

EYLÜL 2018

Yüksek Lisans- Matematik

BEKİR ÇINGİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK DEĞERLİ BİPOLAR NÖTROSOFIG
KÜMELERDE ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME
PROBLEMLERİ İÇİN BİR OUTRANKİNG YAKLAŞIMI

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BEKİR ÇINGİ

EYLÜL 2018

**Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Kümelerde Çok Kriterli
Karar Verme Problemleri İçin Bir Outranking Yaklaşımı**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Bekir ÇINGİ

Eylül 2018



© 2018 [Bekir ÇINGİ]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Kümelerde Çok Kriterli Karar Verme
Problemleri İçin Bir Outranking Yaklaşımı

Öğrencinin, Adı Soyadı: Bekir ÇINGİ

Tez Savunma Tarihi: 14.09.2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :

İmzası

Doç. Dr. Memet KULE

.....

Doç. Dr. Necati OLGUN

.....

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Bekir ÇINGİ

ABSTRACT

AN OUTRANKING APPROACH FOR MULTI-CRITERIA DECISION-MAKING PROBLEMS WITH INTERVAL-VALUED BIPOLAR NEUTROSOPHIC SETS

ÇINGİ, Bekir

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Memet ŞAHİN

September 2018

64 pages

In this thesis, various generalizations of the concept of fuzzy set and the concept of intuitionistic fuzzy set, which is an upper generalization of the concept of fuzzy set are examined and their general characteristics(properties) are given. Furthermore, the concepts of neutrosophic set, single valued neutrosophic set, interval valued neutrosophic set and their general properties and operations which are beyond the scope of intuitive fuzzy sets are introduced(defined). Then, the basic definitions, general properties and outranking relations of bipolar neutrosophic sets, which have recently attracted attention with a wide range of applications have been examined. A novel outranking approach for multi-criteria decision-making (MCDM) problems is proposed to address situations where there is a set of numbers in the real unit interval and not just a specific number with a bipolar neutrosophic set. Firstly, the operations of inter-valued bipolar neutrosophic sets and their related properties are introduced. Then some outranking relations for inter-valued bipolar neutrosophic numbers (IVBNNs) are defined based on ELECTRE, and the properties of the outranking relations are further discussed in detail. Additionally, based on the outranking relations of IVBNSs, a ranking approach is developed in order to solve MCDM problems. Finally, three practical examples are provided to illustrate the practicality and effectiveness of the proposed approach.

Key Words: Neutrosophic sets, bipolar neutrosophic sets, Interval-valued bipolar neutrosophic sets, Multicriteria decision-making, Outranking method.

ÖZET

ARALIK DEĞERLİ BİPOLAR NÖTROSOFİK KÜMELERDE ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME PROBLEMLERİ İÇİN BİR OUTRANKING YAKLAŞIMI

ÇINGİ, Bekir

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Ağustos 2018

64 sayfa

Bu tezde, bulanık küme kavramının çeşitli genellemeleri ve bulanık küme kavramının bir üst genellemesi olan sezgisel bulanık küme kavramı incelendi ve genel özellikleri hatırlatıldı. Ayrıca sezgisel bulanık kümelerin kapsamının daha da ötesinde olan nütrosolik küme, tekil değeri nütrosolik küme ve aralık değeri nütrosolik küme kavramları ve genel özellikleri ve işlemleri hatırlatıldı. Daha sonra son zamanlarda çok geniş bir alanda dikkat çeken bipolar nütrosolik kümelerin temel tanımları, genel özellikleri ve outranking ilişkileri incelendi. Çoklu kriterli karar verme problemleri için yeni bir outranking yaklaşımı, bir bipolar nütrosolik küme ile sadece belirli bir sayı olmayıp reel birim aralıkta var olan bir sayı kümesi durumlarına yönelik yeni bir outranking yaklaşımı önerildi. İlk önce, aralık değeri bipolar nütrosolik kümeler işlemleri ve onlarla ilgili özellikler incelendi. Daha sonra ELEKTRE IV'e dayanarak aralık değeri bipolar nütrosolik sayılar için bazı outranking ilişkileri tanımlandı ve outranking ilişkilerinin özellikleri daha detaylı bir şekilde incelendi. Buna ek olarak aralık değeri bipolar nütrosolik kümelerin outranking ilişkilerine dayanarak çoklu kriterli karar verme problemlerini çözmek için bir sıralama yaklaşımı geliştirildi. Son olarak önerilen yaklaşımın pratiklik ve etkililiğini görselleştirmek için üç pratik örnek verildi.

Anahtar Kelimeler: Nütrosolik kümeler, bipolar nütrosolik kümeler, aralık değeri bipolar nütrosolik kümeler, çok kriterli karar verme, outranking metodu.



Çok kıymetli aileme.....

TEŞEKKÜR

Bu tez süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak ta bana çok şey katan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr. Memet ŞAHİN'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi hazırlarken ayırdığı değerli zaman ve sağladığı destekleri ile çalışmalarına katkıda bulunan değerli hocam Dr. Vakkas ULUÇAY'a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman üzerimden eksik etmeyen ve haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim sevgili annem Meral ÇINGİ ve babam ŞİHMEHMET ÇINGİ'ya sabırlarından ötürü şükranlarımı ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	vi
ÖZET	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1.GİRİŞ	1
2.GENEL BİLGİLER	3
2.1 Bulanık Kümeler	3
2.2 Sezgisel Bulanık Kümeler	18
2.3 Nötrosofik Kümeler, Tekil değerli Nötrosofik Kümeler ve Aralık Değerli Nötrosofik Kümeler	33
2.4 Aralık Değerli Nötrosofik Küme'lerin İşlemleri	34
2.5 Bipolar Nötrosofik Kümeler	36
2.6 Bipolar Nötrosofik Kümelerin Outranking İlişkileri	38
3.ARALIK DEĞERLİ BİPOLAR NÖTROSOFİK KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ	44
3.1 Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Kümeler	44
3.2 Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Sayı'ların outranking ilişkileri	47
4.UYGULAMALAR	53
4.1 ADBNS'lar ile ilgili Çoklu Kriterli Karar Verme (ÇKKV) Problemleri için bir outranking yaklaşımı	53
4.2 Görsel bir örnek	55
5.SONUÇ VE TARTIŞMA	59
KAYNAKLAR	60

SİMGELER VE KISALTMALAR

μ_A	A kümesinin üyelik fonksiyonu
$\nu_{\tilde{A}}$	$\tilde{A}$ kümesinin üyelik olmama fonksiyonu
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	$\tilde{A}$ 'da bir x elemanının üyelik olma derecesi
$\nu_{\tilde{A}}(x)$	$\tilde{A}$ 'da bir x elemanının üyelik olmama derecesi
$\pi_{\tilde{A}}(x)$	$\tilde{A}$ 'da bir x elemanının kararsızlık derecesi
$\emptyset$	Boş Küme
$\bigcup_{i \in I} A_i$	X in Bulanık Kümeler Ailesinin Birleşimi
$\bigcap_{i \in I} A_i$	X in Bulanık Kümeler Ailesinin Kesişimi
$\vee$	En Küçük Üst Sınır
$\wedge$	En Büyük Alt Sınır
p	X Kümesinin Bulanık Noktası
$\mu \in [0,1]^X$	X den [0,1] e olan fonksiyon
$\tilde{A}$	Sezgisel Bulanık A Kümesi
$F(X)$	X Kümesi Üzerindeki Sezgisel Bulanık Kümeler
$T_A(x)$	X'de bir A Nötrosofik Kümesinin Doğruluk Üyelik Foksiyonu
$I_A(x)$	X'de bir A Nötrosofik Kümesinin Kararsızlık Üyelik Foksiyonu

$F_A(x)$	X’de bir A Nötrosofik Kümesinin Yanlılık Üyelik Foksiyonu
$T^+(x), I^+(x), F^+(x)$	X’in pozitif üyelik dereceleri
$T^-(x), I^-(x), F^-(x)$	X’in negatif üyelik dereceleri
$A > s^B$	A güçlü bir şekilde B ye baskındır.
$A > w^B$	A zayıf bir şekilde B ye baskındır.
$A \sim t^B$	A B’ye farksızdır.
$A \perp B$	A ve B karşılaştırılmaz.
$x_1 P x_2$	x_1 en az x_2 kadar iyidir.
$d(A, B)$	A ve B arasındaki normalize edilmiş öklidyen uzaklık.
$q_j(.)$ ve $p_j(.)$	Eşik fonksiyonları.
ADBNS	Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Sayı.
AOB	A B’nin üstündedir.
$n_p(A, B)$	$P(a_i, b_j)$ kriterinin sayısını temsil eder.
$n_q(A, B)$	$Q(a_i, b_j)$ kriterinin sayısını temsil eder.
$n_l(A, B)$	$I(a_i, b_j) \wedge (g(a_i, b_j) > 0)$.kriterinin sayısını temsil eder.
$(]$	Açık-Kapalı Aralık
$[)$	Kapalı-Açık Aralık
$[]$	Kapalı Aralık

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Farklı belirsizlik tipleri ile başa çıkabilmek için, 1965 de Zadeh[1] tarafından bulanık kümeler teorisi geliştirildi. O tarihten itibaren, bu teori çeşitli alanlarda başarılı bir şekilde uygulandı[2]. Fakat belli durumlarda bu teori ile belli bir değerdeki bir bulanık kümenin üyelik olma derecesini tanımlamak zordur. Bu yüzden Turksen[3] 1986 da aralık değerli bulanık kümeleri tanımladı. Akabinde, Atanassov[4,5] üyelik olmama derecesinin bilgi eksikliği ile başa çıkabilmek için sezgisel bulanık kümeleri önerdi. Dahası Gau ve Buehrer[6] kararsız(belirsiz) kümeleri tanımladı ve Bustince'ye göre, bu kararsız kümeler ve Atanassov'un sezgisel bulanık kümeleri matematiksel olarak eşdeğer nesnelerdir[7]. Bugüne kadar sezgisel bulanık küme tıbbi teşhis[8], nöral ağlar[9], renk bölgesi ekstraksiyonu[10,11] ve Pazar tahmini[12] gibi alanlardaki çoklu kriterli karar verme problemlerinin [13,14,15] çözümünde geniş bir şekilde uygulandı. Sezgisel bulanık kümeler daha sonradan aralık değerli sezgisel bulanık kümelere genişletildi[16]. Bunun yanı sıra üçgensel sezgisel bulanık kümelere sezgisel aralık bulanık kümelere genişletildi[17]. Bir karar verme sürecinde nesneler ile ilgili olarak insanların tercihlerini ifade etmekte tereddüt yaşadığı bu durumlar ile baş etmek için, kararsız bulanık kümeler Torra[18] ve Narukawa[19] tarafından tanıtıldı. Buna ek olarak, bazı başka uzantılar önerildi[20,21,22] ve bazı yeni grupların karar verme analizinden sezgisel bulanık sayılarda yöntemler geliştirildi[23,24].

Her ne kadar bulanık kümelerin teorisi geliştirilmiş ve genelleştirilmiş olsa da bu karar verme problemlerinde belirsiz ve tutarsız(kararsız) bilgi gibi bütün belirsizlik tipleri ile baş edemedi. Örneğin[25], bir uzman belli bir ifade hakkında fikir verdiğinde, o diyebilir ki ifadenin doğru olma olasılığı 0.5, yanlış olma olasılığı 0.6 ve emin olmama olasılığı 0.2 dir. Bir başka örnek tıp alanı ile ilişkilidir. Bazen bir hasta bir rahatsızlıktan acı çektiğinde bir doktor için belli bir teşhis koymak zordur.

Bu yüzden o sıklıkla doğruluk ve yanlışlık derecesinin yanı sıra bir kararsızlık derecesi analizi verecek. Örneğin %60 evet, %30 hayır ve %20 emin değil. Bu problemler bulanık kümelerin ve sezgisel bulanık kümelerin kapsamının ötesindedir. Bu yüzden bazı yeni teorilere ihtiyaç duyulur.

Bu amaç için, Smarandache[26,27] 1995 de nörtrosofik mantık ve nörtrosofik kümeleri geliştirdi. Nörtrosofik küme; standart olmayan birim aralık olan $]0^-,1^+[$ aralığında uzanan ve bir doğruluk, kararsızlık ve yanlışlık derecesine sahip olan evrensel kümenin her bir elemanının olduğu bir kümedir[28]. Açıkça, bu sezgisel bulanık kümedeki gibi standart $[0,1]$ aralığını genişletmedir. Dahası, sezgisel bulanık kümelerdeki birleşik belirsizlik ait olma ve ait olmama derecesine bağlı iken burada mevcut belirsizlik, yani kararsızlık faktörü doğruluk ve yanlışlık değerlerinden bağımsızdır[20]. Buna ek olarak, uzman ifadesi hakkında bahsi geçen örnek ile ilgili olarak, o nörtrosofik kümeler tarafından $x(0.5,0.2,0.6)$ olarak ifade edilebilir.

Tezin geri kalan kısmı aşağıdaki gibi organize edilmiştir: İkinci bölümde özetle Bulanık Kümeler, Sezgisel Bulanık Kümeler, Nörtrosofik Kümeler, Tekil değerli Nörtrosofik Kümeler ve Aralık Değerli Nörtrosofik Kümeler, Bipolar Nörtrosofik Kümeler ile ilgili işlemler ve bazı kavramlar hatırlatılır. Akabinde üçüncü bölümde ELEKTRE IV tabanlı Aralık Değerli Bipolar Nörtrosofik Küme'lerin bazı outranking ilişkileri tanımlanır. Dahası bazı özellikler ayrıca incelenir. Ayrıca iki örnek verilir. Dördüncü bölümde Aralık Değerli Bipolar Nörtrosofik Küme'ler ile ilgili çoklu kriterli karar verme problemleri için bir outranking yaklaşımı geliştirilir. Daha sonra, önerilen metodları görselleştirmek için bir örnek sunulur ve tartışma sağlanır. Son olarak, beşinci bölümde sonuçlar çizilir.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde Bulanık Kümeler, Sezgisel Bulanık Kümeler, Nötrosofik Kümeler, Tekil değerli Nötrosofik Kümeler, Aralık Değerli Nötrosofik Kümeler ve Bipolar Nötrosofik Kümeler ile ilgili bazı kavramları verilecektir [1], [2], [4], [29-40], [41], [44-48] .

2.1 Bulanık Kümeler

1965 yılına kadar matematikte, incelenen konuların(olayların), daha önce saptanmış olan kurallara kesin olarak uyup, uymadığı incelendi. Bu incelemede her zaman kendimize göre bir kesinlik arandı. Araç olarak, düşünce sistemimizde, iki değerli mantığı kullanıldı. Örneğin bir önerme için, daha önce saptanan kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış denildi. Buna karşın yaşadığımız evrende bir çok olaylar vardır ki, bunlarla ilgili önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ayırt etmek çoğu kez bizi güç durumda bırakabilir. Başka bir deyişle, bizi yanılgıya düşürebilir. Örneğin, bir sınıftaki öğrencilerden mavi gözlü öğrencilerin kümesinin yapılması istense; bu küme, değişik kişiler tarafından değişik biçimde oluşturulacaktır. Çünkü mavi ile mavi olmama arasında bir değerlendirme olmadığından, mavimtrak gözlü bir öğrenci, birine göre mavi gözlü sayılacak, öbürüne göre mavi gözlü sayılmayacaktır. Daha başka bir örnekle bulanık küme kavramının gerekliliğini şu şekilde söyleyebiliriz:

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ önermeleri verilsin.

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ önermelerinin doğru olduğunu, P_n önermesinin yanlış olduğunu varsayalım. Bunlardan türettiğimiz,

$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_{n-1}) \vee P_n$ bileşik önermesinin ikili mantığa göre doğruluğu bilinmektedir. Bu doğruluk ne derece geçerlidir?

Bu gözlemler ve çeşitli araştırmalar, iki değerli mantığa dayanan bugünkü matematiğin kesinlik göstermeyen birçok olayları tam olarak açıklayamayacağı

düşüncesini doğurmuştur. Bu durumu ilk kez, 1965 yılında, Zadeh yayınladığı “Fuzzy Sets”[1], adlı makalesiyle ortaya koydu ve bulanık küme(fuzzy set) kavramını tanıttı. Zadeh daha sonar bulanık kümelerle ilgili bir çok çalışma yaptı [2, 29,30].

Bunun doğal sonucu olarak matematiğin bu yeni küme kavramına göre yeniden düzenlenmesi gereksinimi ortaya çıktı.

1965’den bu yana, bulanık kümeler ve bulanık kümelerin istatistik, bilgi işlem ve dil bilimi konularına uygulanmasıyla ilgili çok sayıda makaleler ve kitaplar yayınlandı. Örneğin, “Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes” adlı kitabın sonuna eklenen kaynaklar bölümünde 1965 ile 1975 yılları arasında bulanık kümelerle ilgili 238 makalenin yayınlandığını görüyoruz. Kaufmann’ın [31] 1977’de yayınlanan “Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets: Academic Pres. Vol.1.” adlı çalışmasının önsözünde, bulanık kümeler üzerine 900’ün üzerinde makale yayınlandığı belirtilmiştir. Bizim yaptığımız incelemeye göre, 1965 ile 2004 yılları arasında Bulanık Kümeler ile ilgili yaklaşık 15.000 tane makale yayınlanmıştır. Bu makalelerden bazıları şunlardır: [32], [33,34,35].

2.1.1 Bulanık Küme Kavramı

Şimdiye kadar, bir kümenin belirtilmesini bu kümenin iyi tanımlanmış olması koşuluna bağladık. Başka bir deyişle, A kümesinin tanımlı olması için, evrensel kümeden seçtiğimiz bir x elemanı A kümesinin bir elemanı mıdır? sorusuna kesinlikle evet ya da hayır dememiz gerekirdi. Bunu $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, A kümesinin

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A : X \rightarrow \{0,1\}$ üyelik fonksiyonu ile ifade ediyorduk. Zadeh’in[1] da ortaya koyduğu aşağıdaki tanıma göre $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere $x \in X$ elemanı, A kümesinin üyelik derecesi r olan bir elemanı olmaktadır.

Tanım 2.1.1

$X = \{x : x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

kümesine, X 'in A bulanık kümesi denir. μ_A fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine x 'in üyelik derecesi(ya da değeri) ve $\mu_A(X)$ kümesine de A bulanık kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir.

Bundan böyle “ A kümesi ” deyimi belirtili kümeyi ifade edecek. Bulanık kümeler için “ A bulanık kümesi ” deyimini kullanacağız.

0 ve 1 sayıları $[0,1]$ aralığının elemanları olduğundan her belirtili kümeyi bir bulanık küme gibi düşünülebilir.

Bir X kümesini, $\emptyset$ kümeyi ve A kümesini

$X = \{(x,1): x \in X\}$, $\emptyset = \{(x,0): x \in X\}$, $A = \{(x, \mu_A(x)): x \in X\}$ şeklinde ifade edebiliriz.

Her A bulanık kümesi, $X \times [0,1]$ kartezyen çarpımının bir alt kümesi olduğundan, A bulanık kümesine, X den $[0,1]$ aralığına tanımlanmış bir fonksiyon gözüyle de bakılabilir. Kuşkusuz bu fonksiyon, A bulanık kümesinin μ_A üyelik fonksiyonudur. Bunun için çoğu yazarlar A bulanık kümesi ile μ_A fonksiyonunu özdeşleştirmişlerdir. Başka bir deyişle “ A bulanık kümesi ” deyimi yerine “ μ_A bulanık kümesi ” deyimini kullanmışlardır. Bu bölümde biz he iki deyimi de kullanacağız. Özellikle, μ_A bulanık kümesi dediğimiz zaman A bulanık kümesini kastettiğimiz anlaşılacaktır.

Tanım 2.1.2 [36]

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ boş olmayan kümeler ise,

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

kümesine n -boyutlu çarpım kümesi denir ve

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.3 [37]

$\{A_t : t \in T\}$, boş olmayan kümelerin ailesi ise

$$A = \{x_t, t \in T : x_t \in A_t, \text{ her } t \in T \text{ için}\}$$

Kümesine sonsuz boyutlu çarpım kümesi denir. Burada T bir sonsuz indeks kümesidir.

