

**ANİMASYONLA HAZIRLANMIŞ İSPAT MATERYALLERİ İLE
İSPAT ÖĞRETİMİNDE İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

Gülhan Yılmaz

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN, 2021

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren(....) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Gülhan

Soyadı : Yılmaz

Bölümü : İlköğretim Matematik Eğitimi

İmza :

Teslim tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı: ANİMASYONLA HAZIRLANMIŞ İSPAT MATERYALLERİ İLE İSPAT ÖĞRETİMİNDE İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

İngilizce Adı: STUDY OF PROOF PROCESSES IN PROOF EDUCATION WITH PROOF MATERIALS PREPARED BY ANIMATION

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazarın Adı Soyadı:.....

İmza:

JÜRİ ONAY SAYFASI

Gülhan YILMAZ tarafından hazırlanan “Animasyonla Hazırlanmış İspat Materyalleri İle İspat Öğretiminde İspat Süreçlerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi İlköğretim Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hasan ES

Matematik Eğitimi, Gazi Üniversitesi

Başkan: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

Matematik Eğitimi, Kastamonu Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. Mine AKTAŞ

Matematik Eğitimi, Gazi Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Matematik Eğitimi, Gazi Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

(Geometri, Ankara Üniversitesi)

Tez Savunma Tarihi: 26/04/2021

Bu tezin İlköğretim Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Yücel GELİŞLİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEŞEKKÜR

Çalışmamda ilerlemem için yardımını esirgemeyen değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Hasan ES'e sabrı ve anlayışı için çok teşekkür ederim. Lisans eğitimimden doktora eğitimime kadar beni destekleyen sayın hocam Prof. Dr. Ahmet KAÇAR'a teşekkür ederim.

Okumam için senelerce bana emek veren canım annem Meryem YILMAZ ve babam Hidayet YILMAZ'a teşekkür ediyorum. Dünyada en önemli şeyin aile olduğunu bana öğreten abim İlhan YILMAZ, ablam İlvan Hançerli ve kardeşim Gökhan'a da teşekkür ediyorum. Uzun süren doktora sürecinde bana yardımcı olan arkadaşlarıma ve tabiki öğrencilerime de sonsuz teşekkürler.

Ayrıca eğitim sürecim boyunca maddi anlamda destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ediyorum.

**ANİMASYONLA HAZIRLANMIŞ İSPAT MATERYALLERİ İLE
İSPAT ÖĞRETİMİNDE İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ
(Doktora Tezi)**

Gülhan Yılmaz

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2021

ÖZ

Yapılan bu araştırmada bilgisayar destekli animasyonlarla ispat materyalleri geliştirmek ve bu materyallerin ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinde ispat süreçlerini incelemek amaçlanmıştır. Öğrencilerin ispat öğretiminde etkinliklere ilişkin öğrenme süreçlerini bir bütün olarak ortaya konulması amacıyla bu araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmış olup Tasarı Araştırmasıyla desenlenmiştir. Araştırma Ankara ili merkez ilçede bulunan bir devlet okulunda 7. Sınıfta öğrenim gören 15 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın ilk evresinde öğrencilerin ispat etme konusundaki ön bilgilerinin ortaya konması amacıyla ön klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bu evreden sonra gelen hazırlık evresinde ortaokul öğretim müfredatı tüm sınıf düzeylerinde incelenmiş ve ortaokul seviyesinde ispatı yapılabilecek konular, kazanımlar ve kurallar belirlenmiştir. Animasyon konularının belirlenmesinin ardından varsayımlara bağlı öğrenme güzergahları ve öğretim etkinliklerinin geliştirilmesi evrelerine geçilmiştir. Araştırma için dört tema belirlenmiş ve 10 öğretim etkinliği geliştirilmiştir. Öğretim etkinliklerinin 5'i için pilot çalışma yapılmıştır ve bu çalışmadan elde edilen sonuçlara göre tüm animasyon ve etkinliklere uzman görüşüne dayanılarak son halleri verilmiştir. 10 hafta süren öğretim deneyi evresinde her hafta uygulama sonrasında ses kayıtları, video kayıtlar ve etkinlikler incelenmiştir. Uygulama

sonunda araştırmada yer alan tüm öğrenciler ile son klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Araştırmada kullanılan veri toplama aracı İspat alışması Klinik Mülakat soruları formu kullanılmıştır. 18 sorudan oluşan bu testte açık uçlu sorular yer almaktadır ve her bir soru için dereceli puanlama anahtarı oluşturulmuştur. Öğretim deneyi evresinde kullanılan veri toplama araçları ise öğrenciye ve araştırmacıya ait notlar, ses kayıtlarıdır. Araştırma kapsamında gerçekleştirilen, ispat yapma becerileri ve gelişimlerinin gözlemlenmesi amacı ile öğrencilerle birebir yapılan klinik mülakatların analizinde içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Öğrencilerin ispat yapma süreçleri genel olarak incelendiğinde, araştırma kapsamında geliştirilen ispat animasyonları ve ğretim etkinlileri kullanarak gerçekleştirilen ğretim deneyinin n görüşme sorularında belirlenen İspat Düzeyini 0'dan 2-3-4'e çıkardığı, öğrencilerin belirtilen konulara ait ispatları yapabildikleri ve ispat algılarının olumlu yönde geliştiği görülmektedir. n görüşme testinde ispat sorularını boş bırakan öğrencilerin uygulama sonrasında sonuca ulevresalar dahi ispat evrelerinden bir kısmını geçirmiş oldukları, öğrencilerin sözsüz (görsel) ispatı kullanarak cevap verdikleri sorularda matematiksel notasyonları doğru kullanmadıkları ya da eksik kullandıkları grlmştır.

Anahtar Kelimeler: İspat, Görsel İspat, Animasyon, Tasarı Araştırması

Sayfa Adedi: 281

Danışman: Dr. ğr. yesi Hasan ES

STUDY OF PROOF PROCESSES IN PROOF EDUCATION WITH PROOF MATERIALS PREPARED BY ANIMATION

(Ph. D)

Gülhan Yılmaz

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

April 2021

ABSTRACT

In this study, we were able to develop proof materials with computer-aided animations and to make these materials in middle school 7. It is intended to examine the proof processes in the class students. Qualitative research method was used in this research in order to reveal the learning processes related to activities in the teaching of proof of students as a whole and it was patterned with The Bill Research. The research was carried out with 15 seventh graders studying at a public school in the central district of Ankara province. In the first phase of the research, preliminary clinical interviews were carried out in order to reveal the preliminary knowledge of the students about proving. In the preparatory phase after this phase, the secondary school curriculum was examined at all class levels and the subjects, gains and rules that can be proven at the secondary school level were determined. Following the determination of animation topics, the development of learning itineraries and teaching activities based on assumptions has been phased out. Four themes have been identified for the research and 10 teaching events have been developed. Pilot studies were carried out for 5 of the teaching activities and according to the results obtained from this study, all animations and activities were finalized based on expert opinion. Audio recordings, video recordings and activities were examined every week after the application during the 10-week teaching experiment phase. At the end of the application, the final clinical interviews were carried out with all the students involved in the research. The data collection tool used in the

research, the Proof Study Clinical Interview questions form was used. This 18-question test included open-ended questions and a rubric was created for each question. The data collection tools used during the teaching experiment phase are notes and audio recordings of the student and the researcher. Content analysis method was used in the analysis of one-to-one clinical interviews with students in the aim of observing their proving skills and development. When the proving processes of the students are examined in general, it is seen that the teaching experiment conducted using proof animations and teaching activities developed within the scope of the research has increased the Level of Proof determined in the preliminary interview questions from 0 to 2-3-4, students are able to make proofs of the specified subjects and their perceptions of proof develop in a positive way. In the preliminary interview test, it was seen that the students who left the proof questions blank had undergone some of the proof phases even after the application, and that the students did not use or under-use mathematical notations in the questions they answered using nonverbal (visual) proof.



Key Words: Proof, Visual Proof, Animation, Design Research

Page Number: 281

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Hasan ES

İÇİNDEKİLER

ÖZ	v
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
TABLolar LİSTESİ.....	xv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xxi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xxv
BÖLÜM I	1
GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu	2
1.2. Araştırmanın Önemi.....	4
1.3. Araştırmanın Amacı	5
1.4. Araştırmanın Sayıtları	9
1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları	9
BÖLÜM II.....	10
KURAMSAL ÇERÇEVE	10
2.1. Matematiksel İspat ve Tarihçesi.....	10
2.2. Matematiksel İspat ve İşlevleri	13
2.3. Matematiksel İspat Yapma ve Amacı	15

2.4. Matematiksel İspat Yöntemleri	19
2.4.1. Tümevarım Yöntemiyle İspat	21
2.4.2. Doğrudan İspat Yöntemi	22
2.4.3. Olmayana Ergi Yöntemi	22
2.4.4. Çelişki Yöntemi	23
2.4.5. Deneme Yoluyla İspat:	23
2.4.6. Aksine Örnek Vererek İspat Yöntemi	23
2.5. Matematiksel İspat Şemaları	24
2.5.1. Dışsal İspat Şeması	25
2.5.1.1. Ritüel İspat Şeması	25
2.5.1.2. Otoriter İspat Şeması	26
2.5.1.3. Sembolik İspat Şeması	26
2.5.2. Deneysel İspat Şeması	26
2.5.2.1. Temel Örnekler İspat Şeması	26
2.5.2.2. Sezgisel İspat Şeması	26
2.5.3. Analitik İspat Şeması	27
2.5.3.1. Dönüşümsel İspat Şeması	27
2.6. Matematiksel İspat Düzeyleri	28
2.7. Matematik Öğretim Programları ve İspat Kavramı	30
2.7.1. NCTM Standartları ve İspat	32
2.7.2. Ortaokul Matematik Öğretim Programı ve İspat	34
2.7.3. Öğrencilerin İspat Yaparken Yaşadıkları Zorluklar	36
2.8. Bilgisayar Destekli Öğretim	38
2.8.1. Bilgisayar Destekli Öğretimde Animasyon Kullanımı	41
2.9. İlgili Araştırmalar	41
2.9.1. İspat ile İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar	41
2.9.2. İspat ile İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar	48
2.9.3. Animasyon ile İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar	50
2.9.4. Animasyon ile İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar	55
BÖLÜM III	57
YÖNTEM	57

3.1. Araştırmanın Modeli	57
3.1.1. Tasarım Tabanlı Araştırma Nedir?	58
3.1.2. E-öğrenme Ortamlarının Geliştirilmesi Sürecinde Tasarım Tabanlı Araştırma.....	63
3.1.3. Klinik Mülakatlar (Clinical Interview).....	64
3.1.4. Hazırlık Evresi (Preliminary Design Phase).....	66
3.1.4.1. Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahının Geliştirilmesi (Hypothetical Learning Trajectory)	68
3.1.4.2. Öğretim Etkinliklerinin Tasarlanması.....	69
3.1.5. Pilot Çalışma Evresi.....	70
3.1.6. Öğretim Deneyi Evresi	70
3.1.7. Geçmişe Dönük Analizler	71
3.2. Çalışma Grubu	72
3.3. Veri Toplama Araçları	73
3.3.1. İspat Çalışması Klinik Mülakat Soruları	73
3.3.2. Tasarı Araştırması Uygulama Süreci Veri Toplama Araçları	75
3.3.2.1. Öğrenci Notları	76
3.3.2.2. Araştırmacı Notları	76
3.3.2.3. Video Kayıtları.....	76
3.4. Verilerin Çözümlemesi ve Yorumlanması.....	76
BÖLÜM IV	78
BULGULAR VE YORUM	78
4.1. Klinik Mülakatlar	78
4.1.1. Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Temasına İlişkin Zihinsel Süreçleri	79
4.1.2. Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına İlişkin Zihinsel süreçleri	91
4.1.3. Öğrencilerin “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” Temasına İlişkin Zihinsel süreçleri.....	106
4.1.4. Öğrencilerin “İspat Algısı” Temasına İlişkin Zihinsel Süreçleri	110
4.2. Hazırlık Evresi	113

4.2.1. Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahının Oluşturulması.....	113
4.3. Pilot Uygulama Evresi	120
4.3.1. Pilot Uygulama Üçgenin İç Aç Toplamı İspatı Etkinliğine İlişkin Bulgular	121
4.3.2. Pilot Uygulama Toplam Formülünün İspatı Etkinliğine İlişkin Bulgular.....	122
4.3.3. Pilot Uygulama Çokgenin İç Aç Formülünün İspatı Etkinliğine İlişkin Bulgular	124
4.3.4. Pilot Uygulama Dairenin Alanın İspatı Etkinliğine İlişkin Bulgular.....	125
4.4. Öğretim Deneyi Evresi	125
4.4.1. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları.....	126
4.4.1.1. Bölünebilme Kurallarını İspat Etme.....	127
4.4.1.2. Tam Sayıların Çarpımında Sonucun İşaretini İspat Etme	131
4.4.1.3. Sıfır Hariç Sayıların Sıfırcı Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme ...	134
4.4.2. Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları	136
4.4.2.1. Üçgenin İç Açları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme	137
4.4.2.2. Çokgenin İç Aç Formülünü İspat Etme	139
4.4.2.3. Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme.....	141
4.4.2.4. Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme	143
4.4.2.5. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme	145
4.4.3. Cebir Öğrenme Alanı İspatları.....	147
4.4.3.1. Toplam Formülünü İspat Etme.....	148
4.4.4. İspat Algısı	150
4.5. Geçmişe Dönük Analizler Evresi.....	152
4.5.1. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçlarına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları.....	153
4.5.1.1. Bölünebilme Kurallarını İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları	155
4.5.1.2. İki Negatif Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme ve Zıt İşaretli Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları	159

4.5.1.3. Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğu İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları.....	162
4.5.2. Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçlarına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları.....	164
4.5.2.1. Üçgenin İç Açılar Toplamının 180^0 Olduğunu İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları	167
4.5.2.2. Çokgenin İç Aç Formülünü İspat öğrenme amacı örnek cevapları.....	170
4.5.2.3 Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları.....	175
4.5.2.4. Kare Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları	178
4.5.2.5 Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları.....	181
4.5.3. Cebir Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amacına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları.....	184
4.5.3.1. Toplam formülünü ispat etme öğrenme amacı örnek cevapları	185
4.5.4. İspat Algısı Temasına Ait Öğrenme Amacına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları.....	188
4.5.4.1. Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama Öğrenme Amacı Örnek Cevapları	189
SONUÇ TARTIŞMA ve ÖNERİLER.....	198
5.1. Sonuç, Tartışma ve Öneriler	198
5.1.1 Uygulama Öncesinde Yapılan Ön görüşme testinden elde edilen Sonuçlar	199
5.1.2 Uygulama Sonrasında Yapılan Son Görüşme Testinden Elde Edilen Sonuçlar	200
5.2. Tartışma ve Öneriler	204
KAYNAKLAR.....	209
EKLER.....	234
EK 1. Klinik Görüşme Soruları.....	235

EK 2. Klinik Görüşme Soruları Dereceli Puanlama Anahtarları	241
EK 3. Dairenin Alan İspatı Öğrenci Cevabı.....	258
EK 4. Paralelkenarın Alan İspatı Öğrenci Cevabı	259
EK 5. Toplam Formülü İspatı Öğrenci Cevabı 1.....	260
EK 6. Toplam Formülü İspatı Öğrenci Cevabı 2.....	261
EK 7. Klinik Görüşme Soruları ve Materyalleri Değerlendirme Formları	262
EK 8. Üçgenin İç Açılar Toplamı İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri	265
EK 9. Toplam Formülü İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri	267
EK 10. Çokgenin İç Açılar Toplam Formülü İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri	269
EK 11. Dairenin Alan Formülü İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri	271
EK 12. Bölünebilme Kuralları İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri	273
EK 13. Bölünebilme Kuralları Çalışma Kâğıdı	274
EK 14. Bölünebilme Kuralları İspat Çalışma Kâğıdı.....	275
EK 15. Tam Sayıların Çarpımı İspatının Animasyonu Ekran Görüntüleri	276
EK 16. Tam Sayıların Çarpımı İspatının Çalışma Kâğıdı.....	277
EK 17. Sıfırıncı Kuvvet İspatının Animasyonu Ekran Görüntüleri	278
EK 18. Sıfırıncı Kuvvet İspatı Çalışma Kâğıdı	279
EK 19. Paralel Doğrular Çalışma Kâğıdı	280
EK 20. Üçgenin İç Açılar Toplamı İspatı Çalışma Kâğıdı.....	281
EK 21. Çokgenler Çalışma Kâğıdı	282
EK 22. Çokgenin İç Açılar Toplam Formülünün İspatı Çalışma Kâğıdı.....	283
EK 23. Dörtgenlerin Alanları İspat Animasyonu Ekran Görüntüleri.....	285
EK 24. Üçgenin Alan Formülü İspat Animasyonu Ekran Görüntüleri.....	286
EK 25. Üçgenin Alan Formülü İspatı Çalışma Kâğıdı	288
EK 26. Toplam Formülü İspatı Çalışma Kâğıdı	290
EK 27. Özgeçmiş	291

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. <i>Doğrulamanın Bileşenleri</i>	14
Tablo 2. <i>Sözsüz İspat İçin Yurt İçinde ve Yurt Dışında Kullanılan İfadeler</i>	18
Tablo 3. <i>İspat Düzeyleri</i>	30
Tablo 4. <i>Akıl Yürütme ve İspat Standartı</i>	33
Tablo 5. <i>Tasarım Tabanlı Araştırmanın Türevleri</i>	59
Tablo 6. <i>Üslû Sayılar Uygulama Testi</i>	66
Tablo 7. <i>Dairede Alan Uygulama Testi Sonuçları</i>	68
Tablo 8. <i>Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahı Amaçları</i>	69
Tablo 9. <i>Uygulama Takvimi</i>	71
Tablo 10. <i>Pilot Uygulama Öğrenci Cinsiyetleri</i>	73
Tablo 11. <i>Araştırmanın Öğretim Deneyi kısmında bulunan Öğrencilerin Cinsiyet Dağılımları</i>	73
Tablo 12. <i>Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Bölünebilme Kurallarını İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular</i> .80	
Tablo 13. <i>Bölünebilme Kurallarını İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları</i> ..80	
Tablo 14. <i>Bölünebilme Kurallarını İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları</i> .82	
Tablo 15. <i>Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Teması “İki Negatif Tam Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular</i>	83

Tablo 16. İki Negatif Tam Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları	84
Tablo 17. İki Negatif Tam Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	85
Tablo 18. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Zıt İşaretili Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular	86
Tablo 19. Zıt İşaretili Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları	86
Tablo 20. Zıt İşaretili Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	87
Tablo 21. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Sıfır Hariç Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular	89
Tablo 22. Sıfır Hariç Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları	89
Tablo 23. Sıfır Hariç Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	91
Tablo 24. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular	92
Tablo 25. Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları	93
Tablo 26. Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	94
Tablo 27. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Çokgenin İç Açısı Formülünü İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular	95

Tablo 28. Çokgenin İç Açı Formülünü İspat Etme Alt TemasıÖn Klinik Mülakat Bulguları	96
Tablo 29. Çokgenin İç Açı Formülünü İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	96
Tablo 30. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Dairenin Alan Formülünü İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular	98
Tablo 31. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları	99
Tablo 32. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	100
Tablo 33. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular.....	101
Tablo 34. Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları.....	101
Tablo 35. Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları.....	102
Tablo 36. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular	104
Tablo 37. Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları	104
Tablo 38. Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme” Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	106
Tablo 39. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Toplam Formülünü İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular.....	107
Tablo 40. Toplam Formülünü İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları	107
Tablo 41. Toplam Formülünü İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	109

Tablo 42. Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “İspat Algısı” Teması “Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama” Alt Temasına İlişkin Bulgular	111
Tablo 43. Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları	111
Tablo 44. Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları	112
Tablo 45. Aminasyonlarda Kulannılan İspat Yöntemleri	118
Tablo 46. İspat Öğretimine Yönelik Belirlenen Öğrenme Amaçları Doğrultusunda Hazırlanan Varsayımlara bağlı Öğrenme Güzergâhı	119
Tablo 47. Öğrencilerin "Bölünebilme Kurallarını İspat Etme" Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	131
Tablo 48. Öğrencilerin "İki Tam Sayının Çarpımında Sonucun İşaretini İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	133
Tablo 49. Öğrencilerin " Sıfır Hariç Sayıların Sıfırcı Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	136
Tablo 50. Öğrencilerin " Üçgenin İç Açılar Toplamının 180o Olduğunu İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	139
Tablo 51. Öğrencilerin " Çokgenin İç Aç Formülünü İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	141
Tablo 52. Öğrencilerin " Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	143
Tablo 53. Öğrencilerin " Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	145
Tablo 54. Öğrencilerin " Dairenin Alan Formülünü İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	147
Tablo 55. Öğrencilerin " Toplam Formülünü İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları	150
Tablo 56. Öğrencilerin " İspat Algısı " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları ...	152

Tablo 57. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçlarına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları	154
Tablo 58. Bölünebilme Kurallarını İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları	155
Tablo 59. İki Negatif Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme ve Zıt İşaretli Sayılarının Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları.....	159
Tablo 60. Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğu İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları.....	162
Tablo 61. Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçlarına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları	166
Tablo 62. Üçgenin İç Açılarının Toplamının 180^0 Olduğunu İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları	167
Tablo 63. Çokgenin İç Açısı Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları	171
Tablo 64. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları	175
Tablo 65. Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar Ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri Ve Örnek Cevap Kodları	179
Tablo 66. Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları	181
Tablo 67. Cebir Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amacına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları	184
Tablo 68. Çokgenin İç Açısı Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları	185
Tablo 69. İspat Algısı Temasına Ait Öğrenme Amacına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları	189

Tablo 70. Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları	190
Tablo 71. Ön Klinik Mülakat Verilerine Göre Öğrencilerin İspat Düzeyleri (İD).....	199
Tablo 72. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergâhı .	200
Tablo 73. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanına Ait Soruların Son Görüşme İspat Düzeyleri	200
Tablo 74. Geometri Ve Ölçme Öğrenme Alanı Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahı	201
Tablo 75. Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanına Ait Soruların Son Görüşme İspat Düzeyleri	201
Tablo 76. Cebir Öğrenme Alanı Varsayımlara bağlı Öğrenme güzergâhı	202
Tablo 77. Cebir Öğrenme Alanına Ait Soruların Son Görüşme İspat Düzeyleri	202
Tablo 78.İspat Algısı Temasına Ait Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahı	202
Tablo 79. İspat Algısı Temasına Ait Soruların Son Görüşme İspat Düzeyleri	202

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Pisagor teoreminin ispatı.....	16
Şekil 2. İlk n tamsayısının toplamının sözsüz ispatı	18
Şekil 3. Fibonacci sayılarının karelerinin toplamı.....	19
Şekil 4. Tasarı araştırmalarında mikro döngüsel süreç.	62
Şekil 5. Araştırma modelinin aşamaları	63
Şekil 6. Üslü sayılar mini uygulama testi sonuçları	67
Şekil 7. Dairenin alanı ve çevresi uygulama testi	67
Şekil 8. Bir animasyona ait storyboard örneği	114
Şekil 9. Üçgende alan ispatı hikâye tahtası	115
Şekil 10. Çokgende iç açı toplam formülü ispatı hikâye tahtası	115
Şekil 11. Dairenin alanı ispatı hikâye tahtası	116
Şekil 12. Toplam formülü çalışma kâğıdı	116
Şekil 13. Üçgenin iç açıları toplamı çalışma kâğıdı	117
Şekil 14. Üçgenin iç açıları toplamı çalışma kâğıdı	117
Şekil 15. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön1Böl)	156
Şekil 16. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön2Böl)	156
Şekil 17. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön3Böl)	156
Şekil 18. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön4Böl)	156

Şekil 19. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön5Böl)	157
Şekil 20. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön6Böl)	157
Şekil 21. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön7Böl)	157
Şekil 22. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son1Böl)	158
Şekil 23. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son2Böl)	158
Şekil 24. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son3Böl)	159
Şekil 25. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön1Tam)	160
Şekil 26. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön2Tam)	160
Şekil 27. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön3Tam)	160
Şekil 28. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön4Tam)	160
Şekil 29. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön5Tam)	161
Şekil 30. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son1Tam)	161
Şekil 31. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son2Tam)	161
Şekil 32. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön1Kuvvet)	162
Şekil 33. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön2Kuvvet)	162
Şekil 34. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön3Kuvvet)	163
Şekil 35. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön4Kuvvet)	163
Şekil 36. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön5Kuvvet)	163
Şekil 37. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Son1Kuvvet)	163
Şekil 38. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Son2Kuvvet)	164
Şekil 39. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Son3Kuvvet)	164
Şekil 40. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Son4Kuvvet)	164
Şekil 41. Örnek öğrenci cevabı(Kod:Ön1Üçgen)	168
Şekil 42. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Üçgen)	168
Şekil 43. Örnek öğrenci cevabı (Kod:Ön3Üçgen)	168

Şekil 44. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4Üçgen)	169
Şekil 45. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5Üçgen)	169
Şekil 46. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Üçgen)	169
Şekil 47. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Üçgen)	170
Şekil 48. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son3Üçgen)	170
Şekil 49. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son4Üçgen)	170
Şekil 50. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1Çokgen)	171
Şekil 51. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Çokgen)	172
Şekil 52. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön3Çokgen)	172
Şekil 53. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4Çokgen)	172
Şekil 54. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5Çokgen)	173
Şekil 55. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Çokgen)	173
Şekil 56. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Çokgen)	174
Şekil 57. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son3Çokgen)	174
Şekil 58. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son4Çokgen)	175
Şekil 59. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1Daire)	176
Şekil 60. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Daire)	176
Şekil 61. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Daire)	177
Şekil 62. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Daire)	178
Şekil 63. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1Dörtgen)	179
Şekil 64. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Dörtgen)	179
Şekil 65. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön3Dörtgen)	180
Şekil 66. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4Dörtgen)	180
Şekil 67. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5Dörtgen)	180
Şekil 68. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Dörtgen)	181

Şekil 69. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Dörtgen)	181
Şekil 70. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1ÜçAlan)	182
Şekil 71. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2ÜçAlan)	182
Şekil 72. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön3ÜçAlan)	182
Şekil 73. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4ÜçAlan)	183
Şekil 74. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5ÜçAlan)	183
Şekil 75. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1ÜçAlan)	183
Şekil 76. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1Toplam)	185
Şekil 77. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Toplam)	185
Şekil 78. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön3Toplam)	186
Şekil 79. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4Toplam)	186
Şekil 80. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5Toplam)	186
Şekil 81. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Toplam)	187
Şekil 82. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Toplam)	187
Şekil 83. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son3Toplam)	187
Şekil 84. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son4Toplam)	188
Şekil 85. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son5Toplam)	188
Şekil 86. Örnek öğrenci cevabı (Ön1Algı)	191
Şekil 87. Örnek öğrenci cevabı (Ön2Algı)	192
Şekil 88. Örnek öğrenci cevabı (Ön3Algı)	193
Şekil 89. Örnek öğrenci cevabı (Ön4Algı)	194
Şekil 90. Örnek öğrenci cevabı (Son1Algı)	195
Şekil 91. Örnek öğrenci cevabı (Son2Algı)	196
Şekil 92. Örnek öğrenci cevabı (Son3Algı)	197

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi
TIMSS	Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması
PISA	Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı
OECD	Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü
ABİDE	Akademik Becerilerin İzlenmesi ve Değerlendirilmesi Sınavı
ÖDSGM	Ölçme ve Değerlendirme Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bireylerin gelişen ve değişen dünyaya ayak uydurabilmeleri için beraberinde getirdiği yenilikleri takip etmesi, kavraması, benimsemesi ve yaşama aktarması gerekmektedir. Teknolojik gelişmelerin de etkisiyle beraber günümüzdeki değişimi düşündüğümüzde bu hızı yakalayabilmek için bireylerdeki çeşitli özelliklerin gelişmesi önemlidir. Bu sebeple yeterli bilgi ve beceri donanımına sahip, çevresindekileri sorgulayıp yorumlayabilen, ilişkileri analiz edebilen, değerlendirme yapıp karara varabilen ve üretim yapabilen bireylere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bireylerin gelişiminde yeni gereksinimler ortaya çıktıkça eğitim sisteminde de yeni arayışların gerçekleşmesi kaçınılmazdır. Amaç; sürekli öğrenme alışkanlığı edinmiş, yaratıcı bilgi insanları yetiştirmektir. Sürekli gelişen bilgi tabanlı toplum ve değişen çevre şartları, bireyin toplumda etkinleşebilmesi için matematiği bireyin ihtiyaçlarından biri haline getirmiştir (Öztuncay, 2005).

Matematik, günlük yaşantımızda karşılaştığımız hadiseleri algılama, olaylar arasında bağ kurarak tahminde bulunma ve analiz edebilme gibi beceriler kazandırarak farklı bir hayat biçimi sunan bir çeşit düşünme alışkanlıklarıdır. Matematik eğitiminin temel amacı, sayılarla işlem yapmayı öğrenmekten daha çok, neden sonuç ilişkilerini karşılaştırarak çıkarım yapabilme gibi yetenekleri kazandırarak farklı bir yaklaşım şekli sunan bir takım düşünme alışkanlıklarıdır ve yetileridir (Baki, 2001; Güven & Karataş, 2003; Umay, 2003).

Matematiği daha ilginç hale getirebilmek üzere yeni sistemler oluşturulabilir ve bu sistemlerde çalışabilmek adına kurallar bile değiştirilebilir. Anlayan ve keşifler yapan ve yalnız bir fonksiyonun diferansiyelini alabilenlerin göremeyebileceği yeni bir düşünce

dünyası vardır ve bu dünyaya girebilmek için soyutlama ve matematiksel ispat fikirlerini kullanmak gereklidir (Goldberg, 2002).

Matematikçiler kuşkucu insanlardır ve matematik sorularına yanıtlar bulmak için örneklendirme, deneme-yanılma ve tahmin gibi birçok yol izlerler; ancak doğruluğu kanıtlanmadığı sürece bir cevabın doğru olduğuna inanmazlar (Velleman, 1994, 2008). Bir kimyacı, simyacıların çocukça çabalarına gülüp geçerken bir matematikçi Antik Yunan Geometrisini ve Hint Aritmetiğini en az günümüzdeki araştırmalar kadar yararlı ve takdire şayan bulur (Cajori, 1893). Bir matematikçi, herhangi bir sorunla karşılaştığı zaman özel durumları inceledikten sonra genellemelere varır, hipotezler ortaya atar ve bu hipotezleri kanıtlama yoluna gider. (Arslan & Yıldız, 2010); matematiğin diğer bilimlerden daha “gerçek” bir bilim olduğu ve matematikte ispatlanmış şeylerin hiçbir zaman boşa gitmediği gerçeği ile gurur duyar (Cajori, 1893).

1.1. Problem Durumu

Bilimin her alanında, elde edilen bilgilerin doğruluğunu ispatlamak gerekmektedir. Fen bilimleri alanlarında, bilgilerin doğruluğuna gözlem ve deneyle ulaşılırken, matematiksel bilgilerin doğruluğuna ulaşmak için bu metotları yeterli değildir. Bu nedenle; matematikle uğraşan bir birey ya da bir matematik bilimci, matematiksel anlatım ve önermenin gerçekliğini paylaşmak için geçerli mantıksal çıkarımlardan faydalanır. (Hanna ve Barbeau, 2002, Polster, 2004). Rodd (2000)’a göre bir ifadenin doğruluğu ile ilgili sunulan delil ispattır.

İspat matematiğin temelini oluşturur (Mingus & Grassl, 1999; Tall, 1998) ve matematikte çok önemli bir yere sahiptir (Coe & Ruthven, 1994; Hanna, 2000a; Martin ve Harel, 1989). İspat, matematiği diğer bilim dallarından ayıran en belirgin unsurlardan biridir (Hanna & Jahnke, 1996; National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 2000).

Matematik eğitim sürecinin en belirgin unsurlarından bir tanesi matematiksel algılamanın ve muhakemenin oluşumu ve gelişimini sağlamaktır. Matematiksel algılama ve muhakeme becerisi ilerlemiş bir kişi, üzerinde çalışma yaptığı matematiksel bir oluşum ya da problemle ilgili açıklamalar yapabilir, tahminlerde veya varsayımlarda bulunabilir, ortaya attığı hipotezlerin doğruluğunu ispatlayabilir ve genelleme yapabilir (Baki, 2008). Bu doğrultuda, matematiksel düşünmenin ve muhakeme becerisinin ilerlemesinde matematiksel ispatın rolü

büyüktür (Knuth, 2002a; Stylianides, 2007a; Tall 2002). Ayrıca, ispat matematiksel bilgi için bir gereklilik unsuru oluşturmasının (Ernest, 1991) yanı sıra matematiği algılama ve matematik yapma için önemli bir etkinliktir (Almeida, 2000). İspatı kullanarak bir unsurun neden gerekli ve doğru olduğu kanıtlanabilir, açıklanabilir ve yeni matematiksel bilgiler keşfedebilir veya oluşturulabilir (Almeida, 2000; De Villiers, 1990; Knuth, 2002a; Weber, 2003).

İspatın tanımı ve ispat hakkındaki görüşleri araştırmak amacıyla gerek yurtiçinde gerekse yurtdışında pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar incelendiğinde ispatla ilgili farklı tanımlamalar yapıldığı görölmektedir. İspat bazılarına göre bir süreç, bazılarına göre açıklama, bazılarına göre de okullarda gereksiz yapılan bir etkinliktir. “İspat, önermelerin ya da önerme kalıplarının birbirleriyle olan ilişkisine dayalı mantıksal bir çıkarımdır” (Yıldırım, 2014). “İspat, teoremlerin doğruluğunu test etmek için kullanılan iddialardır” (Selden & Selden, 2003). Öğrenciler ispatı “tanımsız kavramlara, önceden ispatlanmış teoremlere dayanılarak bazı hükümlerle bir önermenin doğru olduğunu ortaya çıkarma” şeklinde tanımlamışlardır (Dane, 2008).

Thomas Thucker’a (1999) göre ispatın faydaları şu şekilde ifade edilmiştir:

- İspat öğrencinin kavramları daha iyi anlamasını ve sonuçlarına inanmasını sağlar.
- İspatlar, matematikçilerin yaptıkları etkinliği öğrencinin görmesini sağlar.
- İspat matematiksel düşünme yapısını geliştirir.

Knuth (2002b) ispatın öğrenmede bir araç olduğunu belirtirken; Ross (1998) matematik öğretimi sürecinde ispatın bilimsel doğrularından çok eğitsel değerleri üzerinde durulması gerektiğini belirtmiştir. Birçok matematikçi ve matematik eğitimcisi ispatı matematik eğitiminin önemli bir parçası (Özer & Arıkan, 2002); hatta matematiğin kalbi olarak değerlendirmektedir (Albayrak Bahtiyari, 2010).

Matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olan ispat yapma soyut bir süreç içermesi nedeni ile öğrenciler tarafından anlaşılması güç bir durumdur. Bu sebeple ortaöğretim öğrencilerine ispat yapma öğretimi, animasyon materyalleri kullanarak öğretimi daha anlaşılır hale getireceği düşünölmektedir.

1.2. Araştırmanın Önemi

Son yirmi yılda, matematik eğitime duyulan ihtiyacın ve verilen değerin artmasıyla, matematik öğretiminin daha sistematik ve öğretim düzeyinin daha iyi olması adına birçok çalışmalar yapılmaya başlanmıştır (Tall, 1998). Bu doğrultuda, matematik öğretiminin ana unsurları içerisinde, tümevarım- tümdengelim yöntemlerini kullanarak çıkarımlar yapabilecek bireyler yetiştirme amacı yer almakta ve matematiksel düşünme becerisi hedef alınarak matematiksel ispat sürecinin önemine vurgu yapılmaktadır (Albayrak Bahtiyari, 2010).

İspat öğretiminin matematik öğretimindeki yerine yönelik vurgular artarken, öğretim programlarında ispat öğretimine yer verilmediği görülmektedir. İspat kavramının ve ispat öğretiminin matematik öğretim programlarındaki yer edinememiş olmasının yanında, başka bir sorun da ülkemizde ilköğretim düzeyinde ispat öğretimine yönelik çalışmaların az olmasıdır. Günümüzde, ispat ile ilgili sorularına yanıt arayan bir kişi ne yazık ki sorularının yanıtlarını net bir şekilde bulamamaktadır. Bunların en çok göze çarpanları ise; “matematiksel ispat nedir?”, “matematiksel ispatta nasıl bir akıl yürütme tarzı gereklidir?”, “ortaokul öğrencileri matematiksel ispatı hangi düzeyde kavrayabilir ve ispat yapabilirler mi?”, “Ortaokul öğrencileri matematiksel ispat yöntemlerini kavrayabilir, etkin olarak kullanabilir mi?” (Aylar, 2014).

Aylar ise 2014’te yaptığı çalışmasında 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve becerilerini geliştirmeyi amaçlayan bir öğretim süreci sonrasında öğrencilerin ispata yönelik algı ve becerilerini betimlemeyi amaçlamıştır ve öğretim sürecinde herhangi bir materyal kullanmamıştır. Aylar yaptığı çalışmada ispatlamak için önermeler belirlemiştir. Bu önermelerden bazıları şöyledir;

“Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır.”

“Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp, çarpıma 6 eklerseniz 6’nın katı olan bir sayı elde edersiniz.”

“İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.” Bu önermelerin öğretim programında bir kazanım olarak karşılıkları yoktur.

Bu araştırma ile hazırlanan animasyon materyalleriyle ispat öğretiminin 7. sınıf ve 8. Sınıf düzeylerinde uygulanabilirliği ele alınarak, bu alanda var olan boşluk giderilmeye çalışılacaktır. Hazırlanacak materyallerin alana özgün bir katkı sunacağı düşünülmektedir. Seçilen ispat konularının tümü ortaokul matematik öğretim programındaki bir kazanımın

öğretimi ile ilişkilidir. Araştırma bu açıdan diğer araştırmalardan farklılık göstermektedir. Bu araştırmadan elde edilen sonuçların yeni araştırmalara ve öğretim programına yönelik katkılara ışık tutacağı umulmakta ve bu doğrultudaki yaklaşımlara temel oluşturacağı düşünülmektedir.

1.3. Araştırmanın Amacı

Akıl yürütme ve ispat ortaöğretim matematik dersi öğretim programında süreç kazanımı olarak yer almaktadır. 9. sınıf matematik dersi kazanımlarında “9.1.1.5. Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar. ” kazanımı yer almaktadır. Akıl yürütme ve ispat yapma, ortaöğretim matematik programında bu kazanımdan başka bir yerde geçmemektedir.

Ortaöğretim fen liseleri matematik öğretim programında ise açık önermeler ve ispat teknikleri adında bir alt öğrenme alanı bulunmaktadır. Bu alt öğrenme alanında “9.1.2.3. Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar.”, “9.4.3.1. Açıkortay teoremleri ispatlanır” kazanımları yer almaktadır. Bunların yanında yakın zamanlarda yapılan bazı çalışmalar ispata yönelik içeriklerin lise matematik öğretmenlerince sınıfta uygulanmadığını göstermektedir (Çalışkan, 2012; İlhan, 2006).

İlköğretim matematik dersi öğretim programında ise ispata yer verilmemekte, akıl yürütme becerisi içerisinde bulunan ifadelerden, ispata yönelik dolaylı çıkarımlar yapılabilmektedir.

Ülkemizdeki öğretim programlarında bulunan bu ifadeler üniversite öncesi öğretim kademelerinde ispat öğretimine yeterince yer verilmediğini, ispat öğretiminin yeteri kadar ele alınmadığını, ispat yapmaya önem verilmediğini göstermektedir. Yakın geçmişte ispatın matematik öğretiminin temel bir bileşeni olması gerektiğini ve her yaş kuşağının, kendi yaşına uygun bir şekilde ispat yapabileceğini savunan yaklaşımlarda artış gözlenirken, bu anlayışın öğretim programlarına yansıtılmadığı görülmektedir. ABD, İngiltere gibi ülkelerin öğretim programlarında ispat öğretimi erken dönemlerde ele alınmakta, anaokulundan itibaren öğrencilerin ispat algıları ve ispat yapma becerileri hakkında araştırmalar yapılmaktadır (Aylar, 2014).

Öğretim programlarında ispat kavramı ve ispat yöntemlerine yer verilmesinin yanında yapılan ulusal ve uluslararası sınavlarda öğrencilerimizin en üst seviye olan akıl yürütme basamağında ortalamanın çok gerisinde oldukları görülmektedir.

Temel olarak fen, matematik ve okuma becerileri alanlarında öğrencilerin becerilerinin değerlendirildiği Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı- PISA 2015 ulusal raporunda yeterlik düzeyine göre dağılımlar incelendiğinde en üst düzey olan 6. Düzey açıklamasında bulunan ifadeler şöyledir;

6. Düzey; Bu düzeyde bulunan öğrenciler; araştırmalarına bağlı olarak elde ettikleri bilgileri kavramlaştırabilir, genellebilir ve kullanabilir. Karmaşık problem durumlarını modelleyebilir. Farklı bilgi kaynaklarını ve gösterimlerini ilişkilendirebilir. Bunları esnek bir şekilde birbirine dönüştürebilir. İleri düzeyde matematiksel düşünme ve akıl yürütme kapasitesine sahiptir. Yeni durumlarla başa çıkmaya yönelik yeni yaklaşımlar ve stratejiler geliştirmede, sembolik ve formel matematik işlemleri ve ilişkilerinin yanı sıra, kendi bakış açılarını ve anlamlarını uygulayabilir. Kendi bulgularına, yorumlarına, argümanlarına ve bunların orijinal durumlara uygunluğuna bağlı olarak eylemlerini ve tepkilerini formüle edebilir ve bunlar arasındaki iletişimi tam olarak sağlayabilir.

PISA 2015 raporuna göre 72 ülkenin katıldığı sınavda Türkiye 54. olmuştur ve Türkiye 'deki öğrencilerin %0,01'i 6. düzeydedir.

TIMSS sınavı Uluslararası Eğitim Başarılarını Değerlendirme Kuruluşu (IEA- International Association for the Evaluation of Educational Assessment) tarafından yürütülen ve dört yılda bir gerçekleşen tarama çalışmasıdır. TIMSS araştırmasına ülkelerin 4. ve 8. sınıf öğrencileri dâhil edilerek, öğrencilerin matematik ve fen alanında çok yönlü bilgi ve becerilerinin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu sınavda 8. Sınıf öğrencilerinin Uluslararası matematik yeterlik düzeylerinin en üst düzeyi ileri düzey olarak tanımlanmıştır. İleri düzeye ait açıklama şöyledir;

İleri Düzey; Öğrenciler bilgiyle akıl yürütebilir, sonuç çıkarabilir, genelleme yapabilir ve doğrusal eşitlikleri çözebilir.

39 ülkenin katıldığı Türkiye'nin 24. Olduğu 2015 TIMSS sınavında, yayınlanan rapora göre öğrencilerimizin %6'sının ileri düzeyde olduğu görülmüştür.

Milli Eğitim Bakanlığı tarafından uygulanan, genel amacı ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin zihinsel becerilerinin ortaya konulması ve öğrencilerin başarılarıyla ilişkili öğrenci, öğretmen ve okul özelliklerinin belirlenmesi olan ABİDE sınavında ise matematik dersi en üst yeterlik düzeyi şöyle tanımlanmıştır;

İleri Düzey; Matematiksel problem durumlarında bilgilerin ve becerilerin yeni bir duruma transfer edilmesini, mantıksal ve sistematik düşünmeyi gerektirir. Farklı bilgi kaynaklarını ve

gösterimlerini ilişkilendirebilir. Bunları esnek bir şekilde birbirine dönüştürebilir. Karmaşık problem durumlarını modelleyebilir.

- *Üst düzey düşünme ve akıl yürütme gerektiren, karmaşık durumlar içeren ve çözümü birkaç adımda gerçekleşen olasılık problemlerinde doğru çözüm yoluna karar vererek gerekli işlemlerin tümünü yapabilir.*
- *Bir çözümün, çıkarımın veya stratejinin doğruluğunu ve geçerliliğini savunmak için matematiksel deliller/argümanlar üretebilir.*
- *Verilen verilere/bilgilere/hükümlere/ kavramlara dayanarak geçerli bir sonuca varabilir ve bu sonuca dayalı bir çıkarım ortaya koyabilir.*

2016 yılında uygulaması yapılan bu sınavda öğrencilerin %3,3'ü ileri düzeyde bulunmaktadır.

Uygulanan sınavlardaki akıl yürütme ve ispat ifadelerinin yer aldığı düzeylerde öğrenci yüzdelerimizin düşük olmasının nedeni öğretim programlarımızda akıl yürütme ve ispat becerisine yönelik etkinliklere ve öğretim tekniklerine yer verilmemesi ile açıklanabilir.

Yapılan araştırmalar ispatın matematikte anlamlı öğrenmeyi sağlaması ve ezberi önlemesi açısından önemli olduğunu göstermektedir. Öğrenciye doğrudan matematiksel bilgiyi sunmak değil, bu bilginin neden doğru olduğunu ve nasıl ortaya çıktığını öğretebilmek de önem arz etmektedir. İspat becerisinin gelişimi erken yaş dönemlerinde başlamaktadır. Bu sebeple anaokulundan itibaren öğretim süreci içerisinde ispata yönelik çalışmalara yer verilmeli, ispata yönelik algının gelişmesini sağlayacaktır. Öğretim sürecini ve öğretim programlarını bunları dikkate alarak düzenlemek ve çeşitli öneriler sunabilmek için her yaş kuşağının ispata yönelik yaklaşımını, ispatı ne düzeyde algıladıkları ve ispatı hangi düzeyde yapabilecekleri ortaya konulmalıdır (Aylar, 2014).

Araştırmalar göstermektedir ki; ispat yapmak her öğretim düzeyinde öğrencilerin sıkıntı çektikleri, başaramadıkları, başarılı olamayacaklarına inandıkları, korktukları bir konudur (Almeida, 2003; De Villiers, 1990; Jones, 2000; Özer & Arıkan, 2002; Raman, 2003). İspat becerisini kazanma yolunda atılması gereken ilk ve en önemli adım, ispatlanacak kavram için hangi varsayımla yola çıkılması gerektiğinin saptanmasıdır. Bu sebeple öğrencilerin matematiksel ispat ve muhakeme becerilerinin geliştirilmesinde amaçlara uygun varsayımlara ulaşmalarını sağlayabilmek gereklidir.

Öğrencide ispat kavramının oluşması okul öncesi dönemde başlamaktadır. İspatın temelini oluşturan kavramlar “Sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma” gibi kavramlardır.

Piaget 4–7 yaş dönemini çocukların sezgisel dönemi olarak belirtmiştir (Aktaş, 2002). Mantıksal düşünmeye geçiş olarak tanımlanan bu dönemde sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma kavramlarıyla ispat kavramı oluşturulmaktadır. Bu kavramsal geçişler bu yaş döneminde geliştirilmezse ilerleyen dönemlerde ispat öğretiminde sıkıntılar yaşanacaktır.

İlkokul 3 – Ortaokul 5. sınıftaki öğrenciler ise bir varsayımın doğruluğunu göstermek için, bir kaç örneğin yeterli olmadığını, karşıt örneklerin varsayımları çürütebilmek için kullanılması gerektiğini bilmelidirler.

Ortaokul 6–8. sınıflar için muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri istenmektedir. Öğrenciler varsayımları ve iddiaları değerlendirebilmeli, matematiksel iddiaları formüle ederek tümdengelimsel ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilmeli, muhakeme becerilerini geliştirmelidirler.

Somut işlemler dönemlerinde bahsedilen evreleri doğru ve tam şekilde gerçekleştiren öğrenciler soyut işlem dönemlerinde daha ileri seviyedeki ispatlarda sorun yaşamayacakları ve kendi bilgilerini üretebilecekleri düşünülmektedir (Hodgson & Riley 2001).

Literatürde karşılaşılan çalışmaların bütününde ispat, matematiğin ayrılmaz bir parçası olarak karşımıza çıkmaktadır (Hanna, 2000b; Jones, 1997; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994). Bu nedenle gerek ilköğretim gerekse ortaöğretim matematik öğretiminde matematiksel ispat yapma üzerinde durulması, öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin gelişmesi yönünden önemli olacaktır (Moralı, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006). Ayrıca matematiksel ispat öğrencilerin kendilerine verilen bir problem için geliştirdikleri çözüm yolunu matematiksel ifadelerle savunmalarına da katkıda bulunacaktır (Hanna, 2000c; Hanna & Jahnke, 1999).

İspat yapmak ve muhakeme etmek insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenektir. Ancak uygun stratejilerin kullanılması ile bu yeteneğin gelişimi sağlanabilir. Bu stratejileri istenilen yapıda belirleyip kullanamaz ise insanda doğuştan var olan ispat ve muhakeme yeteneklerini zamanla yok edip, ezberleme yolunu seçen, neden sonuç zincirini takip edemeyen bireyler yetiştirmiş oluruz. Tam tersine uygun stratejileri belirleyip uygular ise var olan ispat yapma ve muhakeme etme becerisinin yapısını daha ileri taşıyız. Ve bu ilerlemenin sağlanmasında en büyük görev uygulamaları yapacak olan öğretmendir. Öğrencideki ispat ve muhakeme becerisinin gelişimi öğretmene bağlıdır. Eğer öğretmenler öğrencileri için geniş öğrenme yelpazesi sunarlar ve değişik ispat yöntemlerini verirlerse,

öğrencilere matematiği ve mantıksal düşünceyi daha iyi anlayıp yaratıcılıklarını artıracaklardır (Altıparmak & Öziş, 2005).

İlköğretim öğretim programlarında yer almayan, lise öğretim programlarında sadece iki kazanımda bulunan “ispat yapma” kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar ispat yapmanın ve ispat öğretiminin ne denli önemli olduğunu göstermektedir. Programlarımızdaki bu eksiklik de yapılan ulusal ve uluslararası sınavlarda gün yüzüne çıkmaktadır.

Tüm bu sonuçlar ve çalışmalar incelendiğinde ispat öğretimi ile ilgili ortaya çıkan bu eksiklikler nedeni ile bu araştırmada animasyonlarla ispat materyalleri geliştirmek ve bu materyallerin ortaokul 7. sınıf öğrencilerinde ispat süreçlerini incelemek amaçlanmıştır.

1.4. Araştırmanın Sayıtları

Araştırmada öğrencilere çalışma öncesi ve sonrasında uygulanacak başarı testinin, öğrencilerin gerçek başarı durumlarını ortaya koyduğu varsayılacaktır. Veri toplamak amacıyla uygulanan sınavlarda öğrencilerin performanslarını ortaya koydukları, gerçekleştirilen klinik mülakatlarda içtenlikle ve gerçek görüşlerini yansıtacak biçimde cevap verdikleri de varsayılacaktır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Bu çalışmanın pilot uygulaması, öğrenci ve öğretmen ortalaması kent ortalamasına yakın, sosyo-ekonomik düzey ve öğrenci başarısı açısından orta düzeyde olan Ankara ili merkez ilçede bulunan bir devlet okulunun 6.ve 7. Sınıf öğrencileri ile sınırlıdır.
2. Çalışmanın öğretim deneyi evresinde bulunan öğrenciler ise; Ankara ili merkez ilçede bulunan bir devlet okulu ile sınırlıdır.
3. Araştırma uygulandığı eğitim öğretim yılı olan 2016-2017 öğretim yılı ile sınırlıdır.

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Matematiksel İspat ve Tarihçesi

İspat, uzun bir tarihsel ve eğitimsel gelişimin ürünüdür. Tıpkı insanlığın böylesine yüksek bir seviyeye ulaşması uzun zaman aldığı gibi matematik dünyasına giren her bireyin bir büyüme süreci geçirmesi gerekir. Böyle bir süreç temellerle başlamalıdır ve ispatların üzerine bina edildiği temel soru "neden?" sorusudur ki bu doğal olarak yalnız matematiğe özgü değildir; bütün fikirlerin başlangıç noktasını oluşturur (Hanna ve Jahnke, 1996). Tarihte kaydedilen ilk matematiksel ispat Babilliler'e aittir. Babilliler'in (Çinlilerle birlikte) Pisagor'dan daha önce Pisagor teoreminin farkında oldukları görülmektedir. Babilliler' e ait Pisagor teoreminin doğru olduğunu gösteren belirli diyagramlar ve tabletlere ulaşılmıştır. Ancak Pisagor'un matematiğin yapısına, kesinliğin önemine ve formal ispatın doğasına ilişkin sahip olduğu anlayışa erişemedikleri belirtilmektedir (Krantz, 2011). Antik Yunan öncesi matematik; pratik yaşam ihtiyaçlarına dönük, deneme yanılma yöntemine bağlı, empirik bilgi düzeyinde bir uğraştı. Mantıksal ispata ancak Antik Yunan döneminde erişilebilmiştir (Yıldırım, 2015). Erken çağlardaki uygulamalı ve deneysel matematiksel bilginin Antik Yunan'daki sistematik tümdengelimli matematiğe dönüşmesiyle ispat, modern matematikte merkezi bir konum elde etmiştir (Lee, 2002).

Bir tür gözlem olan ölçmeye başvurarak değil de mantıksal çıkarım yöntemiyle ortaya konan ispat yöntemini ilk deneyen düşünür Thales'tir. Thales'ten sonra gelen Pisagor ve Evdokus ise ispat yöntemine sistematik bir kimlik kazandırmışlardır. Pisagor kendi adıyla ünlü teoremi ortaya koyarak, ispat yöntemine kazandırdığı güç ve saygınlık yanında büyük açıklık getirmiştir. Matematiğin ilk büyük bunalımı diyebileceğimiz $\sqrt{2}$ sayısının

bulunuşunu mistik öğretilerine ters düştüğü için gizli tutmaya çalışan Pisagorcuların bu durumuna Evdokus $\sqrt{2}$ nin bir rasyonel sayı olamayacağına ilişkin yaptığı ispatla son vermiştir (Yıldırım, 2015).

17. ve 18. yüzyıllarda analiz ve cebirde teoremlerin bir kural olarak ifade edilmemesi gereği ve "istisnai durumlarının olabileceği kabul edilmiştir. Bununla birlikte geometri küçük farklılıklarla Antik Yunanlılardan kalmış ve kesin ispat kavramı “bütün doğrulamalar doğruluğu kabul edilen az sayıdaki aksiyomlara indirgenebilir” şeklinde ifade edilmiştir. Bu durum, Öklidci temsil tarzının analiz ve cebirde de geçerli olduğu 19. yüzyıla kadar önemli ölçüde değişmemiştir (Hanna & Jahnke, 1993). 18. yüzyıl ile 19. yüzyılın başlarında, Avrupa matematiği buluşsal ispata dayalı bir geleneği izlemiştir ve ancak 19. yüzyılda Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange ve Weierstrass gibi eleştirel düşünmenin önde gelen matematikçileri tarafından bugünkü anlamda tümdengelimsel ispatın temelleri atılmıştır (Kline’den aktaran Almeida, 2003). Antik Yunan’dan günümüze kadar gelen ispata yönelik tartışma biçimi; felsefe, politika ve ahlak konularında olduğu gibi matematikte de kendini gösterir üstelik matematiksel ispat diğer alanlarda asla erişilemeyen mantıksal kesinliğe sahiptir (Yıldırım, 2015). Matematik felsefesinin; matematiksel mantık ve matematiğin temellerine yönelmesi ve İkinci Dünya Savaşı’ndan sonra ortaya çıkan kuralcı tutum; günümüzde uygulamalı matematik çalışmalarının ilgi odağı olmasının yolunu açmıştır. Bu durum; araştırmacıların karşılıklı etkileşim ortamında ispatlar ve aksini ispatlamalar ile örnekler ve karşı örnekler arasında ispatların mantıksal yönlerini daha net görmelerine yol açmıştır (Hanna & Jahnke, 1993).

Hersch (1993)’e göre ispatlamak kelimesi test etmek, denemek, olayların gerçek durumunu belirlemek anlamlarına gelen ve inceleme (probe), test etme (probation), ihtimal (probable), doğruluk (probity) ile aynı köke sahip Latince “probare” kelimesinden türemiştir. Matematikte ispat; biri yaygın kullanımda diğeri matematiksel mantık ve matematik felsefesinde özelleşmiş olmak üzere iki anlama sahiptir. İspat kavramı yaygın kullanımda; uzmanları ikna eden bir argümanken matematiksel mantıkta; analiz kurallarına göre uygun olarak ifade edilmiş olan düzgün cümlelerin bir sıralamasıdır. Bir ifade matematiksel olarak doğrulandığında, yeryüzünde başka bir bilim adamının bu ifadenin yanlış olduğunu ispatlama şansı yoktur (Derek, 2011).

Başka bir deyişle; “İspat, daha önceden her birinin geçerliği ispatlanmış aksiyom ve teoremlere dayandırılmış ifadeler dizisidir” (Morash, 1987, s. 149).

“İspat, tanımlar ve aksiyomlar aracılığıyla fikirlerin açıklık kazandığı final evresidir” (Hanna, 1991, s. 55).

“Matematiksel ispat, muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir başka bir deyişle ispat iyi düşünülmüş savları kullanarak ifadenin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir” (Almeida, 1996, s. 660).

“Matematiksel ispat bir dizi geçerli sonuçlardır” (Hanna & Sidoli, 2007, s. 75).

“İspat; önermelerin ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarımdır” (Altun, 2014, s. 98).

“İspat; bir dizi mantıksal hükümlerle önermenin doğru ya da yanlış olduğunu göstermedir” (Konyalıoğlu, 2015, s. 43).

Matematiksel ispat kavramına ilişkin yapılan farklı tanımlamalardan, matematiksel ispat kavramının iki kategori üzerinden değerlendirildiği görülmektedir. Bu kategoriler, matematiksel ispatın formel boyutu ve sosyal- kültürel boyutudur (Arsac, 2007).

Formel boyut, ispat kavramının rasyonelliğe dayalı olarak yeniden inşası olarak kabul edilebilir. Gerçekten formelistler, mantıkçılar ve sezgiciler olarak bilinen düşüncenin üç okulu, matematiğin felsefi temelleri hakkında büyük oranda fikir ayrılığı gösterirken formel ispatın önemi üzerine hemfikir olmuştur (Hanna, 2002).

Sosyal- kültürel boyut ise matematikçiler tarafından ispatın geçerliği için kullanılan süreçler, işlem ve yöntemler olarak nitelendirilebilir. Buna göre, eğer bir içerik matematikçiler tarafından geçerli olarak tanımlanırsa o zaman bu içerik bir matematiksel ispat olarak kabul görmektedir (Arsac, 2007). Hersch (1993), “ispat” kavramının matematikte iki farklı anlama sahip olduğunu belirtmiştir. Bunlardan ilki, ortak bir uygulama alanına yönelik iken, ikincisi matematiğin felsefesi ve matematiksel mantık üzerinde uzmanlaşmayla ilgilidir. Diğer bir deyişle ispatın birinci matematiksel anlamı, nitelikli matematikçileri ikna eden delillerdir. Yani bu anlam, yukarıda verilen sosyal- kültürel boyut içinde ele alınabilir. İkinci matematiksel anlamı ise Calculus’un kurallarına göre mantıksal kurallara dayalı cümlelerin dönüşümlerinin bir dizisidir. Bu anlam ise formel boyut içinde düşünülebilir (Dede, 2013).

2.2. Matematiksel İspat ve İşlevleri

Matematik ve matematik eğitiminde ispatın çok sayıda işlevi vardır. İspatın en temel işlevi bir iddianın doğruluğunun ortaya çıkarılmasıdır. Çoğu öğrenci için ispatlar öğretmen tarafından verilen rutin uygulamalardır ve öğrencilere anlamsız gelmektedir. Oysa ispatın verilen iddiayı doğrulama dışında öğrenme-öğretme süreçlerini destekleme adına birçok işlevi vardır.

Bell (1976)' e göre ispatın anlamı üç boyutludur. Birincisi, bir önermenin doğruluğu ile ilgili olan geçerli kılma ya da *doğrulama*; ikincisi, *açıklama*; çünkü iyi bir ispat önermenin neden doğru olduğunu açıklamalıdır, bu ispatın geçerliliğini etkilemez fakat ispattaki varlığı estetik açıdan tercih edilmektedir. İspatın üçüncü boyutu daha matematiksel bir özellik olan *sistematikleştirme*dir. Sistematikleştirme sonuçların, aksiyomların, ana kavramların ve teoremlerin ve bunlardan türeyen küçük sonuçların tımdengelimsel bir sisteme dönüştürülmesidir.

De Villiers (1990) Bell (1976)' in tanımladığı 3 ispat boyutunu biraz daha genişleterek ispat sürecini doğrulama, açıklama, sistematikleştirme, keşif ve iletişim olarak ifade etmiştir. Bu işlevlerden bazıları aşağıda özetlenmiştir.

i) Doğrulama (justification): Matematiksel bilginin oluşumundaki en temel kavramlardan ve matematiği anlamının en temel faktörlerinden biri doğrulamadır. Doğrulama, matematiksel muhakeme türlerini kullanarak bir iddianın doğruluğunu (ya da reddini) gösteren bir argümandır (Staples, Bartlo & Thanheiser, 2012, s. 448). İspat, doğrulama için gerekli bir ön koşul olmamasına karşın doğrulama, ispat için bir ön koşuldur (De Villiers, 1990).

Tablo 1

Doğrulamanın Bileşenleri

	(Stylianides, 2007a)	(Ernest, 2016)
Kabuller	Kabul edilen ifadeler kümesi	Bazı gerçek aksiyomlar ve akıl yürütmenin temeli olan varsayımlar
Mantık	Muhakeme biçimleri	Mantık kurallarının kullanımı, verilen ifadenin olası tüm durumlarda incelenmesi,
Metot	Argüman gösterme modları	-
Bütünlük	-	İspat kurallarının tüm gerçekleri belirlemeye yeterli olduğuna dair bir garanti (eksiksizlik)
Tutarlılık	-	Kanıt kurallarının sadece gerçeklerin güvence altına alınmasında güvence altına alınması (tutarlılık)

ii) Açıklama (explanation): Genellikle matematik derslerinde kullanılan işlevlerden açıklama, bir ispatın neden doğru olduğunu göstermek için kullanılır.

iii) Sistematikleştirme (systematisation): İspatın bu işlevine ait örnekler en çok Euclid'in Elements adlı kitabında yer almaktadır. Elements adlı kitapta Yunanlı matematikçilerin ispatladıkları birçok teorem yer almakta ve bu teoremler tanım, aksiyom ve postulatlar şeklinde sınıflandırılmıştır. Bölünebilme kuralları, asal sayılar ve çarpanlara ayırma gibi sayılar teorisinin en önemli teoremleri, tanımları, aksiyomları bu kitapta yer almaktadır (Barendregt & Wiedijk, 2005). Sistematikleştirme işlevi sayesinde matematikçiler aksiyomların gereksiz fazlalıklarından kurtulmuş ve bunların küçük bir kümesi ile gerekli olan tüm kavramların ve fikirlerin hepsini yakalama imkânına sahip olmuşlardır.

iv) Keşif (discovery): Matematik derslerinde en az kullanılan ispat işlevi keşiftir. Tarihsel olarak, Euclid dışı geometriler gibi matematiğin bazı alanlarının teoremlerine soyut tümdengelimci akıl yürütmeler aracılığıyla ulaşılmıştır. Örneğin; Hanna (1983) ispatlar

yapılmadan önce matematiksel kavramların ve önermelerin formüle edildiğini belirtmiştir (De Villiers, 1990).

v) İletişim (communication): İspatın bu işlevi, yapılan ispatların insanlar tarafından okunmasını ve yazılmasını ifade etmektedir. Volmink (1990) bir araştırma olan ispatın, matematikçiler arasında iletişim aracı olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde Davis (1976), ispatın gerçek değerlerinden birinin, yapılan kritik tartışmalar olduğundan bahsetmiştir.

2.3. Matematiksel İspat Yapma ve Amacı

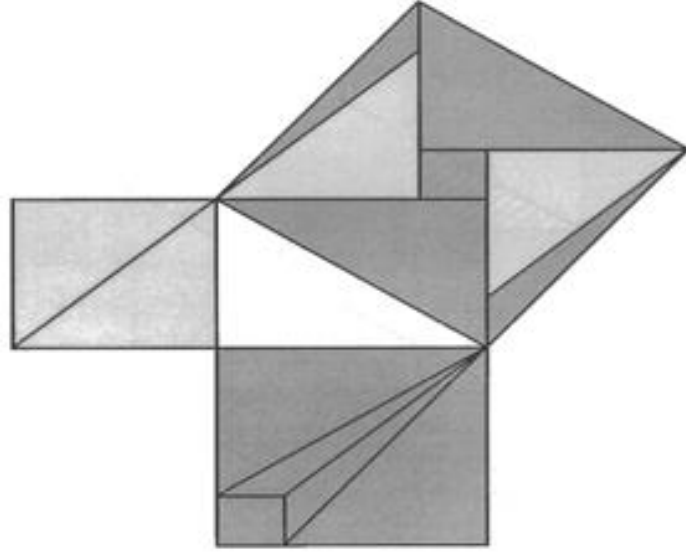
Öğrencilerin, ispatın neden yapıldığını anlamaları, bunun farkında olmaları önemlidir. Bu nedenle, matematiksel ispata neden gerek duyulduğu ve bu ispatların matematiğin öğrenimindeki rolü öğrencilere anlatılmalıdır. Bu kapsamda, literatür incelendiğinde matematiksel ispatların yapılış amacı aşağıdaki gibi dört başlık altında toplanmaktadır.

Bu başlıklar; Heuristik, açıklayıcı, keşfedici ve görsel-sözsüz ispattır.

a) Heuristik İspat: Bazı matematikçiler, sadece akıl yürütme üzerine değil aynı zamanda doğrulama üzerine de odaklanan tümdengelsel ispatların uzun uzadıya öğretilmesine ihtiyaç olmadığını belirtmektedirler. Bu matematikçilere göre, heuristik teknikler (örneğin, tahmine ve sezgiye dayalı doğrulamalar), öğrencinin zihinsel yapısıyla daha uyumludur ve doğrulama sürecinde formel ispattan daha kullanışlıdır (Hanna, 2000c).

b) Açıklayıcı İspat: Matematikte ispatın temel fonksiyonu, önermelerin doğruluğunu göstermektir. İspatın diğer fonksiyonlarından biri de verilen önermeleri açıklamak veya açıklığa kavuşturmadır. En iyi ispat, sadece bir teoremin doğruluğunu gösteren değil aynı zamanda teoremin anlaşılmasına da yardım eden ispattır. Bu tür ispat, çok daha ikna edicidir ve dolayısıyla matematik toplumu tarafından da daha kolay kabul edilmektedirler. Açıklayıcı ispat, eski Çin matematikçilerine kadar uzanmaktadır. Yunanlı matematikçiler tarafından geliştirilen aksiyomlar, Çin'e ulaşıncaya kadar Çinli matematikçiler tümdengelsel ispatla ilgilenmemişler, bir ispatın daha çok açıklayıcılığı ve ikna ediciliği üzerine odaklanmışlardır. Bu açıklama ve ikna etmeye yönelik ispatlar ise argümanların heuristik akıl yürütmenin ve sözsüz ispat olarak bilinen şekillerin parçalara ayrılmasının dengeli bir kullanımdan oluşmuştur (Hanna, 2000a). Bu çeşit ispatın en bilinen örneği, parçalara

ayrılmış kareleri kullanarak M.S. III. yüzyılda Liu Hui tarafından yapılan Pisagor Teoremi'nin ispatıdır (Şekil 1).



Şekil 1. Pisagor teoreminin ispatı. Nelsen, R. (2000). *Proofs without words II: More exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.

c) Keşfedici İspat: Dinamik yazılım programlarının matematik derslerinde kullanılmasıyla, matematiksel keşifler özellikle de geometri öğretiminde hızlı bir ivme kazanmıştır. Geometer's Sketchpad, Cabri ve Sketchpad gibi dinamik yazılım programları, öğrencilerin yüksek düzeyde doğruluk derecesine sahip geometrik çizimler yapabilmelerine imkân vererek, matematiksel ifadeleri ve önermeleri anlamalarına yardımcı olmuştur. Ancak; buradaki keşfin, ispatın yerini almasına gerek yoktur ve her ikisi birlikte de kullanılabilir. Fakat bu yeni bir durum değildir. Zira keşif, bilgisayarlar icat edilmeden önce de matematiğin önemli bir yüzü olmuş, geleneksel olarak ispatın merkezi rolüyle ve bir analitiksel bilim olarak matematiğin bakışıyla tutarsızlık göstermemiştir. Hatta keşif ve ispat birbirlerinin tamamlayıcısı olmuştur.

d) Görsel-Sözsüz İspat: Görsel temsiller, sadece matematiksel ifade ve önermeler için bir delil olarak değil aynı zamanda matematiksel ifade ve önermelerin doğrulanması için de kullanılabilirler. Bu bağlamda, matematiksel kavramların anlaşılmasını kolaylaştırmak amacıyla grafik ve başka görsel temsillerden yararlanılabilir. Buna göre; grafik ve görsel temsiller, bir matematiksel ifadenin ve önermenin temel bir ögesi olarak kabul edilebilir ve matematik müfredatlarının temel bileşenleri olarak da düşünülebilir (Hanna, 2000a).

Matematik alanında ispat ve ispat yöntemlerine yönelik net ve üzerinde ortak kanate sahip olunan bir yaklaşımın olmayışı, eğitim literatüründe de ispat olarak kabul edilip edilmeyeceği tartışılan ispat adlandırılmalarının varlığına zemin oluşturmaktadır. Sözsüz ispatlar buna örnektir (Aylar, 2014). “Proof Without Words” olarak da adlandırılan sözsüz ispatlar (non-verbal proofs) kimi yabancı kaynaklarda “visual proof” olarak adlandırılmaktadır (Alsina & Nelsen, 2001; Bardelle, 2010; Goldoni, 2002; Tekin & Konyalıoğlu, 2010). Dede ve Karakuş (2014) ise yaptıkları araştırmada Nelsen’in “Proof Without Words II: Exercises in Visual Thinking” kitabında Liu Hui tarafından yayınlamış olan Pisagor Teoreminin ispatını açıklayıcı ispat kategorisine dahil etmişlerdir. Yine bu araştırmada Alsina ve Nelsen’nın “An Invitation to Proofs Without Words” isimli çalışmasında sözsüz ispatı verilmiş olan “1’den n’ye kadar n tane ardışık tam sayının toplamının” ispatı görsel ispat kategorisi altında verilmiştir. Ayrıca sözsüz ispat örneklerinden bazılarını Bayer (2009) ve Britz ve diğerleri (2014) “Proof By Picture” olarak ifade etmiştir. Aşağıda Tablo 2’de yurt içinde ve yurt dışında sözsüz ispatlar için kullanılan ifadelere yer verilmiştir.

