılımından alacağımız her fazladan terim için bir üst mertebeden Taylor yöntemini elde ederiz.

3.9.2 Sendelenimsizlik Teoreminin Euler Yöntemine Uyarlanması

Şimdi Euler özyineli formülünün son halini (3.190), a Taylor'un açılım noktası olmak üzere ve t_i 'yi a , t_{i+1} 'yi ise $a + h$ olarak almak suretiyle farklı bir formatta yazalım

$$\begin{aligned} f(a) &= \alpha \\ f(a+h) &= f(a) + hf'(a) \end{aligned} \quad (3.191)$$

Şimdi de kalan terimini sendelenimsizlik bileşenleri cinsinden ifade edelim.

$$\begin{aligned} f(a) &= \alpha \\ f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} f(h\tau_i + aj, f(aj)) (\mathbf{e}_1^T \mathbf{t}_i)^2 \end{aligned} \quad (3.192)$$

Burada j iterasyon adımı olarak alınmıştır.

Burada önemli bazı saptamalar yapmak zorundayız: Her iterasyon için Taylor açılım noktası h kadar sağa kaymaktadır. Dolayısıyla Hilbert uzayındaki kesme boyutu önemini kısmen yitirmektedir. Ayrıca her ne kadar Euler kalan teriminden yola çıktı isek de karşılaştırmaların ikinci mertebeden Taylor yöntemi ile yapılması gerekmektedir, çünkü kullandığımız kalan teriminde fonksiyonun ikinci türevi ele

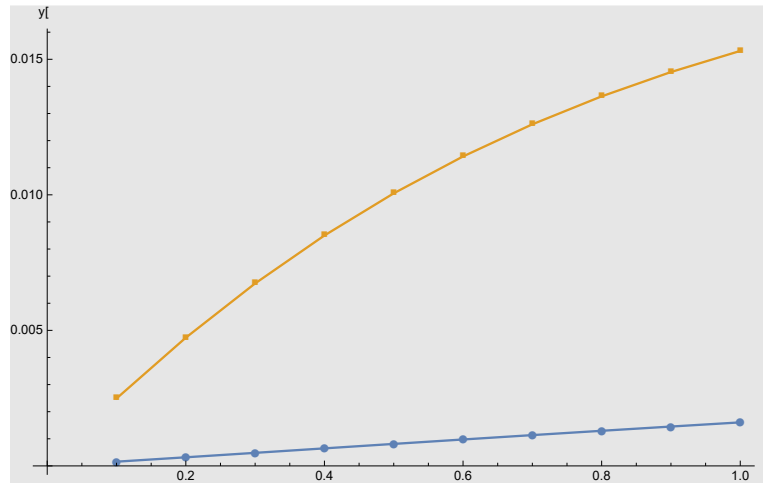
alınmaktadır.

3.9.3 Sayısal Uygulamalar

Bu bölümde dört ayrı başlangıç değer problemini ele alarak bunların sonuçlarını bir tablo oluşturarak Euler ve ikinci mertebe Taylor metodundan elde edilen sonuçlarla karşılaştırdık. Daha sonra ise yöntemimizin göreceli hatası ve diğer yöntemlerin göreceli hatasını birer grafik üzerinde karşılaştırdık.

j	Gerçek Değerler	Yöntem	Taylor Metodu
1	2.21551	2.21517	2.21000
2	2.46421	2.46343	2.45255
3	2.74958	2.74825	2.73107
4	3.07547	3.07349	3.04933
5	3.44616	3.44337	3.41151
6	3.86636	3.86259	3.82222
7	4.34126	4.33633	4.28655
8	4.87662	4.87031	4.81014
9	5.47881	5.47086	5.39920
10	6.15485	6.14496	6.06062

Tablo 1: $y' = x + y, 0 < x < 1, y(0) = 2, k = 1, n = 2$ Gerçek değerler, Yöntem çıktıları ve Taylor metodu çıktıları



Şekil 1: $y' = x + y, 0 < x < 1, y(0) = 2, k = 1, n = 2$

Tablo 1'de $y' = x + y, 0 < x < 1, y(0) = 2$ denklemi ele alınmış ve kesme mertebesi de $n = 2$ olarak tercih edilmiştir. İterasyon sayısı 10 ve adım boyu da $h = 0.1$ 'dir.

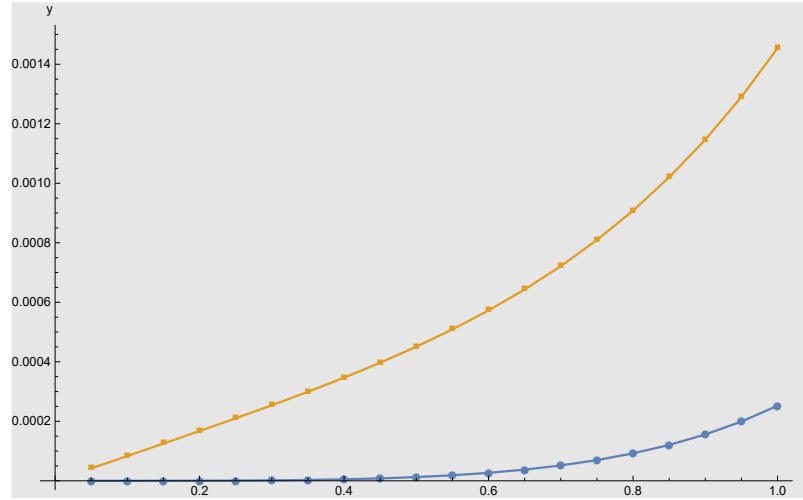
j	Gerçek Değerler	Yöntem	Taylor Metodu
1	1.00004	1.00004	1.00000
2	1.00033	1.00033	1.00025
3	1.00113	1.00113	1.00100
4	1.00267	1.00267	1.00250
5	1.00522	1.00522	1.00501
6	1.00904	1.00904	1.00878
7	1.01439	1.01439	1.01409
8	1.02156	1.02156	1.02121
9	1.03084	1.03083	1.03043
10	1.04255	1.04253	1.04208
11	1.05702	1.05701	1.05649
12	1.07466	1.07463	1.07404
13	1.09586	1.09582	1.09516
14	1.12113	1.12107	1.12032
15	1.15099	1.15091	1.15006
16	1.18610	1.18599	1.18502
17	1.22717	1.22702	1.22592
18	1.27507	1.27487	1.27361
19	1.33082	1.33055	1.32910
20	1.39561	1.39526	1.39358

Tablo 2: $y' = yt^2, 0 < t < 1, y(0) = 1, k = 1, n = 200$ Gerçek değerler, Yöntem çıktıları ve Taylor metodu çıktıları

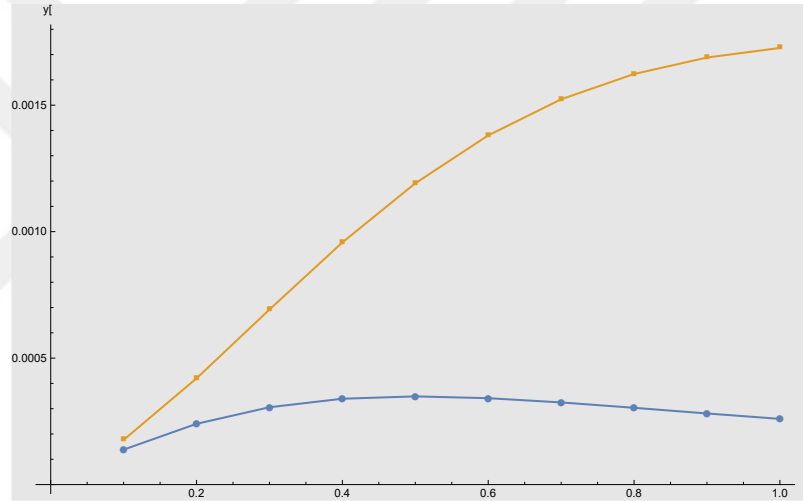
Tablo 2'de $y' = yt^2, 0 < t < 1, y(0) = 1$ denklemi ele alınmış ve kesme mertebesi de $n = 200$ olarak tercih edilmiştir. İterasyon sayısı 20 ve adım boyu da $h = 0.05$ 'dir.

j	Gerçek Değerler	Yöntem	Taylor Metodu
1	2.20961	2.20930	2.21000
2	2.43645	2.43587	2.43747
3	2.67675	2.67593	2.67860
4	2.92605	2.92506	2.92885
5	3.17973	3.17862	3.18351
6	3.43345	3.43228	3.43819
7	3.68354	3.68234	3.68915
8	3.92705	3.92586	3.93342
9	4.16186	4.16069	4.16889
10	4.38656	4.38542	4.39413

Tablo 3: $y' = y/(1 + x^2), 0 < x < 1, y(0) = 2, k = 1, n = 2$ Gerçek değerler, Yöntem çıktıları ve Taylor metodu çıktıları



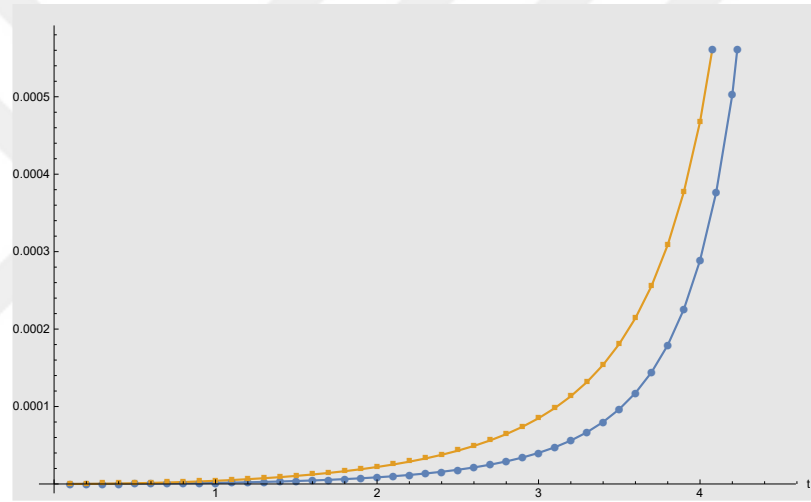
Şekil 2: $y' = yt^2, 0 < t < 1, y(0) = 1, k = 1, n = 200$ için yöntem çıktılarının görelî hatasının ikinci mertebe Taylor metodunun görelî hatası ile kıyaslanması



Şekil 3: $y' = y/(1 + x^2), 0 < x < 1, y(0) = 2, k = 1, n = 2$ için yöntem çıktılarının görelî hatasının ikinci mertebe Taylor metodunun görelî hatası ile kıyaslanması

Tablo 3'de $y' = y/(1 + x^2), 0 < x < 1, y(0) = 2$ denklemi ele alınmış ve kesme mertebesi de $n = 2$ olarak tercih edilmiştir. İterasyon sayısı 10 ve adım boyu da $h = 0.1$ 'dir.

Tablo 4'de $y' = -x/y, 0 < x < 1, y(0) = 5$ denklemi ele alınmış ve kesme mertebesi de $n = 1000$ olarak tercih edilmiştir. İterasyon sayısı 45 ve $h = 0.1$ 'dir.



Şekil 4: $y' = -x/y, 0 < x < 1, y(0) = 5, k = 1, n = 1000$ için yöntem çıktılarının görelî hatasının ikinci mertebe Taylor metodunun görelî hatası ile kıyaslanması

j	Gerçek Değerler	Yöntem	Taylor Metodu
0.1	4.99900	4.99900	4.99900
0.2	4.99600	4.99600	4.99600
0.3	4.99099	4.99099	4.99099
0.4	4.98397	4.98398	4.98398
0.5	4.97494	4.97494	4.97494
0.6	4.96387	4.96387	4.96388
0.7	4.95076	4.95076	4.95077
0.8	4.93559	4.93559	4.93560
0.9	4.91833	4.91834	4.91835
1.0	4.89898	4.89899	4.89900
1.1	4.87750	4.87751	4.87752
1.2	4.85386	4.85388	4.85389
1.3	4.82804	4.82806	4.82808
1.4	4.80000	4.80002	4.80004
1.5	4.76970	4.76971	4.76975
1.6	4.73709	4.73711	4.73715
1.7	4.70213	4.70215	4.70219
1.8	4.66476	4.66479	4.66484
1.9	4.62493	4.62497	4.62502
2.0	4.58258	4.58261	4.58268
2.1	4.53762	4.53767	4.53773
2.2	4.48999	4.49004	4.49012
2.3	4.43959	4.43965	4.43974
2.4	4.38634	4.38641	4.38651
2.5	4.33013	4.33021	4.33031
2.6	4.27083	4.27092	4.27104
2.7	4.20833	4.20843	4.20856
2.8	4.14246	4.14258	4.14273
2.9	4.07308	4.07322	4.07338
3.0	4.00000	4.00016	4.00034
3.1	3.92301	3.92319	3.92339
3.2	3.84187	3.84209	3.84231
3.3	3.75633	3.75658	3.75682
3.4	3.66606	3.66635	3.66662
3.5	3.57071	3.57106	3.57136
3.6	3.46987	3.47028	3.47061
3.7	3.36303	3.36352	3.36389
3.8	3.24962	3.25020	3.25062
3.9	3.12890	3.12960	3.13008
4.0	3.00000	3.00087	3.00140
4.1	2.86182	2.86289	2.86351
4.2	2.71293	2.71430	2.71500
4.3	2.55147	2.55324	2.55406
4.4	2.37487	2.37722	2.37819
4.5	2.17945	2.18272	2.18387

Tablo 4: $y' = -x/y, 0 < x < 1, y(0) = 5, k = 1, n = 1000$

4 SONUÇLAR

Bu bölümde tez boyunca elde edilen sonuçlar verilecektir. Bunları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

Sonuç 4.1 3.1, 3.2 ve 3.3 başlıkları altında yaptığımız incelemede daha ziyade ikincil bulgular elde edilmiştir. Bunları şöyle ifade edebiliriz: Bunlardan ilki taban takımının ortonormalizasyonu ile ilgili olandı. Ortogonalleştirme için klasik Gram-Schmidt yöntemini kullanmak yerine Jacobi polinomlarının özel bir durumunu kullanmış olduk. İkinci ve daha vakit kaybettirici olan unsur ise operatörlerin matris gösterilimini oluşturmaktı. Bunun da üç terimli özyineleme bağıntısı sayesinde üstesinden gelmiş olduk. Dolayısı ile oldukça büyük oranda işlem yükünden kurtulmuş olduk. Genel olarak sonuçlarla ilgili dikkate değer nokta ise (3.1) ifadesindeki mutlak eşitliğin sendelenim terimlerinin etkisinden arındırılmış biçimde sonlu aralıkta sağlanmasıdır.

Sonuç 4.2 3.4 başlığı altında polinom taban takımı dışında trigonometrik bir taban takımı kullanılmış ve çoklu-indis notasyonu ile çalışmanın getireceği zorluğu ve işlem karmaşasını yenmek amacıyla kullanılacak fonksiyondan bağımsız olan $\mathbf{T}_2^{(n)}$ matrislerini hesaplayarak arşivlemek ve daha sonra bu matrislerin özdeğer ve özvektörlerini hesaplayarak bulunan değerleri, istenen yaklaştırmı verecek biçimde formülde yerine koymak yoluyla bu zorluk aşılmıştır. Sendelenimsizlik teoreminin fonksiyonun analitik olduğu bölgelerde geçerli olduğunu dikkate alarak yaklaştırılacak fonksiyonun analitik olmadığı bölgelerden uzak duracak biçimde seçim yapmak akılcıca olacağı gözlemlenmiştir. İncelenen tanım bölgesinde analitikliği bozan bir unsur olmasa bile analitikliği bozan noktaların yakınlarında da yaklaştırmının zayıflayacağını unutmamak gerekecektir.

Sonuç 4.3 3.5 başlığı altında ÇYÇG kalan terimi Cauchy integral formunda yazılmış Taylor kalan terimine uygulanmış ve aşağıdaki yaklaştırım ifadesi elde edilmiştir

$$\mathcal{I} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int d\tau \oint_c d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \tau)^{n+2}} (1 - \tau)^{n+1}$$

Bu aşamada aynı parametreleme işleminin bir benzerini yapmak suretiyle t 'nin yerine ζ koyarak iki bağımsız değişkenli bir ifade elde ederiz ve artık bu ifadenin a ve x şeklinde iki bağımsız değişkeni olduğuna göre uygun destek işlevleri seçimi altında ÇYÇG'ye açılmaya hazır hale gelmiştir.

Aslında Taylor açılımı, ÇYÇG ve sendelenimsizlik yaklaştırımı gibi üç ayrı metodun bir arada kullanılması ilk bakışta hata birikimi endişesine yol açmakla birlikte, fonksiyonun çok değişkenliliği hangi metod altında olursa olsun ele alınması sıkıntılı olacağından bu endişe yersiz olacaktır. Destek fonksiyonu optimizasyonunun bu zorluğu aşmada yardımcı olacağı kanısına varılmıştır.

Sonuç 4.4 3.6 başlığı altında dairesel konturlar üzerinde yapılan kontur integrasyonu tarafından desteklenen sendelenimsizlik yaklaştırımı üzerinde durulmuştur. Elde edilen tüm $\kappa_1, \kappa_2, f_1, f_2$ fonksiyonlarının x 'in değerine ve dairesel konturun seçimine bağlı olarak değişebildiği görülmüştür. Dört ayrı durum gözlemlenebilir: (1) Ne merkezi ne yarıçapı x 'e bağlıdır. (2) Sadece merkez x 'e bağlıdır, (3) Sadece yarıçap x 'e bağlıdır, (4) Hem merkez, hem de yarıçap x 'e bağlıdır. Birinci hariç tüm bu durumlar f_1 ve f_2 değerlerinin x 'e bağlı değişmesi sonucunu doğurur ve yukarıdaki yaklaştırım $f(x)$ 'in değerini x 'e bağlı noktalarda hesaplanan bir takım başka f değerlerine bağlar. Bu durumlar ilk bakışta pek pratik yararlılıkları yokmuş gibi gözükmektedirler. Bununla birlikte ilk durum için yukarıdaki yaklaştırım $f(x)$ değerini κ 'lar üzerinden x 'in bazı fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak verir ve buradaki lineer birleşim katsayıları x 'ten bağımsız bazı f değerlerine eşittir. Bu yaklaştırım kuadratiir benzeri bir formül olup x 'ten bağımsız sonlu sayıda fonksiyon değerine ihtiyaç duymaktadır. Aslında reel eksen üzerindeki düğümlerin değerleri dairesel düğüm değerlerine karşılık gelmektedir. Bu düğümler bir çember üzerinde olup ardışık iki düğüm arasındaki açı sabittir. Bir başka deyişle çember $2n$ adet düğümden oluşan eşit çember yaylarına bölünmüştür.

Bu çalışmada daha önce elde edilmiş olan kontur integrali gösterilimin üzerine sendelenimsizlik yaklaştırımının uygulanması suretiyle iyileştirilmiş bir yaklaştırım elde etmektir. Burada ortaya koyduğumuz metodun parametreleri bize tek düğüm noktalı sendelenimsizlik uygulandığında bile yaklaştırımın et-

kin çalışmasını sağlamaktadır. Parametrelerin sayısı tasarlanan konturun biçimine bağlı olacaktır. Ancak parametrelerin sayısının arttırılması genel olarak kontur integralinde de artan komplikasyonlara neden olacaktır. Bu çalışmada ağırlık fonksiyonu olarak basit bir biçimde sabit fonksiyon kullanılmıştır. Bu da ω fonksiyonundan kaynaklanan tüm olumsuzlukları integranda taşımakta olup muhtemel tekilliklere sebep olabilecektir. Dolayısı ile kontur integrasyonundan kazanılan avantajların bir kısmı bu nedenle kaybedilebilecektir. Yine de bu yolla elde edilen yaklaşım evrensel olma özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.5 3.7 başlığı altında ÇYÜDÇG yaklaştırmı üzerinde durulmuş ve bu yaklaştırım ile kontur integrasyonun bağdaştırılması sonucunda şu ifade elde edilmiştir.

$$K_{1,2}(\theta, x) = K(\theta, x) - K_0 u(\theta) v(x) - K_1(\theta) v(x) - K_2(x) u(\theta).$$

Bu aşamada yine ÇYÇG anlamında üzerinde durmamız gereken, iki değişkenli fonksiyon olacaktır. Bu döngü gerektiği kadar tekrarlanabilir ve her yeni adımda daha iyi bir yaklaştırım elde edilmesi umulmaktadır.

İki değişkenli $K_{1,2}(\theta, x)$ fonksiyonuna yaklaştırım yapmak için yeterli sayıda iterasyon yapıldıktan sonraki son aşama son elde edilen ifadenin $[0,1]$ aralığında integralinin alınarak orijinal fonksiyona yapılması amaçlanan yaklaştırmının elde edilmesidir.

$$f(x) = \int_0^1 d\theta K(\theta, x)$$

Bir tek değişkenli fonksiyona (ÇYÜDÇG) uygulamak suretiyle elde edilen ayrıştırım bize iki değişkenli çekirdek üzerinden iyi bir yaklaştırım vermesi öngörülmektedir. Nihai olarak elde edilen ifadenin integralini birim aralıkta alarak orijinal fonksiyona bir yaklaştırım elde edilebilecektir.

Sonuç 4.6 3.8 başlığı altında ise 3.7’de yaptığımız uygulamayı kalan terimi Cauchy kontur formunda yazılan Taylor açılımına uygulayarak şu ifadeye ulaş-

tık:

$$\int_a^x dt(x-t)^k f^{(k+1)}(t) = \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \int_0^1 dt(k+1)(1-t)^k f^{(k+1)}((x-a)t+a)$$

Şimdi integrandı iki değişkenli formda yazdıktan sonra onu iki değişkenli ÇYÇG uygulamaya uygun biçime getirmemiz gerekmektedir.

Bu aşamada, yine bize ÇYÇG anlamında gereken iki değişkenli fonksiyon olacaktır. Bu iterasyon istendiği kadar tekrarlanabilir. Her yeni iterasyonda daha iyi bir yaklaştırım elde edilecektir

$K(\theta, x)$ fonksiyonuna yaklaştırım yapmak için yeterince iterasyon yaptıktan sonra nihai adım olarak elde ettiğimiz ifadenin $[0, 1]$ aralığı üzerinde integre edilmesine gelir sıra. Böylelikle orijinal integrand olan $f^{(k+1)}(x)$ ifadesine bir yaklaştırım elde edilmiş olur.

Tüm bu adımlar atıldıktan sonra elde edilen integrandı da tekrar $[0, 1]$ aralığı üzerinde integre edecek olursak nihai yaklaştırımımızı elde etmiş oluruz.

Sonuç 4.7 3.9 başlığı altında başlangıç değer problemleri için literatürde oldukça önemli bir temel oluşturan Euler ve yüksek mertebeli Taylor yöntemlerine değinilmiş, kalan terimi integral formunda yazılmış Taylor açılımı kullanılmak suretiyle yaklaştırmada oldukça etkin bir iyileştirme sağlanmıştır. Burada elde edilen yaklaştırım ifadesi aşağıdaki biçimdedir.

$$f(a) = \alpha$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} f(h\tau_i + a_j, f(a_j)) (\mathbf{e}_1^T \mathbf{t}_i)^2$$

j iterasyon adımı olarak alınmıştır.

Burada önemli bazı saptamalar yapmak zorundayız: Her iterasyon için Taylor açılım noktası h kadar sağa kaymaktadır. Dolayısıyla Hilbert uzayındaki kesme boyutu önemini kısmen yitirmektedir. Ayrıca her ne kadar Euler kalan teriminden yola çıktı isek de karşılaştırmaların ikinci mertebeden Taylor yöntemi ile yapılması gerekmektedir, çünkü kullandığımız kalan teriminde fonksiyonun ikinci türevi ele alınmaktadır.

Kaynakça

- [1] Ercan Gürvit and N. A. Baykara, "Fluctuationlessness Approximation and Its Applications on the Remainder Term of Taylor Expansion: From Scratch to Present Status", Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA) - www.journalmesa.com, Vol. 9, No.2, pp. 189-203, 2018 CSP - Cambridge, UK; IS - Florida, USA, 2018
- [2] Ercan Gürvit, N. A. Baykara, and Metin Demiralp, "*Taylor Formula with Remainder Term Evaluated Under a Weight Factor at Fluctuationlessness Limit*", ICNAAM 2011, AIP Conference Proceedings 1389, pp. 1180-1183
- [3] M. Demiralp, "*Fluctuationlessness Theorem to Approximate Univariate Functions' Matrix Representations*", WSEAS Transactions on Mathematics, Issue 6, Volume 8, June 2009, pp. 258-267
- [4] M. Demiralp, "*No Fluctuation Approximation in any Desired Precision for Univariate Matrix Representations*", J. Math. Chem., In print.
- [5] M. Demiralp, "*A Fluctuation Expansion Method for the Evaluation of a Function's Expectation Value*", Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math., Wiley, Rhodes, Greece, Sept. 16 – 20, 2005, pp. 711-714
- [6] K G Dyall, I P Grant and S Wilson, "*Matrix Representation of Operator Products*", J. Phys. B: At. Mol. Phys. 17 (1984) 493-503. Printed in Great Britain
- [7] Peter Balazs, "*Matrix Representation of Operators Using Frames*", eprint arXiv:math/0510146

- [8] N. A. Baykara, Ercan Gürvit and Metin Demiralp, "*A Hybridized Finite Taylor Formula by Fluctuation Free Remainder Term for Univariate Function Approximation*", AIP Conf. Proc. 1048, 87(2008)
- [9] N. A. Baykara, Ercan Gürvit and Metin Demiralp, "*A Hybridized Finite Taylor Formula by Fluctuation Free Remainder Term for Multivariable Function Approximation*", AIP Conf. Proc. 1148, 21(2009)
- [10] Ercan Gürvit, N. A. Baykara, and Metin Demiralp, "*Evaluation of Multivariate Integrals via Fluctuationlessness Theorem and Taylor's Remainder*", AIP Conf. Proc. 1148, 128 (2009)
- [11] B. Tunga and M. Demiralp, "*Fluctuationlessness Approximation Based Multivariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation*", AIP Conf. Proc. 1048,562 (2008)
- [12] S. Tuna, B. Tunga, N.A. Baykara and M. Demiralp, "*Fluctuation Free Matrix Representation Based Univariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMMR) Over Plain and Factorized HDMR*", WSEAS Transactions on Mathematics, Issue 6, Volume 8, April (2009), 226-230
- [13] S. Üsküplü and M. Demiralp, "*Univariate Integration via Space Extension Based Fluctuation Approximation*", AIP Conf. Proc. 1048, 566 (2008)
- [14] Andreas Asheim, "*A combined Filon/asymptotic quadrature method for highly oscillatory problems*", Preprint Numerics no. 9/2007. <http://www.math.ntnu.no/preprint/numerics/2007/N9-2007.pdf>
- [15] Sheehan Olver. "*Moment-free numerical integration of highly oscillatory functions*". j-IMAJ-NUMER-ANAL, 26(2):213-227, apr 2006.

- [16] A. Okan, N.A. Baykara M. Demiralp, "*Weight optimization in enhanced multivariate product representation (EMPR) for given supports at the fluctuation free integration limit*", Proceeding AICT'11 Proceedings of the 2nd international conference on Applied informatics and computing theory, pp 52-57
- [17] Ercan Gürvit, N. A. Baykara, and Metin Demiralp, "*Numerical Integration of Bivariate Functions over a Non Rectangular Area by Using Fluctuationlessness Theorem*", WSEAS Transactions on Mathematics, Issue 5, Volume 8, April (2009), pp. 193-198
- [18] M. Demiralp, "*Fluctuationlessness theorem to approximate univariate functions' matrix representations*", WSEAS Trans. on Math., Vol. 8, pp. 258-267, 2009.
- [19] N. Altay and M. Demiralp, "*Fluctuationlessness theorem and its application to boundary value problems of ODEs*", WSEAS Trans. on Math., Vol 8, pp. 199-204, 2009.
- [20] C. Gözükmızı and M. Demiralp, "*The application of the fluctuation expansion with extended basis set to numerical integration*", WSEAS Trans. on Math., Vol. 8, pp. 205-212, 2009.
- [21] M. Demiralp, "*No Fluctuation Approximation in Any Desired Precision for Univariate Matrix Representations*", J. Math. Chem., Vol. 47, pp. 99-110, 2010.
- [22] N. Altay and M. Demiralp, "*Numerical Solution of Ordinary Differential Equations by Fluctuationlessness Theorem*", J. Math. Chem., Vol 47, pp. 1323-1344, 2010.
- [23] M. Demiralp, "*Data Production For a Multivariate Function On an Orthogonal Hyperprismatic Grid Via Fluctuation Free Matrix Representation: Completely Filled Grid Case*", IJEECE, Vol 1, pp. 61-76, 2010.

- [24] M. Demiralp, *"Convergence issues in the Gaussian weighted multidimensional fluctuation expansion for the univariate numerical integration"*, WSEAS Trans. on Math., Vol. 4, pp. 486-492, 2005.
- [25] Ö. F. Aliş and H. Rabitz: *"General Foundations of High Dimensional Model Representation"*, Journal of Mathematical Chemistry, 25, pp.197-233, (1999).
- [26] B. Tunga and M. Demiralp, *"The Influence of the Support Functions on the Quality of Enhanced Multivariate Product Representation"* Journal of Mathematical Chemistry, Volume 48, Issue 3, pp 827-840, 2010.
- [27] M. Demiralp, *"High Dimensional Model Representation and Its Application Varieties"*, The Fourth International Conference on Tools for Mathematical Modelling, St. Petersburg, Russia, June 23-28, (2003).
- [28] M. Demiralp and E. Demiralp, *"An Orthonormal Decomposition Method for Multidimensional Matrices"*, AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2009), vol. 1168, Rethymno, Crete, Greece, 18-22 September 2009, pp. 424-427, doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.3241487>, (2009).
- [29] M. Demiralp and E. Demiralp, *"Dimensionality Reduction and Approximation via Space Extension and Multilinear Array Decomposition"*, AIP Proceedings for the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2009), Mini Symposium on Recent Developments in Numerical Schemes for Hilbert Space Related Issues in Science and Engineering, Rhodes, Greece, 29 September-4 October 2009, pp. 837- 840, doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.4771824>, (2009).
- [30] B. Tunga and M. Demiralp, *"An Iterative Scheme for Enhanced Multivariate Product Representation Method"*, Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS), Malta, pp. 247-255, (2010).

- [31] M. Demiralp, "*New Generation HDMR Based Multiway Array Decomposers: Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR)*" Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS), ser. ISBN: 978-960-474-225-7, Malta, pp. 16, keynote Speech, (2010).
- [32] E. Demiralp and M. Demiralp, "*Reductive Multilinear Array Decomposition Based Support Functions in Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR)*", Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS), Malta, pp. 448-454, (2010).
- [33] C. Gözükırmızı and M. Demiralp, "*Numerical Studies on the Use of Enhanced Multivariate Product Representation as a Multiway Array Decomposer*", AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2010), Symposium 112, Recent Developments in Hilbert Space Tools and Methodology for Scientific Computing, vol. 1281, Rhodes, Greece, pp. 1922-1925, doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.3498300>, (2010).
- [34] L. Divanyan and M. Demiralp, "*Weighted Reductive Multilinear Array Decomposition*", AIP Proceedings for the 9th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2011), vol. 1389, Halkidiki, Greece, pp. 1156-1159, doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.3637820>, (2011).
- [35] S. Tuna, N. A. Baykara, and M. Demiralp, "*Weighted Singular Value Decomposition for Folded Matrices*", Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11), IEEEAM, ser. ISBN: 978-1-61804-034-3, N. Mastorakis, M. Demiralp, and N. A. Baykara, Eds., Prague, Czech Republic, pp. 70-75, (2011).