Tanım 2.1.4

$0 < r \leq 1$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere

$$\forall x \in X \text{ için } p(x) = \begin{cases} r, & x = x_0 \text{ ise} \\ 0, & x \neq x_0 \text{ ise} \end{cases}$$

Şeklinde tanımlı $p : X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonunun belirttiği p bulanık kümesine, X 'in bulanık noktası, x_0 'a p bulanık noktasının dayanağı, r ye de p bulanık noktasının değeri denir.

Tanım 2.1.5

Bir A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu μ_A olsun. Eğer

$$\forall x \in X \text{ için } p(x) \leq \mu_A(x)$$

ise, p bulanık noktası A bulanık kümesine ait denir.

Tanım 2.1.6

A ve B , X 'in bulanık alt kümeleri ve bu bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları μ_A ve μ_B olsun.

i) Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise $A = B$ dir.

ii) Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $A \subseteq B$ dir.

X 'in üyelik fonksiyonu olarak her $x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ ve boş kümenin üyelik fonksiyonu olarak da $\mu_\emptyset(x) = 0$ alalım.

X 'in A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonlarını μ_A ve μ_B ile gösterelim.

$\forall x \in X$ için,

$$\max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \mu_A \vee \mu_B(x)$$

ve

$$\min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A \wedge \mu_B(x)$$

şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.1.7

A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun.

i) Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ ise $A \cup B = C$ dir.

ii) Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_K(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ ise $A \cap B = K$ dir.

Tanım 2.1.8

X in bulanık kümelerinin bir ailesi $\{A_i\}_{i \in I}$ olmak üzere bunların birleşimi ve arakesiti sırasıyla

$$\text{Eğer } \forall x \in X \text{ için } \mu_C(x) = \bigvee_{i \in I} \mu_{A_i}(x) = \text{eküs } \mu_{A_i}(x) \text{ ise } C = \bigcup_{i \in I} A_i$$

ve

$$\text{Eğer } \forall x \in X \text{ için } \mu_K(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_{A_i}(x) = \text{ebas } \mu_{A_i}(x) \text{ ise } K = \bigcap_{i \in I} A_i$$

şeklinde ifade edilir. Burada (eküs: en küçük üst sınır; ebas: en büyük alt sınır) anlamındadır.

Tanım 2.1.9 [36]

X in bir bulanık kümesi A ve bunun üyelik fonksiyonu μ_A ise, A nın A^c komplementi

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

olmak üzere $\mu_{A^c}(x): X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile verilir.

Tanım 2.1.10 [37]

X in A ve B bulanık kümeleri için,

$$A \setminus B = A \cap B^c, A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

olarak tanımlanır.

X 'in bulanık kümeleri arasındaki birleşim ve arakesit işlemlerindeki özellikler, belirtili kümelerin birleşim ve arakesit işlemlerindeki özelliklerle, aşağıdaki iki özellik hariç, aynıdır.

Belirtili kümelerde;

$$A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = X$$

olmasına karşın, bulanık kümelerde,

$$A \cap A^c \neq \emptyset, A \cup A^c \neq X$$

olabilir.

Örnek 2.1.1

$\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \frac{1}{3}$ ise $\mu_{A^c}(x) = \frac{2}{3}$ olur.

$$\mu_{A \cap A^c} = \min \{ \mu_A(x), \mu_{A^c}(x) \} = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\mu_{A \cup A^c} = \max \{ \mu_A(x), \mu_{A^c}(x) \} = \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow A \cup A^c \neq X.$$

X üzerinde tanımlı bütün bulanık kümelerin ailesini $M(X)$ ile göstereceğiz. Yani

$$M(X) = [0,1]^X$$

Ayrıca $M(X)$ kümesi sonsuz bir kümedir ($X \neq \emptyset$).

Tanım 2.1.11 [36]

X 'in $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ bulanık kümelerini göz önüne alalım. X^n 'nin $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ bulanık kümesi,

$$\mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} \left\{ \mu_{A_i}(x_i) \right\}$$

olmak üzere $\mu_A : X^n \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile verilir.

Tanım 2.1.12

$\{A_1, A_2, \dots\}$ (veya kısaca) $\{A_n\}$ bir kümeler dizisi olsun. n 'nin sonsuz değerleri için A_n 'ye ait olan X 'in bu tür bütün noktalarının kümesine $\{A_n\}$ 'nin üst limiti denir ve

$$\lim_n \sup A_n$$

ile gösterilir. n 'nin sonlu değerleri için A_n 'ye ait olan X 'in bütün noktalarının kümesine de $\{A_n\}$ 'nin alt limiti denir ve

$$\lim_n \inf A_n$$

ile gösterilir.

Ön Teorem 2.1.1

$$\lim_n \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \quad \lim_n \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \text{ dir.}$$

Örnek 2.1.2

$$X = \{a, b\},$$

$$A_n = \begin{cases} \{a\}, & n \text{ çift ise} \\ \{b\}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\{A_n\}$ küme dizisi verilsin. Bu durumda $\lim_n \sup A_n = X$ ve $\lim_n \inf A_n = \emptyset$ dir.

Örnek 2.1.3

$$X = (-\infty, \infty)$$

$$A_1 = [0, 1), A_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right), A_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right), A_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right), A_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), A_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), A_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right), \\ A_8 = \left[0, \frac{1}{8}\right), \dots$$

şeklinde tanımlanan $\{A_n\}$ küme dizisi verilsin. Bu durumda

$$\lim_n \sup A_n = [0, 1) \text{ ve } \lim_n \inf A_n = \emptyset$$

dir.

Önerme 2.1.1 [37]

$$\lim_n \inf A_n \subset \lim_n \sup A_n \text{ dir.}$$

Eğer, $\lim_n \inf A_n = \lim_n \sup A_n$ ise, bu durumda bu küme için $\lim_n A_n$ notasyonu kullanılacaktır. Böylece $\{A_n\}$ 'nin limiti vardır ve bu kümeye $\{A_n\}$ 'nin limiti denilecektir.

$$\lim_n A_n = A \text{ veya } A_n \rightarrow A \text{ yazılır.}$$

Tanım 2.1.13

Eğer $A_n \subset A_{n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$ ise,

Böyle bir $\{A_n\}$ dizisine artandır denir,

Tanım 2.1.14

Eğer $A_n \supset A_{n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$ ise,

Böyle bir $\{A_n\}$ dizisine azalandır denir,

Artan ve azalan dizilere monoton diziler denir.

Önerme 2.1.2

Herhangi bir $\{A_n\}$ monoton dizisi için $\lim_n A_n$ var ve

$\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$ (artan için), $\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$ (azalan için) şeklindedir[52].

Genel olarak $\{A_n\}$ artıyor ve $\lim_n A_n = A$ ise $A_n \uparrow A$; benzer şekilde $\{A_n\}$ azalıyor ve $\lim_n A_n = A$ ise $A_n \downarrow A$ kullanılır.

Kümelerdeki işlemler ve kümelerin karakteristik(üyelik) fonksiyonlarına karşılık gelen ifadeleri aşağıdaki önerme ile verilecektir.

Önerme 2.1.3 [25]

$$1) \mu_{\bigcup_{t \in T} A_t} = \sup_{t \in T} \mu_{A_t} ,$$

özel olarak

$$\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A, \mu_B).$$

$$2) \mu_{\bigcap_{t \in T} B_t} = \inf_{t \in T} \mu_{B_t} ,$$

özel olarak

$$\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A, \mu_B).$$

$$3) \mu_{A^c} = 1 - \mu_A,$$

$$4) \mu_{A-B} = \mu_A - \min(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_A, 1 - \mu_B) = \max(0, \mu_A - \mu_B),$$

$$5) \mu_{\lim_n \sup A_n} = \lim_n \sup A_n,$$

$$\mu_{\lim_n \inf A_n} = \lim_n \inf A_n,$$

ve eğer $\lim_n A_n$ varsa o zaman

$$\mu_{\lim_n A_n} = \lim_n \mu_{A_n}$$

dır.

Tanım 2.1.15 [37]

$\mathfrak{R} \neq \emptyset$ bir kümeler sınıfı olsun.

Eğer $\forall A, B \in \mathfrak{R}$ için

$$A \cup B \in \mathfrak{R} \text{ ve } A \setminus B \in \mathfrak{R} \text{ ise,}$$

$\mathfrak{R}$ 'ye bir halka denir.

Örnek 2.1.4

X 'in bütün sonlu alt kümelerinin sınıfı bir halkadır.

Tanım 2.1.16 [37]

$\mathfrak{R} \neq \emptyset$ bir kümeler sınıfı olsun.

Eğer $\forall A, B \in \mathfrak{R}$ için

$$i) A \cup B \in \mathfrak{R}$$

$$ii) \forall A \in \mathfrak{R} \text{ için } A^c \in \mathfrak{R}$$

ise $\mathfrak{R}$ 'ye cebir denir.

Diğer bir ifadeyle cebir boş olmayan bir küme sınıfıdır, öyleki birleşim ve komplement işlemleri altında kapalıdır.

Tanım 2.1.17 [37]

$\varphi \neq \emptyset$ bir kümeler sınıfı olsun.

Eğer

i) $\forall E, F \in \varphi$ için $E \cap F \in \varphi$,

ii) $\forall E, F \in \varphi$ için $E \subset F$ olması durumunda φ 'nin bir sonlu $\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$ sınıfı var ve $E = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_n = F$, $D_i = C_i - C_{i-1} \in \varphi, i = 1, 2, \dots, n$ koşulları sağlanıyor ise, φ 'ye bir yarı halka denir.

Her halka bir yarı halkadır ve boş küme herhangi bir yarı halkaya aittir.

Tanım 2.1.18 [37]

$\varphi \neq \emptyset$ bir kümeler sınıfı olsun.

Eğer

i) $\forall A, B \in \varphi$ için $A \setminus B \in \varphi$,

ii) $\forall A_i \in \varphi \ i = 1, 2, \dots$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \varphi$

koşulları sağlanıyor ise, φ 'ye bir σ - halka denir.

Bir σ - halka, sayılabilir birleşim işlemleri altında kapalı olan bir halkadır.

Önerme 2.1.4 [37]

Bir σ - halka, sayılabilir kesişim işlemleri altında kapalıdır ve böylece φ bir σ - halka ve

$\{A_n\} \in \varphi$ bir küme dizisi ise o zaman

$\lim_n \sup A_n \in \varphi$ ve $\lim_n \inf A_n \in \varphi$ dir.

Tanım 2.1.19 [38]

$\varphi \neq \emptyset, \varphi \subset X$ olsun.

Eğer

i) $\emptyset \in \varphi$

ii) $\forall A \in \varphi$ için $A^c \in \varphi$

iii) $\{A_n\} \subset \varphi$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \varphi$

koşulları sağlanıyor ise, φ alt küme ailesine σ – *cebiri* denir.

Tanım 2.1.20 [37]

$M \neq \emptyset$ bir küme sınıfı olsun. Eğer her monoton $\{A_n\} \subset M$ dizisi için $\lim_n A_n \in M$ oluyorsa M 'ye monoton sınıf denir.

Önerme 2.1.5 [37]

Bir σ – *halka* bir monoton sınıftır.

Önerme 2.1.6 [37]

Eğer bir halka aynı zamanda bir monoton sınıf ise o zaman bu halka bir σ – *halkadır*.

Tanım 2.1.21 [39]

$\sigma \subset [0,1]^X$ alt ailesi verilsin. Eğer

i)

$\forall \alpha \in [0,1], \alpha$ sabit: $\underline{\alpha} \in \sigma$, $\underline{\alpha}$ bulanık küme ve $\underline{\alpha} \in \sigma$ öyle ki $\underline{\alpha} : X \rightarrow [0,1] \quad \underline{\alpha}(x) = \alpha$

dır.

ii) $\forall \mu \in \sigma$ için $\mu^c \in \sigma$

iii) $(\mu_n)_{n \in N} \in \sigma^N : \sup_{n \in N} \mu_n \in \sigma$

koşulları sağlanıyor ise σ 'ya X üzerinde bulanık σ -cebiri, $([0,1]^X, \sigma)$ ikilisine ise bulanık ölçülebilir uzay denir.

Tanım 2.1.22 [40]

$\mu \in [0,1]^X$, X 'in bir bulanık alt kümesi olmak üzere

$$\mu^0 = \{(x, y) \in X \times [0,1] : y < \mu(x)\}$$

ifadesine, μ üyelik fonksiyonu altındaki alan denir.

Bulanık Ölçümler [37]

$X \neq \emptyset$ bir küme, A , X 'in alt kümelerinin boştan farklı bir sınıfı ve $m: A \rightarrow [0, \infty]$ negatif olmayan, A üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir küme fonksiyonu olsun. Bu durumda;

$$\sup_{x \in \emptyset} \{x : x \in [0, \infty]\} = 0$$

$$\inf_{x \in \emptyset} \{x : x \in [0, \infty]\} = 1$$

$$\sum_{i \in \emptyset} A_i = 0, \text{ (burada } \{A_i\} \text{ bir reel sayı dizisidir.) olarak alalım.}$$

Tanım 2.1.23 [37]

$m: A \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu verildiğinde

i) $m(\emptyset) = 0, \emptyset \in A$ için,

ii) $A \in A, B \in A$ ve $A \subset B$ için $m(A) \leq m(B)$;

iii)

$\{A_n\} \subset A, A_1 \subset A_2 \subset \dots$; ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ için $\lim_n m(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ (alttan sürekli);

iv) $\{A_n\} \subset A, A_1 \supset A_2 \supset \dots$; $m(A_1) < \infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ için $\lim_n m(A_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

(üstten sürekli) ise; bu durumda m 'ye (X, A) üzerinde bir bulanık ölçüm denir.

Tanım 2.1.24

Eğer (X, A) üzerinde Tanım 2.1.23'deki (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlanıyorsa m 'ye alttan yarı sürekli bulanık ölçüm; (i), (ii) ve (iv) koşulları sağlanıyorsa m 'ye üstten yarı sürekli bulanık ölçüm; kısaca her ikisine birden yarı sürekli bulanık ölçüm denir.

X in, alt kümelerinin boş olmayan bir sınıfı olarak bir F σ – halkayı ele alalım.

Teorem 2.1.1

F bir σ – halka ve m F üzerinde bir sonlu bulanık ölçüm olsun. O zaman limiti var olan herhangi bir $\{A_n\} \subset F$ dizisi için

$$\lim_n m(A_n) = m(\lim_n A_n) \text{ dir.}$$

İspat

$\{A_n\}$, limiti var olan F 'deki kümeler dizisi olsun. Bu durumda

$$A = \lim_n A_n = \lim_n \sup A_n = \lim_n \inf A_n$$

yazılır. m 'nin sonluluk durumunu uygulayarak şu yazılır:

$$\begin{aligned} m(A) &= m(\lim_n \sup A_n) \\ &= \lim_n m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\ &= \lim_n \sup m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\ &\geq \lim_n \sup m(A_n) \\ &\geq \lim_n \inf m(A_n) \\ &\geq \lim_n \inf m\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\ &= \lim_n m\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\ &= m(\lim_n \inf A_n) \\ &= m(A). \end{aligned}$$

Böylece

$$\lim_n m(A_n) \text{ var ve } \lim_n m(A_n) = m(A)$$

dır.

L- Bulanık Kümeler

Bir X kümesi üzerindeki bir bulanık küme, üyelik derecesi “evet” veya “hayır” dan daha genel olan X kümesi üzerindeki karakteristik fonksiyonun genelleştirilmişinin bir türüdür. Bir optimizasyon probleminde L ; X içinden seçimin optimalliğinin derecesini ifade eder.

Tanım 2.1.25

Bir X kümesi üzerinde bir L bulanık kümesi $A: X \rightarrow L$ şeklinde tanımlı bir A fonksiyonudur, burada L bir latistir. Böylece bulanık kümelerin eşitliği onların fonksiyonlar olarak eşitliği olur.

Tanım 2.1.26

L^X X 'den L latisine olan fonksiyonların kümesi olsun.

$$A, B \in L^X, x \in X \text{ için,}$$
$$(A \vee B)(x) = A(x) \vee B(x)$$

ve

$$(A \wedge B)(x) = A(x) \wedge B(x)$$

ifadeleriyle L^X 'in kendisi de bir latis olur.

L^X 'deki sıralama

$$A \leq B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) \leq B(x) \text{ olarak verilir.}$$

Tam latisler için homomorfizma kavramı genel latislerden daha özeldir.

Önerme 2.1.7

L dağılımlı latist ise, L^X de dağılımlı latistir.

İspat

$f, g, h \in L^X$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}(f \wedge g) \vee h(t) &= (f(t) \wedge g(t)) \vee h(t) \\ &= (f(t) \vee h(t)) \wedge (g(t) \vee h(t)) \\ &= (f \vee h) \wedge (g \vee h)(t)\end{aligned}$$

dir.

2.2 Sezgisel Bulanık Kümeler

Bu bölümde genel olarak sezgisel bulanık küme kavramı ve işlemleri üzerinde durulacaktır [4],[41, 42, 43].

Tanım 2.2.1 [4,41]

X kümesi boş kümeden farklı bir küme olsun. Eğer X kümesi üzerinde iki tane eşleme(method) var ise

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mu_{\tilde{A}}(x)$$

ve

$$\nu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \nu_{\tilde{A}}(x)$$

öyle ki $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ o halde $\mu_{\tilde{A}}$ ve $\nu_{\tilde{A}}$, evrensel X kümesi üzerinde bir sezgisel $\tilde{A}$ bulanık kümesinin belirleyenleri(ya da karar vericileri) olarak adlandırılır, $\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \}$ ile gösterilir. $\mu_{\tilde{A}}$ ve $\nu_{\tilde{A}}$, $\tilde{A}$ 'nın sırasıyla üyelik fonksiyonu ve üyelik olmama fonksiyonlarıdır.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\nu_{\tilde{A}}(x)$ ise sırasıyla, $\tilde{A} \subseteq X$ 'ya ait olan bir x elemanının üyelik derecesi ve üyeliği olmama derecesidir. Evrensel X kümesi üzerindeki sezgisel bulanık kümeler $F(X)$ ile gösterilir. □

Uyarı 2.2.1

Tanım 2.2.1 'den, bir sezgisel bulanık kümenin, üyelik derecesi bulunan veya üyelik derecesi bulunmayan, birbirine az ya da çok bağımlı bir çift fonksiyon tarafından tanımlandığını görmekteyiz. Tek gereksinimi olan şey, üyelik derecesi bulunan veya bulunmayan toplamının 1'den daha büyük olmayışıdır.

Uyarı 2.2.2

Evrensel X kümesi sonlu olduğunda, yani, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, sezgisel bir $\tilde{A}$ kümesi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \langle x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1), \nu_{\tilde{A}}(x_1) \rangle + \langle x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2), \nu_{\tilde{A}}(x_2) \rangle + \dots + \\ &\langle x_n, \mu_{\tilde{A}}(x_n), \nu_{\tilde{A}}(x_n) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle x_j, \mu_{\tilde{A}}(x_j), \nu_{\tilde{A}}(x_j) \rangle\end{aligned}$$

“+” ve “ $\sum$ ” sembolleri reel sayıların cebirsel işlemlerindeki toplama anlamında kullanılmamaktadır.