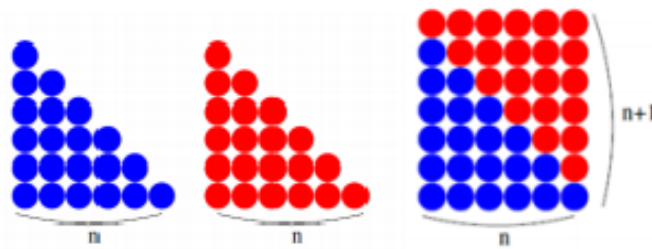
Tablo 2

Sözsüz İspat İçin Yurt İçinde ve Yurt Dışında Kullanılan İfadeler

Kullanılan İfadeler	Kaynaklar
Proof Without Words (Sözsüz İspatlar)	Gierdien (2007), Bell (2011), Yassin (2013), Karras (2012), Nelsen (1993, 2000)
Visual Proof (Görsel İspatlar)	Goldoni, (2002), Alsina & Nelsen (2001), Bardelle (2010), Strausova & Hasek (2012), Çağlayan (2015), Johson (1993)
Proof By Picture (Resimlerle İspat) Pictorial Proof (Resimsel İspatlar) Proofs and Pictures (İspatlar ve Resimler)	Britzvd (2014), Bayer (2009); Brown (1997); Kobayashi (2010)
Sözsüz İspat	Uğurel, Moralı & Karahan (2011)
Görsel İspat	Dede & Karakuş (2014), Tekin & Konyalıoğlu (2010)
Resimli İspat	Ufuktepe (2009)

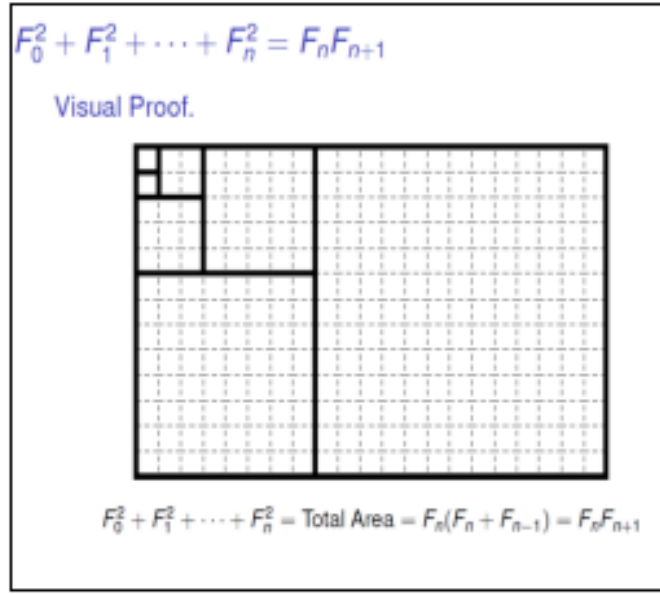
Polat, K, Demircioğlu, H. (2016). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar: kuramsal bir çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140.

Tablo 2’de görüldüğü üzere yurt içinde ve yurt dışında yapılan çalışmalar incelendiğinde sözsüz ispat için kullanılan ifadeler farklılık gösterse de açıklamalarda aynı şeyi kastettikleri görülmüştür. Aşağıda bu duruma ait iki örnek verilmiştir.



Şekil 2. İlk n tamsayısının toplamının sözsüz ispatı

Şekil 2’deki mavi noktaların toplamı A ve kırmızı noktaların toplamı A olmak üzere noktaların toplamı $2A$ olur. Böylelikle şekilden görüldüğü üzere $2A = n \cdot (n + 1)$ dir. O halde $A = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ bulunur. Yapılan bu ispat kaynaklarda “Sözsüz İspat” diye geçmektedir.



Şekil 3. Fibonacci sayılarının karelerinin toplamı. Bayer, R. (2009). Proof By Picture. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.353.5627&rep=rep1&type=pdf> sayfasından erişilmiştir.

Şekil 3'te Fibonacci sayıları ile ilgili olan ispat Bayer (2009) "Proof By Picture" isimli çalışmasında "Visual proof (Görsel İspat)" olarak kullanılmıştır.

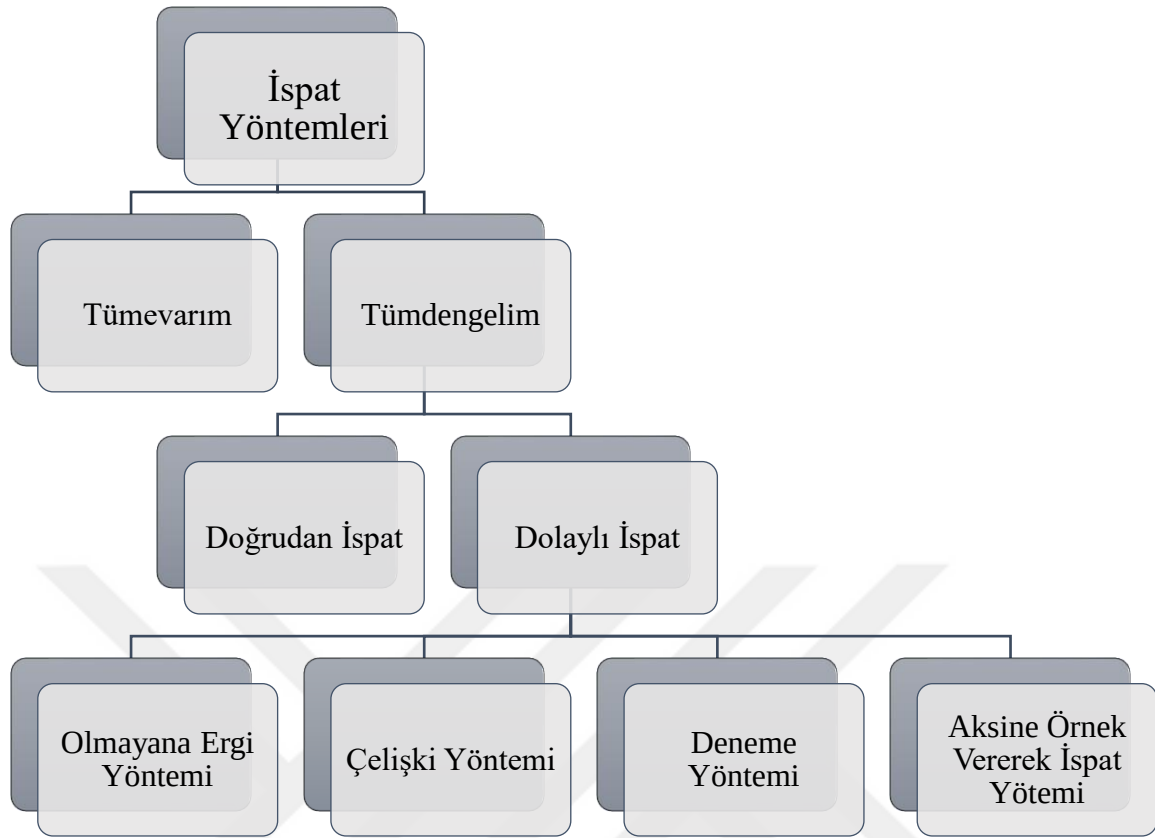
2.4. Matematiksel İspat Yöntemleri

Öğrencilerin, matematiksel ispatın ne için ve nasıl yapıldığını idrak etmeleri, bunun farkında olmaları elzemdir. Bu sebeple, matematiksel ispata neden ihtiyaç duyulduğu ve bu ispatların matematiğin öğrenimindeki rolü öğrencilere anlatılmalıdır (Hanna, 2000b).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) raporuna göre; matematiksel muhakeme ve ispat bir olayı geniş bir yelpazede ifade etme ve geliştirmede güçlü beceri sağlar. Model, yapı ve düzenlilikler gerçek dünyada ve matematiksel durumlarda matematiksel muhakeme ve analitik düşünceye sahip bireyler için üzerinde düşünmeye değerdirler ve bu düzenin rastgele mi yoksa bir nedenden mi oluştuğunu matematiksel varsayımlar yaparak araştırırlar. Bu şekilde matematiksel argümanları ve ispatları geliştirir ve değerlendirirler. Dolayısıyla hangi sınıf seviyesinde olursa olsun bütün öğrenciler; olayları keşfederek, sonuçları doğrulayarak ve bütün alanlarda matematiksel varsayımları kullanarak matematiğin anlam kazandığını görmelidirler.

İspatlar, kavramayı yani derinlemesine anlamayı sağlar. Geçerli bir ispat yapabilmek problemin doğru anlaşıldığını gösterir. Ancak daha da önemlisi bir varsayımın ispatlanması bazen problemdeki teoremin daha derinlemesine anlaşılmasını gerektirir. İspat yapmaya çalışan bir matematikçi, sonuç başarısızlıkla bitse dahi çok fazla bilgi ve anlayış kazanabilir (Goldberg, 2002).

İspat yapma süreci evrensel olarak kabul gören yöntemlerden oluşmaktadır. İspat yapma ana hatlarıyla tümevarım ve tümdengelim olmak üzere iki yola yapılmaktadır (Çallıalp, 1999). Tall (1979), genelleyici ispatların hatırlanmasının metotların doğru kullanılması açısından önemli olduğunu belirtmektedir. $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliğinin ispatı da olmayana ergi metodu ile ilgili genelleyici bir ispat olarak kullanılmaktadır ve ispat yöntemleri ile ilgili kitapların çoğunda bulunmaktadır. Öğrenciler ile yapılan çalışmalarda bu ispatı daha önceden gören öğrencilerin düşünmek yerine anısal hafızalarını zorladıkları gözlenmiştir. Bu durum ispatın nesne şekline dönüştüğünü destekler niteliktedir (Tall & Barnard, 2003). Bu ispat yöntemleri aşağıda ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır;



Şekil 4. Matematiksel İspat Yöntemleri

2.4.1. Tümevarım Yöntemiyle İspat

$S \subset \mathbb{N}$ ve $1 \in S$ olsun. $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$ gerektirmesi doğru ise $S = \mathbb{N}$ dir.

Pozitif tamsayılar hakkında bir $P(n)$ önermesi gözönüne alalım.

1) $n = 1$ için $P(1)$ önermesi doğru ise

2) Önermenin n için doğruluğu $n + 1$ doğruluğunu gösteriyorsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi doğrudur.

Örneğin; Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in P$, $x \neq 1$ için

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

olduğu tümevarım yöntemiyle gösterilebilir.

1) $n=1$ için

$$1 = \frac{1-x^1}{1-x} = 1$$

olduğu gösterilir.

2) $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

doğru olduğu kabul edilir.

3) $n+1 \in \mathbb{N}^+$ 'in doğruluğunu göstermek için 2'deki eşitliğin iki tarafına x^n ilave edelim:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n = \frac{1-x^n}{1-x} + x^n$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n = \frac{1-x^n+x^n-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

olur. Böylece $n+1 \in \mathbb{N}^+$ içinde ifadenin doğruluğu gösterildi.

2.4.2. Doğrudan İspat Yöntemi

$p \Rightarrow q$ biçiminde ifade edilen bir teoremin ispatında p önermesinin doğruluğundan hareketle ve doğruluğu önceden bilinen veya daha önce doğruluğu gösterilen önermeler yardımıyla sonucun doğruluğunu göstermek doğrudan ispat yöntemidir (Akkaş, Hacısalıhoğlu, Özel & Sabuncuoğlu, 1988; Çevik, 2010).

Örneğin; m ve n çift tamsayılar olsun. O zaman $m+n$ bir çift tamsayıdır. Önermesini ispatlayalım.

m ve n keyfi olarak seçilmiş çift tamsayılar olsun. $m=2a$ ve $n=2b$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. O halde $m+n=2a+2b=2(a+b)$ elde edilir. Burada $a+b$ bir tamsayı olduğundan $2(a+b)$ bir çift tamsayıdır.

Yani $p(m):m$ bir çift sayı ve $p(n):n$ bir çift tamsayı olsun. O halde

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $[p(m) \wedge p(n)] \Rightarrow p(m+n)$ olur.

eşitliği elde edilir.

2.4.3. Olmayana Ergi Yöntemi

$p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için;

$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ denkleğinden faydalanan ispat yöntemidir (Irmak, 2008). İspatlanacak ifadenin tersinin doğru olduğu kabul edilerek ispata başlanan ve sonunda bu kabulün yanlış olduğuna karar verilerek sonlandırılan (Çevik, 2010) bu ispat yöntemine karşıt ters (karşıt pozitif) yöntemi adı da verilir (Asar, Arıkan & Arıkan, 2009).

Örneğin; m ve n birer tamsayı olmak üzere; mn çarpımı tek sayı ise m 'nin tek sayı olduğunu gösterelim.

m sayısının çift sayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda herhangi bir k tamsayısı için $m=2k$ olup, $mn=2kn$ olur. Dolayısıyla; mn 'nin bir çift sayı olduğu durumu elde edilir. Bu ise önermedeki ' mn çarpımı tek sayı' ifadesi ile çelişir. Bu nedenle m tek sayıdır.

2.4.4. Çelişki Yöntemi

Teoremin kendisi yerine hipotezini ve hükmünün değilini doğru varsayıp bunun bir çelişki olduğunun gösterildiği ispat yöntemidir. Yani bu yöntemde, $p \Rightarrow q$ yu ispatlamak için $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge q)'$ denkleğinden yararlanılır ve $(p \wedge q) \equiv 0$ olduğu gösterilir (Irmak, 2008).

Örneğin, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x+3=5$ ise $x+1 \neq 3$ önermesini ispatlayalım.

$x \in \mathbb{R}$ olsun. p : $2x+3=5$ ve q : $x+1 \neq 3$ önermelerinden; $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge q)'$ iken $(p \wedge q) \equiv 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$p \wedge q' \equiv [(2x+3=5) \wedge (x+1=3)]$ önermesinin bir çelişki olduğunu göstermeliyiz. (p ve q') $\equiv [(2x+3=5) \wedge (x+1=3)] \Rightarrow (x=1 \wedge x=2)$

olup bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $(p \vee q') \equiv 0$ yani $(p \vee q')' \equiv 1$. O halde

$p \Rightarrow q \equiv 1$ 'dir.

2.4.5. Deneme Yoluyla İspat:

Bu yöntem sonlu sayıda kümeler üzerinde tanımlanmış önermeler için kullanılabilecek bir yöntemdir. İlgili kümenin bütün elemanları o önerme için tek tek denenir (Irmak, 2008).

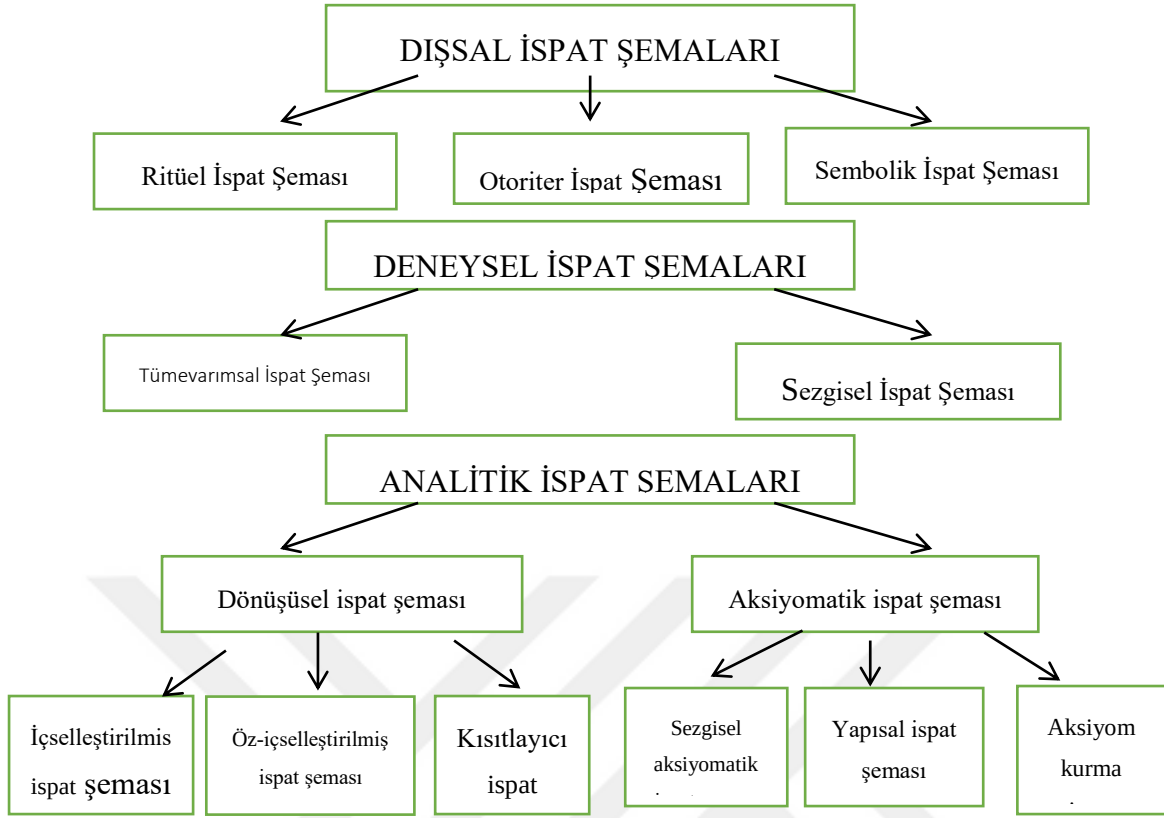
2.4.6. Aksine Örnek Vererek İspat Yöntemi

Bu yöntemde verilen teorem veya önermenin doğruluğunu çürüten tek bir durum ortaya konulmasıyla ispat yapılmış olur. Bir önermenin veya teoremin hükmünü sağlamayan en az bir karşı örnek vererek hükmün yanlış olduğu gösterildiğinde mantık ve cebirsel işleme ihtiyaç duyulmadan ispat tamamlanmış olur (MEB, 2017).

2.5. Matematiksel İspat Şemaları

Düşünce yapıları, Harel ve Sowder (1998) tarafından, ispat şemaları olarak adlandırılmıştır. Yöntemlerdeki çeşitliliğin altında yatan sebep, öğrencilerin farklı kültürde olmaları, farklı zaman diliminde bulunmaları ve farklı koşullarda yaşamalarının matematiksel önermeye olan yaklaşımlarını etkilemesidir. Öyleyse, bir kişinin bulunduğu ispat şeması, matematiksel önermeye karşı tutumu ve ikna olma yolunu göstermektedir. Bu anlayışla, Harel ve Sowder (1998) üç ayrı sınıflandırmayla ispat şemalarını belirlemiştir.





Şekil 5. İspat Şemaları. Harel, G., & Sowder (1998) Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. Schonfeld A., Kaput J., and E. Dubinsky E.(eds.) *Research in collegiate mathematics education* III, 234-282.

2.5.1. Dışsal İspat Şeması

Kavramları matematiksel olarak anlamlandırmak için öğrenciler, kitap, öğretmen ya da çevredeki varlıklar gibi dışsal faktörleri kullanırlar. Matematiksel kavramın geçerliliğini belirlemek için öğrenci, dışsal bir hâkimiyete güvenir. Bu durumun olumsuz etkisi öğrencilerin keşfetme odaklı değil formüllere bağlı hareket etmesi yani kurallara bağlı kalmasıdır. Özellikle kaynak olarak sadece öğretmen faktörünü kullanan öğrenci matematiksel bilgiyi yeterince sorgulamaz. Eleştirel düşünme becerileri gelişmez.

2.5.1.1. Ritüel İspat Şeması

Matematiksel ifadede ya da önermede tanıdık sembol arayan öğrenci verilen ispatın sadece görünüşüyle ilgilenir. Geçmişte öğrendikleri sembollerin gösterilen ispatta yer almaması,

ispatta bulunan kavramın matematiksel geçerliliğini belirlemede olumsuz etki yaratır ve üstelik öğrenci ispata benzemediğini bile ifade edebilir. Ayrıca öğrenciler, çoğunlukla tekrarlanan bir işlevsel sırayı ezberlemeye ve bunu ispatı inceleme sırasında yansıtmaya yatkınlardır.

2.5.1.2. Otoriter İspat Şeması

İspatın matematiksel geçerliliğini belirlemede, ispatın yapılış şekli değil; öğretmen ile yaptıkları diyalog ya da kitaplarda bulunan ifade etkilidir. Öğrenci verilen ispatın neden doğru olduğunu değil; ispatın bir kaynakta yer alıp almadığını ya da öğretmenin önceden söyleyip söylemediğine odaklanır.

2.5.1.3. Sembolik İspat Şeması

Kavramların birbirleriyle ilişkisini dikkate almadan, sembollerin işlevini tam olarak bilmeden; sadece sonuca odaklanılmasıyla oluşan ispattır. Kısaca verilen soru kalıbında anlam aramadan, problemin çözümüne odaklanmasıdır.

2.5.2. Deneysel İspat Şeması

Duyuşsal deneyimlerin ya da fiziksel davranışın etkisiyle matematiksel ispatın doğruluğunu varsaymadır veya doğruluğu konusunda çelişkiye düşmedir.

2.5.2.1. Temel Örnekler İspat Şeması

İspatın örneklerle açıklanmasıdır. Öğrenciler buna bağlı nicel değerlendirmelerle ispatın doğruluğu hakkında yorum yaparlar. Belli bir sayıda yapılan denemelerle elde edilen nicel sonuçlar çıkarımda bulunan öğrenci, çeşitli genellemelerde de bulunabilir.

2.5.2.2. Sezgisel İspat Şeması

Sezgileri yoluyla ispatın doğruluğunu yorumlamaya çalışan öğrenciler, hisleriyle karar verebilirler; fakat doğruluğunun kesinliğini öne süremezler.

2.5.3. Analitik İspat Şeması

Tümden gelime dayalı ispat olarak düşünülebilir.

2.5.3.1. Dönüşümsel İspat Şeması

Bazı değiştirilemez olduğu düşünülen ilişkilerin dönüşüme dayalı olarak değiştirilebileceğini gösterir. Öğrenci bu değişimi fark edebilme ve telafisini sağlama yolunda adımlar atar. Ayrıca nicel değerlendirmeler yerine, değişkenler üzerinde yapılan değişiklikler aracılığıyla genellemelerde bulunur. Öğrenci hem tümevarımsala hem de tümdengelimle başvurabilir.

a) İçselleştirilmiş ispat şeması: sezgisel ispat yöntemini, varsayımları kanıtlanmış hale dönüştürmede kullanarak bütünleştirmeye çalışan dönüşüme dayalı ispat türüdür.

b) Öz-içselleştirilmiş ispat şeması: sahip olunan ispat şemalarına derinlemesine bakabilme evresidir. Hangi şemaya sahip olduğuna dair farkındalığa öğrenciler, birbirlerine yaptıkları şema tanımlarıyla veya onlara ait şemalarla ilgili kullandıkları örnekleri karşılaştırmalarıyla sahip olurlar.

c) Kısıtlayıcı ispat şeması: ispatı doğrulayabilme sürecindeki kısıtlamalara bağlı, dönüşümsel düşünme yatkınlığına sahip değildir.

d) Aksiyomatik İspat Şeması: ispatı doğruluğuna bakılan süreçte, öğrencinin aksiyomatik yapılara dikkat ettikleri ve tümdengelimle başvurdukları şemadır.

- i. Sezgisel-Aksiyomatik İspat Şeması: öğrencilerin tanımını yapabilen matematiksel terimler, tanımı yapılmayan terimler, aksiyomlar ve türemler.
- ii. Yapısal İspat Şeması: aksiyomların bir kısmını tanımlandığı ortak yapıyı kavrayabilmek farklı durumlara dair teoremlerin dönüşülmesi sürecini kapsar.
- iii. Aksiyom Kurma İspat Şeması: zihinsel bir ön şartı sağlama adına yapısal ispat şeması önemlidir. Bu şemayla öğrenci, seçtiği

matematiksel alanda aksiyom yaratabilir ve aksiyomların sınıflandırılmasına katkı sağlayabilir (Liu, 2013).

2.6. Matematiksel İspat Düzeyleri

Araştırmacılar, bireylerin yapmış oldukları ispatlar için farklı düzeyler tanımlamış ve bu düzeylere göre yapılan ispatları sınıflandırmışlardır. Örneğin Balacheff (1987) pragmatik (pragmatic), entellektüel (intellectual) ispatlar ve kanıtlama (demonstration) olmak üzere üç ispat düzeyi ortaya koymuştur. En düşük ispat olan pragmatik ispatta, matematiksel nesnelerin temsilleriyle gösterim yapılır. Entelektüel ispatta, sorudaki ifadeler ve bu ifadeler arasındaki ilişkilerin formülleştirilir. Kanıtlamada ise, bir teori ile organize edilmek zorunda olan veya bir topluluk tarafından kabul edilen bilgiler kullanılır.

Miyazaki (2000) ise ispat yapmayı; İspat A, İspat B, İspat C ve İspat D olarak dört gruba ayırmıştır. İspat A'yı tümdengelimsel muhakeme içeren ve kanıtlama yapılırken fonksiyonel dilin kullanıldığı ispat türü iken; İspat B'yi, tümdengelimsel muhakeme içeren ve diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objelerin kullanıldığı ispat türü; İspat C'yi, tümevarımsal muhakeme içeren, diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objelerin kullanıldığı ispat türü ve İspat D'yi ise tümevarımsal muhakeme içeren ve kanıtlama yapılırken fonksiyonel dilin kullanıldığı ispat türü olarak tanımlamıştır.

Waring (2000)'e göre, öğrencilerin ispat kavramlarının gelişimi altı düzeyde ele alınmıştır. Bu düzeyler;

İspat düzeyi 0: Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.

İspat düzeyi 1: Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.

İspat düzeyi 2: Bu düzeyde öğrenciler, ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler. Ayrıca, öğrenciler genel bir örnek kullanmanın ispatı şekillendirdiğini düşünmektedirler.

İspat düzeyi 3: Bu düzeydeki öğrenciler, bir ispatı tek başlarına oluşturamazlar ancak belli bir zorluktaki ispatın çözümünü anlayabilirler.

İspat düzeyi 4: Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.

İspat düzeyi 5: Bu düzeydeki öğrenciler, bazı formal ispatları ve yeni karşılaştıkları ispatları oluşturabilirler.

Knuth, Choppin ve Bieda (2009) bireylerin ispat yapmalarını dört düzeye ayırmıştır. Düzey 0'daki bireyler, durumun doğruluğunu göstermek için matematiksel ispat yapma gerekliliğinin farkında değildir. Örneğin bir öğrenci, öğretmeni doğru olduğunu söylediği için o durumu doğru olarak kabul eder. Düzey 1'deki birey ise ispat yapılması gerektiğinin farkındadır; ancak bu süreçte özel durumlardan faydalananarak durumu doğrularlar. Düzey 2'deki bireyler ise genelleme sürecinde ya yanlış bir yöntem kullanıp genellemeye ulaşamazlar ya da ispatı doğru bir biçimde tamamlayamazlar. En üst düzey olan 3. düzeydeki bireyler ise bir ifadenin doğruluğunu uygun seçilen yöntem ve argümanlarla genelleyip; ortaya koyarlar. Öğretmen adaylarının ispat yapma düzeylerini ortaya koyan inceleyen çalışmalar incelendiğinde; bazı araştırmalarda öğretmen adaylarının ispat yapma düzeyleri yüksek bulunurken (Köğce, 2013; Stylianides & Stylianides, 2009); bazılarında öğretmen adaylarının ispat yapma düzeylerinin düşük olduğu (Jones, 2000; Weber, 2005; Stylianides, Stylianides & Philippou, 2007b) belirtilmiştir.

Yang ve Lin (2008) yaptıkları araştırmada öğrencilerin ispat anlayışlarını tespit etmek için bir model geliştirmiştir. Geometriyi ispat okuyarak anlama modeli (RCGP) olarak tanımladıkları bu modelde ispat seviyesi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci seviye; öğrencilerin ispatta ifadelerin ve sembollerin anlamlarıyla ilgili temel bilgiyi edindikleri *yüzeysel seviyedir* (surface). İkinci seviye; öğrencilerin ispatta doğrudan ya da dolaylı olarak kullanılan ifadelerin mantıksal durumunu izah edebildikleri *elemanları tanıma* (recognizing the elements) seviyesidir. Üçüncü seviye; öğrencilerin elemanlar arasındaki mantıksal ilişkileri tanımlayarak, ispatla bağlantılı farklı ifadeleri anlayabildikleri *bağlantılı elemanlar* (chaining the elements) seviyesidir. Son olarak dördüncü seviye; öğrencilerin ispatı diğer durumlarda kullanarak tam olarak benimsedikleri genelleme (encapsulation) seviyesidir.

İspat ile ilgili farklı çalışmalarda belirtilen ispat düzeyleri Tablo 3'te özetlenmiştir.

Tablo 3

İspat Düzeyleri

Düzeyletirmenin Yapıldığı Çalışma	İspat Düzeyleri
Balacheff (1987)	Pragmatik ispatlar (pragmatic) Entellektüel ispatlar (intellectual) Kanıtlama (demonstration)
Yang ve Lin (2008)	Yüzeysel seviye (surface). Elemanları tanıma (recognizing the elements) seviyesi Bağlantılı elemanlar (chaining the elements) seviyesi Genelleme (encapsulation) seviyesi
Miyazaki (2000)	İspat A İspat B İspat C İspat D
Waring (2000)	İspat düzeyi 0 İspat düzeyi 1 İspat düzeyi 2 İspat düzeyi 3 İspat düzeyi 4 İspat düzeyi 5

2.7. Matematik Öğretim Programları ve İspat Kavramı

Lise öncesi dönemde okuyan çocukların ispat fikrini keşfedebilecekleri beklentisi nispeten yeni sayılsa da, hala üzerine çalışılan ve geliştirilen bir kanıt var ki; öğretmen tarafından sağlama yapmaya ve çözümün geçerliliğini savunmaya yapılan çağrılar, öğrencide çok yönlü düşünebilme yetisi kazandırmaktadır. Çocuklara destekleyici ortamlar sağlandığında, ispat fikri onlara doğal gelebilir. Bu süreci daha ayrıntılı incelersek; diğer sınıf arkadaşlarıyla birlikte yapılan uğraş öğrencilere, fikirlerinin paylaşma ve karşılaştırma olanağı sunar. Sınıftaki her bireyin diğer bireylerle ilişkisinde bağlılık söz konusudur. Bir kişinin öğrenme yolu diğerlerini etkileyebilir ya da o kişi diğerlerinin fikirlerinden etkilenecek kendi öğrenme yolunu seçebilir. Paylaşma adına sunulan fırsatlar yeni matematiksel düşüncelerin inşasında

beraberinde getirmektedir. Çocuklar, onların dikkatli olmalarını sağlayan ve onlara diğerlerinin fikirlerine katılma fırsatı sunan etkinlikler üzerinden hem eğlenirler hem de öğrenirler. Problem çözme aktivitesi sırasında çocuklar, meydana getirme, karşılaştırma ve kendini gösterme eylemlerinde bulunurlar. Diğerlerinin fikirlerini dinleyebilme onlara, diğerlerinin gösterimlerini görebilme, kendilerinininki ile karşılaştırabilme ve fikirlerin birbiriyle ilişkisini kavrayabilme olanağı sunar. Çeşitli gösterimlerin öğrenciler tarafından izlenmesi sonucu, çocuklar kafalarında matematiksel fikrin daha derin bir anlamını oluşturur. Anlam oluşturabilme ve somut deneyim arasındaki etkileşim öğrenciler için gereklidir; özellikle yaşça genç öğrenciler için. Somut deneyim matematiksel etkinliklere katılım konusunda öğrencileri motive eder ve fiziksel öğeler arasındaki ilişkileri anlamak için farkındalık oluşturur. Şekiller, modeller ve ilişkiler öğrencilerin fikir geliştirme, anlam inşa etme ve soyut kavramları açıklama süreçlerinde zihinsel olarak gördükleri ve üzerinde çalıştıkları matematiksel objeler olarak gösterebilir. Bu öğrenciler için somut durumlar üzerinde derinlemesine inceleme yapabilmek adına yardımcı olmaktadır. Bir matematiksel kavrama dair yapılan gösterimler sebebiyle öğrencide gelişme sağlandığında, öğrencinin o konsepti öğrenmesi de sağlanmış olur. Daha fazla deneyim daha fazla çok yönlü düşünme olanağı sağlar. Farklı etkinliklerle uğraşma öğrencileri cesaretlendirir ve daha ayrıntılı düşüncelerine olanak sağlar. Matematiksel önermelerin gösterimlerinde çok yönlülük daha fazla olursa öğrencilerde ispat yapmayı öğrenme gerçekleşir (Stylianou, Blanton & Knuth, 2010).

Matematik öğretim kuramının merkezinde ve öğretim sisteminin bütün kademelerinde (ilköğretim, ortaöğretim ve yükseköğretim) ispatın yer alması gerektiği düşüncesi kabul görmüştür (Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz Hadar, 2002; Schoenfeld, 1994).

İlkokuldan üniversitenin ilk yıllarına kadar bir denklemi çözmeyi, bir fonksiyonun minimum değerini bulmayı veya ne kadar buğday yetiştirmemiz gerektiğini öğretiriz. Bunlar tabi ki matematik ile yapabilecek şeylerdir fakat matematik bunlardan ibaret değildir (Goldberg, 2002). Bu bağlamda; matematiksel bilginin doğal ve tarihsel oluşumu dikkate alınarak tasarlanmış bir müfredat; öğrencilerin ispat ile ilgili olumlu tutumu geliştirmelerine imkân sağlamaktadır (Almeida, 2003).

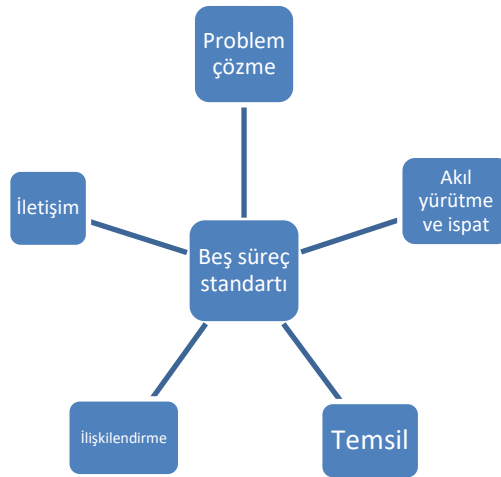
Üniversite müfredat programında bulunan matematik dersleri genellikle öğrencilerin ilk bakışta zor idrak edebileceği ispatlarla doludur. Bu sebeple öğrencilerin çoğu dersten geçerli bir not alabilmek için ispatı anlamadan ezberlerler. Çoğu zaman, temel teoremlerin ispatları

verilir ve uygun yorumlar detaylı bir şekilde ele alınabilir. Bu durumun bir sonucu olarak testlerde ve sınavlarda öğrencinin teorik kısma hâkimiyetini ölçmeye, değerlendirmeye çalışmak gerekir. Genellikle öğrencilerden birtakım anlaşılması zor sonuçların ispatı istenir. Öğrencinin kabiliyeti ne olursa olsun bu tip sorulara cevap vermek için bazı ezberlenmiş bilgiler gereklidir. En başarılı öğrenciler bile temel bir sonucun ispatını kendi kendine nadiren yapabileceklerdir. Bundan dolayı ispatın temel yapısını ve hesaplama sırasındaki bir takım incelikleri ezberlemeleri gerekebilir. Öte yandan zayıf öğrenciler muhtemelen bütün ispatı (büyük olasılıkla hiçbir şey anlamadan) kelime kelime ezberlemeye çalışacaklardır (Condradie & Firth, 2000).

2.7.1. NCTM Standartları ve İspat

NCTM'nin 2000 yılında yayınladığı belgede 5 öğrenme alanı ve 5 öğrenme süreci (Şekil 6) başlıkları bulunmaktadır.

Bu süreçlerden biri olan Akıl yürütme ve ispat standardı ve standartta öğrenciden beklenenler Tablo 4'te açıklanmaktadır.



Şekil 6. NCTM beş süreç standardı

Tablo 4

Akıl Yürütme ve İspat Standartı

NCTM Süreç Standartı	Beklenenler
Akıl Yürütme ve İspat Standartı	Akıl yürütme ve ispatı, matematiğin temel bileşenleri olarak görme
Anaokul öncesi- 12. Sınıfa kadar öğretim programları, bütün öğrenciler için şunları sağlamalıdır:	Matematiksel varsayımları oluşturma ve inceleme
	Matematiksel iddiaları ve ispatları geliştirme ve değerlendirme
	İspat yöntemleri ve akıl yürütmenin çeşitli tiplerini seçme ve kullanma

Van de Walle, J. A. , Karp, K. S. , & Bay-Williams, J. M. (2013). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (8. Baskı). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

NCTM “Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları” raporunda ispat öğretiminin erken yaş döneminde de ele alınması gerektiğini belirtirken, erken yaş dönemindeki çocuklarda ispat düşüncesinin gelişimine yönelik bir sınıflandırma da yapmıştır. Bu raporda anaokulundan 8. sınıfa kadar, akıl yürütme ve ispat yapmaya yönelik bireyin gelişimi ve öğretmenlerin bu dönemde dikkat etmesi gereken noktalar şu şekilde anlatılmıştır:

Anaokulu- 2. sınıf: Bu süreç zarfında öğrenciler kendi deneyimlerinden yola çıkarak muhakeme yapabilirler. Muhakeme yaparken ampirik kanıtları, var olan önceki bildikleri gerçeklere dayanan tümdengelimsel yaklaşımı, kendi bakış açılarına dayanan varsayımı kullanırlar. Öğrencilerin bu dönemdeki akıl yürütmelerinin, genellemelerinin uygun olup olmadığını test etmek için öğretmenler öğrencileri örnek ve karşıt örnek vermeleri doğrultusunda yönlendirmelidirler. Ayrıca öğrencilerin dil becerileri, kendilerini ifade edebilme yetilerinin gelişmesi için sadece cevabı söylemelerinden ziyade, onları cevaba ulaştıran muhakemelerini de açıklamaları yönünde teşvik etmelidirler. Bunun için de “hayır”, “ve”, “veya”, “bazısı”, “hepsi”, “çünkü”, “eğer ... o zaman” kalıplarını da kullanmaları sağlanabilir (Aylar, 2014).

3–5. sınıflar Arası: Öğrenciler bu dönemde tümevarım yöntemini tanımaya başlarlar. Karşıt örnekler vererek akıl yürütmek, ulaşılan çözümleri karşılaştırmak ve başkalarının muhakemelerini sorgulayıp karşılaştırarak genelleme yapmak, yapılan bu genellemelerin

nedenini sorgulamak ve hangi durumlara uygulanabileceğine dair akıl yürütmek, bunları savunmak bu dönemde gerçekleştirilebilir (Aylar, 2014)

6–8. sınıflar Arası: Bu dönemde öğrenciler varsayımlarını derinlemesine değerlendirmek için tümevarımla birlikte tündengeli kullanabilirler. Ayrıca doğru bir önermenin karşıtının her zaman doğru olmayacağını örneklerle kavrayabilirler (Aylar, 2014).

NCTM raporunda yer alan ilköğretim düzeyinde akıl yürütme ve ispata yönelik bu açıklamalar ispat öğretiminin erken bir dönemde ele alınması gerektiğinin altını bir kez daha çizmektedir. Yaş dönemlerine göre yapılan açıklamalarda görüldüğü gibi NCTM’de öğrencilerin lise öncesinde tümevarım ve hatta tündengeli uzak olmadığını, ilk dönemlerde deneyimlerine dayanan, ampirik kanıtlarla genelleme yapma eğilimi baskın olacakken, daha sonrasında karşıt örnekler vererek akıl yürütebileceklerini net bir şekilde ifade etmektedir.

2.7.2. Ortaokul Matematik Öğretim Programı ve İspat

Matematiksel ispata dair gerekli adımların sınıf ortamında atılması gerektiğini savunan MEB, ortaokul müfredatına (2013 yılına ait) çeşitli kazanımlara yer vermiştir; öğrencilerin genellemelerde bulunmalarını, çıkarımların doğruluğunu ya da yanlışlığını değerlendirmelerini sağlayan. Öğrencilerin argümanlar üretebilmeleri adına öğretmenin sınıf ortamını düzenlemesi gerektiği vurgulanmıştır; sorgulayabilecekleri, araştırma yapabilecekleri, fikirlerini paylaşma amaçlı iletişim kurabilecekleri bu sınıf ortamına benze bir öğretim ortamı mevcuttur; argümantasyon tabanlı öğretim. (Duran, Doruk & Kaplan, 2017).

Matematiksel kavramların öğretilmesinde uygulama aşamasından önce ispata dayalı çalışmalar yapmak öğrencilerin muhakeme etme becerisini geliştirmesi açısından önemlidir. Ayrıca keşfetme adı verilen bu aşama ile öğrenciler matematiğin estetik yönünü kavrar ve analitik düşünebilme yolunda ilerler. Verilen bütün bu aşamalar ispatın fonksiyonlarını oluşturur; doğruluğunu gösterme, nedenini açıklama, sistematikleştirerek teoremleri düzenleme, akıl yürütme yoluyla keşfetme, zihinsel sorgulama ve iletişim. Yapılan ispatın sistematik olarak onaylanması, doğruluğunun nedenlerinin verilmesi ve alternatif keşiflerle sonucun desteklenebilmesi sürecin özeti. Öğrencilerin kullandıkları yöntemler ise

öğrencinin düşünce yapısını ortaya çıkaracak niteliği sağlamaktadır (Dede & Karakuş 2014).

Ülkemizde 2013 yılında hazırlanan Ortaokul Matematik Dersi Programı incelendiğinde ispata bir kavram ya da bir beceri olarak yer verilmediği görülmektedir (Aylar, 2014). Programda öğrencilere kazandırılması gereken beceriler “problem çözme”, “matematiksel süreç becerileri”, “duyuşsal beceriler”, “psikomotor beceriler” ve “bilgi ve iletişim teknolojileri” olarak ele alınmıştır (MEB, 2013). “Matematiksel süreç becerileri” de kendi içinde “iletişim”, “akıl yürütme” ve “ilişkilendirme” olmak üzere üç başlıkta ifade edilmiştir. Ortaokul Matematik Dersi Programı’nda, akıl yürütme becerisi ise “eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme yöntemlerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci” olarak tanımlanmıştır (MEB, 2013). Bu nedenle, Aylar’ ın 2014 de belirttiği gibi programda ispat ile akıl yürütme becerisi arasında dolaylı olarak bir ilişki kurulduğu söylenebilir. Programda öğrencilere akıl yürütme becerisinin kazandırılmasında dikkate alınması gereken göstergeler arasında “çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma”, “mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma” ve “bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanmaya yer verilmesi bu düşünceyi doğrulamaktadır.

Ortaöğretim Matematik Dersi Programında İspat 2011-2012 Öğretim Yılı’nda uygulamaya konan Ortaöğretim Matematik Programı’nda “Mantık”, “Cebir”, “Trigonometri”, “Lineer Cebir”, “Olasılık-İstatistik” ve “Temel Matematik” olmak üzere toplam altı öğrenme alanı bulunmaktaydı. Bu programda öğrenme alanlarından biri olarak ele alınan “Mantık”; önermeler, bileşik önermeler, açık önermeler ve ispat yöntemleri olmak üzere dört alt öğrenme alanından oluşmakta ve 9. sınıfta matematik öğretimine ilk olarak Mantık ünitesi ile başlanmaktaydı. Aşağıda bu programda bulunan alt “ispat yöntemleri” öğrenme alanındaki kazanımlar verilmiştir (MEB, 2011).

Ortaöğretim Matematik Programı’nın Mantık ünitesi ile başlamasının haklı bir nedeni olduğunu savunan Altun (2008), mantık ünitesi aracılığı ile mantık-matematik ilişkisinin ortaya konulduğunu, mantık biliminin matematiğin gelişmesine olan katkısının tanıtıldığını belirtmiş ve mantık ünitesinin tam olarak kavranamaması durumunda öğrenilen matematiğin temelinde eksiklikler olacağını ve bazı bilgilerin açıklanmasında zorluklarla karşılaşılacağını ifade etmiştir. Ancak 2013-2014 Öğretim Yılı’nda uygulamaya konulan

yeni Ortaöğretim Matematik programında bir önceki programdan farklı olarak “Sayılar ve Cebir”, “Geometri” ve “Veri Sayma ve Olasılık” olmak üzere üç öğrenme alanı tanımlanmıştır. Önceki programda temel öğrenme alanlarından biri olarak alınan Mantık, hazırlanan bu yeni programla birlikte “Sayılar ve Cebir” öğrenme alanının içinde ele alınmıştır. Ayrıca Mantık, “önergeler ve bileşik önergeler”, “açık önergeler ve ispat yöntemleri” olmak üzere iki kısma ayrılmış ve mantık ünitesinin programda verilış yeri değıştirilerek 11. sınıfın ilk ünitesi olmuştur. Aşığıda yeni Ortaöğretim Matematik Programı’nın Mantık Öğrenme alanına ilişkin “açık önergeler ve ispat yöntemleri” alt öğrenme alanında bulunan kazanımlar verilmiştir (MEB, 2013).

2.7.3. Öğrencilerin İspat Yaparken Yaşadıkları Zorluklar

İspat matematikte önemli bir kavram olmasına rağmen yapılan araştırmalar öğrencilerin her düzeyde ispatı anlamakta, anlayıp sevmekte ve oluşturmada büyük zorluklar yaşadığını göstermektedir (Güven vd., 2005). Öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları zorlukları belirlemek amacıyla yapılan çalışmalar öğrencilerin birtek ispat yapmada değil ispat yapmanın ne olduğunu hatırlamada da zorluk yaşadıklarını ortaya koymaktadır. (Moore’dan aktaran Raman, 2003). Öğrencilerin ispatın gerekliliğini anlamada ve ispat yapmayı kavramada yaşadıkları sorunlar ispatla ilgili yapılan eğitim araştırmalarında çözümlenmeye çalışılan temel konu olmuştur (Viller’dan aktaran Moralı vd., 2006).

Weber (2001) öğrencilerin ispat yapma ile ilgili yaşadıkları zorlukları, yapılan çalışmalar kapsamında iki farklı açıdan değerlendirmiştir. Bunlardan birincisi bir veya birkaç örnek için doğruluğu gösterme ispat için yeterlidir şeklinde, öğrencilerin ispatın nasıl olması gerektiğine dair yanlış düşüncelere sahip olması, ikincisi öğrencilerin bir kavramı ya da teoremi anlamada ve uygulamada yetersiz kalmasıdır (Altıparmak & Öziş, 2005).

Baker (1996) çalışmasında lise ve üniversite öğrencilerinin tümevarımsal ispat tekniğini öğrenirken karşılaştıkları güçlükleri araştırmış ve öğrencilerin hem kavramsal hemde işlemsel açıdan ispat tekniklerinde güçlük yaşadıklarını, tümevarım ispatının kavramsal yönünden daha çok işlemsel yönüne önem verdiklerini saptamıştır. Bu güçlüklerle öğrencilerin matematik bilgi eksikliğinin neden olduğu düşünülmektedir (Tatar & Dikici, 2008). Arslan ve Yıldız (2010) ise 11. sınıf öğrencileriyle yaptığı bir araştırmada

öğrencilerin ispatlamada büyük sıkıntı yaşadıklarını ve ispatlama sürecinde matematiksel olarak yeterli olmayan yollar izlediklerini tespit etmiştir.

Weber (2001) soyut cebir dersinde herhangi bir teoremin ispatının nasıl oluşturulduğunun öğrenilmesi sürecinde öğrencilerin sahip olduğu güçlükleri belirlemek amacıyla yaptığı araştırmada üniversitede okuyan öğrencilerin çoğu zaman ispat yapabilmek için gerekli olan bilginin farkında olduğunu fakat ispatı oluşturma sürecinde bunları kullanmakta sıkıntı yaşadıklarını ortaya koymuştur (Tatar, 2006).

İspat yaparken öğrenciler genel olarak ispatı anlama, takdir etme ve oluşturmada, akıl yürütme adımlarını takip etmede ve ispatlarını formalleştirmede sorunlar yaşamaktadır. Knapp (2005) ispatlama ve formal matematikle geçerli anlamda ilk defa üniversite düzeyinde karşılaştığı için öğrencilerin matematiksel dile alışıp bu dili kullanmada, üst düzey akıl yürütmede ve formal matematiği anlamada güçlükler yaşadığını belirtmektedir (Sarı, Altun & Aşkar, 2007). Öğrencilerin matematiğin formalist yapısına uzak oluşu ispat yapma becerilerini de etkilemektedir. Çünkü informal ispat öğrencilere kavramsal olarak formal ispata göre daha kolay gelmekte ve öğrenciler formal ispata güvenmediğinden deneysel örneklerle kontrol etme ihtiyacı duymaktadır. Bunların yanı sıra öğrenciler öğretmenin yönlendirmeleri ile ispat yapabilmekte (Almeida, 2001), yönlendirmeler olmadan ispat yapmakta güçlük çekmektedir (Moralı vd., 2006).

Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin ispat yaparken zorlanma nedenlerini; matematiksel ispatı nelerin oluşturduğuna dair algılarının yeterli olmaması ve bazı öğrencilerin derslerde öğretilenlerden farklı bir şekilde yaptıklarında ispatlarının geçersiz olduğunu düşünmeleri şeklinde açıklamaktadır. Ayrıca araştırmalar öğrencilerin teoremi ya da kavramı eksik yapılandırmalarına bağlı olarak hatalı ispatlar yaptıklarını bunun da ispat yaparken zorluklara neden olduğunu ortaya koymaktadır (Moore, 1994; Hazan & Leron, 1994; Harel, 1998).

Weber (2001) öğrencilerin çoğunun ispatlamayı nasıl yapacağını, nereden ispata başlayacağını, ispat yaparken gerekli kavramsal bilgileri, tanımları ve bunları nasıl kullanacağını bilmediğini ortaya koymuştur (Sarı vd., 2007).

Uğurel ve Moralı (2010) öğrencilerin ispat yaparken kullanılması gereken tanım ve özelliklerin matematiksel gösterimlerini kullanmada, ispatın birbirini takip eden mantıksal bir dizi adımdan istenene ulaşma işlemi olduğunu anlamada ve bunları ispat yapma

süreçlerine aktarmada önemli sıkıntılar yaşadıklarını belirtirken Moore (1994) üniversite öğrencileriyle yaptığı çalışma sonucunda öğrencilerin ispat yaparken karşılaştığı zorlukların; kavramı anlama, matematiksel dil ve notasyon, ispata başlama olmak üzere üç ana kaynağı olduğunu ortaya koymuştur (Tatar & Dikici, 2008).

2.8. Bilgisayar Destekli Öğretim

Günümüzde benimsenmiş olan, bilgisayarların öğrencilerin elinde bir öğrenme aracı olarak değerlendirildiği yaklaşıma göre, öğrenciler, bilgisayar destekli öğretimin uygulandığı bir ortamda kendilerine sunulan yazılımları etkileşimli olarak kullanabilmekte, problemleri adım adım çözebilmekte, dönütler alarak doğru yanıtları neticesinde pekiştirilmekte, yanlış yanıtları neticesinde ise kendilerini doğruya götürecek ipuçlarını alıp yanlışlarını öğrenerek doğrulara ulaşabilmektedirler. Dolayısıyla bu şekilde gerçekleştirilen bilgisayar destekli öğretimde, öğrencilerin kullanmış oldukları bilgisayar, onların bilgi ve becerilerini ön plana çıkarma konusunda bir köprü rolü oynamaktadır (Baki, 2002).

Bilgisayar teknolojisine dayanan bilişsel araçların kullanılması ile gerçekleştirilen bilgisayar destekli öğretim, matematik öğretimi açısından değerlendirildiğinde ise yapısalcı (constructivist) felsefeye dayandırılarak oluşturulan bir öğretim yöntemidir. Yapısalcı kurama göre bilgi bireyden bağımsız değildir, kişiden kişiye aktarılamaz ve bireyin çevreyle etkileşimi neticesinde birey tarafından oluşturulur. Öğrenciye bu şekilde sağlanan bir öğrenme ortamında problem çözme etkinlikleri ve grup çalışmaları önemli bir yer tutmaktadır. Bilgisayar destekli öğretim materyalindeki soruların, problemlerin ve alıştırmaların öğrenciyi aktif kılacak ve yeni düşüncelerin ifade edilmesini sağlayacak şekilde, öğrencinin mevcut bilgilerini sorgulamasına olanak sağlayacak nitelikte olmalıdır (Baki, 2002).

Eğitimsel yeniliklerin ışığı altında matematik öğreticileri, bilgisayar destekli öğretimi matematik öğretiminde alternatif bir yol olarak görmüşlerdir. Bilgisayar destekli öğretim, Roblyer ve Edwards (2000) tarafından sınıflarda bilgisayarların aşağıda bahsedilen amaçlarla kullanılması olarak açıklanmıştır (Clark, 2004).

Alıştırmalar (alıştırma ve uygulama): Öğrenenlere problem üzerinde çalışma, sorulara cevap verme ve geribildirim alma olanağı sunar.

Eğitmen: Bir öğrencinin konuyu anlayabilmesi için gerekli olan eğitim etkinlikleri ve bütün bilgileri sunan bir eğitici gibi görev yapar.

Benzeşimler: Gerçek ya da soyut modellerin ve benzerlerinin nasıl çalıştığını gösterir. Eğitici Oyunlar: Etkinliklerin öğrenilmesi için oyun kuralları eklenmesi ile, motivasyonu artırmak için oluşturulan, alıştırma ve benzeşimler dışındaki aktivitelerdir. Problem Çözme: Uygulamalar, açıklamalar veya problem çözme basamakları vasıtası ile direkt öğrenme sağlar. Öğrenenlere problem çözmek için fırsatlar vererek, onların problem çözme becerileri kazanmasına yardımcı olur. Bilgisayar destekli öğretimi savunan araştırmacılar, bilgisayarların eğitim ve öğrenmede yeni bir oluşum yarattığı ve bu sayede öğrencilerin gelişen bir dünya ile rekabet etme düzeylerini arttırdığı düşüncesini savunmaktadırlar (Clark, 2004). Teknoloji destekli öğretimin söz konusu olduğu durumlarda, öğrencilerde daha etkili öğrenmelerin gerçekleştirilebilmesi için, öğrencilerin ihtiyacı olan faaliyetler vardır. Bu faaliyetler aşağıdaki gibi sıralanabilir (Kimminis'ten aktaran Sancak, 2003).

1. Öğrenciler sınıfta hazır bulundurularak öğrencilerin sınıfta yapılacak olan etkinliklere katılımları sağlanmalıdır.

2. Eğitimciler teknoloji kullanma metotlarını seçerken düzeyi, öğrencilerin gereksinimleri ve seviyelerine belirlemelidirler.

3. Eğitimciler teknoloji destekli öğretimde belli bir günlük plan çerçevesinde ilerlemelidir.

4. Eğitimciler teknolojik materyallerle ilgili kaynakları takip etmeli ve öğrencileri de bu konuda teşvik etmelidirler.

5. Uygulama sonunda değerlendirme yapılmalıdır. Bilgisayar destekli matematik öğretiminde iki farklı yaklaşım söz konusudur. Birinci yaklaşım, matematik derslerini daha etkili işlemek amacıyla teknolojinin, problem çözme sırasında hesaplama yapmak ya da grafik veya şemalar yoluyla görsel destek sağlamak amacıyla kullanılmasıdır. ikinci ve en etkili yaklaşım ise bilgisayarların bir simülasyon, araştırma veya deney aracı olarak kullanılarak, öğrencilere kendi bilgilerini kendilerinin oluşturabilecekleri fırsatlar oluşturmaktır (Baki'den aktaran Pesen, 2003). Bilgisayar destekli öğretimin kullanım alanlarından biri de, konunun herhangi bir yöntemle işlenmesinden sonra, konunun pekiştirilmesine yönelik olarak, eğitimsel amaçlara bağlı kalınarak paket programların

kullanılmasıdır. Matematik öğretiminde teknolojinin kullanılması; matematiğin içerisinde barındırdığı farklı konular arasında kurulan ilişkilerin fazlalaştırılmasına, öğrencilerin matematikle ilgili daha fazla tecrübe edinmelerinin sağlanmasına, görselleştirmenin oluşturulabilmesine, rutin hale gelmiş durumlardan çıkıp dersin keyifli hale getirilmesi sonucunda öğrencilerin matematikten zevk almalarının sağlanmasına yardımcı olması bakımından önemli bir yere sahiptir (Pesen, 2003). Mayers (2009)' a göre, teknoloji matematik öğretiminin en önemli unsurlarından biridir. Dünyada ekonomik amaçlı olarak kullanılmasının dışında teknoloji, okul programlarında bilgisayar destekli öğretimle yerini almıştır. Matematikte bilgisayar ve eğitim yazılımlarının kullanılması, matematik konularındaki görsel imgelerin anlaşılmasında ve bilgileri düzenleme ve analiz etme konularında kolaylık sağlayabilmektedir. Teknolojinin kullanılması öğretmenlere, öğrencilerin birden fazla duyu organını kullanarak dahil oldukları bir matematik öğretimi sürecine, daha kolay ulaşmalarını sağlamaktadır. Kullanılacak materyalleri bu formatta sunmak, öğrencilerin matematik faaliyetlerini yaparken, duyarken ve de görürken, kavrama düzeylerini güçlendirebilmektedir. Diğer taraftan bilgisayar destekli öğretim, özel eğitimsel ihtiyaçları olan öğrenciler için birden fazla duyularına hitap eden bir öğretim onlar için faydalı olmaktadır. Zihinsel gerilik, dikkat eksikliği, işitme problemi gibi öğrenme güçlükleri, işlenen bir derste öğrencilerin tam olarak yeteneklerini kullanmalarına engel olabilmektedir. Anlatım yöntemi gibi tek bir boyuta hitap eden öğretim yöntemleri, bu tipteki öğrenenlerin ihtiyaçlarını karşılamamaktadır. Bunun yerine öğretim sürecine işitsel, bedensel, dokunsal ve görsel modellerin dahil edilmesi ile özel eğitimsel ihtiyaçları olan öğrencilerin anlamlı bir şekilde öğrenmeleri gerçekleştirilebilmektedir. Öğrenciler çoklu öğrenme fırsatlarına sahip olduklarında, öğrendikleri kavramları daha uzun süre zihinlerinde tutabilmelerini sağlayacak anlamlı bağlantıları daha kolay kurabilmektedirler. Öğrencilerin bilgisayar yazılım programlarını kullanmaları, onlara önceden öğrendikleri kavramlarla ilgili bilgilerini güçlendirmelerini sağlayabilmektedir. Ayrıca bu şekilde gerçekleştirdikleri öğrenmeler soyut kavramları görselleştirebilmeleri olanaklarını artırmaktadır. Bilgisayar destekli öğretim esnasında öğrenciler programdaki görsel ve işitsel şekillerden doğru yanıtı yönelik hızlı bir şekilde geri bildirim alabilmektedirler. Geri bildirimler aynı zamanda, yanlış yanıt verildiğinde yazılım tarafından öğrencinin tekrar denemesi ya da konu ile ilgili kısma geri dönüp ek alıştırmalar yapmalarını önerileriyle de alınabilmektedir. Ek uygulama

olanakları da sağlayan bu geribildirim çifti, öğrencilerin matematik öğrenmelerini geliştirebilmektedir (Mayers, 2009).

2.8.1. Bilgisayar Destekli Öğretimde Animasyon Kullanımı

Türk Dil Kurumu animasyonu canlandırma olarak tanımlanmaktadır. Genel olarak anlatılacak olursa bir nesneyi bir yerde bir yere hareket ettirme şeklinde tanımlanabilir. Birden fazla resim ve görüntülerin ardı ardına hızlı bir şekilde gösterimine ise Bilgisayar animasyonu denmektedir.

Animasyon tekniğinin kullanıldığı yazılımlar sayesinde, bu tekniği kullanan ya da animasyon tekniği ile eğitim alan öğrenciler, soyut olan durum ya da kavramları somutlaştırmada yaşanan güçlükleri yok edebilmektedir. Öğretimi destekleyici bilgisayar animasyonları, öğrencilerin konuyu daha net bir şekilde idrak edebilmeleri için konuların ve işlemlerin, hareketli görsel resimler üzerine kurgulanması gerekmektedir (Burke, Greenbowe & Windschitl, 1998).

2.9. İlgili Araştırmalar

Ülkemizde son 5 yılda ispat konusunda yazılan birçok yüksek lisans ve doktora tezi bulunmaktadır. Bu çalışmaların çoğunluğu incelendiğinde Türkiye’de erken yaş dönemlerinde ispat öğretimine yönelik çok az çalışma yapıldığını göstermektedir.

İspat ile ilgili yurt dışında yapılan çalışmalar incelendiğinde her sınıf düzeyinde çalışmaya rastlanmıştır. İlkokul düzeyinde yapılan çalışmalardan bazıları öğrencilerde ispat fikrinin gelişimini incelerken (Zack, 1999; Maher & Martino, 1996) bazı çalışmalar akıl yürütme becerisinin NCTM ilkeleri ile paralel olarak ilk ve ortaokul seviyesinde kazanılmaya başladığını ortaya koymuştur (Lampert, 1990).

2.9.1. İspat ile İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Altıparmak ve Öziş (2005), yaptıkları araştırmada okul öncesi, ilköğretim ve lise düzeylerinde matematiksel muhakemenin gelişimini incelemiştir. Okul öncesi dönemde sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma ve sıralama kavramları verilerek çocuklarda muhakemenin oluşumu için temel adımların atılabileceğini belirtmiştir. Araştırmada

ilköğretim seviyesinde fiziksel materyaller kullanılması gerektiği, varsayımların doğruluğu için örnekleminin çoğaltılması gerektiği belirtilmiştir. Lise öğrencilerinin soyut düşünebilme evresinde olduğu ve tümdengelimli ispatları kullanabileceğini ve biçimsel ispatları sunabileceğini belirtmiştir. Sonuçta, ispat ve muhakemenin insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenek olduğunu, fakat bu yeteneğin gelişiminin belirlenecek uygun stratejilere bağlı olduğunu söylemiştir. Öğrencinin ispat ve muhakeme becerisinin gelişiminde öğretmenin kullanacağı yöntemlerin çok önemli olduğu vurgulanmıştır.

Arslan (2007), yapmış olduğu doktora tez çalışmasında ortaokul düzeyindeki öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimini incelemiştir. Çalışmanın uygulaması Bursa ili merkez ilçelerinden rastgele seçilen yedi ilköğretim okulunda 6. 7. ve 8. sınıfta okuyan yaklaşık 700 öğrenci ile yapılmıştır. Araştırmada tarama modeli kullanılmış ve öğrencilerin ispat düzeylerinin belirlenmesi kısmı nicel, yargıların arkasında yatan sebeplerin incelenmesi kısmı nitel çalışma olarak gerçekleştirilmiştir. Çalışma için beş soruluk bir veri toplama aracı geliştirilip uygulanmış, 36 öğrenci ile özel görüşmeler yapılmıştır. Uygulama sonunda yapılan analizlere göre, ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin ulusal ve uluslararası literatürde kabul edilen ortalama değerlerden daha düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Albayrak Bahtiyari (2010), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında 8. sınıf öğrencilerinin matematik eğitiminde ispatın önemi hakkındaki görüşlerini likert tipi anket uygulaması ile betimlemeye çalışmıştır. Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük bir kısmı bir sonuç açıkça doğruysa ispatlamanın anlamı olmadığını, sadece örnek vererek bir ifadenin ispatlanabileceğini düşündükleri belirtilmiştir. Ayrıca ankete katılan öğrencilerin %60'a yakını ispat yaparken zorlandıklarını belirtmişlerdir. Araştırmada son olarak öğrenciler matematik dersinde muhakemenin yer alması ve bunun için de farklı tekniklerin, bilgi teknolojilerinin kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir.

Zaimoğlu (2012), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat ve akıl yürütme sürecini, ispat temsil şekillerine olan eğilimlerini incelemiştir. Araştırmada veri toplama aracı olarak, 6. ve 7. sınıf geometri kazanımlarını ölçen, üçgen ve açılar alt öğrenme alanlarını ile ilgili daha fazla sorunun olduğu 8 soruluk bir form kullanılmıştır. Araştırma sonucuna göre çalışmaya katılan öğrenciler ispat yaparken deney ve gözleme dayalı tümevarımsal yaklaşımı daha çok tercih ederken cebirsel ispatı tercih etmemişlerdir. Öğrenciler doğrudan ispatı kısmen

kullanabilirken dolaylı ispata dayalı akıl yürütme sürecini neredeyse hiç kullanmamışlardır. Araştırmada ulaşılan başka bir sonuç ise öğrencilerin yanlış bir önermeyi çürütmede başarısız olduklarıdır. Araştırmacı öğrencilerin karşıt bir örnek sunma ve çelişki ile ispatlama yöntemlerini bilmedikleri sonucuna ulaşmıştır.

Çalışkan (2012), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf matematik ders kitabındaki etkinlik ve soruları Balacheff'(1990)'in ispat düzeylerine göre incelemiştir. Bu inceleme sonunda ders kitaplarındaki etkinliklerin Balacheff'(19980)'in ispat düzeylerine göre alt düzeylerde yer aldığı görülmüştür. Çalışmanın ikinci kısmında ise 8. sınıf öğrencilerinin SBS (Seviye Belirleme Sınavı) puanları ile ispat yapabilme seviyeleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma için iki açık uçlu sorunun yer aldığı ispat sınavı verileri kullanılmıştır. Araştırmada öğrencilerin büyük bir kısmının ispat, doğrulama sorgulama gibi kavramlardan uzak oldukları görülmüştür.

Aylar (2014), yapmış olduğu doktora tez çalışmasında 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve becerilerini betimlemeyi amaçlamıştır. 54 öğrencinin yer aldığı çalışma 14 hafta sürmüştür. İspat öğretim sürecinde öğrencilere doğrudan ispat karşı örnek vererek ispat tüketerek ispat ve durum yoluyla ispat yöntemleri kullanılmıştır. Araştırma, nitel araştırma yaklaşımlarından birisi olan eylem araştırması şeklinde kurgulanmış ve araştırmada betimsel analiz kullanılmıştır. Öğretim sürecinin ardından öğrencilerin ispata yönelik algılarının değişimini ve performanslarını ortaya koyacak İspat Testleri uygulanmıştır. Bu testler araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Öğrencilerin yanıtlarını derinlemesine incelemek için 16 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. 7. sınıf öğrencilerinde Sonuç olarak ispat kavramına yönelik ispat ve algı yapabilme becerilerinde gelişim gözlemlenmiştir.

Yurt içinde lise ve lisans düzeyinde ispat ile ilgili yapılan çalışmalar şöyledir;

Özer ve Arıkan (2002), "Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri" adlı çalışmalarında Miyazaki ve Balacheff' (1988)'in çalışmalarından yararlanarak, lise 2 öğrencilerinin ispat düzeylerini belirlemeye çalışmışlardır. 110 öğrenci ile yürüttükleri araştırmada öğrencilerinin istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak ispat yapamadıkları ortaya konmuştur. Ayrıca öğrencilerin ispat yöntemlerini kullanmadıkları görülmüştür.

Arslan ve Yıldız (2010), yapmış oldukları araştırmada 11. sınıfta okuyan öğrencilerin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama olarak

ele aldıkları evreleriyle ilgili yaşantılarını ortaya koymayı amaçlamışlardır. Çalışma yöntemi olarak nitel araştırma yöntemini tercih etmişler ve matematiksel düşünme süreçlerinin evrelerini dikkate alan, her biri 9'luk üç çalışma yaprağı geliştirmişlerdir. 24 öğrenci ile gerçekleştirdikleri bu çalışmanın verileri incelendiğinde matematiksel düşünmenin seviyeleri yükseldikçe öğrenci başarısının düştüğünü gözlemlenmiştir.

Keçeli Bozdağ (2012), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumları ile ispatlama becerileri arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmada nicel, nitel ve karma araştırma yöntemleri bir arada kullanılmıştır. Çalışmanın nicel bölümüne matematik öğretmen adaylarının (ortaöğretim ve ilköğretim) ispat ve ispatlamaya yönelik tutumlarını belirleyen 30 maddelik bir ölçek geliştirilmiştir. Hazırlanan bu ölçek, evreni 2008-2009 öğretim yılında bir devlet üniversitesinin ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programına kayıtlı olan 727 öğretmen adayına uygulanmıştır. Pilotlama evresinden sonra 22 madde ve dört faktörden oluşan güvenirlik değeri 0,887 olan ölçek elde edilmiştir. Esas uygulamadan sonra yapılan analizler sonucunda adayların ispata yönelik tutumları orta düzeyde çıkmıştır. Araştırmanın nitel bölümü 21 adet ispat probleminden oluşmaktadır. Bu ispat problemleri iki evrede değerlendirilmiştir. Bu ispat problemleri ilk olarak Balacheff' (1988)'in ispat basamaklarına göre kodlanmıştır. Balacheff (1988)'in ispat basamakları basit deneycilik (BD), kritik deneycilik (KD), genelleyici örnek (GÖ), düşünce deneyciliği (DD) ve matematiksel ispat (Mİ) olmak üzere beş evreden oluşmuştur. 21 adet ispat probleminden toplam 462 cevap elde edilmiştir. Bunlardan 22 tanesi (% 4,8) BD, 21 tanesi (%4,6) KD, 35 tanesi (%7,6) GÖ, 252 tanesi (%54,6) DD ve 119 tanesi (%25,8) Mİ basamaklarında kodlanmıştır. Öğretmen adaylarının 8'i (%1,7) problemlerin ispatını boş bırakırken 5'inin (%1,1) yanıtı herhangi bir kategori altında değerlendirilememiştir. Nitel bölümün ikinci evresinde ise 0-1-2-3 kodlaması yapılmıştır. Bu kodlamada öğretmen adaylarının problemi ne ölçüde doğru yaptığı araştırılmıştır. Bu ikinci kodlamadan ispatlama becerilerinin eksikliğini kapatmak için yararlanılmıştır. Yani sürece performansı tamamlama anlamında bakılmıştır. Araştırmanın karma yöntem bölümünde ise öğretmen adaylarının ispatlama becerileri ile ispata yönelik tutumları arasındaki ilişkiye bakılmıştır. Bu ilişkinin ortaya çıkarılması için veriler SPSS 15 programında yapılan r (korelasyon katsayısı) sonuçları incelenmiştir. Korelasyon katsayısı (r) için yapılan Kendall's Tau testi sonuçlarına göre

öğretmen adaylarının ispatlama becerileri ve ispata yönelik tutumları arasında anlamlı bir ilişki bulunamamıştır.

Demiray (2013), yapmış olduğu yüksek lisans tezinde, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yöntemlerinden olan çelişki ile ispat, olmayana ergi ispat ve aksine örnek verme ispat yöntemlerini kullanımlarındaki başarı seviyelerinin incelemeyi amaçlamıştır. Ayrıca bu araştırmada açığa çıkarılması amaçlanan diğer bir unsurlar, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yöntemlerindeki yanlış anlamlandırmaların sebeplerinin öğrenmek ve geçerli ispat yapabilme seviyelerini araştırmaktır. Yapılan analizlerde, her bir soru için frekans ve yüzdeler kullanılmış olup, her soru her ayrıntısına kadar irdelenmiştir. Yapılan bu çalışmanın sonucunda ortaöğretim matematik öğretmen adaylarında, ispat yöntemlerinden olan aksine örnek verme ve çelişki ile ispatta başarı yüzdelerinin yüksek olduğu ortaya konmuştur. Ancak ortaöğretim matematik öğretmen adayları karşıt tersi ispat sorularına vermiş oldukları cevaplarda yanlış yüzdesinin daha fazla olduğu gözlemlenmiş olup, yanlış anlamlandırmaların nedenleri de belirlenmiştir. Açık uçlu ispat sorularına verilen cevaplar incelendiğinde, öğrencilerin yarısından fazlasının geçerli ispat yapabildiği gözlemlenmiştir. Öğrencilerin yapmış oldukları geçerli ispatlar irdelendiğinde, matematiksel tümevarım yöntemi ve doğrudan ispat yöntemi öğrencilerin en çok kullandığı ispat yöntemleri olduğu gözlemlenmiştir. İfadeyi ispatlamak sebebi ile sayıları kullanmak ve verilen ifadenin doğrudan tekrardan ifade edilmesi öğrencilerin en çok yaptıkları geçersiz ispat olarak gözlemlenmiştir.

Gelişen (2017), yüksek lisans çalışmasında ortaöğretim 9. sınıf üçgenler konusunun öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyi gerçekleştirmiştir. Araştırma 2015-2016 eğitim öğretim yılının 2. döneminde Sivas merkezdeki bir lisede eğitim gören toplam 31 öğrenciyle gerçekleştirilmiştir. Araştırmada yöntem olarak nitel araştırma yönteminden öğretim deneyi modeli seçilmiştir. Araştırmada uzman görüşleri alınarak araştırmacı tarafından geliştirilen origami etkinlikleri ve etkinlikle ilgili değerlendirme sorularının yer aldığı çalışma yaprakları kullanılmıştır. Günlükler, çalışma yapraklarındaki sorulara verilen yanıtlar, mülakatlardan elde edilen veriler ve etkinliklerin kamera kayıtları bu araştırmada kullanılan veri toplama araçlarıdır. Çalışma sonucunda veri toplama araçlarından elde edilen veriler içerik analiz yöntemi ile çözümlenmiştir. Çalışma sonunda elde edilen bulgular oluşturulan problemler ve alt problemler ışığında değerlendirilmiştir. Yapılan mülakatlardan elde edilen bilgiler ışığında,

öğrencilerin origami ve sözsüz ispatlar yöntemlerinin zevkli ve öğretici buldukları ortaya çıkmıştır.