- [36] M. Demiralp, "*Decomposing Functions, Arrays, Function Arrays*", Lecture Talk based on the symposium 48's preface, AIP Proceedings for the 9th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2011), vol. 1389, Halkidiki, Greece, pp. 1138-1138, doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.3637815, (2011).
- [37] M. Ayvaz and M. Demiralp, "*Towards a New Multiway Array Decomposition Algorithm: Elementwise Multiway Array High Dimensional Model Representation (EMAHDMR)*", Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11), IEEEAM, ser. ISBN: 978-1-61804-034-3, N. Mastorakis, M. Demiralp, and N. A. Baykara, Eds., Prague, Czech Republic, pp. 76-81, (2011).
- [38] E. K. Özay, "*A New Multi-way Array Decomposition via Enhanced Multivariance Product Representation*", AIP Proceedings for the 10th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), Kos, Greece, pp. 2015-2018, Volume 1479, (2012)
- [39] E. K. Özay and M. Demiralp, "*A New Multi-way Array Decomposition*", 2012 SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Valencia, Spain, pp. 78-78, (2012)
- [40] A. Okan, N.A. Baykara and M. Demiralp, "*Weight Optimization in Enhanced Multivariance Product Representation (EMPR) Method*", Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math., AIP Conference Proceedings, Volume 1281, pp. 1935-1938, Rhodes, Greece, 2010.
- [41] A. Okan and M. Demiralp, "*Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariance Products Representation (TKEMPR) for Univariate Integral Operator Kernels*", The 2014 International Conference Mathematics and Computers in Sciences and Industry (MCSI 2014), 2014 International Conference, 13-15 Sept., Varna, Bulgaria, pp. 195-200, doi: 10.1109/MCSI.2014.26, print ISBN: 978-1-4799-4744-7

- [42] A. Okan and M. Demiralp, "*Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR) for Outer Product Sums: Arrowheading EMPR for Kernel (AEMPRK)*", The 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2014), 22-28 September 2014, Rhodes, Greece.
- [43] A. Okan and M. Demiralp, "*Numerical Implementations for Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR) Method: Bivariate Case*", The Proceedings of International Journal of Signal Processing, ISSN: 2367-8984, pages 102 - 107, Volume 1, 2016
- [44] İ. Yaman and M. Demiralp, "*An Integration Free Universal Approximation Method Based on Orthogonal Polynomials*", Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math., AIP, Kos, Greece, Sept. 15 – 20, 2008, pp. 601-604
- [45] N. A. Baykara, Ercan Gürvit, and Metin Demiralp, "*Fluctuationless Univariate Integration Through Taylor Expansion with Remainder by Using Oscillatory Function Basis Sets*", AIP Conf. Proc. 1168, pp. 428-431 (2009).
- [46] Ercan Gürvit, N. A. Baykara, and Metin Demiralp, "*Evaluation of Univariate Integrals via Fluctuationlessness Theorem*", AIP Conf. Proc. 1048, 239 (2008), DOI:10.1063/1.2990901
- [47] P. Natalini and P.E. Ricci, "*Newton Sum Rules of Polynomials Defined by a Three-Term Recurrence Relation*", Computers and Mathematics with Applications, 42,(2001), pp. 767-771
- [48] Mohazzabi, P. and L. Becker, J., "*Numerical Solution of Differential Equations by Direct Taylor Expansion.*", (2017) , Journal of Applied Mathematics and Physics, 5, 623-630. doi: 10.4236/jamp.2017.53053.

- [49] E. Gürvit ,N.A. Baykara, and M. Demiralp, "*Enhanced Multivariate Product Representation Applied to the Remainder Term of a Multivariate Taylor Expansion Expressed as a Cauchy Integral Form*", Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12), ISBN: 978-1-61804-115-9, pp. 250-255, (2012)
- [50] E. Gürvit, N. A. Baykara, and M. Demiralp, "*Fluctuation Studies on the Finite Interval Matrix Representations of Operator Products and Their Decompositions*", AIP Conf. Proc. Symposium 11. AIP Conference Proceedings 1504, 812 (2012); <http://doi.org/10.1063/1.4771818>
- [51] N. A. Baykara, E. Gürvit, and M. Demiralp, "*Fluctuation Studies in the Infinite Interval Matrix Representations of Operator Products and Their Decompositions*", AIP Conf. Proc. Symposium 11, AIP Conference Proceedings 1504, 808(2012); <http://doi.org/10.1063/1.4771817>

ÖZGEÇMİŞ

Ercan GÜRVİT 1962 yılında İstanbul'da doğdu. 1981 yılında Özel Saint-Joseph Fransız Erkek lisesinden, 1989 yılında Boğaziçi Üniversitesi İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü Ön Lisans programından mezun oldu. Devamında 2007 yılında Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden ve 2009 yılında da Marmara Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik programından Yüksek Lisans mezuniyetini aldı. 2009 yılından itibaren Marmara Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik programında doktora eğitimini sürdürmektedir.

Ercan GÜRVİT