Örnek 2.2.1

$\tilde{A}_0 = \{ \langle x_1, 0.3, 0.5 \rangle, \langle x_2, 0.4, 0.5 \rangle, \langle x_3, 0.6, 0.3 \rangle \}$, evrensel $X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesi üzerinde sezgisel bulanık bir küme olsun. $\tilde{A}_0$ 'nın anlamları aşağıdaki şekilde yorumlanabilir: $\tilde{A}_0$ 'a ait x_1 elemanının üyelik derecesi 0.3'tür, oysa üyelik olmama derecesi 0.5'tir, yani, $\mu_{\tilde{A}_0}(x_1)=0.3$ ve $\nu_{\tilde{A}_0}(x_1)=0.5$; $\tilde{A}_0$ 'a ait x_2 elemanının üyelik derecesi 0.4'tür oysa üyelik olmama derecesi 0.5'tir, yani, $\mu_{\tilde{A}_0}(x_2)=0.4$ ve $\nu_{\tilde{A}_0}(x_2)=0.5$; $\tilde{A}_0$ 'a ait x_3 elemanının üyelik derecesi 0.6'dır oysa üyelik olmama derecesi 0.3'tir, yani, $\mu_{\tilde{A}_0}(x_3)=0.6$ ve $\nu_{\tilde{A}_0}(x_3)=0.3$, bu yüzden, $\tilde{A}_0$ sezgisel bulanık kümesi şu şekilde gösterilebilir:

$$\tilde{A}_0 = \langle x_1, 0.3, 0.5 \rangle + \langle x_2, 0.4, 0.5 \rangle + \langle x_3, 0.6, 0.3 \rangle$$

Uyarı 2.2.3

Bazen, sonlu bir $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evrensel kümesi üzerinde, sezgisel bulanık bir $\tilde{A}_0$ kümesi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\tilde{A}_0 = \langle \mu_{\tilde{A}}(x_1), \nu_{\tilde{A}}(x_1) \rangle / x_1 + \langle \mu_{\tilde{A}}(x_2), \nu_{\tilde{A}}(x_2) \rangle / x_2 + \dots +$$

$$\langle \mu_{\tilde{A}}(x_n), \nu_{\tilde{A}}(x_n) \rangle / x_n$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle \mu_{\tilde{A}}(x_j), \nu_{\tilde{A}}(x_j) \rangle / x_j$$

$$\text{veya} = \frac{\langle \mu_{\tilde{A}}(x_1), \nu_{\tilde{A}}(x_1) \rangle}{x_1} + \frac{\langle \mu_{\tilde{A}}(x_2), \nu_{\tilde{A}}(x_2) \rangle}{x_2} + \dots + \frac{\langle \mu_{\tilde{A}}(x_n), \nu_{\tilde{A}}(x_n) \rangle}{x_n}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\langle \mu_{\tilde{A}}(x_j), \nu_{\tilde{A}}(x_j) \rangle}{x_j}, \quad \text{“ / ” ve “ - ” sembolleri reel sayıların cebirsel}$$

işlemlerindeki bölme anlamında kullanılmamaktadır.

Örnek 2.2.2

$X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde, yukarıda bahsettiğimiz sezgisel bulanık bir $\tilde{A}_0$ kümesi, aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\tilde{A}_0 = \langle 0.3, 0.5 \rangle / x_1 + \langle 0.4, 0.5 \rangle / x_2 + \langle 0.6, 0.3 \rangle / x_3$$

ve

$$\tilde{A}_0 = \frac{\langle 0.3, 0.5 \rangle}{x_1} + \frac{\langle 0.4, 0.5 \rangle}{x_2} + \frac{\langle 0.6, 0.3 \rangle}{x_3}$$

Uyarı 2.2.4

Genellikle, sezgisel bulanık bir kümede, bazı elemanların üyelik olma ve üyelik olmama derecelerinin her ikise de sıfıra eşitse, o zaman, eleman sezgisel bulanık kümede açık bir şekilde yazılmaz.

Örnek 2.2.3

$X'_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evrensel kümesi üzerinde, sezgisel bulanık bir $\tilde{A}'_0 = \{ \langle x_1, 0.3, 0.5 \rangle, \langle x_2, 0.4, 0.5 \rangle, \langle x_3, 0.6, 0.3 \rangle \}$ kümesi üzerinde düşünelim. Sezgisel bulanık $\tilde{A}'_0$ kümesi, $\tilde{A}'_0$ a ait olan x_4 elemanının üyelik derecesinin 0 olduğunu ve üyelik olmama derecesinin de aynı zamanda 0'a eşit olduğunu gösterir,

yani, $\mu_{\tilde{A}'_0}(x_4)=0$ ve $\nu_{\tilde{A}'_0}(x_4)=0$ dır.

Yukarıdaki işaretlere göre, x'_0 evrensel kümesi üzerindeki sezgisel bulanık $\tilde{A}'_0$ kümesi özetle aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\tilde{A}'_0 = \langle x_1, 0.3, 0.5 \rangle + \langle x_2, 0.4, 0.5 \rangle + \langle x_3, 0.6, 0.3 \rangle ,$$

$$\tilde{A}'_0 = \langle 0.3, 0.5 \rangle / x_1 + \langle 0.4, 0.5 \rangle / x_2 + \langle 0.6, 0.3 \rangle / x_3$$

ve

$$\tilde{A}'_0 = \frac{\langle 0.3, 0.5 \rangle}{x_1} + \frac{\langle 0.4, 0.5 \rangle}{x_2} + \frac{\langle 0.6, 0.3 \rangle}{x_3}$$

Uyarı 2.2.5

x_0 ve X'_0 özdeş olmadıkları için ; X'_0 evrensel kümesi üzerindeki sezgisel bulanık $\tilde{A}'_0$ kümesinin, x_0 evrensel kümesi üzerindeki sezgisel bulanık $\tilde{A}'_0$ kümesinden farklı olduğuna dikkat etmek önemlidir.

Uyarı 2.2.6

Evrensel X kümesi sonsuz ya da sürekli olduğunda, X üzerindeki sezgisel bulanık bir $\tilde{A}$ kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle ,$$

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \langle \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle / x$$

veya

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\langle \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle}{x}$$

İntegral sembolü olan “ $\int$ ” integralin özelliklerine sahip değildir oysa üyelik olma ve olmama derecelerine karşılık gelen çiftleri $\langle \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle$, evrensel X kümesi üzerinde bütün x elemanlarını gösterir(temsil eder).

Örnek 2.2.4

$\tilde{A}_1 = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}_1}(x), \nu_{\tilde{A}_1}(x) \rangle | x \in [1,4] \}$, $X_1 = [1,4]$ sürekli evrensel kümesi üzerinde, kapalı aralıkta sezgisel bulanık bir küme olsun, üyelik olma ve olmama fonksiyonları aşağıdaki şekilde verilsin.

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} x-1 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x = 2) \\ (4-x)/2 & (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

ve

$$\nu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} 0.8(2-x) & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (x = 2) \\ 0.3(x-2) & (2 < x \leq 4), \end{cases}$$

Şekil 2.2.1’de gösterildiği gibi.

$X_1 = [1,4]$ evrensel kümesi üzerinde, yukarıdaki sezgisel bulanık $\tilde{A}_1$ kümesi, alternatif olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

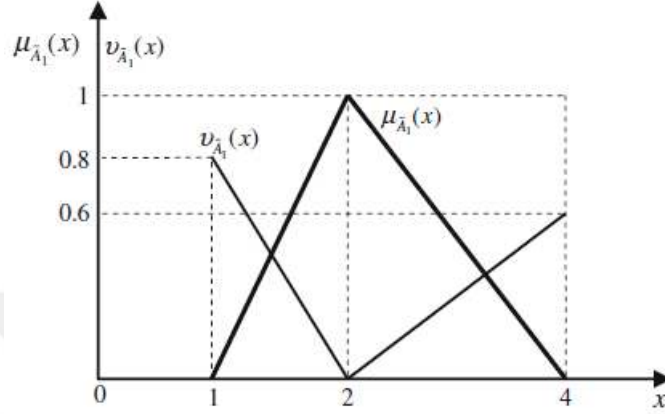
$$\tilde{A}_1 = \int_{x \in [1,4]} \langle x, \mu_{\tilde{A}_1}(x), \nu_{\tilde{A}_1}(x) \rangle,$$

$$\tilde{A}_1 = \int_{x \in [1,4]} \langle \mu_{\tilde{A}_1}(x), \nu_{\tilde{A}_1}(x) \rangle / x$$

ve

$$\tilde{A}_1 = \int_{x \in [1,4]} \frac{\langle \mu_{\tilde{A}_1}(x), \nu_{\tilde{A}_1}(x) \rangle}{x}$$

Şekil 2.2.1 $\tilde{A}_1$ sezgisel bulanık kümesinin üyelik olma ve olmama fonksiyonları



Uyarı 2.2.7

Kolaylık olması açısından, eğer sezgisel bulanık bir $\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \}$ kümesi üyelik olma ve üyelik olmama dereceleri 0'a eşit olanların dışında sadece bir elemana sahipse, yani, $|\tilde{A}|$ 'nin eleman sayısı 1'e eşit olur, o zaman çoğunlukla sezgisel bulanık teklik(singleton) $\tilde{A}$ kümesi

$$\tilde{A} = \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle$$

veya kısaca

$$\tilde{A} = \langle \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \text{ şeklinde yazılır.}$$

Örnek 2.2.5

$X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde, sezgisel bulanık olan $\tilde{A}_0'' = \{ \langle x_1, 0.5, 0.4 \rangle \}$ kümesi teklik(singleton) bir kümedir, $\tilde{A}_0'' = \langle x_1, 0.5, 0.4 \rangle$ veya $\tilde{A}_0'' = \langle 0.5, 0.4 \rangle$ olarak da ifade edilebilir.

Uyarı 2.2.8

X evrensel kümesi üzerindeki $\tilde{A}$ sezgisel bulanık teklik kümesinin (singleton) bir küme olması, X 'in kendisinin de aynı zamanda tek elemanlı bir küme olduğu anlamına gelmez.

Örnek 2.2.6

Daha önce bahsettiğimiz $X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerindeki sezgisel bulanık olan $\tilde{A}_0'' = \langle x_1, 0.5, 0.4 \rangle$ kümesi tek elemanlıdır oysa X_0 , 3 elemana sahip bir kümedir, yani, $|X_0|=3$.

Uyarı 2.2.9

Açık bir şekilde görülmektedir ki, herhangi bir bulanık küme

$\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ olarak gösterilebilir. Diğer taraftan herhangi bir sezgisel bulanık $\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \}$ kümesi için, eğer bütün x elemanları, $x \in X$, $\mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) = 1$ koşulunu sağlıyorsa, o zaman bulanık küme olan

$\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ olarak da gösterilebilir. Bu yüzden sezgisel bulanık küme, bulanık kümenin genişletilmiş halidir. Ayrıca bulanık küme sezgisel bulanık kümenin özel bir halidir.

Örnek 2.2.7

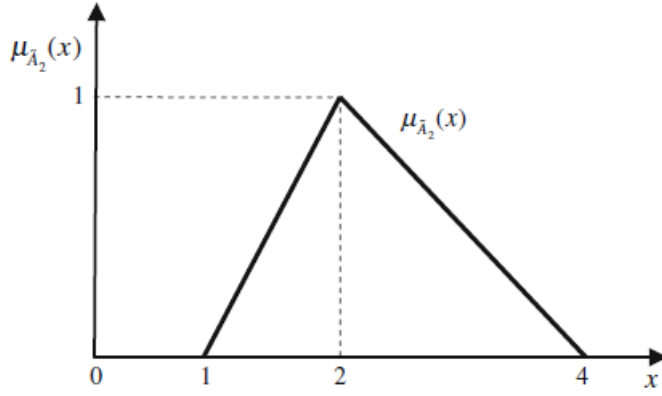
$\tilde{A}_2$, üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen, “2 yaklaşımlı”, $X_1 = [1, 4]$ sürekli evrensel kümesi üzerinde bulanık bir kümedir.

Şekil 2.2.2’de gösterilmiştir

$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} x-1 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x = 2) \\ (4-x)/2 & (2 < x \leq 4), \end{cases}$$

Üyelik olma ve olmama fonksiyonları aşağıdaki gibi verilen $\tilde{A}_2$ bulanık kümesi, $\tilde{A}_2 = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}_2}(x), \nu_{\tilde{A}_2}(x) \rangle \mid x \in [1, 4] \}$ sezgisel bulanık kümesi olarak gösterilebilir:

Şekil 2.2.2 $\tilde{A}_2$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu



$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} x - 1 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x = 2) \\ (4 - x)/2 & (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

ve

$$\nu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} 2 - x & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (x = 2) \\ (x - 2)/2 & (2 < x \leq 4), \end{cases}$$

Şekil 2.2.3 te görülmektedir.

$\tilde{A}_2 = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}_2}(x), \nu_{\tilde{A}_2}(x) \rangle \mid x \in [1, 4] \}$ ifadesinden kolay bir şekilde görülmektedir ki $\tilde{A}_2$ sezgisel bulanık bir kümedir. Buna rağmen $\tilde{A}_2$ 'ye ait bütün x elemanları için, $x \in [1, 4]$, üyelik olma ve olmama dereceleri şu koşulu sağladığı açıktır: $\mu_{\tilde{A}_2}(x) + \nu_{\tilde{A}_2}(x) = 1$. Bu yüzden $\tilde{A}_2$ esasen bulanık kümedir, şekil 2.2.2 de gösterilmektedir.

Uyarı 2.2.10

Evrensel X kümesi üzerindeki herhangi bir sezgisel bulanık $\tilde{A}$ kümesi için

$$\pi_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x),$$

$\tilde{A}$ 'da bir x elemanının kararsızlık derecesi olur. $\tilde{A}$ 'ya ait olsun ya da olmasın x elemanının kararsızlık üyelik derecesidir.

Açıkça görülmektedir ki, herhangi bir $x \in X$ için, $0 \leq \pi_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ 'dir. Özellikle $\pi_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) = 0$, X evrensel kümesi üzerinde, herhangi bir bulanık $\tilde{A}$ kümesi için her zaman geçerlidir.

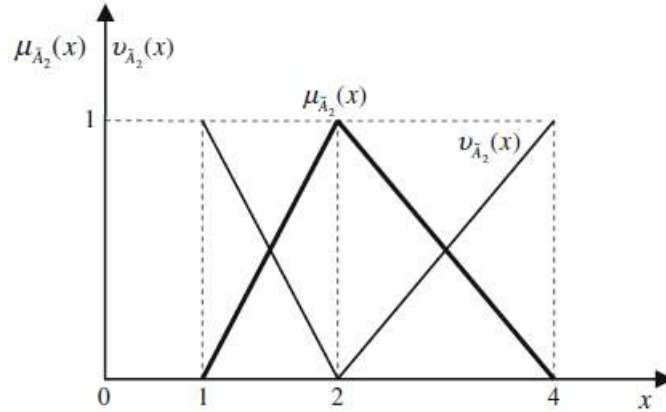
Örnek 2.2.8

Daha önce bahsettiğimiz şekil 2.2.2 de gösterilen bulanık $\tilde{A}_2$ kümesi açıkça yukarıdaki şartı sağlamaktadır.

Uyarı 2.2.11

Herhangi bir bulanık $\tilde{A}$ kümesi için, onun tek üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$, x için sadece $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 'in kanıtı değil aynı zamanda x 'e karşı $1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ 'nın kanıtıdır. Ama bu, ne destek ne de karşıt olma durumlarının kanıtı değildir. Diğer bir deyişle, bulanık küme ne destek olma ne de karşıt olma belirsizlik özelliğini göstermez. Buna rağmen herhangi bir sezgisel $\tilde{A}$ kümesi için

Şekil 2.2.3 Sezgisel bulanık olan $\tilde{A}_2$ kümesinin üyelik olma ve olmama fonksiyonları



üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$, üyelik olmama derecesi $\nu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ ve kararsızlık derecesi $\pi_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$, $\tilde{A}$ 'ya ait x 'ler için kanıt sunabilir. $\tilde{A}$ 'ya ait olan x için kanıt ve $\tilde{A}$ 'ya ait x için ne destek ne de karşıtlık sunabilir. Bu yüzden sezgisel bulanık küme etkin bir şekilde tutarsızlık ve bulanıklık özelliğini, bulanık küme yeteneğini yayabilir. Sezgisel bulanık kümesi "aynı zamanda şunu da" ya da "ne bunu ne de diğerini" özelliklerini içerir.

Örnek 2.2.9

Oy verme işlemi güzel bir örnek olabilir. Oy kullananları 3 kategoride değerlendirebiliriz: oy kullananlar, karşı olanlar, çekimser olanlar. Bu yüzden sezgisel mantık kümesinin anlamları basit bir oy kullanma örneğiyle sezgisel olarak yorumlanabilir. Örneğin $\tilde{A}_3 = \langle x, 0.5, 0.3 \rangle$ sezgisel bulanık kümesi üzerinde düşünelim, x aday olanlardan birisi. O zaman kolay bir şekilde; üyelik olma derecesi $\mu_{\tilde{A}_3}(x) = 0.5$ ve üyelik olmama derecesi $\nu_{\tilde{A}_3}(x) = 0.3$ bundan dolayı kararsızlık derecesi $\pi_{\tilde{A}_3}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}_3}(x) - \nu_{\tilde{A}_3}(x) = 0.2$ bulunur. Demek ki $\tilde{A}_3$ sezgisel bulanık kümesine ait olan x adayının(yani elemanın) üyelik derecesi 0.5 hâlbuki x' in üyelik olmama derecesi 0.3'tür. O zaman $\tilde{A}_3$ 'e ait olsun ya da olmasın 0.2' ye eşittir. Bu yüzden $\tilde{A}_3$ sezgisel bulanık kümesi aşağıdaki oy kullanma senaryosu ile anlatılabilir. Orada x adayı üzerine oy kullanan 10 tane kişi olduğunu varsayın. Oy pusulası sonucu aşağıdaki şekilde verilsin: x için oy kullananların sayısı 5, x' e karşı oy kullananların sayısı 3'e eşittir , çekimser olanların sayısı 2'dir. 10 tane oy kullanılan yukarıdaki pusula sonucu oransal formatta açıklanabilir: x için oy kullananların oranı $5/10 = 0.5$, x'e karşı oy kullananların oranı $3/10 = 0.3$, çekimser olanların(ya da oy kullanmayanların) oranı $2/10 = 0.2$ dir. Bu üç oransal değer sezgisel bulanık $\tilde{A}_3$ kümesinin, sırasıyla, üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}_3}(x)$, üye olmama derecesi $\nu_{\tilde{A}_3}(x)$ ve kararsızlık derecesi $\pi_{\tilde{A}_3}(x)$ 'e karşılık gelir. Sonuç olarak, bu oy kullanma sonucu, sezgisel bulanık $\tilde{A}_3$ kümesi ile uygun bir şekilde belirtilebilir. Ama bulanık küme kullanılmış olsaydı o zaman yukarıdaki oy kullanma sonucu $\tilde{A}_4 = 0.5/x$ bulanık kümesi ile belirtilebilirdi. Yani, $\tilde{A}_4$ bulanık kümesine ait x adayının (elemanın) üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}_4}(x) = 0.5$ 'tir. Bulanık küme tanımına göre $\tilde{A}_4$ 'e ait olmayan x elemanın üye olmama derecesi aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir:

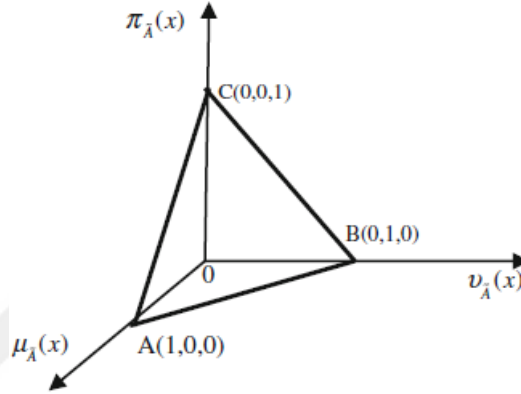
$$\nu_{\tilde{A}_4}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}_4}(x) = 1 - 0.5 = 0.5,$$

Oysa kararsızlık derecesi aşağıdaki gibi elde edilebilir

$$\pi_{\tilde{A}_4}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}_4}(x) - \nu_{\tilde{A}_4}(x) = 1 - 0.5 - 0.5 = 0$$

Bu yüzden $\tilde{A}_4$ bulanık kümesi daha önce bahsedilen oy kullanma işlemi gibi iyi bir şekilde değerlendirilemediği görülmektedir. Bundan dolayı sezgisel bulanık kümenin çekimser olma veya oy kullanmama gibi nötr durumları içeren bulanıklık durumlarında uygun ve elverişli olduğu görülmektedir.