Demir (2017), yapmış olduğu doktora tez çalışmasında, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde yaptıkları muhakeme hataları ve muhakeme boşluklarını belirlenmesini amaçlamıştır. Bunun yanında araştırmada, öğretmen adaylarının üniversite eğitimleri boyunca ispat sürecinde yaptıkları hataların gelişimsel olarak nasıl değiştiğini inceleme ve bu süreçte aldıkları bazı derslerin; matematiksel muhakemelerini geliştirme, uygun stratejiler belirleme ve muhakeme hatalarının üzerindeki rolünün ne ölçüde olduğunu derinlemesine analiz etme amaçlanmıştır. Araştırma sonucunda elde edilen bulgular doğrultusunda öğretmen adaylarının doğru muhakeme adımlarını gerçekleştirmesi için öğretim elemanlarının dikkat etmeleri gereken bazı hususlarla ilgili önerilerde bulunulmuştur.

Şadan (2017), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında, fen lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerini analiz etmek ve görsel ispatın öğrenme sürecinde kullanımına yönelik örnek bir uygulama sunmaktır. Fen lisesinde öğrenim gören 6 öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmada, bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyi uygulanmıştır. Üç evreden oluşan araştırma sürecinin ilkinde öğrencilerin görsel ispata dair algıları (örneklerini anlayıp açıklayabilme) belirlenmiştir. İkinci evrede, görsel ispata dair sınıf tartışmalarından ve çeşitli görsel ispat etkinliklerinden oluşan iki öğretim deneyi gerçekleştirilmiş süreç sonunda öğrenciler verilen matematiksel ifadelerle yönelik görsel ispatlar geliştirmişlerdir ve geliştirdikleri görsel ispatlara yönelik klinik mülakatlar yapılmıştır. Üçüncü evrede ise süreç değerlendirilerek, öğrencilerin görsel ispata dair görüşleri alınmıştır. Öğretim deneyinden elde edilen verilerin analizi, geriye dönük (retrospective) ve ileriye dönük (prospective) analiz olmak üzere iki şekilde yapılmıştır. Yapılan her uygulama sonrası ileriye dönük analizler yapılmış, bir sonraki uygulamaya bu analizler doğrultusunda devam etmiştir. Görsel ispat yapma sürecinde yaptıkları hatalar ve karşılaştıkları zorluklar belirlenmiştir. Yapılan klinik mülakatlarda bu hatalar ve zorluklar giderilmeye çalışılmıştır. Süreç sonunda öğrenciler, görsel ispat geliştirme sürecini yararlı bulduklarını ve süreçten keyif aldıkları belirtmişler, görsel ispatların matematik sınıflarında kullanılması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Göl (2017), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında 12. Sınıfta okuyan fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme

basamakları bağlamında incelemiştir. Veriler araştırmacı tarafından geliştirilen ve açık uçlu 9 problemde oluşan "Matematiksel Düşünme Ölçeği" ve öğrencilerle sorulara verdikleri yanıt odaklı yapılan mülakatlar yoluyla toplanmıştır. Araştırma sonucunda, soruların zorluk düzeyi arttıkça öğrencilerin özelleştirme eğilimlerinin arttığı, özellikle genelleme ve ispat basamaklarında başarılarının düştüğü belirlenmiştir. Öğrencilerin gerçekleştirdiği basamaklar en çoktan en aza sırasıyla özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat şeklinde sıralanmıştır. Öğrenciler araştırmada konu edilmiş olan beş tahmin türü arasından sadece Sonlu Sayıda Ayırık Durumdan Empirik Tümevarım veya Algıya Dayalı Tahmin türünden tahminlerde bulunmuşlardır. Araştırma sonuçları, öğrencilerin en başarılı oldukları basamağın özelleştirme basamağı olduğunu ve öğrencilerin en yüksek seviyeye sahip oldukları basamağın ise genelleme basamağı olduğunu açığa çıkarmıştır.

Polat (2018), yapmış olduğu doktora tez çalışmasında lise öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Ayrıca sözsüz ispatların öğrencilerin ispat becerileri üzerine etkisini, hem öğretmenin hem de öğrencilerin sözsüz ispata yönelik görüşlerini belirlemeyi de amaçlamıştır. Çalışma 9. Sınıfta öğrenim gören 25 öğrenci ile yürütülmüş ve yöntem olarak karma araştırma yöntemleri kullanılmıştır. Uygulama öncesi ve sonrası öğrenci düzeylerini belirlemek için ispat beceri testi kullanılmıştır. Seçilen 4 öğrenci ile sözsüz ispat etkinlikleri yürütülmüş ve bu ispata yönelik görüşleri alınmıştır. Araştırma sonucuna göre sözsüz ispatların, öğrenciye formüllerin nereden geldiğini anlama, formüllerin doğruluğuna ilişkin ikna olma, etkinliklerden keyif alma, matematiğin diğer kavramlarıyla ilişki kurma, daha önce öğrenmiş oldukları kuralları kullanma ve matematiksel kavramları anlama gibi imkânlar sağladığı görülmüştür. İspat beceri testinden alınan puanların bağımlı örneklem t-testi ile analizi sonucu, sözsüz ispatların ispat becerisi üzerinde olumlu etkisi olduğu sonucu elde edilmiştir. Ayrıca sözsüz ispatların sınıfta uygulanabilirliği açısından gerek öğretmen gerekse öğrenciler olumlu görüş bildirmişlerdir.

Ülker (2018), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında Gerçekçi Matematik Eğitimi yaklaşımına uygun olarak hazırlanmış ispat öğretim süreci tasarlamıştır. Ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinin katıldığı bu araştırmada altı tane sözsüz ispat seçilmiş ve teorinin sunduğu etkinlik tasarımı yaklaşımı bağlamında birer sözel problem durumu şeklinde öğretimler planlanmıştır. Veriler öğrenci defterleri, araştırmacı gözlem notları ve bir öğrenci grubunun çalışmalarının video kaydı ile toplanmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin ispatla ilişkili

pek çok matematiksel süreci yaşadığı, alanlar arası ilişkilendirmeler gerçekleştirdikleri ve yaşadıkları süreçlerde bir ilerleme kaydettikleri ortaya konmuştur.

Pesen 2018 yılında yaptığı yüksek lisans çalışmasında 8. sınıf öğrencilerinin ispat ve argümantasyon becerilerini incelemiştir. Betimsel, istatistiksel ve nitel analizleri barındıran bir karma yöntem araştırması olan bu çalışma 242 sekizinci sınıf öğrencisiyle yürütülmüştür. Araştırma bulgularına göre öğrenciler cebir alıştırmalarında deneysel ispatlar oluşturup en ikna edici ispat olarak bu ispatı görmektedirler. Geometri alanındaki alıştırmalarda öğrencilerin çoğu ispat üretemezken analitik ispatı daha ikna edici bulmuşlardır. Araştırmada argümantasyon çalışmasının bulgularına göre en çok oluşturulan argümantasyon seviyesinde öğrencilerin bir iddia ve gerekçelendirme sundukları ortaya konmuştur.

2.9.2. İspat ile İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Maher ve Martino (1996), tek bir öğrencinin 5 yıl boyunca ispat düşüncesinin gelişimini inceledikleri bir örnek olay çalışması gerçekleştirmişlerdir. Stephanie adlı öğrenci ile gerçekleştirilen bu çalışmada yıllara göre zorluk düzeyi bir miktar artan sorular kullanılmıştır. 5 yıl süren bu çalışmada bazıları sınıf içerisinde tartışılan, bazıları ise Stephanie ile bire bir görüşülen 11 etkinlik kullanılmıştır. Etkinliklerden birinde ise Stephanie ve üç sınıf arkadaşı bir grup görüşmesi ile bir soru üzerine tartışmış, birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Çalışmanın sonucunda 10 yaşındaki Stephanie'nin verdiği cevapları doğrulamak için tartışmalarda durum yolu ile ispat (proof by cases) yöntemini keşfettiği görülmüştür. Stephanie pek çok etkinlikte bu yöntemi kullanmış ve arkadaşlarına cevabının doğruluğunu aktarabilmiştir.

Knuth ve Sutherland (2004), yaptıkları çalışmada öğrencilerin örnekle doğrulamanın ispat için yeterli olduğunu düşünme oranlarını ve ispatın ne ölçüde genellenebilir bir durum içerdiğini fark edip etmediklerini araştırmışlardır. 6. ve 8. sınıfına devam eden 394 öğrencinin katıldığı bu çalışmada öğrencilerin öğrenim gördükleri okulda ABD'de reform temelli oluşturulan ve Michigan State Üniversitesinde geliştirilen bir öğretim programı (Connected Mathematics Program) uygulanmaktadır. Bu öğretim programı NCTM standartlarına uygun olarak hazırlanmıştır. Uygulanan sınavdan elde edilen veriler Waring'in (2000) çalışmasında kullanılan ispat düzeylerine göre puanlandırılmıştır. Öğrencilerin

cevapları analiz edildiğinde öğrencilerin yaklaşık olarak % 40'ı örnekle doğrulamanın ispat yapmak olduğunu düşündükleri görülmüştür. İspatı doğru yanıt olarak seçen öğrencilerin oranı ise %30'dur.

Komatsu (2010), iki beşinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirdiği örnek olay çalışmasında öğrencilerin karşı örnek verme, çürütme durumlarını araştırmıştır. Araştırmada iki öğrencinin doğru olduğunu ve ispatladıklarını düşündükleri varsayımlara, araştırmacı karşı örnekler sunarak, öğrencilerin kendi varsayım ve ispatlarını tekrar gözden geçirmelerini sağlamış ve bu süreci analiz etmiştir. Çalışmanın ilk evresinde öğrencilerin iki basamaklı bir sayı ile bu sayının basamaklarının yer değiştirilmesi ile oluşmuş sayının toplamı hakkında düşüncelerini ve bir genellemede bulunmaları istenmiştir. Öğrenciler bu kurala uyan sayılarla yaptıkları denemeler sonucunda toplamda elde edilen sayının aynı rakamlardan oluşması gerektiği genellemesine ulaşmışlardır (Örneğin $52+25=77$, $26+62=88$). Araştırmacı bu genellemeden sonra öğrencilere kuralı eldeli bir toplama işleminde uygulamalarını istemiş ($85+58=143$) ve genellemelerinin yanlış olduğunu öğrencilere göstermiştir. Öğrencilerin birkaç deneme sonucunda sonucun 11'in katı olması genellemesine ulaştıkları görülmüştür.

Cyr (2011), 6. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirdiği çalışmasında geometri öğrenme alanında öğrencilerin temel ispat yazım becerilerini geliştirmeyi amaçlamıştır. Mevcutları 25 öğrenci olan iki ayrı 6. Sınıfta, 4 ay boyunca öğrenci seviyesine uygun 8 etkinliğin kullanıldığı öğretim-öğrenme uygulaması gerçekleştirilir. Etkinliklerde sınıf içindeki tartışmalar ve öğrenci cevapları incelendiğinde, ilk etkinlikte 50 öğrenciden 40'ı soruda verilen eksik bilgiyi, örneğin sorulan açıyı bulmak için açölçer kullanmıştır. 4 öğrenci ise teorik bilgileri kullanarak tümevarımsal akıl yürütme yöntemini kullanmış, 6 öğrenci ise hem tümdengelim, hem de ölçme işlemi gibi somut yaklaşımları (karma metot) birlikte kullanmışlardır. Dört etkinlik sonunda öğrencilerin önemli bir bölümünde (yaklaşık %84'ü) teorik bilgiler ışığında tümdengelimsel çıkarımların ortaya konulmaya çalışıldığı görülmüştür. Çalışmanın sonunda ise öğrencilerin tamamı ölçmeye ve gözleme dayalı yaklaşımların sınırlılığını fark etmiş, basit geometrik durumların geçerliliğini onaylamak için teorik özellikleri kullanmaya yönelmişlerdir. Öğrencilerin tamamı bu yönelimi gerçekleştirmiş olsa da tüm öğrencilerin basit ispatlar veya tümdengelimsel çıkarımlara dayalı argümanlar geliştirme yetisine sahip olamadığı ortaya konmuştur. Sonuç olarak öğrencilerin bir kısmı yaptıkları etkinliklerde ölçme ve somut kanıt sunma eğilimini devam etmiş olsalar da, öğrencilerin önemli bir

bölümü Houdement ve Kuzniak'ın (2006) adlandırmaları ile pratik geometri düzeyinden teorik geometri düzeyine geçiş sağlamıştır. Bu sonuç da öğrencilerin yapılan etkinliklerle somut düşünmeden soyut düşünmeye geçişte önemli bir evre kaydettiklerine işaret etmektedir.

Cooper, Walkington, Williams, Akinsiku, Kalish, Ellis ve Knuth 2011 yılında gerçekleştirdikleri çalışmalarında öğrencilerin matematiksel varsayımları doğrulamak için kullandıkları örneklerin niteliğine odaklanmışlardır. Bu çalışmada örneklerle doğrulama ispat olarak değerlendirilmemekle birlikte ispat düşüncesinin oluşumunda önemli bir adım olarak görülmüştür. Araştırma 6. ve 7. sınıfa devam eden yedi, 8. sınıfa devam eden beş öğrenci ile gerçekleştirilmiştir.

2.9.3. Animasyon ile İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Ülkemizde animasyonların eğitim öğretim alanında kullanılması ile ilgili araştırmaların çoğu fen bilimleri dersinde tasarlanmış ve yapılmıştır. Çalışmaların çoğundaki bulgular animasyon kullanılarak yapılan öğretim lehine anlamlı farklılık olduğunu ortaya koymuştur.

Bayram (2001), bilgi iletim biçimlerinin öğrenci başarısına etkisini araştırdığı çalışmada benzer özelliklere sahip 4 çalışma grubu ile çalışmıştır. Fen Bilgisi dersi uzay ve gökyüzü konularının öğretiminin yapıldığı bu çalışmada iletim biçimleri dört başlık altında kabul edilmiştir. Bu iletim biçimleri iletim klasik, görsel, görsel-işitsel ve çok duyulu etkinleştirilmiş bilgi iletim türleridir. Oluşturulan dört gruptan ilki Klasik Bilgi İletim Grubu adını almıştır ve ders kitabındaki düz anlatım yolu ile öğretim gerçekleştirilmiştir.

Sezgin (2002), yaptığı çalışmada çoklu ortamda hazırlanan iki öğretim yazılımının oluşturduğu öğrenme ortamları ile geleneksel öğrenme ortamındaki başarı ve kalıcılık arasındaki farkı incelemiştir. İlköğretim 4. sınıf öğrencileri ile yapılan bu çalışmada iki deney grubu bir kontrol grubu bulunmaktadır. Deney gruplarından ilki, animasyonlarla tasarlanan öğretim yazılımını, diğeri ise durağan resimlerle oluşturulan öğretim yazılımını kullanmıştır. Kontrol grubu ise geleneksel öğrenme ortamında öğrenim görmüştür. Çalışma sonucunda öğrencilere uygulanan son test analizlerine göre, deney gruplarının başarısının daha yüksek çıkmıştır. Uygulamanın bitiminden 14 gün sonra son test ile aynı maddelerin yer aldığı kalıcılık testi uygulamasının sonuçları ise, hareketli resimlerin kullanıldığı

öğrenme ortamında öğrenen öğrencilerin daha kalıcı öğrenmeler edindiklerini ortaya koymuştur.

Tezcan ve Yılmaz (2003), çalışmalarında liselerde kimya öğretiminde kullanılan geleneksel düz anlatım yöntemi ile bilgisayar destekli öğretimin başarıya etkilerini karşılaştırmışlardır. 2002-2003 eğitim öğretim yılında bir meslek lisesinde gerçekleştirilen çalışmaya 10. sınıf düzeyinden 57 öğrenci katılmıştır. Akademik başarıları birbirine eş olan iki sınıftan birinde düz anlatım yöntemi diğerinde bilgisayar destekli öğretim metotları kullanılmıştır. Veri toplama aracı olarak 15 sorudan oluşan bir kavram testi hem uygulama öncesinde hem de uygulama sonrasında kullanılmıştır. Uygulama sonunda deney grubundaki öğrencilerin başarıları kontrol grubuna göre daha yüksek çıktığı görülmüştür. Ayrıca çalışmada başarının cinsiyete bağlı olduğu, deney grubunda erkek, kontrol grubunda kız öğrencilerin daha başarılı olduğu saptanmıştır.

Daşdemir ve Doymuş (2012), çalışmalarında Animasyon Kullanımının 8. sınıf fen bilgisi dersinde başarıya ve kalıcılığa etkisini araştırmışlardır. Çalışmalarında diğer inceledikleri bir konu da öğrencilerin bilimsel süreç becerileri ve animasyon kullanımı hakkında öğrenci görüşleridir. Deney ve kontrol grubu ile gerçekleştirilen bu çalışmada deney grubu öğrencilerine animasyonla, kontrol grubu öğrencilerine ise geleneksel öğretimle konuyu anlatmıştır. Fen bilgisi dersi hücrenin bölünmesi ünitesinin öğretiminin gerçekleştirildiği bu çalışma sonunda animasyon kullanımının öğrencilerin akademik başarılarına, bilgilerinin kalıcılığına ve bilimsel süreç becerilerine olumlu yönde etki yaptığı ortaya konmuştur.

Lise düzeyinde gerçekleştirilen bir çalışmada Çelik (2007), coğrafya dersinde bilgisayar destekli animasyon kullanımının öğrenci başarısına etkisini incelemiştir. Çalışma grubu olarak 9. ve 10. sınıftan iki deney iki kontrol grubu belirlenmiştir. Veri toplama aracı olarak 9. ve 10. sınıflar için Coğrafya Başarı Testi, deney grubundaki öğrencilere Animasyon Görüş Ölçeği uygulanmıştır. Toplanan veriler analiz edildiğinde deney grubundaki öğrencilerle kontrol grubundaki öğrenciler arasında coğrafya dersinin akademik başarı ve bilginin kalıcılığa olan etkisi yönünden deney grubu lehine anlamlı bir farklılığın olduğu ortaya konmuştur ve animasyon grubundaki öğrencilerin animasyonun derste kullanılmasına ilişkin olumlu görüşte olduğu tespit edilmiştir.

İskender (2007), yüksek lisans çalışmasında animasyon kullanımı ile bilgisayar destekli fen öğretiminin öğrenci başarısına etkisini incelemiştir. 8. sınıf fen ve teknoloji dersi mayoz ve

mitoz bölünme konusunun öğretimi üzerine yapılan bu araştırmada deney ve kontrol gruplu bir çalışma deseni oluşturulmuştur. Kontrol grubunda (129 öğrenci) geleneksel anlatım ile deney grubunda (129 öğrenci) ise animasyon ile öğretim tekniği kullanılmıştır. Araştırmada güvenilirliği 79 olan 24 soruluk bir uygulama testi kullanılmıştır. Araştırması sonucunda deney grubundaki öğrencilerin başarılarında ve hatırlama tutma düzeylerinde olumlu bir etki olduğu ortaya konmuştur.

Kolomuç (2009)' un 11. sınıf öğrencileri ile yaptığı doktora çalışmasında kimya dersinde animasyon destekli öğretimi konu almıştır. Araştırmada amaç, Kimyasal Reaksiyonların Hızları ünitesindeki alternatif kavramları belirlemek, 5E modeli doğrultusunda animasyon destekli öğretimin öğrenci başarısına etkisini geleneksel öğretim yöntemi ile karşılaştırmaktır. Kolomuç, gerçekleştirdiği altı hafta süren bu deneysel çalışma sonunda son test ve gecikmiş testlerde deney ve kontrol grupları arasında deney grubu lehine anlamlı farklılık olduğunu ortaya koymuştur. Araştırmada ayrıca kullanılan animasyonların hem öğrencilerin alternatif kavramlarını değiştirdiği hem de kalıcı yeni bilgiler kazanmalarını sağladığı belirtilmiştir.

Lise düzeyindeki gerçekleştirilen başka bir çalışma Bülbul (2009) 'ün fizik dersi için hazırlanmış animasyonların ve simülasyonların akademik başarıya ve akılda kalıcılığa etkisini incelediği tez çalışmasıdır. Adana ilinde 79 öğrenci ile gerçekleştirilen bu araştırmada 9. sınıf optik ünitesi kazanımları dikkate alınarak hazırlanan animasyonlar kullanılmıştır. Araştırmada 2 deney grubu ve 1 kontrol grubu yer almıştır. Çalışma başında ve sonunda araştırmacı tarafından geliştirilen bir başarı testi kullanılmıştır. Deney ve kontrol grupları çalışma sonunda karşılaştırıldığında, öğrencilerin akademik başarılarında anlamlı bir farklılık ortaya konulmuşken bilginin akılda kalıcılığı açısından gruplar arasında anlamlı bir fark oluşmamıştır.

İnaç (2010), ise yaptığı yüksek lisans tez çalışmasında animasyon kullanımının öğrencilerin akademik başarılarına ve akılda tutma düzeylerine etkisini incelemiştir. Araştırmanın çalışma grubunu bir özel okulda okuyan 6. ,7. ve 8. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Araştırmada fen ve teknoloji dersinde kullanılmak üzere animasyonlar hazırlanmış ve veri toplama aracı olarak her sınıf düzeyi için başarı testi geliştirilmiştir. Araştırmada öğrencilerin sınıf seviyeleri ile testten aldıkları başarı puanları arasındaki ilişkiye ve öğrencilerin aileleri ile ilgili bilgiler ile uygulama dönemine ait akademik başarıları ve öğrendiklerini akılda tutma düzeyleri arasındaki ilişkiye de bakılmıştır. Çalışma sonucunda

animasyonla öğretim yapılan deney grubu lehine öğrencilerin Fen ve Teknoloji dersine ait öğrenmeleri ve öğrendikleri bilgileri akılda tutma düzeyleri açısından anlamlı bir fark olduğu ortaya koyulmuştur. Animasyonlar kullanılarak yapılan eğitim faaliyetlerinin geleneksel yönetime göre daha başarılı olduğu kanıtlanmıştır.

Türkan (2010), çalışmasında ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin Fen Bilgisi dersinde kullanılan animasyonlarla desteklenmiş öğretim yönteminin öğrencilerin akademik başarı ve tutumuna etkisini araştırmıştır. Araştırmada 'Yaşamımızdaki Elektrik' ünitesinin öğretimi deney grubunda animasyonla desteklenen yapılandırmacı yaklaşım metoduyla kontrol grubunda ise sadece yapılandırmacı yaklaşım ile gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonucunda elde edilen verilere göre; deney grubuna uygulanan animasyonlarla desteklenmiş yapılandırmacı yaklaşımın, kontrol grubuna göre akademik başarıyı arttırmada daha etkili olduğu ortaya konmuştur. Ayrıca araştırmada deney grubu öğrencilerinin fen dersine karşı tutumları da anlamlı şekilde arttığı belirtilmiştir.

Barak ve Dori (2011), ise yaptıkları araştırmada web tabanlı animasyon filmlerinin ilköğretim programlarına entegre edilmesini değerlendirip, düşünme becerilerinin gelişiminde animasyonların etkisini belirlemişlerdir. Araştırmada, deney ve kontrol gruplu bir desen kullanılırken hem nicel hem de nitel veriler elde edilmiştir. Araştırmada deney grubundaki öğrencilere haftada bir saat animasyon izlettirilerek fen öğretimi gerçekleştirilmiş çalışma sonunda toplanan veriler doğrultusunda, animasyonların öğrencilerin bilimsel meraklarına, bilimsel dil edinimlerine ve bilimsel düşüncelerine olumlu anlamda katkı sağladığı sonucuna ulaşılmıştır.

Cinkaya'nın (2011), yazdığı tez çalışmasında fen ve teknoloji dersinde bilgisayar animasyonunun kullanımı akademik başarıya etkisi incelenmiştir. Deney ve kontrol grubu ile yürütülen bu araştırmada deney grubu öğrencilerine bilgisayar animasyonu destekli anlatım ve kontrol grubuna ise bilgisayar animasyonu desteği olmadan ders anlatımı gerçekleştirilmiştir. 6. 7. ve 8. sınıf öğrencileri ile yürütülen araştırmada Vücudumuzda Sistemler, Maddenin Yapısı ve Özellikleri, Ses Ünitesi işlenmiştir. Çalışma sonunda deney ve kontrol grupları arasındaki fark anlamlı olmasa da deney grubu öğrencilerinin başarı testi puanları kontrol grubundan daha yüksek çıkmıştır. Ayrıca araştırmacı araştırmada deney grubu öğrencilerinin ders esnasında daha dikkatli oldukları ve derse ilgilerinin arttığını belirtmiştir.

Ayvacı ve Abdüsselam'ın “Animasyon Destekli Çizgi Filmlerin Fen Öğretiminde Kavramsal Anlamaya Etkisi: 6. sınıf Kuvveti Keşfedelim Konusu Örneği” adlı çalışmalarında 5E modelinin kullanıldığı animasyon destekli öğretimi deney grubundaki öğrencilere uygulamışlardır. Çalışma sonunda deney grubundaki öğrencilerin, konuya ait soruların yer aldığı testin sonuçlarına göre, kavramsal anlama düzeylerinin kontrol grubu öğrencilerine göre anlamlı şekilde arttığı görülmüştür (Ayvacı, Abdusselem & Abdusselem, 2012).

8. sınıf öğrencilerinin fen ve teknoloji dersindeki “Canlılar ve Enerji İlişkileri” ünitesinin animasyon kullanılarak öğretiminin öğrenci başarısına etkisinin araştırıldığı çalışmada deney ve kontrol grubu yer almaktadır. Erdemir (2012), yaptığı bu çalışmada kontrol grubundaki öğrencilerle geleneksel fen öğretimi metodu ile öğretim yöntemini kullanmıştır. Çalışma sonunda deney ve kontrol grupları arasında anlamlı bir fark olduğu tespit edilmiş ve bu farkın deney grubu lehine olduğu belirtilmiştir.

Öztürk (2014), ortaöğretim düzeyinde yaptığı tez çalışmasında “hücre zarından madde geçişi konusunun uzaktan eğitimle öğretilmesinde video ve animasyon kullanımının öğrenci başarısı ile motivasyona etkisi nedir?” sorusuna cevap aramıştır. Çalışma grubu için 9. sınıfa devam eden 30 öğrenci belirlenmiştir. Bu çalışma sonucunda video ve animasyon kullanımının öğrenci başarısı üzerinde olumlu etkisinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Hassan Zadeh Baranı (2014), yapmış olduğu tez çalışmasında ortaöğretim 11. sınıf ve üniversite 2. sınıf fen bilgisi öğretmenliği bölümünde öğrenim gören öğrencilerin “modern fizik (Kuantum)” dersi öğretiminde, bilgisayar destekli öğretim yöntemlerinden animasyon kullanımının akademik başarıya etkisini araştırmıştır. Çalışma sonunda araştırmacı, uygulanan programın öğrenci başarısı üzerinde etkili olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Orhan (2019), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında animasyon kullanımının öğrenci başarısına etkisini araştırmıştır. Araştırmada 7. sınıf öğrencilerinin müzik dersi “Çalgı ve Çalgı Toplulukları” ünitesinin öğretiminde animasyon yöntemi kullanılmış ve çalışma sonunda animasyon kullanımının müzik derslerinde anlama ve kavrama düzeyinde başarıyı artırıcı nitelikte olduğu sonucuna varılmıştır.

2.9.4. Animasyon ile İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Kulik, Kulik ve Cohen (1980), tarafından bilgisayar tabanlı öğretim etkisinin araştırıldığı 59 üniversite öğrencisinin iki gruba ayrılarak animasyon ve geleneksel yöntemin kullanıldığı bir çalışma yapılmıştır. Çalışmanın sonucunda animasyon ile öğretim yönteminin geleneksel yöntemle göre daha az zaman aldığını ve daha başarılı sonuçlar elde ettiğini gözlemlemişlerdir.

Baek ve Layne (1988), bilgisayar ortamında hazırlanmış üç farklı ortamdaki hangisinde öğrenmenin daha etkili olduğunu araştırmışlardır. Ortamlardan ilkinde sadece metin, ikincisinde metin ve durağan grafik, üçüncüsünde ise metin ve animasyondan oluşmuş ders materyalleri kullanılmıştır. Ortamlar öğrenciler tarafından kontrol edilirken, çalışma sonunda çoktan seçmeli ve kısa cevaplı sorulardan oluşan bir ölçme aracı kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda, üçüncü ortamın diğer iki ortamdaki daha etkili öğrenmeler oluşturduğu ortaya konulmuştur.

Rieber (1990), ilköğretim öğrencileri ile yaptığı araştırmada fen bilgisi dersinde animasyonların kullanımının akademik başarıya etkisini araştırmıştır. Araştırmacı Texas eyalet merkezindeki ilköğretim okullarından 119 öğrenci ile gerçekleştirdiği çalışmada Newton'un hareket kanunları konusunun öğretimi üzerine çalışmasını gerçekleştirmiştir. Araştırmanın sonucunda, animasyonların kullanıldığı grubun, son test puanlarının diğer gruba göre daha yüksek olduğu gözlenmiştir (Aldağ & Sezgin, 2003).

Mayer ve Moreno (1998), yaptıkları araştırmada iki deneysel çalışma gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmalarda otomobil fren sisteminin çalışmasını ve şimşegin oluşumunu kullanarak çok ortamlı öğrenmelerinde dikkat dağılmasını araştırmışlardır. Yapılan bu araştırmada, belleğin çift taraflı çalışma tarafını test ederek, çoklu ortam öğrenmelerinde zihinsel kurama destek sağlamayı amaçlamışlardır. İlk deneysel araştırmada yer alacak kişiler, 78 kolej öğrencisinden olmak kaydıyla psikoloji bölümünün veri tabanından seçilmişlerdir ve çalışma bu kişiler üzerinden yürütülmüştür. Eş-zamanlı olarak sunulan canlandırma ve sesli anlatım gurubuna 40 öğrenci, eş-zamanlı olarak sunulan canlandırma ve düz metin gurubuna 38 öğrenci yansız olarak atanmışlardır. Uygulanacak deney için şimşegin oluşumunu anlatmak için iki farklı canlandırma uygulanmıştır. Birincisi eş-zamanlı canlandırma ve sözlü anlatım içerirken, ikincisi ise eş-zamanlı canlandırma ve düz metin içermektedir. Canlandırmaların içeriği aynıdır. Öğrencilerin başarı oranlarını değerlendirmek için

öğrenme değerleri göz önünde bulundurulmuştur. Bu doğrultuda hatırlama-eşleştirme-transfer testi kullanılmıştır. Araştırma sonucunda ulaşılan bilgilere göre canlandırma ve sözlü anlatım gurubunun hatırlama, eşleştirme ve transfer testi puanlarının, canlandırma ve düz metin gurubunun puanlarına göre anlamlı düzeyde farklılaştığı gözlemlenmiştir.

Lin, Chen ve Dwyer (2006)' in Bilgisayar Destekli Animasyonlar ve Statik Görüntülerin Etkilerini inceledikleri çalışmalarında 58 öğrenciden oluşan bir çalışma grubunu iki gruba ayırmışlardır. Son test ve tekrar testi uygulanarak animasyonların gruplar etkilerinin incelendiği çalışma sonucunda animasyonun İngilizce eğitimi üzerinde olumlu etkilerinin olduğunu gözlemlemiş ve bu konudaki görüşlerini ortaya koymuşlardır (Lin & diğerleri, 2006).

Garcia, Quiros, Santos, Gonzalez ve Fernanz (2007), 55 mühendislik öğrencisi ile gerçekleştirilen çalışmalarında, geometrinin en önemli konularının öğrenciler tarafından etkileşimli animasyonlarla işlenmesinin öğrencilerin öğrenme sürecini hızlandırdığını ifade etmişlerdir. Araştırmada kullanılan Macromedia Flash uygulamasının çok küçük vektörel grafik dosyalarının oluşturulmasına izin verdiği ve ağa bağlı herhangi bir kullanıcıya dosya aktarılmasının kolay olduğu belirtilmiştir (Garcia ve diğerleri, 2007).

BÖLÜM III

YÖNTEM

Çalışmanın bu bölümünde araştırmanın modeli, evren ve örneklem, verilerin toplanması, analizi ve yorumlanmasında kullanılan yöntem ve teknikler açıklanmaktadır.

3.1. Araştırmanın Modeli

Yapılan bu araştırmada bilgisayar destekli animasyonlarla ispat materyalleri geliştirmek ve bu materyallerin ortaokul 7. sınıf öğrencilerinde ispat süreçlerini incelemek amaçlanmıştır. Bu sebeple öğretim sürecinin bu doğrultuda gerçekleştirilmesi, etkinliklerin uygulanmasından sonra eksik yönler varsa tespit edilerek yeniden düzenlenmesi ve öğrencilerin ispat öğretiminde etkinliklere ilişkin öğrenme süreçlerini bir bütün olarak ortaya konulması amacıyla bu araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmış olup Tasarı Araştırmasıyla desenlenmiştir. Tasarı araştırmaları yaratıcı öğrenme ortamlarının geliştirilmesi, uygulanması ve sürdürülmesine yardımcı olan araştırmalardır (Design Based Research Collective, 2003).

Diğer araştırma yöntemlerinin yetersiz kaldığı durumlarda kullanılmak üzere ortaya çıkan tasarım tabanlı araştırma yönteminin getirdiği yenilikler; öğretme-öğrenme ile ilgili kuramların somutlaştırılmasına, kuram, tasarım ve uygulama arasındaki ilişkinin anlaşılmasına yardımcı olur. Tasarım, genel olarak bir planlama ve geliştirme sürecidir. Tasarım tabanlı araştırma yöntemindeki tasarım ifadesi ise, öğretme-öğrenme konularında yeni ortamların veya yeni kuramların planlanması ve geliştirilmesidir.

Tasarım tabanlı araştırmanın etkili şekilde kullanılabileceği durumlardan biri e-öğrenme materyallerinin ve ortamlarının geliştirildiği deneysel araştırmalardır. E-öğrenme ortamının

oluşturulması bir tasarım ve bu tasarımı geliştirme sürecini içermektedir. Tasarım tabanlı araştırmanın en önemli özelliklerinden biri olan yeni bir öğrenme ortamı, yeni bir eğitim uygulaması, yeni bir kuram üretimi e-öğrenme ortamlarının geliştirilmesi ile örtüşmektedir.

Günümüzde yapılan çoğu e-öğrenme araştırmalarında bir e-öğrenme ortamı tasarlanır, geliştirilir ve etkililik durumu incelenir. Bu araştırmaların çoğunda araştırmacılar geliştirdikleri e-öğrenme ortamının kalitesini sorgulamazlar.

Örneğin; bir e-öğrenme ortamı araştırmasında genellikle dersi işleyen eğitmenin etkisinin çok ve az olduğu iki ayrı e-öğrenme materyali hazırlanır. Ardından bu materyaller öğrencilere deneysel araştırma yöntemi ile uygulanır ve hangisinin daha etkili olduğu incelenir. Bu deneysel araştırmalarda çoğunlukla geliştirilen e-öğrenme ortamının tasarım ve geliştirme süreçleri sorgulanmaz. Ancak tasarım tabanlı araştırma yöntemini kullanan bir araştırmacı, deneysel karşılaştırmalar yapmak yerine, e-öğrenme ortamlarında araştırma boyunca karşılaşılan tasarım sorunlarına odaklanır. Tasarım tabanlı araştırmalarda araştırmacı, kullanıcı kontrolünün öğrenmeyi nasıl etkilediği konusunda çalışma esnasında tasarımda değişiklikler yaparak öğrenmenin en iyi şekilde gerçekleştiği durumu bulmaya çalışır. Verilen örnekler düşünüldüğünde bu araştırmada tasarım tabanlı araştırmanın çalışmaya ve çalışma sonuçlarına daha çok katkı sağlayacağı söylenebilir. Araştırmada amaç ispat öğretimi için bilgisayar destekli animasyonlar kullanılarak hazırlanan ders materyalleri ile yapılan etkinliklerde öğrenmenin en iyi şekilde gerçekleştiği durumu bulmaya çalışmaktır.

3.1.1. Tasarım Tabanlı Araştırma Nedir?

Tasarım, kuram ve uygulama üçlüsünün etkileşimini bir üst noktaya taşımak için ortaya çıkan tasarım tabanlı araştırma; kuramsal temele dayanan eğitim tasarımlarının biçimlendirici olarak araştırılmasıdır (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003; Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004). Tasarım tabanlı araştırma ilk olarak Brown (1992) ve Collins (1992) tarafından tasarım deneyleri adıyla ortaya çıkmıştır. Tasarım deneyleri; keşfetme, açıklama, doğrulama ve yayma süreçleri ile araştırmacının öğretme-öğrenme etkinliklerine aktif katılımının sağlandığı bir araştırma yöntemidir (Kelly, 2003).

Tasarım tabanlı araştırma döngüsel olarak yapılan analiz, tasarım, geliştirme ve uygulama süreçlerinin araştırmacılar ve katılımcılar ile gerçek uygulama ortamında yapıldığı, tasarım

ilkelerinin ve kuramlarının geliştirilmesine yönelik sistematik ve esnek bir araştırma yöntemidir (Wang & Hannafin, 2005).

Tasarım tabanlı araştırma için alanyazında farklı isimlendirmeler kullanılmıştır. Farklı isimlerle ifade edilen bu yöntemler birbirlerine çok benzemekle birlikte küçük farklılıklar göstermektedir. Bu yöntemlerle özet şeklindeki bilgiler Tablo 5’te yer almaktadır.

Tablo 5

Tasarım Tabanlı Araştırmanın Türevleri

Tasarım Tabanlı Araştırmanın Türevleri	Tasarım Tabanlı Araştırmanın Türevleri
Tasarım tabanlı araştırma – Design based research (Design Based Research Collective, 2003)	Genellikle tek bir ortamda uzun süreli araştırma yapmayı gerektirir. Tasarım, karar verme, analiz ve yeniden tasarım süreçlerinin yinelenen döngüsü mevcuttur. Bağlamsal müdahaleler (interventions) yapılır. Gelişimsel süreç ve çalışmanın geçtiği özgün ortam yazıya dökülür ve sonuçlarla ilişkilendirilir. Araştırmacılar ve katılımcılar arasında işbirliği vardır. Uygulamada kullanılabilecek bilginin ortaya çıkması hedeflenir.
Tasarım deneyleri - Design experiments (Collins, 1992)	Çok sayıda yeniliğin karşılaştırılması için kullanılır. Karmaşık durumları betimleme söz konusudur. Tasarımda çok sayıda uzman yer alır. Tasarım süreci içinde sosyal etkileşim önemli bir rol oynar. Esnek tasarım düzeltmeleri ve tarafsız değerlendirmeler yapılır. Bulgulara bağlı olarak tasarımla ilgili bir profil geliştirilir.
Tasarım araştırması - Design research (Edelson, 2001)	Tasarımlar hem uygulamaların geliştirilmesini sağlar hem de araştırmacıların olayları daha iyi anlamasına yardımcı olur. Araştırma odaklılık, sistematik belgelendirme, biçimlendirici değerlendirme ve genelleme olmak üzere dör özelliği vardır. Tasarım üç tür kuram üretir: alan kuramları (domain theories), tasarım çerçeveleri, tasarım yöntemleri; bu kuramlar özel tasarım bağlamların ötesine geçmektedir.
Gelişimsel araştırma - Developmental research (Richey, Klein ve Nelson, 2003)	1. Tür gelişimsel araştırma; Belli bir ürün veya program üzerine odaklanan araştırma

	2. Tür gelişimsel araştırma: Araştırma sürecine odaklanan araştırma Araştırma problemin tanımlanması ve ilgili alanyazının gözden geçirilmesiyle başlar. 1. ve 2. tür gelişimsel araştırmaların farklı bölümlerinde farklı katılımcı gruplar mevcuttur. Araştırma odak noktasına göre çeşitli biçimlerde veriler toplanır. Değerlendirme, gözlem, doküman analizi, derinlemesine görüşme, uzman görüşü, durum çalışması ve anket gibi çok sayıda araştırma yöntemi kullanılır. Verilerin analizi, sentezi betimsel veri gösterimleri ile nicel-nitel veri analizlerini kapsar. 1. tür olan gelişimsel araştırmanın raporları uzundur, bu raporlar çeşitli kaynaklarda yayınlanabilir; web siteleri büyük miktardaki veri setini yayınlamak için kullanışlı olabilir.
Biçimlendirici araştırma - Formative research (Reigeluth ve Frick, 1999)	Durum çalışmasından biçimlendirici araştırmaya geçiş yapılır. Öğretim sistemlerini geliştirmek ve eğitimde tasarım kuramları geliştirmek ve test etmek için kullanılır. Geçerlilik yerine etkililik, verimlilik, çekicilik gibi terimlerle ifade edilen tercih edilebilirlik daha önemlidir. Tasarımlanmış durum çalışmaları ve doğal durum çalışmaları olmak üzere iki türü vardır.

Kuzu, A., Çankaya, S. ve Mısırlı, Z. A. (2011). Tasarım tabanlı araştırma ve öğrenme ortamlarının tasarımı ve geliştirilmesinde kullanımı. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, 1(1), 19-35.

Collins ve diğerleri (2004)'e göre, tasarım tabanlı araştırma “tasarıma odaklanmak ve kritik tasarım unsurlarının değerlendirilmesi” öğelerini bir araya getirerek eğitimsel gelişimi arttırmaktadır.

Tasarım tabanlı araştırma birliği (Design Based Research Collective, 2003), iyi bir tasarım tabanlı araştırmanın beş özelliğini belirlemiştir.

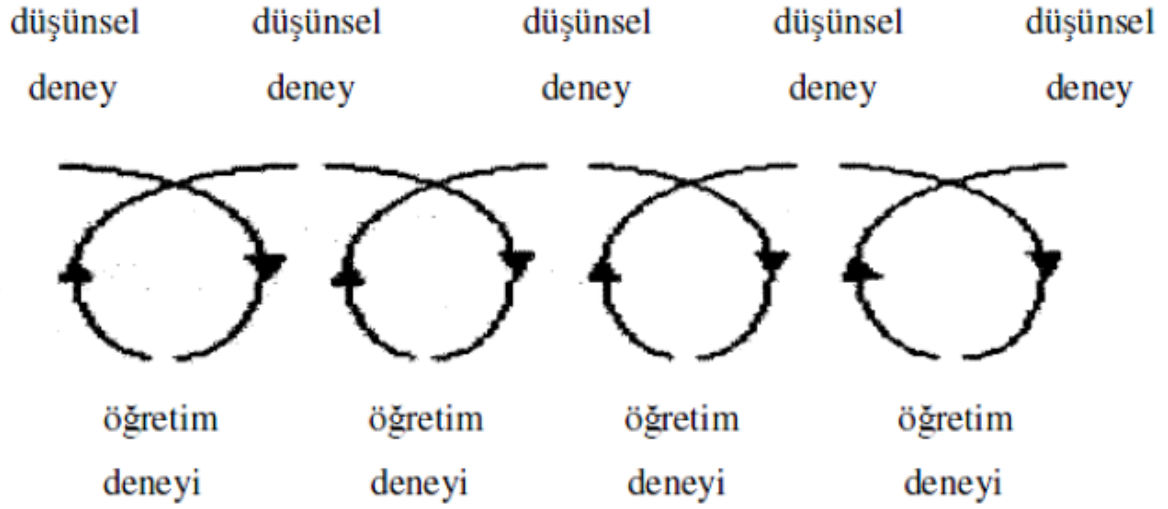
1. Öğrenme ortamları tasarlamak ve öğrenme kuramları geliştirmek için ortaya konan amaçlar birbirleri ile ilişkilidir.
2. Geliştirme ve araştırma süreci boyunca tasarım, karar alma, analiz ve tekrar tasarım evreleri döngüsel olarak tekrar etmektedir.
3. Araştırmalar, diğer uygulayıcılar ya da tasarımcılar ile sonuçları paylaşır,

4. Araştırmada, tasarımın doğal ortamda nasıl uygulandığı değerlendirilir. Sadece başarıya ya da başarısızlığa odaklanılmaz, ortamda gerçekleşen öğrenme ile ilgili etkileşimler üzerine de odaklanılır.
5. Araştırmada süreci belgelendirmeye ve sonuçlarla ilişkilendirebilmeye yarayan yöntemler tercih edilir.

Tasarım tabanlı araştırma yöntemi ile üç farklı türde tasarım yapmak ve ürün geliştirmek mümkündür (Design Based Research Collective, 2003).

- Yenilikçi öğrenme ortamlarının geliştirilmesi,
- Yeni sınıf uygulamalarının geliştirilmesi,
- Yeni öğrenme kuramlarının geliştirilmesi.

Tasarı araştırmalarında tasarlama, yeniden tasarlama ve öğretim etkinliklerinin test edilmesi şeklinde döngüler yer almaktadır (Gravemeijer & Cobb, 2006). Tasarı araştırmasının ilk döngüsünde bulunan düşünsel deney sürecinde, öğretim sürecinin nasıl ilerleyeceği, öğrencilerin süreçte nasıl tepki verecekleri, öğrencilerin anladıkları ve anlamakta zorlandıkları noktalarla ilgili tahminler bulunmaktadır (Akkaya, 2010). Öğretimsel deney sürecinde ise düşünsel deney sürecinde kullanılan etkinliklerle öğrencilerin öğrenme hedeflerinin kaçına ulaşıldığının belirlenmesi amaçlanmaktadır. Etkinlikler uygulandıktan sonra eksik noktalar tespit edilerek, öğretim planları yeniden düzenlenebilir. Eksikliklere göre düzenlenmiş öğretim planları tekrar uygulanır (Akkaya, 2010; Gravemeijer & Cobb, 2006). Tasarı araştırmalarında bulunan bu mikro döngüsel süreci Şekil 4'te verilmiştir.

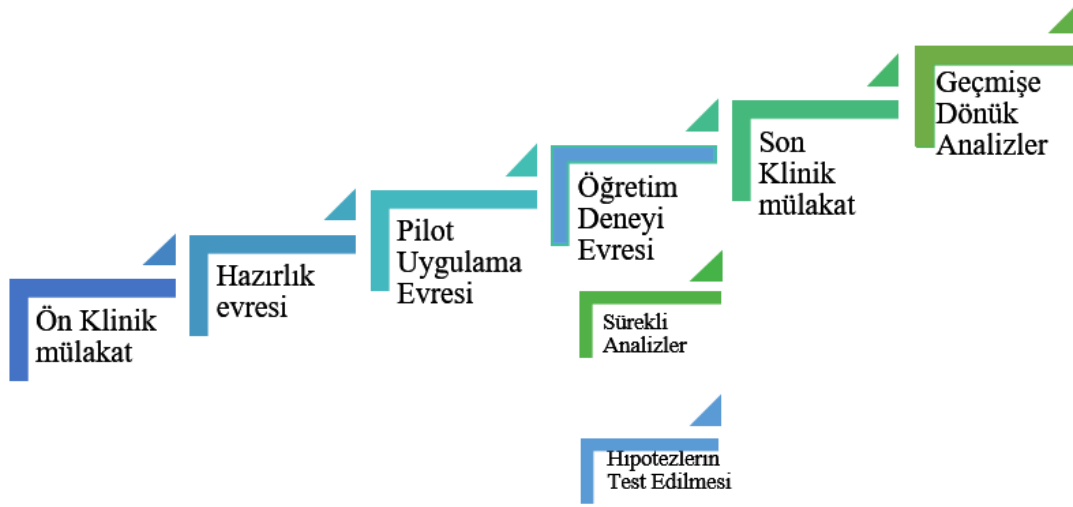


Şekil 4. Tasarı araştırmalarında mikro döngüsel süreç. Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. J. Van Den Akker, K. Gravemeijer ve N. Nieveen (Ed.), Educational design research içinde (s.17-51). London: Routledge.

Tasarı araştırmalarının makro döngüsü ise;

1. Hazırlık evresi (preliminary design phase),
2. Öğretim deneyi evresi (teaching experiment phase)
3. Geçmişe dönük analizler evresi (retrospective analysis phase) olmak üzere üç aşamalıdır (Gravemeijer, 1994; Bakker, 2004).

Tasarı araştırmasına göre desenlenmiş bir araştırma modelinin aşamaları Şekil 5'te verilmiştir.



Şekil 5. Araştırma modelinin aşamaları

Tasarım tabanlı araştırma, uygulamadaki bir tasarımın işleyişini iyileştirmeyi amaçlamaktadır. Araştırma ilerledikçe uygulamadaki işleyişi iyileştirmek için tasarımda gerekli değişiklikler yapılır. Tasarımdaki bir öge çalışmadığında, bunun nedeni analiz edilmelidir. Böylece tasarımın çalışmayan ögesi düzeltilerek yeniden geliştirilir ve tekrar uygulanır. Benzer şekilde tasarım ögesinde yapılan düzeltmelerden sonra ögelerin uygulamada çalışıp çalışmadığı tekrar test edilir. Tasarım ögelerinin düzgün çalıştığı sonucuna ulaşılan kadar aynı tasarım ögesinde düzeltmeler yapılmaya devam edilir. Sonuç tasarımının belgelendirmesinin yanında süreçte yaşanan başarısızlıklar ve yapılan tüm düzeltmeler mutlaka belgelendirilmelidir. Araştırmanın raporunda tasarımın detaylı şekilde açıklanması, verilen kararların inanılabilirliğine katkı sağlayacaktır.

3.1.2. E-öğrenme Ortamlarının Geliştirilmesi Sürecinde Tasarım Tabanlı Araştırma

Günümüzde bilgi ve iletişim teknolojilerinde kısa zamanda çok fazla değişim yaşanmakta ve bu teknolojiler bireyler tarafından yoğun kullanılmaktadır. Bu doğrultuda, eğitim ve öğretimin bu tür platformlara entegrasyonu ve etkili kullanımı için fazlasıyla çaba gösterilmekte ve birçok çalışma yapılmaktadır. Bunun sonucunda e-öğrenme olgusuna ihtiyaç oluşturulmuştur. Son zamanlarda E-öğrenme ortamlarının dizaynı ve etkin halde kullanımı ile ilgili birçok yayın bulunmaktadır. Fakat bu alanda çalışılan çok sayıda

araştırmalara rağmen, uygulamada hala eksiklerin olduğu ve bu araştırmaların uygulama açısından katkı sağlamadığı aşikardır. Talebeler ve öğretmenler tarafından etkin olarak kullanılmamakla beraber yaygınlaştırılması gerekmektedir (Wang & Hannafin, 2005).

Hannafin ve diğerleri (1997)'e göre tasarlanan e-öğrenme platformlarının birçoğu uygun olmayan temellere dayandırılmaktadır. Bu bakış açısı göz önünde bulundurulduğunda bu araştırma yönteminin e-öğrenme platformlarını geliştirmedeki etkinliği açıkça fark edilmektedir. Tasarım tabanlı araştırma bilginin ulaşılır hale gelmesine, geliştirilmesine ve sürdürülebilir olmasına olanak yaratmaktadır (Design Based Research Collective, 2003).

Tasarım tabanlı araştırma yenilikçi bir tasarım yaklaşımı ve katılımcılarla işbirliği gibi birden fazla yönüyle e-öğrenme platformlarına ait tasarım ölçütlerinin bünyesinde barındırmaktadır. Tasarım tabanlı araştırmalar farklı uzmanlık gerektiren alanlarda bireyleri toplayabilme ve hedefine uygun olarak çeşitli araştırma yöntemlerinden faydalanabilme potansiyeli sayesinde e-öğrenme ortamlarının geliştirilmesi bakımından umut verici bir yaklaşımdır. Tasarım tabanlı araştırma yöntemlerini etkin halde kullanan araştırmacıların çalışmaları bu araştırma yönteminin öğrenmeye olan katkılarını açıkça ortaya koymaktadır (Barab & Squire, 2004; Kelly, 2003; Sandoval & Bell, 2004).

3.1.3. Klinik Mülakatlar (Clinical Interview)

Klinik mülakat, ilk kez Piaget tarafından psikolojik araştırmalar için kullanılmıştır. Öğrencilerin düşüncelerindeki zenginliği keşfetmek, onun temel aktivitelerini yakalamak ve zihinsel beceriyi değerlendirmek için esnek soru sorma metodu olan klinik mülakat geliştirilmiştir (Karataş & Güven, 2003).

Klinik mülakatların, araştırmalarda; problem çözme yöntemi ile öğrencilerin matematiksel davranışlarını gözlemlene ve gözlemlerden öğrencilerin matematiksel anlamalarını, bilgi yapılarını, zihinsel ve duyuşsal değişiklikleri hakkında sonuçlar çıkarmak gibi amaçları bulunmaktadır (Goldin 1998).

Bu amaçların yanında öğretim programlarında yapılan değişikliklerde de klinik mülakatlar ölçme ve değerlendirme aracı olarak da kullanılmaktadır (Goldin, 1998). Matematik eğitiminde klinik mülakatların amacı, öğrencilerin stratejilerini, bilgi yapılarını veya becerilerini karakterize etmek ve belirli bir öğretimin etkililiğini araştırmak, gelişim sürecini daha iyi anlamaktır (Karataş & Güven, 2003).

Matematiksel bir becerinin değerlendirilmesi üç temel ögeyi içermektedir; motivasyon, sübjektif eşitlik ve inanç boyutu. Araştırmacı bir beceriyi değerlendirirken;

a) öğrencinin görevi yaparken motive edilip edilmediği,

b) öğrencinin problemi anlayıp anlamadığı,

c) öğrencilerin verdikleri cevapların tutarlı olup olmadığı hakkında bilgi sahibi olması gerekmektedir (Ginsburg, 1981).

Klinik mülakatların esnek olma özelliği sayesinde araştırmacı, öğrenci ile bire bir görüşmeler esnasında öğrencinin motivasyonunu sağlayabilir. Standart testler bu imkânı sağlamamaktadır. Sübjektif eşitliğin sağlanabilmesi için soruların temel özellikleri öğrenciler tarafından aynı anlamı taşımalıdır. Standart testlerde bir soru farklı kültürdeki bireyler tarafından farklı yorumlanabilir. Klinik mülakatlar sayesinde bu sorulara yeniden düzenleme getirilebilir. Öğrenci cevaplarının tutarlılığı ise, öğrenci cevabına karşı bir görüş söyleyerek öğrenci tepkisinin ölçülmesi ile sağlanabilir. Öğrenci verdiği ilk cevabını değiştirirse ilk cevabı dikkate almayabiliriz. Tutarlı olmayan cevaplar öğrencilerin bilgi ve becerilerini yanlış değerlendirmemize neden olabilir.

Bu araştırmada öğrencilerin ispat ve ispat yapma hususunda varolan bilgilerinin belirlemesi ve öğretim süreci sonucunda bu beceriyi nasıl gerçekleştirdiklerini açığa çıkarılması amacıyla klinik mülakatlar yapılmıştır.

Araştırmada asıl uygulamanın yapıldığı sınıftaki 15 öğrenci ile tek tek öğretim öncesinde ve öğretim sonrasında klinik mülakatlar uygulanmıştır. Klinik mülakatlar esnasında öğrencilere araştırmacı tarafından belirlenen “İspat Etme Klinik mülakat Soruları” sorulmuştur. Bu kapsamda öğrencilerin;

- Bölünebilme Kurallarını İspat Etme
- Üçgenin İç Açılarının Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme
- İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme
- Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme
- Çokgenlerin iç açı toplamı formülünü ispat etme
- Ardışık sayıların toplam formülünü ispat etme
- Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme
- Dairenin Alan Formülünü İspat Etme

- Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme
- Üçgenin alan formülünü ispat etmeleri ile ilgili öğrenmelerinin belirlenmesi amaçlanmıştır.

Araştırmada bulunan öğrencilerle uygulanan klinik mülakatlar, basılı halde verilen soruların cevabına ilişkin notlar da ses kayıt altına alınmıştır. Ön klinik mülakatlar bir öğrenciyle yaklaşık 30 dakika, son klinik mülakatlar ise yaklaşık 40 dakika sürmüştür. Öğrencilerle gerçekleştirilen klinik mülakatlar süresince sesli düşünme stratejisi (think aloud) kullanılmış ve öğrencilerin düşündüklerini sesli olarak belirtmeleri sağlanmıştır (Van Someren, Barnard & Sandberg, 1994).

3.1.4. Hazırlık Evresi (Preliminary Design Phase)

Hazırlık evresinde yapılan literatür incelemesi sonucunda Türkiye’de ispat öğretiminde animasyonların kullanıldığı bir çalışma olmadığı görülmüştür.

Bu kapsamda ortaokul öğretim müfredatı tüm sınıf düzeylerinde incelenmiş ve ortaokul seviyesinde ispatı yapılabilecek konular, kazanımlar ve kurallar belirlenmiştir. Bu belirlemenin ardında bu kazanımları içeren araştırmacı tarafından hazırlanmış 10 adet uygulama testi yapılmıştır. Bu testlerin amacı ispat animasyonu için seçilen konuların gerekliliğini kanıtlamaktır.

Tablo 6

Üslü Sayılar Uygulama Testi

Soru konusu	Soru Sayısı	Doğru Yapılma Yüzdesi(%)
Sıfırcı kuvvet	3	30,6
Sıfır hariç diğer tam sayı kuvvetleri	7	81,2

Tablo 6’da verilen uygulama testinde 10 sorudan 3’ü sıfırcı kuvvetle ilgilidir. Öğrencilerin diğer soruları doğru cevaplama yüzdeleri çok yüksekken, sıfırcı kuvvet sorularını doğru cevaplama oranları oldukça düşüktür. Bu sebeple Sıfırcı Kuvvet animasyonunun çalışmaya alınmasına karar verilmiştir.

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

$4^1=$ %90

6) $1236^0=$ %28

$3^2=$ %79

7) $5^3=$ %73

$5^0=$ %27

8) $5^1=$ %87

$10^3=$ %74

9) $2^3=$ %80

$1^7=$ %74

10) $1^0=$ %37

11) Sıfır hariç sayıların sıfırcı kuvveti'ya eşittir, çünkü?

Şekil 6. Üslü sayılar mini uygulama testi sonuçları

Şekil 6'da verilen uygulama testinde 10 sorudan 3'ü sıfırcı kuvvetle ilgilidir. Öğrencilerin diğer soruları doğru cevaplama yüzdeleri çok yüksekken, sıfırcı kuvvet sorularını doğru cevaplama oranları oldukça düşüktür. Bu sebeple Sıfırcı Kuvvet animasyonunun çalışmaya alınmasına karar verilmiştir.

1. Yarıçapı 6 cm olan bir dairenin alanını bulunuz. ($\pi = 3$ alınız)

Doğru yapılma oranı %37

2. Çapı 8 cm olan bir dairenin çevresini bulunuz. ($\pi = 3$ alınız)

Doğru yapılma oranı %32

3. Alanı 48 cm^2 olan bir dairenin çevresi kaç cm'dir? ($\pi = 3$ alınız)

Doğru yapılma oranı %24

Şekil 7. Dairenin alanı ve çevresi uygulama testi

Şekil 7'de verilen uygulama testinde dairenin alanı ve çevresi ile ilgili soruların doğru yapılma oranları %50'nin altındadır. Cevaplar incelendiğinde alan formülü ile çevre formülünün karıştırıldığı, alan formülü yerine $2\pi r^2$ yazıldığı görülmüştür. Bu sebeple Dairede Alan animasyonunun çalışmaya alınmasına karar verilmiştir.

Animasyon konularına bu şekilde karar verildikten sonra hazırlık aşamasının diğer iki bölümüne geçilmiştir. Bunlar;

- Varsayıma dayalı öğrenme rotasının geliştirilmesi
- Öğretim etkinliklerinin geliştirilmesi

Tablo 7

Dairede Alan Uygulama Testi Sonuçları

Soru konusu	Doğru Yapılma Yüzdesi(%)	Yanlış cevaplar içindeki alan ve çevre formülünün karıştırılma yüzdesi(%)
Dairenin Alanı	34,3	65,6
Dairenin Çevresi	36,5	64,2

Tablo 7’de verilen uygulama testinde dairenin alanı ve çevresi ile ilgili soruların doğru yapılma oranları %50’nin altındadır. Yanlış cevaplar incelendiğinde öğrencilerin yaklaşık %65’inin alan ve çevre formüllerini karıştırdıkları görülmüştür. Bu sebeple Dairede Alan animasyonunun çalışmaya alınmasına karar verilmiştir.

Animasyon konularına bu şekilde karar verildikten sonra hazırlık evresinin diğer iki bölümüne geçilmiştir. Bunlar;

- Varsayımlara bağlı öğrenme güzergahının geliştirilmesi
- Öğretim etkinliklerinin geliştirilmesi

3.1.4.1. Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahının Geliştirilmesi
(Hypothetical Learning Trajectory)

Bu araştırmada, öğretim programımız incelenmiş ve ispatına yer verilmeyen konular ve kurallar olduğu görülmüştür. Bu bağlamda bu kurallardan öğrenci seviyelerine uygun ispatlar belirlenmiş, animasyonlar hazırlanmış ve ders içi etkinlikler planlanmıştır. Etkinliklerin ve animasyonların geliştirilmesi evresinde varsayımlara bağlı Öğrenme güzergahı oluşturulmuş ve Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo 8

Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahı Amaçları

Temalar	Öğrenme Amaçları
Sayılar ve İşlemler öğrenme alanı ispatları	Bölünebilme Kurallarını İspat Etme İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme Zıt işaretli sayılarının çarpımının negatif olduğunu ispat etme Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme
Geometri ve ölçme öğrenme alanı ispatları	Üçgenin İç Açılar Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme Çokgenin İç Aç Formülünü ispat etme Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme Üçgenin alan formülünü ispat etmeleri ile ilgili öğrenmelerinin belirlenmesi amaçlanmıştır
Cebir Öğrenme Alanı İspatları	Toplam formülünü ispat etme
İspat Algısı	Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama

Seçilen ispat konuları kapsamı ortaokul öğretim programı kazanımları dikkate alınarak belirlenmiştir.

3.1.4.2. Öğretim Etkinliklerinin Tasarlanması

Hazırlık evresinde bulunan diğer bölüm öğretim etkinliklerinin planlanmasıdır. Varsayımlara bağlı öğrenme güzergahı ve öğretim etkinliklerinin geliştirilmesi ile ilişkilidir. Geliştirilen etkinlikler öğretim deneyi evresinde yeniden düzenlenebilir.

Öğrencilerin zihinsel süreçlerinin ortaya konmasının amaçlandığı bu etkinliklerde kullanılacak materyaller tasarlanma evresinde düzenlenir (Baker, Doorman & Drijvers, 2003).

Animasyonlar dışında hazırlanan bu 11 öğretim etkinliği, animasyondan önce ve animasyondan sonra uygulanmıştır. Hazırlanan etkinlik örnekleri bulgular ve yorum kısmında detaylı şekilde anlatılmıştır.

3.1.5. Pilot Çalışma Evresi

Araştırmalarda yapılan pilot uygulamaların amacı, geliştirilen tasarımın nasıl çalıştığını test etmektir. İkinci amacı ise öğretim deneyi evresinde uygulanacak tasarımın ayrıntılı bir şekilde düzenlenmesini sağlamaktır.

Bu amaçla 4 ispat animasyonu kullanılarak bir pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma her hafta 2 ders saati olmak üzere 4 hafta sürmüştür. Pilot uygulama süreci video kaydına alınmıştır. Video kayıtları ve ders etkinlikleri (çalışma yaprakları) incelendiğinde animasyon sahneleri geçişlerinin hızlı olduğu görülmüştür. Süreç ile ilgili şu düzenlemelerin yapılmasına karar verilmiştir;

- Animasyonların geçiş hızları azaltılmalı
- Etkinlikler için daha fazla zaman ayrılmalıdır.

Animasyon ve etkinliklerdeki düzenlemeler 6 uzmanın görüşü alınarak yapılmıştır. Uzmanlardan ikisi kıdemleri 17 yıl ve 8 yıl olan ilköğretim matematik öğretmeni, ikisi bilgisayar ve öğretim teknolojileri anabilim dalı öğretim üyesi, diğer ikisi ise ilköğretim matematik anabilim dalı öğretim üyesidir. İki matematik öğretmenin hazırlanan etkinlikler ve animasyonlarla ilgili görüşleri EK 7’de verilmiştir.

3.1.6. Öğretim Deneyi Evresi

Öğretim etkinliklerinin sınıfta hayata geçirilmesi ile araştırmacının öngörülleri ve elde edilen verilerin örtüşüp örtüşmediği görülür. Öğretim deneyi evresi ile araştırma sorularına cevaplar bulunur.

Araştırmada 10 haftalık bir öğretim deneyi süreci gerçekleşmiştir. Bu süreçte araştırmacı her hafta için bir uygulama planı hazırlamıştır. Her hafta uygulama sonrasında ses kayıtları, video kayıtlar ve etkinlikler incelenmiştir.

10 haftalık uygulama süreci, kullanılan animasyonlar ve etkinlik adları Tablo 9’da görülmektedir.

Tablo 9

Uygulama Takvimi

Tarih	Etkinlik ve Animasyon Konusu
7 Şubat 2017	Tam Sayılarda Çarpma İşlemi
14 Şubat 2017	Tam Sayılarda Çarpma İşlemi
21 Şubat 2017	Toplam Formülü
28 Şubat 2017	Bölünebilme Kuralları
7 Mart 2017	0. Kuvvet
21 Mart 2017	Üçgenin Alanı
28 Mart 2017	Paralelkenar ve Yamuğun Alanı
4 Nisan 2017	Dairenin Alanı
11 Nisan 2017	Çokgende İç Açı Toplamı Formülü
18 Nisan 2017	Üçgenin İç Açıları Toplamı

Yapılan pilot uygulamada varsayımlara bağlı öğrenme güzergahında hedeflenen varsayımlara ulaşıldığı için etkinlik ve animasyonlarda köklü değişikliklere gidilmemiştir.

3.1.7. Geçmişe Dönük Analizler

Tasarım deneylerinin sonuçları standart biçimde kullanılan ön test – son test sonuçları ile değerlendirilemez, çünkü önerilen yeni tasarı teorisinin uygulaması sınıfta denenenden farklı olacaktır (Gravemeijer, 2004). Araştırmacı tarafından belirlenen varsayımlar detaylı olarak incelenir, düzenlenir ve tasarımın tümüyle değerlendirilir (Edelson, 2002). Tasarı araştırmaları bu analizler ile öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini anlamayı mümkün kılmaktadır. Elde edilen veriler araştırmacılara teorinin başka sınıf ortamlarına nasıl uygulanacağına dair fikir verir.

Öğretim deneyleri evresinde elde edilen çalışmalar, gözlem notları, video ve ses kayıtları analiz edilir. Bu araştırmada, veriler analiz edilmiş, Varsayımlara bağlı Öğrenme güzergahı ile öğrencilerin öğrendikleri karşılaştırılmıştır.

3.2. Çalışma Grubu

Yapılan bu araştırmada 7. Sınıfta okuyan öğrencilerin matematiksel ispat yapabilme durumuna ilişkin ön bilgi düzeylerinin belirlenmesi ve öğretim süreci bitiminde 7. Sınıf öğrencilerinin bu konudaki anlamlandırmalarının açığa çıkarılması sebebi ile gerçekleştirilen, klinik mülakatlar içinde kullanılan “İspat Çalışması Klinik mülakat Sorularının”, 7. Sınıf öğrencilerinin bilgi düzeylerini açığa çıkarmada ne kadar fayda sağladığının saptanması ve araştırma kapsamında oluşturulan animasyonların ve etkilerinin kabul edilebilirliğinin ve gerçek durumlarda ne şekilde hayata geçirebildiğinin açığa çıkarılması amacıyla yapılan pilot uygulama için çalışma grubu oluşturulmuştur. Araştırmanın ön uygulaması niteliğinde olan ispat öğretimine katılım sağlayacak öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemlerinden tipik durum örnekleme yöntemine göre belirlenmiştir. Amaçlı örnekleme yöntemi, çeşitli ve doğru bilgiye sahip olduğu varsayılan durumların irdeleyerek çalışılmasına olanak sağlayan olayların keşfedilmesinde fayda sağlayan bir örnekleme yöntemidir (Patton’dan aktaran Yıldırım & Şimşek, 2008).

Yeni bir çalışma ya da bir yeniliği tanıtmak istediğimiz durumlardan bir veya birden fazlası seçilerek uygulanan, genelleme yapmayıp, ortalama durumlarda uygulanarak bir konu hakkında bilgi sahibi olamaya ve bu alan konusunda yetersiz bilgi düzeyinde olanları eğitmek ya da bilgilendirmek amacı ile yapılan araştırmalara tipik durum örnekleme yöntemi denmektedir (Yıldırım & Şimşek, 2008). Bu kapsamda araştırmaların örnek uygulamalarının çoğaltılması için Ankara merkez ilçe okullarından bir devlet okulunun seçilmesine karar verilmiştir. Bu okulunun seçilme sebebi; öğrenci ve öğretmen düzeyleri kent ortalamalarına yakın olması, sosyo-ekonomik açıdan orta düzeyde olması ve öğrenci başarısı açısından da kent ortalamasında olmasıdır. Bu kriterlerin belirlenmesinde Yenimahalle İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü’ne bağlı rehberlik Araştırma Merkezinden bilgi alınmıştır. Araştırma için belirlenen bu okulda ise yine okul içerisindeki ortalama değerlerde olan sınıflar belirlenmiş olup 6 farklı 7. Sınıflar içerisinde ortalama başarıya en yakın sınıf seçilmiştir. Örnek uygulamaya seçilen öğrencilerin cinsiyet dağılımları Tablo 10’ da verilmiştir.

Tablo 10

Pilot Uygulama Öğrenci Cinsiyetleri

Cinsiyet	f	%
Kızlar	12	46
Erkekler	14	54
Toplam	26	100

Tablo 10’ da gözüktüğü üzere, örnek çalışmaya katılan öğrenciler 12 kız ve 14 erkek olmak üzere 26 kişiden oluşmaktadır.

Çalışmanın öğretim kısmında bulunan öğrenciler, amaçlı örnekleme yöntemlerinden olan tipik durum örnekleme yöntemine göre seçilmişlerdir. Bu kapsamda araştırmanın öğretim deneyi basamağının hayata geçirilmesinde pilot uygulamadaki değerler dikkate alınarak sosyo-ekonomik düzey açısından orta seviyede olan, öğrenci başarı düzeyi bakımından da orta seviyede olan, Ankara’nın merkezinde bulunan bir devlet okulunda uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Araştırmayı yürüten kişi aynı okulda öğretmen olarak görev yapmaktadır. Veli izni ve gönüllülük esas alınarak yapılan öğretim deneyi Salı günleri mevcut okul ders saatleri dışında olacak şekilde uygulanmıştır. Tablo 11’de Araştırmanın öğretim deneyi kısmında bulunan öğrencilerin cinsiyetleri hakkında açıklamalara yer verilmiştir.

Tablo 11

Araştırmanın Öğretim Deneyi kısmında bulunan Öğrencilerin Cinsiyet Dağılımları

Cinsiyet	f	%
Kız	8	53
Erkek	7	47
Toplam	15	100

3.3. Veri Toplama Araçları

3.3.1. İspat Çalışması Klinik Mülakat Soruları

Araştırmayı yürüten kişi, araştırmada bulunan öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini etkin bir şekilde takip edebildiği için, klinik mülakatlarda kullanılacak soruların

planlanması ve hazırlanmasını gerçekleştirecek olup, bu evre, değerlendirilecek olan öğrenme sürecinin temel unsurlarından biri olarak belirlenmiştir. Belirlenen soruların özellikleri şunlardır (Hunting, 1997);

Açık uçlu olarak tasarlanan sorular öğrencilerin düşündüklerini rahatlıkla ifade edebilmeleri için konulmuştur.

Tartışma veya konuşma olasılıkları çoğaltılmış olup düşünsel sürecin ifade edilebilme yüzdesi arttırılmıştır.

Klinik mülakat Soruları, Araştırmayı uygulayan kişi ve araştırmada bulunan öğrencilerin kendi düşünsel süreçlerini yansıtmalarına olanak sağlamıştır.