Şekil 2.2.4 $\tilde{A}$ sezgisel bulanık kümesinin geometrik yorumu



Uyarı 2.2.12

Alternatif olarak, X evrensel kümesi üzerinde herhangi sezgisel bulanık $\tilde{A}$ kümesi şekil 2.2.4'te olduğu gibi üç boyutlu uzayda geometrik yoruma sahip olabilir. Sezgisel bulanık $\tilde{A}$ kümesini tanımlayan üyelik olma, üyelik olmama ve kararsızlık derecelerinin herhangi bir kombinasyonu (yani $\mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x), \pi_{\tilde{A}}(x)$) ABC üçgeninin içinde gösterilebilir. Aynı şekilde $\tilde{A}$ sezgisel bulanık kümesine ait her bir x elemanı ABC üçgenine ait bir nokta $(\mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x), \pi_{\tilde{A}}(x))$ olarak gösterilebilir. Bu yüzden ABC üçgeninin içindeki her bir nokta iyi tanımlanmış sezgisel bulanık kümesine ayrı ayrı karşılık gelir. A noktası sezgisel bulanık kümesine ait olan elemanları tam olarak göstermektedir.(yani $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$) B noktası sezgisel bulanık kümesine ait olmayanları tam olarak göstermektedir.(yani $\nu_{\tilde{A}}(x)=1$) C noktası kararsızlık derecesi $\pi_{\tilde{A}}(x)=1$ olan elemanları gösterir yani bizim onların sezgisel bulanık bir kümeye ait olup olmadıklarını söyleyemediğimiz. Sezgisel bulanık bir kümeyi oluşturan değerlerin herhangi diğer bir kombinasyonu ABC üçgeninin içinde gösterilebilir. Özellikle herhangi bir sezgisel bulanık $\tilde{A}$ kümesinin kararsızlık derecesi 0 'a eşitse, yani $\pi_{\tilde{A}}(x) = 0$ ise o zaman AB doğrusu üzerinde bire bir noktaya karşılık gelen bulanık bir kümeye dönüşür.

Sezgisel Bulanık Kümeler üzerinde İşlemler

Atanassov [42,43] küme teorisi işlemlerine göre, ilk olarak sezgisel bulanık kümeler üzerine aşağıdaki işlemleri tanımladı.

Tanım 2.2.2

Atanassov varsayar ki $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ X evrensel kümesi üzerinde herhangi bir sezgisel bulanık kümelerdir ve $\lambda > 0$ keyfi bir reel sayıdır. Sezgisel bulanık kümeler üzerindeki işlemler aşağıdaki gibi koşullara bağlıdır:

(1) İki sezgisel bulanık kümede kapsama:

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \text{ ve } \nu_{\tilde{A}}(x) \geq \nu_{\tilde{B}}(x) \text{ dir.}$$

$\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ şu anlamdadır; $\tilde{A}$ sezgisel bulanık kümesi $\tilde{B}$ sezgisel bulanık kümesi tarafından kapsanır veya $\tilde{B}$ kümesi $\tilde{A}$ kümesini kapsar. Aynı şekilde,

$$\tilde{A} \supseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ ve } \nu_{\tilde{B}}(x) \geq \nu_{\tilde{A}}(x) \text{ dir.}$$

(2) İki sezgisel bulanık kümenin eşitliği:

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \text{ ve } \nu_{\tilde{A}}(x) = \nu_{\tilde{B}}(x) \text{ dir.}$$

$\tilde{A} = \tilde{B}$ şu anlamdadır; $\tilde{A}$ sezgisel bulanık kümesi $\tilde{B}$ sezgisel bulanık kümesine eşittir. Buna alternatif olarak $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \text{ ve } \tilde{A} \supseteq \tilde{B}$ dir.

(3) Bir sezgisel bulanık kümenin komplementi:

$$\tilde{A}^c = \{ \langle x, \nu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \}.$$

(4) İki sezgisel bulanık kümenin arakesiti:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \vee \nu_{\tilde{B}}(x) \rangle \mid x \in X \} \text{ dir.}$$

Buradaki “ $\wedge$ ” ve “ $\vee$ ” sembolleri sırasıyla minimum ve maksimum operatörleri temsil eder.

(5) Sezgisel bulanık kümelerin birleşimi:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \wedge \nu_{\tilde{B}}(x) \rangle \mid x \in X \} \text{ dir.}$$

(6) İki sezgisel bulanık kümenin toplamı:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x)\nu_{\tilde{B}}(x) \rangle \mid x \in X \} \text{ dir.}$$

(7) İki sezgisel bulanık kümenin çarpımı:

$$\tilde{A}\tilde{B} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{B}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)\nu_{\tilde{B}}(x) \rangle \mid x \in X \} \text{ dir.}$$

(8) Bir sezgisel bulanık kümenin bir reel sayı ile çarpımı:

$$\lambda \tilde{A} = \{ \langle x, 1 - (1 - \mu_{\tilde{A}}(x))^\lambda, (\nu_{\tilde{A}}(x))^\lambda \rangle \mid x \in X \} \text{ dir.}$$

(9) Bir sezgisel bulanık kümenin kuvveti:

$$\tilde{A}^\lambda = \{ \langle x, (\mu_{\tilde{A}}(x))^\lambda, 1 - (1 - \nu_{\tilde{A}}(x))^\lambda \rangle \mid x \in X \} \text{ dir.}$$

Tanım 2.2.2 nin (1) ve (2) işlemlerinden “ $\subseteq$ ” ve “ $\supseteq$ ” arasındaki kapsama ilişkilerini tam manasıyla aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \text{ ve } \tilde{A} \neq \tilde{B} \text{ dir.}$$

Öte yandan;

$$\tilde{B} \subset \tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \text{ ve } \tilde{A} \neq \tilde{B} \text{ dir.}$$

Tanım 2.2.2 nin (1) işleminden kolayca görülür ki; Sezgisel bulanık kümeler üzerinde “ $\subseteq$ ” ve “ $\supseteq$ ” arasındaki kapsama ilişkileri kısmi sıralama (ya da sıralama bağıntısı) dir. Yani şöyle ki, “ $\subseteq$ ” ve “ $\supseteq$ ” yansıma, ters simetri ve geçişlilik özelliklerini sağlar. Bununla birlikte, “ $\subseteq$ ” ve “ $\supseteq$ ” sezgisel bulanık kümeler üzerinde tam sıralı değildir.

Örnek 2.2.10

$X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde

$$\tilde{A}_0 = \langle x_1, 0.3, 0.5 \rangle + \langle x_2, 0.4, 0.5 \rangle + \langle x_3, 0.6, 0.3 \rangle \text{ ve}$$

$$\tilde{B}_0 = \langle x_1, 0.2, 0.4 \rangle + \langle x_2, 0.5, 0.4 \rangle + \langle x_3, 0.5, 0.1 \rangle$$

iki sezgisel bulanık kümedir. Aşikâr bir şekilde $\tilde{A}_0$, $\tilde{B}_0$ kümesini kapsamaz ve $\tilde{B}_0$, $\tilde{A}_0$ kümesini kapsamaz. Buna ek olarak, sezgisel bulanık kümeler üzerinde “ $\subseteq$ ” ve “ $\supset$ ” kesin kapsama ilişkilerinin yansıma özeliğini sağlamadığını görmek kolaydır.

X evrensel kümesi üzerinde herhangi bir $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ sezgisel bulanık kümeleri için, Tanım 2.2.2 nin (1), (4) ve (5) işlemlerinden bu iki kümenin arakesit ve birleşiminin aşağıdaki kapsama bağıntılarını sağladığı kolay bir şekilde elde edilir (veya türetilir):

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B} \text{ ve } \tilde{A} \cap \tilde{B} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}.$$

Örnek 2.2.11

$X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde

$$\tilde{A}_0 = \langle x_1, 0.3, 0.5 \rangle + \langle x_2, 0.4, 0.5 \rangle + \langle x_3, 0.6, 0.3 \rangle \text{ ve}$$

$$\tilde{B}_0 = \langle x_1, 0.2, 0.4 \rangle + \langle x_2, 0.5, 0.4 \rangle + \langle x_3, 0.5, 0.1 \rangle$$

iki sezgisel bulanık küme olsun. $\tilde{A}_0^c$, $\tilde{A}_0 \cap \tilde{B}_0$, $\tilde{A}_0 \cup \tilde{B}_0$, $\tilde{A}_0 + \tilde{B}_0$, $\tilde{A}_0 \tilde{B}_0$, $2\tilde{A}_0$ ve $\tilde{A}_0^2$ hesaplayınız.

Çözüm

$\tilde{A}_0$ bulanık kümesi ve Tanım2.2.2 nin (3) işlemine göre aşağıdakini yazabiliriz:

$$\tilde{A}_0^c = \{ \langle x, \nu_{\tilde{A}_0}(x), \mu_{\tilde{A}_0}(x) \rangle \mid x \in X_0 \} = \langle x_1, 0.5, 0.3 \rangle + \langle x_2, 0.5, 0.4 \rangle + \langle x_3, 0.3, 0.6 \rangle$$

dır.

$\tilde{A}_0$ ve $\tilde{B}_0$ sezgisel bulanık kümeleri ve Tanım2.2.2 nin (4) işlemine göre aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 \cap \tilde{B}_0 &= \langle x_1, 0.3 \wedge 0.2, 0.5 \vee 0.4 \rangle + \langle x_2, 0.4 \wedge 0.5, 0.5 \vee 0.4 \rangle + \langle x_3, 0.6 \wedge 0.5, 0.3 \vee 0.1 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.2, 0.5 \rangle + \langle x_2, 0.4, 0.5 \rangle + \langle x_3, 0.5, 0.3 \rangle \text{ dür.} \end{aligned}$$

$\tilde{A}_0$ ve $\tilde{B}_0$ sezgisel bulanık kümeleri ve Tanım2.2.2 nin (5) işlemine göre aşağıdakini yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 \cup \tilde{B}_0 &= \langle x_1, 0.3 \vee 0.2, 0.5 \wedge 0.4 \rangle + \langle x_2, 0.4 \vee 0.5, 0.5 \wedge 0.4 \rangle + \langle x_3, 0.6 \vee 0.5, 0.3 \wedge 0.1 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.3, 0.4 \rangle + \langle x_2, 0.5, 0.4 \rangle + \langle x_3, 0.6, 0.1 \rangle \text{ dir.}\end{aligned}$$

$\tilde{A}_0$ ve $\tilde{B}_0$ sezgisel bulanık kümeleri ve Tanım 2.2.2 nin (6) işlemine göre aşağıdakini elde ederiz: $\tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 =$

$$\begin{aligned}&\langle x_1, 0.3 + 0.2 - 0.3 \times 0.2, 0.5 \times 0.4 \rangle + \langle x_2, 0.4 + 0.5 - 0.4 \times 0.5, 0.5 \times 0.4 \rangle + \langle x_3, 0.6 + 0.5 - 0.6 \times 0.5, 0.3 \times 0.1 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.44, 0.2 \rangle + \langle x_2, 0.7, 0.2 \rangle + \langle x_3, 0.8, 0.03 \rangle \text{ dür.}\end{aligned}$$

$\tilde{A}_0$ ve $\tilde{B}_0$ sezgisel bulanık kümeleri ve Tanım 2.2.2 nin (7) işlemine göre aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 \tilde{B}_0 &= \\ &\langle x_1, 0.3 \times 0.2, 0.5 + 0.4 - 0.5 \times 0.4 \rangle + \langle x_2, 0.4 \times 0.5, 0.5 + 0.4 - 0.5 \times 0.4 \rangle + \langle x_3, 0.6 \times 0.5, 0.3 + 0.1 - 0.3 \times 0.1 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.06, 0.7 \rangle + \langle x_2, 0.2, 0.7 \rangle + \langle x_3, 0.3, 0.37 \rangle \text{ dir.}\end{aligned}$$

$\tilde{A}_0$ ve $\tilde{B}_0$ sezgisel bulanık kümeleri ve Tanım 2.2.2 nin (8) işlemine göre aşağıdakini yazabiliriz:

$$\begin{aligned}2\tilde{A}_0 &= \\ &\langle x_1, 1 - (1 - 0.3)^2, (0.5)^2 \rangle + \langle x_2, 1 - (1 - 0.4)^2, (0.5)^2 \rangle + \langle x_3, 1 - (1 - 0.6)^2, (0.3)^2 \rangle \\ &= \langle x_1, 1 - 0.49, 0.25 \rangle + \langle x_2, 1 - 0.36, 0.25 \rangle + \langle x_3, 1 - 0.16, 0.09 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.51, 0.25 \rangle + \langle x_2, 0.64, 0.25 \rangle + \langle x_3, 0.84, 0.09 \rangle \text{ dur.}\end{aligned}$$

$\tilde{A}_0$ ve $\tilde{B}_0$ sezgisel bulanık kümeleri ve Tanım 2.2.2 nin (9) işlemine göre aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0^2 &= \\ &\langle x_1, (0.3)^2, 1 - (1 - 0.5)^2 \rangle + \langle x_2, (0.4)^2, 1 - (1 - 0.5)^2 \rangle + \langle x_3, (0.6)^2, 1 - (1 - 0.3)^2 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.09, 1 - 0.25 \rangle + \langle x_2, 0.16, 1 - 0.25 \rangle + \langle x_3, 0.36, 1 - 0.49 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.09, 0.75 \rangle + \langle x_2, 0.16, 0.75 \rangle + \langle x_3, 0.36, 0.51 \rangle \text{ dir.}\end{aligned}$$

2.3 Nötrosofik Kümeler, Tekil değerli Nötrosofik Kümeler ve Aralık Değerli Nötrosofik Kümeler

Tanım 2.3.1 [44]

X , x ile gösterilen X de genel bir elemanı ile bir küme olsun. X de bir A nötrosofik kümesi bir $T_A(x)$ doğruluk üyelik fonksiyonu bir $I_A(x)$ kararsızlık üyelik fonksiyonu ve bir $F_A(x)$ yanlışlık üyelik fonksiyonu kullanılarak tanımlanır. $T_A(x)$, $I_A(x)$ ve $F_A(x)$ gerçek standart veya standart olmayan $]0^-, 1^+[$ 'nın alt kümeleridir öyle ki $T_A(x): X \rightarrow]0^-, 1^+[$, $I_A(x): X \rightarrow]0^-, 1^+[$ ve $F_A(x): X \rightarrow]0^-, 1^+[$ dir. $T_A(x)$, $I_A(x)$ ve $F_A(x)$ in toplamı üzerinde sınırlama yoktur. Bu yüzden $0^- \leq \sup T_A(x) + \sup I_A(x) + \sup F_A(x) \leq 3^+$ dir.

Tanım 2.3.2 [44]

$A \subseteq B$ olarak gösterilen bir A nötrosofik kümesi diğer bir B nötrosofik kümesinde içerilir $\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\inf T_A(x) \leq \inf T_B(x), \sup T_A(x) \leq \sup T_B(x)$, $\inf I_A(x) \leq \inf I_B(x), \sup I_A(x) \leq \sup I_B(x)$ ve $\inf F_A(x) \leq \inf F_B(x), \sup F_A(x) \leq \sup F_B(x)$ dir.

Nötrosofik küme'leri pratik problemlere uygulamak zor olduğu için, Ye[5] standart olmayan aralıkların Nötrosofik küme'lerini Nötrosofik küme'lerin işlemlerinin korunduğu standart aralıkların bir tür Tekil Değerli Nötrosofik küme'lerine indirgedi.

Tanım 2.3.3 [45]

X deki bir A nötrosofik kümesi reel standart $[0,1]$ aralığındaki tek olan alt aralıklar, alt kümeler olan $T_A(x)$, $I_A(x)$ ve $F_A(x)$ ile karakterize edilir öyle ki $T_A(x): X \rightarrow [0,1]$, $I_A(x): X \rightarrow [0,1]$ ve $F_A(x): X \rightarrow [0,1]$ dir. O zaman, A 'nın bir sadeleştirilmesi $A = \{ \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle : x \in X \}$ ile gösterilir ve A kümesi bir Tekil Değerli Nötrosofik küme olarak adlandırılır ve Nötrosofik küme'lerin bir alt sınıfıdır.

Tanım 2.3.4 [44]

X de bir A Aralık Değerli Nötrosofik küme'si(kısaca ADNK) bir $T_A(x)$ doğruluk üyelik fonksiyonu bir $I_A(x)$ kararsızlık üyelik fonksiyonu ve bir $F_A(x)$ yanlışlık üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. X deki her bir x noktası için;

$$T_A(x) = [\inf T_A(x), \sup T_A(x)], I_A(x) = [\inf I_A(x), \sup I_A(x)]$$

ve

$$F_A(x) = [\inf F_A(x), \sup F_A(x)] \subseteq [0,1]$$

ve $x \in X$ için $0 \leq \sup T_A(x) + \sup I_A(x) + \sup F_A(x) \leq 3$ dür. Sadece $[0,1]$ in alt birim aralığı değerlendirilir ve bu alt birim aralığı bir Nötrosofik küme'nin bir alt sınıfıdır. Bu yüzden bütün Aralık Değerli Nötrosofik küme'ler açık bir şekilde Nötrosofik küme'lerdir.

2.4 Aralık Değerli Nötrosofik Küme'lerin İşlemleri

Tanım 2.4.1 [46]

İki ADNK $a = \langle [\inf T_a(x), \sup T_a(x)], [\inf I_a(x), \sup I_a(x)], [\inf F_a(x), \sup F_a(x)] \rangle$

ve $b = \langle [\inf T_b(x), \sup T_b(x)], [\inf I_b(x), \sup I_b(x)], [\inf F_b(x), \sup F_b(x)] \rangle$ ve $\lambda > 0$

olsun. Aralık Değerli Nötrosofik sayı'lar için işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

(1)

$$\lambda a = \langle [1 - (1 - \inf T_a(x))^\lambda, 1 - (1 - \sup T_a(x))^\lambda], [(\inf I_a(x))^\lambda, (\sup I_a(x))^\lambda], [(\inf F_a(x))^\lambda, (\sup F_a(x))^\lambda] \rangle;$$

(2)

$$a^\lambda = \langle [(\inf T_a(x))^\lambda, (\sup T_a(x))^\lambda], [1 - (1 - \inf I_a(x))^\lambda, 1 - (1 - \sup I_a(x))^\lambda], [1 - (1 - \inf F_a(x))^\lambda, 1 - (1 - \sup F_a(x))^\lambda] \rangle;$$

(3)

$$a + b = \left\langle \left[\inf T_a(x) + \inf T_b(x) - \inf T_a(x) \cdot \inf T_b(x), \sup T_a(x) + \sup T_b(x) - \sup T_a(x) \cdot \sup T_b(x) \right], \left[\inf I_a(x) \cdot \inf I_b(x), \sup I_a(x) \cdot \sup I_b(x) \right], \left[\inf F_a(x) \cdot \inf F_b(x), \sup F_a(x) \cdot \sup F_b(x) \right] \right\rangle;$$

(4)

$$a.b = \left\langle \begin{aligned} &[\inf T_a(x). \inf T_b(x), \sup T_a(x). \sup T_b(x)], \\ &[\inf T_a(x) + \inf I_b(x) - \inf T_a(x). \inf I_b(x), \sup I_a(x) + \sup I_b(x) - \sup I_a(x). \sup I_b(x)], \\ &[\inf F_a(x) + \inf F_b(x) - \inf F_a(x). \inf F_b(x), \sup F_a(x) + \sup F_b(x) - \sup F_a(x). \sup F_b(x)] \end{aligned} \right\rangle.$$

Teorem 2.4.1 [46]

a, b ve c üç Aralık Değerli Nötrosofik Sayılar olsun ve

$$a = \langle [\inf T_a(x), \sup T_a(x)], [\inf I_a(x), \sup I_a(x)], [\inf F_a(x), \sup F_a(x)] \rangle,$$

$$b = \langle [\inf T_b(x), \sup T_b(x)], [\inf I_b(x), \sup I_b(x)], [\inf F_b(x), \sup F_b(x)] \rangle$$

$$c = \langle [\inf T_c(x), \sup T_c(x)], [\inf I_c(x), \sup I_c(x)], [\inf F_c(x), \sup F_c(x)] \rangle$$

olsun. O zaman aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$(1) \ a + b = b + a$$

$$(2) \ a.b = b.a$$

$$(3) \ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \lambda > 0$$

$$(4) \ (a.b)^\lambda = a^\lambda + b^\lambda, \lambda > 0$$

$$(5) \ \lambda_1 a + \lambda_2 a = (\lambda_1 + \lambda_2) a, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

$$(6) \ a^{\lambda_1} . a^{\lambda_2} = a^{\lambda_1 + \lambda_2}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

$$(7) \ (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(8) \ (a.b).c = a.(b.c).$$

Örnek 2.4.1

Eğer $a = \langle [0.7, 0.8], [0.0, 0.1], [0.1, 0.2] \rangle$ ve $b = \langle [0.4, 0.5], [0.2, 0.3], [0.3, 0.4] \rangle$ ve

$\lambda = 2$ ise o zaman:

$$(1) \ \lambda a = \langle [0.91, 0.96], [0, 0.01], [0.01, 0.04] \rangle;$$

$$(2) a^\lambda = \langle [0.49, 0.64], [0, 0.19], [0.19, 0.36] \rangle;$$

$$(3) a + b = \langle [0.82, 0.90], [0, 0.05], [0.03, 0.08] \rangle \text{ ve}$$

$$(4) a.b = \langle [0.28, 0.40], [0.20, 0.37], [0.37, 0.52] \rangle.$$

2.5 Bipolar Nötrosofik Kümeler

Tanım 2.5.1 [47]

X de bir bipolar nötrosofik A kümesi aşağıdaki gibi bir formda tanımlanır:

$$A = \left\{ \langle x, T^+(x), I^+(x), F^+(x), T^-(x), I^-(x), F^-(x) \rangle : x \in X \right\}.$$

Burada $T^+(x), I^+(x), F^+(x) : X \rightarrow [0, 1], T^-(x), I^-(x), F^-(x) : X \rightarrow [-1, 0]$.