Uygulanacak Klinik mülakat Soruları, araştırmaya katılan öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini rahatlıkla ortaya koyacakları, öğrencilerde dikkat uyandıracak şekilde hazırlanması gerekmektedir. Bu kapsamda araştırmayı uygulayan kişinin etkinliği çok önemlidir. Araştırmayı uygulayan, araştırmada bulunan öğrencilere; çeşitli sorular yönelterek öğrencilerin matematiksel düşünce süreçlerini açığa çıkarabilmesi gerekmektedir (Hunting, 1997).

Bu süreç göz önünde bulundurularak klinik mülakatlar gerçekleştirilmesi uygun görülmüş ve bu klinik mülakatlarla, araştırmaya katılan öğrencilerin ispat yapma olgusunda ön bilgilerinin belirlenip değerlendirilmesi ve öğretim süresi sonunda bu konuda anlamlandırmalarının açığa çıkarılması, ispat yapma becerileri ve gelişimlerinin gözlemlenmesi planlanmıştır.

Klinik mülakat sorularının ölçmeye çalıştığı ispat becerileri şu şekilde dağılım göstermiştir;

Bölünebilme Kurallarını İspat Etme (3 soru)

Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme (1 soru)

İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme (1 soru)

Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme (1 soru)

Çokgenlerin iç açı toplamı formülünü ispat etme (1 soru)

Ardışık sayıların toplam formülünü ispat etme (2 soru)

Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme (1 soru)

Dairenin Alan Formülünü İspat Etme(1 soru)

Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme (4 soru)

Üçgenin alan formülünü ispat etmeleri ile (1 soru)

İspat algısı (2 soru)

18 sorudan oluşan bu görüşme soruları alan uzmanları tarafından incelenmiştir. Uzmanlardan ikisi kıdemleri 17 yıl ve 8 yıl olan ilköğretim matematik öğretmeni, ikisi bilgisayar ve öğretim teknolojileri anabilim dalı öğretim üyesi, diğer ikisi ise ilköğretim matematik anabilim dalı öğretim üyesidir.

İnceleme sonucunda ispat algısına yönelik hazırlanan sorular çoktan seçmeli hale getirilmiştir, fakat yapılacak seçimin nedeninin açıklaması istenmiştir.

Yapılan araştırmada, araştırmaya katılan öğrencilerle birebir olarak yapılan klinik görüşmelerin sonuçlandırılması için Hunting (1997) tarafında belirtilen, araştırmaya katılan öğrencilerle birebir yapılacak olan klinik mülakatların doğru sonuç verebilmesi için 35-50 dk. arasında olması gerektiği unsuru göz önünde bulundurulmuştur. Araştırmada uygulanan mülakatların ortalama 40 dakika sürdüğü görülmüştür.

Klinik mülakat sorularının tamamı EK 1’de verilmiştir. Görüşme sorularının puanlanması için dereceli puanlama anahtarları her soru için hazırlanmıştır. Tüm açık uçlu sorulara ait dereceli puanlama anahtarları EK 2’de verilmiştir.

3.3.2. Tasarı Araştırması Uygulama Süreci Veri Toplama Araçları

Araştırmada, araştırmaya katılan öğrenci notları, araştırmayı uygulayan öğretmenin notları, ve video kayıt analizleri kullanılarak, öğrencilerin ispat öğretimi sonucunda gelişmeleri ve bu gelişim süreçleri izlenmiş ve değerlendirilmiştir. Bu kapsamda nitel çalışmaların güvenilirliği açısından önemli bir yere sahip olan üçleme metodu uygulanmıştır (Bogdan & Biklen, 2006; Guion, 2002). Bryman (2003)’ e göre, problem durumlarının araştırılmasında bulguların güvenilirliğini oluşturmak için birden çok yaklaşımın kullanılmasına üçleme metodu denmektedir. Araştırmacılar dört farklı üçleme çeşidi olduğu belirtmişlerdir. Bunlar; veri çeşitlemesi, araştırmacı çeşitlemesi, yöntemsel çeşitleme ve teori çeşitlemesidir (Guion, 2002; Bryman, 2003). Yaptığımız araştırmada veri çeşitlemesi kullanılmıştır. Bu kapsamda

yaptığımız araştırmada nitel veri toplama araçlarından olan video kayıt, görüşme ve gözlem çeşitleri kullanılmış olup bunların analizlerinin incelenmesi gerçekleştirilmiştir.

3.3.2.1. Öğrenci Notları

Araştırmada kullanılan Öğrenci notları, öğretim deneylerinde bulunan ve öğretim sürecine bulunan tüm öğrencilerin, ispat yapma süreçlerine ilişkin tüm etkinliklerde yaptıkları çalışmaları ve çözümleri kapsamaktadır.

3.3.2.2. Araştırmacı Notları

Araştırmacı notları, araştırmayı yapan kişinin araştırmayı uygulamaya başlamadan önce belirlediği hipotezlerin, öğrencilerin gelişim süreçlerini takip edilmesini ve öğrenme ortamında gerçekleşen etkileşimin izlenmesi amacıyla oluşturulmuş notlardır.

3.3.2.3. Video Kayıtları

Yapılan araştırmada, araştırmaya katılan öğrencilerin gelişimleri ve gelişim süreçlerini değerlendirmek için öğretim deneyleri ve grup tartışmalarında video kayıtları yapılmıştır. Yapılan bu kayıtlar her evre sonunda izlenmiş ve daha sonra değerlendirmek için elektronik ortama aktarılmıştır. Araştırmaya başlamadan önce belirlenmiş temalar ya da araştırma esnasında oluşturulmuş temalar altında kodlama yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Gerçekleştirilen analizler ve değerlendirmelerin ardından uygulamada aktif görev alan öğretmen ile bir araya gelinerek etkinliklerin güçlü ve zayıf tarafları açığa çıkarılmış ve değerlendirilmesi yapılmıştır.

3.4. Verilerin Çözümlemesi ve Yorumlanması

Araştırma kapsamında gerçekleştirilen, ispat yapma becerileri ve gelişimlerinin gözlemlenmesi amacı ile öğrencilerle birebir yapılan klinik mülakatların analizinde içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Araştırmalarda toplanan verileri açıklayarak kavramlara ve ilişkilere ulaşmayı hedefleyen nitel veri analiz yöntemlerinden biri olan içerik analizi, araştırmalarda toplanan verilerin çok iyi irdelenmesini gerektirmektedir. Bu doğrultuda

içerik analizinin kullanımı ile veriler tanımlanmakta ve veriler içinde gözden kaçmış olabilecek gerçekler belirlenen kavram ve temalar çerçevesinde ortaya çıkarılmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2008).

Yapılan araştırma kapsamında uygulanan klinik mülakatlar sonucunda elde verilerin analiz edilmesi dört evrede gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda ilk olarak, “İspat Çalışması Görüşme Soruları” içerisinde bulunan 19 soru tarzının her biri için veriler belirlenip kodlanmıştır. Veriler kodlanırken araştırmanın nitel boyutunda bulunan, veri toplama araçlarından elde edilen bilgiler incelenmiş ve anlamlı bölümler içerisine kodlar verilerek yerleştirilmiş ve soru türlerinden oluşan her bölüm için kod listeleri oluşturulmuştur. Bu kodlama yapılırken Strauss ve Corbin (1990), tarafından ifade edilen üç kodlama türünden daha önceden belirlenmiş kavramlara göre yapılan kodlama türü benimsenmiştir (Akt: Yıldırım & Şimşek, 2008). Her bölüm için kod listeleri oluşturulduktan sonra veriler bu kodlara göre düzenlenmiş ve tanımlanmıştır. Son olarak, ayrıntılı bir şekilde tanımlanan ve sunulan bulgular tablolar, tabloların yorumları ve öğrencilerin klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar şeklinde yorumlanmıştır.

Yapılan araştırma kapsamında öğretim deneyleri bölümlerinde oluşturulan hipotezler test edilmiş ve belirlenen hipotez öğrencinin bilgilerini yapılandırmasında etkili değilse veya yeterli bulunmadıysa yeni hipotezler belirlenmiştir. Bir öğretim deneyinde, birden fazla öğretme bölümüne yer verilebilir. Bu öğretme bölümlerinde belirlenen hipotezler değerlendirilir ve yapılan değerlendirmeler sonucunda eksiklikler giderilir. Bu değerlendirmeler sonucunda yeni hipotezler oluşturularak bir sonraki öğretme bölümüne geçilir (Steffe & Thompson, 2000). Araştırmacı tarafından belirlenen hipotezler, öğrencilerin cevaplarına bağlı olarak çıkartılır veya düzeltilerek yeni hipotezler oluşturulur.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde, 7.sınıf öğrencilerine animasyonla ispat öğretiminin incelenmesi için öğretim öncesi ve sonrası öğrencilerle gerçekleştirilen klinik mülakatlara, tasarı araştırması sürecinde bulunan hazırlık evresi, pilot çalışma, öğretim deneyi evresi ve geçmişe dönük analizlere ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

4.1. Klinik Mülakatlar

Bu araştırmada öğrencilerin ispat ve ispat yapma konusunda ön bilgilerinin belirlenmesi ve öğretim süreci sonunda ispat yapmaya ilişkin zihinsel süreçlerinin ortaya konulması amacıyla klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir.

Klinik mülakatlardan elde edilen verileri değerlendirmek için kazanımların ait oldukları öğrenme alanlarına göre temalar oluşturulmuştur. Bu temalar “Sayılar ve İşlemler öğrenme alanı ispatları”, “Geometri ve Ölçme öğrenme alanı ispatları”, “Cebir öğrenme alanı ispatları” ve “İspat Algısı” olarak belirlenmiştir. Ön- Son klinik mülakatlara ait temalar; bu temalara ait alt temalar ve bu temaların kodlarına bu bölümde yer verilmiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar Waring’in 2000 yılında ilköğretim öğrencileri ile yaptığı araştırmada ortaya koyduğu ispat düzeylerine göre kodlanmıştır.

Bu ispat düzeyleri;

İspat düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir);

İspat düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler),

İspat düzeyi 2 (Bu düzeyde öğrenciler, ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler. Ayrıca, öğrenciler genel bir örnek kullanmanın ispatı şekillendirdiğini düşünmektedirler),

İspat düzeyi 3 (Bu düzeydeki öğrenciler, bir ispatı tek başlarına oluşturamazlar ancak belli bir zorluktaki ispatın çözümünü anlayabilirler),

İspat düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler)

İspat düzeyi 5 (Bu düzeydeki öğrenciler, bazı formal ispatları ve yeni karşılaştıkları ispatları oluşturabilirler).

Bu araştırmada öğrencilere animasyonlarda öğretilen ispatlarla ilgili bir süreç gerçekleştiğinden İspat Düzeyi 5'e ulaşan öğrenci bulunmamaktadır.

4.1.1. Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Temasına İlişkin Zihinsel Süreçleri

Öğrencilerle gerçekleştirilen ön-son klinik mülakatlarda “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait her öğrenciye 5 soru sorulmuştur.

“Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan alt temalar şöyledir;

- Bölünebilme kurallarını ispat etme
- İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme
- Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme
- Sıfır hariç sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme

Oluşturulan 4 alt temaya ait öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar ayrıntılı biçimde incelenerek her bir alt temaya ait kodlar oluşturulmuştur. Öğrencilerin verdikleri cevaplara göre ispat düzeyleri belirlenmiştir. Bu bulgular tablolarda ayrıntılı biçimde verilmiştir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “Bölünebilme kurallarını ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 12’de verilmiştir.

Tablo 12

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Bölünebilme Kurallarını İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları	Bölünebilme kurallarını ispat etme	Bu bir kuraldır ve ispat edilemez- İspat Düzeyi 0	Sayıları çözümleyerek ispatı yapma-İspat Düzeyi 4
		Tek bir örnek vererek ispat etme-İspat Düzeyi 1	Gösterilen ispatlardan hangisinin doğru ispat olduğunu belirtenler-İspat Düzeyi 3

Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Temasında bulunan “Bölünebilme kurallarını ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans tablosu Tablo 13’te verilmiştir.

Tablo 13

Bölünebilme Kurallarını İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Ön Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
“Bu bir kuraldır ve ispat edilemez” yargısına varma	0	13	86,6	Ö2,Ö3,Ö4,Ö5,Ö6,Ö8,Ö9,Ö10 Ö11,Ö12,Ö13,Ö14,Ö15
Tek bir örnek vererek ispat etmeye çalışma	1	2	13,4	Ö1, Ö7

Öğrencilerin bölünebilme kurallarını ispat etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde Tablo 13’te görüldüğü gibi öğrencilerin. Bu cevaplar ise Waring’in ispat düzeylerine göre İspat Düzeyi 0 ve İspat Düzeyi 1 olarak nitelendirilmektedir. Bu bulgular doğrultusunda bölünebilme kurallarını ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Sinem: Soruyu okudum, bence 3 ile bölünebilme kuralı ispat edilemez.

Öğretmen: Neden böyle düşünüyorsun?

Sinem: Çünkü bunlar kurallardır.

Öğretmen: Peki bu kurallar nasıl bulunmuşlar sence?

Sinem: Bütün sayılara bakılmıştır, hepsinde doğru olduğu görülünce kural olmuştur.

Sinem ve öğretmeni arasında geçen bu diyalog öğrencinin bu alt temaya ilişkin ispat düzeyinin 0 olduğunu göstermektedir.

Bölünebilme kuralını tek bir örnekle ispatladığını düşünen öğrenci ile görüşme diyalogu ise şöyledir;

Murat: (Soruyu okur)İspatlayabilirim.

Öğretmen: Nasıl peki?

Murat: Mesela 36 sayısı, 3 ile 6'yı topladığımda 9 oluyor. Bu da 3'ün katı. 36'da 3'e bölünüyor.

Öğretmen: Peki bir tane örnek vermen yeterli oldu mu?

Murat: Evet oldu, çünkü doğru çıkıyor.

Murat ve öğretmeni arasında geçen bu diyalog öğrencinin bu alt temaya ilişkin ispat düzeyinin 1 olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Temasında bulunan “Bölünebilme kurallarını ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans tablosu Tablo 14’te verilmiştir.

Tablo 14

Bölünebilme Kurallarını İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Son Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Sayıları çözümleyerek ispat yapanlar	4	11	73,3	Ö1,Ö2,Ö4,Ö5,Ö6,Ö8,Ö11, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15
Gösterilen ispatlardan hangisinin doğru ispat olduğunu belirtenler geçerli açıklama yapmayanlar	3	4	26,7	Ö3, Ö7, Ö9, Ö10

Öğrencilerin bölünebilme kurallarını ispat etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin 3 ile bölünebilme kuralını ispat ettikleri, verilen 3 ispat arasından 4 ile bölünme kuralının doğru yapılmış ispatını seçebildikleri, 2 ile bölünebilme kuralını ispat ettikleri görülmüştür. Bu bulgular doğrultusunda 3 ile bölünebilme kuralının ispatını yapan bir öğrenci ile yapılan görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Sinem: (Soruyu okur)Bunu ispatlayabilirim.

Öğretmen: Peki nasıl, gösterebilir misin?

Sinem: İki basamaklı bir AB sayısı seçelim.

Öğretmen: Neden bir sayı vermek yerine AB harflerini tercih ettin, Sinem?

Sinem: Çünkü öğretmenim tek bir sayı verse idim ispat yapmış olmazdım.

Öğretmen: Peki AB kısmından devam edebilirsin.

Sinem: Şimdi bu sayıyı çözümleyelim. $10A$ ve B , $10A$ 'yı 3'e bölünecek şekilde $9A$ ve A şeklinde ayıralım.

Öğretmen: Peki neden yaptın bunu.

Sinem: Çünkü 3'e bölünmeyen kısmı bulmama gerekiyor.

Öğretmen: peki çok güzel, sonra ne yapacaksın?

Sinem: $9A$ 3'e tam bölündüğü için geri kalan sayılara bakacağım. Geri kalanlar A ve B . Eğer bu sayıların toplamı 3'ün katı ise AB sayısı da 3'e bölünebilir.

Sinem ile öğretmeni arasında öğretim süreci sonrasında geçen bu diyalog öğrencinin alt temaya ilişkin ispat düzeyinin 4 olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 15’te verilmiştir.

Tablo 15

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Teması “İki Negatif Tam Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları	İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme	Bu ispat edilecek bir kural değildir.- İspat Düzeyi 0 Çünkü düşmanımın düşmanı benim dostumdur- İspat Düzeyi 0 İki sayının başındaki eksiler çarpım durumunda artı olur- İspat Düzeyi 0 Bu kuralı kullanıyorum ama ispatlayamam- İspat Düzeyi 0 Birkaç örnek verir- İspat Düzeyi 1	Örüntü ile ispat etme- İspat Düzeyi 3 Örüntüden genellemeye varanlar- İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait “İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans tablosu Talo 16’da verilmiştir.

Tablo 16

İki Negatif Tam Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Ön Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
“Bu ispat edilecek bir kural değildir”	0	3	20	Ö13,Ö14,Ö15
Çünkü düşmanımın düşmanı benim dostumdur	0	4	26,7	Ö3,Ö4 Ö6,Ö10
Bu kuralı kullanıyorum ama ispatlayamam	0	2	13,3	Ö8, Ö9
İki sayının başındaki eksiler çarpım durumunda artı olur	0	3	20	Ö2, Ö5, Ö12
Birkaç örnek verir	1	3	20	Ö1, Ö7, Ö11

Öğrencilerin İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin tümünün bu kuralı ispat edemedikleri görülmüştür. Tüm öğrencilerin cevapları Waring’in ispat düzeylerine göre İspat Düzeyi 0 olarak nitelendirilmektedir. Bu bulgular doğrultusunda İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Cesur: Öğretmenin ama bu ispat edilmez ki?

Öğretmen: Peki bu kural nasıl bulunmuş o zaman? Kim bulmuş?

Cesur: Bize bunu Düşmanımın düşmanı benim düşmanımdır diye öğrettiler. Sanırım o yüzden pozitif oluyor.

Cesur ile öğretmeni arasında geçen diyalog neticesinde Cesur’un verdiği cevap İspat Düzeyi 0 olarak belirlenmiştir.

Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait “İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans tablosu Talo 17’de verilmiştir.

Tablo 17

İki Negatif Tam Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Son Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Örüntü kullanarak ispat edenler	3	10	66,6	Ö2,Ö3,Ö4,Ö6,Ö9,Ö10 Ö11,Ö13,Ö14,Ö15
Örüntüden genellemeye varanlar	4	5	33,4	Ö1, Ö5, Ö7, Ö8, Ö12

Öğrencilerin İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin bu kuralı örüntü ile ispat ettikleri görülmüştür. Bu bulgular doğrultusunda bu kuralın ispatını yapan bir öğrenci ile yapılan görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Sinem: Öğretmenim bunu bir örüntü kurarak ispatlayabilirim.

Öğretmen: Nasıl peki?

Sinem: Biri pozitif diğeri negatif iki tane küçük sayı seçerim.

Öğretmen: Neden Küçük sayılar seçiyorsun?

Sinem: Çünkü büyük sayılar seçersem örüntü çok uzar.

Öğretmen: peki devam et.

Sinem: Örneğin seçtiğim sayılar -3 ve +4 olsun. Bunların çarpımı -12. Sonra +4'ü birer birer azaltıp -3 ile çarpmaya devam ederim. En son sayılarım -3 ve 0 olur. Bu işlemin sonucu 0'dır. Sıra -3 ile -1'e geldiğinde sonuçlar arasındaki ilişkiyi ortaya koyarım. (Kâğıda tüm sonuçları yazarak sonuçların üçer üçer arttığını gösterir).

Öğretmen: Peki bu durumda -3 ile -1'in çarpımı ne oluyor.

Sinem: Öğretmenin sonuçlar hep 3'er 3'er artmış. O yüzden son işlemin sonucu olan 0'a 3 ekleyince sonuç 3 oluyor.

Sinem ile öğretmeni arasında geçen bu diyalog Sinem'in cevabının İspat Düzeyi 3 olduğunu göstermektedir

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 18’de verilmiştir.

Tablo 18

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Zıt İşaretli Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları	Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme	Bu ispat edilecek bir kural değildir.- İspat Düzeyi 0 Çünkü düşmanımın dostu benim düşmanımdır.- İspat Düzeyi 0 Çünkü bir artı ile bir eksi eksi eder- İspat Düzeyi 0 Birkaç örnek verenler- İspat Düzeyi 1	Örüntü ile ispat etme- İspat Düzeyi 3 Örüntüden genellemeye varanlar- İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans tablosu Tablo 19’da verilmiştir.

Tablo 19

Zıt İşaretli Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Ön Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
“Bu ispat edilecek bir kural değildir”	0	5	33,4	Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö9
Çünkü düşmanımın düşmanı benim düşmanımdır.	0	4	26,6	Ö1, Ö7, Ö10, Ö11

Çünkü bir artı ile bir eksi eksi eder	0	3	20	Ö3, Ö8, Ö12
Birkaç örnek verenler	1	3	20	Ö13,Ö14,Ö15

Öğrencilerin Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin tümünün bu kuralı ispat edemedikleri görülmüştür. Tüm öğrencilerin cevapları Waring’ın ispat düzeylerine göre İspat Düzeyi 0 olarak nitelendirilmektedir. Bu bulgular doğrultusunda Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Aycan: (Soruyu okur) Öğretmenim bunlar kurallardır ve ispatlanmazlar, çünkü öyledir.

Öğretmen: Peki Aycan, sence bu kuralları kimler koydu?

Aycan: Matematikçiler öğretmenim.

Öğretmen: Peki herkes bunları nasıl kabul etti?

Aycan: Çünkü öğretmenim bunlar her sayı için doğru çıkıyor.

Aycan ve öğretmeni arasında geçen bu diyalog öğrencide bir ispat kavramının oluşmadığını ve öğrenci ispat düzeyinin 0 olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans tablosu Tablo 20’de verilmiştir.

Tablo 20

Zıt İşaretli Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Son Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Örüntü kullanarak kuralı ispat edenler	3	10	66,6	Ö2,Ö3,Ö4,Ö6,Ö9,Ö10 Ö11,Ö13,Ö14,Ö15
Örüntüden genellemeye varanlar	4	5	33,4	Ö1, Ö5, Ö7, Ö8, Ö12

Öğrencilerin Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin bu kuralı örüntü ile ispat ettikleri görülmüştür. Bu bulgular doğrultusunda bu kuralın ispatını yapan bir öğrenci ile yapılan görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Murat: (Öğrenci soruyu sessizce okur) Öğretmenim bunu izlediğimiz animasyonlardan öğrenmiştim.

Öğretmen: Peki gösterebilir misin?

Murat: tabi öğretmenim. Şimdi iki tane sayı seçelim. İkisi de pozitif olan. Sonra sayılardan birini eksi olana kadar küçültelim. Ve sonuçları alt alta yazalım.(Öğrenci kâğıda +2 ile +3'ün çarpımını yazar.)

Öğretmen: Peki sonra Murat?

Murat: Öğretmenim sonra +3'ü birer birer azaltacağım.(Kâğıda +2 ile +2'nin çarpımını, +2 ile +1'in çarpımını, +2 ile 0'in çarpımını yazar.)

Öğretmen: +2 ile 0'in çarpımından sonra ne yazacaksın?

Murat: Öğretmenim 0'ı 1 azaltıp -1 yazacağım. Şimdi +2 ile -1'in sonucunu işlemlerin sonuçlarına bakarak bulacağım.(İşlemlerin sonuçları arasında 2'şer 2'şer azalma olduğunu gösterir.)

Öğretmen: (Başını sallayarak öğrenciyi onaylar).

Murat: Öğretmenim son işlemin sonucu 0'dı. 0'dan 2'yi çıkarınca sonuç -2 oluyor.

Öğretmeni ile Murat arasında geçen bu diyalog Murat'ın ispat düzeyinin 3 olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “Sıfır hariç sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 21’de verilmiştir.

Tablo 21

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Sıfır Hariç Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları	Sıfır hariç sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme	Sıfırcı kuvvetin bir olmasının sebebi sıfırın bir değeri olmamasındandır-İspat Düzeyi 0 Bu kuralı çok iyi biliyorum ama ispatlayamam-İspat Düzeyi 0 Bir örnek vererek bir olduğunu belirtenler-İspat Düzeyi 1	Örüntü ile ispat etme-İspat Düzeyi 3 Örüntünün sonunda cebirsel bir çıkarımda bulunarak ispat etme-İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Sıfır hariç sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımı Tablo 22’de verilmiştir.

Tablo 22

Sıfır Hariç Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Ön Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Sıfırcı kuvvetin bir olmasının sebebi sıfırın bir değeri olmamasındandır.	0	7	46,6	Ö3, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö11, Ö13
Bu kuralı çok iyi biliyorum ama ispatlayamam	0	5	33,3	Ö2, Ö4, Ö9, Ö12, Ö15
Bir örnek vererek bir olduğunu belirtenler	1	3	20	Ö1, Ö10, Ö14

Öğrencilerin Sıfır hariç sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin tümünün bu kuralı ispat edemedikleri görülmüştür. Tüm öğrencilerin cevapları Waring'in ispat düzeylerine göre İspat Düzeyi 0 ya da 1 olarak nitelendirilmektedir. Öğrencilerin bir kısmı kuralı bildiklerini fakat ispat edemeyeceklerini belirtirken, bir kısmı da bir örnek vererek soruyu cevaplamıştır. Bu bulgular doğrultusunda Sıfır hariç sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğunu ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Burak: (Soruyu okur)(Uzun süre bekler)

Öğretmen: Burak soru hakkında ne düşünüyorsun?

Burak: Öğretmenim böyle şeyler ispatlanmaz ki.

Öğretmen: Neden peki?

Burak: Öğretmenim bunları defterlerimize kural diye yazarız, sonra da soruları o kurala göre çözeriz.

Burak ve öğretmeni arasında geçen bu diyalog Burak'ın ispat kavramından uzak olduğunu göstermektedir. Bu sebeple verdiği cevap İspat Düzeyi 0 ile nitelendirilir.

Öğretim süreci öncesinde başka bir öğrenciye ait görüşme diyalogu ise şöyledir:

Aycan: (Soruyu okur) Öğretmenim hemen ispatlarım.

Öğretmen: Nasıl Aycan?

Aycan: (Kâğıda 2^0 yazar) Öğretmenim bunun sonucu 1'dir.

Öğretmen: Sence bu ispat yapmak için yeterli bir açıklama mıdır?

Aycan: Öğretmenim ama sonuç doğru çıkıyor. İspat yapmış oldum bence.

Aycan ile öğretmen arasında geçen diyalog öğrencinin bir örnek vererek ispat yaptığını düşündüğünü göstermektedir. Bu cevap İspat düzeyi 1 olarak nitelendirilmektedir.

Öğrencilerin “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Sıfır hariç sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımı Tablo 23'te verilmiştir.

Tablo 23

Sıfır Hariç Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Son Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Örüntü ile ispat etme	3	4	26,7	Ö3, Ö4, Ö7, Ö10
Örüntünün sonunda cebirsel bir çıkarımda bulunarak ispat etme	4	11	73,3	Ö1, Ö2, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9, Ö11, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15

Öğrencilerin Sıfır hariç sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin bu kuralı örüntü ile ispat ettikleri görülmüştür. Bu bulgular doğrultusunda bu kuralın ispatını yapan bir öğrenci ile yapılan görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

İsmail: (Soruyu okur) Öğretmenim bunun için örüntü kullanmalıyım.

Öğretmen: Nasıl bir örüntü?

İsmail: Örneğin 3^4 'ten başlayabilirim. (Sonucunu kâğıda 81 olarak yazar).

Öğretmen: Peki sonra?

İsmail: Sonra 3^3 'ü, 3^2 'yi, 3^1 'in sonuçlarını bulup alt alta yazarım. En son 3^0 'a gelince sonuçlar arasındaki ilişkiye bakarım.

Öğretmen: Nasıl bir ilişki var peki?

İsmail: Öğretmenim her adımda sonuç 3'e bölünüyor. Yani en son adım 3 bölü 3'ten 1 oluyor. Böylece 3^0 'ın sonucu 1 çıkıyor.

İsmail ile öğretmeni arasında geçen diyalogdan öğrencinin ispat düzeyinin 3 olduğu anlaşılmaktadır.

4.1.2. Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına İlişkin Zihinsel süreçleri

Öğrencilerle gerçekleştirilen ön-son klinik mülakatlarda “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait her öğrenciye 5 soru sorulmuştur.

“Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan alt temalar şöyledir;

- Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme
- Çokgenin İç Açısı Formülünü ispat etme
- Dairenin Alan Formülünü İspat Etme
- Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme
- Üçgenin alan formülünü ispat etme

Oluşturulan 5 alt temaya ait öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar ayrıntılı biçimde incelenerek her bir alt temaya ait kodlar oluşturulmuştur. Öğrencilerin verdikleri cevaplar İspat düzeyleri belirlenmiştir. Bu bulgular tablolarda ayrıntılı biçimde verilmiştir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 24’te verilmiştir.

Tablo 24

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 Olduğunu İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları	Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme	Eşkenar bir üçgen çizip, toplamın 180^0 olduğunu gösterir- İspat Düzeyi 0 Açıların her biri 60^0 ’dir ifadesini yazanlar.-İspat Düzeyi 0 Üçgeni ikiye bir yükseklikle bölüp iki 90^0 ’yi toplar- İspat Düzeyi 0 Kuralı biliyorum fakat bunu ispatlayamam- İspat Düzeyi 0 Birkaç örnek verenler-İspat Düzeyi 1	Paralel doğrularla tek bir örnek ile ispat etme- İspat Düzeyi 3 Paralel doğruları kullanarak ispat etme- İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° olduğunu ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımları Tablo 25’te verilmiştir.

Tablo 25

Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Ön Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Eşkenar bir üçgen çizip, toplamın 180° olduğunu gösterir	0	2	13,4	Ö3, Ö7
Açıların her biri 60° ’dir ifadesini yazanlar	0	1	6,6	Ö11
Üçgeni ikiye bir yükseklikle bölüp iki 90° ’yi toplar	0	3	20	Ö2, Ö5, Ö9
Kuralı biliyorum fakat bunu ispatlayamam	0	1	6,6	Ö12
Birkaç örnek verenler	1	8	53,4	Ö1, Ö4, Ö6, Ö8, Ö10, Ö13, Ö14, Ö15

Öğrencilerin Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° olduğunu ispat etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde öğrencilerin İspat Düzeylerinin 0 olduğu görülmüştür. Öğrencilerin çoğu bu soruya eşkenar bir üçgen çizip, toplamın 180° olduğunu ispatlamaya çalışmışlardır. Bu bulgular doğrultusunda Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° olduğunu ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Burak: (Soruyu okur) Öğretmenim bunu ispatlayabilirim.

Öğretmen: Yap bakalım.

Burak: (Kâğıda bir eşkenar üçgen çizer, açılarına 60° yazar) Öğretmenim bu üç açığı toplayınca 180° olur.

Öğretmen: Peki şimdi ispatlamış mı oldun?

Burak: Evet öğretmenim, çünkü bu bütün üçgenlerde geçerlidir.

Öğretmen: Peki eşkenar olmayan üçgenlerde durumu nasıl açıklarsın?

Burak: Öğretmenim onlar için de aynı şekilde ispat yaparım. Değerleri yazarak toplarım.

Burak ve öğretmeni arasında geçen bu diyalog Burak'ın bu kuralı ispatlayamadığını göstermektedir. Bu sebeple verdiği cevap İspat Düzeyi 0 ile nitelendirilir.

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° olduğunu ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımları Tablo 26’da verilmiştir.

Tablo 26

Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Son Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Paralel doğrularla tek bir örnekle ispat etme	3	5	66,6	Ö3, Ö4, Ö8, Ö10, Ö11
Paralel doğruları kullanarak ispat etme	4	10	33,4	Ö1, Ö2, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15

Öğrencilerin Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° olduğunu ispat etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin verdikleri cevaplar İspat Düzeyi 4 ile nitelendirilmektedir. Öğrenciler paralel doğruların özelliklerini kullanarak görsel ispat yapmışlardır. Bu bulgular doğrultusunda Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° olduğunu ispat edebilen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Sinem: (Soruyu sesli şekilde okur) Öğretmenim çizerek gösterebilirim.

Öğretmen: Tabi Sinem.

Sinem: (Bir üçgen çizer) Öğretmenim açılarına a, b ve c diyelim.

Öğretmen: Tamam peki sonra.

Sinem: BC kenarına paralel, A'dan geçen bir paralel doğru çizerim. İç ters açılardan şurası b açısı olur. (b açısının iç tersine b harfini yazar)

Öğretmen: Tamam devam et.

Sinem: Aynı şekilde c açısını da yazalım. Bu köşede a, b ve c doğru açı oluşturur. (a, b, c açılarını doğru açı şeklinde gösterir.)

Öğretmen: Peki doğru açı kaç derecedir?

Sinem: 180° öğretmenim. Yani a, b ve c'nin toplamı her zaman 180° olur.

Sinem ve öğretmeni arasında geçen bu diyalog Sinem'in görsel ispat yaptığını göstermektedir. Bu sebeple verdiği cevap İspat Düzeyi 4 ile nitelendirilir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “Çokgenin İç Açısı Formülünü ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 27’de verilmiştir.

Tablo 27

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Çokgenin İç Açısı Formülünü İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları	Çokgenin İç Açısı Formülünü ispat etme	Sadece (n-2).180 kuralını yazar.- İspat Düzeyi 0 Kuralın ispatlanamayacağını yazar.- İspat Düzeyi 0 Birkaç örnek verenler.- İspat Düzeyi 1	Örüntü ile görsel ispat yapar.- İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Çokgenin İç Açısı Formülünü ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımları Tablo 28’de verilmiştir.

Tablo 28

Çokgenin İç Aç Formülünü İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Ön Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Sadece (n-2).180 kuralını yazar	0	5	33,4	Ö2, Ö7, Ö9, Ö10, Ö11
Kuralın ispatlanamayacağını yazar	0	7	46,6	Ö3, Ö5, Ö6, Ö8, Ö13, Ö14, Ö15
Birkaç örnek verenler	1	3	20	Ö1, Ö4, Ö12

Öğrencilerin Çokgenin İç Aç Formülünü ispat etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde tüm cevapların İspat Düzeyi 0 ile nitelendirildiği görülmektedir. Öğrencilerin bir kısmı sadece formülü yazıp bırakırken diğer bir kısmı kuralın ispatlanamayacağını ifade etmiştir. Bu bulgular doğrultusunda Çokgenin İç Aç Formülünü ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Aycan: (Soruyu okur) Öğretmenim bu ispat edilmez ki.

Öğretmen: Neden peki Aycan?

Aycan: Çünkü kurallar ispat edilemez.

Aycan'ın verdiği cevaplar ispat kavramının oluşmadığını göstermektedir. Öğrencinin cevabı İspat Düzeyi 0 ile nitelendirilmiştir.

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Çokgenin İç Aç Formülünü ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımları Tablo 29’da verilmiştir.

Tablo 29

Çokgenin İç Aç Formülünü İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Son Klinik Mülakatlarda Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Örüntü ile görsel ispat yapanlar	4	15	100	Tüm öğrenciler

Öğrencilerin Çokgenin İç Aç Formülünü ispat etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin animasyonlarda gösterildiği gibi örüntü ile kuralı ispat ettikleri görülmüştür. Verdikleri bu cevaplar İspat Düzeyi 4 ile nitelendirilmiştir.

Bu bulgular doğrultusunda Çokgenin İç Açı Formülünü ispat eden bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Sinem: (Soruyu okur ve hemen bir üçgen çizer)

Öğretmen: Neden üçgen çizdin Sinem?

Sinem: Öğretmenim üçgenden yola çıkarak kuralı ispatlayacağım. (Üçgenin yanına kenar sayısı, üçgen sayısı ve iç açı toplamı sütunları açar)

Öğretmen: Peki sonra ne yapacaksın?

Sinem: Öğretmenim şimdi bir kare çizeceğim. (Kareyi çizer) Sonra kareye bir noktadan köşegen çizeceğim.

Öğretmen: Peki devam et.

Sinem: Aynı şekilde bir beşgen çizip bir noktasından geçen tüm köşegenleri çizeceğim. Kenar sayısı ile çizdiğim üçgenler arasında bir ilişki var. (Sayıların arasına bir ok çizip -2 yazar)

Öğretmen: peki bu sonuç bizim işimize yarar mı?

Sinem: Evet öğretmenim. Bu demektir ki kenar sayısının 2 eksiğini 180 ile çarparsak çokgenin iç açı toplamını buluruz.

Sinem ile öğretmeni arasında geçen diyalog incelendiğinde Sinem'in verdiği cevabın İspat Düzeyi 4 ile nitelendirilir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda "Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları" temasında bulunan "Dairenin Alan Formülünü İspat Etme" alt temasına ait bulgular Tablo 30'da verilmiştir.

Tablo 30

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Dairenin Alan Formülünü İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları	Dairenin Alan Formülünü İspat Etme	Kuralın ispatlanamayacağını belirtir.- İspat Düzeyi 0 Birkaç örnek verenler- İspat Düzeyi 1	Dairenin çevre formülünden yola çıkarak üçgenin alan bağıntısı ile formülü sayısal değerle ispat edenler- İspat Düzeyi 3 Dairenin çevre formülünden yola çıkarak üçgenin alan bağıntısı ile formülü ispat eder.- İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Dairenin Alan Formülünü İspat Etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımı Tablo 31’de verilmiştir.

Tablo 31

Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Kuralın ispatlanamayacağını belirtir	0	13	86,6	Ö2,Ö3,Ö4,Ö5,Ö6,Ö7,Ö8,Ö9 Ö10,Ö12,Ö13,Ö14,Ö15
Birkaç örnek verenler	1	2	13,4	Ö1, Ö11

Öğrencilerin Dairenin Alan Formülünü İspat Etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde öğrencilerin bu formülün ispatlanamayacağını ifade ettikleri görülmüştür. Sınıftaki tüm öğrenciler bu cevabı vermişlerdir. Bu sebeple tüm öğrencilerin bu alt öğrenme alanına ait cevapları İspat Düzeyi 0 ile nitelendirilmiştir. Bu bulgular doğrultusunda Dairenin Alan Formülünü İspat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Aycan: (Soruyu okur) Öğretmenim bu bir kuraldır.

Öğretmen: Peki bu kural nereden gelmiş Aycan.

Aycan: Öğretmenim sanırım birçok daire için kullanılmış ve böyle olduğu görülünce de kural olmuş.

Öğretmen: Yani ispat etmeye gerek yok öyle mi?

Aycan: Evet öğretmenim yok.

Aycan ile öğretmeni arasında geçen bu görüşmede öğrencide bir ispat kavramının oluşmadığı görülmektedir. Bu nedenle bu cevap İspat Düzeyi 0 ile nitelendirilmektedir.

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Dairenin Alan Formülünü İspat Etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımı Tablo 32’de verilmiştir.

Tablo 32

Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Dairenin çevre formülünden yola çıkarak üçgenin alan bağıntısı ile formülü sayısal değerle ispat edenler	3	4	26,7	Ö2,Ö3,Ö6,Ö9
Dairenin çevre formülünden yola çıkarak üçgenin alan bağıntısı ile formülü ispat eder	4	11	73,3	Ö1,Ö4,Ö5,Ö7,Ö8, Ö10 Ö11,Ö12,Ö13,Ö14, Ö15

Öğrencilerin Dairenin Alan Formülünü İspat Etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin animasyonda gösterildiği gibi daireyi parçalayarak üçgen oluşturdukları ve üçgenin alan formülünü kullanarak dairenin alanını ispat ettikleri görülmüştür. Öğrencilerin öğretim sonrası İspat düzeyleri 4 olarak nitelendirilmiştir. Bu bulgular doğrultusunda Dairenin Alan Formülünü İspat edebilen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Aycan: (Soruyu okur) Öğretmenim bunun nasıl ispatlanacağını animasyonda izlemiştik.

Öğretmen: Gösterebilir misin?

Aycan: Tabi öğretmenim. (Noktalardan oluşan iç içe geçmiş çemberler çizer. EK 3'te gösterilmiştir.) Öğretmenim burada en dıştaki çemberin çevresi $C = 2\pi r$ 'dir. Ben şimdi bunlar keserek üçgen haline getireceğim. (EK 3'te çizim gösterilmiştir.)

Öğretmen: Peki şimdi ne yapacaksın?

Aycan: Öğretmenim bu oluşan üçgenin tabanı $2\pi r$ yüksekliği ise r oldu. Üçgenin alanı $\frac{2\pi r \cdot r}{2}$ ile bulunuyor. Buradaki 2'ler sadeleşince πr^2 elde ediliyor. Bu formül de dairenin alan formülü.

Aycan ile öğretmeni arasında geçen bu görüşmede öğrencinin verdiği cevap İspat Düzeyi 4 ile nitelendirilmiştir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 33’te verilmiştir.

Tablo 33

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları	Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme	Kuralların ispatlanamayacağını belirtir- İspat Düzeyi 0 Bir örnek vererek alanı bulur.- İspat Düzeyi 0	Görsel ispatı birkaç örnekle yapanlar- İspat Düzeyi 3 Görsel ispat yöntemi ile alan formüllerini ispat eder.- İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımı Tablo 34’de verilmiştir.

Tablo 34

Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Kuralların ispatlanamayacağını belirtir	0	10	66,6	Ö1,Ö5,Ö6,Ö8,Ö10,Ö11,Ö12,Ö13,Ö14,Ö15
Bir örnek vererek alanı bulur.	1	5	33,4	Ö2,Ö3,Ö4,Ö7,Ö9

Öğrencilerin Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde bir öğrencinin örnek üzerinden formülleri ispatlamaya çalıştığı, diğer öğrencilerin ise bu formüllerin

ispatlanamayacağını belirttiği görülmüştür. Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Murat: (Soruyu okur)(Bir kare çizer)

Öğretmen: Murat neden bir kare çizdin?

Murat: Öğretmenim karenin alan formülünü ispatlayacağım.

Öğretmen: Peki devam et.

Murat: Öğretmenim bu karenin bir kenarına 3 cm dersem, alanı 3x4'ten 12 cm olur.

Öğretmen: Murat karenin alanı böyle mi hesaplanıyordu?

Murat: AA pardon öğretmenim. Yanlış yaptım 3x3'ten 9 diyecektim.

Öğretmen: Peki böyle bulunacağını nereden biliyorsun?

Murat: Öğretmenim çünkü bu bir formül. Hep böyle bulunur.

Öğretmen: Peki bu formül nereden geldi, nasıl bulundu hiç düşündün mü?

Murat: Hayır öğretmenim hiç aklıma gelmedi, ama bence doğrudur.

Murat ile öğretmeni arasında geçen görüşme öğrencide ispat kavramının oluşmadığını ve verdiği cevabın İspat Düzeyi 0 olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımı Tablo 35’te verilmiştir.

Tablo 35

Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Görsel ispatı birkaç örnekle yapanlar	3	2	13,4	Ö7, Ö10
Görsel ispat yöntemi ile alan formüllerini ispat eder	4	13	86,6	Ö1,Ö2,Ö3,Ö4,Ö5,Ö6,Ö8 Ö9,Ö11,Ö12,Ö13,Ö14, Ö15

Öğrencilerin Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin izledikleri animasyonlardaki gibi ispat yapabildikleri görülmektedir. Öğrencilerin verdikleri cevaplar İspat düzeyi 4 ile nitelendirilmiştir. Bu bulgular doğrultusunda Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat edebilen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Aycan: (Soruyu okur ve bir paralelkenar çizer)

Öğretmen: Sanırım paralelkenarın alan formülünü ispat edeceksin.

Aycan: Evet öğretmenim. (Paralelkenarı bölerek iki üçgen bir dikdörtgen elde eder.)

Öğretmenim bu kenarlara harfler vereyim (EK 4'te öğrencinin çizdiği paralelkenar verilmiştir.)

Öğretmen: Peki şimdi ne yapacaksın?

Aycan: Öğretmenim şimdi bu üçgenlerin alanları ile dikdörtgenin alanını toplayacağım. (EK 4'te öğrencinin yazdığı alan bağıntıları verilmiştir.)

Öğretmen: Ama burada farklı bir formül çıktı.

Aycan: Öğretmenim şimdi bu verdiğim harfleri paralelkenarın uzun ve kısa kenarı cinsinden yazacağım. (EK 4'te öğrencinin yaptığı dönüşümler verilmiştir.)

Öğretmen: Çok güzel Aycan, aferin.

Aycan ile öğretmeni arasında geçen bu görüşme öğrencinin verdiği cevabın İspat Düzeyi 4 olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “Üçgenin alan formülünü ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 36’da verilmiştir.

Tablo 36

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları	Üçgenin alan formülünü ispat etme	Eşkenar bir üçgen çizip kenarlara ve yüksekliğe değer vererek formülü ispat eder-İspat Düzeyi 0 Kuralın ispat edilemeyeceğini ifade eder.-İspat Düzeyi 0 Birkaç örnek verenler-İspat Düzeyi 1	Dikdörtgenden yararlanarak üçgenin alanını bir sayısal değer üzerinden ispatlayanlar-İspat Düzeyi 3 Dikdörtgenden yararlanarak üçgenin alanını ispat eder-İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Üçgenin alan formülünü ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımı Tablo 37’de verilmiştir.

Tablo 37

Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Eşkenar bir üçgen çizip kenarlara ve yüksekliğe değer vererek formülü ispat eder	0	6	40	Ö3,Ö5,Ö6 Ö8,Ö9,Ö10
Kuralın ispat edilemeyeceğini ifade eder	0	5	33,3	Ö1,Ö7,Ö11, Ö12,Ö15
Birkaç örnek verenler	1	4	26,7	Ö2,Ö4,Ö13,Ö14

Öğrencilerin Üçgenin alan formülünü ispat etme alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde öğrencilerin çizdikleri bir üçgen üzerinden, kenarlara ve yüksekliğe değer vererek formülü ispat etmeye çalıştıkları görülmüştür. Öğrencilerin bir kısmı ise kuralın ispat edilemeyeceğini belirtmişlerdir. Öğretim öncesindeki cevaplar incelendiğinde tüm öğrencilerin İspat Düzeyleri 0 olarak belirlenmiştir. Üçgenin alan formülünü ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Salih: (Soruyu okur ve bir dik üçgen çizer.) Öğretmenim kenarlarına 4 cm ve 5 cm diyelim.

Öğretmen: Peki sonra?

Salih: Öğretmenim şimdi bu kenarları çarpıp ikiye bölersem alanı bulurum.

Öğretmen: Salih alanı bulmak için kullandığın formül nedir?

Salih: Dik kenarları çarpıp ikiye bölmek öğretmenim.

Öğretmen: Peki bu kural neden böyle? Neden 3'e değil de ikiye bölüyorsun?

Salih: (Güler) Öğretmenim bu bir kuraldır, neden diye sormamız anlamsız.

Salih ile öğretmeni arasında geçen bu diyalog öğrencide ispat kavramının oluşmadığını göstermektedir. Bu sebeple Salih'in verdiği cevap İspat düzeyi 0 olarak nitelendirilir.

Öğrencilerin “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Üçgenin alan formülünü ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımı Tablo 38’de verilmiştir.

Tablo 38

Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme” Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Dikdörtgenden yararlanarak üçgenin alanını bir sayısal değer üzerinden ispatlayanlar	3	2	13,4	Ö3, Ö7
Dikdörtgenden yararlanarak üçgenin alanını ispat eder	4	13	86,6	Ö1,Ö2,Ö4,Ö5,Ö6,Ö8,Ö9,Ö10 Ö11,Ö12,Ö13,Ö14,Ö15

Öğrencilerin Üçgenin alan formülünü ispat etme alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin dik üçgenin, dar açılı üçgenin ve geniş açılı üçgenin alanlarını ispat edebildikleri görülmüştür. Üçgenin alan formülünü ispat eden bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

İsmail: (Soruyu okur ve bir dik üçgen çizer)

Öğretmen: Sanırım önce dik üçgenin alanını ispat edeceksin.

İsmail: Evet öğretmenim. (Dik üçgenin dik kenarlarına a ve b harflerini verir. Üçgeni bir dikdörtgene tamamlar.) Öğretmenim dikdörtgenin alanı kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı ile bulunur. Bu üçgen de dikdörtgenin yarısı olduğundan üçgenin alanı $\frac{a \cdot b}{2}$ ’dir.

İsmail ile öğretmeni arasında geçen görüşmeye bakıldığında öğrencinin verdiği cevap İspat Düzeyi 4 ile nitelendirilmektedir.

4.1.3. Öğrencilerin “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” Temasına İlişkin Zihinsel süreçleri

Öğrencilerle gerçekleştirilen ön-son klinik mülakatlarda “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait her öğrenciye 2 soru sorulmuştur.

“Cebir Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan alt temalar şöyledir;

- Toplam formülünü ispat etme

Oluşturulan bir alt temaya ait öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar ayrıntılı biçimde incelenerek alt temaya ait kodlar oluşturulmuştur. Öğrencilerin verdikleri cevaplara göre İspat düzeyleri belirlenmiştir. Bu bulgular tablolarda ayrıntılı biçimde verilmiştir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan “Toplam formülünü ispat etme” alt temasına ait bulgular Tablo 39’da verilmiştir.

Tablo 39

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” Teması “Toplam Formülünü İspat Etme” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
Cebir Öğrenme Alanı İspatları	Toplam formülünü ispat etme	Kuralın ispatlanamayacağını ifade eder- İspat Düzeyi 0 Tek bir örnekle ispatlar- İspat Düzeyi 1	Şekil kullanarak ispat eder- İspat Düzeyi 4a Cebirsel yolla ispat eder- İspat Düzeyi 4b

Öğrencilerin “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Toplam formülünü ispat etme” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımları Tablo 40’da verilmiştir.

Tablo 40

Toplam Formülünü İspat Etme Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Kuralın ispatlanamayacağını ifade eder	0	7	46,6	Ö3,Ö5,Ö6,Ö7, Ö10,Ö11,Ö12
Tek bir örnekle ispatlar	1	8	53,4	Ö1,Ö2,Ö4,Ö8, Ö9,Ö13,Ö14, Ö15

Öğrencilerin “Toplam formülünü ispat etme” alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde öğrencilerin çoğu kuralın ispatlanamayacağını belirtirken, bir kısmı

da bir sayı dizisi vererek formülün doğruluğunu ispatlamaya çalışmıştır. Bu öğrenci cevaplarının İspat Düzeyi sırasıyla 0 ve 1'dir. Toplam formülünü ispat edemeyen bir öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Burak: (Soruyu okur) Öğretmenim bir örnek vereyim.

Öğretmen: Yaz bakalım.

Burak: Öğretmenim 1'den 5'e kadar sayıları yazayım. (Kâğıda $1+2+3+4+5$ yazar.)

Öğretmen: Peki şimdi ne yapacaksın?

Burak: Şimdi formüle bakacağım sonuncu terimle bir fazlasını çarp diyor. (5 ile 6'yı çarpar 30 bulur.) Sonra da sonucu ikiye böleceğim. ($30:2$ işleminin sonucunu 15 bulur.)

Öğretmen: Peki bu bize formülün doğru olduğunu mu gösterdi?

Burak: Hayır öğretmenim, şimdi ben o sayıları da toplayacağım, o da 15 çıkarsa formül doğrudur diyebilirim.

Öğretmen: Topla bakalım.

Burak: (Kâğıt üzerinde sayıların toplamını bulur.) Öğretmenim sonuç 15 çıkıyor. Yani formül doğru.

Öğretmen: Peki diğer sayılar için doğru olduğunu nasıl bileceğiz?

Burak: Öğretmenim hepsi için tek tek deneriz o zaman.

Öğretmen: Peki bu çok zaman alıcı olmaz mı?

Burak: (Uzunca süre düşünür) Evet öğretmenim sanırım bunun ispatı farklı biçimde yapılmalı.

Burak ile öğretmeni arasında geçen bu diyalog öğrenci cevabının İspat Düzeyi 1 olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” Temasına ait “Toplam formülünü ispat etme” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımları Tablo 41’de verilmiştir.

Tablo 41

Toplam Formülünü İspat Etme Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Şekil kullanarak ispat eder	4a	6	40	Ö3,Ö4,Ö7,Ö12,Ö13,Ö15
Cebirsel yolla ispat eder	4b	9	60	Ö1,Ö2,Ö5,Ö6,Ö8Ö9,Ö10,Ö11,Ö14

Öğrencilerin “Toplam formülünü ispat etme” alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin iki şekilde ispat yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin bir kısmı formülü görsel ispat yöntemi ile ispatlarken, bir kısmı da cebirsel yolla formülü ispatlamıştır. İki tür öğrenci cevabı da İspat Düzeyi 4 ile nitelendirilmiştir. Toplam formülünü ispat eden iki farklı öğrenciye ait görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Aycan: (Soruyu okur) Öğretmenim bunu şekil ile ispatlayabilirim.

Öğretmen: Tamam çiz bakalım.

Aycan: (Kâğıdına EK 5’teki şekli çizer.) Öğretmenim bu şekillerden bir örüntü oluştururuz. Sonra çizdiğim şekillerin kenar sayılarına bakarak formülü çıkartacağım.

Öğretmen: Hangi kenarları kastediyorsun peki?

Aycan: (Çizdiği dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarlarını gösterir.) Öğretmenim bu kenarlar arasında şöyle bir ilişki var, biri diğerinin bir fazlası. Bu kenarları çarpıp ikiye bölersem formülü elde etmiş oluyorum.

Öğretmen: Neden ikiye böldün peki?

Aycan: Çünkü ben ilk çizdiğim şeklin aynısının yansımasını aldım. İstedğim daire sayısının iki katını veriyor çarpım. O yüzden ikiye böldüm.

Aycan ile öğretmeni arasında geçen diyalog öğrencinin İspat Düzeyinin 4 olduğunu göstermektedir.

Bu alt öğrenme alanına ait diğer bir öğrenci görüşmesi de şöyledir:

Murat: Öğretmenim 1’den n’ye kadar bir sayı dizisi yazarım.

Öğretmen: Peki sonra?

Murat: Öğretmenim sonra bu dizinin altına n 'den başlayıp 1'e kadar giden bir dizi yazarım. Sonra bu dizideki sayıları toplarım. (EK 6'da verilen öğrenci cevabındaki adımları izler)

Öğretmen: Elde ettiğin bu ifadeler bize neyi verdi?

Murat: Öğretmenim şimdi burada n tane $n+1$ var. Yani toplamı bulmak için n ile $n+1$ 'i çarparız. Ve sonucu ikiye böleriz.

Öğretmen: Neden 2'ye böldük Murat?

Murat: Öğretmenim çünkü ben iki tane dizinin toplamını buldum. Bana birinin toplamı lazım. O yüzden 2'ye böldüm.

Murat ile öğretmeni arasında geçen diyalog öğrenci cevabının İspat Düzeyi 4 olduğunu göstermektedir.

4.1.4. Öğrencilerin “İspat Algısı” Temasına İlişkin Zihinsel Süreçleri

Öğrencilerle gerçekleştirilen ön-son klinik mülakatlarda “İspat algısı” temasına ait her öğrenciye 2 soru sorulmuştur.

“İspat algısı” temasında bulunan alt tema şöyledir;

- Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama

Oluşturulan alt temaya ait öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar ayrıntılı biçimde incelenerek bu alt temaya ait kodlar oluşturulmuştur. Öğrencilerin verdikleri cevaplara göre İspat düzeyleri belirlenmiştir. Bu bulgular tablolarda ayrıntılı biçimde verilmiştir.

Öğrencilerin ön-son klinik mülakatlarda “İspat Algısı” temasında bulunan “Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama” alt temasına ait bulgular Tablo 42’de verilmiştir.

Tablo 42

Öğrencilerin Ön-son Klinik mülakatlarına Ait “İspat Algısı” Teması “Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama” Alt Temasına İlişkin Bulgular

Tema	Alt Tema ve Temaya Ait Kod	Ön Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri	Son Klinik mülakatlarda Öğrenci Cevapları ve İspat Düzeyleri
İspat Algısı	Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama	Doğru ispatı seçip nedenini açıklayamama- İspat Düzeyi 0a Yanlış ispatı seçme- İspat Düzeyi 0b	Doğru ispatı seçip geçerli açıklamayı örneklerle yapanlar- İspat Düzeyi 3 Doğru ispatı seçip nedenini açıklar- İspat Düzeyi 4

Öğrencilerin “İspat Algısı” temasına ait “Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama” alt temasına ilişkin ön klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımları Tablo 43’de verilmiştir.

Tablo 43

Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama Alt Teması Ön Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Doğru ispatı seçip nedenini açıklayamama	0a	11	73,3	Ö2,Ö4,Ö5,Ö7,Ö8,Ö10,Ö11,Ö12,Ö13,Ö14,Ö15
Yanlış ispatı seçme	0b	4	26,7	Ö1,Ö3,Ö6,Ö9

Öğrencilerin “Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama” alt temasına ilişkin öğretim öncesi zihinsel süreçleri incelendiğinde cevapların İspat Düzeyi 0 olduğu görülmektedir. Öğrencilerin bir kısmı verilen ifadelerden doğru ispatı seçse de nedenini açıklayamamıştır. Öğrencilerin diğer bir kısmı da yanlış ispat seçmiştir Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama alt öğrenme alanına ait cevaplar arasından İspat Düzeyi 0 ile nitelendirilen bir öğrenci öğretmen görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir:

Murat: (Soruyu okur) Öğretmenim bence Ayşe ’nin cevabı ispattır.

Öğretmen: Neden Murat?

Murat: Çünkü öğretmenim örnek vermiş.

Öğretmen: Yani örnek vermek ispat yapmak için yeterli midir?

Murat: Evet öğretmenim yeterlidir. Çünkü örnek doğru.

Öğretmen: Peki Murat diğer sayılar için denerken birinde yanlış olma ihtimali yok mu?

Murat: Hayır bence yok. Öyle olsa idi bu örnek de yanlış çıkardı.

Murat ile öğretmeni arasında geçen diyalog öğrencinin bir örnek vererek ispat yaptığını göstermektedir. Öğrencinin verdiği cevap İspat Düzeyi 1 ile nitelendirilmektedir.

Öğrencilerin “İspat Algısı” temasına ait “Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama” alt temasına ilişkin son klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar, ispat düzeyleri ve frekans dağılımları Tablo 44’te verilmiştir.

Tablo 44

Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama Alt Teması Son Klinik Mülakat Bulguları

Öğrenci Cevapları	İspat Düzeyi	Frekans	Yüzde(%)	Öğrenciler
Doğru ispatı seçip geçerli açıklamayı örneklerle yapanlar	3	4	26,6	Ö1,Ö3,Ö5,Ö9
Doğru ispatı seçip nedenini açıklar	4	11	73,4	Ö2,Ö4,Ö6,Ö7,Ö8,Ö10 Ö11,Ö12,Ö13,Ö14,Ö15

Öğrencilerin “Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama” alt temasına ilişkin öğretim sonrası zihinsel süreçleri incelendiğinde; öğrencilerin doğru ispatı seçtikleri ve nedenini doğru şekilde açıkladıkları görülmüştür. Bu verilen cevaplar İspat Düzeyi 4 olarak nitelendirilmiştir. İspat Düzeyi 4 olan bir öğrenci ile yapılan görüşme diyalogu aşağıda verilmiştir.

Aycan: (Soruyu okur) Mert’in cevabı ispattır öğretmenim.

Öğretmen: Neden Mert’i seçtin Aycan?

Aycan: Öğretmenim çünkü Mert’in verdiği cevap tüm sayı değerleri için doğru olur.

Öğretmen: O zaman bir örnek veren Ayşe ve Belma'nın cevapları ispat değil.

Aycan: Evet, ispat için tek bir örnek yetmez öğretmenim. Diğer sayılar için tek tek yapmak yerine harfleri kullanmak daha doğru bence.

Öğretmen: Peki diğer soru için cevabın ne? (İkinci ispat algısı sorusunu gösterir.)

Aycan: Öğretmenim burada da Cem'in cevabı ispattır, az önce söylediğim sebeplerden dolayı.

4.2. Hazırlık Evresi

4.2.1. Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahının Oluşturulması

Varsayımlara bağlı öğrenme güzergahının oluşturulmasında

- Öğrencilerin önbilgilerinin değerlendirilmesi,
- Öğretilmesi amaçlanan öğrenme hedeflerinin son evresinin açıklanması
- Öğrencilerin zihinsel evrelerinin açığa çıkarılması ve ilgili öğretimsel etkinlikler yer almaktadır (Bakker, Doorman & Drijvers, 2003).

Yapılan bu araştırmada güzergah hazırlanırken; öğrenme amaçları, öğretim etkinlikleri, öğrenme varsayımları ve öğretim sonunda ulaşılmak istenen kavramlar belirlenmiştir.

Güzergah geliştirilmeden önce, bu kapsamda ortaokul öğretim programı tüm sınıf düzeylerinde incelenmiş ve ortaokul seviyesinde ispatı yapılabilecek konular, kazanımlar ve kurallar belirlenmiştir. Bu belirlemenin ardından bu kazanımları içeren araştırmacı tarafından hazırlanmış 10 adet uygulama testi yapılmıştır. Bu testlerin amacı ispat animasyonu için seçilen konularda öğrencilerin öğrenme eksikliklerini belirlemektir.

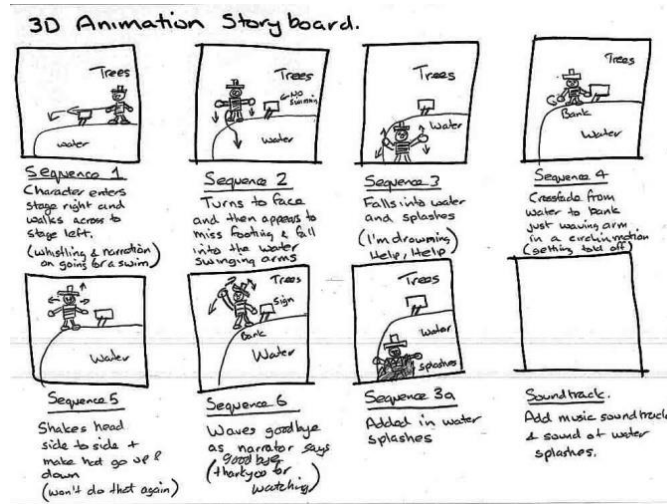
Seçilen kazanımlar için öğretim programında ve ders kitaplarında bu konuların öğretiminde ispat yönteminin kullanılmadığı görülmüştür.

Öğretim programı incelemesi ve araştırmacı tarafından geliştirilen uygulama testi sonuçlarına göre ve ulusal ve uluslararası sınavlarda öğrencilerimizin bulundukları düzeyler göz önünde bulundurularak öğrenme amaçları belirlenmiştir. Bu araştırmada geliştiren varsayımlara bağlı öğrenme güzergahında bulunan öğrenme amaçları;

1.Bölünebilme Kurallarını İspat Etme

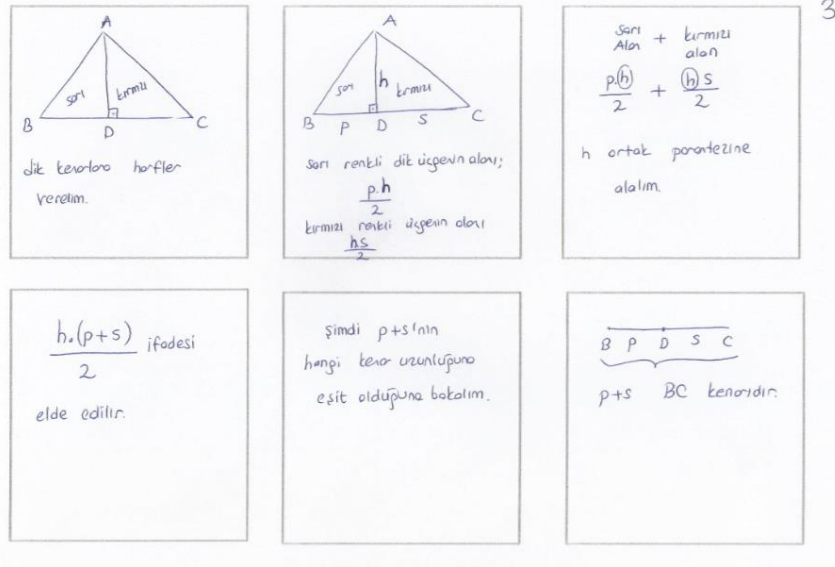
2. a. İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme
b. Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme
 3. Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme
 4. Üçgenin İç Açları Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme
 5. Çokgenin İç Aç Formülünü ispat etme
 6. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme
 7. Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme
 8. Üçgenin alan formülünü ispat etme
 9. Toplam formülünü ispat etme
 10. Paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme
- şeklinde belirlenmiştir.

Bu öğrenme amaçları için farklı ispat yöntemleri kullanılarak animasyonlar ve öğretim etkinlikleri tasarlanmıştır. Animasyonlar hazırlanırken seçilen ispat yöntemlerinin öğrenci düzeyine uygun olmasına dikkat edilmiştir. Animasyonlar için önce storyboardlar(hikaye tahtaları) hazırlanmıştır. Storyboard animasyonda bulunan sahne, plan, diyalog ve seslerin belirtildiği görüntü serisidir. Animasyonun ilk görsel izlenimi storyboard (Şekil 8) ile yapılır ve animasyon içeriği ile ilgili önemli kararların verildiği ayrıntılı tasarıdır.

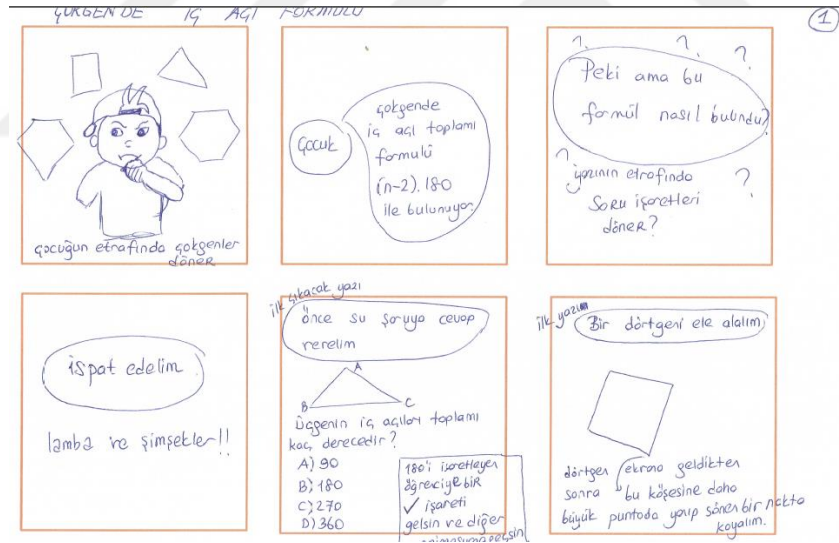


Şekil 8. Bir animasyona ait storyboard örneği

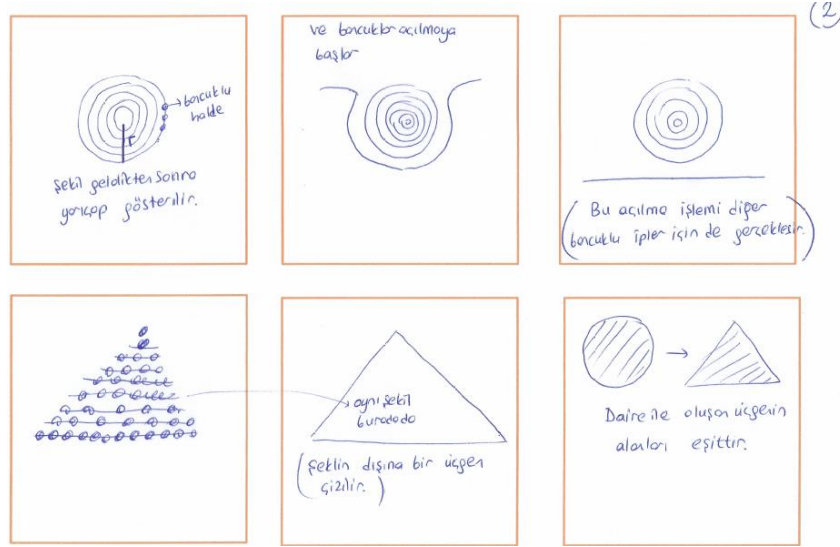
Bu araştırmada kullanılan animasyonların storyboard örnekleri Şekil 9, 10 ve 11’de verilmiştir.



Şekil 9. Üçgende alan ispatı hikâye tahtası



Şekil 10. Çokgende iç açı toplam formülü ispatı hikâye tahtası



Şekil 11. Dairenin alanı ispatı hikâye tahtası

Animasyonlarda kullanılan ispat yöntemleri ise şöyledir;

Animasyonlar dışında 11 öğretim etkinliği hazırlanmıştır. Hazırlanan etkinlikler animasyondan önce ve animasyondan sonra uygulanmıştır. Etkinliklere ait çalışma kağıtları Şekil 12, 13 ve 14'te verilmiştir.

Toplam Formülü- Çalışma Kağıdı

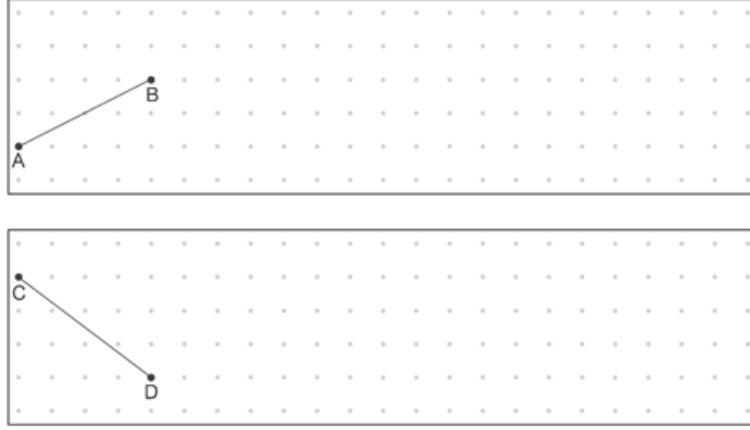
1. Aşağıda modellenen işlem hangi toplama aittir?

2.

Şekilde modellenen işlem nedir? Ve sonucu kaçtır?

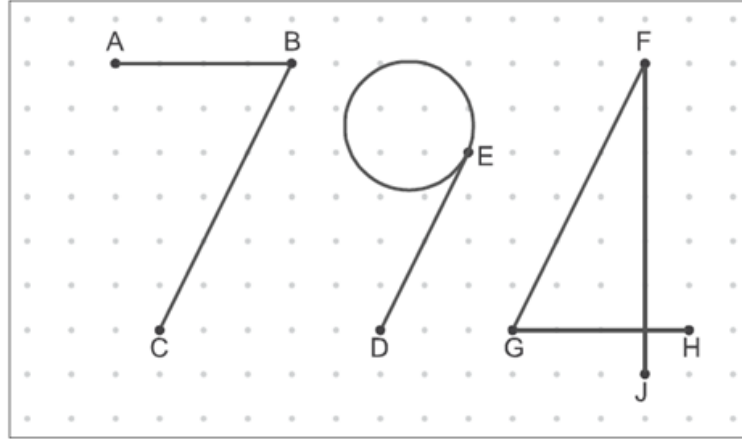
Şekil 12. Toplam formülü çalışma kâğıdı

1. Aşağıda verilen doğru parçalarına paralel olan doğrular çizin.



Şekil 13. Üçgenin iç açıları toplamı çalışma kâğıdı

2. 794 sayısında yer alan doğru parçalarından birbirine paralel olanları yazın.



Şekil 14. Üçgenin iç açıları toplamı çalışma kâğıdı

Bu doğrultuda geliştirilen öğretim etkinlikleri ve hazırlanan animasyonların öğrenme gayelerine ne derecede uygun olduğunun belirlenmesi için ortaokul matematik öğretmenlerinden ve matematik eğitimi alanında uzman akademisyenlerden oluşan 6 kişilik bir grubun görüşleri alınmıştır. Görüşleri alınan öğretmenlerin mesleki deneyim süreleri 8, 10 ve 15 yıldır. Öğretim üyelerinden ikisi matematik eğitimi alanında çalışırken biri bilgisayar ve öğretim teknolojileri bölümlerinde çalışmaktadır.

Alınan uzman görüşlerine göre gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra pilot uygulamalarının gerçekleştirilmesi kararı verilmiştir. Pilot uygulama sonuçları da uzman görüşleri alındıktan sonra yeniden düzenlenmiştir. Uzman görüş formu ve uzman bilgileri EK 7’de verilmiştir.

Animasyonlarda kullanılan ispat yöntemleri Tablo 45’te verilmiştir.

Tablo 45

Animasyonlarda kullanılan ispat yöntemleri

Öğrenme Amaçları	Animasyonda Kullanılan İspat Yöntemi
Bölünebilme Kurallarını İspat Etme	Tümevarım
İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme	Tümevarım
Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme	Tümevarım
Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme	Tümevarım
Üçgenin İç Açılarının Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme	Görsel İspat
Çokgenin İç Açısı Formülünü ispat etme	Tümevarım
Dairenin Alan Formülünü İspat Etme	Görsel İspat
Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme	Görsel İspat
Üçgenin alan formülünü ispat etme	Görsel İspat
Toplam formülünü ispat etme	Görsel İspat
Paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme	Görsel İspat

7. sınıf öğrencilerinin ispat öğretimine yönelik belirlenen öğrenme amaçları doğrultusunda hazırlanan varsayımlara bağlı öğrenme güzergâhı Tablo 46’da verilmiştir.

Tablo 46

İspat Öğretimine Yönelik Belirlenen Öğrenme Amaçları Doğrultusunda Hazırlanan Varsayımlara bağlı Öğrenme Güzergâhı

Öğrenme Amaçları	Öğretim Etkinlikleri	Öğrenme Varsayımları	Öğretim Sonunda Ulaşılmak İstenen Kavram
Bölünebilme Kurallarını İspat Etme	2 ile bölünebilme kuralını ispat etme	Animasyon	İspat, bölünebilme kuralları
	3 ile bölünebilme kuralını ispat etme	Animasyon	
	4 ile bölünebilme kuralını ispat etme	Animasyon	
İki negatif tam sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme	Animasyon	Örüntü kullanarak kuralı ispat eder.	Tam sayıların işaretleri, tam sayılarda çarpma kuralları, ispat
Zıt işaretli tam sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme	Animasyon	Örüntü kullanarak kuralı ispat eder.	Tam sayıların işaretleri, tam sayılarda çarpma kuralları, ispat
Sıfır hariç sayıların sıfırcı kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme	Animasyon	Örüntü kullanarak kuralı ispat eder.	Üslü sayılar, sıfırcı kuvvet, ispat
Üçgenin İç Açılarının Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme	Animasyon	Paralel doğrular ve açı özelliklerini kullanarak Üçgenin İç Açılarının Toplamının 180^0 olduğunu ispat eder.	Üçgenin iç açıları toplamı, ispat
Çokgenin İç Açısı Formülünü ispat etme	Animasyon	Örüntüden yararlanarak Çokgenin İç Açısı Formülünü ispat eder.	İç açı toplam formülü, ispat
Dairenin Alan Formülünü İspat Etme	Animasyon	Çemberin çevresinden yararlanarak alan formülünü ispat eder.	Dairenin alanı, ispat
Kare, dikdörtgen,	Kare ve dikdörtgenin alanını ispat etme	Animasyon	Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve Dörtgenlerin alanı, ispat

paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme	Paralelkenarın alanını ispat etme Yamuğun alanını ispat etme	yamuğun alanını ispat eder.	
Üçgenin alan formülünü ispat etme	Animasyon	Üçgenin alanını ispat eder.	Üçgenin alan formülü, ispat
Toplam formülünü ispat etme	Animasyon	Toplam formülünü ispat eder.	Toplam formülü, ispat

Geliştirilen bu güzergâh göz önünde bulundurularak animasyonlar ve öğretim etkinlikleri, öğretim deneyi evresinde tabloda verilen sıraya göre uygulanmış, her etkinlik ve animasyon için oluşturulan varsayımlar test edilmiştir.

4.3. Pilot Uygulama Evresi

Araştırmada hazırlanmış ispat animasyonlarının ve öğretim etkinliklerinin varsayımlara bağlı öğrenme güzergâhında bulunan öğrenme varsayımlarını karşılayıp karşılamadığını belirlemek, geliştirilen etkinliklerin öğrencilerin ispat öğrenmelerinde etkili olup olmadığının ortaya konulması ve yeniden düzenleme gereken durumların belirlenmesi amacıyla pilot çalışma yapılmıştır. Pilot uygulama için 20 öğrenci ile öğretim deneyi(teaching experiment) gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamada belirlenen temaların her birinden animasyonlar seçilmiştir.

Seçilen 4 animasyonun bağlı olduğu öğrenme amaçları şöyledir;

- Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 olduğunu ispat eder.
- Toplam formülünü ispat eder.
- Örüntüden yararlanarak Çokgenin İç Açı Formülünü ispat eder.
- Çemberin çevresinden yararlanarak alan formülünü ispat eder.

Pilot uygulama evresinde ispat animasyonlarının ve öğretim etkinliklerinin etkililiğinin ortaya konulması için veri toplama aracı olarak video kayıtları, gözlem notları, öğrenci çalışma kâğıtları kullanılmıştır. Bu doğrultuda her ispat animasyonu ve öğretim etkinliği için yapılan analizler, araştırmacı ve öğrenci ifadeleri ile gözlem notları bir arada değerlendirilerek verilmiştir. Pilot uygulamaları gerçekleştirilen 4 animasyon ve öğretim etkinliğine ilişkin analizler yapıldıktan sonra, ikisi ilköğretim matematik eğitimi bölümünde çalışan biri bilgisayar ve öğretim teknolojileri bölümünde öğretim üyesi, üçü farklı çalışma

yılları olan matematik öğretmeninden oluşan 6 kişilik bir uzman grubunun görüşlerine sunulmuştur.

Pilot uygulamaları gerçekleştirilen 4 ispat animasyonu ve öğretim etkinliğine ait analiz sonuçları ve her etkinliğe ilişkin uzman görüşleri ayrıntılı bir şekilde bu bölümde verilmiştir.

4.3.1. Pilot Uygulama Üçgenin İç Açı Toplamı İspatı Etkinliğine İlişkin Bulgular

Araştırmada hazırlanmış olan ilk animasyon ve öğretim etkinliği “Üçgenin İç Açılar Toplamının 180^0 olduğunu ispat eder” etkinliğidir. Bu öğretim amacına uygun olarak hazırlanan animasyona ait ekran görüntüleri EK 8’de verilmiştir.

Animasyonda kullanılan ispat yöntemi Görsel İspat (Sözsüz İspat)’tır. Bu animasyonun izletilmesinden önce öğrencilerle konuya giriş için bir etkinlik yapılmıştır. Bu etkinlikte paralel doğruların kesenle yaptıkları açılar konusu hatırlatılmıştır. Dağıtılan çalışma kâğıtlarındaki etkinlikler tüm öğrencilerle beraber yapılmıştır.

Öğretmen: Çocuklar dağıttığım çalışma kâğıtlarında belirtilen boşluğa iki tane birbirine paralel doğru çizmenizi istiyorum.

Öğrenciler: Tamam öğretmenim. (Öğretmen cevapları kontrol eder, paralellik şartını açıklar.)

Öğretmen: Peki şimdi de bu paralel doğruları kesen bir doğru çizelim. (Öğrenci cevaplarını kontrol eder, herkes çizimini yaptıktan sonra tahtaya paralel doğru ve kesen doğruyu çizer.

Öğretmen: Şimdi burada oluşan açıları inceleyelim. Ali sen gelir misin tahtaya?

Ali: Tabi öğretmenim.

Öğretmen: Oluşan açılardan hangisi iç ters açılardı hatırlıyor musun?

Ali: Öğretmenim bu ikisi iç ters açıdır. (Tahtada doğru açılarını gösterir.)

Öğretmen: (Sınıfa dönüp doğru olup olmadığını sorar.) Bakalım arkadaşların ne diyor? (Tüm sınıf doğru olduğunu söyler.) Peki Canan sen gelip Dış ters açılarını gösterir misin?

Canan: tabi öğretmenim. (Tahtada dış ters açılarını gösterir.)

Öğretmen: Aferin. Şimdi bu gösterdiğimiz açılar birbirine eşittir. Bunu unutmayalım. Şimdi kâğıtlarınızda verilen iki örneği çözmenizi istiyorum. (Çözümleri kontrol eder.)

Bu hatırlama etkinliğinden sonra animasyon izletilmiş ve öğrencilerle tartışma ortamı yaratılmıştır. Yapılan ispat üzerine fikir yürütülmüş ve adımlar incelenmiştir. Daha sonra öğrencilerin aynı ispatı farklı üçgen çeşitleri üzerinde göstermeleri istenmiştir.

Bu süreçte animasyon izlendikten sonra bir öğrenci ile geçen diyalog şöyledir:

Havva: Öğretmenim bunun ispatının yapılabileceğini hiç düşünmemiştim.

Öğretmen: Neden peki?

Havva: Çünkü öğretmenim bunları kural olarak görüp hiç sorgulamazdım. Şimdi ispatını yapınca kendimi çok zeki hissettim. (Gülerek söyler.)

Görüldüğü gibi yapılan etkinliklerde öğretim süreci başarılı şekilde tamamlanmıştır. Fakat ispatlama sürecinde öğrencilerin açılara harf yerine sayı değeri verdikleri görülmüştür. Bu sebeple pilot araştırmadan sonra yapılan hatırlatma etkinliğinde sadece sayısal değeri olan açılar yerine harfler ve sembollerin de kullanılmasına karar verilmiştir.

Animasyona yönelik uzman görüşleri ise şöyledir:

- Animasyonun hızlı olduğu belirtilmiş ve hareketlerin daha yavaş yapılması gerektiği yönünde bir öneride bulunulmuştur.
- Animasyonlarda dikkati dağıtmayacak şekilde bir müzik bulunması gerektiği belirtilmiştir.

Uzman görüşleri dikkate alınarak animasyon süresi uzatılmış ve müzik eklemesi yapılmıştır. Yapılan bu değişikliklerle bu animasyonun öğretim deneyi evresinde kullanılmasına karar verilmiştir.

4.3.2. Pilot Uygulama Toplam Formülünün İspatı Etkinliğine İlişkin Bulgular

Araştırma kapsamında hazırlanmış olan ikinci animasyon ve öğretim etkinliği “Toplam formülünün ispatı” etkinliğidir. Animasyona ait ekran görüntüleri ve etkinlik örneği EK 9’da verilmiştir.

Geliştirilen bu animasyonda iki tür ispat yapılmıştır. İspatlardan ilki görsel ispat iken ikincisi cebirsel ispattır. Animasyona geçmeden önce sınıfta toplam formülü ile ilgili giriş etkinliği yapılmıştır. Bu etkinlikte formülü bulan ünlü matematikçi Gauss'un hikâyesinden bahsedilmiştir.

Öğretmen: (Tahtaya Gauss'un fotoğrafını yansıtır.) Çocuklar bu fotoğraftaki kim tanıyan var mı çocuklar?

Öğrenciler: Hayır öğretmenim, kim?

Öğretmen: Çocuklar fotoğrafta gördüğünüz kişi ünlü matematikçi Gauss. Ona Matematiğin Prensi derler. 3 yaşındayken bile babasının yaptığı işlemlerdeki hataları bulduğu söylenir.

Öğrenciler: (Şaşırarak ilgi ile dinlemeye devam ederler.)

Öğretmen: Bugün sizlerle Gauss'un ilkokulda bulduğu bir formülü ispatlayacağız.

Öğrenciler: Öğretmenim nasıl bulmuş ki?

Öğretmen: Gauss'un ilkokul öğretmeni öğrenciler sınıfta oyalansınlar diye tahtaya bir soru yazıyor. Soru şu (tahtaya soruyu yazar $1+2+3+4+5+...99+100=?$). Gauss'un öğretmeni öğrencilerinden bu sayıları toplamalarını ister. İşlemin çok uzun süreceğini ve öğrencilerin bir süre bu işlemle uğraşacağını düşünür. Fakat Gauss cevabı birkaç saniye içinde bulur. Herkes hayrete düşer. Formülün ne olduğunu ve nasıl bulunduğunu merak ediyor musunuz?

Öğrenciler: (Hep birlikte evet derler)

Öğrencilerin dikkatlerinin ve meraklarının yoğunlaştığı bu etkinlik sonrasında animasyon izletilmiş ve ispat tartışılmıştır. İki farklı ispat türü için de dağıtılan çalışma kâğıtları ile örnekler çözülmüştür. İzlenen animasyondan sonra öğrencilerden ispat türlerinden birini seçerek ispat yapmaları istenmiştir. Bu evrede öğrencilerin yarısı görsel ispatlama yoluna giderken diğer yarısı da cebir kullanarak ispat yapmıştır.

Görüldüğü gibi yapılan etkinlik ve izlenen animasyonla öğretim süreci başarılı şekilde sonlanmıştır. Öğretim sürecinde Gauss'un hikâyesinin anlatıldığı giriş bölümünde öğrencilere Gauss ile ilgili daha fazla bilgi verilmesi yönünde bir karar verilmiştir. Diğer pilot uygulamada olduğu gibi bu animasyon için de uzman görüşleri şöyledir;

- Animasyonun hızlı olduğu belirtilmiş ve hareketlerin daha yavaş yapılması gerektiği yönünde bir öneride bulunulmuştur.
- Animasyonlarda dikkati dağıtmayacak şekilde bir müzik bulunması gerektiği belirtilmiştir.

4.3.3. Pilot Uygulama Çokgenin İç Aç Formülünün İspatı Etkinliğine İlişkin Bulgular

Araştırmada hazırlanmış olan üçüncü animasyon ve öğretim etkinliği “Çokgenin İç Aç Formülünün İspatı” etkinliğidir. Animasyona ait ekran görüntüleri ve etkinlik örneği EK 10’da verilmiştir.

Geliştirilen bu animasyonla yapılacak öğretim etkinliğinin giriş evresinde çokgende köşegen kavramı ile ilgili bir çalışma yapılmıştır. Dağıtılan çalışma yaprakları ile verilen çokgenlere belirtilen köşelerden köşegenler çizdirilmiştir. Çalışma bittikten sonra öğrencilerle şu diyalog geçmiştir;

Öğretmen: Çocuklar çokgenin iç aç toplam formülünü biliyoruz hepimiz değil mi? İsmail sen tahtaya yazabilir misin formülü?

İsmail: Tabi öğretmenim. (Tahtaya doğru formülü yazar.)

Öğretmen: Aferin İsmail. Peki, şimdi hepinizin düşünmesini istiyorum. Bu formüldeki değerler nasıl bulunmuş? Kenar sayısından 2 çıkarmanın ve bu sonucu 180 ile çarpmamızın bir sebebi olmalı değil mi? (İnci’ye söz verir)

İnci: Öğretmenim üçgenin iç açıları toplamı 180 olduğu için o yüzden çarpılıyor.

Öğretmen: Peki kenar sayısından neden 2 çıkarıyoruz?

İnci: Onu bilmiyorum ki öğretmenim.

Bu giriş etkinliği ve sınıfta yapılan diyalogdan sonra animasyon izlenmiştir. Animasyonda olan interaktif bölümler için sıra ile öğrencilere söz hakkı verilmiştir. Animasyon kısmı bittikten sonra dağıtılan çalışma kâğıtları ile ispat öğretimi tamamlanmıştır. Öğrencilerin tümünün ispat yapabildikleri görülmüştür.

Öğretim süreci bu pilot uygulama için başarılı şekilde sonuçlanmıştır. Etkinliklerin ve animasyonun öğretim deneyi evresinde da aynı şekilde kullanılmasına karar verilmiştir.

4.3.4. Pilot Uygulama Dairenin Alanın İspatı Etkinliğine İlişkin Bulgular

Araştırma kapsamında hazırlanmış olan dördüncü animasyon ve öğretime etkinliği “Dairenin Alanının İspatı” etkinliğidir. Animasyona ait ekran görüntüleri ve etkinlik örneği EK 11’de verilmiştir.

Geliştirilen bu animasyonla yapılacak öğretim etkinliğinin giriş evresinde, π sayısının nasıl bulunduğu sorusu öğrencilere yöneltilmiştir. Öğrencilerle yapılan diyalog şu şekildedir;

Öğretmen: Çocuklar biz çemberin çevresini nasıl buluyoruz?

Öğrenciler: (Hep birlikte $2\pi r$ formülünü söylerler)

Öğretmen: Peki π sayısının değeri nasıl bulunmuş olabilir? Bilen var mı? (Sınıfta Melike parmak kaldırır ve söz ister)

Melike: Öğretmenim ben bunu geçen sene öğrenmiştim. Çemberin çevresini çapa böldüğümüzde hep π sayısını elde ediyorduk.

Öğretmen: Peki bir çemberin çevresini formül kullanmadan nasıl bulabiliriz?

Melike: Öğretmenim biz sınıfa getirdiğimiz çember şeklindeki cisimleri ipe ölçerek bulmuştuk çevreyi. Sonra da çapını ölçüp bölmüştük.

Bu konuşmadan sonra animasyon izleme kısmına geçilmiştir. Animasyon izlendikten sonra öğrencilerin dağıtılan çalışma kâğıtlarına ispatı yapmaları istenmiştir.

Öğretim süreci sonunda öğrencilerin bir kısmının ispat yapamadığı görülmüştür. Bunun sebeplerinden biri çemberin çevre formülünü kullanamamış olmalarıdır. Bu sebeple etkinliğin giriş kısmında π ’yi buldurma etkinliğinin birebir yapılması kararı verilmiştir. Ayrıca üçgenin alanının nasıl bulunduğu konusuna da değinilmesi yönünde bir karara varılmıştır.

4.4. Öğretim Deneyi Evresi

Pilot uygulama sonrasında elde edilen bulgular ve uzman grubunun görüşleri doğrultusunda pilot uygulamada bulunan 4 ispat animasyonu ve öğretim etkinliğinde gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Diğer 6 ispat animasyonu ve öğretim etkinliği içinse yine aynı uzman grubunun görüşleri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Uzman görüşleri doğrultusunda, 10 ispat

animasyonu ve öğretim etkinliğine yönelik gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra öğretim deneyi evresinde uygulanmıştır.

Öğrencilerin ispat animasyonları ile ispat öğrenmelerine ilişkin zihinsel süreçlerinin ortaya konulması amacıyla, araştırmanın öğretim deneyi evresinde uygulanmak üzere 10 ispat animasyonu ve öğretim etkinliği geliştirilmiştir. Geliştirilen bu ispat animasyonlarının ve öğretim etkinliklerinin öğrenme amaçları, öğrenme varsayımları ve öğrencilerin ulaşması beklenen matematiksel kavramlar hazırlık evresinde bulunan varsayımlara bağlı öğrenme güzergahında yer almaktadır (Tablo 8).

Bu bölümde öğretim deneyi evresine ilişkin bulgular, varsayımlara bağlı öğrenme güzergahında bulunan öğrenme amaçları doğrultusunda oluşturulan;

- Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları
- Geometri ve Ölçme öğrenme Alanı İspatları
- Cebir Öğrenme Alanı İspatları
- İspat algısı

Temalar ve temalara ait alt başlıklar altında verilmiştir. Bu evrede alt başlıklar altında bulunan her öğretim etkinliğine ilişkin varsayımlara bağlı öğrenme güzergahı, ardından öğretim etkinliğine ilişkin gerçekleştirilen öğretim deneyi evresine ilişkin bulgular verilmiştir.

4.4.1. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları

Bu araştırmada “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasının altında “Bölünebilme Kurallarını İspat Etme”, “Tam Sayıların çarpımında sonucun işaretini belirleme” ve “Sıfır hariç sayıların sıfırcı kuvvetinin 1 olduğunu ispat etme” alt öğrenme amaçlarına yönelik 4 etkinlik ve 4 animasyon ile öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Bu temada bulunan üç öğrenme amacının gerçekleştirilmesi için yapılan etkinlikler ve bu öğretim deneyine ait bulgular aşağıda verilmiştir.

4.4.1.1.Bölünebilme Kurallarını İspat Etme

Araştırmada “Bölünebilme Kurallarını İspat Etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda 2, 3 ve 4 ile bölünebilme kurallarının ispatları yapılmıştır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 12’de verilmiştir.

Altun (2008) çalışmasında pek çok öğrencinin bir sayının 6 ile kalansız bölünebilmesi için hem 2 hem de 3 ile kalansız bölünmesi gerektiğini, bir sayının 9 ile kalansız bölünebilmesi için basamak değerleri toplamının 9 ve 9’un katı olması, gerektiğini ezbere bildikleri, ancak niçin böyle olduğu hakkında fikirlerinin olmadığını belirtmiştir. Bunun yerine verilen sayının yazıldığı sistemdeki çözümlenmesinden yararlanarak bölünebilme kuralları elde edilebilir (Altun, 2002, 2008; Delil, 2006; Baki, 2008). Bu sebeple bu animasyonda çözümleme yöntemi ile kurallar ispatlanmıştır.

Araştırmacı animasyonla ispat öğretimine geçmeden önce etkinliğe giriş çalışması yapmıştır. Bu giriş çalışmasında öğrencilere ispat yapmanın gerekliliği hissettirilmeye çalışılmıştır. Etkinlik için EK 13’te verilen çalışma yaprağı kullanılmıştır.

Çalışma yaprağında bulunan sorulardan biri “2 ile bölünebilme kuralında neden sadece birler basamağına bakılır?” sorusudur. Bu soruya cevap veren öğrencilerden biri ile öğretmen arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: İsmail bu soruya ne cevap verdin?

İsmail: Öğretmenim bence birler basamağına bakılmasının sebebini bilmiyorum.

Öğretmen: Peki şöyle sorayım. Sence bu sayıların diğer basamaklarının bölünme için bir önemi yok mu?

İsmail: Aslında olması lazım öğretmenim. Bence tüm basamaktaki sayıların çift olması gerekir.

Öğretmen: Peki 78 sayısı 2’ye tam bölünmüyor mu?

İsmail: (Bölmeyi kâğıda yapmaya çalışır) Aa bölünüyor öğretmenim. O zaman az önce söylediğim şey yanlış oldu. Nasıl bulunmuş ki öğretmenim bu kural. Bu zamana kadar hiç merak etmemiştim.

Çalışma yaprağında bulunan bu soruya öğrencilerin hepsi de “kuralın nereden geldiğini bilmiyoruz” cevabını vermişlerdir. Çalışma yaprağında bulunan diğer bir etkinlik de verilen

12 basamaklı bir sayının 3 ile bölünüp bölünmediği sorusudur. Bu soruya öğrencilerin 8'i yanlış cevap vermiştir. 3 ile bölünme kuralını “birler basamağındaki rakamın tek olması” diye açıklayan öğrenciler soruyu yanlış cevaplamışlardır. Bu öğrenciler bu kuralın nedenini ve nerden geldiğini açıklayınız sorusuna ise 2 ile bölünme kuralı gibi cevabını vermişlerdir. Bu yanlış cevabı veren öğrencilerden biri ile öğretmeni arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Öğretmen: Aycan bu soruya 2 ile bölünme kuralı gibi cevabını vermişsin.

Aycan: Evet öğretmenim.

Öğretmen: Yani sayının birler basamağına bakıyoruz tek ise 3 ile bölünüyor öyle mi?

Aycan: Evet öğretmenim.

Öğretmen: Peki o zaman tahtaya gelip 23' ü 3'e böler misin?

Aycan: (Tahtaya gelir, bölme işlemini yapar fakat bölmede kalan olur) Öğretmenim yanlış mı yaptım kalan çıktı.

Öğretmen: Hayır bölmeyi doğru yaptın. O zaman az önce söylediğin gibi birler basamağına bakarak 3 ile bölünüp bölünmeyeceği kararını veremiyoruz.

Aycan: Evet öğretmenim haklısınız.

Bu konuşmaya ve diğer verilen öğrenci cevaplarına baktığımızda öğrencilerin kuralları ezberledikleri için karıştırdıkları sonucuna ulaşabiliriz. Kuralların nasıl ortaya çıktığını bilmeyen öğrenciler sadece ezbere öğrendikleri bu kuralları karıştırabiliyorlar.

Çalışma kâğıdında bulunan diğer bir soru ise “ 2 ile bölünme kuralı birler basamağının çift olması iken 3 ile bölünme kuralı neden basamaktaki sayıların toplamının 3'ün katı olmasıdır?” sorusudur. Bu soruya öğrencilerin tümü “ Bilmiyorum” cevabını vermişlerdir.

Bu cevabı veren öğrencilerden biri ile öğretmen arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Öğretmen: Murat bu soruya bilmiyorum cevabını vermişsin. Peki, daha önce hiç bunun sebebini merak etmiş miydin?

Murat: Öğretmenim aslında ben bu soruyu daha önce öğretmenime sormuştum. Ama bunların kural olduğunu ve nedeni olmadığını söylemişti.

Bu görüşmede öğrencinin sebebi öğrenmek için öğretmenine sorduğu fakat nedeni ile ilgili bir açıklama yapılmadığı görülmektedir. Bu cevaplara bakıldığında çalışmaya katılan tüm öğrencilerin kurallar arasındaki farkın sebebini bilmedikleri görülmüştür.

Bu çalışma yaprağı etkinliğinden sonra animasyon uygulaması kısmına geçilmiştir. Bu bölümde öğrenciler önce animasyonu izlemişler daha sonra her kural için sınıfta bir tartışma ortamı yaratılmıştır.

2 ile bölünebilme kuralının ispatını izleyen öğrenciler ile geçen konuşmalardan biri aşağıda verilmiştir.

Öğretmen: Evet çocuklar yapılan ispatı anlayabildiniz mi? Sude sen anlatabilir misin ne anladığını?

Sude: Öğretmenim ne kadar kolay bir ispatı varmış. Önce sayının çözümlemesini yapacağız, sonra da ikiye bölünen kısımları çıkaracağız. Geriye sadece birler basamağı kalıyor. Çünkü diğerlerinin çarpanı hep 10 ve 10'un katları. O yüzden sadece birler basamağına bakıyoruz.

Öğretmen: Çok doğru Sude. Peki, bunun ispatını yapabilmek sana ne kazandırır sence?

Sude: Öğretmenim ezberlediğim şeylerin sebeplerini öğrenmek bence çok önemli. Diyelim ki bu kuralı unuttum. İspatını öğrendiğim için hemen hatırlayabilirim. Keşke her şeyi böyle öğresek.

Animasyonun izlenmesinden sonra sınıfta geçen konuşmalar ispatın çok kolay ve yapılabilir olduğu yönündedir. 2 ile bölünme kuralı ispatından sonra 3 ile bölünebilme kuralı izlenmiştir. Animasyon bittikten sonra sınıfta geçen diyaloglardan biri şöyledir:

Öğretmen: Evet çocuklar animasyonu izledik, ne diyorsunuz bir yorumunuz var mı?(Öğrencilerin büyük bir kısmı söz ister.) Evet Ali anlatır mısın?

Ali: Öğretmenim az önce izlediğimiz 2 ile bölünme kuralına benziyor. Fakat burada 10 ve 10'un katları bölünmediği için ayırmamız gerekiyor.

Öğretmen: Evet Ali çok haklısın.(İsmail söz ister.)

İsmail: Evet öğretmenim o yüzden 99 ve 1 diye ayırıyor. 99 3 ile bölündüğü için. Geriye bölünmeyenler kalıyor. Onlar da sayının kendi rakamları oluyor. O sayılar 3'ün katı olunca da sayı bölünüyor 3'e.

Öğretmen: Çok güzel İsmail. Peki, kolay bir ispat mı sizce? Daha sonra size sorulduğunda açıklamasını yapabilir misiniz?(Ali parmak kaldırır.)

Ali: Öğretmenim sayıları çözümledikten sonra gerisi çok kolay. Çözümleyip kaçla bölmemiz gerekiyorsa ona göre yorum yapacağız.

Ahmet: Öğretmenim ispatını öğrenince kendimi daha iyi hissettim, profesör gibi. (Öğrenciler gülerler.)

Sınıfta geçen diyalog incelendiğinde öğrencilerin yapılan ispatı anladıkları sonucuna ulaşmak mümkündür. İspatı yapabildiklerini gören öğrenciler kendilerini daha iyi hissettiklerini belirtmişlerdir.

Öğrenme amacına yönelik izlenen son animasyon kısmı 4 ile bölünebilme kuralıdır. Animasyonun izlenmesine geçmeden önce öğretmen sınıfa 4 ile bölünebilme kuralının nasıl ispatlanabileceği sorusunu yöneltmiştir.

Ali: Öğretmenim aynı diğerlerinde olduğu gibi bir sayı belirleriz. Onu çözümleriz. Yazdığımız sayıların 4 ile bölünüp bölünmediğine bakarız.

Öğretmen: Ali çok güzel. Dilersen şimdi animasyonu izleyelim. Bakalım ispatı nasılmış?

Animasyonun izlenmesinin ardından Ali söz ister.

Öğretmen: Söyle Ali.

Ali: Öğretmenim az önce söylediğim gibiymiş. Ben bu işi kaptım.

Görüldüğü gibi öğrenciler bölünebilme kurallarının ispatlarını anladıklarını belirtmişlerdir. Animasyonun tamamlanmasının ardından öğrencilere dağıtılan çalışma kâğıdını (EK 14'te verilmiştir.) doldurmaları istenmiştir. İncelenen çalışma kâğıtlarında öğrencilerin tamamının ispatı yapabildikleri görülmüştür.

Tablo 47

Öğrencilerin "Bölünebilme Kurallarını İspat Etme" Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
Bölünebilme Kuralları	2, 3 ve 4 ile bölünebilme kurallarını ispat etme	Animasyondan izlemeden önce	2, 3 ve 4 ile bölünebilme kurallarının ispat edilemeyeceğini belirtebilir. Bir örnek üzerinden ispat edebilir.	2, 3 ve 4 ile bölünebilme kurallarının ispat edilemeyeceğini belirtir. Bir örnek vererek kuralı ispatlar.
		Animasyondan izledikten sonra	2, 3 ve 4 ile bölünebilme kurallarını sayıları çözümleyerek ispat edebilir.	2, 3 ve 4 ile bölünebilme kurallarını sayıları çözümleyerek ispat eder.

Tablo 47 incelendiğinde etkinlikten önce belirlenen öğrenme varsayımlarının hepsine ulaşıldığı ve bu doğrultuda animasyon izlendikten sonra etkinliğin öğrenme amacına tam olarak ulaşıldığı görülmüştür.

4.4.1.2. Tam Sayıların Çarpımında Sonucun İşaretini İspat Etme

Araştırmada “Tam Sayıların Çarpımında Sonucun İşaretini İspat Etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda “Pozitif ve negatif iki tam sayının çarpımının negatif olması” ve “Negatif iki tam sayının çarpımlarının pozitif olması” kurallarının ispatları yapılmıştır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 15’te verilmiştir.

Araştırmacı animasyonların izlenmesi evresine geçmeden önce tahtaya iki tane işlem yazar. Bu işlemlerden biri $(-3) \cdot (+2)$ diğeri $(-3) \cdot (-3)$ ’dir. Öğrencilere bu işlemlerin işaretlerinin nasıl belirlendiği sorusunu yöneltir. Aşağıda bu soruya cevap veren öğrencilerle öğretmen arasında geçen diyalog verilmiştir.

Öğretmen: Evet Aycan sen söyle bakalım.

Aycan: Öğretmenim pozitif ve negatif çarpılınca sonuç negatif olur.

Öğretmen: Neden böyledir peki, neden pozitif değil de negatif?

Aycan: Öğretmenim, çünkü dostumun düşmanı düşmanımdır.

Öğretmen: Peki Aycan sence bu kuralı bulan matematikçiler bu sözle mi savunmuşlardır kendilerini?

Aycan: (Düşünür) Öğretmenim biraz saçma geliyor şimdi evet.

Konuşma metninde görüldüğü gibi öğrenciler bu kuralı genellikle “Dost-düşman” ilişkisi ile açıklamaktadırlar. Öğretmen bu kuralın matematiksel bir ispata dayandığını açıkladıktan sonra animasyonun izlenmesine geçilmiştir. Animasyonda bulunan interaktif çalışmalar sınıftaki tüm öğrencilerle beraber yapılmıştır. Animasyonun ilk kısmı izlendikten sonra öğrencilerden biri ile öğretmen arasında geçen diyalog şöyledir:

Öğretmen: Çocuklar ne düşünüyorsunuz animasyonla ilgili.

Murat: Öğretmenim ne kadar kolay bir sebebi varmış, biz neden böyle öğrenmedik ki?

Öğretmen: Çok kolaymış değil mi? Şimdi peki bizler başka sayı çiftleri için tekrar bir deneme yapalım. Nasıl başlamalıyız, hangi sayıları seçmeliyim?

Murat: Öğretmenim iki tane pozitif sayı seçelim ama küçük olsunlar.

Öğretmen: Neden böyle dedin?

Murat: Öğretmenim büyük seçersem örüntü çok uzar. O yüzden $(+4)$ ile $(+3)$ ’ü seçelim. Sonra $(+3)$ ’ü birer birer azaltayım. (Tahtaya işlemleri yapar) $(+4)$ ile 0 ’ı en son çarpınca sonuç 0 çıkıyor. $(+4)$ ile (-1) ’i çarpınca 0 ’dan 4 ’ü çıkaracağım. O da (-4) oluyor. Yani işareti negatif oluyor.

Öğretmen: Aferin Murat. Çok güzel.

Sınıfta üç öğrenci ile aynı çalışma yapıldıktan sonra animasyonun ikinci kısmının izlenmesine geçilir. Bu kısım izlendikten sonra sınıfta geçen diyaloglardan biri şöyledir:

Öğretmen: Çocuklar bu ispat için ne diyorsunuz? Evet, Salih söyler misin?

Salih: Öğretmenim az önce izlediğimiz gibi o animasyondakine benziyor. Örüntü gibi.

Öğretmen: Evet Salih. Bir ispat da sen yapabilir misin?

Salih: İki sayı seçerek az önce Murat'ın yaptığı gibi yapabilirim. Ama biri pozitif biri negatif seçmeliyim. (Tahtaya (+3) ile (-4) sayılarının çarpımını yazar) Öğretmenim bu +3'ü birer birer azaltacağım. (0'a gelene kadar devam eder (-4) ile 0'ın çarpımını 0 yazar) Öğretmenim bu adımdan sonra (-4) ile (-1)'in çarpımını örüntüden buluruz. Örüntü 4 artarak ilerliyor. 0'a 4 ekleyince o işlemin sonucunun pozitif olduğunu görürüz.

Öğrencilerle öğretmen arasında geçen görüşmelere bakıldığında kuralların ispatının anlaşıldığı görülmektedir. Animasyon izlendikten sonra öğrencilere çalışma kâğıtları (EK 16'da verilmiştir.) dağıtılmış, tüm öğrencilerin bu iki kuralı ispatlaması istenmiştir. Çalışma kâğıtları incelendiğinde tüm öğrencilerin ispatı yapabildikleri görülmüştür.

Tablo 48

Öğrencilerin "İki Tam Sayının Çarpımında Sonucun İşaretini İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
Çarpım İşaretleri	Tam Sayıların Çarpımında Sonucun İşaretini İspat Etme	Animasyon izlemeden önce	Tam sayıların çarpımlarında işaret kurallarının ispatlanmayacağını belirtebilir.	Dost- düşman örneği ile kuralı ispatlar. Bir örnek vererek kuralı ispatlar.
		Animasyon izledikten sonra	Tam sayıların çarpımlarında işaret kurallarını örüntü kullanarak ispat edebilir.	Tam sayıların çarpımının sonucunda işaretin negatif ya da pozitif olduğunu ispatlar.

Tablo 48 incelendiğinde etkinlikten önce belirlenen öğrenme varsayımlara ulaşıldığı ve bu doğrultuda animasyon izlendikten sonra etkinliğin öğrenme amacına tam olarak ulaşıldığı görülmüştür.

4.4.1.3. Sıfır Hariç Sayıların Sıfırın Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme

Araştırmada “Sıfır Hariç Sayıların Sıfırın Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda örüntü kullanarak ispat yapılmıştır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 17’de verilmiştir.

Derse giriş evresinde öğrencilerle üslü sayılar etkinliği yapılır. Üslü sayıların nasıl hesaplandığı, taban, üs, kuvvet kavramları hatırlatıldıktan sonra sıfırın kuvveti ile ilgili bir konuşma gerçekleştirilir. Sınıfa “ 5^0 kaçtır? Sorusunu yönelten öğretmen ile bir öğrenci arasında geçen diyalog şöyledir:

Ali: Öğretmenim bunun sonucu 0’dır.

Öğretmen: Nasıl buldun o sonucu Ali?

Ali: Öğretmenim 5 ile 0’ı çarptım.

Öğretmen: Peki Ali 3^2 nasıl hesaplanır o zaman?

Ali: Öğretmenim 3 ile 2’yi çarparız. 6’dır onun sonucu da.

Bu diyalogdan sonra öğretmen üslü sayılar konusunu kısaca öğrencilere hatırlatır. Sınıfta sıfırın kuvveti 1 ve 0 olduğunu söyleyen öğrenciler bulunmaktadır. Bu karmaşayı nasıl çözebilecekleri sorusunu sınıfa yönelten öğretmenle öğrenciler arasında geçen diyaloglardan biri aşağıda verilmiştir.

Öğretmen: Çocuklar bir kısmınız sıfırın kuvvete 0 diyor, bir kısmınız 1 diyor? Sizce matematikçiler de bu kararsızlığa düşmüş müdür? (Parmak kaldıran öğrencilerden Ali’ye söz verir)

Ali: Öğretmenim tabii ki de düşmüşlerdir. Çünkü bu karışık bir konu. Şöyle karar vermiş olabilirler. En çok kim hangi sayıyı söyledi ise o sayı kural olmuştur.

Öğretmen: Çocuklar Ali'ye katılıyor musunuz? (Öğrencilerin tümü evet cevabını verirler) Peki matematikçiler tüm kurallara böyle mi karar vermişler.(Salih parmak kaldırır)

Salih: Öğretmenim bence o çok saçma olurdu.

Öğretmen: Çocuklar matematiksel kurallar teoremler ispat edildikleri takdirde kabul edilirler. Yani sayıların sıfırcı kuvvetinin 1 olması ispat edilmiş. Dilerseniz sizle bu ispatın animasyonunu izleyelim.

Çalışmanın animasyon izleme kısmına geçildiğinde öğrenciler interaktif şekilde uygulamaya katılmışlardır. Animasyon izledikten sonra sınıfta yapılan görüşmelerde öğretmen ile öğrenci arasında geçen diyaloglardan biri şöyledir:

Melike: Öğretmenim bu çok mantıklı geldi bana. Ben hep karıştırıyordum sıfırcı kuvveti. Ama şimdi karışırsam da hemen sayı seçerek bunu bulabilirim.

Öğretmen: Haklısın Melike. Peki, şimdi sizlerle bu örüntüyü sayı yerine harf kullanarak yapalım. Mesela n^4 'ten başlayalım. n^4 4 tane n 'nin çarpımı ile bulunur. Melike bunu tahtada devam ettirir misin?

Melike: (Tahtaya gelir.) Öğretmenim n^3 'ten devam ederim. ($n^3 = n.n.n$ yazar) sonra n^2, n yazarım. En son n^0 kalıyor. Sonra sonuçlar arasındaki ilişkiye bakarız. Her adımda n 'ye bölüyor. O zaman sonuç n bölü n 'den 1 çıkıyor.

Melike ile öğretmeni arasında geçen diyaloga bakıldığında öğrencinin ispatı yapabildiği görülmektedir. Bu evredan sonra öğretmen ispat yapmaları için öğrencilere çalışma kâğıdı (EK 18'de verilmiştir.) dağıtmış ve cevapları kontrol etmiştir. Öğrencilerin tümü de ispatı yapabilmışlerdir.

Tablo 49

Öğrencilerin " Sıfır Hariç Sayıların Sıfırcı Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
Sıfırcı kuvvet	Sıfır Hariç Sayıların Sıfırcı Kuvvetinin 1 Olduğunu İspat Etme	Animasyon izlemeden önce	Sıfırcı kuvvet kuralının ispatlanmayacağını belirtebilir. Tek örnek vererek kuralı ispatladığını düşünebilir.	Sıfırcı kuvvet kuralının ispatlanmayacağını belirtir. Tek bir örnekle kuralı ispatlar.
		Animasyon izledikten sonra	Örüntü kullanarak kuralı ispat edebilir. Örüntüde harfli ifade kullanarak ispat edebilir.	Örüntü kullanarak kuralı ispat eder. Örüntüde harfli ifade kullanarak ispat eder.

Tablo 49 incelendiğinde etkinlikten önce belirlenen öğrenme varsayımlara ulaşıldığı ve bu doğrultuda animasyon izlendikten sonra etkinliğin öğrenme amacına tam olarak ulaşıldığı görülmüştür.

4.4.2. Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları

Araştırmada “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasının altında “Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme”, “Çokgenin İç Açısı Formülünü ispat etme” ve “Dairenin Alan Formülünü İspat Etme”, “Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme”, “Üçgenin alan formülünü ispat etme” alt öğrenme amaçlarına yönelik 5 etkinlik ve 5 animasyon ile öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Bu temada bulunan beş öğrenme amacının gerçekleştirilmesi için yapılan etkinlikler ve bu öğretim deneyine ait bulgular aşağıda verilmiştir.

4.4.2.1. Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme

Araştırmada “Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda görsel ispat yapılmıştır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 8’de verilmiştir.

Derse giriş evresinde öğrencilere “Üçgenin iç açıları toplamı kaçtır?” sorusunu yönelten öğretmen ile öğrencileri arasında geçen diyaloglardan biri şöyledir:

Öğretmen: Çocuklar üçgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Murat sen söyler misin?

Murat: Öğretmenim 180 derecedir.

Öğretmen: Peki Murat bu kural nereden gelmiştir?

Murat: Öğretmenim hiç düşünmemiştim, iki 90 derecenin toplamından dolayı mı?

Öğretmen: İki doksan derece üçgende olmaz ki ama.

Murat: Ama bir yükseklik indirince iki tarafında da 90 derece oluyor.

Görüşme incelendiğinde öğrencinin kuralı yanlış ispatlamaya çalıştığı görülmektedir. Bu soruya cevap veren başka bir öğrenci ile öğretmeni arasında geçen görüşme şöyledir:

Öğretmen: Canan sen ne diyorsun Murat’ın cevabına?

Canan: Öğretmenim bence o öyle ispatlanmaz. (Tahtaya gelir, bir üçgen çizer) Öğretmenim eşkenar üçgenlerin açıları 60 derece olduğundan o yüzden toplamı 180 derece oluyor.

Öğretmen: Peki Canan eşkenar üçgen olmayan üçgenlerde ne olacak?

Canan: Onların da açılarını yazabiliriz öğretmenim. Onların da toplamı 180 olur.

Öğretmen: Ama Canan sen o açıları 180° ’e tamamlayarak seçtin. Aslında ispat yapmış olmadın ki.

Canan ile öğretmeni arasında geçen görüşmeden sonra öğrencilere çalışma kâğıdı (EK 19’da verilmiştir.) dağıtılır. İspat esnasında paralel doğruların bir kesenle yaptığı açılarının özellikleri kullanılacağından çalışma kâğıdında bu kuralın hatırlatılması çalışması yapılmıştır. Çalışma kâğıtları tüm öğrenciler tarafından doldurulduktan sonra animasyonun

izlenmesi evresina geçilmiştir. Animasyon izledikten sonra sınıfta yapılan görüşmelerde öğretmen ile öğrenci arasında geçen diyaloglardan biri şöyledir:

*Öğretmen: Evet çocuklar ne diyorsunuz yapılan ispatla ilgili. (Salih parmak kaldırır)
Evet Salih söyler misin?*

Salih: Öğretmenim bence bu ispat çok mantıklı ve çok kolay. Hemen eve gidip ablama anlatacağım.

Öğretmen: Salih ablana nasıl anlatacağını tahtada bizlere anlatabilirsin.

Salih: Öğretmenim bir üçgen çizerim. (Tahtaya bir ABC üçgeni çizer) Sonra bu BC kenarına paralel bir doğru çizerim. Ama bu doğru A noktasından geçmeli. Sonra bu açılara bir isim veririm. (Açılara a, b, c yazar)

Öğretmen: Peki sonra ne yapacaksın?

Salih: Öğretmenim bu b açısının tersini şuraya yazarım, c açısının tersini buraya yazarım. (a açısının olduğu yerde bir doğru açı oluşturur) Burası doğru açı olduğu için o halde a artı b artı c 180 derece olur.

Öğretmen: Çok güzel Salih. Ablana da böyle anlatabilirsin bence.

Salih ile öğretmeni arasında geçen diyaloga bakıldığında öğrencinin ispatı yapabildiği görülmektedir. Bu evredan sonra öğretmen ispat yapmaları için öğrencilere çalışma kâğıdı(EK 20’de verilmiştir.) dağıtmış ve cevapları kontrol etmiştir. Öğrencilerin tümü de ispatı yapabilmışlerdir.

Tablo 50

Öğrencilerin " Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
Üçgende İç Açı	Üçgenin İç Açıları Toplamının 180° Olduğunu İspat Etme	Animasyon izlemeden önce	Bir üçgen üzerinde açı ölçüleri vererek ispat edebilir. İki 90 derecenin toplamı ile ispat edebilir.	Eşkenar üçgen ile kuralı ispat eder. İki 90 derecenin toplamı ile kuralı ispat eder.
		Animasyon izledikten sonra	Paralel doğru kullanarak görsel ispat yapabilir.	Paralel doğru kullanarak görsel ispat yapar.

4.4.2.2. Çokgenin İç Açı Formülünü İspat Etme

Araştırmada “Çokgenin İç Açı Formülünü İspat Etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda örüntü ile ispat yapılmıştır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 10’da verilmiştir.

Derse giriş evresinde tahtaya $(n - 2) \cdot 180$ formülünü yazan öğretmen sınıfa bu formülün ne formülü olduğu sorusunu yöneltir. Öğrencilerin çoğu iç açı toplam formülü olduğunu belirten cevaplar verir. Daha sonra öğretmen bu formülün nasıl bulunmuş olduğunu sorar. Bu soruya cevap veren Murat ile öğretmeni arasında geçen diyalog şöyledir:

Murat: Öğretmenim ben bunu tahtada anlatabilir miyim?

Öğretmen: Tabi Murat gel bakalım.

Murat: (Tahtaya bir kare çizer) Öğretmenim bunun kenar sayısı 4. Formüldeki gibi 4'ten 2'yi çıkarıp 180 ile çarpınca 360 çıkıyor. Yani dörtgenin de iç açı toplamı 360 derece olduğu için bu formül doğru.

Öğretmen: Peki Ahmet yaptığın şey doğru, ama bu formül bütün çokgenler için geçerli bir kural olduğu için şimdi hepsine böyle örnek mi vereceksin?

Murat: Öğretmenim hepsine örnek vermeye gerek yok ki. Bu yeterli bence. Formül kesin doğrudur.

Sınıfta Murat gibi ispatı tek örnek ile doğrulamaya çalışan öğrenciler ya da kuralın ispatlanamayacağını belirten öğrenciler bulunmaktadır. Öğretmen bu konuşmalardan sonra öğrencilere köşegen kavramını hatırlatmış ve çalışma kâğıdı (EK 21'de verilmiştir.) dağıtmıştır. Bu çalışma kâğıdında verilen çokgenlere belirtilen noktadan köşegen çizme çalışması yapılmıştır. Bu araştırmadan sonra animasyon izlenmiştir. İzlenen animasyondaki interaktif bölümler için tek tek öğrenciler görevlendirilmiştir. Bu çalışmalar tamamlandıktan sonra öğretmen sınıfa ispat ile ilgili görüşlerini sorar. Öğrencilerden Aylin soruya cevap vermek için söz alır.

Aylin: Öğretmenim üçgenin iç açısından yola çıkarak yapılmış ispat. Bence çok basit.

Öğretmen: Peki Aylin senden bu ispatı yapmanı istesem?

Aylin: Öğretmenim bunu adım adım yaparım. Önce bir üçgen çizerim kenar sayısını ve oluşan üçgen sayılarını bir yere not ederim. Sonra bir kare çizerim. Aynı şeyleri yazarım. Sonra beşgen çizerim. En son altıgen çizip her şekle bir noktadan köşegen çizerim. Sonra az önce söylediğim sayılar arasında bir ilişki kurarım. Buradan da kenar sayısının 2 eksiği farkı çıkıyor. Yani o kadar üçgen oluşuyor.

Öğretmen: Peki neden 180 ile çarpıyoruz?

Aylin Öğretmenim o oluşan üçgen sayısı onu 180 ile çarpınca iç açı toplamını buluyoruz.

Aylin ile öğretmeni arasında geçen diyaloga bakıldığında öğrencinin ispatı yapabildiği görülmektedir. Bu evredan sonra öğretmen ispat yapmaları için öğrencilere çalışma kâğıdı(EK 22'de verilmiştir.) dağıtmış ve cevapları kontrol etmiştir. Öğrencilerin tümü de ispatı yapabilmişlerdir.

Tablo 51

Öğrencilerin " Çokgenin İç Açı Formülünü İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
Çokgenin İç Açı Formülü	Çokgenin İç Açı Formülünü İspat Etme	Animasyon izlemeden önce	Örnek vererek ispat edebilir. Kuralın ispatlanamayacağını belirtebilir.	Bir çokgen üzerinde formülün yerine kenar sayısını koyarak ispat eder.
		Animasyon izledikten sonra	Örüntü ile kenar sayısı ve üçgen sayısı arasındaki ilişkiyi kurarak ispat yapabilir.	Örüntü ile kenar sayısı ve üçgen sayısı arasındaki ilişkiyi kurarak ispat yapar.

4.4.2.3. Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme

Araştırmada “Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda görsel ispat yapılmıştır. Animasyonda dört bölüm bulunmaktadır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 23’te verilmiştir.

Derse giriş kısmında öğretmen tahtaya kare dikdörtgen paralelkenar ve yamuk çizmiştir. Ve altlarına alan formüllerini yazmıştır. Öğrencilere bu formüllerin nasıl bulunduğu sorusunu yöneltmiştir. Öğrencilerden biri ile öğretmen arasında geçen diyaloglardan biri aşağıda verilmiştir.

Cesur: Öğretmenim ölçmüşlerdir bence sonra deneye deneye bu formüllere ulaşmışlardır.

Öğretmen: Peki alan nasıl ölçülebilir ki?

Cesur: Öğretmenim kenarlarını ölçüp çarpalım.

Öğretmen: Ama o zaman formülü kullanmış olmuyor muyuz Cesur?

Cesur: Evet öğretmenim haklısınız ya. Nasıl bulundu ki o formüller.

Başka bir öğrenci ile öğretmeni arasında geçen diyalog ise şöyledir:

Ali: Öğretmenim paralelkenarın alanı iki kenarın çarpımı ile bulunur.

Öğretmen: Ama Ali formülde taban ile tabana ait yüksekliğin çarpımı yazıyor.

Ali: Öğretmenim yükseklik zaten o kenara eşittir ki.

Öğretmen: Peki Ali o zaman tahtaya bir paralelkenar çizebilir misin?

Ali: (Tahtaya çizimi yapar, ABCD isimlendirmesini yapar) Çizdim.

Öğretmen: Şimdi de A köşesinden CD kenarına bir yükseklik çiz.

Ali: (Çizimi yapar)

Öğretmen: Şimdi de o yüksekliğin tabanla yaptığı açığı yaz.

Ali: (90 derece yazar)

Öğretmen: Peki Ali şimdi o yüksekliğin tabanla kesiştiği noktaya bir E harfi verelim.

Sence AEC üçgeninin en uzun kenarı hangisi?

Ali: AC kenarı öğretmenim.

Öğretmen: Ona en büyük diyorsak AE ondan daha kısadır değil mi? Ama sen eşit olduğunu söylemiştin.

Ali: (Şaşırır) Evet öğretmenim doğru ya. O zaman ben yanlış söyledim.

Sınıfta yapılan bu konuşmalardan öğrencilerin alanla ilgili eksik ve yanlış öğrenmelerinin olduğu, alan formüllerinin ispatı ile ilgili bilgiye sahip olmadıkları ortaya çıkmıştır. Derse giriş kısmı bittikten sonra animasyon izleme kısmına geçilmiştir. Animasyonda her dörtgen ispatından sonra animasyon durdurulmuş, sınıfta ispatla ilgili konuşmalar yapılmıştır. Bu konuşmalardan biri aşağıda verilmiştir.

Salih: Öğretmenim paralelkenarın ispatı çok kolaydı. Hiç öyle düşünmemiştim.

Köşeden bir yükseklik çiziyoruz ve ortaya çıkan üçgeni öbür tarafa taşıyoruz.

İsmail: Evet öğretmenim gördüğüm en kolay ispat olabilir.

Animasyon izlendikten sonra öğretmen öğrencilere bir çalışma kâğıdı dağıtır. Dörtgenlerin ispatlarını yapmalarını ister. Cevapları kontrol eden öğretmen sadece yamuğun alanının ispatını yapamayan 3 öğrenci tespit eder. Bu üç öğrenci ile ders çıkışında animasyonu tekrar izlerler. İzleme bittikten sonra ispatları yapabildikleri görülmüştür.

Tablo 52

Öğrencilerin " Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
Dörtgenlerin Alanları	Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme	Animasyon izlemeden önce	Örnek vererek ispat edebilir. Kuralın ispatlanamayacağını belirtebilir.	Kenarlara sayısal değerler vererek formülde yerine koyar. Kuralların ispatlanamayacağını belirtir.
		Animasyon izledikten sonra	Görsel ispat ile formülleri ispat eder.	Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini görsel ispat yöntemi ile ispatlar.

4.4.2.4. Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme

Araştırmada “Üçgenin alan formülünü ispat etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda görsel ispat yapılmıştır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 24’te verilmiştir.

Derse giriş kısmında öğretmen tahtaya bir dik üçgen çizer ve alan formülünü yanına yazar. Öğrencilere bu formülün nasıl bulunmuş olabileceği sorusunu yöneltir. Bu soruya cevap veren Melike ile öğretmeni arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

Melike: Öğretmenim bunu bir örnekle ispatlayabilirim.

Öğretmen: Tahtaya gelip göster bakalım.

Melike: (Tahtaya gelir. Bir dik üçgen çizer kenarlarına 3, 4 ve 5 yazar) Öğretmenim bu dik üçgenin alanını hesaplayalım formülle. 3 çarpı 4 bölü 2. Yani sonuç 6 çıkıyor.

Öğretmen: Peki Melike onun alanının 6 olduğunu doğrulayan şey nedir?

Melike: Öğretmenim işte formülü uygulayınca alanı buluyoruz.

Bu diyalogdan sonra öğretmen sınıfa Melike'nin ispat yapıp yapmadığını sorar.

Öğrencilerden İsmail'e söz verir.

İsmail: Öğretmenim bence o ispat olmadı, çünkü üçgenin alanının 6 olduğuna nerden emin olabiliriz ki. Belki alanı 8 ama formül yanlış belki.

Bu konuşmanın ardından öğretmen animasyonu izletmeye başlar. Animasyonda önce dik üçgenin sonra dar açılı üçgenin en son kısımda da geniş açılı üçgenlerin alanları ispatlanır. Animasyon izlemesi bittikten sonra öğretmen dersin başında sorduğu soruyu tekrar sınıfa yöneltir. Ve Melike tekrar cevaplamak için söz alır.

Melike: Öğretmenim aslında şöyle ispat etmem gerekiyormuş. O çizdiğim dik üçgeni bir dikdörtgene tamamlayayım. 5 de o dikdörtgenin köşegeni olsun. İşte bu dikdörtgenin alanı uzun ve kısa kenarın çarpımı. Ama benim çizdiğim üçgen bunun alanının yarısı. O yüzden de bu çarpımı ikiye bölüyorum.

Öğretmen: Aferin Melike bu kez oldu sanırım. (Gülerler.)

Öğretmen bu konuşmalardan sonra öğrencilere üçgenin alan formüllerini ispat etmeleri için bir çalışma kâğıdı verir(EK 25'te verilmiştir.). Bu çalışma kâğıdında bulunan bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir. Çalışma kâğıtlarında bulunan diğer öğrenci cevaplarını hepsinin de doğru olduğu görülmüştür.

Tablo 53

Öğrencilerin " Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
Üçgenin Alan Formülü	Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme	Animasyon izlemeden önce	Özel bir dik üçgen çizerek formülü ispat edebilir. Kuralın ispatlanamayacağını belirtebilir.	Özel bir dik üçgen çizerek formülde değerleri yerine koyarak ispat eder. Kuralın ispatlanmayacağını belirtir.
		Animasyon izledikten sonra	Dikdörtgenin alanından yararlanarak formülü ispat edebilir.	Dikdörtgenin alanından yararlanarak, dik üçgen, dar açılı üçgen ve geniş açılı üçgen için formülü ispat eder.

4.4.2.5. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme

Araştırmada “Dairenin Alan Formülünü İspat Etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda görsel ispat yapılmıştır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 11’de verilmiştir.

Derse giriş kısmında öğretmen tahtaya bir daire çizer ve alan formülünü yanına yazar. Öğrencilere bu formülün nasıl bulunmuş olabileceği sorusunu yöneltir. Bu soruya cevap veren öğrencilerden biri ile öğretmeni arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

Burak: Öğretmenim alan birimleri hep kareli olduğu için yarıçapın karesini alıyor.

Öğretmen: Peki Burak neden π ile çarpıyor.

Burak: Öğretmenim çünkü çevreyi bulurken de π ile çarpıyoruz. Alanda da π ile çarparız.

Öğretmen: Yani çevrede çarpılmasa idi burada da çarpılmazdı öyle mi?

Burak: Evet öğretmenim.

Konuşmaya bakıldığında öğrenci dairenin alan formülü ispatını doğru açıklayamamıştır. Sınıftaki diğer öğrencilerden biri ile geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

Melike: Öğretmenim bunu yarıçap değerini yerine koyarak yapabiliriz.

Öğretmen: Nasıl yanı Melike?

Melike: Öğretmenim diyelim ki yarıçapı 10 olsun. 10'un karesini alırsak 100, 3 ile çarparız 300. Bence alan formülü doğru.

Öğretmen: Peki ama Melike o dairenin alanının 300 olduğuna nereden emin olduk.

Melike: Öğretmenim çünkü formül kesinlikle doğrudur. Kaç senelerdir bu formülü kullanıyoruz. Yanlış olsa düzeltirlerdi.

Öğretmen Melike'nin bu cevabından sonra sınıfa şöyle bir açıklamada bulunur:

Öğretmen: Çocuklar şimdi az önce Melike'nin söylediği yanlış olsa düzeltirlerdi cümlesini düşünelim. Matematikçiler verdikleri formüllerin doğru olup olmadıklarına nasıl karar veriyorlar. Herkese bu formülleri nasıl kabul ettiriyorlar? (Birkaç öğrenci ispatlayarak der) Evet, doğru ispatlayarak. Ama bu ispatın matematiksel kurallar dışına çıkmaması, ispatta kullandığımız kelimelerin, şekillerin de matematiğe ve akla uygun olması gerekir. Şimdi dilerseniz animasyonumuzu izleyelim. Bakalım nasıl ispatlanıyormuş.

Öğretmenin bu konuşmasından sonra animasyon izleme kısmına geçilir. Öğrenciler animasyonu iki kez izlemek istedikleri için tekrar izletildikten sonra öğretmen öğrencilerle konuşur. Öğrencilerden biri ile arasında geçen diyalog şöyledir:

İsmail: Öğretmenim izlemesi çok zevkli bir ispattı.

Öğretmen: Ne yapıldığını anlatabilir misin peki?

İsmail: Öğretmenim daireyi halkalardan oluşmuş bir madde gibi düşünüyoruz. Sonra o halkaları aynı yerden kestiğimizi ve o halkaları düzleştirip üst üste koyduğumuzu

düşünüyoruz. O da piramit gibi üste doğru azalıyor. Ve şekil bir üçgene benziyor. Bu üçgenin tabanı dairenin çevresi kadardır $2\pi r$, tabana ait yükseklik ise yarıçap kadardır yani r . Bu üçgenin alanı da $\frac{2\pi r \cdot r}{2}$ ile bulunur. 2'ler sadeleşir. Alan $\pi r \cdot r$ olur yani πr^2 'dir.

İsmail ile öğretmeni arasında geçen görüşmeye bakıldığında İsmail'in animasyonda anlatılan ispatı anladığı ve açıklamasını yaptığı görülmüştür. Bu konuşmadan sonra öğretmen öğrencilere bir çalışma kâğıdı dağıtmış ve ispatı adım adım göstermelerini istemiştir. Verilen cevapları kontrole den öğretmen öğrencilerin tümünün ispatı yapabildiklerini görmüştür.

Tablo 54

Öğrencilerin " Dairenin Alan Formülünü İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
				Yarıçapa bir değer vererek formülde yerine koyar, ispatladığını düşünür.
		Animasyon izlemeden önce	Kuralın ispatlanamayacağını belirtebilir.	Kuralın ispatlanamayacağını belirtir.
Dairenin Alan Formülü	Dairenin Alan Formülünü İspat Etme	Animasyon izledikten sonra	Görsel ispatla formülü ispatlayabilir.	Görsel ispat yaparak formülü ispatlar.

4.4.3. Cebir Öğrenme Alanı İspatları

Araştırmada “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” temasının altında “Toplam formülünü ispat etme” alt öğrenme amacına yönelik 1 etkinlik ve 1 animasyon ile öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Bu temada bulunan bir öğrenme amacının gerçekleştirilmesi için yapılan etkinlikler ve bu öğretim deneyine ait bulgular aşağıda verilmiştir.

4.4.3.1. Toplam Formülünü İspat Etme

Araştırmada “Toplam Formülünü İspat Etme” öğrenme amacına yönelik geliştirilen animasyonda iki tür ispat yapılmıştır. Animasyona ait ekran görüntüleri EK 9’da verilmiştir. Geliştirilen bu animasyonda iki tür ispat yapılmıştır. İspatlardan ilki görsel ispat iken ikincisi cebirsel ispattır. Pilot uygulamada olduğu gibi animasyona geçmeden önce sınıfta toplam formülü ile ilgili giriş etkinliği yapılmıştır. Bu etkinlikte formülü bulan ünlü matematikçi Gauss ‘un hikâyesinden bahsedilmiştir.

Öğretmen: (Tahtaya Gauss ‘un fotoğrafını yansıtır.) Çocuklar bu fotoğraftaki kim tanıyan var mı çocuklar?

Öğrenciler: Hayır öğretmenim.

Öğretmen: Çocuklar resimde gördüğünüz kişi ünlü matematikçi Gauss. Ona Matematikğin Prensi derler. 3 yaşındayken bile babasının yaptığı işlemlerdeki hataları bulduğu söylenir.

Öğrenciler: (Şaşırarak ilgi ile dinlemeye devam ederler.)

Öğretmen: Bugün sizlerle Gauss ‘un ilkokulda bulduğu bir formülü ispatlayacağız.

Öğrenciler: Öğretmenim nasıl bulmuş ki?

Öğretmen: Gauss ‘un ilkokul öğretmeni öğrenciler sınıfta oyalansınlar diye tahtaya bir soru yazıyor. Soru şu (tahtaya soruyu yazar $1+2+3+4+5+...99+100=?$). Gauss ‘un öğretmeni öğrencilerinden bu sayıları toplamalarını ister. İşlemin çok uzun süreceğini ve öğrencilerin bir süre bu işlemle uğraşacağını düşünür. Fakat Gauss cevabı birkaç saniye içinde bulur. Herkes hayrete düşer. Formülün ne olduğunu ve nasıl bulunduğunu merak ediyor musunuz?

Öğrenciler: (Hep birlikte evet derler)

Öğrencilerin dikkatlerinin ve meraklarının yoğunlaştığı bu etkinlik sonrasında animasyon izletilmiş ve ispat tartışılmıştır. Animasyonun ilk kısmı izlendikten sonra öğretmen ile bir öğrenci arasında şu diyalog geçmiştir.

Öğretmen: Gizem yapılan ispatı biraz açıklayabilir misin?

Gizem: Tabi öğretmenim. Şimdi bir sayı dizisi yazayım 1’den n’ye kadar. Daha sonra bu dizinin altına tam tersi olacak şekilde başka bir dizi yazayım. Yani n’den 1’e kadar

olsun. Sonra bu iki diziye toplayayım. İlk terimleri toplayınca $n+1$ oluyor. İkinci terimleri de toplayınca $n+1$ oluyor. Hep böyle gider.

Öğretmen: Peki Gizem bu $n+1$ 'den kaç tane var?

Gizem: Öğretmenim n tane var. Çünkü sayılar n 'e kadardı.

Öğretmen: Aferin Gizem. Peki bu sayıların toplamı ne oluyor.

Gizem: Öğretmenim n tane $n+1$ oluyor yani n çarpı $n+1$.

Öğretmen: Peki ama bu formüldeki değere uymuyor.

Gizem: Öğretmenim bunu ikiye bölmeliyiz. Çünkü bu bulduğum değer iki tane dizinin toplamı. Yani formül (tahtaya yazar) $\frac{n.(n+1)}{2}$ 'dir.

Animasyonun ilk kısmından sonra ikinci kısmına geçilir. Bu bölümde görsel ispat yapılmıştır. İspat animasyonu izlendikten sonra öğrencilere çalışma kâğıdı dağıtılır. Bu çalışma kâğıdında animasyondaki anlatımda bulunan görseller kullanılmıştır (EK 26'da verilmiştir.).

İzlenen animasyondan sonra öğrencilerden ispat türlerinden birini seçerek ispat yapmaları istenmiştir. Bu evrede öğrencilerin çoğu görsel ispatlama yoluna giderken diğer kısmı da cebir kullanarak ispat yapmıştır. Bu formülün ispatı ile ilgili sınıfta yapılan konuşmalardan biri şöyledir.

Öğretmen: Çocuklar bu yaptığımız ispatla ilgili söylemek istediğiniz bir şey var mı?

Burak: Öğretmenim bu ispat çok kolay bir şeymiş. Mesela ben bu formülü unutsam sayıları yazarım. Sonra sayıları tersten yazarım ve formül aklıma gelir. İspat yapmak hem çok zevkli bir iş. Hem de formülleri unutsak bile bize sonradan buldurabilen bir şey.

Öğrencilerin doldurdıkları çalışma kâğıtları incelendiğinde hepsinin ispat yapabildikleri görülmüştür.

Tablo 55

Öğrencilerin " Toplam Formülünü İspat Etme " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
Toplam Formülü	Toplam Formülünü İspat Etme	Animasyon izlemeden önce	Kuralın ispatlanamayacağını belirtebilir. Tek bir örnekler ispatı doğrulayabilir.	Bir sayı dizisi yazar ve formülde değerleri yerine koyup doğru olduğunu belirtir. Kuralın ispatlanmayacağını belirtir.
		Animasyon izledikten sonra	Görsel formülü ispatlayabilir. Cebir kullanarak ispat yapabilir.	Görsel ispat yaprak formülü ispatlar. Cebir kullanarak ispat yapar.

4.4.4. İspat Algısı

Araştırmada “İspat algısı” temasına ait bir animasyon ile öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Araştırmadan önce bu temaya ait ön görüşme testinde 2 soru bulunmaktadır. Bu sorularda öğrencilerin ispat kavramı ile doğrulama arasındaki farka yönelik farkındalıklarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır.

Öğrenciler araştırmadan önce yapılan bu testteki sorularda doğrulamanın ve örnek vermenin ispat yapmak olduğunu ifade etmişlerdir. Tek bir örnek vererek ispatlama yapıldığını düşünen bir öğrenci ile yapılan görüşmeye ait diyalog aşağıda verilmiştir.

Öğretmen: Neden bu cevabın ispat olduğunu düşündün Ali?

Ali: Öğretmenim çünkü verdiği örnekler doğru olmuş. Biraz daha deneme yapsaydı daha iyi ispat yapmış olurdu.

Öğretmen: Kaç kere daha örnek vermeli peki?

Ali: Yani 3 tane filan yapsa tam doğru olmuş olur.

Başka bir öğrenci ile yapılan görüşmeye ait diyalog ise şöyledir.

Öğretmen: Neden bu cevabı seçtin Murat?

Murat: Öğretmenim burada harfle yapılan ispatlar yanlış bence. Sayıları kullanmak daha mantıklı. Daha çok ikna edici. Harf kullanınca doğru mu yanlış mı bilemeyiz ki.

Öğretmen: Peki bir tane sayı da doğru olması tüm sayılar için doğru olduğunu nasıl gösterir.

Murat: Öğretmenim mesela birkaç tane küçük sayılar birkaç tane büyük sayılar denenebilir. O zaman tüm sayıları denemeye gerek kalmaz.

Öğrenci cevapları ile ilgili yapılan görüşmelerden sonra ispat ile ilgili animasyonlar izlenmiştir. Animasyon izlendikten sonra yapılan öğrenci görüşmelerinden biri şöyledir.

Öğretmen: Ali araştırmadan önce ispat yapmak için bir örnek vermenin yeterli olduğunu düşünüyordun. Şu an bu düşüncen değişti mi?

Ali: Evet öğretmenim değişti. Tek bir örnek vermenin ispat yapmak için yeterli olmadığını gördüm. Tüm sayılar için doğru olduğunu göstermek gerekiyor. Bunu için harfli ifade kullanılabilir.

Tablo 56

Öğrencilerin " İspat Algısı " Öğrenme Amacına Yönelik Öğrenme Çıktıları

Etkinlik Adı	Öğrenme Amacı	Animasyon Kullanma Durumu	Öğrenme Varsayımları	Öğrenme Çıktıları
İspat Algısı	İspat Algısı	Animasyon izlemeden önce	Örnek vermenin ispat yapmak olduğunu belirtebilir.	Tek bir örnek vermenin ispatlama olduğunu belirtir. Birden fazla örnek vermenin ispat yapmak olduğunu belirtir.
		Animasyon izledikten sonra	Örnek vermenin ispat yapmak olmadığını belirtebilir.	Örnek vermenin ispat yapmak olmadığını belirtir.

4.5. Geçmişe Dönük Analizler Evresi

Geçmişe dönük analizler evresi bu araştırmada son evredir ve bu evrede öğretim aşamaları esnasında toparlanan tüm gözlem, görüşme notları, video kayıtları ve ön-son klinik mülakatlarından toplanan verilerin irdelenmiş, geçmişe dönük analizleri yapılmıştır.

Tasarı araştırması doğrultusunda uygulanan bu araştırmanın uygulama aşamasının son evresi olan ve araştırmanın öğretim süreci boyunca elde edilen tüm verilerin birlikte analiz edilerek öğrencilerin ispat animasyonları ve öğretime etkinlikleri ile ispat öğrenme süreçlerinin açığa çıkarıldığı geçmişe dönük analizler evresi bu bölümde ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Bu evrede araştırmanın uygulama süreci boyunca elde edilen veriler Varsayımlara bağlı Öğrenme güzergâhı ile karşılaştırılmıştır.

Geçmişe dönük analizler evresine ilişkin sonuçlar, varsayımlara bağlı öğrenme güzergâhında bulunan öğrenme amaçları doğrultusunda oluşturulan;

- Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları
- Geometri ve Ölçme öğrenme Alanı İspatları
- Cebir Öğrenme Alanı İspatları
- İspat algısı

Temaları ve temaya ait alt başlıklar altında verilmiştir. Her temaya ve alt başlığa ilişkin

- Ön klinik mülakatlardan elde edilen veriler,
- Varsayımlara bağlı öğrenme güzergâhında bulunan öğrenme varsayımları,
- Öğretim deneyinden elde edilen öğrenme çıktıları
- Son klinik mülakatlardan elde edilen veriler

Tablolarda verilerek, her temaya ve temaya ait alt başlığa ilişkin sonuçlar ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

4.5.1. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçlarına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları

“Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan öğrenme amaçları doğrultusunda öğrencilere ön klinik ve son klinik mülakatlarda toplam 5 soru yöneltilmiştir.

Bu temaya ait öğrenme amaçları şöyledir;

1. Bölünebilme Kurallarını İspat Etme
2. İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme
3. Zıt işaretli sayılarının çarpımının negatif olduğunu ispat etme
4. Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme

Araştırmanın öğretim deneyi evresinde ise; bu amaçlar kapsamında öğrencilerle dört etkinlik gerçekleştirilmiştir. Tablo 57 'de bu temaya ait öğrenme amaçlarına ilişkin yapılan geçmişe dönük analizler sonucunda öğrencilerin zihinsel süreçleri verilmiştir.