Bir bipolar nötrosofik küme teorisi bir $x \in X$ in pozitif üyelik dereceleri $T^+(x), I^+(x), F^+(x)$ ve bazı zıt özellikleri ima etmek için negatif üyelik dereceleri $T^-(x), I^-(x), F^-(x)$ doğruluk üyelik, kararsızlık üyelik ve yanlışlık üyeliğini gösterir.

Tanım 2.5.2 [47]

$$A_1 = \left\{ \langle x, T_1^+(x), I_1^+(x), F_1^+(x), T_1^-(x), I_1^-(x), F_1^-(x) \rangle : x \in X \right\} \text{ ve}$$

$$A_2 = \left\{ \langle x, T_2^+(x), I_2^+(x), F_2^+(x), T_2^-(x), I_2^-(x), F_2^-(x) \rangle : x \in X \right\} \text{ bir } X \text{ evrensel}$$

kümesinde iki bipolar nötrosofik küme olsun, o zaman işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(1) A_1 = A_2 \Leftrightarrow T_1^+(x) = T_2^+(x), I_1^+(x) = I_2^+(x), F_1^+(x) = F_2^+(x) \text{ ve}$$

$$T_1^-(x) = T_2^-(x), I_1^-(x) = I_2^-(x), F_1^-(x) = F_2^-(x)$$

$$(2) A_1 \cup A_2 = \left\{ \langle x, \max(T_1^+(x), T_2^+(x)), \frac{I_1^+(x) + I_2^+(x)}{2}, \min(F_1^+(x), F_2^+(x)), \right.$$

$$\left. \min(T_1^-(x), T_2^-(x)), \frac{I_1^-(x) + I_2^-(x)}{2}, \max(F_1^-(x), F_2^-(x)) \right\rangle \}$$

$$(3) A_1 \cap A_2 = \{ \langle x, \min(T_1^+(x), T_2^+(x)), \frac{I_1^+(x) + I_2^+(x)}{2}, \max(F_1^+(x), F_2^+(x)), \max(T_1^-(x), T_2^-(x)), \frac{I_1^-(x) + I_2^-(x)}{2}, \min(F_1^-(x), F_2^-(x)) \rangle \}$$

$$\forall x \in X.$$

$$(4) A^c = \left\{ \left\langle x, 1 - T_A^+(x), 1 - I_A^+(x), 1 - F_A^+(x), 1 - T_A^-(x), 1 - I_A^-(x), 1 - F_A^-(x) \right\rangle \right\}$$

$$(5) A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow T_1^+(x) \leq T_2^+(x), I_1^+(x) \leq I_2^+(x), F_1^+(x) \geq F_2^+(x) \text{ ve} \\ T_1^-(x) \geq T_2^-(x), I_1^-(x) \geq I_2^-(x), F_1^-(x) \leq F_2^-(x).$$

Tanım 2.5.3 [47]

$\tilde{a}_1 = \langle T_1^+, I_1^+, F_1^+, T_1^-, I_1^-, F_1^- \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle T_2^+, I_2^+, F_2^+, T_2^-, I_2^-, F_2^- \rangle$ iki bipolar nütrosofik sayı olsun. O zaman Bipolar nütrosofik sayılar için işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} i. \lambda \tilde{a}_1 &= \left\langle 1 - (1 - T_1^+)^{\lambda}, (I_1^+)^{\lambda}, (F_1^+)^{\lambda}, -(-T_1^-)^{\lambda}, -(-I_1^-)^{\lambda}, -\left(1 - (1 - (-F_1^-))^{\lambda}\right) \right\rangle \\ ii. \tilde{a}_1^{\lambda} &= \left\langle (T_1^+)^{\lambda}, 1 - (1 - I_1^+)^{\lambda}, 1 - (1 - F_1^+)^{\lambda}, -\left(1 - (1 - (-T_1^-))^{\lambda}\right), -(-I_1^-)^{\lambda}, -(-F_1^-)^{\lambda} \right\rangle \\ iii. \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 &= \left\langle T_1^+ + T_2^+ - T_1^+ T_2^+, I_1^+ I_2^+, F_1^+ F_2^+, T_1^- T_2^-, -(-I_1^- - I_2^- - I_1^- I_2^-), -\left(-F_1^- - F_2^- - F_1^- F_2^-\right) \right\rangle \\ iv. \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 &= \left\langle T_1^+ T_2^+, I_1^+ + I_2^+ - I_1^+ I_2^+, F_1^+ + F_2^+ - F_1^+ F_2^+, -(-T_1^- - T_2^- - T_1^- T_2^-), -I_1^- I_2^-, -F_1^- F_2^- \right\rangle \end{aligned}$$

burada $\lambda > 0$.

Tanım 2.5.4 [48]

$A = \langle T_A(x_i), I_A(x_i), F_A(x_i) \rangle$ ve $B = \langle T_B(x_i), I_B(x_i), F_B(x_i) \rangle$ herhangi iki tekil değerli nütrosofik küme olsun, o zaman A ve B arasındaki normalize edilmiş öklidyen uzaklık aşağıdaki tanımlanabilir:

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{1}{3n} \left(|\tilde{T}_A - \tilde{T}_B|^2 + |\tilde{I}_A - \tilde{I}_B|^2 + |\tilde{F}_A - \tilde{F}_B|^2 \right)}.$$

2.6 Bipolar Nötrosofik Kümelerin Outranking İlişkileri

Bu bölümde, iki bipolar nötrosofik küme arasındaki bazı ikili ilişkileri tanımladık öyle ki bu bipolar nötrosofik kümeleri [49] de çalışmaları genişleterek ELEKTRE'ye dayandıracağız [49,50,51].

Tanım 2.6.1

$$A = \langle T_A^+(x_i), I_A^+(x_i), F_A^+(x_i), T_A^-(x_i), I_A^-(x_i), F_A^-(x_i) \rangle \text{ ve}$$

$$B = \langle T_B^+(x_i), I_B^+(x_i), F_B^+(x_i), T_B^-(x_i), I_B^-(x_i), F_B^-(x_i) \rangle \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ kümesi}$$

üzerinde iki bipolar nötrosofik küme olsun. O zaman,

(1) Bipolar nötrosofik kümelerin bir ilişkisi, A güçlü bir şekilde B ye baskındır

$A > s^B$ ile gösterilir, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_A^+ \geq T_B^+, I_A^+ < I_B^+, F_A^+ < F_B^+, T_A^- \leq T_B^-, I_A^- > I_B^-, F_A^- > F_B^- \text{ veya} \\ T_A^+ > T_B^+, I_A^+ = I_B^+, F_A^+ = F_B^+, T_A^- < T_B^-, I_A^- = I_B^-, F_A^- = F_B^-,$$

(2) Bipolar nötrosofik kümelerin bir ilişkisi, A zayıf bir şekilde B ye baskındır

$A > w^B$ ile gösterilir, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_A^+ \geq T_B^+, I_A^+ \geq I_B^+, F_A^+ < F_B^+, T_A^- \leq T_B^-, I_A^- \leq I_B^-, F_A^- > F_B^- \text{ veya} \\ T_A^+ \geq T_B^+, I_A^+ < I_B^+, F_A^+ \geq F_B^+, T_A^- \leq T_B^-, I_A^- > I_B^-, F_A^- \leq F_B^-,$$

(3) Bipolar nötrosofik kümelerin bir ilişkisi, A B ye farksızdır $A \sim t^B$ ile gösterilir, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_A^+ = T_B^+, I_A^+ = I_B^+, F_A^+ = F_B^+, T_A^- = T_B^-, I_A^- = I_B^-, F_A^- = F_B^-.$$

(4) $A \perp B$ ile gösterilen yukarıda bahsedilen ilişkilerin hiçbirisi A ve B arasında mevcut değildir ve A ve B karşılaştırılmaz.

Önerme 2.6.2

$$A = \langle T_A^+(x_i), I_A^+(x_i), F_A^+(x_i), T_A^-(x_i), I_A^-(x_i), F_A^-(x_i) \rangle \text{ ve}$$

$$B = \langle T_B^+(x_i), I_B^+(x_i), F_B^+(x_i), T_B^-(x_i), I_B^-(x_i), F_B^-(x_i) \rangle \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ kümesi}$$

üzerinde iki bipolar nötrosofik küme olsun. Aşağıdakiler doğrudur:

- (1) Eğer $B \subset A$ ise o zaman $A > s^B$;
- (2) Eğer $A > s^B$ ise o zaman $B \subseteq A$;
- (3) $A \sim \iota^B \Leftrightarrow A = B$.

İspat

- (1) Eğer $B \subset A$ ise o zaman $T_B^+ < T_A^+, I_B^+ > I_A^+, F_A^+ > F_B^+, T_B^- > T_A^-, I_A^- < I_B^-$, dolayısıyla $A > s^B$ elde edilir.
- (2) $A > s^B$ ise o zaman $T_A^+ \geq T_B^+, I_A^+ < I_B^+, F_A^+ < F_B^+, T_A^- \leq T_B^-, I_A^- > I_B^-, F_A^- > F_B^-$ veya $T_A^+ > T_B^+, I_A^+ = I_B^+, F_A^+ = F_B^+, T_A^- < T_B^-, I_A^- = I_B^-, F_A^- = F_B^-$ böylece ispat geçerlidir.
- (3) $A \sim \iota^B \Rightarrow A = B$ olduğunu gösterelim. $A \sim \iota^B$ ise $T_A^+ = T_B^+, I_A^+ = I_B^+, F_A^+ = F_B^+, T_A^- = T_B^-, I_A^- = I_B^-, F_A^- = F_B^-$ yazılabilir. Açıkça görülür ki $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ dır. Dolayısıyla $A=B$ olur.

$A = B \Rightarrow A \sim \iota^B$ olduğunu gösterelim. Eğer $A=B$ ise $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ yazılabilir. Dolayısıyla $T_A^+ \leq T_B^+, I_A^+ \geq I_B^+, F_A^+ \geq F_B^+, T_A^- \geq T_B^-, I_A^- \leq I_B^-, F_A^- \leq F_B^-$ ve $T_A^+ \geq T_B^+, I_A^+ \leq I_B^+, F_A^+ \leq F_B^+, T_A^- \leq T_B^-, I_A^- \geq I_B^-, F_A^- \geq F_B^-$ yazılabilir. Dolayısıyla buradan $T_A^+ = T_B^+, I_A^+ = I_B^+, F_A^+ = F_B^+, T_A^- = T_B^-, I_A^- = I_B^-, F_A^- = F_B^-$ elde edilir. Bu yüzden $A \sim \iota^B$ olduğu görülür.

Önerme 2.6.3

$$A = \langle T_A^+(x_i), I_A^+(x_i), F_A^+(x_i), T_A^-(x_i), I_A^-(x_i), F_A^-(x_i) \rangle,$$

$$B = \langle T_B^+(x_i), I_B^+(x_i), F_B^+(x_i), T_B^-(x_i), I_B^-(x_i), F_B^-(x_i) \rangle \text{ ve}$$

$$C = \langle T_C^+(x_i), I_C^+(x_i), F_C^+(x_i), T_C^-(x_i), I_C^-(x_i), F_C^-(x_i) \rangle \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ kümesi}$$

üzerinde bipolar nütrososfik kümeler olsun. Aşağıdakiler doğrudur:

- (1) $(A > s^B) \wedge (B > s^C) \Rightarrow (A > s^C)$
- (2) $(A \sim \iota^B) \wedge (B \sim \iota^C) \Rightarrow (A \sim \iota^C)$

İspat

(1) Kabul edelim ki $A > s^B$ olsun. O zaman $T_A^+ \geq T_B^+, I_A^+ < I_B^+, F_A^+ < F_B^+, T_A^- \leq T_B^-, I_A^- > I_B^-, F_A^- > F_B^-$ veya $T_A^+ > T_B^+, I_A^+ = I_B^+, F_A^+ = F_B^+, T_A^- < T_B^-, I_A^- = I_B^-, F_A^- = F_B^-$ yazılabilir. Ayrıca, $B > s^C$ olsun. O zaman $T_B^+ \geq T_C^+, I_B^+ < I_C^+, F_B^+ < F_C^+, T_B^- \leq T_C^-, I_B^- > I_C^-, F_B^- > F_C^-$ veya $T_B^+ > T_C^+, I_B^+ = I_C^+, F_B^+ = F_C^+, T_B^- < T_C^-, I_B^- = I_C^-, F_B^- = F_C^-$ yazılabilir.

Dahası;

$$\text{Eğer } T_A^+ \geq T_B^+, I_A^+ < I_B^+, F_A^+ < F_B^+, T_A^- \leq T_B^-, I_A^- > I_B^-, F_A^- > F_B^- \quad (1)$$

$$T_B^+ \geq T_C^+, I_B^+ < I_C^+, F_B^+ < F_C^+, T_B^- \leq T_C^-, I_B^- > I_C^-, F_B^- > F_C^- \quad (2)$$

(1) ve (2) den

$$T_A^+ \geq T_C^+, I_A^+ < I_C^+, F_A^+ < F_C^+, T_A^- \leq T_C^-, I_A^- > I_C^-, F_A^- > F_C^- \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla $A > s^C$ olduğu görülür.

$$\text{Eğer } T_A^+ \geq T_B^+, I_A^+ < I_B^+, F_A^+ < F_B^+, T_A^- \leq T_B^-, I_A^- > I_B^-, F_A^- > F_B^- \quad (3)$$

$$T_B^+ > T_C^+, I_B^+ = I_C^+, F_B^+ = F_C^+, T_B^- < T_C^-, I_B^- = I_C^-, F_B^- = F_C^- \quad (4)$$

(3) ve (4) den

$$T_A^+ > T_C^+, I_A^+ = I_C^+, F_A^+ = F_C^+, T_A^- < T_C^-, I_A^- = I_C^-, F_A^- = F_C^-$$

elde edilir. Dolayısıyla $A > s^C$ olduğu görülür.

$$\text{Eğer } T_A^+ > T_B^+, I_A^+ = I_B^+, F_A^+ = F_B^+, T_A^- < T_B^-, I_A^- = I_B^-, F_A^- = F_B^- \quad (5)$$

$$T_B^+ \geq T_C^+, I_B^+ < I_C^+, F_B^+ < F_C^+, T_B^- \leq T_C^-, I_B^- > I_C^-, F_B^- > F_C^- \quad (6)$$

(5) ve (6) dan

$$T_A^+ > T_C^+, I_A^+ < I_C^+, F_A^+ < F_C^+, T_A^- < T_C^-, I_A^- > I_C^-, F_A^- > F_C^-$$

elde edilir. Dolayısıyla $A > s^C$ olduğu görülür.

$$\text{Eğer } T_A^+ > T_B^+, I_A^+ = I_B^+, F_A^+ = F_B^+, T_A^- < T_B^-, I_A^- = I_B^-, F_A^- = F_B^- \quad (7)$$

$$T_B^+ \geq T_C^+, I_B^+ = I_C^+, F_B^+ = F_C^+, T_B^- \leq T_C^-, I_B^- = I_C^-, F_B^- = F_C^- \quad (8)$$

(7) ve (8) den

$$T_A^+ > T_C^+, I_A^+ = I_C^+, F_A^+ = F_C^+, T_A^- < T_C^-, I_A^- = I_C^-, F_A^- = F_C^-$$

elde edilir. Dolayısıyla $A > s^C$ ifadesi doğrudur. Sonuç olarak ispat doğrulanmış olur.

(2) İspat aşıkardır.

Önerme 2.6.4

$$A = \langle T_A^+(x_i), I_A^+(x_i), F_A^+(x_i), T_A^-(x_i), I_A^-(x_i), F_A^-(x_i) \rangle,$$

$$B = \langle T_B^+(x_i), I_B^+(x_i), F_B^+(x_i), T_B^-(x_i), I_B^-(x_i), F_B^-(x_i) \rangle \text{ ve}$$

$$C = \langle T_C^+(x_i), I_C^+(x_i), F_C^+(x_i), T_C^-(x_i), I_C^-(x_i), F_C^-(x_i) \rangle \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ kümesi}$$

üzerinde bipolar nôtrosofik kümeler olsun. Aşağıdakiler doğrudur:

(1)

(i) Yansıma özelliği yoktur, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan her A kümesi için, $A \not\asymp s^A$;

(ii) Simetri özelliği yoktur, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan her A,B kümeleri için,

$$A > s^B \Rightarrow B \not\asymp s^A;$$

(iii) Geçişlilik özelliği vardır, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan her A,B ve C kümeleri için,

$$A > s^B, B > s^C \Rightarrow A > s^C.$$

(2)

(i) Yansıma özelliği yoktur, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan her A kümesi için, $A \not\asymp w^A$;

(ii) Simetri özelliği yoktur, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan her A,B kümeleri için,

$$A > w^B \Rightarrow B \not\asymp w^A;$$

(iii) Geçişlilik özelliği yoktur, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan bazı A,B ve C kümeleri için,

$$A > w^B, B > w^C \not\Rightarrow A > w^C.$$

(3)

(i) Yansıma özelliği vardır, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan her A kümesi için, $A \sim t^A$;

(ii) Simetri özelliği vardır, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan her A,B kümeleri için,

$$A \sim t^B \Rightarrow B \sim t^A;$$

(iii) Geçişlilik özelliği yoktur, yani

Bipolar nôtrosofik kümelerden alınan bazı A,B ve C kümeleri için,

$$A \sim t^B, B \sim t^C \not\Rightarrow A \sim t^C.$$

İspat

Bu önermede 1(iii), 3(i), 3(ii) ve 3(iii) özellikleri tanım 2.6.1'e dayandırılarak doğrudur. Biz 1(i), 1(ii), 2(i), 2(ii) ve 2(iii) özelliklerini ispatlayacağız;

Eğer $A = \langle 0.5, 0.3, 0.1, -0.6, -0.4, -0.2 \rangle$ bir bipolar nütrosofik küme ise o zaman $A \not\geq s^A$ dir.

Eğer $A = \langle 0.7, 0.4, 0.2, -0.5, -0.2, -0.1 \rangle$ ve $B = \langle 0.6, 0.5, 0.3, -0.4, -0.3, -0.2 \rangle$ bipolar nütrosofik kümeler ise o zaman $A > s^B$ olur, fakat $B \not\geq s^A$ dir.

Eğer $A = \langle 0.5, 0.3, 0.1, -0.6, -0.4, -0.2 \rangle$ bir bipolar nütrosofik küme ise o zaman $A \not\geq w^A$ dir.

Eğer $A = \langle 0.8, 0.5, 0.2, -0.6, -0.3, -0.3 \rangle$ ve $B = \langle 0.5, 0.5, 0.3, -0.4, -0.4, -0.2 \rangle$ bipolar nütrosofik kümeler ise o zaman $A > w^B$ olur, fakat $B \not\geq w^A$ dir.

Eğer $A = \langle 0.8, 0.5, 0.4, -0.6, -0.5, -0.3 \rangle$, $B = \langle 0.7, 0.2, 0.5, -0.5, -0.3, -0.2 \rangle$ ve $C = \langle 0.7, 0.4, 0.4, -0.3, -0.3, -0.1 \rangle$ bipolar nütrosofik kümeler ise o zaman $A > w^B$, $B > w^C$ olur, fakat $A \not\geq w^C$ (yani $A \perp C$) dir.

Önerme 2.6.5

x_1 ve x_2 iki eylem olsun. x_1 ve x_2 eylemleri için performanslar Bipolar nütrosofik kümelerin formunda olur ve $P = s \cup w \cup I$ şu anlamdadır ki “ x_1 en az x_2 kadar iyidir.”, o zaman aşağıdakiler doğrudur:

- (1) $x_1 P x_2$ sağlanır ve $x_2 P x_1$ sağlanmaz, yani $x_1 > s^{x_2}$ veya $x_1 > w^{x_2}$;
- (2) $x_2 P x_1$ sağlanır ve $x_1 P x_2$ sağlanmaz, yani $x_2 > s^{x_1}$ veya $x_2 > w^{x_1}$;
- (3) $x_1 P x_2$ sağlanır ve $x_2 P x_1$ sağlanır, yani $x_1 \sim I^{x_2}$;
- (4) $x_1 P x_2$ sağlanmaz ve $x_2 P x_1$ sağlanmaz, yani $x_1 \perp x_2$.

Tanım 2.6.6

$$A = \langle T_A^+(x_i), I_A^+(x_i), F_A^+(x_i), T_A^-(x_i), I_A^-(x_i), F_A^-(x_i) \rangle \text{ ve}$$

$B = \langle T_B^+(x_i), I_B^+(x_i), F_B^+(x_i), T_B^-(x_i), I_B^-(x_i), F_B^-(x_i) \rangle$ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi

üzerinde iki bipolar nütrosifik küme olsun. O zaman, A ve B arasındaki normalize edilmiş öklidyen uzaklık aşağıdaki tanımlanabilir:

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{1}{6n} \left[\left(|T_A^+ - T_B^+|^2 + |I_A^+ - I_B^+|^2 + |F_A^+ - F_B^+|^2 \right) - \left(|T_A^- - T_B^-|^2 + |I_A^- - I_B^-|^2 + |F_A^- - F_B^-|^2 \right) \right]}.$$

Önerme 2.6.7

$d(A, B)$ A ve B bipolar nütrosifik kümeleri arasındaki normalize edilmiş bir öklidyen uzaklık olsun. o zaman aşağıdakiler doğrudur:

- (1) $0 \leq d(A, B) \leq 1$;
- (2) $d(A, B) = d(B, A)$;
- (3) $A=B$ için $d(A, B) = 1$ olur, yani

$$T_A^+(x_i) = T_B^+(x_i), I_A^+(x_i) = I_B^+(x_i), F_A^+(x_i) = F_B^+(x_i),$$

$$T_A^-(x_i) = T_B^-(x_i), I_A^-(x_i) = I_B^-(x_i), F_A^-(x_i) = F_B^-(x_i)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n) \text{ ve } \forall x_i \in X.$$

İspat

- (1) Tanım 2.5.1 den açıktır.

$$\begin{aligned} (2) \quad d(A, B) &= \sqrt{\frac{1}{6n} \left[\left(|T_A^+ - T_B^+|^2 + |I_A^+ - I_B^+|^2 + |F_A^+ - F_B^+|^2 \right) - \left(|T_A^- - T_B^-|^2 + |I_A^- - I_B^-|^2 + |F_A^- - F_B^-|^2 \right) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6n} \left[\left(|T_B^+ - T_A^+|^2 + |I_B^+ - I_A^+|^2 + |F_B^+ - F_A^+|^2 \right) - \left(|T_B^- - T_A^-|^2 + |I_B^- - I_A^-|^2 + |F_B^- - F_A^-|^2 \right) \right]} \\ &= d(B, A) \end{aligned}$$

$$(3) \quad T_A^+(x_i) = T_B^+(x_i), I_A^+(x_i) = I_B^+(x_i), F_A^+(x_i) = F_B^+(x_i),$$

$$T_A^-(x_i) = T_B^-(x_i), I_A^-(x_i) = I_B^-(x_i), F_A^-(x_i) = F_B^-(x_i)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n) \text{ ve } \forall x_i \in X \text{ olduğundan dolayı}$$

$$d(A, B) = 1 \text{ olduğunu söyleyebiliriz.}$$

BÖLÜM 3

ARALIK DEĞERLİ BİPOLAR NÖTROSOFİK KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ

3.1 Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Kümeler

Tanım 3.1.1 [52]

X üzerinde bir A aralık değerli bipolar nötrosofik kümesi aşağıdaki gibi bir formda tanımlanır:

$$A = \left\langle \left[T_L^+(x), T_R^+(x) \right], \left[I_L^+(x), I_R^+(x) \right], \left[F_L^+(x), F_R^+(x) \right], \left[T_L^-(x), T_R^-(x) \right], \right. \\ \left. \left[I_L^-(x), I_R^-(x) \right], \left[F_L^-(x), F_R^-(x) \right] \right\rangle$$

Burada,

$$T_L^+, T_R^+, I_L^+, I_R^+, F_L^+, F_R^+ : X \rightarrow [0,1] \text{ ve } T_L^-, T_R^-, I_L^-, I_R^-, F_L^-, F_R^- : X \rightarrow [-1,0] \text{ olur.}$$

Tanım 3.1.2 [52]

$$A_1 = \left\langle \left[T_{1L}^+(x), T_{1R}^+(x) \right], \left[I_{1L}^+(x), I_{1R}^+(x) \right], \left[F_{1L}^+(x), F_{1R}^+(x) \right], \left[T_{1L}^-(x), T_{1R}^-(x) \right], \right. \\ \left. \left[I_{1L}^-(x), I_{1R}^-(x) \right], \left[F_{1L}^-(x), F_{1R}^-(x) \right] \right\rangle$$

ve

$$A_2 = \left\langle \left[T_{2L}^+(x), T_{2R}^+(x) \right], \left[I_{2L}^+(x), I_{2R}^+(x) \right], \left[F_{2L}^+(x), F_{2R}^+(x) \right], \left[T_{2L}^-(x), T_{2R}^-(x) \right], \right. \\ \left. \left[I_{2L}^-(x), I_{2R}^-(x) \right], \left[F_{2L}^-(x), F_{2R}^-(x) \right] \right\rangle$$

aralık değerli bipolar nötrosofik kümeler olsun.

$$1. \forall x \in X \text{ için } A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} T_{1L}^+(x) \leq T_{2L}^+(x), \quad T_{1R}^+(x) \leq T_{2R}^+(x), \quad I_{1L}^+(x) \geq I_{2L}^+(x), \\ I_{1R}^+(x) \geq I_{2R}^+(x), \quad F_{1L}^+(x) \geq F_{2L}^+(x), \quad F_{1R}^+(x) \geq F_{2R}^+(x), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_{1L}^-(x) \leq T_{2L}^-(x), \quad T_{1R}^-(x) \leq T_{2R}^-(x), \quad I_{1L}^-(x) \geq I_{2L}^-(x), \\ I_{1R}^-(x) \geq I_{2R}^-(x), \quad F_{1L}^-(x) \geq F_{2L}^-(x), \quad F_{1R}^-(x) \geq F_{2R}^-(x), \end{aligned} \quad \text{olur.}$$

2. $\forall x \in X$ için $A_1 = A_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} T_{1L}^+(x) &= T_{2L}^+(x), & T_{1R}^+(x) &= T_{2R}^+(x), & I_{1L}^+(x) &= I_{2L}^+(x), \\ I_{1R}^+(x) &= I_{2R}^+(x), & F_{1L}^+(x) &= F_{2L}^+(x), & F_{1R}^+(x) &= F_{2R}^+(x), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_{1L}^-(x) &= T_{2L}^-(x), & T_{1R}^-(x) &= T_{2R}^-(x), & I_{1L}^-(x) &= I_{2L}^-(x), \\ I_{1R}^-(x) &= I_{2R}^-(x), & F_{1L}^-(x) &= F_{2L}^-(x), & F_{1R}^-(x) &= F_{2R}^-(x), \end{aligned}$$

olur.

3. $\forall x \in X$ için kümelerin birleşimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} (A_1 \cup A_2)_{(x)} &= \left[\max \{T_{1L}^+(x), T_{2L}^+(x)\}, \max \{T_{1R}^+(x), T_{2R}^+(x)\} \right], \\ &\quad \left[\min \{I_{1L}^+(x), I_{2L}^+(x)\}, \min \{I_{1R}^+(x), I_{2R}^+(x)\} \right], \\ &\quad \left[\min \{F_{1L}^+(x), F_{2L}^+(x)\}, \min \{F_{1R}^+(x), F_{2R}^+(x)\} \right], \\ &\quad \left[\min \{T_{1L}^-(x), T_{2L}^-(x)\}, \min \{T_{1R}^-(x), T_{2R}^-(x)\} \right], \\ &\quad \left[\max \{I_{1L}^-(x), I_{2L}^-(x)\}, \max \{I_{1R}^-(x), I_{2R}^-(x)\} \right], \\ &\quad \left[\max \{F_{1L}^-(x), F_{2L}^-(x)\}, \max \{F_{1R}^-(x), F_{2R}^-(x)\} \right], \end{aligned}$$

4. $\forall x \in X$ için kümelerin kesişimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} (A_1 \cap A_2)_{(x)} &= \left[\min \{T_{1L}^+(x), T_{2L}^+(x)\}, \min \{T_{1R}^+(x), T_{2R}^+(x)\} \right], \\ &\quad \left[\max \{I_{1L}^+(x), I_{2L}^+(x)\}, \max \{I_{1R}^+(x), I_{2R}^+(x)\} \right], \\ &\quad \left[\max \{F_{1L}^+(x), F_{2L}^+(x)\}, \max \{F_{1R}^+(x), F_{2R}^+(x)\} \right], \\ &\quad \left[\max \{T_{1L}^-(x), T_{2L}^-(x)\}, \max \{T_{1R}^-(x), T_{2R}^-(x)\} \right], \\ &\quad \left[\min \{I_{1L}^-(x), I_{2L}^-(x)\}, \min \{I_{1R}^-(x), I_{2R}^-(x)\} \right], \\ &\quad \left[\min \{F_{1L}^-(x), F_{2L}^-(x)\}, \min \{F_{1R}^-(x), F_{2R}^-(x)\} \right], \end{aligned}$$

5. $\forall x \in X$ için A_1 'in tümleyeni A_1^c ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} T_{1L^c}^+(x) &= \{I^+\} - T_{1R}^+(x), & T_{1R^c}^+(x) &= \{I^+\} - T_{1L}^+(x), \\ I_{1L^c}^+(x) &= \{I^+\} - I_{1R}^+(x), & I_{1R^c}^+(x) &= \{I^+\} - I_{1L}^+(x), \\ F_{1L^c}^+(x) &= \{I^+\} - F_{1R}^+(x), & F_{1R^c}^+(x) &= \{I^+\} - F_{1L}^+(x), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
T_{1L^c}^-(x) &= \{I^-\} - T_{1R}^-(x), & T_{1R^c}^-(x) &= \{I^-\} - T_{1L}^-(x), \\
I_{1L^c}^-(x) &= \{I^-\} - I_{1R}^-(x), & I_{1R^c}^-(x) &= \{I^-\} - I_{1L}^-(x), \\
F_{1L^c}^-(x) &= \{I^-\} - F_{1R}^-(x), & F_{1R^c}^-(x) &= \{I^-\} - F_{1L}^-(x),
\end{aligned}$$

Tanım 3.1.3 [52]

$$A_1 = \left\langle [T_{1L}^+, T_{1R}^+], [I_{1L}^+, I_{1R}^+], [F_{1L}^+, F_{1R}^+], [T_{1L}^-, T_{1R}^-], [I_{1L}^-, I_{1R}^-], [F_{1L}^-, F_{1R}^-] \right\rangle$$

ve

$$A_2 = \left\langle [T_{2L}^+, T_{2R}^+], [I_{2L}^+, I_{2R}^+], [F_{2L}^+, F_{2R}^+], [T_{2L}^-, T_{2R}^-], [I_{2L}^-, I_{2R}^-], [F_{2L}^-, F_{2R}^-] \right\rangle$$

aralık değerli bipolar nütrosifik sayılar olsun. O zaman Aralık Değerli Bipolar Nütrosifik Sayı'lar için işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

i.

$$\lambda A_1 = \left\langle \left[1 - (1 - T_L^+)^{\lambda}, 1 - (1 - T_R^+)^{\lambda} \right], \left[(I_L^+)^{\lambda}, (I_R^+)^{\lambda} \right], \left[(F_L^+)^{\lambda}, (F_R^+)^{\lambda} \right], \right. \\ \left. \left[-(-T_L^-)^{\lambda}, -(-T_R^-)^{\lambda} \right], \left[-(I_L^-)^{\lambda}, -(I_R^-)^{\lambda} \right], \left[-(1 - (1 - (-F_L^-))^{\lambda}), -(1 - (1 - (-F_R^-))^{\lambda}) \right] \right\rangle$$

ii.

$$A_1^{\lambda} = \left\langle \left[(T_L^+)^{\lambda}, (T_R^+)^{\lambda} \right], \left[1 - (1 - I_L^+)^{\lambda}, 1 - (1 - I_R^+)^{\lambda} \right], \left[1 - (1 - F_L^+)^{\lambda}, 1 - (1 - F_R^+)^{\lambda} \right], \right. \\ \left. \left[-(1 - (1 - (-T_L^-))^{\lambda}), -(1 - (1 - (-T_R^-))^{\lambda}) \right], \left[-(I_L^-)^{\lambda}, -(I_R^-)^{\lambda} \right], \left[-(-F_L^-)^{\lambda}, -(-F_R^-)^{\lambda} \right] \right\rangle$$

iii.

$$A_1 + A_2 = \left\langle \left[T_{1L}^+ + T_{2L}^+ - T_{1L}^+ \cdot T_{2L}^+, T_{1R}^+ + T_{2R}^+ - T_{1R}^+ \cdot T_{2R}^+ \right], \left[I_{1L}^+ \cdot I_{2L}^+, I_{1R}^+ \cdot I_{2R}^+ \right], \right. \\ \left[F_{1L}^+ \cdot F_{2L}^+, F_{1R}^+ \cdot F_{2R}^+ \right], \left[-T_{1L}^- \cdot T_{2L}^-, -T_{1R}^- \cdot T_{2R}^- \right], \left[-(I_{1L}^- - I_{2L}^- - I_{1L}^- \cdot I_{2L}^-), -(I_{1R}^- - I_{2R}^- - I_{1R}^- \cdot I_{2R}^-) \right], \\ \left. \left[-(-F_{1L}^- - F_{2L}^- - F_{1L}^- \cdot F_{2L}^-), -(-F_{1R}^- - F_{2R}^- - F_{1R}^- \cdot F_{2R}^-) \right] \right\rangle$$

iv.

$$A_1 + A_2 = \left\langle \left[T_{1L}^+ \cdot T_{2L}^+, T_{1R}^+ \cdot T_{2R}^+ \right], \left[I_{1L}^+ + I_{2L}^+ - I_{1L}^+ \cdot I_{2L}^+, I_{1R}^+ + I_{2R}^+ - I_{1R}^+ \cdot I_{2R}^+ \right], \right. \\ \left[F_{1L}^+ + F_{2L}^+ - F_{1L}^+ \cdot F_{2L}^+, F_{1R}^+ + F_{2R}^+ - F_{1R}^+ \cdot F_{2R}^+ \right], \\ \left. \left[-(-T_{1L}^- - T_{2L}^- - T_{1L}^- \cdot T_{2L}^-), -(-T_{1R}^- - T_{2R}^- - T_{1R}^- \cdot T_{2R}^-) \right], \left[I_{1L}^- \cdot I_{2L}^-, I_{1R}^- \cdot I_{2R}^- \right], \left[F_{1L}^- \cdot F_{2L}^-, F_{1R}^- \cdot F_{2R}^- \right] \right\rangle$$

burada $\lambda > 0$ dir.

3.2 Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Sayı'ların outranking ilişkileri

Seçenek ve farksızlık eşiklerine sahip olan bir kriter pseudo kriteri olarak adlandırılır.

Roy[53,54] pseudo kriterinin bir tanımını sağladı öyle ki o $q_j(\cdot)$ ve $p_j(\cdot)$ gibi iki tane eşik fonksiyonu ile birleştirilmiş bir g_j fonksiyonudur ve aşağıdaki durumu sağlar:

$(a, a') \in S \times S$ gibi bütün sıralı eylem çiftleri için, $g_j(a) \geq g_j(a')$, $g_j(a) + p_j(g_j(a'))$

ve $g_j(a) + q_j(g_j(a'))$ fonksiyonları $g_j(a')$ nün azalmayan fonksiyonlarıdır ve

$\forall a \in S$ için $p_j(g_j(a')) \geq q_j(g_j(a'))$ olur. Burada $q_j(g_j(a'))$; a ve a' gibi iki eylem

arasındaki g_j kriterine dayanan farksızlık durumu için en büyük performans farkıdır.

Ayrıca $p_j(g_j(a'))$; a ve a' gibi iki eylem arasındaki g_j kriteri üzerinde oluşan

seçenek durumu için en küçük performans farkıdır. Bu tanıma dayanarak, iki Aralık

Değerli Bipolar Nötrosofik Sayı'lar arasındaki pseudo kriteri aşağıdaki gibi

tanımlanabilir:

Tanım 3.2.1

a ve b , aralık değerli bipolar nötrosofik sayıları aşağıdaki gibi verilsin:

$$a = \langle [\mu_{aL}^+, \mu_{aR}^+], [\nu_{aL}^+, \nu_{aR}^+], [\omega_{aL}^+, \omega_{aR}^+], [\mu_{aL}^-, \mu_{aR}^-], [\nu_{aL}^-, \nu_{aR}^-], [\omega_{aL}^-, \omega_{aR}^-] \rangle$$

Ve

$$b = \langle [\mu_{bL}^+, \mu_{bR}^+], [\nu_{bL}^+, \nu_{bR}^+], [\omega_{bL}^+, \omega_{bR}^+], [\mu_{bL}^-, \mu_{bR}^-], [\nu_{bL}^-, \nu_{bR}^-], [\omega_{bL}^-, \omega_{bR}^-] \rangle .$$

$$g(a) = [(\mu_{aL}^+ + \mu_{aR}^+) + (\mu_{aL}^- + \mu_{aR}^-)] - [(v_{aL}^+ + v_{aR}^+) + (v_{aL}^- + v_{aR}^-)] - [(\omega_{aL}^+ + \omega_{aR}^+) + (\omega_{aL}^- + \omega_{aR}^-)]$$

$$g(b) = [(\mu_{bL}^+ + \mu_{bR}^+) + (\mu_{bL}^- + \mu_{bR}^-)] - [(v_{bL}^+ + v_{bR}^+) + (v_{bL}^- + v_{bR}^-)] - [(\omega_{bL}^+ + \omega_{bR}^+) + (\omega_{bL}^- + \omega_{bR}^-)],$$

$$g(T_{ab}) = [(\mu_{aL}^+ + \mu_{aR}^+) + (\mu_{aL}^- + \mu_{aR}^-)] - [(\mu_{bL}^+ + \mu_{bR}^+) + (\mu_{bL}^- + \mu_{bR}^-)] ,$$

$$g(I_{ab}) = [(v_{bL}^+ + v_{bR}^+) + (v_{bL}^- + v_{bR}^-)] - [(v_{aL}^+ + v_{aR}^+) + (v_{aL}^- + v_{aR}^-)]$$

ve

$$g(F_{ab}) = [(\omega_{bL}^+ + \omega_{bR}^+) + (\omega_{bL}^- + \omega_{bR}^-)] - [(\omega_{aL}^+ + \omega_{aR}^+) + (\omega_{aL}^- + \omega_{aR}^-)] .$$

Kabul edelim ki,

$$g(a, b) = g(a) - g(b) = g(T_{ab}) + g(I_{ab}) + g(F_{ab}) .$$

p ve q da sırasıyla seçenek eşiği ve farksızlık eşiği olsun. İki Aralık Değerli Bipolar

Nötrosofik Sayı arasındaki var olan ilişki aşağıdaki gibidir:

(1) Eğer $p < g(a,b)$ ise o zaman a güçlü bir şekilde b ye tercih edilir. $P(a,b)$ veya $a > s^b$ ile gösterilir.

(2) Eğer $q < g(a,b) \leq p$ ise o zaman a zayıf bir şekilde b ye tercih edilir. $Q(a,b)$ veya $a > w^b$ ile gösterilir.

(3) Eğer $-q < g(a,b) \leq q$ ise o zaman a b ye farksızdır. $I(a,b)$ veya $a \sim t^b$ ile gösterilir.

Açıktır ki, a ve b gibi iki Aralık Değerli Bipolar Nötrosifik Sayı arasında üç tane ikili ilişki vardır. Onlar güçlü baskın ilişki, zayıf baskın ilişki ve farksızlık ilişkisi. Eğer a, b ye güçlü bir şekilde tercih edilirse, bu şu anlamdadır; a güçlü bir şekilde b ye baskındır. Hâlbuki eğer a zayıf bir şekilde b ye tercih edilirse, bu şu anlamdadır; a zayıf bir şekilde b ye baskındır.

Örnek 3.2.2

Tercih eşiği $p=0.4$ ve farksızlık eşiği $q=0.2$ olduğunu kabul edelim.

(1) Eğer;

$$a = \langle [0.5, 0.8], [0.3, 0.4], [0.1, 0.2], [-0.2, -0.1], [-0.5, -0.2], [-0.8, -0.7] \rangle$$

ve

$$b = \langle [0.5, 0.6], [0.4, 0.5], [0.2, 0.4], [-0.4, -0.2], [-0.9, -0.5], [-0.7, -0.6] \rangle$$

aralık değerli bipolar nötrosifik sayılar ise bu taktirde $g(a,b)=0.5 > p$ olur. Bu yüzden, a ve b $P(a,b)$ yi sağlar, yani a güçlü bir şekilde b ye tercih edilir.

(2) Eğer;

$$a = \langle [0.3, 0.8], [0.3, 0.9], [0.1, 0.3], [-0.7, -0.6], [-0.6, -0.2], [-0.4, -0.1] \rangle$$

ve

$$b = \langle [0.4, 0.7], [0.6, 0.8], [0.3, 0.4], [-0.9, -0.5], [-0.4, -0.3], [-0.8, -0.1] \rangle$$

aralık değerli bipolar nötrosifik sayılar ise bu taktirde $q < g(a,b) = 0.3 \leq p$ olur. Bu yüzden, a ve b $Q(a,b)$ yi sağlar, yani a zayıf bir şekilde b ye tercih edilir.

(3) Eğer;

$$a = \langle [0.3, 0.9], [0.1, 0.8], [0.2, 0.5], [-0.8, -0.7], [-0.5, -0.1], [-0.4, -0.3] \rangle$$

ve

$$b = \langle [0.3, 0.8], [0.3, 0.9], [0.1, 0.3], [-0.7, -0.6], [-0.6, -0.2], [-0.4, -0.1] \rangle$$

aralık değerli bipolar nötrosifik sayılar ise bu taktirde $-q < g(a,b) = -0.1 < q$ olur. Bu yüzden, a b ye farksızdır, yani $I(a,b)$.

Özellik 1

a, b ve c Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Sayı'lar olsun. Eğer $a > s^b$ ve $b > s^c$ ise o zaman $a > s^c$ olur.

İspat

Tanım 3.2.1 e göre eğer $a > s^b$ ise o zaman $g(a, b) > p$, yani $g(a) - g(b) > p$ olur. Benzer şekilde, eğer $b > s^c$ ise o zaman $g(b) - g(c) > p$ olur.

Bu yüzden, $g(a) - g(b) + g(b) - g(c) > 2p$ dir. Böylece, $g(a) - g(c) > p$ olur. Tanım 3.2.1 e dayanarak, $a > s^c$ elde edilir ve bu yüzden, özellik ispatlanmış olur.

Özellik 2

a, b ve c Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Sayı'lar(kısaca ADBNS yazılabiliriz) olsun. O zaman aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

(1) Güçlü baskın ilişkiler aşağıdaki gibi kategorize edilmiştir:

- (1a) Yansıma özelliği yoktur, yani $\forall a \in ADBNS, a \not> s^a$;
- (1b) Simetri özelliği yoktur, yani $\forall a, b \in ADBNS, a > s^b \Rightarrow b \not> s^a$;
- (1c) Geçişlilik özelliği vardır, yani $\forall a, b, c \in ADBNS, a > s^b, b > s^c \Rightarrow a > s^c$.

(2) Zayıf baskın ilişkiler aşağıdaki gibi kategorize edilmiştir:

- (2a) Yansıma özelliği yoktur, yani $\forall a \in ADBNS, a \not> w^a$;
- (2b) Simetri özelliği yoktur, yani $\forall a, b \in ADBNS, a > w^b \Rightarrow b \not> w^a$;
- (2c) Geçişlilik özelliği yoktur, yani $\exists a, b, c \in ADBNS, a > w^b, b > w^c \not\Rightarrow a > w^c$.

(3) Farksızlık ilişkileri aşağıdaki gibi kategorize edilmiştir:

- (3a) Yansıma özelliği vardır, yani $\forall a \in ADBNS, a \sim t^a$;
- (3b) Simetri özelliği vardır, yani $\forall a, b \in ADBNS, a \sim t^b \Rightarrow b \sim t^a$;
- (3c) Geçişlilik özelliği yoktur, yani $\exists a, b, c \in ADBNS, a \sim t^b, b \sim t^c \not\Rightarrow a \sim t^c$.

Tanım 3.2.1 e göre $g(a) - g(a) = 0 < q < p$, $a \not> s^a$, $a \not> w^a$, $a \sim t^a$ geçerli olur. Böylece

(1a), (2a) ve (3a) doğrudur. Benzer şekilde, eğer $a > s^b$ ise o zaman $g(a) - g(b) > p \Rightarrow g(b) - g(a) < -p$. Bu yüzden, $b \not> s^a$ dır ve (1b) doğrudur. (2b) ve (3b) de aynı şekilde doğrudur. Özellik 1 ve özellik 2 ye göre (1c) doğrudur. Bununla birlikte, (2c) ve (3c) nin ispatlanmaları gerekir.

Tanım 3.2.3 [55]

A ve B alternatifleri ADBNS'lerin koleksiyonu olsun öyle ki $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ ve $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$, $a_i, b_j \in ADBNS(i, j = 1, 2, \dots, m)$ dir. A ve B alternatiflerini ikili bir karşılaştırma yapmak için aşağıdaki notasyonlar tanımlanır:

$n_p(A, B)$, $P(a_i, b_j)$ kriterinin sayısını temsil etsin.

$n_Q(A, B)$, $Q(a_i, b_j)$ kriterinin sayısını temsil etsin.

$n_I(A, B)$, $I(a_i, b_j) \wedge (g(a_i, b_j) > 0)$.kriterinin sayısını temsil etsin.

A ve B gibi iki alternatif verilsin. Aşağıdaki ifadeler outranking ilişkilerinin anlaşılmasını sağlar:

(1) A B'nin üstündedir, AOB ile gösterilir, şu anlamdadır: Analistin A'nın en az B kadar iyi olduğunu karar merciinin gözünde doğrulamaya yetecek kadar nedeni vardır.

(2) A B'yi geçmez, şu anlamdadır: "A en az B kadar iyidir." Önermesi lehindeki argümanlar yargısal olarak yetersizdir. (Bu ifade şunu ima etmez; "B en az A kadar iyidir." önermesi lehindeki argümanlar vardır.)

A ve B gibi iki alternatif arasındaki ikili bağıntı $\succ$ (tercih), I (farksızlık) ve R (benzersizlik) aşağıdaki gibi ortaya çıkabilir:

$AIB \Leftrightarrow AOB$ and BOA ;

$A \succ B \Leftrightarrow AOB$ and not BOA ;

$A \prec B \Leftrightarrow not AOB$ and BOA ; ve

$ARB \Leftrightarrow not AOB$ and not BOA .

Dahası, tercih ilişkisi iki durumdan meydana gelir. Onlar güçlü tercih ve zayıf tercihtir, sırasıyla $A \succ s^B$ ve $A \succ w^B$ ile gösterilir.

[56] ye dayanarak, baskın olma kuralları aşağıdaki gibi belirlenir:

Tanım 3.2.4 [56]

Kabul edelim ki m kriter sayısı olsun. O zaman:

(1) $A \succ s^B$: (a) Hiçbir kriter için B kesinlikle A'ya tercih edilmez; (b) B'nin A'ya göre zayıf olarak tercih edildiği kriterlerin sayısı, A'nın B'ye göre kesinlikle tercih edildiği kriterlerin sayısından daha düşük veya eşit ise ve (c) B'nin performansının A'ninkinden daha iyi olduğu ölçütlerin sayısı, A'nın performansının B'ninkinden daha iyi olduğu ölçütlerin sayısından kesinlikle daha düşük ise

$$A > s^B \Leftrightarrow \{n_p(B, A) = 0 \text{ ve } n_Q(B, A) \leq n_p(A, B) \text{ ve } n_Q(B, A) + n_I(B, A) < n_I(A, B) + n_Q(A, B) + n_p(A, B)\}.$$

- (2) $A > w^B$: (a) B'nin kesinlikle A'ya tercih edildiği kriterlere uymuyorsa;
(b) B performansının A'ninkinden üstün olduğu kriterlerin sayısı, A performansının B'ninkinden üstün olduğu ölçütlerin sayısından kesinlikle daha düşükse;
(c) A ilişkisi için gerekli olan ek koşul doğrulanmazsa;
(d) B'nin A'ya kesinlikle tercih edildiği tek bir kriter varsa, kriterlerin en az yarısında A kesinlikle B'ye tercih edilir.

$$A > w^B \Leftrightarrow \{n_p(B, A) = 0 \text{ ve } n_Q(B, A) + n_I(B, A) < n_I(A, B) + n_Q(A, B) + n_p(A, B) \text{ ve } \text{not } A > s^B \text{ veya } n_p(B, A) = 1 \text{ ve } n_p(A, B) \geq m / 2\}.$$

Bu tanım ile her bir çift arasındaki outranking ilişkisi elde edilebilir.

Örnek 3.2.5

Kabul edelim ki tercih eşiği $p=0.4$ ve farksızlık eşiği $q=0.2$ olsun. B_1 ve B_2 alternatifleri için, değerlendirmek amacıyla üç kriter uygulanır. Bütün alternatifler ile ilgili olarak her bir kriterin performansı aşağıdaki gibidir:

$$B_1 = [B_{11} \ B_{12} \ B_{13}] = \left\{ \begin{aligned} &\langle a, [0.3, 0.9], [0.1, 0.8], [0.2, 0.5], [-0.8, -0.7], [-0.5, -0.1], [-0.4, -0.3] \rangle, \\ &\langle b, [0.3, 0.8], [0.3, 0.9], [0.1, 0.3], [-0.7, -0.6], [-0.6, -0.2], [-0.4, -0.1] \rangle, \\ &\langle c, [0.4, 0.5], [0.5, 0.6], [0.3, 0.5], [-0.4, -0.2], [-0.9, -0.5], [-0.7, -0.6] \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$B_2 = [B_{21} \ B_{22} \ B_{23}] = \left\{ \begin{aligned} &\langle a, [0.2, 0.8], [0.3, 0.6], [0.3, 0.6], [-0.3, -0.2], [-0.6, -0.2], [-0.5, -0.4] \rangle, \\ &\langle b, [0.4, 0.7], [0.5, 0.7], [0.2, 0.3], [-0.2, -0.1], [-0.8, -0.3], [-0.9, -0.8] \rangle, \\ &\langle c, [0.4, 0.7], [0.6, 0.8], [0.3, 0.4], [-0.9, -0.5], [-0.4, -0.3], [-0.8, -0.1] \rangle \end{aligned} \right\}$$

Tanım 3.2.1'e göre,

$$g(B_{11}, B_{21}) = -1, \ g(B_{21}, B_{11}) = 1 > p, \ g(B_{22}, B_{12}) = 2.4 > p \text{ ve } g(B_{13}, B_{23}) = 1.9 > p$$

olarak bulunur. Bu yüzden, $P(B_{21}, B_{11}), P(B_{22}, B_{12})$ ve $P(B_{13}, B_{23})$ olur, yani B_1 ve B_2 alternatifleri arasındaki ilişki eski iki kriter ile ilgilidir. Üçüncü kritere göre B_1 kesin bir şekilde B_2 'ye tercih edilirken, eski iki kritere göre B_2 kesin bir şekilde B_1 'e tercih edilir.

(B_1, B_2) çifti için,

$$n_p(B_1, B_2) = 1, n_Q(B_1, B_2) = 0, n_I(B_1, B_2) = 0, n_p(B_2, B_1) = 2, n_Q(B_2, B_1) = 0 \text{ ve } n_I(B_2, B_1) = 0.$$

Tanım 3.2.4'e göre, $B_2 \succ w^{B_1}$ olur. Bunun anlamı şudur: B_2 zayıf bir şekilde B_1 'e baskındır.

Sunum kolaylığı için $n_s(A_i)$ sayıyı temsil eder öyle ki bu sayı (A_i, A_k) ($k=1,2,3,...,n$) çifti arasındaki $A_i \succ s^{A_k}$ için A_i alternatifi ile güçlü baskın ilişkiye sahiptir. Benzer şekilde, $n_w(A_i)$ sayıyı temsil eder öyle ki bu sayı (A_i, A_k) ($k=1,2,3,...,n$) çifti arasındaki $A_i \succ w^{A_k}$ durumudur.

Tanım 3.2.6

(A_i, A_k) çifti arasındaki outranking ilişkisinin kuralları aşağıdaki gibi inşa edilir:

- (1) Eğer $n_s(A_i) > n_s(A_j)$ ise o zaman bu şunu ima eder; A_i A_j 'yi geride bırakıyor $A_i \succ A_j$ ile gösterilir.
- (2) Eğer $n_s(A_i) = n_s(A_j)$ ve $n_w(A_i) > n_w(A_j)$ ise o zaman $A_i \succ A_j$.
- (3) Eğer $n_s(A_i) = n_s(A_j)$ ve $n_w(A_i) = n_w(A_j)$ ve $A_i \succ s^{A_j}$ ise o zaman $A_i \succ A_j$.

Daha sonra, alternatiflerin bir kısmı veya tamamının sıralaması ile dizi oluşturulur.

BÖLÜM 4

UYGULAMALAR

4.1 ADBNS'lar ile ilgili Çoklu Kriterli Karar Verme (ÇKKV) Problemleri için bir outranking yaklaşımı

Bu bölümde, Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Küme'lerin outranking kurallarının uygulandığı ÇKKV problemleri için bir outranking metodu önerilir.

Kabul edelim ki Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Küme'ler ile ÇKKV sıralama/seçilim problemi $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ gibi n tane alternatif ve her bir alternatifin $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_m\}$ gibi m tane kriter tarafından değerlendirilmesinden meydana gelsin. Her bir kritere göre her alternatifin değerlendirmesi $R = (A_{ij})_{n \times m}$ gibi bir aralık değerli bipolar nötrosofik karar matrisine dönüştürülür öyle ki $A_{ij} = \langle \mu_{A_{ij}}^+, \nu_{A_{ij}}^+, \omega_{A_{ij}}^+, \mu_{A_{ij}}^-, \nu_{A_{ij}}^-, \omega_{A_{ij}}^- \rangle$ bir kriter değeridir. Burada pozitif üyelik dereceleri olan $\mu_{A_{ij}}^+, \nu_{A_{ij}}^+, \omega_{A_{ij}}^+, c_j$ kriterini sağlayan A_i alternatifinin doğruluk üyelik fonksiyonu, kararsızlık üyelik fonksiyonu ve yanlışlık üyelik fonksiyonunu gösterir ve negatif üyelik dereceleri olan $\mu_{A_{ij}}^-, \nu_{A_{ij}}^-, \omega_{A_{ij}}^-$ de aynı şekilde c_j kriterini sağlayan A_i alternatifinin doğruluk üyelik fonksiyonu, kararsızlık üyelik fonksiyonu ve yanlışlık üyelik fonksiyonunu gösterir. Her bir kriter için $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_m\}$ tercih eşiği ve $Q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_m\}$ farksızlık eşiği olsun.

Aşağıdaki adımlarda, sıralama ve seçim için en uygun alternatif(ler)in bir prosedürü özetlenmiştir.

Adım 1 G performans matrisini hesapla.

Her bir c_j kriteri üzerindeki her A_i alternatifinin performans değeri $g(A_i)_j$ olarak gösterilir. Tanım 3.2.1'i kullanarak, G performans matrisi hesaplanabilir:

$$G = \begin{bmatrix} g(A_1)_1 & g(A_1)_2 & \dots & g(A_1)_m \\ g(A_2)_1 & g(A_2)_2 & \dots & g(A_2)_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(A_n)_1 & g(A_n)_2 & \dots & g(A_n)_m \end{bmatrix}$$

Adım 2 D fark matrisini hesapla.

$g(A_i, A_k)_j$ fark değeri, her bir c_j kriteri üzerindeki A_i ve A_k gibi iki alternatif arasındaki performans farkını gösterir. Her kriter ile ilgili olarak her bir alternatifin skor fonksiyon değerine göre,

$$g(A_i, A_k)_j = g(A_i)_j - g(A_k)_j \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m),$$

böylece fark matrisi aşağıdaki gibi inşa edilebilir:

$$D = \begin{bmatrix} g(A_1, A_1)_1 & g(A_1, A_1)_2 & \cdots & g(A_1, A_1)_m \\ g(A_1, A_2)_1 & g(A_1, A_2)_2 & \cdots & g(A_1, A_2)_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g(A_n, A_n)_1 & g(A_n, A_n)_2 & \cdots & g(A_n, A_n)_m \end{bmatrix}$$

Adım 3 Bütün alternatifler için her bir kriter ile ilgili olarak iki ADBNS arasında ikili ilişki elde et.

Açık bir şekilde, $g(A_i, A_k)_j$ fark değeri, ilişkilere karar vermek için p_j tercih eşiği ve q_j fark eşiği ile mukayese edilmelidir. Tanım 3.2.1'e göre, eğer $g(A_i, A_k)_j > p_j$ ise o zaman $A_{ij} > s^{A_{kj}}$ olur. Dahası, eğer $q_j < g(A_i, A_k)_j < p_j$ ise o zaman $A_{ij} > w^{A_{kj}}$ ve eğer $-q_j < g(A_i, A_k)_j < q_j$ ise o zaman $A_{ij} > i^{A_{kj}}$ olur.

Adım 4 Outranking ilişkilerinin sayısını say.

Tanım 3.2.3'ü kullanarak, tüm kriterlere ilişkin (A_i, A_k) ikilisi için $n_p(A_i, A_k)$, $n_q(A_i, A_k)$ ve $n_l(A_i, A_k)$ outranking ilişkilerinin sayısını hesapla. Açık bir şekilde, $A_{ij} > s^{A_{kj}}$ $j=1,2,\dots,m$ olduğunda, herhangi (A_i, A_k) ikilisi, $n_p(A_i, A_k)$ sayıyı temsil eder. Benzer şekilde, $A_{ij} > w^{A_{kj}}$ olduğunda, $n_q(A_i, A_k)$ sayıyı temsil eder ve $A_{ij} \sim i^{A_{kj}}$ ve $g(A_i, A_k)_j > 0$ $j=1,2,\dots,m$ olduğunda, $n_l(A_i, A_k)$ sayıyı temsil eder.

Adım 5 Tanım 3.2.4 e göre (A_i, A_k) ikilisi arasındaki outranking ilişkilerine karar ver.

Adım 6 A_i alternatifi için $n_s(A_i)$ ve $n_w(A_i)$ yi say.

Adım 7 Tanım 3.2.6'ya göre en iyi outranking ilişkilerine sahip alternatif veya alternatifleri seç.

Tanım 3.2.6 yı kullanarak, en büyük $n_s(A_i)$ ye sahip alternatif veya alternatifleri seç. Eğer $n_s(A_i)$ nin maksimumundan iki veya daha fazla var ise, o zaman $n_w(A_i)$ yi karşılaştır. Böylece, en iyi outranranking ilişkilerine sahip bir veya daha fazla alternatif ayrıştırılır.

Adım 8 Kalan diğer alternatifler için kalan boş(anlamsız, geçersiz) olana kadar adım4-adım7 yi tekrar et.

Adım 9 Alternatifleri sırala.

Daha sonra, bütün alternatifler için kısmi ya da tam sıra oluşturulur.

4.2 Görsel bir örnek

Bu bölümde, önerilen karar verme metodunun uygulamasını ve onun etkililiğini görselleştirmek için alternatiflere sahip ÇKKV problemlerinin bir örneği sağlanır.

Örnek 4.2.1 Kaynak[46,57] dan uyarlanmış bir karar verme problemi kullanılacak.

Para yatırımı için mümkün dört alternatife (B_1, B_2, B_3 ve B_4) sahip bir panel var.

Yatırım şirketi c_1, c_2 ve c_3 gibi üç kritere göre bir karar almak zorunda. Tercih eşiği

$P = \{0.2, 0.2, 0.2\}$ ve farksızlık eşiği $Q = \{0.1, 0.1, 0.1\}$ dur. Dört muhtemel alternatif

yukarıdaki üç kritere göre değerlendirilmelidir ve değerlendirme değerleri aşağıdaki aralık nütrosifik D karar matrisinde gösterildiği gibi ADBNS'lara dönüştürülmelidir:

	C_1
B_1	$\langle [0.4, 0.5], [0.1, 0.4], [0.1, 0.6], [-0.3, -0.2], [-0.7, -0.3], [-0.5, -0.4] \rangle$
B_2	$\langle [0.3, 0.7], [0.3, 0.5], [0.3, 0.5], [-0.4, -0.3], [-0.8, -0.6], [-0.6, -0.5] \rangle$
B_3	$\langle [0.5, 0.8], [0.2, 0.7], [0.4, 0.5], [-0.9, -0.6], [-0.6, -0.2], [-0.3, -0.2] \rangle$
B_4	$\langle [0.1, 0.2], [0.2, 0.7], [0.1, 0.3], [-0.6, -0.3], [-0.9, -0.4], [-0.7, -0.2] \rangle$
	C_2
B_1	$\langle [0.2, 0.8], [0.1, 0.7], [0.1, 0.4], [-0.9, -0.8], [-0.6, -0.2], [-0.5, -0.2] \rangle$
B_2	$\langle [0.1, 0.7], [0.1, 0.3], [0.2, 0.3], [-0.6, -0.2], [-0.4, -0.2], [-0.9, -0.5] \rangle$
B_3	$\langle [0.1, 0.5], [0.2, 0.8], [0.2, 0.4], [-0.9, -0.8], [-0.5, -0.4], [-0.8, -0.7] \rangle$
B_4	$\langle [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.1, 0.6], [-0.6, -0.5], [-0.7, -0.4], [-0.6, -0.4] \rangle$
	C_3
B_1	$\langle [0.1, 0.5], [0.1, 0.4], [0.1, 0.3], [-0.6, -0.3], [-0.8, -0.4], [-0.5, -0.3] \rangle$
B_2	$\langle [0.2, 0.3], [0.1, 0.5], [0.4, 0.6], [-0.6, -0.2], [-0.9, -0.8], [-0.6, -0.3] \rangle$
B_3	$\langle [0.2, 0.8], [0.1, 0.7], [0.1, 0.2], [-0.6, -0.5], [-0.7, -0.6], [-0.8, -0.7] \rangle$
B_4	$\langle [0.1, 0.6], [0.4, 0.7], [0.7, 0.8], [-0.9, -0.8], [-0.9, -0.6], [-0.6, -0.3] \rangle$

Adım 1 G performans matrisini hesapla.

$$G = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.5 & 0.8 \\ 1.2 & 1.1 & 0.7 \\ -0.7 & -0.3 & 1.6 \\ 0.3 & -0.9 & -1.2 \end{bmatrix}$$

Adım 2 D fark matrisini hesapla.

her bir c_j kriteri üzerindeki B_i ve B_k gibi iki alternatif arasındaki $g(B_i, B_k)_j$ fark değeri $g(B_i, B_k)_j = g(B_i)_j - g(B_k)_j (i, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ eşitliğini sağlar.

Daha sonra, fark matrisi tablo 1 de gösterildiği gibi çizilir.

Tablo 1 Her bir kriter için projelerin performans farkı

	c_1	c_2	c_3
(B_1, B_1)	0	0	0
(B_1, B_2)	-0.1	-1.6	0.1
(B_1, B_3)	1.8	-0.2	-0.8
(B_1, B_4)	0.8	0.4	2
(B_2, B_1)	0.1	1.6	-0.1
(B_2, B_2)	0	0	0
(B_2, B_3)	1.9	1.4	-0.9
(B_2, B_4)	0.9	2	1.9
(B_3, B_1)	-1.8	0.2	0.8
(B_3, B_2)	-1.9	-1.4	0.9
(B_3, B_3)	0	0	0
(B_3, B_4)	-1	0.6	2.8
(B_4, B_1)	-0.8	-0.4	-2
(B_4, B_2)	-0.9	-2	-1.9
(B_4, B_3)	1	-0.6	-2.8
(B_4, B_4)	0	0	0

Adım 3 Bütün alternatifler için her bir kriter ile ilgili olarak iki ADBNS arasında ikili ilişki elde et.

p_j ve q_j ile $g(B_i, B_k)_j$ yi karşılaştır. Sonuçlar tablo 2 den görülebilir.

Tablo 2 Bütün alternatifler için her bir kriter ile ilgili olarak iki aralık değerli bipolar nötrosofik sayı arasındaki ikili ilişki

	c_1	c_2	c_3
(B_1, B_1)	$\sim I$	$\sim I$	$\sim I$
(B_1, B_2)	$\sim I$	$<S$	$\sim I$
(B_1, B_3)	$>S$	$<W$	$<S$
(B_1, B_4)	$>S$	$>S$	$>S$
(B_2, B_1)	$\sim I$	$>S$	$\sim I$
(B_2, B_2)	$\sim I$	$\sim I$	$\sim I$
(B_2, B_3)	$>S$	$>S$	$<S$
(B_2, B_4)	$>S$	$>S$	$>S$
(B_3, B_1)	$<S$	$>W$	$>S$
(B_3, B_2)	$<S$	$<S$	$>S$
(B_3, B_3)	$\sim I$	$\sim I$	$\sim I$
(B_3, B_4)	$<S$	$>S$	$>S$
(B_4, B_1)	$<S$	$<S$	$<S$
(B_4, B_2)	$<S$	$<S$	$<S$
(B_4, B_3)	$>S$	$<S$	$<S$
(B_4, B_4)	$\sim I$	$\sim I$	$\sim I$

Adım 4 Outranking ilişkilerinin sayısını say.

Tüm kriterlere ilişkin (B_i, B_k) ikilisi için $n_P(B_i, B_k)$, $n_Q(B_i, B_k)$ ve $n_I(B_i, B_k)$ outranking ilişkilerinin sayısını hesapla. Tablo 3 de görülür.

Tablo 3 Tüm kriterlere ilişkin (B_i, B_k) ikilisi için ilişkilerinin sayıları

	$n_P(B_i, B_k)$	$n_Q(B_i, B_k)$	$n_I(B_i, B_k)$
(B_1, B_1)	0	0	0
(B_1, B_2)	0	0	1
(B_1, B_3)	1	0	0
(B_1, B_4)	3	0	0
(B_2, B_1)	1	0	1
(B_2, B_2)	0	0	0
(B_2, B_3)	2	0	0
(B_2, B_4)	3	0	0
(B_3, B_1)	1	1	0
(B_3, B_2)	1	0	0
(B_3, B_3)	0	0	0
(B_3, B_4)	2	0	0
(B_4, B_1)	0	0	0
(B_4, B_2)	0	0	0
(B_4, B_3)	1	0	0
(B_4, B_4)	0	0	0

Adım 5 Tanım 3.2.4 e göre (B_i, B_k) ikilisi arasındaki outranking ilişkilerine karar ver.

Tablo 4 de görüldüğü gibi.

Tablo 4 Projelerin kriterlere göre ilişkilendirme matrisi.

	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	I			$\succ_S$
B_2	$\succ_S$	I	$\succ_W$	$\succ_S$
B_3			I	$\succ_W$
B_4				I

Adım 6 B_i alternatifi için $n_s(B_i)$ ve $n_w(B_i)$ yi say. Tablo 5 de görüldüğü gibi.

Tablo 5 Her bir projenin diğer projelerle arasındaki ilişki sayıları

	$n_s(B_i)$	$n_w(B_i)$
B_1	1	0
B_2	2	1
B_3	0	1
B_4	0	0

Adım 7 Tanım 3.2.6'ya göre en iyi outranking ilişkilerine sahip alternatif veya alternatifleri seç.

Açıktır ki B_2 en iyi alternatiftir.

Adım 8 Kalan diğer alternatifler için kalan boş(anlamsız, geçersiz) olana kadar adım4-adım7 yi tekrar et.

Prosedür sürekli bir şekilde tekrar ettirilir ve daha sonra B_1, B_3 ve B_4 ayrıştırılır.

Adım 9 Alternatifleri sırala.

Yukarıdaki adımlara dayanarak, final sıralaması $B_2 \succ B_1 \succ B_3 \succ B_4$ olarak tespit edilebilir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE TARTIŞMA

Nötrosofik kümelerin yeni bir branşı olarak, aralık değerli nötrosofik kümeler ve aralık değerli bipolar nötrosofik kümeler, gerçek bilimsel ve mühendislik uygulamalarında var olan belirsiz, kesin olmayan, eksik ve tutarsız bilgiyle ilgili problemleri çözmek için uygulanabilir. Bu tez Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Küme'leri kullanarak ÇKKV problemlerini çözmek için bir yaklaşım önerdi. Sonuç olarak, ELECTRE IV metoduna dayanarak aralık değerli bipolar nötrosofik kümeler ile ÇKKV problemlerini çözmek için bir outranking yaklaşımı tesis edildi. Bu yüzden, Aralık Değerli Bipolar Nötrosofik Küme'ler için bazı outranking ilişkileri tanımlandı ve outranking ilişkileri ile bağlantılı özellikler detaylı olarak incelendi. Ayrıca, önerilen karar verme yönteminin uygulanmasını gösteren iki örnek sağlandı.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*. **8**, 338–356.
- [2] Zadeh, L.A. (1968). Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **23**, 421–427.
- [3] Turksen, I.B. (1986). Interval valued fuzzy sets based on normal forms. *Fuzzy sets and Systems*. **20**, 191–210.
- [4] Atanassov, K.T. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy sets and Systems*. **20**, 87–96
- [5] Atanassov, K.T. (2000). Two theorems for intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems*. **110**, 267–269.
- [6] Gau, W.L., Buehrer, D.J. (1993). Vague sets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. **23**, 610–614.
- [7] Bustince, H., Burillo, P. (1996). Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems*. **79**, 403–405.
- [8] Shinoj, T.K., Sunil, J.J. (2012). Intuitionistic fuzzy multisets and its application in medical diagnosis. *International Journal of Mathematics and Computer Science*. **6**, 34–37.
- [9] Sotirov, S., Sotirova, E., Orozova, D. (2009). Neural network for defining intuitionistic fuzzy sets in e-learning. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*. **15**, 33–36.
- [10] Guo, Y., Sengur, A. (2014). NECM: neutrosophic evidential c-means clustering algorithm. *Neural Comput Appl*. doi:10.1007/s00521-014-1648-3.
- [11] Chaira, T. (2011). A novel intuitionistic fuzzy C means clustering algorithm and its application to medical images. *Applied Soft Computing*. **11**, 1711–1717.
- [12] Joshi, B.P., Kumar, S. (2012). Fuzzy time series model based on intuitionistic fuzzy sets for empirical research in stock market, *International Journal of Applied Evolutionary Computation*. **3**, 71–84.
- [13] Liu, H. W., Wang, G.J. (2007). Multi-criteria methods based on intuitionistic fuzzy sets. *European Journal of Operational Research*. **179**, 220–233.

- [14] Zhi, P., Li, Z. (2012). A novel approach to multi-attribute decision making based on intuitionistic fuzzy sets. *Expert Systems with Applications*. **39**, 2560–2566.
- [15] Zeng, S.Z., Su, W.H. (2011). Intuitionistic fuzzy ordered weighted distance operator. *Knowledge-Based Systems*. **24(8)**, 1224–1232.
- [16] Atanassov, K.T., Gargov, G. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems*. **31**, 343–349.
- [17] Wang, J.Q., Nie, R., Zhang, H.Y., Chen, X.H. (2013). New operators on triangular intuitionistic fuzzy numbers and their applications in system fault analysis. *Information Sciences*. **251**, 79–95.
- [18] Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*. **25**, 529–539.
- [19] Torra, V., Narukawa, Y. (2009). On hesitant fuzzy sets and decision. In: Proceedings of the 18th IEEE international conference on fuzzy systems, Jeju Island, Korea, pp 1378–1382.
- [20] Wang, J.Q., Wu, J.T., Wang, J., Zhang, H.Y., Chen, X.H. (2014). Interval-valued hesitant fuzzy linguistic sets and their applications in multi-criteria decision- making problems. *Information Sciences*. **288**, 55–72.
- [21] Wang, J., Zhou, P., Li, K., Zhang, H., Chen, X. (2014). Multi-criteria decision-making method based on normal intuitionistic fuzzy induced generalized aggregation operator. *TOP*. **22**, 1103–1122.
- [22] Wang, J., Wu, J., Wnag, J., Zhang, H., Chen, X. (2015). Multi-criteria decision-making methods based on the Hausdorff distance of hesitant fuzzy linguistic numbers. *Soft Comput*.doi:10.1007/s00500-015-1609-5.
- [23] Wang, J.Q., Peng, J.J., Zhang, H.Y., Liu, T., Chen, X.H. (2015). An uncertain linguistic multi-criteria group decision-making method based on a cloud model. *Group Decision and Negotiation*. **24(1)**, 171–192.
- [24] Wei, G. (2010). Some induced geometric aggregation operators with intuitionistic fuzzy information and their application to group decision making. *Applied Soft Computing*. **10(2)**, 423–431.
- [25] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y.Q., Sunderraman, R. (2010). Single valued neutrosophic sets. *Multispace and Multistructure*. **4**, 410–413.
- [26] Smarandache, F. (1999). A unifying field in logics. Neutrosophy: neutrosophic probability, set and logic. American Research Press, Rehoboth.

- [27] Smarandache, F. (2003). A unifying field in logics neutrosophic logic. Neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability. American Research Press, Rehoboth.
- [28] Riveccio, U. (2008). Neutrosophic logics: prospects and problems. *Fuzzy Sets and Systems*. **159(14)**, 1860–1868.
- [29] Zadeh, L.A. (1968). Fuzzy Algorithms, *Ibid.* **12**, 94-102.
- [30] Zadeh, L.A. (1971). Quantitative Fuzzy Semantics. *Information Sciences*. **3**, 159-176.
- [31] Kauffman, A. (1975). Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets: Academic Press Volume. **1**, 83-93.
- [32] Fee, W.G. , ve Fu, K.S. (1969). A Formulation of Fuzzy Automata and Its Application as A Model of Learning Systems: IEEE transactions on SSC, 5.
- [33] Negoita, C.V. , ve Ralescu, D.a. (1975). Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Birkhauser.
- [34] Santos, E.S. (1968). General Formulation of Sequential Machines, *Informaiton and Control*. **12**, 5-10.
- [35] Santos, E.S. (1970). Fuzzy Algorithms, *Informaiton and Control*. **17**, 326-339.
- [36] Aydın, S. (1980). Belirsiz Topolojik Uzayların Üzerinde Doğurduğu U-Topolojik Uzaylar, Doktora Tezi, H.Ü. , Fen Fakültesi, Beytepe, Ankara.
- [37] Wang, Z. Ve Klir, G.J. (1989). Fuzzy Measure Theory, New York-Binghamton.
- [38] Grabish, M. , Murofushi, T. Ve Sugeno, M. (1999). Fuzzy Measures and Integrals, Japan.
- [39] Klement, E.P. ,ve Schwyhla, W. (1980), Fuzzy σ – algebras and Fuzzy Measurable Functions, *Fuzzy Sets and System*. **4**, 83-93.
- [40] Klement, E.P. ,ve Schwyhla, W. (1982). Correspondence Between Fuzzy Measures and Classical Measures, *Fuzzy Sets and System*. **7**, 57-70.
- [41] Atanassov, K.T. (1999). Intuitionistic Fuzzy Sets. Physica-Verlag, Heidelberg, New York.
- [42] Li, D.F., Cheng, C.T. (2002). New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions. *Pattern Recognition Letters*. **23** (1- 3), 221-225.
- [43] Li, D.F. (2004). Some measures of dissimilarity in intuitionistic fuzzy structures. *Journal of Computer System Sciences*. **68(1)**, 115-122.

- [44] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y.Q., Sunderraman, R.(2005). Interval neutrosophic sets and logic: theory and applications in computing. Hexis, Arizona.
- [45] Ye, J. (2014). A multi criteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. **26**, 2459–2466.
- [46] Zhang, H.Y., Wang,J.Q., Chen, X.H. (2014). Interval neutrosophic sets and their application in multi criteria decision making problems. *The Scientific World Journal* 2014:645953.
- [47] Deli, I., Ali, M., Smarandache, F. (2015). Bipolar neutrosophic sets and their application based on multi-criteria decision making problems. In *Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS)*, 2015. International Conference on (pp. 249- 254). IEEE.
- [48] Majumdarar, P., Samant, S.K. (2014). On similarity and entropy of neutrosophic sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. **26**, 1245–1252.
- [49] Peng, J. J., Wang, J. Q., Zhang, H. Y., Chen, X. H. (2014). An outranking approach for multi-criteria decision-making problems with simplified neutrosophic sets. *Applied Soft Computing*. **25**, 336-346.
- [50] Wang, J. Wang, J. Q. Zhang, H. Y. Chen, X. H. (2015). Multi-criteria decision-making based on hesitant fuzzy linguistic term sets: an outranking approach. *Knowledge-Based Systems*. **86**, 224-236.
- [51] Ye, J. (2014). A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. **26(5)**, 2459-2466.
- [52] Deli, I., Şubaş, Y., Smaradache, F., Ali, M. (2016). Interval valued bipolar neutrosophic sets and their application in pattern recognition. *arXivpreprint arXiv:1601.01266*.
- [53] Roy, B., Vincke, P. (1984). Relationsystems of preference with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results. *Management Science*. **30(11)**, 1323–1335.
- [54] Figueira, J.R., Greco, S., Roy, B., Słowiński, R. (2010). ELECTRE methods: main Features and recent developments. In: ZopounidisC, Pardalos P (eds) *Handbook of multi criteria analysis*. Springer, Berlin, pp 51–89.

- [55] Roy, B. (1977). Partial preference analysis and decision-aid: the fuzzy outranking relation concept. In: Bell DE, Keeney RL, Raiffa H (eds) *Conflicting objectives and decisions*. Wiley, New York, pp 40–75.
- [56] Tzeng, G.H., Huang, J.J. (2011). *Multiple attribute decision making: methods and applications*. Chapman and Hall, London.
- [57] Ye, J. (2012). Multi criteria decision-making method using the Dice Similarity measure based on the reduct intuitionistic fuzzy sets of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Applied Mathematical Modelling*. **36(9)**, 4466–4472.