Tablo 57

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçlarına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları

Öğretim Deneyi Evresi							Son Klinik mülakat verileri
Ön Klinik mülakat Sonuçları	A.Bölünebilme Kurallarını İspat Etme		B.İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme C.Zıt işaretli sayılarının çarpımının negatif olduğunu ispat etme		D. Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme		
	Varsayımlar	Öğrenme Çıktıları	Varsayımlar	Öğrenme Çıktıları	Varsayımlar	Öğrenme Çıktıları	
A.Bu bir kuraldır ve ispat edilemez A.Tek bir örnek vererek ispat etme B.Çünkü düşmanımın düşmanı benim dostumdur- B.İki sayının başındaki eksiler çarpım durumunda artı olur B.Bu kuralı kullanıyorum ama ispatlayamam C.Çünkü düşmanımın dostu benim düşmanımdır.- C. Çünkü bir artı ile bir eksi eder. D. Sıfırcı kuvvetin bir olmasının sebebi sıfırın bir değeri olmamasından dır D. Bu kuralı çok iyi biliyorum ama ispatlayamam	Öğrenciler kuralların ispat edilemeyeceğini belirtebilir. Sadece bir örnekle kuralı ispat edebileceğini düşünebilir.	2, 3 ve 4 ile bölünebilme kurallarını sayıları çözümleyerek ispat eder.	Tam sayıların çarpımlarında işaret kurallarının ispatlanmayacağını belirtebilir.	Tam sayıların çarpımının sonucunda işaretin negatif ya da pozitif olduğunu ispatlar.	Sıfırcı kuvvet kuralının ispatlanmayacağını belirtebilir. Tek örnek vererek kuralı ispatladığını düşünebilir.	Örüntü kullanarak kuralı ispat eder. Örüntüde harfli ifade kullanarak k ispat eder.	A. Sayıları çözümleyerek ispatı yapma A. Gösterilen ispatlardan hangisinin doğru ispat olduğunu belirtenler B. Örüntü ile ispat etme C. Örüntü ile ispat etme D. Örüntü ile ispat etme D. Örüntünün sonunda cebirsel bir çıkarımda bulunarak ispat etme

Tablo 57’ de verilen “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait öğrenme amaçlarına ilişkin geçmişe dönük analiz sonuçları incelendiğinde; öğrencilerin ön klinik mülakatlarda verilen kuralların ya da ifadelerin ispat edilemeyeceğini ifade ettikleri görülmüştür. Bunun dışında öğrencilerin çoğu bir örnek vererek ispatı tamamladıklarını düşündükleri görülmüştür. Kuralların matematikçiler tarafından rasgele koyulduğunu belirten öğrenciler de bulunmaktadır. Öğretim deneyi evresinde ispat animasyonları ve öğretim etkinlikleri gerçekleşen öğretim süreci sonunda öğrencilerin ispat yapabildikleri görülmüştür. Bu temaya ait öğrencilerin en kolay kavradıkları ispat Sıfırıncı Kuvvet adlı animasyonda anlatılan ispat olmuştur. En zorlandıkları ispat ise bölünebilme kurallarına ait ispat olmuştur. Bunun sebebi olarak öğrenciler ispatta harfli ifadelerin kullanılmış olmasını ileri sürmüşlerdir. Bu temaya ait son klinik mülakat soruları incelendiğinde öğrencilerin hepsinin ispat düzeylerinin 4. Düzeye çıktığı görülmüştür.

4.5.1.1. Bölünebilme Kurallarını İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları

Bölünebilme Kurallarını İspat Etme öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring’e göre ispat düzeyleri ve Tablo 58’de verilmiştir.

Tablo 58

Bölünebilme Kurallarını İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
Bölünebilme Kurallarını İspat Etme	İspat Düzeyi 0	Ön1Böl, Ön2Böl, Ön5Böl
	İspat Düzeyi 1	Ön3Böl, Ön4Böl, Ön6Böl, Ön7Böl
	İspat Düzeyi 3	Son1Böl, Son3Böl
	İspat Düzeyi 4	Son2Böl

Ön-Böl kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Böl kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 15-24’de verilmiştir.

10) 3 ile bölünebilme kuralı sayıdaki rakamların toplamının 3 veya 3'ün katı olmasıdır.

Bu kuralı ispat ediniz.

$$3.5 = 15 \frac{3}{6}$$

eğer 3'ün katı veya 3 olmasa bölme işlemi ya kalanlı olur ya da ondalık sayı buluruz. Eğer 3'ün katı olursa bölme işlemi kalanlı ya da ondalık olmaz.

Şekil 15. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön1Böl)

10) 3 ile bölünebilme kuralı sayıdaki rakamların toplamının 3 veya 3'ün katı olmasıdır.

Bu kuralı ispat ediniz.

Biliyorum ama ispatlayamıyorum

Şekil 16. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön2Böl)

10) 3 ile bölünebilme kuralı sayıdaki rakamların toplamının 3 veya 3'ün katı olmasıdır.

Bu kuralı ispat ediniz.

93 sayısının 3'e bölünebilme kuralına bakarsak
 $9 + 3 = 12$
 $= 12 : 3 = 4$

Şekil 17. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön3Böl)

10) 3 ile bölünebilme kuralı sayıdaki rakamların toplamının 3 veya 3'ün katı olmasıdır.

Bu kuralı ispat ediniz.

348 sayısını alalım hepsini topladığımızda
 $3 + 4 + 8 = 15$ çıkıyor 15 sayısı 3'ün katı olmadığı için
tam bölünmek

Şekil 18. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön4Böl)

11) "Son iki basamağı 00 veya 4'ün katı olan sayılar 4 ile kalansız bölünebilir."

Aylin Öğretmen öğrencilerden bu ifadeyi ispat etmelerini istiyor. Hangi öğrencinin cevabı bu ifadenin ispatıdır? Nedenini belirterek yazınız.

Yarkin'ın Cevabı

Bence doğru şu iki sayıyı ele alalım. 100 ve 124.

$$100:4=25$$

$$124:4=31$$

Bu iki sayı için doğru olduğundan, ifade ispat edilmiş olunur.

Yarkin'in cevabı ispat eder çünkü soru sıfırlı ve 4'ün katı olan sayılar göstermiştir.

Şekil 19. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön5Böl)

12) "Birler basamağındaki rakam 0, 2, 4, 6, 8 olan sayılar 2 ile kalansız bölünebilir."

Bu ifadeyi ispat ediniz.

Yani 2'ye bölünebilmesi için birinin katı olması gerekir.
388, 416, 998 gibi sayılar tam bölünebilir.

Şekil 20. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön6Böl)

11) "Son iki basamağı 00 veya 4'ün katı olan sayılar 4 ile kalansız bölünebilir."

Aylin Öğretmen öğrencilerden bu ifadeyi ispat etmelerini istiyor. Hangi öğrencinin cevabı bu ifadenin ispatıdır? Nedenini belirterek yazınız.

Damla'nın Cevabı

Bence doğru, üç tane sayı düşünelim.

$$16:4=4$$

$$116:4=29$$

$$1116:4=279$$

Bu üç sayı da 4 ile bölünebilir. Bu sebepten kural doğrudur.

Bence Damla'nın cevabı doğrudur. Çünkü üç tane örnek vermiş ve sonuca ulaşmış. Bu cevabı

Şekil 21. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön7Böl)

- 10) 3 ile bölünebilme kuralı sayıdaki rakamların toplamının 3 veya 3'ün katı olmasıdır.
Bu kuralı ispat ediniz.

ABC sayısını ele alalım.

$$100A + 10B + C$$

$$\begin{array}{r} \wedge \\ 99A + A + 9A + B + C \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ 3'e \quad 3'e \\ \text{bölünür} \quad \text{bölünür} \end{array}$$

O halde $A+B+C$ 3'ün katı olmalı.

Şekil 22. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son1Böl)

- 11) "Son iki basamağı 00 veya 4'ün katı olan sayılar 4 ile kalansız bölünebilir."

Aylin Öğretmen öğrencilerden bu ifadeyi ispat etmelerini istiyor. Hangi öğrencinin cevabı bu ifadenin ispatıdır? Nedenini belirterek yazınız.

Yağmur'un Cevabı

ABCD sayısını ele alalım.

Bu sayının çözümlenmiş halini yazalım.

$$1000 \times A + 100 \times B + 10 \times C + 1 \times D$$

İfadesinde $1000 \times A$ ve $100 \times B$ sayıları 4 ile tam bölünür.

$$\cancel{1000} \times A + \cancel{100} \times B + 10 \times C + 1 \times D$$

O halde sayının 4'e tam bölünmesi için

$10 \times C + 1 \times D$ ifadesinin 4'e tam bölünmesi yeterlidir.

Bu sebeple son iki basamağın 00 ya da 4'ün bir katı olması gerekir.

Yağmur'un cevabı ispatıdır. Nedeni ise her sayı kullandığı zaman sonuç doğru çıkar.

Şekil 23. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son2Böl)

12) “Birler basamağındaki rakam 0, 2, 4, 6, 8 olan sayılar 2 ile kalansız bölünebilir.”

Bu ifadeyi ispat ediniz.

Handwritten student answer for the proof of divisibility by 2. The student writes: "Sayısı seçelim ve gözümleyelim" (Choose a number and look at it). Then, they write the general form of a number: $10000A + 1000B + 100C + 10D + E$. Below this, they show that each term is divisible by 2: $10000A$ is divisible by 2, $1000B$ is divisible by 2, $100C$ is divisible by 2, $10D$ is divisible by 2, and E is divisible by 2. The student concludes that the entire number is divisible by 2. The list of possible digits for E is given as 0, 2, 4, 6, 8.

Şekil 24.Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son3Böl)

4.5.1.2. İki Negatif Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme ve Zıt İşaretleli Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları

İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme ve Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring'e göre ispat düzeyleri ve Tablo 59'da verilmiştir.

Tablo 59

İki Negatif Sayının Çarpımının Pozitif Olduğunu İspat Etme ve Zıt İşaretleli Sayıların Çarpımının Negatif Olduğunu İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme ve Zıt işaretli sayıların çarpımının negatif olduğunu ispat etme	İspat Düzeyi 0	Ön2Tam, Ön4Tam, Ön5Tam
	İspat Düzeyi 1	Ön1Tam, Ön3Tam
	İspat Düzeyi 4	Son1Tam, Son2Tam

Ön-Tam kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Tam kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 25-31'de verilmiştir.

7) " Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir."

"İki negatif sayının çarpımı pozitifdir." Bu iki ifadeden birini ispatlayınız.

$$(-2) \cdot (-6) = (+12)$$

Bu iki sayının
başındaki eksi
çarpım durumunda
artı olur.



Şekil 25. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön1Tam)

7) " Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir."

"İki negatif sayının çarpımı pozitifdir." Bu iki ifadeden birini ispatlayınız.



Bu ifadeleri kullanıyorum ama ispatlayamam.

Şekil 26. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön2Tam)

7) " Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir."

"İki negatif sayının çarpımı pozitifdir." Bu iki ifadeden birini ispatlayınız.

$$(+9) \cdot (-2) = (-18) \text{ Çünkü bir } + \text{ bir } - \text{ eksi eder.}$$

Şekil 27. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön3Tam)

7) " Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir."

"İki negatif sayının çarpımı pozitifdir." Bu iki ifadeden birini ispatlayınız.

Bilim adamları iki negatif sayının çarpımının
pozitif olduğunu söylemişler. Bu ispatlanmaya uğramışlar
ve ispatladıklarında herkes bunu böyle
öğrenmiş.

Şekil 28. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön4Tam)

7) "Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir." 1

2 "İki negatif sayının çarpımı pozitiftir." Bu iki ifadeden birini ispatlayınız.

1)

Pozitif		Negatif	
4	x	3	= 12
6	x	5	= 30

1. ifadeyi denedim.
ve ifade yanlış çıktı
Pozitif ve negatif sayı
larının çarpımı pozitif

Şekil 29. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Ön5Tam)

7) "Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir."

"İki negatif sayının çarpımı pozitiftir." Bu iki ifadeden birini ispatlayınız.

$$\begin{array}{l} (+3) \cdot (+2) = (+6) \downarrow \\ \quad \downarrow -1 \\ (+3) \cdot (+1) = (+3) \downarrow \\ \quad \downarrow -1 \\ (+3) \cdot 0 = 0 \downarrow \\ (+3) \cdot (-1) = (-3) \downarrow \\ \boxed{+ \cdot - = -} \end{array}$$

Şekil 30. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son1Tam)

7) "Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir."

"İki negatif sayının çarpımı pozitiftir." Bu iki ifadeden birini ispatlayınız.

$$\begin{array}{l} (+3) \cdot (+2) = (+6) \downarrow -3 \\ (+3) \cdot (+1) = (+3) \downarrow -3 \\ (+3) \cdot 0 = 0 \downarrow -3 \\ (+3) \cdot (-1) = (-3) \downarrow -3 \end{array}$$

Şekil 31. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod: Son2Tam)

4.5.1.3. Sayıların 0. Kuvvetinin 1 Olduğu İspat Etme Öğrenme Amacı
Örnek Cevapları

Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme öğrenme amacına ait örnek cevap kodları Waring'e göre ispat düzeyleri ve Tablo 60'da verilmiştir.

Tablo 60

Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme öğrenme amacına ilişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme	İspat Düzeyi 0	Ön1Kuvvet, Ön2Kuvvet, Ön3Kuvvet
	İspat Düzeyi 1	Ön4Kuvvet, Ön5Kuvvet
	İspat Düzeyi 4	Son1Kuvvet, Son2Kuvvet, Son3Kuvvet, Son4Kuvvet

Ön-Kuvvet kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Kuvvet kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 32-40'da verilmiştir.

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

Biliyorum ama ispatlayın

Şekil 32. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön1Kuvvet)

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

0
17 Örnek olarak bu üslu sayı ifadesi ni kullanırsak sıfır tane onyedi denen bişey olmadığı için sonuç yine 1'dir.

Şekil 33. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön2Kuvvet)

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

Sayılar
 $1^0 = 1 \rightarrow$ Sayıların istene yordadığımız sayılar

Şekil 34. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön3Kuvvet)

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

$0^0 \Rightarrow$ Burada ne yaracak ne karşılaştık birşey
olmadığı için 0'ın kuvveti yoktur.
 $3^0 \Rightarrow$ Burada ise hiç karşılaştık birşey yoktur
fakat sayının kendisi olduğu için 1 olarak alır.

Şekil 35. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön4Kuvvet)

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

$9^0 = 9$ Sayının sayıncı kuvvetinin 1 olmasının
 $8^0 = 8$ nedeni 0'ın hiçbir değeri olmadığı içindir.
 $1^0 = 1$
 $0^0 = 1$

Şekil 36. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Ön5Kuvvet)

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
 $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$
 $4^1 = 4$
 $4^0 = 1$

Şekil 37. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Son1Kuvvet)

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

$$\begin{array}{l} 2^5 = 32 \\ 2^4 = 16 \\ 2^3 = 8 \\ 2^2 = 4 \\ 2^1 = 2 \\ 2^0 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow :2 \\ \downarrow :2 \\ \downarrow :2 \\ \downarrow :2 \\ \downarrow :2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{her sayı ikiye} \\ \text{bolunduğunda 0. kuvveti 1'dir} \end{array}$$

Şekil 38. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Son2Kuvvet)

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

$$\begin{array}{l} 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \\ 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \\ 3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \\ 3^1 = 3 \\ 3^0 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{her sayı 3'e bölündüğünden} \\ 3^0 \cdot 3 = 3 = 1 \cdot 3 \end{array}$$

Şekil 39. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Son3Kuvvet)

9) "0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1'dir." İfadesini ispatlayınız.

$$\begin{array}{l} 4^4 = 256 \\ 4^3 = 64 \\ 4^2 = 16 \\ 4^1 = 4 \\ 4^0 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \div 4 \\ \div 4 \\ \div 4 \\ \div 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} n^5 = n^5 \\ n^4 = n^4 \\ n^3 = n^3 \\ n^2 = n^2 \\ n^1 = n \\ n^0 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \div n \\ \div n \\ \div n \\ \div n \end{array}$$

Şekil 40. Örnek Öğrenci Cevabı (Kod:Son4Kuvvet)

4.5.2. Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçlarına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları

"Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları" temasında bulunan öğrenme amaçları kapsamında öğrencilere ön - son klinik mülakatlarında toplamda 5 soru yöneltilmiştir.

Bu temaya ait öğrenme amaçları şöyledir;

1. Üçgenin İç Açılar Toplamının 180° olduğunu ispat etme
2. Çokgenin İç Aç Formülünü ispat etme
3. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme

4. Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme
5. Üçgenin alan formülünü ispat etme

Araştırmanın öğretim deneyi evresinde ise; bu amaçlar kapsamında öğrencilerle altı etkinlik gerçekleştirilmiştir. Tablo 61’ de bu temaya ait öğrenme amaçlarına ilişkin yapılan geçmişe dönük analizler sonucunda öğrencilerin zihinsel süreçleri verilmiştir.



Tablo 61

Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçlarına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları

Ön Klinik mülakat Sonuçları	Öğretim Deneyi Evresi										Son Klinik mülakat Sonuçları
	A. Üçgenin İç Açıları Toplamının 180 ⁰ olduğunu ispat etme		B. Çokgenin İç Açı Formülünü ispat etme		C. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme		D. Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme		E. Üçgenin alan formülünü ispat etme		
	Öğretim Deneyi Evresi	Öğrenme Çıktıları	Öğretim Deneyi Evresi	Öğrenme Çıktıları	Öğretim Deneyi Evresi	Öğrenme Çıktıları	Öğretim Deneyi Evresi	Öğrenme Çıktıları	Öğretim Deneyi Evresi	Öğrenme Çıktıları	
A.Eşkenar bir üçgen çizip, toplamın 180° olduğunu gösterir	Bir üçgen üzerinde açı ölçüleri vererek ispat edebilir.	Paralel doğru kullanarak görsel ispat yapar.	Örnek vererek ispat edebilir.	Örüntü ile kenar sayısı ve üçgen sayısı arasındaki ilişkiyi kurarak ispat yapar.	Yarıçapa bir değer vererek formülde yerine koyar, ispatladığının 1 düşünür.	Görsel İspatla formülü ispatlar	Kenarlara sayısal değerler vererek formülde yerine koyar.	Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini görsel ispat yöntemi ile ispatlar.	Özel bir dik üçgen çizerek formülü ispat edebilir.	Dikdörtgenin alanından yararlanarak, dik üçgen, dar açılı üçgen ve geniş açılı üçgen için formülü ispat eder.	A. Paralel doğruları kullanarak ispat etme
A.Açıların her biri 60°'dir ifadesini yazanlar			Kuralın ispatlanama yacağını belirtebilir.		Kuralın ispatlanmayacağını belirtir.		Kuralların ispatlanama yacağını belirtir.		Kuralın ispatlanamayacağını belirtir		B. Örüntü ile kuralı ispat eder.
A.Üçgeni ikiye bir yükseklikle bölüp iki 90°'yi toplar	İki 90 derecenin toplamı ile ispat edebilir.										C. Dairenin çevre formülünden yola çıkarak üçgenin alan bağıntısı ile formülü ispat eder.
A. Kuralı biliyorum fakat bunu ispatlayamam											D. Dörtgenlerin alanlarını ispat eder.
B. Sadece (n-2).180 kuralını yazar											E. Dikdörtgenden yararlanarak üçgenin alanını ispat eder
C. Kuralın ispatlanamayacağını belirtir											
D. Bir örnek vererek alanı bulur.											
E. Eşkenar bir üçgen çizip kenarlara ve yüksekliğe değer vererek formülü ispat eder.											

Tablo 61’de verilen “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait öğrenme amaçlarına ilişkin geçmişe dönük analiz sonuçları incelendiğinde; öğrencilerin ön klinik mülakatlarda verilen formülleri ya da ifadeleri yanlış ispatladıkları görülmüş, bu formül ya da ifadelerin ispatlanmayacak şeyler olduğunu ifade ettikleri; öğretim deneyinde ispat animasyonları ve öğretim etkinlikleri gerçekleşen öğretim süreci sonunda ispat yapabildikleri görülmüş; yapılan son klinik mülakatlarda de öğrencilerin verilen sorulara doğru cevaplar verdikleri görülmüştür. Bu temaya ait en kolay anladıkları animasyonlar “Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme” ve “Çokgenin İç Açı Formülünü İspat Etme” animasyonlarıdır. En zorlandıkları ise üçgenin ve yamuğun alan formüllerinin ispatları olmuştur. Bunu sebebi sayılar ve işlemler öğrenme alanında olduğu gibi iş cebirsel ifadelerin ve bu ifadelerle yapılan işlemlerin girmiş olmasıdır.

Geometri ve ölçme öğrenme alanı ispatları temasına ait öğrenme amaçlarına ait örnek öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

4.5.2.1. Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 Olduğunu İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları

Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring’e göre ispat düzeyleri ve Tablo 62’de verilmiştir.

Tablo 62

Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 Olduğunu İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
Üçgenin İç Açıları Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme	İspat Düzeyi 0	Ön1Üçgen, Ön2Üçgen, Ön3Üçgen, Ön4Üçgen, Ön5Üçgen
	İspat Düzeyi 4	Son1Üçgen, Son2Üçgen, Son3Üçgen, Son4Üçgen

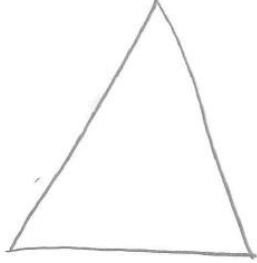
Ön-Üçgen kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Üçgen kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 41-49’da verilmiştir.

Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.

İspatı : Üçgenin iç açıları her zaman birbirine eşittir. Yani eşittir denken sayılar değil üçgenin iç açıları eşit olması nedeni 180° 'yi bulur.

Şekil 41. Örnek öğrenci cevabı (Kod:Ön1Üçgen)

Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.



Bilmiyorum. Çünkü hoca ders anlatırken hiç kimse Neden 180° hocam diye sormadı ki.

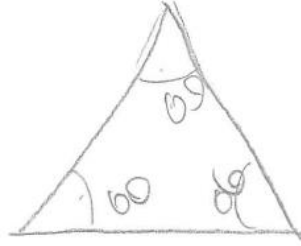
Şekil 42. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Üçgen)

Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.

Neden olduğunu merak etmedim. Çünkü şimdiye kadar bizlere sadece " 180° olduğunu bil yeter, sizlerde böyle sorarım." diye söylendi. Biz de sormaya gereği duymadık, "vardır bir bildikleri" dedik. (Aslında yanlış yapmışız.)

Şekil 43. Örnek öğrenci cevabı (Kod:Ön3Üçgen)

Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.



Şekil 44. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4Üçgen)

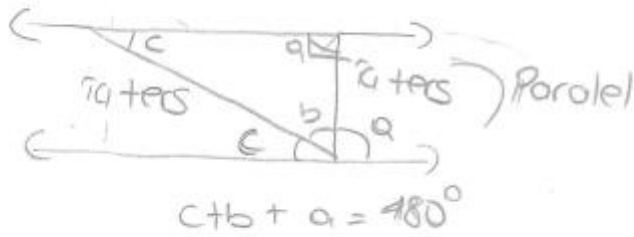
3) Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.

Hepsi dar, açısı ve birisi 60° olursa
diğerleri de 60° olur ve üç açının
toplamı 180° olur.

Eğer hepsi eşit değilse de toplam,
 180° olmalı. Bu matematik kuralı.

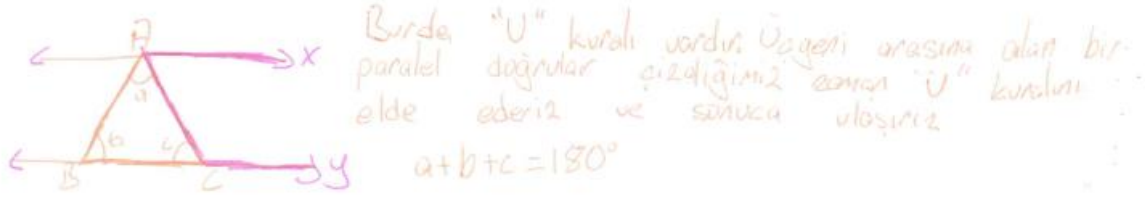
Şekil 45. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5Üçgen)

3) Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.



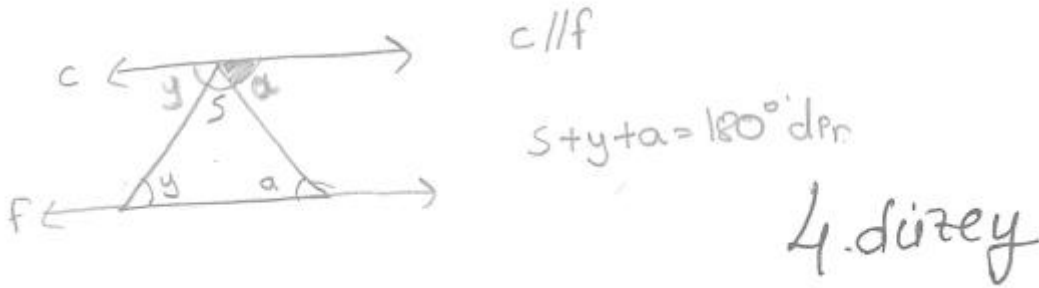
Şekil 46. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Üçgen)

3) Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.



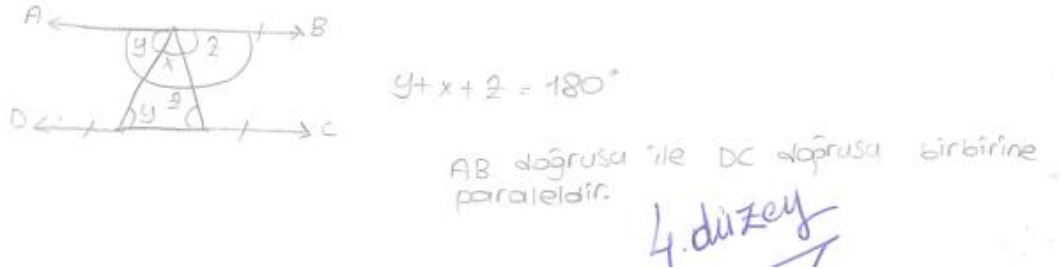
Şekil 47. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Üçgen)

3) Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.



Şekil 48. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son3Üçgen)

3) Üçgenin iç açıları toplamı neden 180° 'dir? İspat ediniz.



Şekil 49. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son4Üçgen)

4.5.2.2. Çokgenin İç Açı Formülünü İspat öğrenme amacı örnek cevapları

Çokgenin İç Açı Formülünü ispat etme öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring'e göre ispat düzeyleri ve Tablo 63'de verilmiştir.

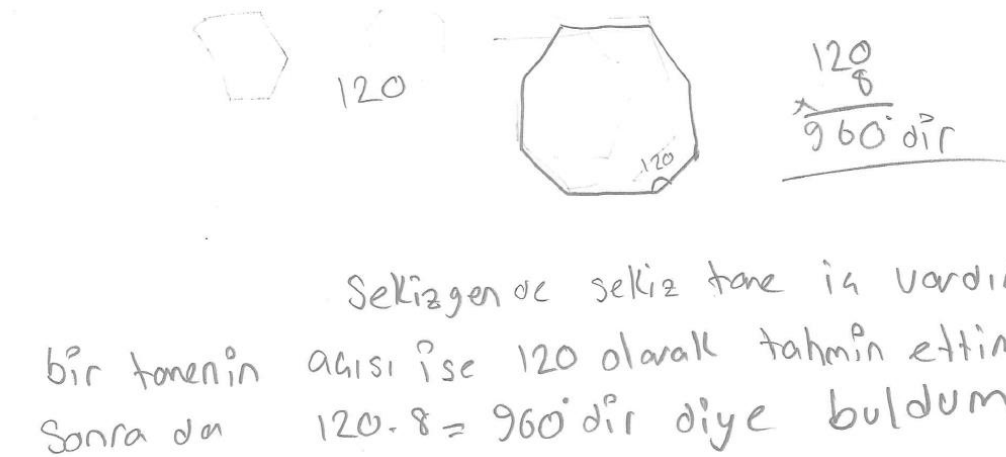
Tablo 63

Çokgenin İç Açı Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
Çokgenin İç Açı Formülünü ispat etme	İspat Düzeyi 0	Ön1Çokgen, Ön2Çokgen, Ön3Çokgen, Ön4Çokgen, Ön5Çokgen
	İspat Düzeyi 4	Son1Çokgen, Son2Çokgen, Son3Çokgen, Son4Çokgen

Ön –Çokgen kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Çokgen kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 50-58’da verilmiştir.

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.



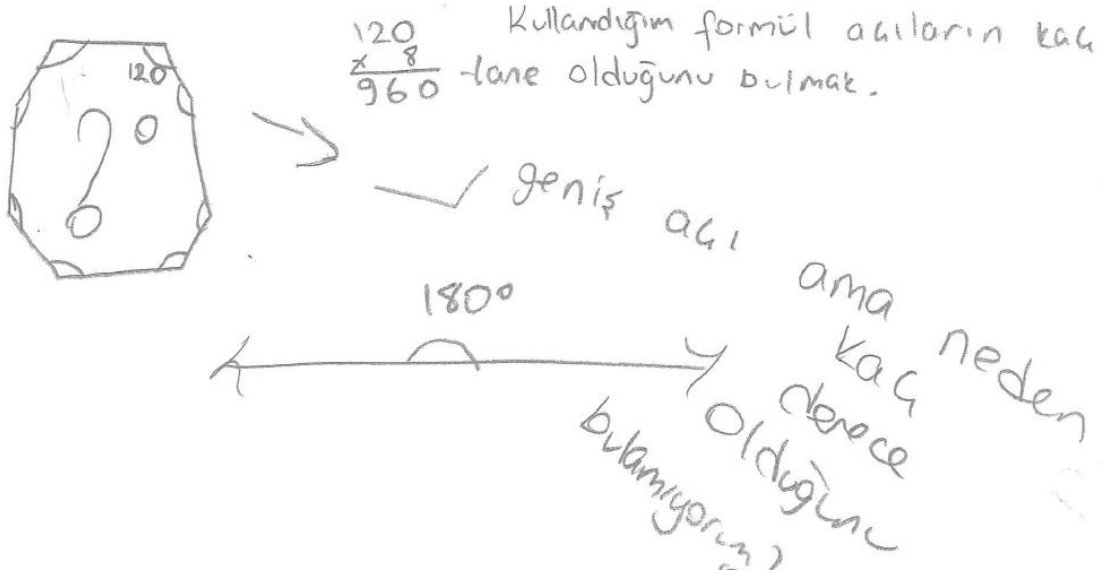
Şekil 50. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1Çokgen)

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.

Ezberim yok değil, unutmuş olmalıyım. Yani bu da "öğrenmedim, ama ezberledim." demek oluyor.

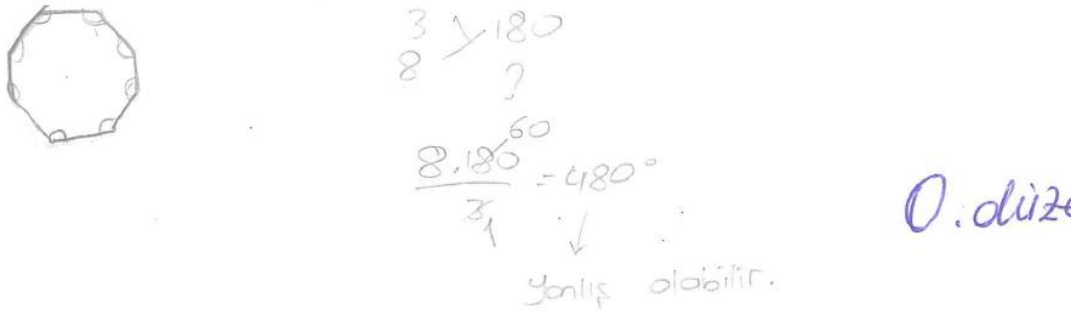
Şekil 51. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Çokgen)

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.



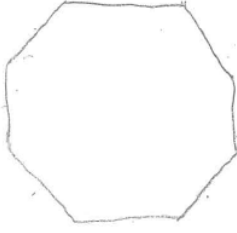
Şekil 52. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön3Çokgen)

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.



Şekil 53. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4Çokgen)

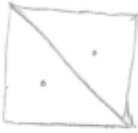
6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.



$$90-8=720?$$

Şekil 54. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5Çokgen)

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.



2 tane üçgen



3 tane üçgen



4 tane üçgen

Kenar Sayısı	Üçgen Sayısı
Dört	2
Beş	3
Altı	4

$$(n-2) \cdot 180$$

formülü ile iç açıların toplamı bulunur.

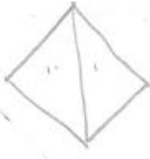
$$\begin{aligned} 8-2 &= 6 \\ 6 \cdot 180 &= 1080 \end{aligned}$$

Adıyay.

Şekil 55. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Çokgen)

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.

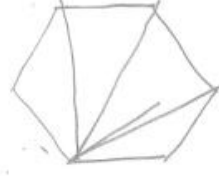
$$(n-2) \cdot 180$$



kenar sayısı = 4
üçgen sayısı = 2



kenar sayısı = 5
üçgen sayısı = 3



kenar sayısı = 6
üçgen sayısı = 4

her biri eksikliği oldu.

kenar sayısı n olsun üçgen sayısı $n-2$ olur.

$$\begin{array}{r} 180 \cdot 4 \\ \hline 720 \end{array} \quad \begin{array}{r} 180 \cdot 8 \\ \hline 1440 \end{array} \quad \begin{array}{r} 180 \cdot 6 \\ \hline 1080 \end{array}$$

Şekil 56. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Çokgen)

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.

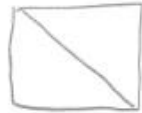
$$(n-2) \cdot 180$$

$$\begin{array}{r} (8-2) \cdot 180 \\ \hline 1080 \end{array}$$

$$4 \cdot 180$$



Kenar Sayısı	Üçgen Sayısı
3	1
$n-2$	



4	2
$n-2$	

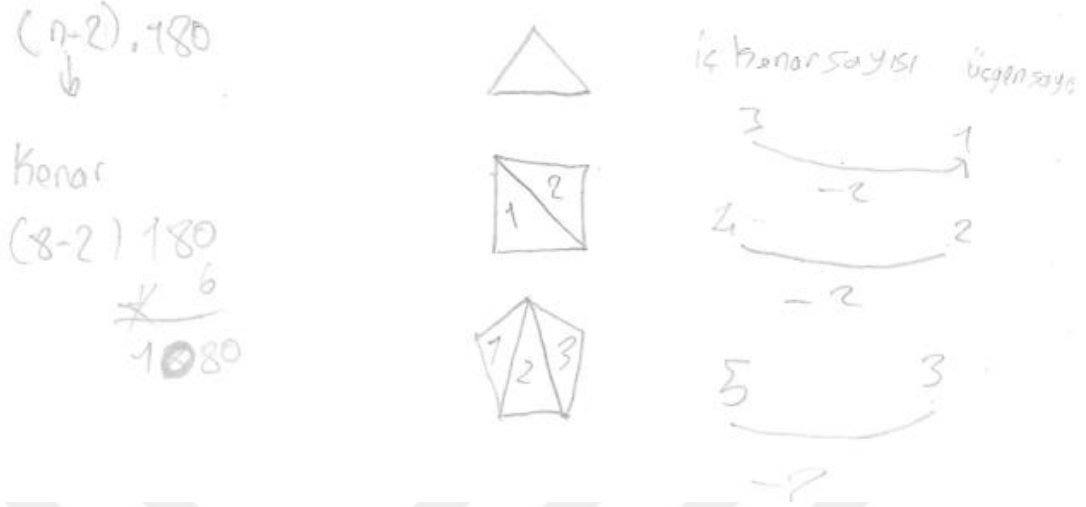


5	3
$n-2$	

kenar sayısının -2 eksikliği kadar üçgen oluşur.

Şekil 57. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son3Çokgen)

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.



Şekil 58. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son4Çokgen)

4.5.2.3 Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları

Dairenin Alan Formülünü İspat Etme öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring'e göre ispat düzeyleri ve Tablo 64'te verilmiştir.

Tablo 64.

Dairenin Alan Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
Dairenin Alan Formülünü İspat Etme	İspat Düzeyi 0	Ön1Daire, Ön2Daire
	İspat Düzeyi 3	Son1Daire, Son2Daire

Ön-Daire kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Daire kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 61-64'de verilmiştir.

8) Dairenin alan formülü;

$$A = \pi r^2 \text{ dir.}$$

Aylin Öğretmen öğrencilerinden bu ifadeyi ispatlamalarını istiyor. Aşağıda verilen öğrenci cevaplarından hangisi ispatı doğru biçimde yapmıştır. **Nedenini kısaca açıklayınız.**

Biliyorum onu is patlayomam

Şekil 59. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1Daire)

8) Dairenin alan formülü;

$$A = \pi r^2 \text{ dir.}$$

Aylin Öğretmen öğrencilerinden bu ifadeyi ispatlamalarını istiyor. Aşağıda verilen öğrenci cevaplarından hangisi ispatı doğru biçimde yapmıştır. **Nedenini kısaca açıklayınız.**

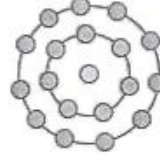
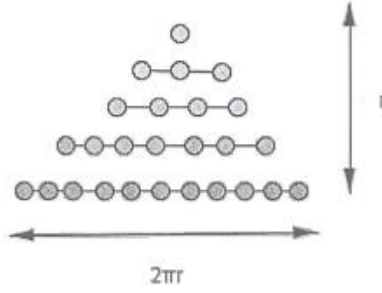
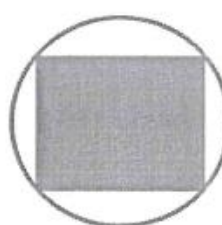
Bu soru lppyle karşılaşmadığım için bilmiyorum.

Şekil 60. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Daire)

8) Dairenin alan formülü;

$$A = \pi r^2 \text{ dir.}$$

Aylin Öğretmen öğrencilerinden bu ifadeyi ispatlamalarını istiyor. Aşağıda verilen öğrenci cevaplarından hangisi ispatı doğru biçimde yapmıştır. Nedenini kısaca açıklayınız.

Yarkın'ın Cevabı Bence doğrudur. Çünkü yarıçapı 5 cm olan bir dairenin alanını $A = \pi 5^2$ ifadesinde π yerine 3 yazarak hesaplarız ve 75 cm buluruz.	Damla'nın Cevabı  İç içe geçmiş çemberlerden oluşan bir daire düşünelim. En dıştaki dairenin yarıçapı r, çevresi $2\pi r$ olur. Şimdi bu çemberleri açtığımızı ve üst üste koyduğumuzu düşünelim.  Oluşan üçgenin alanı dairenin alan formülünü verir. $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$
Yağmur'un Cevabı  Şekilde çizdiğim dairenin içine kenarı r olan bir kare yerleştiririm, bu karenin alanını yani r^2'yi π ile çarparsam dairenin alanını bulurum.	

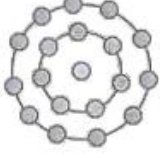
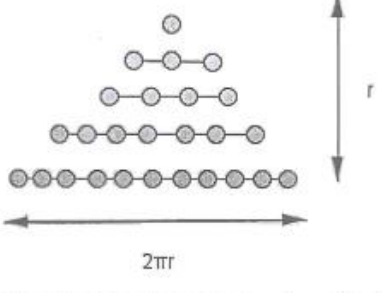
Damla'nın cevabı ispattır. Nedeni ise üçgenin alanını kullanarak daireden hiçbir şey kaybetmeden alanı bulup ispat yapmıştır.

Şekil 61. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Daire)

8) Dairenin alan formülü;

$$A = \pi r^2 \text{ dir.}$$

Aylin Öğretmen öğrencilerinden bu ifadeyi ispatlamalarını istiyor. Aşağıda verilen öğrenci cevaplarından hangisi ispatı doğru biçimde yapmıştır. Nedenini kısaca açıklayınız.

Yarkın'ın Cevabı Bence doğrudur. Çünkü yarıçapı 5 cm olan bir dairenin alanını $A = \pi 5^2$ ifadesinde π yerine 3 yazarak hesaplarız ve 75 cm buluruz.	Damla'nın Cevabı  İç içe geçmiş çemberlerden oluşan bir daire düşünelim. En dıştaki dairenin yarıçapı r, çevresi $2\pi r$ olur. Şimdi bu çemberleri açtığımızı ve üst üste koyduğumuzu düşünelim.  Oluşan üçgenin alanı dairenin alan formülünü verir. $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$
Yağmur'un Cevabı  Şekilde çizdiğim dairenin içine kenarı r olan bir kare yerleştirim, bu karenin alanını yani r^2'yi π ile çarparsam dairenin alanını bulurum. <i>Damla'nın cevabı isbatlıdır</i>	

Şekil 62. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Daire)

4.5.2.4. Kare Dikdörtgen, Paralelkenar ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek Cevapları

Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring'e göre ispat düzeyleri ve Tablo 65'te verilmiştir.

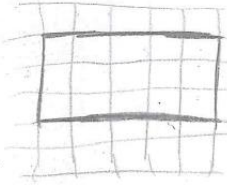
Tablo 65

Kare, Dikdörtgen, Paralelkenar Ve Yamuğun Alan Formüllerini İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri Ve Örnek Cevap Kodları

Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme	İspat Düzeyi 0	Ön4Dörtgen, Ön5Dörtgen
	İspat Düzeyi 1	Ön1Dörtgen, Ön2Dörtgen, Ön3Dörtgen
	İspat Düzeyi 4	Son1Dörtgen, Son2Dörtgen,

Ön-Dörtgen kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Dörtgen kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 63-69'de verilmiştir.

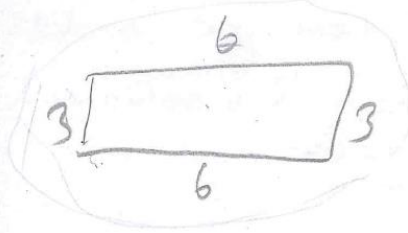
13) Dikdörtgenin alanı kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı ile bulunur. Bu ifadeyi ispat ediniz.



Bunun nedenini belki ispatlayamam ama ifadeyi doğrulayabilirim. Mesela yan tarafta çizdiğim dikdörtgenin kısa kenarı 3 birim uzun kenarı ise 5 birimdir ikisinin çarpımının anlamı dikdörtgenin içinde 3 tane 5, 5 tane 3 sayısı vardır yani sonuç 15'dir.

Şekil 63. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1Dörtgen)

13) Dikdörtgenin alanı kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı ile bulunur. Bu ifadeyi ispat ediniz.



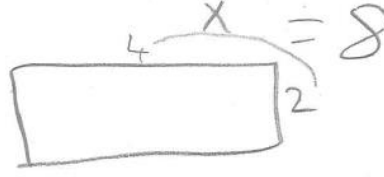
$$A = 12 \cdot 9 = 108$$

Bu ifadeyi doğru buluyorum ama verilen yerin alanını tam olarak bilemeye bitirdim.

14) Şekilde üçgenin alanı;

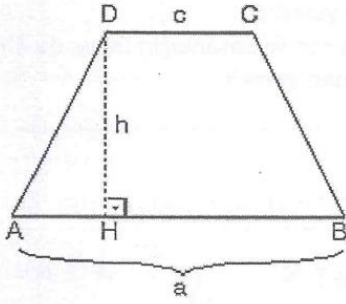
Şekil 64. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Dörtgen)

- 13) Dikdörtgenin alanı kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı ile bulunur. Bu ifadeyi ispat ediniz.



Şekil 65. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön3Dörtgen)

- 15) Yamuğun alanı;



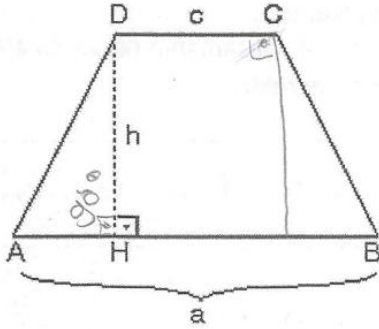
$$\frac{(a + c) \times h}{2} \text{ formülü ile bulunur.}$$

Nasıl olduğunu biliyorum.

Yamuğun alan formülünü ispat ediniz.

Şekil 66. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4Dörtgen)

- 15) Yamuğun alanı;



$$\frac{(a + c) \times h}{2} \text{ formülü ile bulunur.}$$

$$\frac{(80 + 90) \times 90}{2} = \frac{16200}{2} = 810$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ \times 9 \\ \hline 16200 \end{array}$$

Yamuğun alan formülünü ispat ediniz.

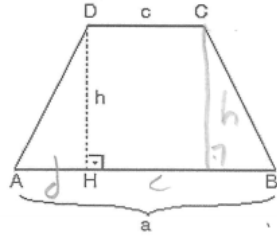
Şekil 67. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5Dörtgen)

- 13) Dikdörtgenin alanı kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı ile bulunur. Bu ifadeyi ispat ediniz. *olmalı!*



Şekil 68. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Dörtgen)

- 15) Yamuğun alanı;



Yamuğun alan formülünü ispat ediniz.

$\frac{(a+c) \times h}{2}$ formülü ile bulunur.

$$\begin{aligned} & c \cdot h + \frac{d \cdot h}{2} + \frac{h \cdot f}{2} \\ & \frac{ch}{1} + \frac{h \cdot (d+f)}{2} \\ & \frac{2ch}{2} + \frac{h(d+f)}{2} = \frac{h(2c+d+f)}{2} \end{aligned}$$

Şekil 69. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Dörtgen)

4.5.2.5 Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacı Örnek

Cevapları

Üçgenin alan formülünü ispat etme öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring'e göre ispat düzeyleri ve Tablo 66'da verilmiştir.

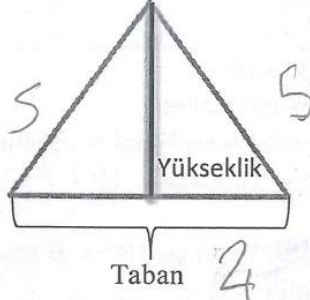
Tablo 66

Üçgenin Alan Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
	İspat Düzeyi 0	Ön2ÜçAlan, Ön4ÜçAlan, Ön5ÜçAlan
Üçgenin alan formülünü ispat etme	İspat Düzeyi 1	Ön1ÜçAlan, Ön3ÜçAlan
	İspat Düzeyi 4	Son1ÜçAlan

Ön-ÜçAlan kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-ÜçAlan kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 70-75’de verilmiştir.

14) Şekilde üçgenin alanı;



Üçgenin alan formülünü ispat ediniz.

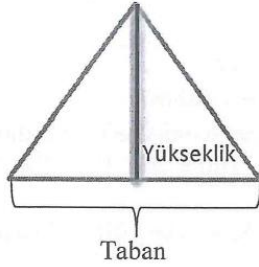
$\frac{Taban \times Yükseklik}{2}$ formülü ile bulunur.

Buna ispat edeneceğim.

$$\frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Şekil 70. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1ÜçAlan)

14) Şekilde üçgenin alanı;



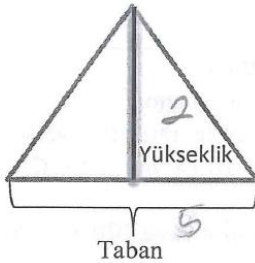
Üçgenin alan formülünü ispat ediniz.

$\frac{Taban \times Yükseklik}{2}$ formülü ile bulunur.

Formüllerini yapabiliyorum ama ispatını yapamam

Şekil 71. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2ÜçAlan)

14) Şekilde üçgenin alanı;



Üçgenin alan formülünü ispat ediniz.

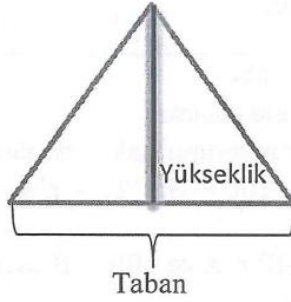
$\frac{Taban \times Yükseklik}{2}$ formülü ile bulunur.

$$\frac{5 \times 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Cevabını bulurum ama ispatını yapamam

Şekil 72. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön3ÜçAlan)

14) Şekilde üçgenin alanı;



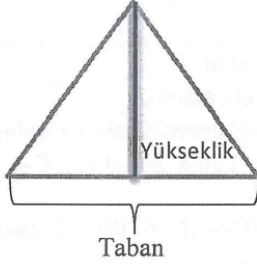
Üçgenin alan formülünü ispat ediniz.

$$\frac{\text{Taban} \times \text{Yükseklik}}{2} \text{ formülü ile bulunur.}$$

Bunu ispatlayamam

Şekil 73. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4ÜçAlan)

14) Şekilde üçgenin alanı;



Üçgenin alan formülünü ispat ediniz.

$$\frac{\text{Taban} \times \text{Yükseklik}}{2} \text{ formülü ile bulunur.}$$

Bilmeyorum. Bu
nedenle ispatlayamam

Şekil 74. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5ÜçAlan)

14) Şekilde üçgenin alanı;



Üçgenin alan formülünü ispat ediniz.

$$\frac{\text{Taban} \times \text{Yükseklik}}{2} \text{ formülü ile bulunur.}$$



dikdörtgenin
alanının
yarısı.

Şekil 75. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1ÜçAlan)

4.5.3. Cebir Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amacına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları

“Cebir Öğrenme Alanı İspatları” temasında bulunan öğrenme amacı doğrultusunda öğrencilere ön klinik ve son klinik mülakatlarda toplam 2 soru yöneltilmiştir.

Bu temaya ait öğrenme amacı şöyledir;

1. Toplam formülünü ispat etme

Araştırmanın öğretim deneyi evresinde ise; bu amaç doğrultusunda öğrencilerle bir etkinlik gerçekleştirilmiştir. Tablo 67’de bu temaya ait öğrenme amacına ilişkin yapılan geçmişe dönük analizler sonucunda öğrencilerin zihinsel süreçleri verilmiştir.

Tablo 67

Cebir Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amacına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları

Ön Klinik mülakat Sonuçları	Öğretim Deneyi Evresi		Son Klinik mülakat Sonuçları
	Toplam formülünü ispat etme		
	Öğretim Deneyi Evresi	Öğrenme Çıktıları	
Kuralın ispatlanamayacağını ifade eder.	Bir sayı dizisi yazar ve formülde değerleri yerine koyup doğru olduğunu belirtir. Kuralın ispatlanmayacağını belirtir.	Görsel ispat yaprak formülü ispatlar. Cebir kullanarak ispat yapar.	Şekil kullanarak ispat eder. Cebirsel yolla ispat eder.

Tablo 67’ de verilen “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait öğrenme amacına ilişkin geçmişe dönük analiz sonuçları incelendiğinde; öğrencilerin ön klinik mülakatlarda kuralın ispatlanamayacağını ifade ettikleri ya da bir örnekle ispatladıklarını düşündükleri; öğretim deneyinde ispat animasyonları ve öğretim etkinlikleri ile gerçekleşen öğretim süreci sonunda ispatı anladıkları görülmüştür. Yapılan son klinik mülakatlarda da öğrencilerin belirlenen amaçlara uygun olarak ispat yapabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. İspata ait animasyonda iki çeşit ispat yapılmıştır. Öğrencilerin büyük bir kısmı görsel ispat yöntemini benimserken akademik olarak daha başarılı olan az bir kısım ise cebir kullanılan ispat yöntemini tercih etmiştir.

4.5.3.1. Toplam formülünü ispat etme öğrenme amacı örnek cevapları

Toplam formülünü ispat etme öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring'e göre ispat düzeyleri ve Tablo 68'de verilmiştir.

Tablo 68

Çokgenin İç Açılı Formülünü İspat Etme Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

Cebir Öğrenme Alanı İspatları Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
Toplam formülünü ispat etme	İspat Düzeyi 0	Ön2Toplam, Ön3Toplam
	İspat Düzeyi 1	Ön1Toplam, Ön4Toplam, Ön5Toplam
	İspat Düzeyi 4	Son1Toplam, Son2Toplam, Son3Toplam, Son4Toplam, Son5Toplam

Ön-Toplam kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Toplam kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 76-85'de verilmiştir.

- 5) 1'den n' ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n.(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.

Handwritten student answer for Şekil 76:

$$\frac{5.(5+1)}{2} = 15$$

30/2 = 15

1+2+3+4+5 = 15

formül doğrudur

n yerine bir sayı koyup o sayıya 1 ekleyip n sayısıyla çarpıp 2ye böl-
düğümüzde 1'den n sayısına kadar
olan sayıların toplamını buluruz.

Şekil 76. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön1Toplam)

- 5) 1'den n' ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n.(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.

Handwritten student answer for Şekil 77:

$$\frac{n.(n+1)}{2}$$

Formül kullanırım ama ispatını yaparım.

Şekil 77. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön2Toplam)

- 5) 1'den n' ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1 \cdot (779+1)}{2} \rightarrow 800$$

$$800 \div 2 = 400$$

başlangıç sayısı + bitiş sayısı + 1

Şekil 78. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön3Toplam)

- 5) 1'den n' ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.

Bu formülü ispatlamak için deneyeyelim.

1'den 5'e kadar olan sayıların toplamı = 2

Formüle göre $\frac{5 \cdot (5+1)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$ } ispatım

toplam $1+2+3+4+5=15$

Şekil 79. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön4Toplam)

- 5) 1'den n' ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.

$$\frac{2 \cdot (2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

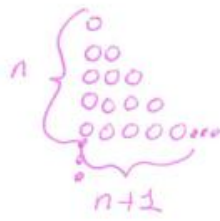
$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

$$\frac{3 \cdot (1+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

yaptığım işlemler de ispat etmiş oldum.

Şekil 80. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Ön5Toplam)

- 5) 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n.(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.



üçgenin alanından; $\frac{n.(n+1)}{2}$ olur.

Şekil 81. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son1Toplam)

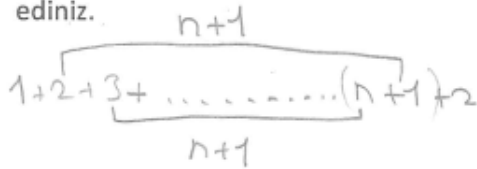
- 5) 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n.(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.



$n+1$ den $\frac{n}{2}$ tane var
olabilir $(n+1) \cdot \frac{n}{2}$ toplamı verir

Şekil 82. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son2Toplam)

- 5) 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n.(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.



$n+1$ ile $\frac{n}{2}$ $(n+1) \cdot \frac{n}{2}$

4.0720

Şekil 83. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son3Toplam)

- 5) 1'den n' ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n.(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.

$$\begin{array}{r}
 1+2+3 \dots n \\
 n+n-1+n-2 \dots 1 \\
 \hline
 (n+1)+(n+1)+(n+1) \dots (n+1) \\
 \hline
 n \cdot (n+1) \\
 \hline
 \frac{n.(n+1)}{2}
 \end{array}$$

4. düzey

Şekil 84. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son4Toplam)

- 5) 1'den n' ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n.(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.

$$\begin{array}{l}
 1+2 = \frac{2 \cdot 3}{2} \\
 1+2+3 = \frac{3 \cdot 4}{2} \\
 1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2} \\
 \vdots \\
 1+2+3 \dots n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}
 \end{array}$$

Şekil 85. Örnek öğrenci cevabı (Kod: Son5Toplam)

4.5.4. İspat Algısı Temasına Ait Öğrenme Amacına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları

“İspat algısı” temasında bulunan öğrenme amacı kapsamında öğrencilere ön - son klinik mülakatlarda toplam 2 soru yöneltilmiştir.

Bu temaya ait öğrenme amacı şöyledir;

1. Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama

Araştırmanın öğretim deneyi evresinde ise; bu amaç doğrultusunda öğrencilerle bir etkinlik gerçekleştirilmiştir. Tablo 69 'da bu temaya ait öğrenme amacına ilişkin yapılan geçmişe dönük analizler sonucunda öğrencilerin zihinsel süreçleri verilmiştir.

Tablo 69

İspat Algısı Temasına Ait Öğrenme Amacına İlişkin Geçmişe Dönük Analiz Sonuçları

Ön Klinik mülakat Sonuçları	Öğretim Deneyi Evresi		Son Klinik mülakat Sonuçları
	Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama		
	Öğrenme varsayımları	Öğrenme Çıktıları	
Doğru ispatı seçip nedenini açıklayamama.	Tek bir örnek vermenin ispatlama olduğunu belirtir.	Örnek vermenin ispat yapmak olmadığını belirtir.	Doğru ispatı seçip nedenini açıklar.
Yanlış ispatı seçme.	Birden fazla örnek vermenin ispat yapmak olduğunu belirtir.		

Tablo 69’ da verilen “İspat Algısı” temasına ait öğrenme amacına ilişkin geçmişe dönük analiz sonuçları incelendiğinde; öğrencilerin ön klinik mülakatlarda sorulara yanlış cevaplar verdikleri ve yaptıkları açıklamaların mantıklı olmadığı görülmüştür. Öğrencilerin büyük bir kısmı tek bir örnek vermenin ispat yapmak olduğunu belirtmişlerdir. Öğretim deneyi evresinde öğrencilerin tek bir örnek vermenin ispat yapmak olduğuna dair düşüncelerinin değiştiği görülmüştür. İspat animasyonları ve öğretim etkinlikleri gerçekleşen öğretim süreci sonunda öğrencilerin verilen örnekler içinden doğru ispatı seçtikleri görülmüştür. Aynı şekilde yapılan son klinik mülakatlarda da öğrencilerin belirlenen amaçlara uygun olarak ispat seçimi yapabildikleri görülmüştür.

4.5.4.1. Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama**Öğrenme Amacı Örnek Cevapları**

Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama öğrenme amacına ait ön-son klinik mülakatlarına ait örnek cevap kodları Waring’e göre ispat düzeyleri ve Tablo 70’de verilmiştir.

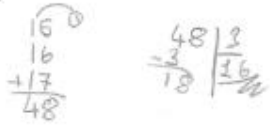
Tablo 70

Verilen Bir İfadeye Ait İspatı Seçme ve Nedenini Açıklama Öğrenme Amacına İlişkin Ön-Son Klinik Mülakat İspat Düzeyleri ve Örnek Cevap Kodları

İspat Algısı Temasına Ait Öğrenme Amaçları	İspat düzeyleri	Örnek Cevap Kodları
Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama	İspat Düzeyi 0	Ön1Algı, Ön2Algı, Ön3Algı, Ön4Algı
	İspat Düzeyi 4	Son1Algı, Son2Algı, Son3Algı

Ön-Algı kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları ön klinik mülakatlarda Son-Algı kelimesi ile kodlanan öğrenci cevapları son klinik mülakatlarda elde edilmiştir. Örnek cevaplar Şekil 86-92’de verilmiştir.

- 1) Bir öğretmen matematik sınavında öğrencilerine şu soruyu sorar;
 “Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur?
 İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?
 Bu soruya karşılık dört öğrenci aşağıdaki cevapları vermiştir.

Ayşe'nin cevabı Bence doğru; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım. $3 + 4 + 5 = 12$ 12, ortadaki sayının, yani 4'ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.	Mert'in cevabı Bence doğru. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a , $(a + 1)$ ve $(a + 2)$ olur. Sonra toplayalım $a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3$ olur. $3a + 3 = 3(a + 1)$ Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.
Zeki'nin cevabı Bence yanlış, 15, 16 ve 17 sayılarını alalım. $15 + 16 + 17 = 47$ 47, 16'nın 3 katı değil. Bu yüzden ifade yanlıştır. 	Belma'nın cevabı Bence doğru; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım. $2 + 3 + 4 = 9$ $9 = 3 \cdot 3$ Yani ortadaki sayının 3 katı. Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım. $21 + 22 + 23 = 66$ $66 = 3 \cdot 22$ Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım. İki ayrı deneme yaptım ikisi de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

Hangi öğrencinin cevabı sizce bu soruya verilecek en uygun ispattır? Neden?

Bence en uygun "İspat" Belma'nın cevabıdır. Neden diye sorarsanız hem çift hem de tek sayı kullanarak yapmıştır. Zeki'nin cevabına gelince: sayıları yanlış toplamıştır, $15 + 16 + 17 = 48$ çıkar ve 16'nın 3 katıdır. Bu nedenle öğretmen doğru söylemiştir. İfadenin doğruluğunu ispatlayamam ama doğru olduğunu söyleyebilirim.

Şekil 86. Örnek öğrenci cevabı (Ön1Algı)

2)

Aynı öğretmen aşağıdaki soruyu da sınavda öğrencilerine sorar;

“İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Bu soruya karşılık üç öğrenci aşağıdaki yanıtları vermiştir.

Buse'nin cevabı Doğrudur; çünkü tek sayılar ikişerli gruplandığında her zaman 1 kalanını veren sayılardır. Örneğin 7 sayısını ikişerli gruplandırırsam;  Şeklinde bir tanesi gruplandırmamın dışında kalır. Eğer iki tek sayıyı toplarsam, bu sayıların sonunda açıkta kalan 1'ler de bir ikili grup oluşturur ve bu iki sayıyı topladığımda tüm sayılar ikili gruplandırıldığı için açıkta kalan 1 olmaz. Bu nedenle de elde ettiğim sayı her zaman çift sayı olur, çünkü ikişerli gruplandırılabilen bir sayı elde etmiş olurum.	Mehmet'in cevabı Bence doğru; ben şu örnekleri denedim, 11 ve 13 sayılarını aldım, daha sonra da 135 ve 379 sayılarını topladım. $11 + 13 = 24$ $135 + 379 = 514$ 24 ve 514 sayıları çift sayılar oldukları için soruda verilen ifade doğrudur. İki sayı örneği denedim, ikisinde de çift sayıya ulaştım.
Cem'in cevabı Bence doğru; tüm tek sayılar, $2n + 1$ şeklinde gösterilebilen sayılardır (n tam sayı olsun). İki ayrı tek sayı alırsam birisi $2n + 1$, diğeri ise $2m + 1$ olur. Bu iki sayıyı topladığımda $\begin{aligned}(2n + 1) + (2m + 1) &= (2n + 2m) + (1 + 1) \\ &= 2n + 2m + 2 \\ &= 2(n + m + 1)\end{aligned}$ Şeklinde bir çift sayı elde ederim. Bu nedenle iki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.	

Bu verilen cevaplardan hangisi / hangileri verilen ifadeyi sizce ispatlar? Nedeninizi açıklayın.

Buse'nin cevabı soruyu ispatlar. Çünkü tek sayıları ikişerli gruplandığında 1 sayısı tek olarak kalır. İki tane tek sayıyı topladığımda, elimizde iki tane 1 sayısı olur. $1+1=2$ olarak çift sayı olur.

Şekil 87. Örnek öğrenci cevabı (Ön2Algı)

2)

Aynı öğretmen aşağıdaki soruyu da sınavda öğrencilerine sorar;

“İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Bu soruya karşılık üç öğrenci aşağıdaki yanıtları vermiştir.

Buse'nin cevabı Doğrudur; çünkü tek sayılar ikişerli gruplandığımızda her zaman 1 kalanını veren sayılardır. Örneğin 7 sayısını ikişerli gruplandırırsam;  Şeklinde bir tanesi gruplandırmamın dışında kalır. Eğer iki tek sayıyı toplarsam, bu sayıların sonunda açıkta kalan 1'ler de bir ikili grup oluşturur ve bu iki sayıyı topladığımda tüm sayılar ikili gruplandırıldığı için açıkta kalan 1 olmaz. Bu nedenle de elde ettiğim sayı her zaman çift sayı olur, çünkü ikişerli gruplandırılabilen bir sayı elde etmiş olurum.	Mehmet'in cevabı Bence doğru; ben şu örnekleri denedim, 11 ve 13 sayılarını aldım, daha sonra da 135 ve 379 sayılarını topladım. $11 + 13 = 24$ $135 + 379 = 514$ 24 ve 514 sayıları çift sayılar oldukları için soruda verilen ifade doğrudur. İki sayı örneği denedim, ikisinde de çift sayıya ulaştım.
Cem'in cevabı Bence doğru; tüm tek sayılar, $2n + 1$ şeklinde gösterilebilen sayılardır (n tam sayı olsun). İki ayrı tek sayı alırsam birisi $2n + 1$, diğeri ise $2m + 1$ olur. Bu iki sayıyı topladığımda $(2n + 1) + (2m + 1) = (2n + 2m) + (1 + 1)$ $= 2n + 2m + 2$ $= 2(n + m + 1)$ Şeklinde bir çift sayı elde ederim. Bu nedenle iki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.	

Bu verilen cevaplardan hangisi / hangileri verilen ifadeyi sizce ispatlar? Nedeninizi açıklayın.

Bence bu cevaplardan hepsi ispatlar. Ama henkezin anlaya bileceği ağırdan baharsak eğer Mehmet'in cevabı daha doğrudur. Çünkü kolay yoldan görmüşüm.

Şekil 88.Örnek öğrenci cevabı (Ön3Algı)

- 1) Bir öğretmen matematik sınavında öğrencilerine şu soruyu sorar;
 “Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur?
 İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?
 Bu soruya karşılık dört öğrenci aşağıdaki cevapları vermiştir.

Ayşe'nin cevabı Bence doğru; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım. $3 + 4 + 5 = 12$ 12, ortadaki sayının, yani 4'ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.	Mert'in cevabı Bence doğru. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a, $(a + 1)$ ve $(a + 2)$ olur. Sonra toplayalım $a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3$ olur. $3a + 3 = 3(a + 1)$ Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.
Zeki'nin cevabı Bence yanlış, 15, 16 ve 17 sayılarını alalım. $15 + 16 + 17 = 47$ 47, 16'nın 3 katı değil. Bu yüzden ifade yanlıştır.	Belma'nın cevabı Bence doğru; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım. $2 + 3 + 4 = 9$ $9 = 3 \cdot 3$ Yani ortadaki sayının 3 katı. Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım. $21 + 22 + 23 = 66$ $66 = 3 \cdot 22$ Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım. İki ayrı deneme yaptım ikisi de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

Hangi öğrencinin cevabı sizce bu soruya verilecek en uygun ispattır? Neden?
 Bence Zeki'nin cevabı buna verilecek en uygun ispattır.
 Çünkü Ayşe'nin cevabı 3'ün 3 katı olduğu için bu ifade doğrudur.
 Mert'in cevabı da doğrudur. Belma'nın anlatımındaki 9'la 3'ün
 katıdır. Ama Zeki'nin cevabı 16'ya 16'nın katı olmadığı için
 cevap yanlıştır.

Şekil 89. Örnek öğrenci cevabı (Ön4Algı)

- 1) Bir öğretmen matematik sınavında öğrencilerine şu soruyu sorar;
"Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır." Sizce bu ifade doğru mudur?
İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?
Bu soruya karşılık dört öğrenci aşağıdaki cevapları vermiştir.

Ayşe'nin cevabı Bence doğru; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım. $3 + 4 + 5 = 12$ 12, ortadaki sayının, yani 4'ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.	Mert'in cevabı Bence doğru. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a , $(a + 1)$ ve $(a + 2)$ olur. Sonra toplayalım $a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3$ olur. $3a + 3 = 3(a + 1)$ Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.
Zeki'nin cevabı Bence yanlış, 15, 16 ve 17 sayılarını alalım. $15 + 16 + 17 = 47$ 47, 16'nın 3 katı değil. Bu yüzden ifade yanlıştır.	Belma'nın cevabı Bence doğru; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım. $2 + 3 + 4 = 9$ $9 = 3 \cdot 3$ Yani ortadaki sayının 3 katı. Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım. $21 + 22 + 23 = 66$ $66 = 3 \cdot 22$ Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım. İki ayrı deneme yaptım ikisi de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

Hangi öğrencinin cevabı sizce bu soruya verilecek en uygun ispattır? Neden?

Mert'in cevabı ispattır çünkü değişken kullanarak ispat yapmıştır bu da her sayı için doğru olduğunu gösterir

Şekil 90. Örnek öğrenci cevabı (Son1Algı)

Aynı öğretmen aşağıdaki soruyu da sınavda öğrencilerine sorar;

"İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Bu soruya karşılık üç öğrenci aşağıdaki yanıtları vermiştir.

Buse'nin cevabı

Doğrudur; çünkü tek sayılar ikişerli gruptandırırsam her zaman 1 kalanını veren sayılardır. Örneğin 7 sayısını ikişerli gruptandırırım;



Şeklinde bir tanesi gruptandırmamın dışında kalır.

Eğer iki tek sayıyı toplarsam, bu sayıların sonunda açıkta kalan 1'ler de bir ikili grup oluşturur ve bu iki sayıyı topladığımda tüm sayılar ikili gruptandırıldığı için açıkta kalan 1 olmaz. Bu nedenle de elde ettiğim sayı her zaman çift sayı olur, çünkü ikişerli gruptandırılabilen bir sayı elde etmiş olurum.

Mehmet'in cevabı

Bence doğru; ben şu örnekleri denedim, 11 ve 13 sayılarını aldım, daha sonra da 135 ve 379 sayılarını topladım.

$$11 + 13 = 24$$

$$135 + 379 = 514$$

24 ve 514 sayıları çift sayılar oldukları için soruda verilen ifade doğrudur. İki sayı örneği denedim, ikisinde de çift sayıya ulaştım.

Cem'in cevabı

Bence doğru; tüm tek sayılar, $2n + 1$ şeklinde gösterilebilen sayılardır (n tam sayı olsun).

İki ayrı tek sayı alırsam birisi $2n + 1$, diğeri ise $2m + 1$ olur.

Bu iki sayıyı topladığımda

$$\begin{aligned}(2n + 1) + (2m + 1) &= (2n + 2m) + (1 + 1) \\ &= 2n + 2m + 2 \\ &= 2(n + m + 1)\end{aligned}$$

Şeklinde bir çift sayı elde ederim.

Bu nedenle iki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.

Bu verilen cevaplardan hangisi / hangileri verilen ifadeyi sizce ispatlar? Nedeninizi açıklayın.

Cem'in cevabı ispatlar. Çünkü her sayı için doğrudur.

Şekil 91. Örnek öğrenci cevabı (Son2Algı)

- 1) Bir öğretmen matematik sınavında öğrencilerine şu soruyu sorar;
"Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır." Sizce bu ifade doğru mudur?
İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?
Bu soruya karşılık dört öğrenci aşağıdaki cevapları vermiştir.

Ayşe'nin cevabı Bence doğru; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım. $3 + 4 + 5 = 12$ 12, ortadaki sayının, yani 4'ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.	Mert'in cevabı Bence doğru. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a , $(a + 1)$ ve $(a + 2)$ olur. Sonra toplayalım $a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3$ olur. $3a + 3 = 3(a + 1)$ Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.
Zeki'nin cevabı Bence yanlış, 15, 16 ve 17 sayılarını alalım. $15 + 16 + 17 = 47$ 47, 16'nın 3 katı değil. Bu yüzden ifade yanlıştır.	Belma'nın cevabı Bence doğru; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım. $2 + 3 + 4 = 9$ $9 = 3 \cdot 3$ Yani ortadaki sayının 3 katı. Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım. $21 + 22 + 23 = 66$ $66 = 3 \cdot 22$ Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım. İki ayrı deneme yaptım ikisi de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

Hangi öğrencinin cevabı sizce bu soruya verilecek en uygun ispattır? Neden?

Mert'in cevabı her soru için doğrudur. Çünkü tahmin yoluyla belirli ardışık sayılar vererek yapmamıştır.

Şekil 92. Örnek öğrenci cevabı (Son3Algı)

BÖLÜM V

SONUÇ TARTIŞMA ve ÖNERİLER

5.1. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu araştırmanın amacı, ispat animasyonları kullanılarak, aile oluru ve gönüllü olarak katılımları sağlanmış ve seviyeleri birbirlerine yakın 7. Sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinin belirlenmesi ve ortaya konulmasıdır. Bu kapsamda çalışma gurubunda gönüllü olarak bulunan öğrencilerle ön klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Dolayısıyla araştırmaya gönüllü olarak katılan öğrencilerin ispat yapmaya ilişkin ön bilgilerinin de belirlenmesi sağlanacaktır. Ön klinik mülakatlarının gerçekleştirilmesinden sonra Varsayımlara bağlı Öğrenme güzergâhı Oluşturma adına ispat öğretiminde kullanılan animasyonların öğretim etkinliklerinin hazırlanması, öğretim etkinlikleri ve materyallerin planlanması yapılmış ve öğrenme varsayımları oluşturulmuştur. Akabinde Varsayımlara bağlı Öğrenme güzergâhıyla 10 farklı animasyon ve öğretim tekniği oluşturulmuştur. Oluşturulan 10 farklı öğretim etkinliği içerisinde 4 tanesine pilot uygulama yapılmış olup gözlemlenen bulgular uzman görüşlerine sunulmuş ve uzman görüşleri sonucunda öğretim etkinliklerinde son düzenlemeler yapılmıştır. Yine uzman görüşleri alınarak diğer 6 etkinliğin öğretim deneyi evresinde bulunan, sürekli analizler neticesinde ihtiyaç duyulduğu takdirde yeniden düzenlenerek uygulamaya alınmasına karar verilmiştir. Bu evreden sonra ise animasyonlar kullanılarak öğretimi amaçlanan ispat öğretim sürecinin gerçekleştirildiği öğretim deneyi evresine geçilmiştir. Deney basamağında varsayımlara bağlı öğrenme güzergâhı ile oluşturulan animasyonların ve etkinliklerin varsayımları test edilmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılmıştır. Öğretim deneyi evresini bitirdikten sonra çalışmaya gönüllü olarak katılan öğrencilerin öğretim süreci sonunda ispat süreçlerinin nasıl

şekillendiğinin belirlenmesi amacıyla çalışma gurubunda olan tüm öğrencilerle son klinik testler yapılmıştır.

5.1.1 Uygulama Öncesinde Yapılan Ön görüşme testinden elde edilen Sonuçlar

Bu araştırmada 7. sınıf öğrencilerinin 15 sorudan oluşan bir ön görüşme testi uygulanmıştır. Bu uygulamada öğrencilerin ispat performanslarına bakıldığında öğrencilerin cevap kısımlarına “kuralı biliyorum fakat ispatlayamam.” gibi ifadeler yazmış ya da önermeyi örnek vererek doğrulamışlardır. Çoğu öğrencinin de soruyu boş bıraktığı görülmüştür. Bu sonuç literatürde bulunan pek çok çalışma (Chazan, 1993; Cooper vd., 2011; Çalışkan, 2012; Healy & Hoyles, 2000; Harel & Sowder, 1998, Knuth vd., 2009) ile uyumludur.

Ön klinik mülakat verileri belirtilen temalara göre sınıflandırılmış, temalara ait her öğrenme amacı için öğrencilerin ispat düzeylerindeki değişim Waring’ın yaptığı sınıflandırmaya göre incelenmiştir. Görüşme sorularına ait frekans dağılımı Tablo 71’de verilmiştir.

Tablo 71

Ön Klinik Mülakat Verilerine Göre Öğrencilerin İspat Düzeyleri (İD)

Soru No	İspat Düzeyi 0		İspat Düzeyi 1	
	Frekans	Yüzde(%)	Frekans	Yüzde(%)
1	11	73,3	4	26,7
2	10	66,6	5	33,4
3	7	46,6	8	53,4
5	9	60	6	40
6	11	73,3	4	26,7
7	12	80	3	20
8	13	86,6	2	13,4
9	12	80	3	20
10	13	86,6	2	13,4
11	12	80	3	20
12	12	80	3	20
13	10	66,6	5	33,4
14	11	73,3	4	26,7
15	10	66,6	5	33,4

5.1.2 Uygulama Sonrasında Yapılan Son Görüşme Testinden Elde Edilen Sonuçlar

Araştırma kapsamında ortaokul 7. sınıf matematik dersi öğretim programında bulunan öğrenme alanları temel alınarak dört alt problem belirlenmiştir. Bu alt problemlerin ilkinde, “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait öğrenme amaçlarındaki ispat yapma evrelerinde ne çeşit bir yol izlediğinin açığa çıkarılması amaçlanmıştır. Bu kapsamda oluşturulan varsayımlara bağlı öğrenme güzergâhı ve araştırmanın uygulama evresi sonunda gözlemlenen verilerin analizleri doğrultusunda çalışma grubundaki 7. Sınıf öğrencilerinin ispat seviyelerindeki farklılık oranları Tablo 72’de yer almaktadır.

Tablo 72

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergâhı

Temalar	Öğrenme Amaçları
Sayılar ve İşlemler öğrenme alanı ispatları	A1. Bölünebilme Kurallarını İspat Etme A.2 İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğunu ispat etme Zıt işaretli sayılarının çarpımının negatif olduğunu ispat etme A.3 Sayıların 0. Kuvvetinin 1 olduğu ispat etme

Tablo 73

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanına Ait Soruların Son Görüşme İspat Düzeyleri

Düzeyler	A1				A2				A3	
	10.soru		11.soru		12.soru		7. soru		9. soru	
	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde
İspat Düzeyi 3	4	26,7	3	20	1	6,7	10	86,6	4	26,7
İspat Düzeyi 4	11	73,3	12	80	14	93,3	5	13,4	11	73,3

Diğer alt problemde “Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait öğrenme amaçlarındaki ispat yapma evrelerinde ne çeşit bir yol izlediğinin açığa çıkarılması amaçlanmıştır. Bu kapsamda oluşturulan varsayımlara bağlı öğrenme güzergâhı ve araştırmanın uygulama evresi sonunda gözlemlenen verilerin analizleri doğrultusunda

çalışma grubundaki 7. Sınıf öğrencilerinin ispat seviyelerindeki farklılık oranları tabloda yer almaktadır.

Tablo 74

Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanı Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahı

Temalar	Öğrenme Amaçları
Geometri ve ölçme öğrenme alanı ispatları	B1.Üçgenin İç Açılar Toplamının 180^0 olduğunu ispat etme B.2 Çokgenin İç Aç Formülünü ispat etme B.3. Dairenin Alan Formülünü İspat Etme B.4. Kare, dikdörtgen, paralelkenar ve yamuğun alan formüllerini ispat etme B.5. Üçgenin alan formülünü ispat etmeleri ile ilgili öğrenmelerinin belirlenmesi amaçlanmıştır

Tablo 75

Geometri ve Ölçme Öğrenme Alanına Ait Soruların Son Görüşme İspat Düzeyleri

Düzeyler	B1	B2	B3	B4	B5
	3.soru	7. soru	8. soru	13. soru	15. soru
	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde	Frekans
İspat Düzeyi 3	3	20	3	20	4
İspat Düzeyi 4	12	80	12	80	11

Üçüncü alt problemde “Cebir Öğrenme Alanı İspatları” temasına ait öğrenme amaçlarındaki ispat yapma evrelerinde ne çeşit bir yol izlediğinin açığa çıkarılması amaçlanmıştır. Bu kapsamda oluşturulan varsayımlara bağlı öğrenme güzergâhı ve araştırmanın uygulama evresi sonunda gözlemlenen verilerin analizleri doğrultusunda çalışma grubundaki 7. Sınıf öğrencilerinin ispat düzeylerindeki değişim oranları tabloda verilmiştir.

Tablo 76

Cebir Öğrenme Alanı Varsayımlara bağlı Öğrenme güzergâhı

Tema	Öğrenme Amaçları
Cebir Öğrenme Alanı İspatları	C.1. Toplam formülünü ispat etme

Tablo 77

Cebir Öğrenme Alanına Ait Soruların Son Görüşme İspat Düzeyleri

Düzeyler	C1	
	3.soru	
	Frekans	Yüzde
İspat Düzeyi 4a	6	40
İspat Düzeyi 4b	9	60

Son alt problem olan “İspat Algısı” temasına ait öğrenme amacında algının değişiminde ne çeşit bir yol izlediğinin açığa çıkarılması amaçlanmıştır. Bu kapsamda oluşturulan varsayımlara bağlı öğrenme güzergahı ve araştırmanın uygulama evresi sonunda gözlemlenen verilerin analizleri doğrultusunda çalışma grubundaki 7. Sınıf öğrencilerinin ispat düzeylerindeki değişim oranları tabloda verilmiştir.

Tablo 78

İspat Algısı Temasına Ait Varsayımlara Bağlı Öğrenme Güzergahı

Tema	Öğrenme Amacı
İspat Algısı	D.1. Verilen bir ifadeye ait ispatı seçme ve nedenini açıklama

Tablo 79

İspat Algısı Temasına Ait Soruların Son Görüşme İspat Düzeyleri

Düzeyler	D1			
	1.soru		2. soru	
	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde
İspat Düzeyi 3	4	26,7	5	13,4
İspat Düzeyi 4	11	73,3	10	86,6

Araştırmadan elde edilen sonuçlar şu şekilde sıralanabilir;

Öğrencilerin ispat yapma süreçleri genel olarak incelendiğinde, araştırma kapsamında geliştirilen ispat animasyonları ve öğretim etkinlikleri kullanılarak gerçekleştirilen öğretim deneyinin ön görüşme sorularında belirlenen İspat Düzeyini 0'dan 2-3-4'e çıkardığı, öğrencilerin belirtilen konulara ait ispatları yapabildikleri ve ispat algılarının olumlu yönde geliştiği görülmektedir.

Öğrenci cevapları incelendiğinde ön görüşme testinde oldukça düşük puan alan bazı öğrencilerin testte çok başarılı olmasalar da son görüşme testindeki ispat algısı sorularına doğru cevap verdikleri görülmüştür. Bu da ortaokul seviyesindeki öğrencilerin lise ve üniversite seviyesinde ispata ani geçişle oluşan ispat konusundaki didaktik boşluğun bu araştırmada kullanılan yöntemle doldurulabileceği anlamına gelebilir.

Ön görüşme testinde ispat sorularını boş bırakan öğrencilerin uygulama sonrasında sonuca ulevresalar dahi ispat evrelerinden bir kısmını geçirmiş oldukları görülmüştür. Bu bulgu, Healy ve Hoyles (2000)'un ve Öztürk (2016)'ün çalışmalarındaki, öğrenciler geçerli ispat yapamamaları dahi, genel ve açıklayıcı argüman üretmiş olmaları, ispata başlangıç niteliğinde muhakeme anlayışına sahip olmalarının olumlu olarak görüldüğü bulgusuyla örtüşmektedir.

Cebir öğrenme alanına ait toplam formülünü ispat etme öğrenme amacını ölçen soruda öğrencilerin bir kısmı doğru evreleri yaparken cebirsel işlemler kısmında hataya düştükleri görülmüştür. Zaimoğlu (2012) ve Aylar ve Şahiner (2016)'ın ortaokul öğrencilerinin, İncikabı (2013)'nın öğretmen adaylarının ispat sürecine yönelik yapmış oldukları çalışmalarda, cebirsel ispatların en az tercih edilen ispat olması, öğrencilerin cebiri beklenen düzeyde kullanamamasına bağlanmaktadır ve cebiri düzgün kullanabilmenin ispat becerisinde etkisi olduğu belirtilmektedir.

Öğrencilerin sözsüz(görsel) ispatı kullanarak cevap verdikleri sorularda matematiksel notasyonları doğru kullanmadıkları ya da eksik kullandıkları görülmüştür. Üçgenin iç açılarının ispatını görsel olarak doğru ispatlayan fakat doğruların paralel olduğunu ifade etmeyen birkaç öğrencinin olduğu görülmüştür.

5.2. Tartışma ve Öneriler

Altıparmak ve Öziş (2005), yaptıkları araştırmada okul öncesi, ilköğretim ve lise düzeylerinde matematiksel muhakemenin gelişimini incelemiştir. Okul öncesi dönemde sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma ve sıralama kavramları verilerek çocuklarda muhakemenin oluşumu için temel adımların atılabileceğini belirtmiştir. Bu çalışmanın sonucunda, öğrencilerinin ispat yapma beceri gelişiminin çeşitli materyallerle olumlu yönde artış gösterebileceği ve bu konuda öğretmenin çok etkili olduğunu belirtmişlerdir. Yapmış olduğumuz araştırma sonucu ile benzerlik göstermektedir.

Albayrak Bahtiyari (2010), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasında, ortaöğretim öğrencilerinin matematiksel ispat yapma konusundaki düşüncelerini belirlemek amaçlı likert tipi anket uygulaması gerçekleştirmişlerdir. Yapılan araştırmada çıkan sonuçlar arasındaki, matematik dersinde muhakemenin yer alması ve bunun için de farklı tekniklerin, bilgi teknolojilerinin kullanılması gerektiğini düşüncesi yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Orhan (2019), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasını Ortaokul 7. Sınıf öğrencileri ile gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada müzik dersi alan 7. Sınıf öğrencilerinin animasyon destekli öğretimin akademik başarısına etkisini incelenmiştir. Çalışmada ön test – son test kontrol gruplu desen modeli uygulanmış olup, testler sonucu yapılan değerlendirmeler sonucunda “Çalgı ve Çalgı Toplulukları” ünitesinin öğretilmesinde, animasyonlarla desteklenmiş ders anlatımı, müzik dersi öğretim programına dayalı etkinliklerle ders anlatımı yaklaşımına göre başarının artmasına daha fazla etkili olduğu gözlemlenmiştir. Bu sonuçtan yola çıkarak yaptığımız çalışma ile paralellik gösterdiği anlaşılmaktadır.

Zaimoğlu (2012), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasını ilköğretim öğrencileri ile gerçekleştirmiş olup öğrencilerin geometrik ispat yapma ve akıl yürütme süreçlerini 8 soruluk bir form kullanarak incelemiştir. Araştırmada öğrencilerin cebirsel ispatı tercih etmemeleri ve bu ispat yapma konusunda gerekli yeterliliğe sahip olmamaları sonucu yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Aylar (2014), yapmış olduğu doktora tez çalışmasını ilköğretim 7. sınıf düzeyinde 54 öğrencileri ile gerçekleştirmiş olup, ispata yönelik algı ve becerilerini betimlemeyi amaçlamıştır. Bu çalışma 14 hafta sürmüştür. 14 haftalık süreçte öğrencilere, ispat öğretmede ispat karşıtı örnekler vererek ispat tüketme yöntemini kullanmışlardır. Süreç

sonunda öğrencilere gerekli testler yapılmış olup ispat yapma becerilerinde gelişmeler gözlemlenmiştir. Yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Gelişen (2017), yüksek lisans çalışmasını, Sivas merkez ilesinde bulunan bir ortaokulunun 9. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirmiş olup bu çalışmada üçgenler konusunun öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyi gerçekleştirmiştir. Araştırmada yapılan değerlendirmeler sonucunda, öğrencilerin origami ve sözsüz ispatlar yöntemlerinin zevkli ve öğretici buldukları ortaya çıkmıştır. bu çalışma sonucu yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Şadan (2017), yapmış olduğu yüksek lisans tez çalışmasını, lisesi düzeyindeki fen bölümünde okuyan 6 öğrenci ile gerçekleştirmişlerdir. öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerini analiz etmek ve görsel ispatın öğrenme sürecinde kullanımına yönelik örnek bir uygulama sunmaktır. Üç evreden oluşan bu çalışma sonucunda klinik mülakatlar değerlendirilerek, Süreç sonunda öğrenciler, görsel ispat geliştirme sürecini yararlı bulduklarını ve süreçten keyif aldıkları belirtmişler, görsel ispatların matematik sınıflarında kullanılması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu sonuç doğrudan yapmış olduğumuz araştırma sonucu ile benzerlik göstermektedir.

Bayram (2001), yapmış olduğu çalışmada bilgi iletim biçimlerinin öğrenci başarısına etkisini incelemiş olup dört çalışma gurubu oluşturmuştur. Bu çalışma guruplarında Fen Bilgisi dersi uzay ve gökyüzü konuları işlenmiştir. Bu konular işlenirken klasik iletim biçimi, görsel iletim biçimi, görsel-işitsel ve çok duyulu iletim biçimi kullanılmıştır. Klasik iletim biçimi kontrol gurubu olarak değerlendirilmiş olup çalışma sonucunda klasik iletim biçimi uygulanan çalışma gurubunda akademik başarı düzeyi diğer guruplara göre daha düşük olduğu, kullanılan diğer iletim biçimlerinin daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Bu çalışma sonucuna göre kullanılan materyallerin ve farklı öğretim şekillerinin öğrencilerinin akademik başarısını olumlu yönde etkilemesiyle yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Tezcan ve Yılmaz (2003) çalışmalarında liselerde kimya öğretiminde kullanılan geleneksel düz anlatım yöntemi ile bilgisayar destekli öğretimin başarıya etkilerini karşılaştırmışlardır. 57 öğrencinin katılım sağladığı çalışma lise düzeyinde 10. Sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmada ön test ve son test uygulanarak gerekli analizler yapılmıştır. Sonuç olarak, Uygulama sonunda deney grubundaki öğrencilerin başarıları kontrol grubuna

göre daha yüksek çıktığı görülmüştür. Bu çalışma sonucuna göre öğretimde kullanılan materyallerin ve farklı öğretim şekillerinin öğrencilerinin akademik başarısını olumlu yönde etkilemesiyle yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Daşdemir ve Doymuş (2012) çalışmalarında Animasyon Kullanımının 8. Sınıf fen bilgisi dersinde başarıya ve kalıcılığa etkisini araştırmışlardır. Çalışmalarında diğer inceledikleri bir konu da öğrencilerin bilimsel süreç becerileri ve animasyon kullanımı hakkında öğrenci görüşleridir. Deney ve kontrol grubu ile gerçekleştirilen bu araştırmada deney grubu öğrencilerine animasyonla, kontrol grubu öğrencilerine ise geleneksel öğretimle konuyu anlatmıştır. Fen bilgisi dersi hücrenin bölünmesi ünitesinin öğretiminin gerçekleştirildiği bu çalışma sonunda animasyon kullanımının öğrencilerin akademik başarılarına, bilgilerinin kalıcılığına ve bilimsel süreç becerilerine olumlu yönde etki yaptığı ortaya konmuştur. Bu çalışma sonucuna göre öğretimde kullanılan materyallerin ve farklı öğretim şekillerinin öğrencilerinin akademik başarısını olumlu yönde etkilemesiyle yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Çelik (2007), yapmış olduğu araştırmada bilgisayar destekli animasyon programlarının öğrencilerinin başarısına etkisini incelemiştir. Çalışma lise düzeyinde 9. Ve 10. Sınıf öğrencileri ile coğrafya derslerinde gerçekleştirilmiştir. Yapılan testler ve alınan sonuçlar eşliğinde animasyon programlarının öğrencilerin akademik gelişimi üzerinde pozitif bir gelişme sağladığı gözlemlenmiş olup bu anlamda yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

İskender (2007), yapmış olduğu yüksek lisans çalışmasında animasyon kullanımı ile bilgisayar destekli fen öğretiminin öğrenci başarısına etkisini incelemiştir. Bu çalışma 8. Sınıf fen ve teknoloji dersi mayoz ve mitoz bölünme konusunun öğretimi üzerine yapılmıştır. Kontrol grubunda (129 öğrenci) geleneksel anlatım ile deney grubunda (129 öğrenci) ise animasyon ile öğretim tekniği kullanılmıştır. Araştırması sonucunda deney grubundaki öğrencilerin başarılarında ve hatırd tutma düzeylerinde olumlu bir etki olduğu ortaya konmuştur. Bu çalışma, yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Kolomuç (2009), yapmış olduğu doktora tez çalışmasında lise düzeyindeki 11. Sınıf öğrencilerinin kimya dersinde animasyon destekli öğretimi konu almıştır. Kolomuç, gerçekleştirdiği altı hafta süren bu deneysel çalışma sonunda son test ve gecikmiş testlerde deney ve kontrol grupları arasında deney grubu lehine anlamlı farklılık olduğunu ortaya

koymuştur. Araştırmada ayrıca kullanılan animasyonların hem öğrencilerin alternatif kavramlarını değiştirdiği hem de kalıcı yeni bilgiler kazanmalarını sağladığı belirtilmiştir. Yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Cinkaya' nın (2011), yapmış olduğu tez çalışmasını ortaöğretim düzeyi 6. 7. ve 8. Sınıf ğrencileri ile gerçekleştirmiş olup fen ve teknoloji derslerinde bilgisayar animasyonunun kullanımının akademik başarıya etkisi incelenmiştir. Araştırmada kontrol ve deney gurupları oluşturulmuş olup, kontrol gurubuna normal ders anlatımı deney gurubuna ise bilgisayar animasyonu destekli ders anlatılmıştır. Çalışma sonunda yapılan değerlendirmeler sonucunda deney gurubunun akademik başarı düzeyi kontrol gurubuna göre daha yüksek çıkmıştır. Yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Ayvacı, Abdusselem ve Abdusselem (2012), yapmış oldukları çalışmasını ortaöğretim düzeyi 6. Sınıf ğrencileri ile gerçekleştirmiş olup Fen ğretiminde Animasyon Destekli izgi Filmlerin kavramsal anlamaya etkisini araştırmışlardır. Araştırmada 5E modeli kullanılmış olup çalışma sonucunda yapılan değerlendirmeler doğrultusunda deney guruplarının kavramsal anlama düzeylerinde pozitif yönde gelişme olduğu gözlemlenmiştir. Bu sonuç yaptığımız araştırma sonucu ile paralellik göstermektedir.

Erdemir (2012), yapmış olduğu çalışmasını ortaöğretim düzeyi 8. Sınıf ğrencileri ile gerçekleştirmiş olup, fen ve teknoloji dersindeki “Canlılar ve Enerji İlişkileri” ünitesinin animasyon kullanılarak öğretiminin ğrenci başarısına etkisini araştırmışlardır. Yapılan testler ve alınan sonuçlar eşliğinde animasyon programlarının öğrencilerin akademik gelişimi üzerinde pozitif bir gelişme sağladığı gözlemlenmiş olup bu anlamda yapmış olduğumuz araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Kulik, Kulik ve Cohen (1980), tarafından yapılan çalışma üniversite düzeyindeki 59 ğrenci katılımı ile gerçekleştirilmiştir. Bu araştırmada bilgisayar tabanlı öğretimde animasyon ve geleneksel yöntemin kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda animasyon ile ğretim yönteminin geleneksel yöntemle göre daha az zaman aldığını ve daha başarılı sonuçlar elde ettiğini gözlemlemişlerdir. Bu doğrultuda yaptığımız araştırma ile benzerlik göstermektedir.

Lin, Chen ve Dwyer (2006), tarafından yapılan alışma İngilizce eğitimi alan 58 öğrencinin katılımı ile hayata geirilmıştir. Bu araştırmada Bilgisayar Destekli Animasyonlar ve Statik Görüntülerin İngilizce eğitimi üzerindeki Etkilerini inceledikleri incelenmiş olup araştırmada Son test ve tekrar testi uygulanmıştır. Yapılan testler ve alınan sonuçlar eşliğinde

animasyon programlarının öğrencilerin akademik gelişimi üzerinde pozitif bir gelişme sağladığı gözlemlenmiş olup bu anlamda yapmış olduğumuz araştırma ile paralellik göstermektedir.

Bu araştırma sonucunda yapılan analizlerle ulaşılan veriler doğrultusunda uygulamaya ve araştırmacılara yönelik tavsiyeler şöyledir;

Altıparmak ve Öziş (2005) çalışmalarında öğrenciye ispat ve muhakeme becerisinin öğretiminin ve öğrencide ispat becerisinin gelişiminin öğretmene bağlı olduğunu belirtmişlerdir. Bu nedenle NCTM standartlarında bulunan Akıl Yürütme ve İspat Becerisinin ortaokul öğretim programında yer alması gerektiği düşünülmektedir.

Araştırmada kullanılan animasyonlar Milli Eğitim Bakanlığı tarafından geliştirilen EBA ders içerikleri kısmına yüklenilecektir. Bu noktada öğretmenler bu animasyonları derslerinde kullanabilecektir.

Bu araştırmada kullanılan animasyonların bazılarında interaktif sorular yer almaktadır. Bu animasyonları izlerken öğrenci motivasyonunun daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir. İleride yapılacak benzer bir araştırmada tüm animasyonlar interaktif sorulara yer verilebilir.

Yapılan bu araştırmada tasarlanan öğretim sürecinin etkililiği değil öğrencilerin ispat yapma düzeyleri incelenmiştir. Bu yolla öğrenilen kuralların, klasik ders anlatımı yoluyla ya da başka bir öğretim yöntemi ile öğretilmesi arasında bir fark olup olmadığının araştırılması başka bir çalışma konusu olabilir.

Uygulamada daha çok görsel ispat yöntemi kullanılmıştır. Farklı ispat yöntemleri kullanılarak hangi yöntemin daha kullanışlı olduğu başka çalışmalarda araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Akkaş S., Hacısalihoğlu H. H., Özel Z., & Sabuncuoğlu A. (1988). *Soyut matematik* (2. Baskı). Ankara: Gazi Üniversitesi.
- Akkaya, R. (2010). *Olasılık ve istatistik öğrenme alanındaki kavramların gerçekçi matematik eğitimi ve yapılandırmacılık kuramına göre bilgi oluşturma sürecinin incelemesi*. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.
- Aktaş, Y. (2002). *Okul öncesi dönemde matematik eğitimi*. Adana: Nobel Tıp.
- Albayrak Bahtiyari, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Aldağ, H., & Sezgin, M. E. (2003). Çok ortamlı öğrenmede ikili kodlama kuramı ve bilişsel model. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 11(11), 121-135. <https://dergipark.org.tr/en/pub/cusosbil/issue/4367/59735> sayfasından erişilmiştir.
- Almedia, D. (1996). Justifying and the proving in the mathematics classroom, philosophy in mathematics education, *Exeter University, Philisoph of Mathematical Education Journal*, 9.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869–890. <https://doi.org/10.1080/00207390050203360>.
- Almeida, D. (2001). Pupil's proof potential, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(1), 53-60.

- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479–488. <https://doi.org/10.1080/0020739031000108574>.
- Alsina, C., & Nelsen R. B. (2001). A visual proof the erdos-mordell inequality. *Forum Geom*, 7, 99-102. <http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200711.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Altıparmak, K., & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37. https://www.researchgate.net/profile/Kemal_Altiparmak/publication/283998133_Matematiksel_ispat_ve_matematiksel_muhakemenin_gelisimi_uzerine_bir_inceleme/links/5e0f1285299bf10bc38c786a/Matematiksel-ispat-ve-matematiksel-muhakemenin-gelisimi-uezerine-bir-inceleme.pdf#page=30 sayfasından erişilmiştir.
- Altun M. (2008). *İlköğretim ikinci kademe (6, 7 ve 8. Sınıflarda) matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel.
- Altun, M. (2014). *Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için liselerde matematik öğretimi*. (5. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.
- Altun, M. ve Yılmaz, A. (2011). Lise öğrencilerinin parçalı fonksiyon üzerine işaret fonksiyonu bilgisini oluşturma süreci. *Eğitim ve Bilim*, 36(162), 66-83.
- Amiel, T., & Reeves, T. C. (2008). Design-based research and educational technology: rethinking technology and the research agenda. *Educational Technology & Society*, 11 (4), 29–40. <http://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.11.4.29> sayfasından erişilmiştir.
- Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* içinde (s.27-42). Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901691_004.
- Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

- Arslan, S., & Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Education and Science*, 35(156), 17-31. <http://egitimvebilim.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/40> sayfasından erişilmiştir
- Asar, A. O., Arıkan, A., & Arıkan, A. (2009). Cebir (1. Baskı). Ankara: Eflatun.
- Ayas, A., Çepni, S., Johnson, D., & Turgut, M.F. (1997). *Kimya öğretimi YÖK/Dünya Bankası*. Ankara: MEGP Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi.
- Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Aylar, E., & Şahinler, Y. (2016). Yedinci Sınıf Öğrencilerinin İspat Becerileri ve Tercihlerinin İncelenmesi. *Journal of Kirsehir Education Faculty*, 17(3). 559-579. <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/1487497> sayfasından erişilmiştir.
- Ayvacı, G. H., Abdüsselam, Z., & Abdüsselam, S. M. (2012), *Animasyon Destekli Çizgi Filmlerin Fen Öğretiminde Kavramsal Anlamaya Etkisi:6.Sınıf Kuvveti Keşfedelim Konusu Örneği* [Bildiri], X.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Niğde.
- Baek, Y. K., & Layne, B. H. (1988). Color, graphics, and animation in a computer-assisted learning tutorial lesson. *Journal of Computer-Based Instruction*, 15(4), 131-135.
- Baker, J. D. (1996). *Students' difficulties with proof by mathematical induction*. New York: The Annual Meeting of the American Educational Research Association. <https://eric.ed.gov/?id=ED396931> sayfasından erişilmiştir.
- Baker, R., Doorman, M. ve Drijvers, P. (2003). Why students engage in “gaming the system” behavior in interactive learning environments. *Journal of Interactive Learning Research*, 19(2), 185-224.
- Baki, A. (2001). Bilişim teknolojisi ışığı altında matematik eğitiminin değerlendirilmesi, *Milli Eğitim Dergisi*, 149, 26-31. http://dhgm.meb.gov.tr/yayimlar/dergiler/Milli_Egitim_Dergisi/149/baki.htm. sayfasından erişilmiştir.
- Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik*. İstanbul: Ceren.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim.

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education on symbolizing and computer tools*. Amersfoort: Wilco Press. <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/893> sayfasından erişilmiştir.
- Bakker, A., Doorman, M., & Drijvers, P. (2003). *Design research on how it may support the development of symbols and meaning in mathematics education. Congress on Education (ORD)* <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/5896.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Balacheff, N. (1987). *'Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics' in d. pimm, mathematics, teachers and children*. London: Hodder & Stoughton. <https://www.semanticscholar.org/paper/Aspects-of-proof-in-pupils-%27-practice-of-school-Balacheff/b6dd4a64412ae8ee451cf85df5da8fc80015ea92?p2df> sayfasından erişilmiştir.
- Balacheff, N. (1988). *'Thèse: Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège'*. Grenoble: Université Joseph Fourier. <https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/tel-00326426/> sayfasından erişilmiştir.
- Balacheff, N. (1990). Towards a Problematique for Research on Mathematics Teaching, *Research in Mathematics Education*, 21, 258-272. <https://doi.org/10.2307/749524>
- Ball, D.L., Hoyle, C., Jahnke, H.N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof, proceedings of the international congress of mathematicians. L.I. Tatsien (Ed.), 3. cilt (s. 907– 920), , Beijing: Higher Education.
- Barab, S. A., & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1-14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1.
- Barak, M., & Dori, Y. J. (2011). Science education in primary schools: Is an animation worth a thousand pictures?. *Journal of Science Education and Technology*, 20, 608– 620. <https://doi.org/10.1007/s10956-011-9315-2>.
- Bardelle, C. (2010). Visual proofs: an experiment. V. Durand-Guerrier et al (Ed), *Paper presented at the annual meeting of CERME6* içinde (s. 251-260), Lyon: France. INRP. <https://pdfs.semanticscholar.org/3320/5b6705c524c17c18ef505d28457c6d735568.pdf#page=333> sayfasından erişilmiştir.

- Barendregt, H., & Wiedijk, F. (2005). The challenge of computer mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 363, 2351-2375. <https://doi.org/10.1098/rsta.2005.1650>.
- Bayer, R. (2009). Proof by picture. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.353.5627&rep=rep1&type=pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Bayram, S. (2001). Fen bilgisi öğretiminde bilgi iletim biçiminin öğrenci başarısına etkisi. *Eğitim Bilimleri Dergisi*, 00(13), 77-85. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/maruaebd/issue/366/2509> sayfasından erişilmiştir.
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40. <https://doi.org/10.1007/BF00144356>.
- Bell, C. J. (2011). Proof without words: A visual application of reasoning. *Mathematic Teachers*, 104 (1), 690-695. <https://pubs.nctm.org/view/journals/mt/104/9/article-p690.xml> sayfasından erişilmiştir.
- Bogdan, R.C., & Biklen, S. K. (2006). *Qualitative research for education: An introductory to theory and methods*. (5. Baskı). Needham Heights, MA: Allyn and Bacon. http://math.buffalostate.edu/dwilson/MED595/Qualitative_intro.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Britz, T., Mammoliti, A., & Sørensen, H. K. (2014). Proof by picture: A selection of nice picture proofs. *Parabola*, 50(3), 1-8. https://www.parabola.unsw.edu.au/files/articles/2010-2019/volume-50-2014/issue-3/vol50_no3_2.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions. *Journal of the Learning Science*, 2, 141-178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2.
- Brown, J. R. (1997). Proofs and pictures. *British Journal for the Philosophy of Science*, 48, 161-180. <https://doi.org/10.1093/bjps/48.2.161>.
- Bryman, A. (2003). Triangulation. *Encyclopedia of Social Science Research Methods*. SAGE. http://www.sagepub.com/chambliss4e/study/chapter/encyc_pdfs/4.2_Triangulation.pdf adresinden 23.05.2014 tarihinde alınmıştır.

- Burke, K. A., Greenbowe, T. J., & Windschitl, M. A. (1998). Developing and using conceptual computer animations for chemistry instruction. *Journal of Chemical Education*, 75(12), 1658–1661. <https://doi.org/10.1021/ed075p1658>.
- Bülbül, O. (2009). *Fizik dersi optik ünitesinin bilgisayar destekli öğretiminde kullanılan animasyonların ve simülasyonların akademik başarıya ve akılda kalıcılığa etkisinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.
- Cajori, F. (1893). *Matematik Tarihi* (D. İlalan, Çev.) Ankara: ODTÜ Geliştirme Vakfı.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical *proof*. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359-387.
- Cinkaya, Z. (2011). İlköğretim 6. 7. 8. sınıfları fen ve teknoloji dersinde bilgisayar animasyonunun akademik başarıya etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Clark, D. L. (2004). The Effect Of Using Computer Assisted Instruction To Assist High School Geometry Students Achieve Higer Levels Of Success On The Florida Competency Achievement Test (FCAT). Doctor of Philosophy Thesis, Union Institute and University, (3157508).
- Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>.
- Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41–53. <https://doi.org/10.1080/0141192940200105>.
- Collins, A. (1992). Toward a design science of education. E. Scanlon ve T. O'Shea (Ed.), *New directions in educational technology* içinde (s. 15–22). New York: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-77750-9_2.
- Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15–42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2.

- Conradie, J., & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 225-235. <https://doi.org/10.1023/A:1017502919000>.
- Cooper, J. L., Walkington, C. A., Williams, C. C., Akinsiku, O. A., Kalish, C. W., Ellis, A. B., & Knuth, E. J. (2011). *Adolescent reasoning in mathematics: exploring middle school students' strategic approaches in empirical justifications*, The 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society'de sunulmuş bildiri, Boston, MA. <https://escholarship.org/content/qt04b122tk/qt04b122tk.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Cyr, S. (2011). *Development of beginning skills in proving and proof writing by elementary school students*. The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education'da sunulmuş bildiri, University of Rzeszów, Poland. http://lettredelapreuve.org/pdf/CERME7/Cerme7_WG1_Cyr.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Çağlayan, G. (2015). Math Majors' visual proofs in a dynamic environment: The case of limit of a function and approach. *International Journal Of Mathematic Education in Science and Technology*, 46(6), 797-823. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1015465>.
- Çalışkan, Ç. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilmeleri seviyelerinin ilişkilendirilmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa. Yükseköğretim Kurulu Başkanlığı Tez Merkezi (328655).
- Çallıalp, F. (1999). *Örnekler ile soyut matematik*. İstanbul: Atatürk Eğitim.
- Çelik, E. (2007). *Ortaöğretim coğrafya derslerinde bilgisayar destekli animasyon kullanımının öğrenci başarısına etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Çevik, A. S. (2010). *Cebire giriş* (2. Baskı). Ankara: Nobel.
- Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3. sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16(2), 495-506. <https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/819029> sayfasından erişilmiştir.
- Daşdemir, İ., & K. Doymuş. (2012). "8. sınıf kuvvet ve hareket ünitesinde animasyon kullanımının öğrencilerin akademik başarılarına, öğrenilen bilgilerin kalıcılığına ve bilimsel süreç becerilerine etkisi." *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 77-87.

- Davis, P.J. (1976). *The nature of proof*. In Carss, M. (Ed). Proceedings of the fifth international congress on mathematical education. Boston: Birkhauser.
- De Villiers, M. (1990). The role and function of proof with sketchpad. *Pythagoras*, 24, 17–24. <http://academic.sun.ac.za/education/mathematics/MALATI/Files/proof.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbalı, H. Şandır, A., & Delice (Ed.) *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* içinde (s.15-34). Ankara: Pegem Akademi.
- Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 47-71. <http://hdl.handle.net/20.500.12414/599> sayfasından erişilmiştir.
- Delil, (2006). *Sayılar*. (Ed., Kaçar, A., Temel matematik I-II). Ankara: Pegem.
- Demir, E. (2017). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının muhakeme hatalarının ispatlama bağlamında incelenmesi*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations*. Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Derek, M. (2011). *Teaching and learning of proof in the college curriculum*. Yüksek Lisans Tezi, San Jose State University, America.
- Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5–8. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001005>.
- Duran, M., Doruk, M., & Kaplan, A. (2017). Argümantasyon tabanlı olasılık öğretiminin ortaokul öğrencilerinin başarılarına ve kaygılarına etkinliğinin incelenme. *Eğitimde kuram ve uygulama*, 13(1),55-87.
- Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 105-121. https://doi.org/10.1207/S15327809JLS1101_4.

- Edelson, D.C. (2001). Design research: what we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 105–121.
- Erdemir, N. (2012). *İlköğretim 8. sınıf fen ve teknoloji dersi “Canlılar ve Enerji İlişkileri” ünitesinin öğretiminde kullanılan animasyon yönteminin öğrenci başarısına etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. UK: The Falmer Pres. <https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/27750/1002255.pdf?sequence=1> sayfasından erişilmiştir.
- Ernest, P. (2016). The problem of certainty in mathematic. *Educ. Stud. Math*, 92(2), 379-393 <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9651-x>.
- Garcia R.R., Quiros J.S., Santos R.G., Gonzalez S.M., & Fernanz S.M. (2007). Interactive multimedia animation with macromedia flash in descriptive geometry teaching. *Computers & Education*, 49(3), 615-639.
- Gelişen, A. (2017). *9. sınıfta üçgenlerin öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyi*. Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.
- Gierdien, F. (2007). From “Proofs without words” to “Proofs that explain” in secondary mathematics. *Pythagoras*, 65, 53 – 62. <http://hdl.handle.net/10019.1/96446> sayfasından erişilmiştir.
- Ginsburg, H.P. (1981). He clinical interview in psychological research on mathematical thinking: aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 4-11. <http://www.jstor.org/stable/40247721> sayfasından erişilmiştir.
- Goldberg A. (2002), What are Mathematical Proofs and Why are They Important? <http://www.math.uconn.edu/~hurley/math315/proofgoldberger.pdf>.
- Goldin, G. A. (1998). Observing mathematical problem solving through task-based interview. A. R. Teppo (Ed.) *Qualitative Research Methods in Mathematics Education*. Reston: NCTM.
- Goldoni, G. (2002). A visual proof for the sum of the first n squares and for the sum of the first n factorials of order two. *Math. Intell*, 24, 67–69. <https://doi.org/10.1007/BF03025326>.

- Göl, R. (2017). *12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlands: CD-Beta/Freudenthal Institute. <http://www.cdbeta.uu.nl/tdb/fulltext/199503-terwel2.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Gravemeijer, K. (2004). *Local instruction theories as means of support for teacher in reform mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute & Department of Educational Research, Utrecht University. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. J. Van Den Akker, K. Gravemeijer ve N. Nieveen (Ed.), *Educational design research* içinde (s.17-51). London: Routledge.
- Guion, L.A. (2002). *Triangulation: Establishing the Validity of Qualitative Studies*. FCS6014 Department of Family, Youth and Community Sciences, Florida Cooperative Extension Service, Institute of Food and Agricultural Sciences, University of Florida. <https://journals.flvc.org/edis/article/view/108267/103549> sayfasından erişilmiştir
- Güven, B., & Karataş, İ. (2003). Learning geometry with dynamic geometry software cabri: students' perceptions. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*. 2 (2). 67-78. <http://www.tojet.net/articles/v2i2/2210.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim*. 316. 35-45.
- Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE. <https://philpapers.org/rec/HANRPI-2> sayfasından erişilmiştir.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Hingham, MA: Kluwer Academic.
- Hanna, G. (2000a). *Proof and its classroom role: A survey*. M.J. Saraiva vd. (Ed.), *Conference en el IX Encontro de Investigaçao en Educaçao Matematica'da sunulmuş bildiri*, Funado. https://www.researchgate.net/profile/Gila_Hanna/publication/254692897_Proof_and

_Its_Classroom_Role_A_Survey/links/53dfc9da0cf27a7b8306b88e/Proof-and-Its-Classroom-Role-A-Survey.pdf sayfasından erişilmiştir.

Hanna, G. (2000b). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5- 23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>.

Hanna, G. (2000c). A critical examination of three factors in the decline of proof, *Interchange*, 31(1), 21-33. <https://doi.org/10.1023/A:1007630729662>.

Hanna, G. (2002). Mathematical proof. Tall D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* içinde (s. 22-41). Dordrecht: Mathematics Education Library, Kluwer. [https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=4934GtZFTcEC&oi=fnd&pg=PR12&dq=Hanna,+G.+\(2002\).+Mathematical+proof.+Tall+D.+\(Ed.\)+Advanced+Mathematical+Thinking+i%C3%A7inde+\(s.+%3F\).Dordrecht:+Mathematics+Education+Library,+Kluwer&ots=SdcFmbjGYX&sig=Ne4KwUVPq9Zk8oLaWJJ5udM3uj8&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=4934GtZFTcEC&oi=fnd&pg=PR12&dq=Hanna,+G.+(2002).+Mathematical+proof.+Tall+D.+(Ed.)+Advanced+Mathematical+Thinking+i%C3%A7inde+(s.+%3F).Dordrecht:+Mathematics+Education+Library,+Kluwer&ots=SdcFmbjGYX&sig=Ne4KwUVPq9Zk8oLaWJJ5udM3uj8&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false) sayfasından erişilmiştir.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2002). What is proof?. Baigrie, B. (Ed.), *History of modern science and mathematics* içinde (s.36- 48). New York: Charles Scribner's Sons.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and Application. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 421-438. <https://doi.org/10.1007/BF01273374>.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In *International handbook of mathematics education* (877-908). Springer, Dordrecht. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-009-1465-0_24 sayfasından erişilmiştir .

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1999). *Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs*. O. Zaslavsky (Ed.), The Twenty Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education'da sunulmuş bildiri, Haifa, Israel.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualization and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 73- 78.

Hannafin, M.J., Hannafin, K.M., Land, S., & Oliver, K. (1997). Grounded practice in the design of learning systems. *Educational Technology Research and Development*, 45(3), 101-117. <https://doi.org/10.1007/BF02299733>.

- Harel, G. (1998). Two Dual Assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa), *American Mathematical Monthly* 105, 497-507
<https://doi.org/10.1080/00029890.1998.12004918>.
- Harel, G., & Sowder (1998) Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. Schonfeld A., Kaput J., and E. Dubinsky E.(eds.) *Research in collegiate mathematics education* III, 234-282.
- Hassan Zadeh Baran, G. (2014). *Ortaöğretim 11. birinci sınıf ve üniversite 2. sınıfların bilgisi öğretmenliği bölümünde öğrenim gören öğrencilerin “modern fizik (kuantum)” dersi öğretiminde, bilgisayar destekli öğretim yöntemlerinden animasyonların akademik başarıya etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.
- Hazzan, O., & Leron, U. (1994). Students' Use and Misuse Of Mathematical Theorems: The case of Lagrange's Theorem, *For the Learning of Mathematics* 16, 23-26.
<http://www.jstor.org/stable/40248194> sayfasından erişilmiştir. sayfasından erişilmiştir.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
<https://www.jstor.org/stable/749651?seq=1> sayfasından erişilmiştir.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399. <https://doi.org/10.1007/BF01273372>.
- Hodgson, T., & Riley, K.J. (2001). Real-World problems as contexts for prof. *Mathematics Teacher*, 94(9)
<https://search.proquest.com/openview/5df029d3c44a057002183041da9ba239/1?pq-origsite=gscholar&cbl=41299> sayfasından erişilmiştir.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00858709/> sayfasından erişilmiştir.
- Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165.
[https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90023-7](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90023-7).

- Irmak, H. (2008). *Soyut matematik*. (1. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- İlhan, B. (2006). *Türkiye'de genel ortaöğretim kurumları 9. sınıf matematik eğitim programının değerlendirilmesi*. Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Malatya.
- İnaç, E. A. (2010). *Animasyon kullanımının ilköğretim öğrencilerinin fen ve teknoloji dersindeki akademik başarılarına ve akılda tutma düzeylerine etkisi: 6, 7 ve 8. sınıflar örneği*. Yüksek Lisans Tezi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Çanakkale.
- İncikabı, L. (2013). İlköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin mantıksal argümanları kanıtlama yöntemlerinin incelenmesi. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 12, 129-148.
- İskender, B. M. (2007). *Özel dershanelerde animasyon kullanımıyla bilgisayar destekli fen öğretiminin öğrenci başarısına, hatırd tutma düzeyine ve duyuşsal özellikleri üzerine etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla.
- Johson, M. J. (1993). Visual proof. *Mathematic Teacher*, 86(1), 38-49.
- Jones, K. (1997). Student-teachers conceptions of mathematical proof, *Mathematics Education Review*, 9, 16-24.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60. <http://dx.doi.org/10.1080/002073900287381>.
- Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları*. Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Karataş, İ., & Güven, B. (2004). 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme becerilerinin belirlenmesi: Bir özel durum çalışması. *Milli Eğitim Dergisi*, 163, 1-10.
- Karrass, M. (2012). *Diagrammatic reasoning skills of pre-service mathematics teachers*. Doctoral dissertation, Columbia University. <https://doi.org/10.7916/D8Z03G5W>.

- Keçeli Bozdağ, S. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumları ile ispatlama becerileri arasındaki ilişki*. Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational researcher*, 32(1), 3. <https://search.proquest.com/openview/40e04df5895cec742f6ffa851a7792e2/1?pq-origsite=gscholar&cbl=34461> sayfasından erişilmiştir.
- Knapp, J.(2005). Learning to prove in order to prove to learn. [Online]:Retrieved on 16-April-2007 at URL: http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf. Sayfasından erişilmiştir.
- Knuth, E. J. (2002a). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490. http://web.mit.edu/bskow/www/215-S12/knuth_proof-as-a-tool-for-learning.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Knuth, E. J., Choppin, J. M., & Bieda, K. N. (2009). Middle School Students' Production of Mathematical Justifications. In *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (pp. 153-170). Routledge Taylor & Francis Group. doi: <http://dx.doi.org/10.4324/9780203882009>.
- Knuth, E., & Sutherland, J. (2004). *Student understanding of generality*. The Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education' da sunulmuş bildiri. http://labweb.education.wisc.edu/~knuth/mathproject/papers/Knuth_PMENA04.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Knuth, E.J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61–88. <https://doi.org/10.1023/A:1013838713648>.
- Kobayashi Y. (2010). Integral representation of pictorial proof. *International Journal Mathematic Education Science Techology*, 42, 235-239. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.510223>.

- Kolomuç, A. (2009). *11. sınıf “kimyasal reaksiyonların hızları” ünitesinin 5e modeline göre animasyon destekli öğretimi*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 29, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.01.003>.
- Konyalıoğlu, A. C. (2015). *Investigation of effectiveness of visualization approach on understanding of concepts in vector spaces at the university level*, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Köğçe, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın matematik öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Turkish Studies-International Periodical For The Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*, 8(12), 765-776. <http://dx.doi.org/10.7827/TurkishStudies.5740>
- Krantz, S. G. (2011). *The proof is in the pudding: the changing nature of mathematical proof*. New York: Springer Science & Business Media.
- Kulik, J.A., Kulik, C.C., & Cohen, P.A. (1980). Effectiveness of computer-based college teaching: A metaanalysis of findings. *Review of Educational Research*, 50, 525–544. <https://doi.org/10.3102/00346543050004525>
- Kuzu, A., Çankaya, S., & Mısırlı, Z. A. (2011). Tasarım tabanlı araştırma ve öğrenme ortamlarının tasarımı ve geliştirilmesinde kullanımı. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, 1(1), 19-35.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29–63. <https://doi.org/10.3102/00028312027001029>
- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16. <http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome16/docs/lee.doc> sayfasından erişilmiştir.
- Lim, C. P., Teo, Y. H., Wong, P., Khine, M. S., Chai, C. S., & Divaharan, S. (2003). Creating a conducive learning environment for the effective integration of ICT: Classroom

- management issues. *Journal of Interactive Learning Research*, 14(4), 405–423.
<https://www.learntechlib.org/primary/p/14519/> sayfasından erişilmiştir.
- Lin, H., Chen, T., & Dwyer, F. M. (2006). Effects of static visuals and computer-generated animations in facilitating immediate and delayed achievement in the efl classroom. *Foreign Language Annals*, 39, 2, 203-219. <https://doi.org/10.1111/j.1944-9720.2006.tb02262.x>
- Liu, Y., & Manouchehri, A. (2013). Middle school children's mathematical reasoning and proving schemes. *Investigations in Mathematics Learning*, 6(1), 18-40.
<https://doi.org/10.1080/24727466.2013.11790328>
- M.E.B. (2011). *Orta öğretim matematik (9.10.11 ve 12. sınıflar) dersi öğretim programı*, Ankara: Milli Eğitim.
- M.E.B. (2017). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) programı*, Ankara: Milli Eğitim.
- Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194-214.
<https://www.jstor.org/stable/749600> sayfasından erişilmiştir.
- Martin, G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.
<https://www.jstor.org/stable/749097?seq=1> sayfasından erişilmiştir.
- Mayer, R. E., & Moreno, R. (1998), A split-attention effect in multimedia learning: Evidence for dual processing systems in working memory. *Journal of Educational Psychology*, 90(2), 312–320. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.2.312>
- Mayers, S. L. (2009). The Effects of Using Computer Software Programs as a Tool for Teaching Mathematics to Improve the Attention Levels of Second Grade Students with Special Needs. (MS Thesis, Caldwell College, 1463935)
<https://search.proquest.com/openview/4b574dfdb9cd2f2bc04e5f4441c76ad6/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y> sayfasından erişilmiştir.
- MEB (2017). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1,2,3,4,5,6,7 ve 8. sınıflar)*. Ankara: Milli Eğitim.

- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı.
- Mingus, T. T. Y., & Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 99(8), 438–444. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17506.x>
- Mingus, T. Y., & R. M. Grassl (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 99(8), 438-444.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 47-68. <https://doi.org/10.1023/A:1003956532587>
- Moore, R. C. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266. <https://doi.org/10.1007/BF01273731>
- Moralı, S. , Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160. https://www.researchgate.net/profile/Isikhan_Ugurel/publication/257361818_Mathematics_Student_Teachers'_Views_on_Proving_Matematik_Ogretmen_Adaylarinin_Ispat_Yapmaya_Yonelik_Gorusleri/links/5669325708ae193b5fa1416e.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Morash, R. P. (1987). *Bridge to abstract mathematics: Mathematical proof and structures*, New York: Random House.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (2000). *Principles and standards for school mathematics*. 3 Mayıs 2018 tarihinde www.nctm.org sayfasından erişilmiştir.
- Nelsen, R. (2000). *Proofs without words II: More exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.
- Nelsen. R. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.
- Orhan, M. (2019). *Animasyon destekli öğretimin öğrencilerin müzik dersi akademik başarısına etkisinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

- Ölçme Değerlendirme Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü-ÖDSHGM. (2016a). *PISA 2015 Ulusal raporu*. Ankara.
http://odsgm.meb.gov.tr/test/analizler/docs/PISA/PISA2015_Ulusal_Rapor.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Ölçme Değerlendirme Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü-ÖDSHGM. (2016b). *TIMSS 2015 Ulusal matematik ve fen bilimleri ön raporu 4. ve 8. sınıflar*. Ankara.
https://odsgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2017_06/23161945_timss_2015_on_raporu.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Ölçme Değerlendirme Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü-ÖDSHGM. (2017). *ABİDE akademik becerilerin izlenmesi ve değerlendirilmesi sınavı 8. sınıflar raporu*. Ankara.
https://odsgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2017_11/30114819_iY-web-v6.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Özer, Ö., & Arıkan, A. (2002, Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi' nde sunulmuş bildiri, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Öztuncay, F. (2005). *İlköğretim 6. sınıflarda problem çözmede standartların uygulanmasının öğrencilerin matematik başarısına etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Öztürk, E. (2014). *Hücre zarından madde geçişi konusunun uzaktan eğitimle öğretilmesinde video ve animasyon kullanımının öğrenci başarısı ile motivasyona etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Öztürk, M. (2016). *Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi*, Doktora Tezi. Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Pesen, C. (2003). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için matematik öğretimi* (1. baskı) Ankara: Nobel.
- Polat, K. (2018). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar: Kuramsal bir çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140.
<https://dergipark.org.tr/en/pub/zgefd/article/606342> sayfasından erişilmiştir.

- Polat, K , Demircioğlu, H . (2016). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar: kuramsal bir çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140.
- Polster, B. (2004).Q.E.D. *Beauty in mathematical proof*. New York: Walker.
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 319-325. <https://doi.org/10.1023/A:1024360204239>
- Reigeluth, C.M., & Frick, T.W. (1999). Formative research: A methodology for creating and improving design theories. C.M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design theories and models (Cilt 2)* içinde (s.633–651). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Reis, K., & Renkli, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 34(1), 29- 35. <https://doi.org/10.1007/BF02655690>
- Richey, R.C., Klein, J.D., & Nelson, W.A. (2003). Development research: Studies of instructional design and development. D.H. Jonassen (Ed.), *Handbook of research for educational communications and technology (2. Baskı)* içinde (s.1099–1130). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Rieber, P. L. (1990). Using computer animated graphics in science instruction with children. *Journal of Educational Psychology*, 82(1), 135-140. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.82.1.135>
- Roblyer, M.D. ve Edwards, J. (2000). Integrating educational technology into teaching (2nd ed.). Upper Saddle River, New Jersey: Merrill.
- Rodd, M. M. (2000). On mathematical warrants: proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 2, 3, 221–244.
- Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 105(3), 252-255. <https://doi.org/10.1080/00029890.1998.12004875>
- Sancak, Ö. (2003). *Okul öncesi eğitim kurumlarına devam eden 6 yaş çocuklarına sayı ve şekil kavramlarının kazandırılmasında bilgisayar destekli eğitim ile geleneksel eğitim*

yöntemlerinin karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sandoval, W.A., & Bell, P. (2004). Design-based research methods for studying learning in context: introduction. *Educational Psychologist*, 39(4), 199-201. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3904_1

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295–319.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. Schoenfeld, A. (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* içinde (s.53-70), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=qBAfDAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA53&dq=Schoenfeld,+A.+\(1994\).+Reflections+on+doing+and+teaching+mathematics.+Schoenfeld,+A.+\(Ed.\),+Mathematical+thinking+and+problem+solving+i%C3%A7inde+\(s.53-70\),+Hillsdale,+NJ:+Erlbaum.&ots=odoQWLOuT2&sig=WsvUoD9v1OUHD9wBIyCY1vOTJCM&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=qBAfDAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA53&dq=Schoenfeld,+A.+(1994).+Reflections+on+doing+and+teaching+mathematics.+Schoenfeld,+A.+(Ed.),+Mathematical+thinking+and+problem+solving+i%C3%A7inde+(s.53-70),+Hillsdale,+NJ:+Erlbaum.&ots=odoQWLOuT2&sig=WsvUoD9v1OUHD9wBIyCY1vOTJCM&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false) sayfasından erişilmiştir

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36. <https://www.jstor.org/stable/30034698?seq=1> sayfasından erişilmiştir.

Sezgin, M. E. (2002). *İkili kodlama kuramına dayalı olarak hazırlanan multimedia ders yazılımının fen bilgisi öğretimindeki akademik başarıya, öğrenme düzeyine ve kalıcılığa etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675. <https://search.proquest.com/openview/5e1bf1b55adfb4966773c56ce30821aa/1?pq-origsite=gscholar&cbl=41299> sayfasından erişilmiştir.

- Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 447–462. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001>
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. R. Lesh ve A. E. Kelly (Ed.), *Research design in mathematics and science education* içinde (s. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum <http://pat-thompson.net/PDFversions/2000TchExp.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Strausova, I., & Hasek, R. (2012). “Dynamic visual proofs” using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 7(2), 130-143.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded Theory procedures and techniques*. New Delhi: SAGE. <https://genderopen-develop.cms.huberlin.de/bitstream/handle/25595/12/whatsnew7.pdf?sequence=1> sayfasından erişilmiştir.
- Stylianides, A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics J. Res. Math. Educ. 38 (3) p 289–321 <https://www.jstor.org/stable/30034869?seq=1> sayfasından erişilmiştir.
- Stylianides, A., & G. Stylianides (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237-253.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. ve Philippou, G.N. (2007b). Preservice teachers’ knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z>
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J (Eds). 2010. Teaching and learning proof across the grades. A K-16 perspective. Routledge.
- Şadan, N. (2017). *Fen lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerinin incelenmesi üzerine bir öğretim deneyi çalışması*. Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Tall, D. (1979). Qualitative thought processes in clinical interviews. *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Warwick, England. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1979e-qual-thought-pme.pdf> sayfasından erişilmiştir.

- Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some? Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* içinde (s. 117-136). Reston, Virginia: NCTM.
- Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic. [https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=4934GtZFTcEC&oi=fnd&pg=PR12&dq=Tall,+D.+\(2002\).+Advanced+mathematical+thinking.+USA:+Kluwer+Academic+Publishers.&ots=SdcFn2jH-W&sig=HP7rIIhXd0pZka00rIrJj6H_Clw&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=4934GtZFTcEC&oi=fnd&pg=PR12&dq=Tall,+D.+(2002).+Advanced+mathematical+thinking.+USA:+Kluwer+Academic+Publishers.&ots=SdcFn2jH-W&sig=HP7rIIhXd0pZka00rIrJj6H_Clw&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false) sayfasından erişilmiştir.
- Tall, D., & Barnard, T. (2003). *Cognitive units, connections and mathematical proof*. Paper presented at 9th National Congress of AMESA http://www.academia.edu/download/54689130/Cognitive_Units_Connections_and_Mathematical_Proof.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Tatar, E. (2006). *İkili işlem kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi ve 4mat yönteminin başarıya etkisi*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Tatar, E., & Dikici, R. (2008). Matematik eğitiminde öğrenme güçlükleri, *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5, 9, 183-193. <http://www.pegem.net/dosyalar/dokuman/48164-20090430122450-12-matematik-egitiminde-ogrenme-guclukleri.pdf>. sayfasından erişilmiştir.
- Tekin, B., & Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik fonksiyonların toplam ve fark formüllerinin ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(1-2), 24-37. <https://dergipark.org.tr/en/pub/befdergi/issue/23156/247357> sayfasından erişilmiştir.
- Tezcan, H., & Yılmaz, Ü. (2003). Kimya öğretiminde kavramsal bilgisayar animasyonları ile geleneksel anlatım yönteminin başarıya etkileri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 2(14), 18-32. http://pauegitimdergi.pau.edu.tr/Makaleler/67107895_2-kimya%20%C3%B6%C4%9Fretiminde%20kavramsal%20bilgisayar%20animasyonlar%C4%B1.pdf sayfasından erişilmiştir.

- Thucker, T. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary Issues in Mathematics Education*, 36, s.31-35.
- Türk Dil Kurumu [TDK].(2005). *Türkçe Sözlük*. Türk Dil Kurumu Yayınları: 549, Türk Dil Kurumu, Ankara: 4. Akşam Sanat Okulu.
- Türkan, S. (2010). *7. sınıf öğrencilerinin yaşamımızdaki elektrik ünitesindeki başarılarına, fen ve teknoloji dersine karşı tutumlarına animasyonların etkisinin araştırılması*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Ufuktepe, Ü. (2009). *Matematikte resimle ispat*. 4 Mayıs 2018 tarihinde http://maycalistaylari.comu.edu.tr/calistay2009_2/sunumlar/danisman/unal_ufuktepe_matematik.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Uğurel, I., & Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış, *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135 – 154. <https://dergipark.org.tr/en/pub/deubefd/issue/25125/265296> sayfasından erişilmiştir.
- Uğurel, I., Moralı, H. S., & Karahan, Ö. (2011). *Matematikte yetenekli olan ortaöğretim öğrencilerin sözsüz ispat oluşturma yaklaşımları*, I. I. Uluslararası Eğitim Programları ve Öğretimi Kongresi, Anadolu Üniversitesi,(5-8 Ekim) Eskişehir.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243. <http://efdergi.hacettepe.edu.tr/yonetim/icerik/makaleler/898-published.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: Gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı / Introduction to proof in the secondary school: The use of proofs without words within the framework of the alacrealistic mathematics education*. Yüksek Lisans Tezi. Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8. Baskı). Upper Saddle River, NJ: Pearson. <https://eric.ed.gov/?id=ED417130> sayfasından erişilmiştir
- Van Someren, M. W., Barnard, Y. F., & Sandberg, J. A. C. (1994). *The think aloud method: a practical guide to modeling cognitive processes*. London: Academic.

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.821.4127&rep=rep1&type=pdf> sayfasından erişilmiştir

- Velleman, D. J. (2008). *Kanıt nasıl yapılır: bir yapısal yaklaşım* (M. Terziler ve T. Öner, Çev.) (s. 84-85). Ankara: Palme.
- Velleman, D.J. (1994). *How to prove it: a structured approach*. Cambridge University.
- Volmink, J.D. (1990). The nature and role of proof in mathematics education. *Pythagoras*, 23, 7-10.
- Wang, F., & Hannafin, M.J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development*, 53(4), 5-23. <https://doi.org/10.1007/BF02504682>
- Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concept of proof in primary and secondary school*. UK: The Mathematical Association.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119. <https://link.springer.com/article/10.1023/a:1015535614355>. sayfasından erişilmiştir.
- Weber, K. (2003). *Students' difficulties with proof*. MAA Online: Research Sampler. 4 Mayıs 2018 tarihinde http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html sayfasından erişilmiştir.
- Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction, *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 351-360. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005>
- Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 59 –76. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9080-6>
- Yassin, E. I. A. (2013). *The effect of using the Proof Without Words Method on the Results, and the Transfer of learning Among the scientific the first grade Secondary Students in Nablus*, Doctoral dissertation, <https://repository.najah.edu/handle/20.500.11888/7327> sayfasından erişilmiştir.

- Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B., (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213. <https://dspace.ankara.edu.tr/xmlui/bitstream/handle/20.500.12575/46818/1110.pdf?sequence=1&isAllowed=y> sayfasından erişilmiştir.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin.
- Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel düşünme*. (10. Baskı). İstanbul: Remzi.
- Yıldırım, C. (2015). *Matematiksel düşünme* (11.Basım). İstanbul: Remzi.
- Zack, V. (1999). Everyday and mathematical language in children's argumentation about proof. *Educational Review*, 51(2), 129-146. <https://doi.org/10.1080/00131919997579>
- Zaimoğlu, Ş. (2012), *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

EKLER



EK 1. Klinik Görüşme Soruları

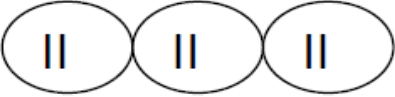
İSPAT ÇALIŞMASI ÖN-SON KLİNİK GÖRÜŞME SORULARI

1) Bir öğretmen matematik sınavında öğrencilerine şu soruyu sorar; “Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız? Bu soruya karşılık dört öğrenci aşağıdaki cevapları vermiştir.

Ayşe’nin cevabı Bence doğru; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım. $3 + 4 + 5 = 12$ 12, ortadaki sayının, yani 4’ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.	Mert’in cevabı Bence doğru. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a , $(a + 1)$ ve $(a + 2)$ olur. Sonra toplayalım $a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3$ olur. $3a + 3 = 3(a + 1)$ Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.
Zeki’nin cevabı Bence yanlış, 15, 16 ve 17 sayılarını alalım. $15 + 16 + 17 = 47$ 47, 16’nın 3 katı değil. Bu yüzden ifade yanlıştır.	Belma’nın cevabı Bence doğru; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım. $2 + 3 + 4 = 9$ $9 = 3 \cdot 3$ Yani ortadaki sayının 3 katı.Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım. $21 + 22 + 23 = 66$ $66 = 3 \cdot 22$ Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım. İki ayrı deneme yaptım ikisi de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

Hangi öğrencinin cevabı sizce bu soruya verilecek en uygun ispattır? Neden?

2) Aynı öğretmen aşağıdaki soruyu da sınavda öğrencilerine sorar; “ İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız? Bu soruya karşılık üç öğrenci aşağıdaki yanıtları vermiştir.

Buse’nin cevabı Doğrudur; çünkü tek sayılar ikişerli gruptandığımızda her zaman 1 kalanını veren sayılardır. Örneğin 7 sayısını ikişerli gruptandırırım;  Şeklinde bir tanesi gruptandırmamın dışında kalır. Eğer iki tek sayıyı toplarsam, bu sayıların sonunda açıkta kalan 1’ler de bir ikili grup oluşturur ve bu iki sayıyı topladığımda tüm sayılar ikili gruptandırıldığı için açıkta kalan 1 olmaz. Bu nedenle de elde ettiğim sayı her zaman çift sayı olur, çünkü ikişerli gruptandırılabilen bir sayı elde etmiş olurum.	Mehmet’in cevabı Bence doğru; ben şu örnekleri denedim, 11 ve 13 sayılarını aldım, daha sonra da 135 ve 379 sayılarını topladım. $11 + 13 = 24$ $135 + 379 = 514$ 24 ve 514 sayıları çift sayılar oldukları için soruda verilen ifade doğrudur. İki sayı örneği denedim, ikisinde de çift sayıya ulaştım.
Cem’in cevabı Bence doğru; tüm tek sayılar, $2n + 1$ şeklinde gösterilebilen sayılardır (n tam sayı olsun). İki ayrı tek sayı alırsam birisi $2n + 1$, diğeri ise $2m + 1$ olur. Bu iki sayıyı topladığımda $\begin{aligned}(2n + 1) + (2m + 1) &= (2n + 2m) + (1 + 1) \\ &= 2n + 2m + 2 \\ &= 2(n + m + 1)\end{aligned}$ Şeklinde bir çift sayı elde ederim. Bu nedenle iki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.	

Bu verilen cevaplardan hangisi / hangileri verilen ifadeyi sizce ispatlar? Nedeninizi açıklayın.

3) Üçgenin iç açıları toplamı neden 180^0 ’dir? İspat ediniz.

4) 1’den 800’e kadar olan sayıların toplamını bulunuz.

5) 1’den n’ ye kadar olan sayıların toplamı için $\frac{n.(n+1)}{2}$ formülü kullanılır. Bu formülü ispat ediniz.

6) Sekizgenin iç açıları toplamı kaç derecedir? Kullandığınız bir formül varsa ispat ediniz.

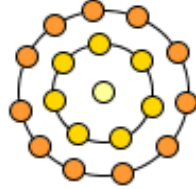
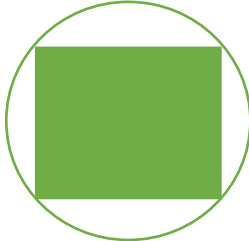
7) “ Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir.”

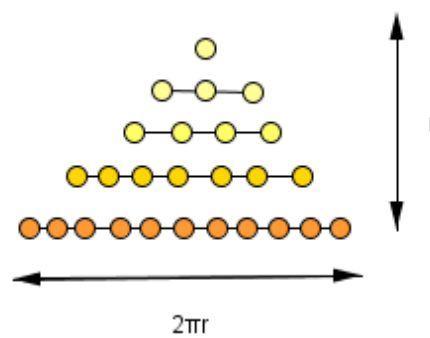
“İki negatif sayının çarpımı pozitiftir.” Bu iki ifadeden birini ispatlayınız.

8) Dairenin alan formülü;

$$A = \pi r^2 \text{’ dir.}$$

Aylin Öğretmen öğrencilerinden bu ifadeyi ispatlamalarını istiyor. Aşağıda verilen öğrenci cevaplarından hangisi ispatı doğru biçimde yapmıştır. **Nedenini kısaca açıklayınız.**

Yarkın’ın Cevabı Bence doğrudur. Çünkü yarıçapı 5 cm olan bir dairenin alanını $A = \pi 5^2$ ifadesinde π yerine 3 yazarak hesaplarız ve 75 cm buluruz.	Damla’nın Cevabı  İç içe geçmiş çemberlerden oluşan bir daire düşünelim. En dıştaki dairenin yarıçapı r, çevresi $2\pi r$ olur. Şimdi bu çemberleri açtığımızı ve üst üste koyduğumuzu düşünelim.
Yağmur’un Cevabı 	

Şekilde çizdiğim dairenin içine kenarı r olan bir kare yerleştirim, bu karenin alanını yani r^2'yi π ile çarparsam dairenin alanını bulurum.	 Oluşan üçgenin alanı dairenin alan formülünü verir. $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$

9) “0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1’dir.” İfadesini ispatlayınız.

10) 3 ile bölünebilme kuralı sayıdaki rakamların toplamının 3 veya 3’ün katı olmasıdır.

Bu kuralı ispat ediniz.

11) “Son iki basamağı 00 veya 4’ün katı olan sayılar 4 ile kalansız bölünebilir.”

Aylin Öğretmen öğrencilerden bu ifadeyi ispat etmelerini istiyor. Hangi öğrencinin cevabı bu ifadenin ispatıdır? Nedenini belirterek yazınız.

Yarkın’ın Cevabı Bence doğru şu iki sayıyı ele alalım. 100 ve 124. $100:4=25$ $124:4=31$ Bu iki sayı için doğru olduğundan, ifade ispat edilmiş olunur.	Yağmur’un Cevabı ABCD sayısını ele alalım. Bu sayının çözümlenmiş halini yazalım. $1000 \times A + 100 \times B + 10 \times C + 1 \times D$ İfadesinde $1000 \times A$ ve $100 \times B$ sayıları 4 ile tam bölünür.
Damla’nın Cevabı Bence doğru, üç tane sayı düşünelim.	$\cancel{1000} \times A + \cancel{100} \times B + 10 \times C + 1 \times D$

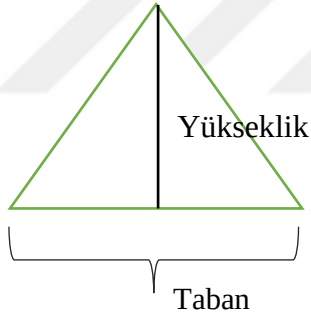
$16:4=4$ $116:4=29$ $1116:4=279$ Bu üç sayı da 4 ile bölünebilir. Bu sebepten kural doğrudur.	O halde sayının 4'e tam bölünmesi için $10 \times C + 1 \times D$ ifadesinin 4'e tam bölünmesi yeterlidir. Bu sebeple son iki basamağın 00 ya da 4'ün bir katı olması gerekir.

12) “Birler basamağındaki rakam 0, 2, 4, 6, 8 olan sayılar 2 ile kalansız bölünebilir.”

Bu ifadeyi ispat ediniz.

13) Dikdörtgenin alanı kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı ile bulunur. Bu ifadeyi ispat ediniz.

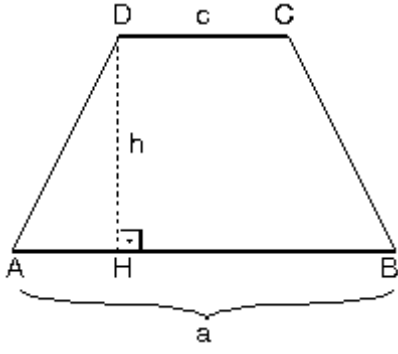
14) Şekilde üçgenin alanı;



$\frac{Taban \times Yükseklik}{2}$ formülü ile bulunur.

Üçgenin alan formülünü ispat ediniz.

15) Yamuğun alanı;



$\frac{(a + c) \times h}{2}$ formülü ile bulunur.

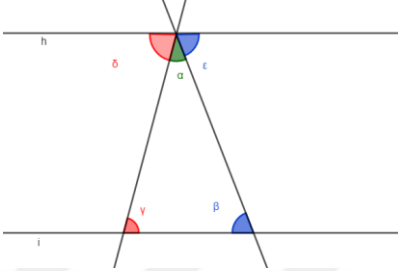
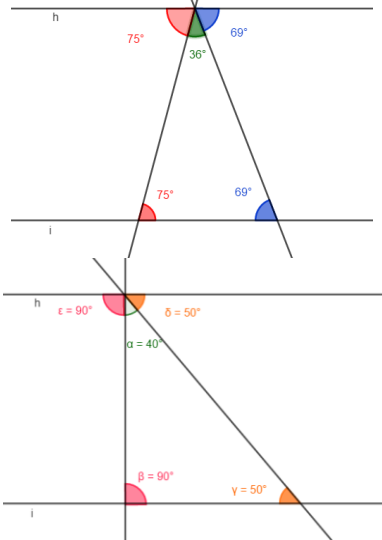
Yamuğun alan formülünü ispat ediniz.

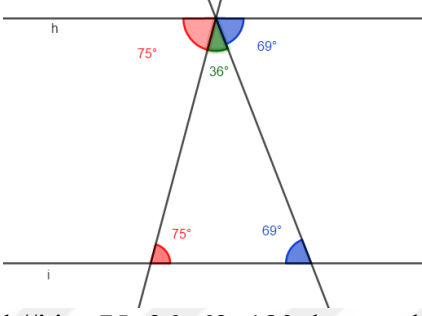


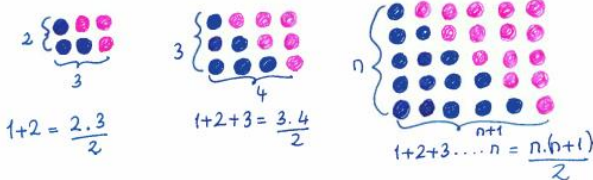
EK 2. Klinik Görüşme Soruları Dereceli Puanlama Anahtarları

Soru No:	1
Bağlam Adı:	İspat Algısı 1
İspat Düzeyi 3 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler belli bir zorluktaki ispatın çözümünü anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler)	Mert'in cevabını seçip nedenini doğru açıklayanlar.
Örnek Yanıt	1) Mert'in cevabı ispattır. Çünkü Mert'in verdiği eşitlikte x'e hangi değeri verirse verelim hep doğru olur.
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	Belma'nın cevabını seçip nedenini doğru açıklayanlar.
Örnek Yanıt	1) Belma'nın cevabı ispattır. Çünkü bir sürü deneme yapmış.
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Ayşe'nin cevabını seçip nedenini doğru açıklayanlar.
Örnek Yanıt	1) Ayşe'nin cevabı ispattır. Çünkü bir durum için doğru olduğunu göstermiş.
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	Herhangi bir öğrenci seçimini yapıp ilgisiz bir neden yazarlar.
Örnek Yanıt	1) Hepsi de ispat yapmıştır.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

Soru No:	2
Bağlam Adı:	İspat Algısı 2
İspat Düzeyi 3 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler belli bir zorluktaki ispatın çözümünü anlayabilirler.)	Cem'in cevabını seçip nedenini doğru açıklayanlar.
Örnek Yanıt	1) Cem'in cevabı ispattır. Çünkü Cem sayıları cebirsel olarak ifade etmiş. Değişkenler yerine her sayıyı yazarak doğruluğunu ispatlamış oldu.
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	Mehmet'in cevabını seçip nedenini doğru açıklayanlar.
Örnek Yanıt	1) Mehmet'in cevabı ispattır. Çünkü birkaç deneme yapmış.
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Buse'nin cevabını seçip nedenini doğru açıklayanlar.
Örnek Yanıt	1) Buse'nin cevabı ispattır. Çünkü bir durum için doğru olduğunu göstermiş.
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	Herhangi bir öğrenci seçimini yapıp ilgisiz bir neden yazarlar.
Örnek Yanıt	1) Hepsi de ispat yapmıştır.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

Soru No:	3
Bağlam Adı:	Üçgen İç Aç
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Paralel doğruları ve paralel doğrular ile bir kesenin yaptığı açı özelliklerini kullanarak ispat yapanlar. (Animasyonda gösterildiği gibi.)
Örnek Yanıt	1)  $h//i$ ise $\alpha + \beta + \delta = 180$ derece olur. (Kırmızı açılar ve mavi açılar iç ters olduğundan birbirine eşittir.)
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	Paralel doğruları kullanarak yaptığı çizimde değişken yerine birkaç açı değerini sayısal olarak yazanlar.
Örnek Yanıt	1)  $h//i$ ise $75 + 36 + 69 = 180$ ve $50 + 40 + 90 = 180$ derece olur. (Kırmızı açılar ve mavi açılar iç ters olduğundan birbirine eşittir.)

İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Paralel doğruları kullanarak yaptığı çizimde değişken yerine bir açı değerini sayısal olarak yazanlar.
Örnek Yanıt	1)  h//i ise $75+36+69=180$ derece olur. (Kırmızı açılar ve mavi açılar iç ters olduğundan birbirine eşittir.)
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	Verilen ifadenin bir kural olduğunu ve ispat edilemeyeceğini belirtenler. İlgisiz yanıtlar.
Örnek Yanıt	1) Bu bir kuraldır ve ispat edilemez.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

Soru No:	5
Bağlam Adı:	Toplam Formülü
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Görsel ispat ya da cebir yolu ile ispat yapanlar.
Örnek Yanıt	1)  2) $ \begin{array}{l} * \quad 1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n \\ ** \quad n+(n-1)+(n-2)+\dots+3+2+1 \\ + \\ \hline (n+1)+(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1)+(n+1) \\ \hline n \cdot (n+1) \\ * \text{ için } \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{array} $
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek vererek formülü kontrol edenler.
Örnek Yanıt	1) $1+2+3=6$ $1+2+3=\frac{3 \cdot (3+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ $1+2+3+4+5=15$ $1+2+3+4+5=\frac{5 \cdot (5+1)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Bir tane örnek ile formülün doğruluğunu kontrol edenler.
Örnek Yanıt	1) $1+2+3=6$ $1+2+3=\frac{3 \cdot (3+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

Soru No:	6
Bağlam Adı:	Çokgenin İç Açıları Toplamı
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Çokgenin iç açıları toplam formülünü örüntü kullanarak ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) n kenarlı bir çokgenin $(n-2) \cdot 180$
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek vererek formülü kontrol edenler.
Örnek Yanıt	1)Karenin iç açıları toplamı 360° Formüle göre $(4-2) \cdot 180 = 2 \cdot 180 = 360^\circ$ Beşgenin iç açıları toplamı 540° Formüle göre $(5-2) \cdot 180 = 3 \cdot 180 = 540^\circ$
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Bir tane örnek ile formülün doğruluğunu kontrol edenler.
Örnek Yanıt	1) Karenin iç açıları toplamı 360° Formüle göre $(4-2) \cdot 180 = 2 \cdot 180 = 360^\circ$
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

Soru No:	7
Bağlam Adı:	Tam Sayıların Çarpım İşaretleri
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Zıt işaretleri tam sayıların çarpımının işaretinin negatif olduğunu örüntü kullanarak ispat edenler. YA DA İki negatif tam sayının çarpımının işaretinin pozitif olduğunu örüntü kullanarak ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) $(+3).(+2)=(+6)$ $(+3).(+1)=(+3)$ $(+3).(0)=0$ $(+3).(-1)=?$ Sonuçlar 3'er 3'er azaldığından; $(+3).(-1)$ işleminin sonucu $0-3=-3$ olur. 2) $(+3).(-1)=(-3)$ $(+2).(-1)=(-2)$ $(+1).(-1)=(-1)$ $0.(-1)=0$ $(-1).(-1)=?$ Sonuçlar 1'er 1'er arttığından; $(-1).(-1)$ işleminin sonucu $0+1=+1$ olur.
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek verenler.
Örnek Yanıt	1) $(+4).(-3)=(-12)$ $(+7).(-2)=(-14)$ $(+9).(-5)=(-45)$
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Bir örnek vererek ifadenin doğruluğunu gösterenler.
Örnek Yanıt	1) $(+7).(-2)=(-14)$
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz Yanıtlar
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

Soru No:	8
Bağlam Adı:	Dairenin Alanı
İspat Düzeyi 3 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler belli bir zorluktaki ispatın çözümünü anlayabilirler.)	Damla'nın cevabını seçip doğru açıklamayı yapanlar.
Örnek Yanıt	1) Damla'nın cevabı doğrudur. Çünkü formülün nereden geldiğini üçgenin alanı ile göstermiş.
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Yarkın'ın cevabı seçimini yapanlar.
Örnek Yanıt	1) Yarkın'ın cevabı doğrudur. Çünkü formülde yerine koymuş.
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	Yağmur'un cevabı seçimini yapanlar. İlgisiz yanıtlar.
Örnek Yanıt	1) Hepsi de ispat yapmıştır.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

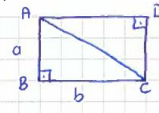
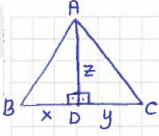
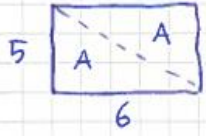
Soru No:	9
Bağlam Adı:	Sıfırıncı Kuvvet
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Örüntü ile ifadeyi ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) $2^5=32$ $2^4=16$ $2^3=8$ $2^2=4$ $2^1=2$ $2^0=?$ Örüntüde bir önceki adımdaki sayı 2'ye bölünerek gelecek adımdaki sonuç elde edilmiştir. Bu yüzden $2^0=2:2=1$ elde edilir.
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek verenler.
Örnek Yanıt	1) $2^0=1$ $10^0=1$
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Bir örnek vererek ifadenin doğruluğunu gösterenler.
Örnek Yanıt	1) $3^0=1$
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

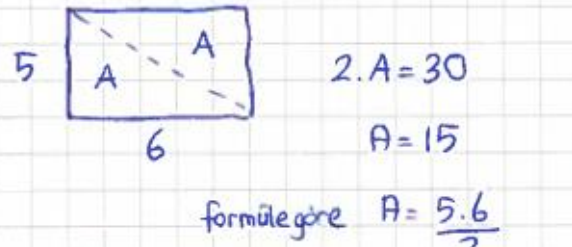
Soru No:	10
Bağlam Adı:	3 ile bölünebilme kuralı
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Basamakları ABCD.. şeklinde ifade edilen bir sayıyı çözümleyerek ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) $ABCD = 1000.A + 100.B + 10.C + D$ $1000.A + 100.B + 10.C + D =$ $999.A + A + 99.B + B + 9C + C + D$ $999.A, 99.B$ ve $9.C$ 3'e tam bölündüğünden $A+B+C+D$ toplamı 3'e bölünürse sayı 3'e tam bölünür.
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek ile kuralı ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) Örneğin; 345 sayısı 3'e tam bölünür. Kurala göre $3+4+5=12$ 'dir ve 3'ün bir katıdır. 396 sayısı da 3'e tam bölünür. Kurala göre $3+9+6=18$ 'dir ve 3'ün bir katıdır.
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Bir örnek vererek ifadeyi ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) 21 sayısını ele alalım. 21 3'e tam bölünür. Kurala göre $2+1=3$ 'tür ve 3'ün bir katıdır.
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

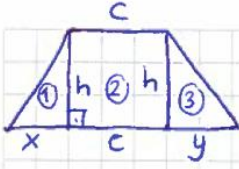
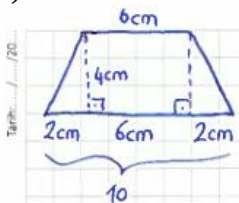
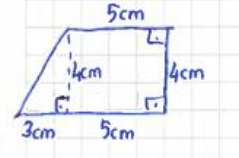
Soru No:	11
Bağlam Adı:	4 ile bölünebilme kuralı
İspat Düzeyi 3 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler belli bir zorluktaki ispatın çözümünü anlayabilirler.)	Yağmur'un cevabını seçip doğru açıklama yapanlar.
Örnek Yanıt	1) Yağmur'un cevabı ispattır. Çünkü seçilebilecek bütün sayılar için doğru olur.
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	Damla'nın cevabını seçenler.
Örnek Yanıt	1) Damla'nın cevabı doğrudur. Çünkü örnek vererek yapmış.
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Yarkın'ın cevabını seçenler.
Örnek Yanıt	1) Yarkın'ın cevabı doğrudur. Çünkü 2 tane örnek vermek yeterlidir.
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

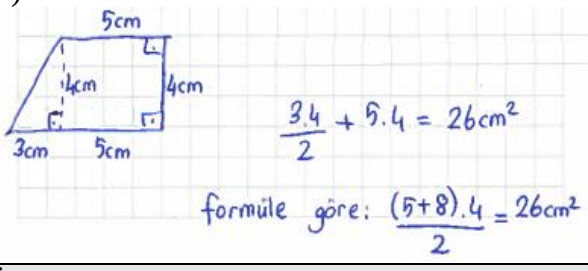
Soru No:	12
Bağlam Adı:	2 ile bölünebilme kuralı
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Basamakları ABCD.. şeklinde ifade edilen bir sayıyı çözümleyerek ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) AB sayısını ele alalım. $AB=10.A+B$ 10.A ifadesi 2'ye tam bölüneceğinden B sayısı 0,2,4,6,8 olduğunda AB 2'ye tam bölünmüş olur.
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek ile kuralı ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) 70,72, 74, 76, 78 sayılarını ele alalım. $70:2=35$ $72:2=36$ $74:2=37$ $76:2=38$ $78:2=39$ Sayıların hepsi 2'ye tam bölündüğünden ifade doğrudur.
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Bir örnek vererek ifadeyi ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) $38:2=19$ olduğundan ifade doğrudur.
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
Örnek Yanıt	1) Sayılar ikinin katı olduğundan 2'ye tam bölünürler.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

Soru No:	13
Bağlam Adı:	Dikdörtgenin alanı
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Model kullanarak ifadeyi ispat edenler.
Örnek Yanıt	1)
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek ile kuralı ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) Kısa kenar: 5 cm Uzun kenar: 7 cm Dikdörtgenin alanı: $5 \times 7 = 35 \text{ cm}^2$ Kısa kenar: 4 cm Uzun kenar: 6 cm Dikdörtgenin alanı: $4 \times 6 = 24 \text{ cm}^2$
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Bir örnek vererek ifadeyi ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) Kısa kenar: 5 cm Uzun kenar: 7 cm Dikdörtgenin alanı: $5 \times 7 = 35 \text{ cm}^2$
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

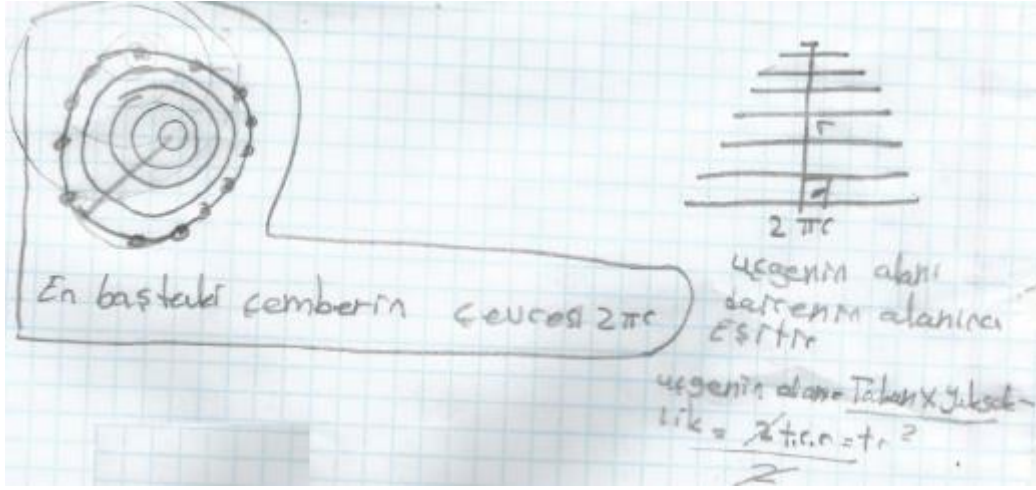
Soru No:	14
Bağlam Adı:	Üçgenin Alanı
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Dikdörtgenin alanından yola çıkarak ispat edenler.
Örnek Yanıt	1)  ABC üçgeninin alanı ABCD dikdörtgeninin alanının yarısıdır. $A(ABCD) = a \cdot b$ $A(\triangle ABC) = \frac{a \cdot b}{2}$ 2)  $A(\triangle ABC) = A(\triangle ABD) + A(\triangle ADC)$ $= \frac{x \cdot z}{2} + \frac{z \cdot y}{2}$ $= \frac{z \cdot (x+y)}{2} \Rightarrow \frac{ BC \cdot AD }{2}$
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek ile kuralı ispat edenler.
Örnek Yanıt	1)  $2 \cdot A = 30$ $A = 15$ formüle göre $A = \frac{5 \cdot 6}{2}$  $2 \cdot A = 10$ $A = 5$ $A = \frac{5 \cdot 2}{2}$

İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	Bir örnek vererek ifadeyi ispat edenler.
Örnek Yanıt	1) 
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar

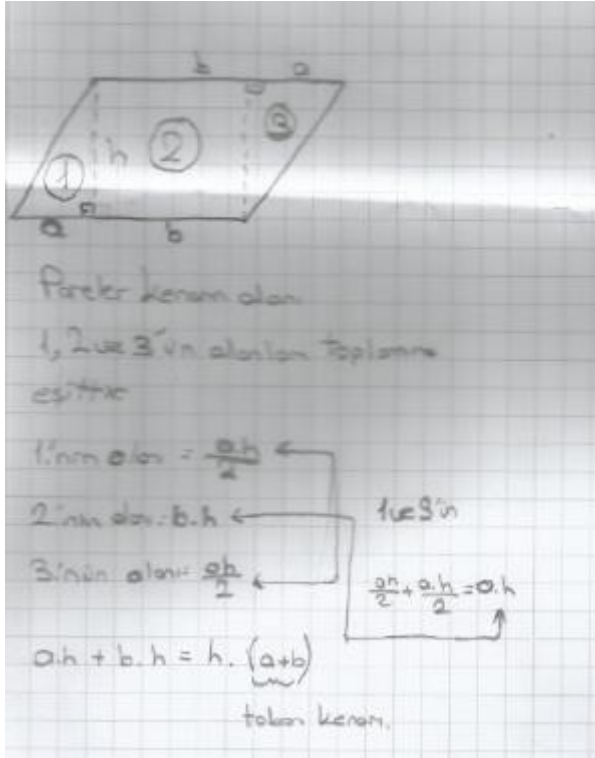
Soru No:	15
Bağlam Adı:	Yamuğun Alanı
İspat Düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler.)	Yamuğu bölüp dikdörtgen ve üçgenin alanından yola çıkarak ispat edenler.
Örnek Yanıt	1)  $x+c+y=a$ Yamuğun alanı = 1 + 2 + 3 $= \frac{x \cdot h}{2} + \frac{h \cdot c}{1 \cdot (2)} + \frac{h \cdot y}{2}$ $= \frac{x \cdot h + 2 \cdot h \cdot c + h \cdot y}{2}$ $= \frac{h(x + 2c + y)}{2} = \frac{h(a + c)}{2}$
İspat Düzeyi 2 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler.)	İki ya da daha fazla örnek ile kuralı ispat edenler.
Örnek Yanıt	1)  $\frac{4 \cdot 2}{2} + 6 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 2}{2}$ $4 + 24 + 4 = 32 \text{ cm}^2$ formüle göre $\frac{(6+10) \cdot 4}{2} = 32$  $\frac{3 \cdot 4}{2} + 5 \cdot 4 = 26 \text{ cm}^2$ formüle göre: $\frac{(5+8) \cdot 4}{2} = 26 \text{ cm}^2$
İspat Düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak)	Bir örnek vererek ifadeyi ispat edenler.

ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler.)	
Örnek Yanıt	1)  formüle göre: $\frac{(5+3) \cdot 4}{2} = 26 \text{ cm}^2$
İspat Düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir.)	İlgisiz yanıtlar.
BOŞ	Cevap kâğıdında soruya ilişkin alanda hiçbir karalamanın ya da işaretlemenin olmadığı, alanın tamamen boş olduğu durumlar.

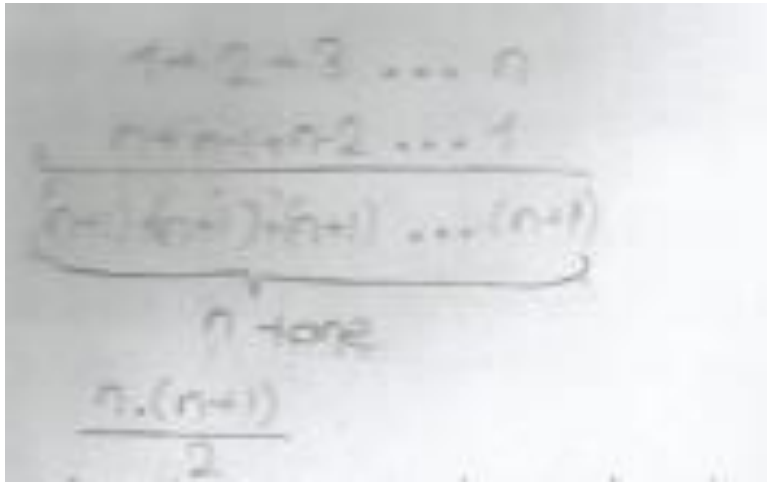
EK 3. Dairenin Alan İspatı Öğrenci Cevabı



EK 4. Paralelkenarın Alan İspatı Öğrenci Cevabı



EK 5. Toplam Formülü İspatı Öğrenci Cevabı 1



The image shows a handwritten student solution for the sum formula proof. The student uses the pairing method, writing the sum $1 + 2 + 3 + \dots + n$ and then the same sum in reverse order $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$. These two sums are added together, with each term in the first sum paired with its corresponding term in the second sum. The result is a series of n pairs, each summing to $(n+1)$. The student indicates this with a bracket and the text " n tane" (n times). Finally, the student calculates the total sum as $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \\ \hline (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ tane}} \\ \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{array}$$

EK 6. Toplam Formülü İspatı Öğrenci Cevabı 2

Handwritten student work showing the sum of the first two natural numbers using circles. The first part shows $1+2=3$ with 3 circles and the formula $\frac{2 \cdot 3}{2}$. The second part shows $1+2+3=6$ with 6 circles and the formula $\frac{3 \cdot 4}{2}$. The circles are arranged in rows, and the formulas are written to the right.

Handwritten student work showing the sum of the first four natural numbers using circles. The sum is $1+2+3+4=10$ with 10 circles. The formula $\frac{4 \cdot 5}{2}$ is written to the right. The circles are arranged in rows, and the formula is written to the right.

Handwritten student work showing the general formula for the sum of the first n natural numbers. The sum is $1+2+3+\dots+n=$ with a bracket indicating n terms. The formula $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ is written below. A dashed line and an arrow labeled $n+1$ are also present.

EK 7. Klinik Görüşme Soruları ve Materyalleri Değerlendirme Formları

GÖRÜŞME SORULARI DEĞERLENDİRME UZMAN GÖRÜŞ FORMU

Sayın.....

İlköğretim 7. Sınıf Matematik dersinde kullanılmak üzere, 5 öğrenme alanında hazırlanmış 11 adet ispat animasyonu hazırlanmıştır. Gerçekleştirilecek ispat öğretimi öncesi ve sonrasında kullanılacak olan 15 soruluk ön-son görüşme sorularını içerik, kapsam ve anlaşılabilirlik açısından aşağıda belirtilen 3'lü derecelendirme ile puanlamanızı ve sorular ile ilgili önerilerinizi “düzeltme önerisi” sütununa yazmanızı beklemekteyim. Sorulara ait kazanımlar tabloda belirtilmiştir.

Katkılarınız için şimdiden teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Puanlamada dikkate alınacak ölçütler

Uygun	Materyallerin düzeltmeye ihtiyaç olmaksızın kullanılmasının uygun olduğunu düşünüyorsanız bu seçeneği işaretleyiniz.
Uygun Değil	Materyallerin konu içeriğine ve hedef kitleye göre uygun olmadığını düşünüyorsanız bu seçeneği işaretleyiniz.
Düzeltme Gerekli	Materyallerin düzeltme önerisi kısmında belirtilen düzeltmeler doğrultusunda düzenlendikten sonra kullanılması gerektiğini düşünüyorsanız bu seçeneği işaretleyiniz.

	İlgili kazanım	Uygun	Uygun Değil	Düzeltilme Gerekli	Düzeltilme Önerisi
Soru 1	İspat yapmanın bir örnek vermek olmadığını bilir.	☐	☐	☐	
Soru 2	İspat yapmanın bir örnek vermek olmadığını bilir.	☐	☐	☐	
Soru 3	“Üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir”kuralını ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 4	Toplam formülünü kullanır.	☐	☐	☐	
Soru 5	Toplam formülünü ispatını yapar.	☐	☐	☐	
Soru 6	Çokgenlerin iç açı toplam formülünü ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 7	“ Pozitif ve negatif sayıların çarpımı negatiftir.” “İki negatif sayının çarpımı pozitifdir.” İfadelerini ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 8	Dairenin alan formülünü ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 9	“ 0 hariç tüm sayıların 0. Kuvveti 1’dir.” İfadesini ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 10	Bölünebilme kurallarını ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 11	Bölünebilme kurallarını ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 12	Bölünebilme kurallarını ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 13	Alan formüllerini ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 14	Alan formüllerini ispat eder.	☐	☐	☐	
Soru 15	Alan formüllerini ispat eder.	☐	☐	☐	

MATERYAL DEĞERLENDİRME UZMAN GÖRÜŞ FORMU

Sayın.....

İlköğretim 7. Sınıf Matematik dersinde kullanılmak üzere, 5 öğrenme alanında hazırlanmış 7 adet ispat animasyonu tasarlanmıştır. Materyallerin içerik, kapsam ve anlaşılabilirlik açısından aşağıda belirtilen 3’lü derecelendirme ile puanlamanızı ve materyal ile ilgili önerilerinizi “düzeltme önerisi” sütununa yazmanızı beklemekteyim.

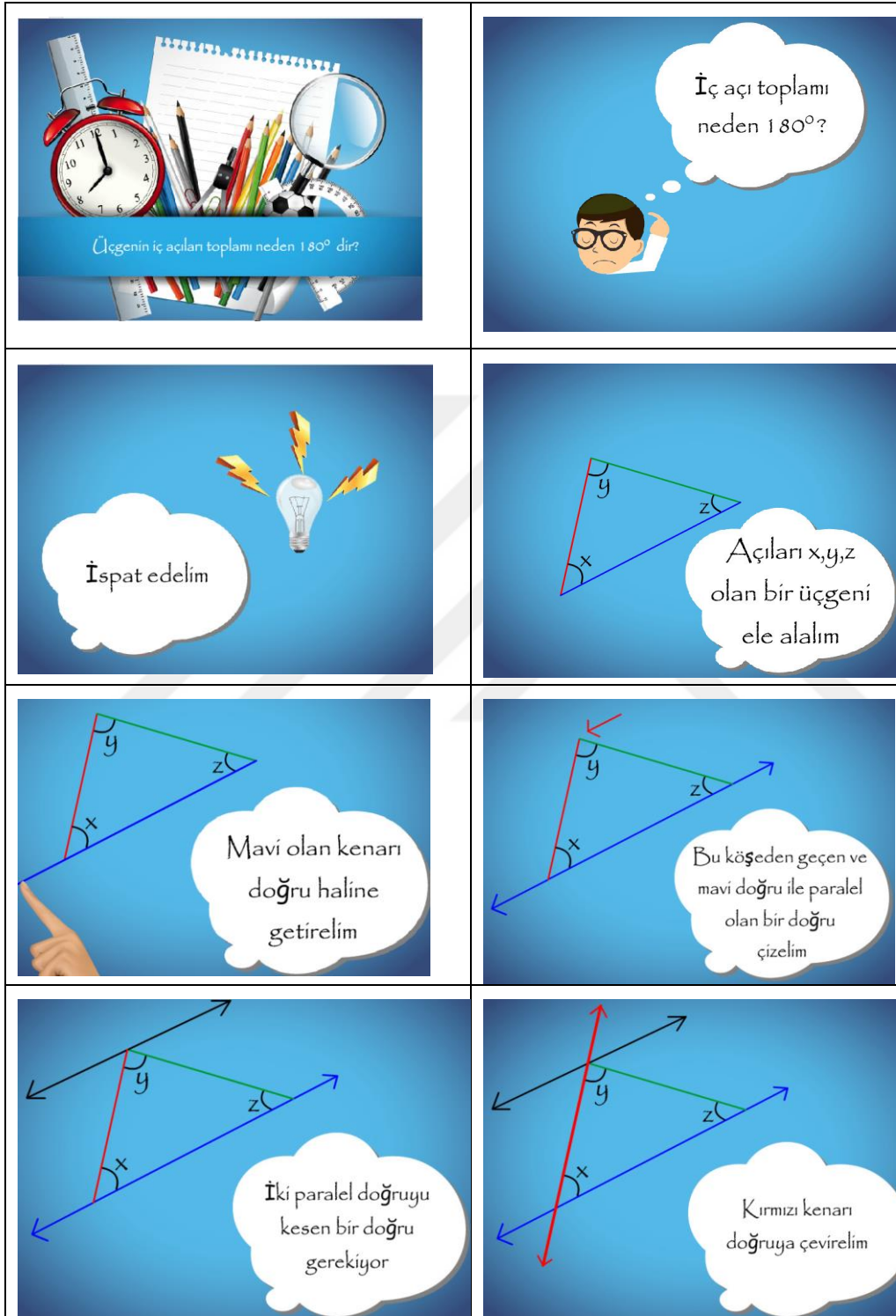
Katkılarınız için şimdiden teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

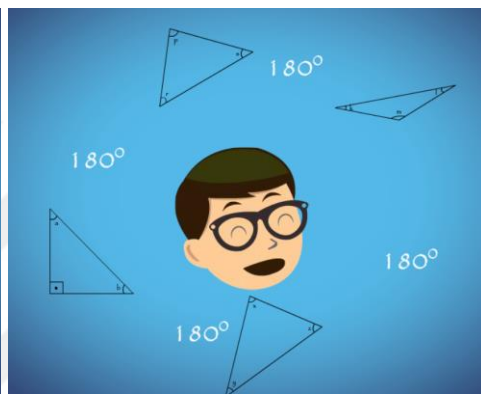
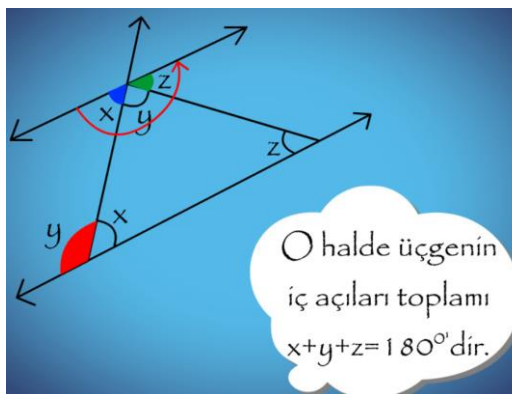
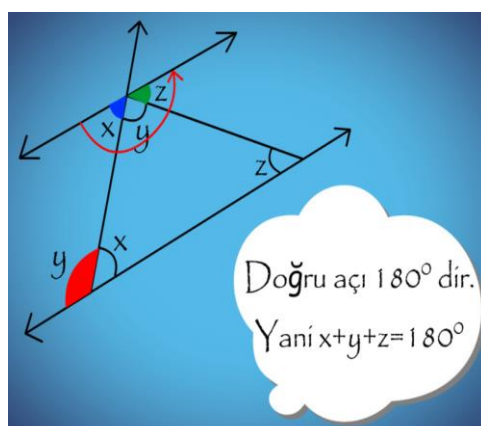
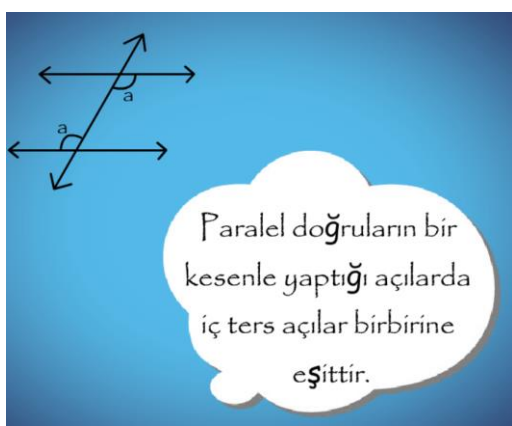
Puanlamada dikkate alınacak ölçütler

Uygun	Materyallerin düzeltmeye ihtiyaç olmaksızın kullanılmasının uygun olduğunu düşünüyorsanız bu seçeneği işaretleyiniz.
Uygun Değil	Materyallerin konu içeriğine ve hedef kitleye göre uygun olmadığını düşünüyorsanız bu seçeneği işaretleyiniz.
Düzeltilme Gerekli	Materyallerin düzeltme önerisi kısmında belirtilen düzeltmeler doğrultusunda düzenlendikten sonra kullanılması gerektiğini düşünüyorsanız bu seçeneği işaretleyiniz.

	Uygun	Uygun Değil	Düzeltilme Gerekli	Düzeltilme Önerisi
Mtryl1	☐	☐	☐	
Mtryl2	☐	☐	☐	
Mtryl3	☐	☐	☐	
Mtryl4	☐	☐	☐	
Mtryl5	☐	☐	☐	
Mtryl6	☐	☐	☐	
Mtryl7	☐	☐	☐	

EK 8. Üçgenin İç Açları Toplamı İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri





EK 9. Toplam Formülü İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri



$1+2$
 $1+2+3$
 $1+2+3+4$



İfadelerinin son sayıları
dikdörtgenlerin kısa
kenarlarını belirledi.

$1+2$
 $1+2+3$
 $1+2+3+4$



İfadelerde oluşan
dikdörtgenlerde uzun
kenarlar hep kısa kenarın
1 fazlası oldu.

son sayı



son sayı + 1

Son sayıya (kısa kenara) n diyelim;
uzun kenar $(n+1)$ ile ifade edilir.

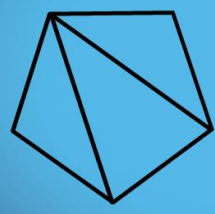
○ halde istenen daire sayısı

$$n.(n+1)$$

ifadesinin yarısıdır.

$$\frac{n.(n+1)}{2}$$

EK 10. Çokgenin İç Açı Toplam Formülü İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri

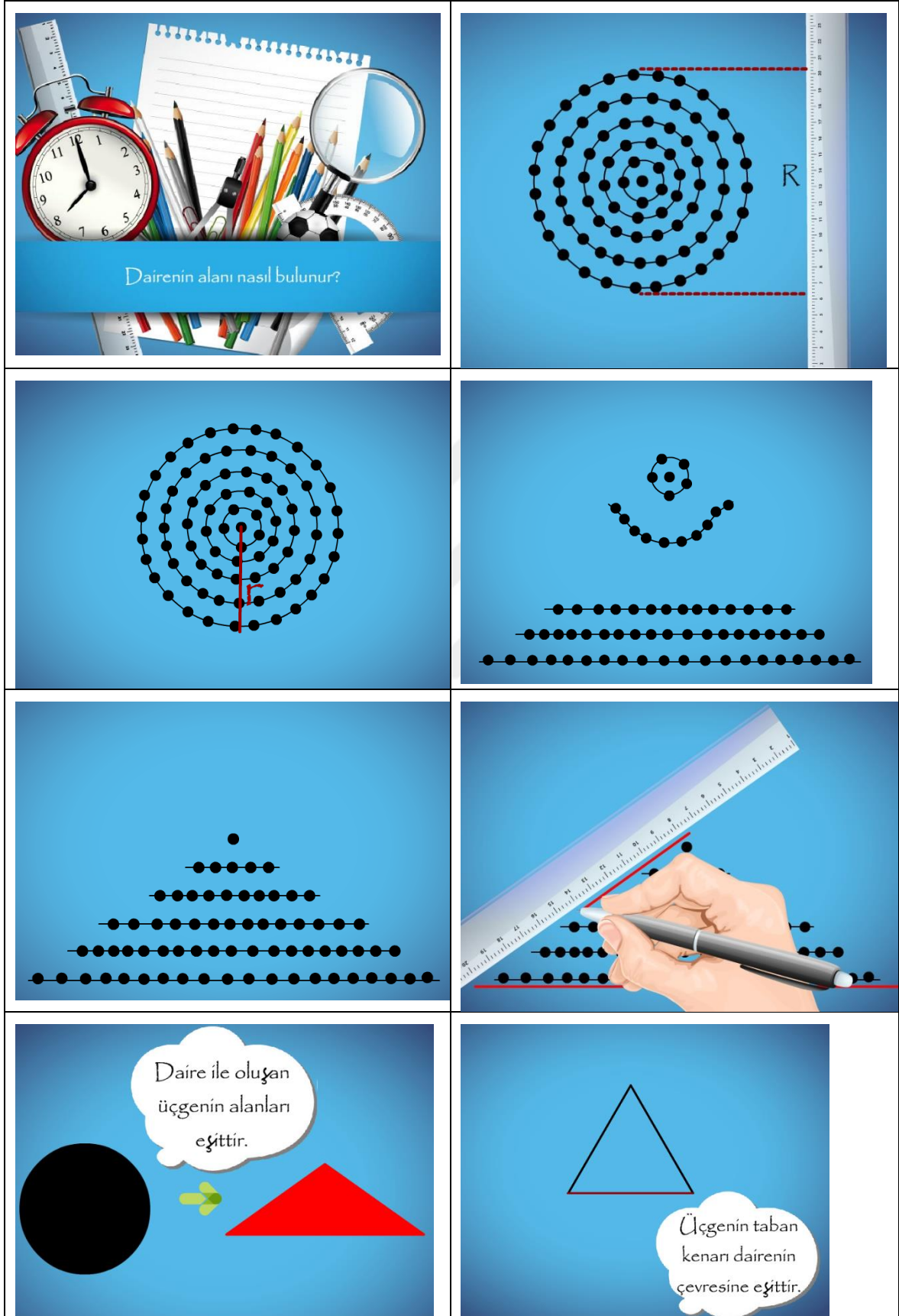
 Çokgende İç Açı Formülü	? Peki ama bu formül nasıl bulundu? ?																						
 Oluşan üçgen sayısı kaçtır? Kontrol et	O halde dörtgenin iç açıları toplamı $2 \cdot 180 =$ Kontrol et																						
 Oluşan üçgen sayısı Kontrol et	O halde altıgenin iç açıları toplamı $4 \cdot 180^\circ =$ 720 ✓ Kontrol et																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Çokgen</th> <th>Oluşan üçgen sayısı</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Dörtgen</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>Beşgen</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>Altıgen</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Yedigen</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	Çokgen	Oluşan üçgen sayısı	Dörtgen	2	Beşgen	3	Altıgen	4	Yedigen	5	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>Dört-2</td> <td>→</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>Beş-2</td> <td>→</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>Altı-2</td> <td>→</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Yedi-2</td> <td>→</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	Dört-2	→	2	Beş-2	→	3	Altı-2	→	4	Yedi-2	→	5
Çokgen	Oluşan üçgen sayısı																						
Dörtgen	2																						
Beşgen	3																						
Altıgen	4																						
Yedigen	5																						
Dört-2	→	2																					
Beş-2	→	3																					
Altı-2	→	4																					
Yedi-2	→	5																					

Bir kenar sayisi giriniz:		Gönder
$\cdot 2 =$		Gönder
$\cdot 180 =$		Kontrol et

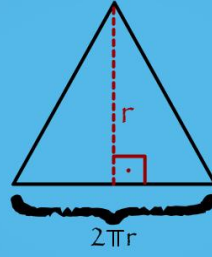
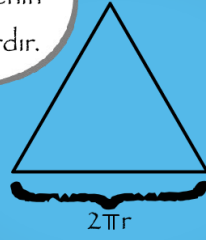
Bir kenar sayisi giriniz:	10	Gönder
10 $\cdot 2 =$	8	Gönder
8 $\cdot 180 =$	1440	Kontrol et



EK 11. Dairenin Alan Formülü İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri



Üçgenin yüksekliği
ise açılan dairenin
yarıçapı kadardır.



Sadeleştirelim;

$$\frac{\cancel{2} \cdot \pi \cdot r \cdot \cancel{r}}{\cancel{2}} = \pi \cdot r^2$$

Dairenin alan
formülüdür. ←

$$\pi \cdot r^2$$

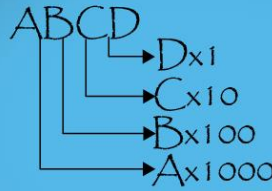
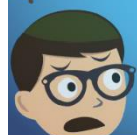
Üçgenin alanının nasıl hesaplandığını hatırlayalım;

$$\frac{\text{taban} \times \text{yükseklik}}{2}$$

○ halde;

$$\text{taban} \frac{2\pi r \cdot r}{2} \text{yükseklik}$$

EK 12. Bölünebilme Kuralları İspatı Animasyonu Ekran Görüntüleri

 Bölünebilme kuralları nelerdi	Neden iki ile bölünme kuralında birler basamağındaki rakam çift olmalı? Neden üç ile bölünme kuralında tüm basamakları topluyoruz? Neden dört ile bölünme kuralında son iki rakama bakıyoruz?
Nedenini hiç düşündünüz mü?	
$A \times 1000 + B \times 100 + C \times 10 + D \times 1$ İfadesine bakalım ve çift sayıların 2'ye bölüneceğini hatırlayalım.	A sayısını bilmemize gerek kalmadan $A \times 1000$ sayısının çift olduğunu söyleyebilir miyiz? q? Bir düşünün!! 
O halde $A \times 1000 + B \times 100 + C \times 10 + D \times 1$ ifadesinde $\left. \begin{array}{l} A \times 1000 \\ B \times 100 \\ C \times 10 \end{array} \right\} \text{çifttir ve 2'ye bölünebilir.}$	KLMNPRST Bu basamaklar zaten 2'ye bölünür. 0 2 4 6 8 ise sayı 2'ye bölünür.

EK 13. Bölünebilme Kuralları Çalışma Kâğıdı

Bölünebilme Kuralları Çalışma Kâğıdı

347549590345683498

- 1) Yukarıda verilen sayı 2 ile tam bölünebilir mi?
- 2) Cevabınız EVET ya da HAYIR ise bunu nasıl karar verdiğinizi açıklayınız.
- 3) Açıklamak için kullandığınız kural nereden gelmiş ve nasıl bulunmuş olabilir?
- 4) Bu kuralın nasıl bulunduğunu daha önce hiç merak etmiş miydiniz?
- 5) Aynı sayı 3 ile tam bölünür mü?
- 6) Sizce 3 ile bölünme kuralı ile 2 ile bölünme kuralı arasındaki fark nasıl ortaya çıkmıştır?

EK 14. Bölünebilme Kuralları İspat Çalışma Kâğıdı

Bölünebilme Kuralları İspat Etme Çalışması

1)

ABC

Üç basamaklı sayısının 2 ile tam bölünebilmesi için hangi şart sağlanmalıdır? İspat ederek açıklayınız.

2)

KLMN

Dört basamaklı sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için hangi şart sağlanmalıdır? İspat ederek açıklayınız.

3)

PRSTVY

Altı basamaklı sayısının 4 ile tam bölünebilmesi için hangi şart sağlanmalıdır? İspat ederek açıklayınız.

EK 15. Tam Sayıların Çarpımı İspatının Animasyonu Ekran Görüntüleri

 Pozitif ve negatif sayıların toplamı neden -	Pozitif ile negatif çarpımı neden "-" hiç düşündünüz mü?
İki pozitif sayıdan başlayarak örüntü oluşturalım.. örneğin; $(+5).(+4) =$ Kontrol et	$5.3 = 15$ ✓ Kontrol et $5.2 = 10$ ✓ $5.1 = 5$ ✓ $5.0 =$
$(+5).(+4) = +20$ $(+5).(+3) = +15$ } 5 azalmış $(+5).(+2) = +10$ } 5 azalmış $(+5).(+1) = +5$ $(+5).(+0) = 0$	O halde $(+5).(-1)$ işleminin sonucu 0-5 olacak.

EK 16. Tam Sayıların Çarpımı İspatının Çalışma Kâğıdı

TAM SAYILARIN ÇARPIMI

1)

$$\begin{aligned} (+)(-) &= - \\ (-)(+) &= - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+)(+) &= + \\ (-)(-) &= + \end{aligned}$$

Yukarıdaki görsellerde yer alan ifadeler neyi anlatıyor? Sizce bu kurallar nasıl oluşturulmuştur?

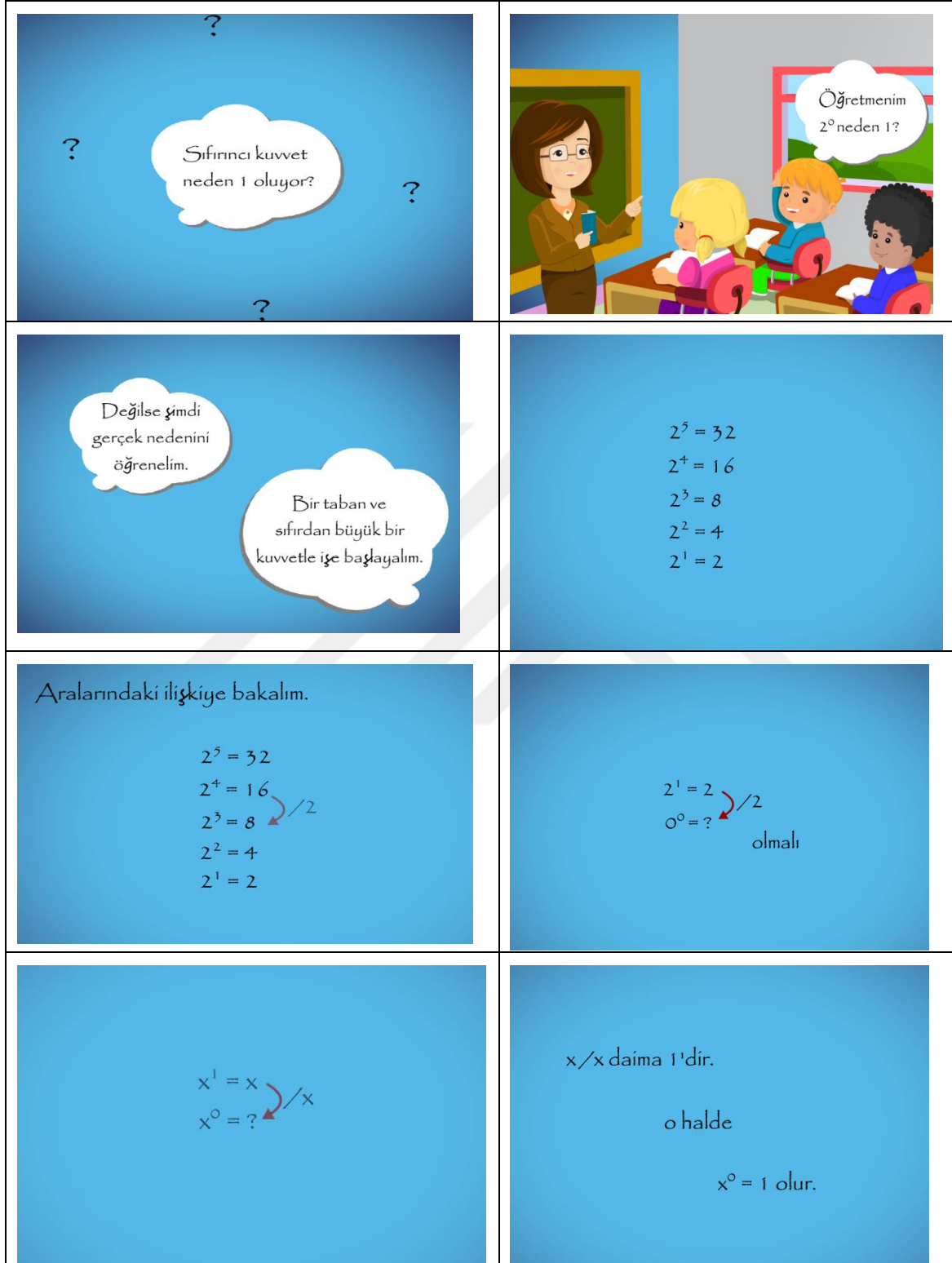
2) (-4) ile (+3)'ün çarpımının negatif işaretli olduğunu ispat ediniz.

3) (-4) ile (-3)'ün çarpımının pozitif işaretli olduğunu ispat ediniz.

4) Bir pozitif bir negatif sayı seçip çarpımlarının negatif işaretli olduğunu ispat ediniz.

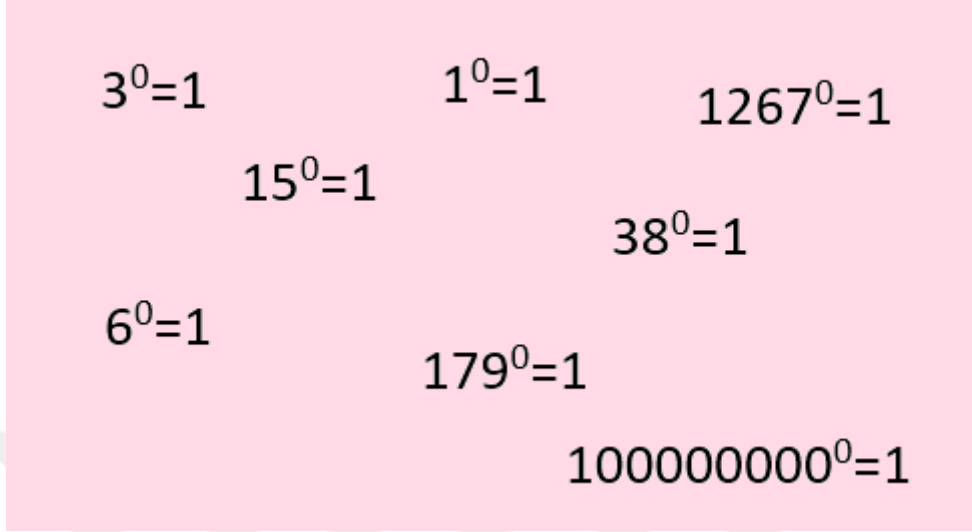
5) İki negatif sayı seçip çarpımlarının pozitif işaretli olduğunu ispat ediniz.

EK 17. Sıfırıncı Kuvvet İspatının Animasyonu Ekran Görüntüleri



EK 18. Sıfırcı Kuvvet İspatı Çalışma Kâğıdı

SIFIRINCI KUVVET


$$\begin{array}{ccc} 3^0=1 & 1^0=1 & 1267^0=1 \\ & 15^0=1 & \\ & & 38^0=1 \\ 6^0=1 & & \\ & 179^0=1 & \\ & & 100000000^0=1 \end{array}$$

1) Yukarıdaki görselde görüldüğü gibi sıfır hariç bütün sayıların sıfırcı kuvveti 1'dir? Bunun nedenini hiç merak ettiniz mi?

2) 3'ün sıfırcı kuvvetinin 1 olduğunu ispat ediniz?

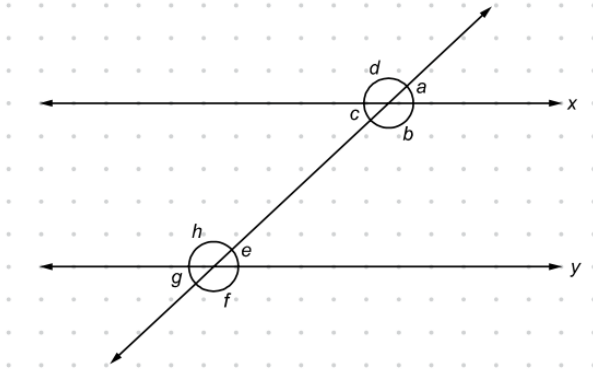
3) 1'in sıfırcı kuvvetinin 1 olduğunu ispat ediniz?

4) 5'in sıfırcı kuvvetinin 1 olduğunu ispat ediniz?

EK 19. Paralel Doğrular Çalışma Kâğıdı

PARALEL DOĞRULARIN BİR KESENLE YAPTIĞI AÇILAR

1)



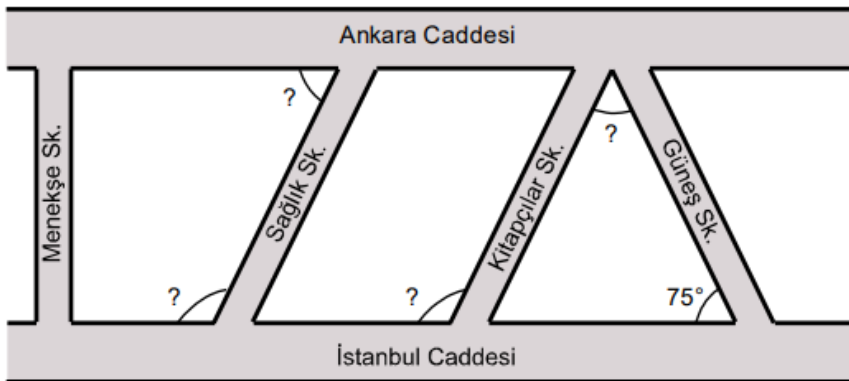
Şekildeki yöndeş, ters, iç ters ve dış ters açı çiftlerini yazalım.

2)

Aşağıdaki krokiye göre;

- Ankara Caddesi ve İstanbul Caddesi birbirine paraleldir.
- Kitapçılar Sokak ve Güneş Sokak'ın uzunlukları birbirine eşittir.
- Sağlık Sokak, Kitapçılar Sokak'ına paraleldir.
- Menekşe Sokak, Ankara ve İstanbul Caddeleri'ni dik kesmektedir.

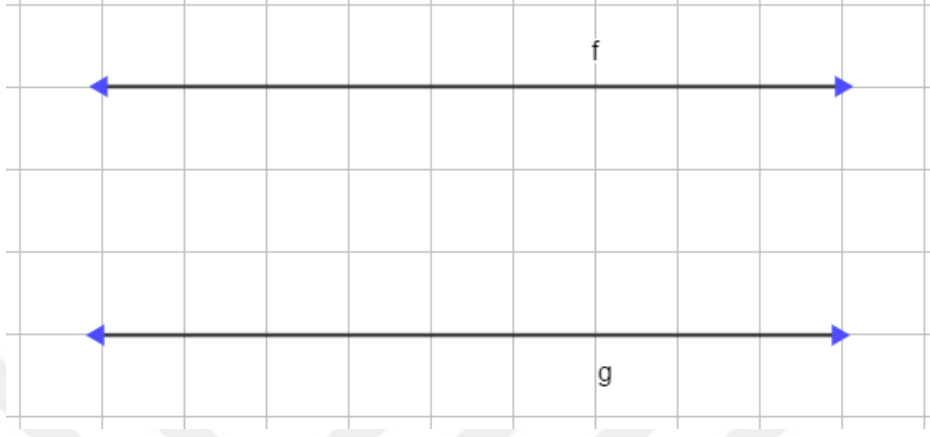
Yukarıda verilen bilgilere göre şekilde istenen açıları bulun ve açıları bulmak için kullandığınız ilişkileri yazın.



EK 20. Üçgenin İç Açıları Toplamı İspatı Çalışma Kâğıdı

ÜÇGENİN İÇ AÇILARI TOPLAMININ İSPATI

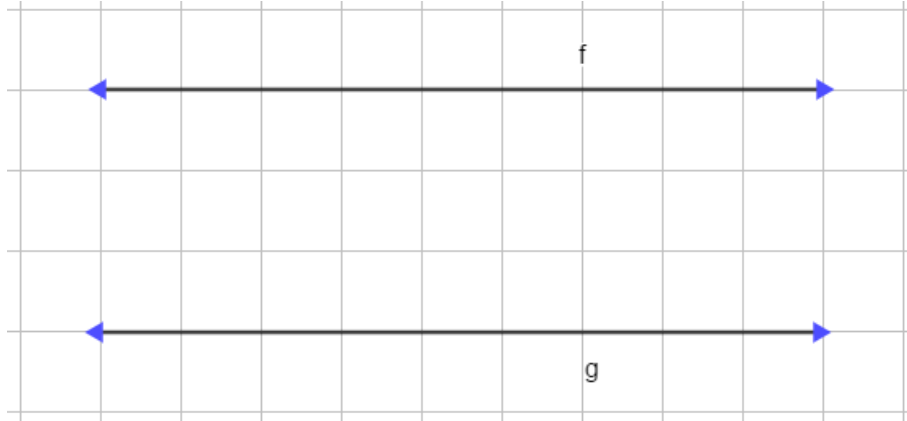
1) Aşağıda verilen f ve g doğrularını kesen bir doğru çiziniz.



Çizdiğiniz doğrunun f doğrusunu kestiği noktaya K, g doğrusunu kestiği noktaya L adını verelim.

Daha sonra K noktasından geçecek g'yi L dışında başka bir noktada kesen ikinci bir doğru çizelim.

2) Yaptığımız çizimde oluşan KLM üçgeninin iç açılarının toplamının 180° olduğunu ispat ediniz.



EK 21. Çokgenler Çalışma Kâğıdı

ÇOKGENLERİ HATIRLAYALIM

1. Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanları D, yanlış olanları Y olarak işaretleyiniz.

I. ► Kare bir düzgün çokgendir.

D Y

II. ► Dikdörtgen düzgün bir çokgendir.

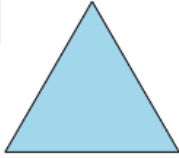
D Y

III. ► Altıgenin bir köşesinden 3 tane köşegen çizilebilir.

D Y

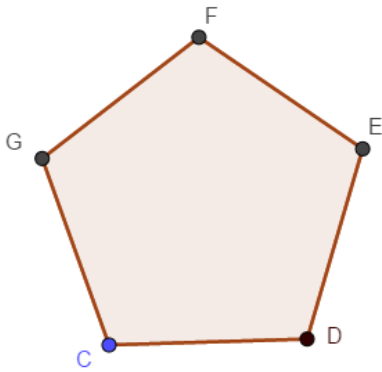
IV. ► Bir çokgenin köşe sayısı ve kenar sayısı eşittir.

D Y



2) Yukarıdaki üçgenin kaç tane köşegeni vardır?

3.

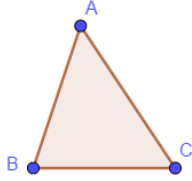
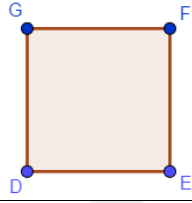
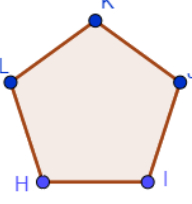
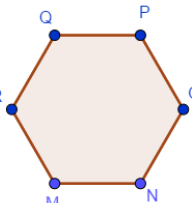
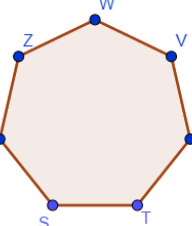


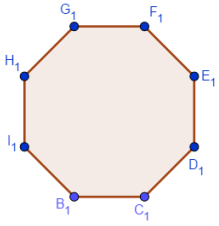
Yukarıdaki beşgende C noktasından çizilebilecek tüm köşegenleri çiziniz.

EK 22. Çokgenin İç Açıları Toplam Formülünün İspatı Çalışma Kâğıdı

ÇOKGENİN İÇ AÇILARI TOPLAM FORMÜLÜ İSPATI

Tabloda verilen çokgenlerin bir köşesinden çizilebilecek tüm köşegenleri çizin. Oluşan üçgen sayılarını ve açı toplamalarını bulun. En son satırda bu toplamın kenar sayısı ile ilişkisini açıklayan cebirsel bir ifade yazınız.

Çokgen	Kenar Sayısı	Köşegen çizilince oluşan üçgen sayısı	Oluşan üçgenlerin iç açı toplamı
			
			
			
			
			

			
“n” kenarlı bir çokgen			

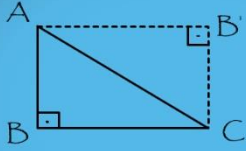


EK 23. Dörtgenlerin Alanları İspat Animasyonu Ekran Görüntüleri

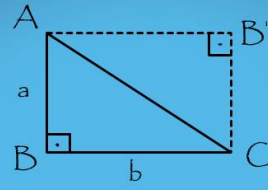


Bu ispatı 3 çeşit üçgen için gerçekleştirelim.

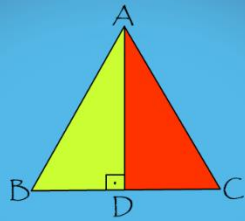
1. Dik açılı üçgen
2. Dar açılı üçgen
3. Geniş açılı üçgen



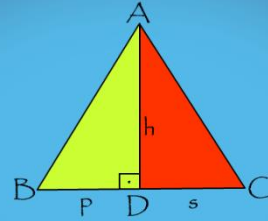
Bu üçgeni AC kenarında döndürelim ve çizelim.



o halde $\text{Alan}(\triangle ABC) = \frac{a \cdot b}{2}$



ABC üçgeninin alanı
sarı ve kırmızı olan iki dik üçgenin
alanlarının toplamına eşittir.



Sarı renkli dik üçgenin alanı;
 $\frac{p \cdot h}{2}$

$$\begin{array}{cc} \text{Sarı} & + & \text{Kırmızı} \\ \text{Alan} & & \text{Alan} \\ \frac{p(h)}{2} & + & \frac{(h)s}{2} \end{array}$$

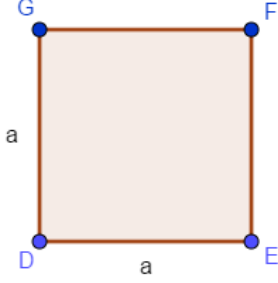
h ortak parantezine alalım.

$$\frac{h \cdot (p+s)}{2} \text{ ifadesi elde edilir.}$$

EK 24. Üçgenin Alan Formülü İspat Animasyonu Ekran Görüntüleri

1. Adım

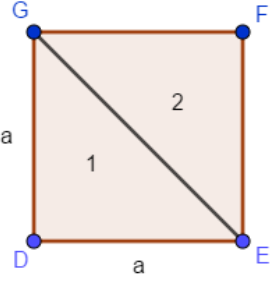
EDGF karesinin alanını a cinsinden ifade ediniz.



2. Adım

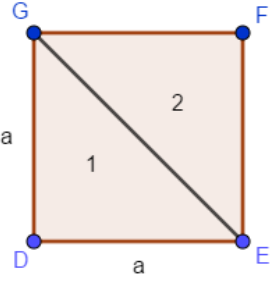
EDGF karesi 1 ve 2 nolu üçgenlerin alanlarının toplamı mıdır?

1 ve 2 nolu üçgenlerin alanları eşit midir?



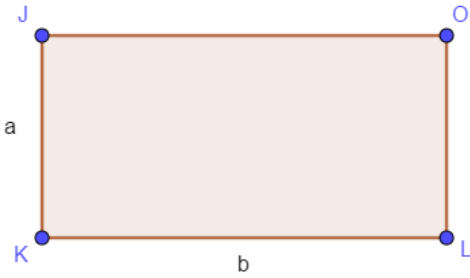
3. Adım

1 nolu üçgenin alanını a cinsinden ifade ediniz.

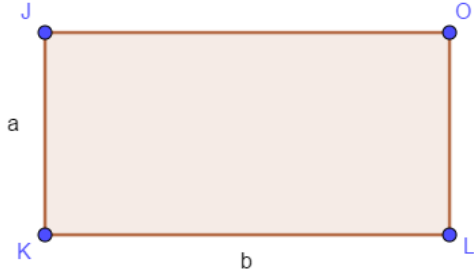


1. Adım

JOKL dikdörtgeninin alanını a ve b cinsinden ifade ediniz.



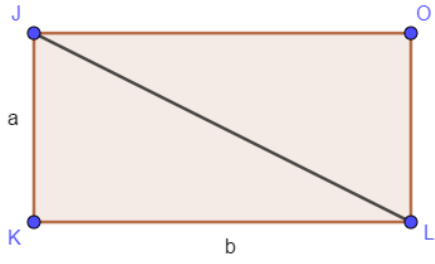
2. Adım



JOKL dikdörtgeninin alanını 1 ve 2 nolu üçgenlerin alanlarının toplamı mıdır?

1 ve 2 nolu üçgenlerin alanları eşit midir?

3. Adım



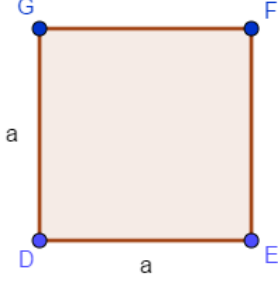
1 nolu üçgenin alanını a ve b cinsinden ifade ediniz.

EK 25. Üçgenin Alan Formülü İspatı Çalışma Kâğıdı

Üçgenin Alan İspatı

1. Adım

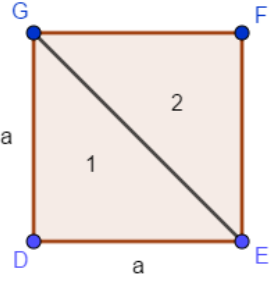
EDGF karesinin alanını a cinsinden ifade ediniz.



2. Adım

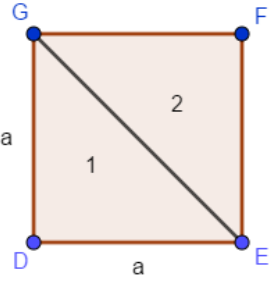
EDGF karesi 1 ve 2 nolu üçgenlerin alanlarının toplamı mıdır?

1 ve 2 nolu üçgenlerin alanları eşit midir?

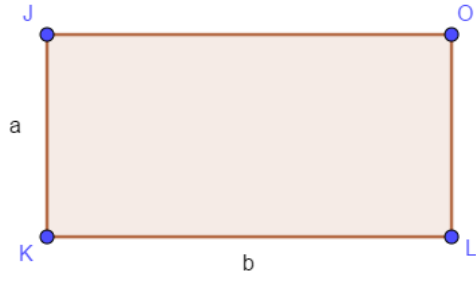


3. Adım

1 nolu üçgenin alanını a cinsinden ifade ediniz.

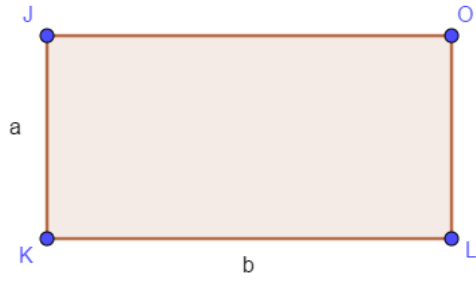


1. Adım



JOKL dikdörtgeninin alanını a ve b cinsinden ifade ediniz.

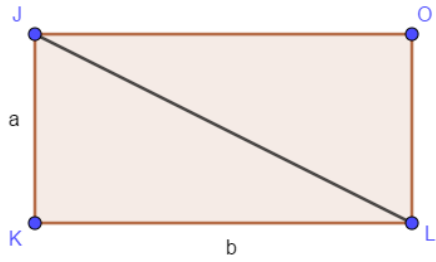
2. Adım



JOKL dikdörtgeninin alanını 1 ve 2 nolu üçgenlerin alanlarının toplamı mıdır?

1 ve 2 nolu üçgenlerin alanları eşit midir?

3. Adım

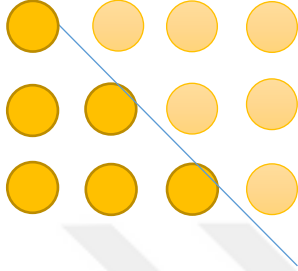


1 nolu üçgenin alanını a ve b cinsinden ifade ediniz.

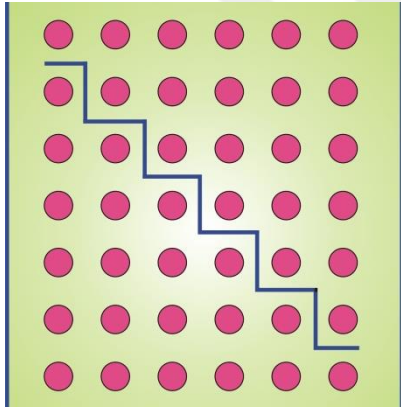
EK 26. Toplam Formülü İspatı Çalışma Kâğıdı

Toplam Formülü- Çalışma Kâğıdı

1. 1'den 5'e kadar olan sayıların toplamını bulunuz.
2. 1'den 5'e kadar olan sayıların toplamını modelleyiniz.
3. Aşağıda modellenen işlem hangi toplama aittir?



4.



Şekilde modellenen işlem nedir? Ve sonucu kaçtır?

5. 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamını bu modelleme ile nasıl yapabilirsiniz?
6. Toplam formülünü cebir kullanarak ispatlayınız.
7. Toplam formülünü modelleme kullanarak ispatlayınız.

EK 27. Özgeçmiş

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gülhan YILMAZ

EĞİTİM BİLGİLERİ

29/06/2009 Lisans
Gazi Üniversitesi-Eğitim Fakültesi (Kastamonu)-
İlköğretim Matematik Öğretmenliği

18/01/2012 Yüksek Lisans(TEZLİ)
Kastamonu Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü-
İlköğretim Bölümü-Matematik Eğitimi/Öğretmenliği

İŞ TECRÜBESİ

11.2016-Şu ana kadar	Öğretmen (Görevlendirme)-Ölçme (BAKANLIK/MERKEZ TEŞKİLATI)	Süre:1 yıl 5 ay
08.2012-Şu ana kadar	Öğretmen- Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü (ANKARA/YENİMAHALLE)	Süre:6 yıl 10 ay
06.2012-08.2012	Öğretmen-Şehit Öğretmen M.Ali Durak Ortaokulu (ANKARA/KEÇİÖREN)	Süre:2 ay
09.2011-06.2012	Öğretmen (Görevlendirme)-Şehit Hüseyin Köksal İlkokulu (ANKARA/KEÇİÖREN)	Süre:9 ay
08.2011-06.2012	Öğretmen-Kuyubaşı İlkokulu (ANKARA/KEÇİÖREN)	Süre:9 ay
07.2011-08.2011	Öğretmen-Şehit Hüseyin Köksal İlköğretim Okulu (ÇANKIRI/ATKARACALAR)	Süre:1 ay
09.2009-07.2011	Öğretmen-Çardaklı İlköğretim Okulu (ÇANKIRI/ATKARACALAR)	Süre:1 yıl 9 ay

BİLİMSEL ÇALIŞMALAR

- Araştırma Makalesi Yılmaz, G. & Es, H. (2021). “8.Sınıf Matematik Dersinde Bilgisayar Animasyonları İle İspat Öğretiminin Akademik Başarıya Etkisi”, Journal Of Social, Humanities and Administrative Sciences, 7(36):203-211
- Araştırma Makalesi YILMAZ, G.,SOMYÜREK, S.,DEMİREL, T.(05/04/2017), Ortaokul Öğrencilerinin Geometrik Cisimler Ve Hacim Ölçme Konusuna Yönelik Yazılı Argümantasyon Becerilerinin İncelenmesi, *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*,018(01), 191-211.
- Araştırma Makalesi YILMAZ, G.,KAÇAR, A.(31/01/2016), On the Teaching Polygons to Primary School 7th Grade Students Using Vee Diagrams and Mind Maps, *Başkent Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*,3(1), 13-24.
- Kitap YILMAZ, G.(28/06/2015),5. Sınıf Gerçek Konu Özetli Test Kitabı, Ankara:Soysal Yayınları. ISBN No :9786056589393
- Bildiri
- Tam Metin Bildiri 5. Sınıf Matematik Araştırma Sınavı Açık Uçlu Sorularındaki Öğrenci Hataları, Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu 2019, İzmir
- Bildiri Ortaokul Öğrencilerinin Okul Hayatına İlişkin Zihin Haritalarının Analizi, International Journal of Arts and Sciences’(IJAS) International Conference for Academic Disciplines, 30 Haziran- 3 Temmuz 2014, Venedik/İtalya
- Bildiri İlköğretim 7.Sınıf Matematik Dersi Çokgenler Konusunun Zihin Haritası Yöntemiyle Öğretiminin Kalıcılığa Etkisi – 10.Matematik Sempozyumu, Işık Üniversitesi/İstanbul



GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR...