



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARALIK DEĞERLİ BULANIK GRAFİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
189611007
ELİF MÜDAN

TOKAT
2022

ETİK SÖZLEŞME

Bu belge ile bu tezdeki bütün bilgi toplama ve raporlaştırma sürecinin Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'ne, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna, genel akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak gerçekleştirildiğini; bu tez çalışmasının “intihal engelleme” programı ile tarandığını, bana ait olmayan tüm bilgi, düşünce ve bulgulara atıf yaptığımı ve kaynağını gösterdiğimi beyan eder, sorumluluğun tarafıma ait olduğunu kabul ederim.

Tarih: 13/10/2022

Elif MÜDAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini paylaşan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım saygıdeğer danışman hocam; Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN’a çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen eşim Abdurrahman MÜDAN ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Elif MÜDAN

13/10/2022

JÜRİ KABUL VE ONAY

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

189611007 Elif MÜDAN'nın Aralık Değerli Bulanık Grafikler adlı çalışması 13/10/2022 tarihinde jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Başkan: Doç. Dr. Güzide ŞENEL

Üye (Tez Danışmanı): Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

13/10/2022

Prof. Dr. Mehmet GÜNEŞ

Enstitü Müdürü

ÖZET

ARALIK DEĞERLİ BULANIK GRAFİKLER

Elif MÜDAN

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Ekim 2022, 92 sayfa

Bu tezde, aralık değerli bulanık grafikler konusu araştırılarak bir derlemesi yapılacaktır. Önce konunun temelini oluşturan bulanık mantık, bulanık kümeler, bulanık bağıntı kavramların ve temel özellikleri verilecektir. Sonra aralık değerli bulanık bağıntı ve aralık değerli bulanık küme işlemleri tanıtılacak. Daha sonra tezin amacı olan aralık değerli bulanık grafikler ve temel özelliklerini incelenecektir. Son olarak aralık değerli bulanık grafiklerin izomorfizmaları tanıtılarak temel özellikleri çalışılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Mantık, Bulanık Bağıntı, Aralık Değerli Bulanık Kümeler, Aralık Değerli Bulanık Kümeler, Aralık Değerli Bulanık Grafikler

ABSTRACT

INTERVAL VALUED FUZZY GRAPH

Elif MÜDAN

Master's Thesis, Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

October 2022, 92 pages

In this thesis, the subject of interval value fuzzy graphs will be investigated and a compilation will be made. For this topic, firstly, fuzzy logic, fuzzy sets, fuzzy relation concepts and their basic properties will be given. Then, interval-valued fuzzy relation and interval-valued fuzzy set operations will be introduced. Then, the main match of the thesis, fuzzy graphs with interval values and their basic properties will be examined. Finally, the basic properties of interval value fuzzy graphs will be studied by introducing isomorphisms.

Keywords: Fuzzy Logic, Fuzzy Relation, Interval Valued Fuzzy Sets, Interval Valued Fuzzy Relation, Interval Valued Fuzzy Graphs.

İÇİNDEKİLER

ETİK SÖZLEŞME.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
JÜRİ KABUL VE ONAY	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
TABLolar LİSTESİ.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. BULANIK KÜMELER	3
2.1. Bulanık Kümelerde İşlemler	9
3. BULANIK BAĞINTI	16
3.1. Bulanık Bileşkeler.....	36
4. ARALIK DEĞERLİ BULANIK KÜMELER	46
5. ARALIK DEĞERLİ BULANIK BAĞINTI	56
6. ARALIK DEĞERLİ BULANIK GRAFİKLER	62
6.1.Aralık Değerli Bulanık Grafikler ve İşlemleri	63
6.2. Aralık Değerli Bulanık Grafiklerin İzomorfizmaları	77
7. SONUÇ	79
KAYNAKÇA.....	80
ÖZGEÇMİŞ	83

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Bulanık küme gösteriminin grafikte gösterimi	4
Şekil 2.2 Normal olmayan bir bulanık küme	5
Şekil 2.3 Konveks ve konkav üyelik fonksiyonları	7
Şekil 6.1. Bir Klasik Grafik Örneği	62
Şekil 6.2. Bir Bulanık Grafik Örneği	63
Şekil 6.3. Bir Aralık Değerli Bulanık Grafik Örneği	64
Şekil 6.4. Aralık Değerli Bulanık Grafik Örneği	64
Şekil 6.5. Aralık Değerli İki Bulanık Grafiğin Kartezyen Çarpım Örneği	66
Şekil 6.6. Aralık Değerli İki Bulanık Grafiğin Bileşke İşlemi Örneği	69
Şekil 6.7. Aralık Değerli İki Bulanık Grafiğin Birleşim İşlemi Örneği	72

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.1. R Bulanık Bağıntısının Tablosu	17
Tablo 3.2. R Bulanık Bağıntısının Tablosu	18



1. GİRİŞ

Uygulamada gösterdiği büyük ilerlemeler sayesinde son zamanlarda üzerinde çokça çalışılan bulanık kümeler, belirsiz kavramları ve onları matematiksel olarak modellememizi sağlamaktadır. Uygulama alanlarının genişliği ve oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından bulanık kümeler son zamanlarda yapılan bilimsel çalışmalarda önemli bir yere sahiptir. Bulanık mantık, makinelerle belirsiz kavramları anlama ve buna yanıt verme olanağı sağladığından dolayı mantıkçıların en önemli hedeflerinden biri bulanık mantığı kullanarak makinelerin insan gibi düşünmesini sağlamaktır.

Aristo'nun iki değerli mantığına sistematik anlamda ilk alternatif mantık Lukasiewicz tarafından önerildi. Lukasiewicz 1920'lerde üç değerli mantığın temelini attı. 1930'ların sonlarına doğru kuantum fizikçisi olan Max Black, çoklu değerli mantığı kümelere uyguladı. Bu bilimin bulanık kümeler ve üyelik fonksiyonlarıyla tanışması demektir. Yaklaşık 30 yıl kadar sonra 1965 yılında Zadeh (Zadeh, 1965) bulanık kümeler konusunu ortaya atarak matematikte yeni bir çağ başlattı.

Bulanık mantığın dayandığı ana fikir ise mantığın doğru ve yanlıştan oluşmadığı başka bir deyişle klasik mantıkta olduğu gibi dünyanın sadece siyah veya beyazdan ibaret olmadığı siyah veya beyazın yanı sıra grinin tonlarının olduğu ve beraberinde diğer bütün renklerin mevcut olduğu ilkesine dayanır. Bu özelliğiyle bulanık mantık insan düşüncesine dayalı birtakım sistemlerde klasik mantıktan çok farklı olarak daha rahat kullanım imkanı sağlar. Günlük hayatta “bugün hava çok soğuk“, “ Ali'nin boyu uzun ” gibi birtakım yorumlarda bulunuruz. Bu ifadeler, kişiden kişiye değişebilir. Kimine göre hava soğuk olmayabilir, kimine göre de uzun denilen uzun olmayabilir. Bu yüzden kişiden kişiye değişkenlik gösteren belirsiz durumları modellemede bulanık mantık devreye girmektedir. Kısaca bulanık küme teorisi belirsizliği modellemek için günümüzde kullanılan en yaygın teorilerden birisidir.

1975 yılında Zadeh (Zadeh, 1975) aralık değerli bulanık kümeler kavramını ilk defa ortaya attı. Aralık değerli bulanık kümelere, üyelik derecelerinin değerlerini $[0,1]$ aralığındaki reel sayılar yerine aynı alığın alt aralıklarını alarak bulanık kümelerin bir genellemesi olarak tanımladı. Aralık değerli bulanık modeller, bulanık modellere kıyasla

sisteme daha fazla hassasiyet, esneklik ve uyumluluk sağlar. Bulanık kontrol gibi uygulamalarda aralık değerli bulanık kümeler kullanılır. Aralıklı değerli bulanık kümelerin ilk eksiği tipik bir bulanık küme ile karşılaştırıldığında üyelik fonksiyonu aralıklı olması nedeniyle fazla hesaplama gerektirmektedir.

Grafikler (çizelgeler), köşelerden ve köşeleri birleştiren kenarlardan oluşan yapılardır. Klasik grafik teorisinin bir genellemesi olarak bulanık grafik teorisi ilk kez Rosenfeld(1975) tarafından tanımlanmıştır. Aralık değerli bulanık kümelerin grafiklerini ve temel özelliklerini vereceğiz. Aralık değerli bulanık grafikler Akram ve Dudek (2011) tarafından çalışılmıştır.

Bu tezde önce çalışılacak konunun temelini oluşturan bulanık mantık, bulanık kümeler, bulanık bağıntı, aralık değerli bulanık küme kavramları ve temel özellikleri verilecektir. Bu konularla ilgi bölümler, (Baykal ve Beyan, 2004), (Dubois ve Prade,1980), (Klir ve Folger,1988), (Tanaka,1966) ve (Zimmermann, 1991) kaynaklarından derlenmiştir. Sonra aralık değerli bulanık bağıntı ve aralık değerli bulanık küme işlemleri tanıtılacaktır. Daha sonra tezin amacı olan aralık değerli bulanık grafikler ve temel özellikleri incelenecektir. Bu tezin amacı, aralık değerli bulanık grafikleri ve temel özelliklerini inceleyerek aralık değerli bulanık grafiklerin izomorfizmalarının bir derlemesini yapmaktır.

2. BULANIK KÜMELER

Bu bölümde, 1965 yılında Zadeh tarafından tanımlanan bulanık kümeler (fuzzy set) ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu bölüm, (Baykal ve Beyan, 2004), (Dubois and Prade, 1980), (Klir and Folger, 1988), (Tanaka, 1966) ve (Zimmermann, 1991) kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 2.0.1. Bir U evrensel kümesi verilsin. Her $x \in U$ için

$$\mu_F : U \rightarrow [0, 1]$$

fonksiyonu ile verilen

$$F = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\}$$

kümesine U üzerinde tanımlı bir bulanık küme denir. Burada μ_F fonksiyonuna F bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu ve $\mu_F(x)$ değerine x elemanının F bulanık kümesine aitlik derecesi denir. Aitlik derecesi sıfır olan elemanlar kümeye ait olmadıklarında bulanık kümede gösterilmezler. Bulanık kümeler genellikle $F, G, H, \dots$ gibi harflerle ve bunların üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_F, \mu_G, \mu_H, \dots$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.0.1. $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ evreninde 1'e yakın gerçel sayılar bulanık kümesi

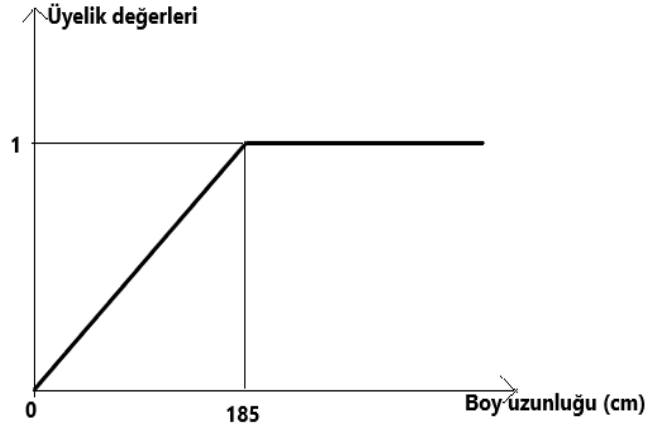
$$A = \left\{ \frac{-2}{0.7}, \frac{-1}{0.8}, \frac{0}{0.9}, \frac{1}{1}, \frac{2}{0.9}, \frac{3}{0.8}, \frac{4}{0.7}, \frac{5}{0.6}, \frac{6}{0.5} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.0.2. Uzun boylu olma durumunu inceleyecek olursak; 2 metre uzunluğundaki birisi herkes tarafından uzun boylu olarak nitelendirilebilir, ancak 180 cm boyundaki birine uzun demek kişiye, yere, zamana ve bakış açısına göre değişebilir. Bunun nedeni uzun boylu olma sınırının belirsiz olmasıdır. Bu yüzden uzun boylu olma kümesini klasik kümelerle ifade etmek güç olabilir. Örneğin uzun boylu olmayı klasik kümelerle şu tanımla ifade edebiliriz; “185 cm ve üzeri boyu olanlar uzundur.” Bu tanıma göre 185 cm ve üzerindeki uzun boylular kümesine ait olduğu söylenir. F uzun boylular kümesi

$$F = \begin{cases} 1, & x \geq 185 \\ 0, & x < 185 \end{cases}$$

şeklinde gösterilir. Burada tanımlanmış evrende, bir kişinin uzun boylular kümesine ait olması ile ait olmaması arasındaki geçiş keskin ve kesindir. Yani bu tanımla 185 cm boyundaki birine “uzun” derken ondan sadece bir milimetre kısa 184,9 cm uzunluğundaki birine “uzun değil” denilmiş olur.



Şekil 2.1. Bulanık küme gösteriminin grafikte gösterimi

Bulanık kümelerde ise bu geçiş kademeli olarak tanımlanır, bahsedilen küme sözel olarak “yaklaşık 185 cm ve üzeri olanlar uzun boyludur” şeklinde ifade edilir. Bu ifadenin bulanık kümelerle gösterimi,

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 185 \\ \frac{x-175}{10}, & 175 \leq x < 185 \\ 0, & x < 175 \end{cases}$$

şeklinde olacaktır. Şekil 2.1. deki gibi de gösterilebilir. Bu ifadeye göre 184 cm boyundaki birinin bulanık kümeye üyeliği $\mu_F(184)=0,9$ ve 176 cm boyundaki birinin bulanık kümeye $\mu_F(176)=0,1$ üyeliği olur.

Tanım 2.0.2. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Derecesi 0'dan büyük olan elemanların kümesine F bulanık kümesinin *destek (support) kümesi* denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$\text{supp}(F) = \{x \in U : \mu_F(x) > 0\}$$

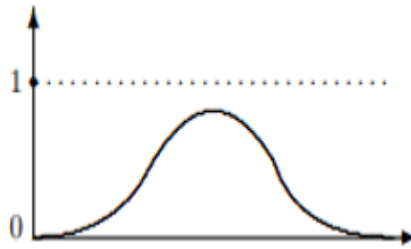
Tanım 2.0.3. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Varsa üyelik derecesi 1 olan elemanların kümesine F bulanık kümesinin *çekirdeği (core)* denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$\text{core}(F) = \{x \in U : \mu_F(x) = 1\}$$

Tanım 2.0.4. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. En yüksek üyelik derecesine F bulanık kümesinin *yüksekliği* denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$h(F) = \max\{\mu_F(x) : x \in U\}$$

Tanım 2.0.5. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Çekirdeği olan bulanık kümeler normal bulanık küme denir. Yani en az bir $x \in U$ için $\mu_F(x) = 1$ oluyorsa F bulanık kümesi normaldir. Aksine çekirdeği boş küme olan bulanık kümeler normal olmayan bulanık küme denir. Yani, Şekil 2.2'deki gibi $\mu_F(x) = 1$ olacak şekilde hiçbir $x \in U$ yok ise F bulanık kümesi normal değildir.



Şekil 2.2 Normal olmayan bir bulanık küme

Normal olmayan bir bulanık küme, üyelik fonksiyonunun her değerinin yüksekliğine bölünmesiyle bir normal bulanık küme dönüşür.

Örnek 2.0.3. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde tanımlı

$$F = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.5}, \frac{x_3}{1}, \frac{x_5}{0.2}, \frac{x_6}{1} \right\}$$

$$G = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.7}, \frac{x_3}{0.8}, \frac{x_5}{0.5} \right\}$$

bulanık kümeleri verilsin. Burada,

$$\text{supp}(F) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}, \text{supp}(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} \text{ ve } \text{core}(F) = \{x_4, x_6\}$$

olduğu için F normal bulanık kümedir, fakat $\text{core}(G) = \emptyset$ olduğu için G normal olmayan bir bulanık kümedir. $h(F) = 1$ ve $h(G) = 0.8$ olur. G bulanık kümesinin üyelik fonksiyonunun bütün değeri 0.8 yükseklik değerine bölünürse

$$G = \left\{ \frac{x_1}{0.37}, \frac{x_2}{0.87}, \frac{x_3}{1}, \frac{x_5}{0.62} \right\}$$

şeklinde normal bir bulanık kümeye dönüşür.

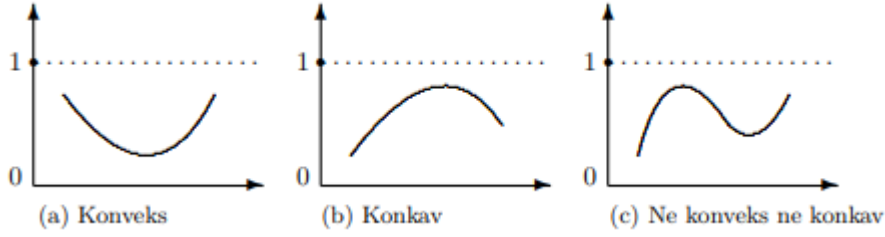
Tanım 2.0.6. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Her $x_1, x_2 \in U$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\mu_F [\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \geq \min(\mu_F(x_1), \mu_F(x_2))$$

oluyorsa F bulanık kümesinin *konveks (dış bükey)* ve

$$\mu_F [\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \leq \max(\mu_F(x_1), \mu_F(x_2))$$

oluyorsa F bulanık kümesinin *konkav (iç bükey)* denir.



Şekil 2.3 Konveks ve konkav üyelik fonksiyonları

Tanım 2.0.7. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Eğer her $x \in U$ için $\mu_F(x) = 0$ oluyorsa, F bulanık kümesine *boş bulanık küme* denir ve $\tilde{\emptyset}$ ile gösterilir.

Örnek 2.0.4. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde bir F bulanık kümesinin üyelik fonksiyonları değerleri $\mu_F(x_1) = \mu_F(x_2) = \mu_F(x_3) = \mu_F(x_4) = \mu_F(x_5) = \mu_F(x_6) = 0$ ise $F = \tilde{\emptyset}$ boş bulanık kümedir.

Tanım 2.0.8. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Eğer her $x \in U$ için $\mu_F(x) = 1$ oluyorsa, F bulanık kümesine *evrensel bulanık küme* denir ve U ile gösterilir.

Örnek 2.0.5. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde bir F bulanık kümesinin üyelik fonksiyonları değerleri $\mu_F(x_1) = \mu_F(x_2) = \mu_F(x_3) = \mu_F(x_4) = \mu_F(x_5) = \mu_F(x_6) = 1$ ise $F = U$ evrensel bulanık kümedir.

Not 2.0.1. Her klasik küme her elemanının üyelik değerleri 1 olan bir bulanık kümedir.

Tanım 2.0.9. F ve G , U üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun. Eğer her $x \in U$ için $\mu_F(x) = \mu_G(x)$ oluyorsa, F ve G bulanık kümelerine *eşit bulanık kümeler* denir ve $F = G$ ile gösterilir.

Örnek 2.0.6. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde

$$F = \left\{ \frac{x_2}{0.5}, \frac{x_3}{0.8}, \frac{x_5}{1} \right\} \text{ ve } G = \left\{ \frac{x_2}{0.5}, \frac{x_3}{0.8}, \frac{x_5}{1} \right\}$$

bulanık kümeleri verilsin. Burada,

$$\begin{aligned}\mu_F(x_1) = \mu_G(x_1) = 0, \quad \mu_F(x_2) = \mu_G(x_2) = 0.5, \quad \mu_F(x_3) = \mu_G(x_3) = 0.8, \\ \mu_F(x_4) = \mu_G(x_4) = 0, \quad \mu_F(x_5) = \mu_G(x_5) = 1, \quad \mu_F(x_6) = \mu_G(x_6) = 0,\end{aligned}$$

olduğu için $F = G$ olur.

Tanım 2.0.10. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin.

$$|F| = \sum_{x \in U} \mu_F(x)$$

değerine F bulanık kümesinin *büyüklüğü* denir. Bulanık küme klasik küme ise büyüklük eleman sayısı olur.

Tanım 2.0.11. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Her $x_1, x_2 \in U$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$F_\alpha = \{x \in U : \mu_F(x) \geq \alpha\}$$

kümesine F bulanık kümesinin α -kesimi ve

$$F_\alpha = \{x \in U : \mu_F(x) > \alpha\}$$

kümesine de F bulanık kümesinin *güçlü α -kesimi* denir.

$$\alpha(A) = \{a : x \in U, \mu_F(x) = a\}$$

kümesine F bulanık kümesinin α -seviyeler kümesi denir.

Tanım 2.0.12. F ve G , U üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun. Eğer her $x \in U$ için $\mu_F(x) \leq \mu_G(x)$ oluyorsa, F bulanık kümesi G bulanık kümesinin bir *alt kümesi* olur ve $F \subseteq G$ ile gösterilir.

Örnek 2.0.7. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde

$$F = \left\{ \frac{x_2}{0.5}, \frac{x_3}{0.8}, \frac{x_5}{0.7} \right\} \text{ ve } G = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.7}, \frac{x_3}{0.9}, \frac{x_5}{0.7} \right\}$$

bulanık kümeleri verilsin. Burada,

$$\begin{aligned} \mu_F(x_1) = 0 \leq \mu_G(x_1) = 0.3, \quad \mu_F(x_2) = 0.5 \leq \mu_G(x_2) = 0.7, \quad \mu_F(x_3) = 0.8 \leq \mu_G(x_3) = 0.9, \\ \mu_F(x_5) = 0.7 \leq \mu_G(x_5) = 0.7, \quad \mu_F(x_6) = 0 \leq \mu_G(x_6) = 0, \end{aligned}$$

olduğundan $F \subseteq G$ olur.

2.1. Bulanık Kümelerde İşlemler

Burada bulanık küme işlemlerini ve temel özelliklerini vereceğiz.

Tanım 2.1.1. U üzerinde tanımlı F ve G bulanık kümeleri verilsin. F ve G bulanık kümelerinin birleşimi

$$F \cup G = \left\{ \left(\frac{x}{\mu_{F \cup G}(x)} \right) : x \in U \right\}$$

şekilde tanımlanır ve burada

$$\mu_{F \cup G}(x) = \max(\mu_F(x), \mu_G(x))$$

Örnek 2.1.1. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde

$$F = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.4}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_5}{0.6}, \frac{x_6}{0.1} \right\}$$

ve

$$G = \left\{ \frac{x_1}{0.1}, \frac{x_2}{0.6}, \frac{x_3}{0.1}, \frac{x_4}{0.9}, \frac{x_5}{0.5}, \frac{x_6}{0.1} \right\}$$

bulanık kümeleri verilsin. Bu durumda,

$$F \tilde{\cup} G = \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), \mu_G(x))} : x \in U \right\} = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.6}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_4}{0.9}, \frac{x_5}{0.6}, \frac{x_6}{0.1} \right\}$$

Teorem 2.1.1. F, U üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun.

i) $F \tilde{\cup} F = F$

ii) $F \tilde{\cup} \emptyset = F$

iii) $F \tilde{\cup} U = U$

İspat: U üzerinde bir

$$F = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\}$$

bulanık kümesi verilsin.

i) $F \tilde{\cup} F = \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), \mu_F(x))} : x \in U \right\} = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\} = F$

ii) $F \tilde{\cup} \emptyset = \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), 0)} : x \in U \right\} = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\} = F$

iii) $F \tilde{\cup} U = \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), 1)} : x \in U \right\} = \left\{ \frac{x}{1} : x \in U \right\} = U$

Teorem 2.1.2. F, G ve H, U üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun.

i) $F \tilde{\cup} G = G \tilde{\cup} F$

ii) $F \tilde{\cup} (G \tilde{\cup} H) = (F \tilde{\cup} G) \tilde{\cup} H$

İspat: U üzerinde tanımlı

$$F = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\}, G = \left\{ \frac{x}{\mu_G(x)} : x \in U \right\} \text{ ve } H = \left\{ \frac{x}{\mu_H(x)} : x \in U \right\}$$

bulanık kümeleri verilsin.

i) $F \tilde{\cup} G = \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), \mu_G(x))} : x \in U \right\} = \left\{ \frac{x}{\max(\mu_G(x), \mu_F(x))} : x \in U \right\} = G \tilde{\cup} F$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } F \tilde{\cap} (G \tilde{\cap} H) &= \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), \max(\mu_G(x), \mu_H(x)))} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{\max((\max(\mu_F(x), \mu_G(x))), \mu_H(x))} : x \in U \right\} = (F \tilde{\cap} G) \tilde{\cap} H
\end{aligned}$$

Tanım 2.1.2. U üzerinde tanımlı F ve G bulanık kümeleri verilsin. F ve G bulanık kümelerinin *kesişimi*

$$F \tilde{\cap} G = \left\{ \frac{x}{\mu_{F \tilde{\cap} G}} : x \in U \right\}$$

şekilde tanımlanır ve burada

$$\mu_{F \tilde{\cap} G}(x) = \min(\mu_F(x), \mu_G(x))$$

Örnek 2.1.2. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde

$$F = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.4}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_5}{0.6}, \frac{x_6}{0.1} \right\}$$

ve

$$G = \left\{ \frac{x_1}{0.1}, \frac{x_2}{0.6}, \frac{x_3}{0.1}, \frac{x_4}{0.9}, \frac{x_5}{0.5}, \frac{x_6}{0.1} \right\}$$

bulanık kümeleri şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$F \tilde{\cap} G = \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), \mu_G(x))} : x \in U \right\} = \left\{ \frac{x_1}{0.1}, \frac{x_2}{0.4}, \frac{x_3}{0.1}, \frac{x_5}{0.5}, \frac{x_6}{0.1} \right\}$$

Teorem 2.1.3. F, U üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun.

i) $F \tilde{\cap} F = F$

ii) $F \tilde{\cap} \emptyset = \emptyset$

iii) $F \tilde{\cap} U = F$

İspat: U üzerinde bir

$$F = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\}$$

bulanık kümesi verilsin.

$$\text{i) } F \tilde{\cap} F = \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), \mu_F(x))} : x \in U \right\} = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\} = F$$

$$\text{ii) } F \tilde{\cap} \emptyset = \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), 0)} : x \in U \right\} = \{ \} = \emptyset$$

$$\text{iii) } F \tilde{\cap} U = \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), 1)} : x \in U \right\} = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\} = F$$

Teorem 2.1.4. F, G ve H, U üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun.

$$\text{i) } F \tilde{\cap} G = G \tilde{\cap} F$$

$$\text{ii) } F \tilde{\cap} (G \tilde{\cap} H) = (F \tilde{\cap} G) \tilde{\cap} H$$

İspat: U üzerinde tanımlı

$$F = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\}, G = \left\{ \frac{x}{\mu_G(x)} : x \in U \right\} \text{ ve } H = \left\{ \frac{x}{\mu_H(x)} : x \in U \right\}$$

bulanık kümeleri verilsin.

$$\begin{aligned} \text{i) } F \tilde{\cap} G &= \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), \mu_G(x))} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{\min(\mu_G(x), \mu_F(x))} : x \in U \right\} \\ &= G \tilde{\cap} F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } F \tilde{\cap} (G \tilde{\cap} H) &= \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), \min(\mu_G(x), \mu_H(x)))} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{\min(\min(\mu_F(x), \mu_G(x)), \mu_H(x))} : x \in U \right\} \\
&= (F \tilde{\cap} G) \tilde{\cap} H
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.5. F, G ve H, U üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun.

$$\text{i) } F \tilde{\cup} (G \tilde{\cap} H) = (F \tilde{\cup} G) \tilde{\cap} (F \tilde{\cup} H)$$

$$\text{ii) } F \tilde{\cup} (G \tilde{\cap} H) = (F \tilde{\cap} G) \tilde{\cup} (F \tilde{\cap} H)$$

İspat: U üzerinde tanımlı

$$F = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\}, G = \left\{ \frac{x}{\mu_G(x)} : x \in U \right\} \text{ ve } H = \left\{ \frac{x}{\mu_H(x)} : x \in U \right\}$$

bulanık kümeleri verilsin.

$$\begin{aligned}
\text{i) } F \tilde{\cup} (G \tilde{\cap} H) &= \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), \min(\mu_G(x), \mu_H(x)))} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{\min(\max(\mu_F(x), \mu_G(x)), \max(\mu_F(x), \mu_H(x)))} : x \in U \right\} \\
&= (F \tilde{\cup} G) \tilde{\cap} (F \tilde{\cup} H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } F \tilde{\cup} (G \tilde{\cap} H) &= \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), \max(\mu_G(x), \mu_H(x)))} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{\max(\min(\mu_F(x), \mu_G(x)), \min(\mu_F(x), \mu_H(x)))} : x \in U \right\} \\
&= (F \tilde{\cap} G) \tilde{\cup} (F \tilde{\cap} H)
\end{aligned}$$

Tanım 2.1.3. U üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. F bulanık kümesinin *tümleyeni*

$$F^C = \left\{ \frac{x}{\mu_{F^C}(x)} : x \in U \right\}$$

şekilde tanımlanır ve burada $\mu_{F^C}(x) = 1 - \mu_F(x)$ dir.

Örnek 2.1.3. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde

$$F = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.4}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_5}{0.6}, \frac{x_6}{0.1} \right\}$$

bulanık kümesi şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$F^C = \left\{ \frac{x_1}{0.7}, \frac{x_2}{0.6}, \frac{x_3}{0.3}, \frac{x_5}{0.4}, \frac{x_6}{0.9} \right\}$$

olur.

Not 2.1.1. F, U üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun.

i) $F \tilde{\cup} F^C \neq U$

ii) $F \tilde{\cap} F^C \neq \emptyset$

Bu notumuzun özelliklerini aşağıdaki Örnek 2.1.4. üzerinden göstermiş olalım.

Örnek 2.1.4. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde

$$F = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.4}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_5}{0.6}, \frac{x_6}{1} \right\}$$

bulanık kümesi şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$F^C = \left\{ \frac{x_1}{0.7}, \frac{x_2}{0.6}, \frac{x_3}{0.3}, \frac{x_5}{0.4}, \frac{x_6}{0} \right\}$$

olur. Bu durumda

$$i) F \tilde{\cup} F^C = \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), 1 - \mu_F(x))} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x_1}{0.7}, \frac{x_2}{0.6}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_5}{0.6}, \frac{x_6}{1} \right\}$$

$$\neq U$$

$$\text{ii) } F \tilde{\cap} F^c = \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), 1 - \mu_F(x))} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.4}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_5}{0.4}, \frac{x_6}{0} \right\}$$

$$\neq \tilde{\emptyset}$$

Teorem 2.1.7. F ve G, U üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun.

$$\text{i) } (F \tilde{\cup} G)^c = F^c \tilde{\cap} G^c$$

$$\text{ii) } (F \tilde{\cap} G)^c = F^c \tilde{\cup} G^c$$

İspat: U üzerinde tanımlı

$$F = \left\{ \frac{x}{\mu_F(x)} : x \in U \right\} \text{ ve } G = \left\{ \frac{x}{\mu_G(x)} : x \in U \right\}$$

bulanık kümeleri verilsin.

$$\begin{aligned} \text{i) } (F \tilde{\cup} G)^c &= \left\{ \frac{x}{\max(\mu_F(x), \mu_G(x))} : x \in U \right\}^c \\ &= \left\{ \frac{x}{1 - \max(\mu_F(x), \mu_G(x))} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{\min(1 - \mu_F(x), 1 - \mu_G(x))} : x \in U \right\} \\ &= F^c \tilde{\cap} G^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } (F \tilde{\cap} G)^c &= \left\{ \frac{x}{\min(\mu_F(x), \mu_G(x))} : x \in U \right\}^c \\ &= \left\{ \frac{x}{1 - \min(\mu_F(x), \mu_G(x))} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{\max(1 - \mu_F(x), 1 - \mu_G(x))} : x \in U \right\} \\ &= F^c \tilde{\cup} G^c \end{aligned}$$

3. BULANIK BAĞINTI

Bulanık bağıntı iki küme elemanlarının belli bir üyelik değeriyle eşleşmesiyle tanımlanır. Bu bölümde bulanık bağıntı ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu bölümdeki tanım ve teoremler, bu tez çalışmanın sembol gösterimleri dikkate alınarak ve içeriğine uygun olarak (Baykal ve Beyan, 2004), (Dubois ve Prade,1980), (Klir ve Folger,1988), (Tanaka,1987) ve (Zimmermann, 1991) kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 3.0.1. U ve V iki evrensel küme olsun. $U \times V$ kümesi üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_R(x, y)} : (x, y) \in U \times V \right\} \text{ olmak üzere } \mu_R : U \times V \rightarrow [0,1]$$

bulanık kümesine $U \times V$ üzerinde bir *bulanık bağıntı* denir. Bulanık bağıntılar genelde $R, S, T, \dots$ gibi harflerle gösterilir. Burada $U = V$ olabilir ve o zaman R bulanık bağıntısına $U \times V$ yerine U^2 kullanılır ve kısaca U üzerinde tanımlı denir.

Bulanık bağıntıyı genelleştirebiliriz. $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ kartezyen çarpımının üzerinde tanımlı $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$R = \left\{ \frac{(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n)} : x_i \in U_i \right\}$$

bulanık kümesine $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ üzerinde bir n -li bulanık bağıntı denir.

Örnek 3.0.1. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R_1 = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntıdır ve

$$R_2 = \left\{ \frac{(x_1, x_1)}{0.6}, \frac{(x_1, x_2)}{0.3}, \frac{(x_1, x_3)}{0.7}, \frac{(x_2, x_2)}{0.9}, \frac{(x_3, x_3)}{1}, \frac{(x_3, x_2)}{0.5} \right\}$$

kümesi U üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntıdır.

Örnek 3.0.2. $U = \{1,2,3\}$ üzerinde tanımlı $R = \left\{ \frac{(x,y)}{\mu_R(x,y)} : (x,y) \in U \times U \right\}$ bulanık bağıntısının üyelik fonksiyonu

$$\mu_R = U^2 \rightarrow [0,1], \quad \mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0,4 & x < y \\ 0, & y < x \end{cases}$$

şeklinde verilmiş ise kendisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$R = \left\{ \frac{(1,1)}{1}, \frac{(1,2)}{0,4}, \frac{(1,2)}{0,4}, \frac{(2,2)}{1}, \frac{(2,3)}{0,4}, \frac{(3,3)}{1} \right\}$$

Not 3.0.1. Bulanık bağıntıyı Tanım 3.0.1’de iki klasik kümenin Kartezyen çarpımıyla tanımladık. Bulanık bağıntı, iki bulanık küme veya biri bulanık diğeri klasik kümelerin kartezyen çarpımıyla da tanımlanabilir. F ve G bulanık kümeleri sırasıyla U ve V üzerinde tanımlı olsun.

$$R = F \times G = \left\{ \frac{(x,y)}{\mu_R(x,y)} : (x,y) \in U \times V \right\} \text{ olmak üzere } \mu_R(x,y) \leq \min(\mu_F(x), \mu_G(x))$$

kartezyen çarpımı $U \times V$ üzerinde bir bulanık bağıntıdır. Burada eğer

$$\mu_R(x,y) = \min(\mu_F(x), \mu_G(x))$$

olursa R bulanık bağıntısına *güçlü bulanık bağıntı* denir. Her klasik küme, elemanlarının üyelik değeri 1 olan bir bulanık küme olduğundan bir klasik küme ile bir bulanık kümenin bulanık kartezyen çarpımından da bulanık bağıntı yazılabilir. A klasik kümesi U ve F bulanık kümesi V üzerinde tanımlı olsun.

$$S = A \times F = \left\{ \frac{(x,y)}{\mu_S(x,y)} : (x,y) \in U \times V \right\}, \mu_S(x,y) \leq \mu_F(y)$$

kartezyen çarpımı $U \times V$ üzerinde bir bulanık bağıntıdır. Benzer şekilde eğer $\mu_S(x, y) = \mu_F(y)$ ise S bulanık bağıntısı güçlü bir bulanık bağıntıdır. Burada

$$\forall x \in A, \quad \mu_A(x) = 1$$

elde edilir.

Örnek 3.0.3. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$F = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi ve

$$G = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.6}, \frac{(x_1, y_3)}{0.3}, \frac{(x_1, y_4)}{0.7}, \frac{(x_2, y_1)}{0.9}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_2, y_3)}{0.5} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntı olsun.

$$F \times G = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.3}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

olsun. Not 3.0.1. gereği

$$R = F \times G = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_R(x, y)} : (x, y) \in U \times V \right\}, \quad \mu_R(x, y) = \min(\mu_F(x), \mu_G(x))$$

sağlayıp sağlamadığına bakacağız.

$$\mu_R(x, y) = \min(\mu_F(x), \mu_G(x))$$

$$= \min \left\{ \left(\frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_1)}{0.6} \right), \left(\frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_3)}{0.3} \right), \left(\frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_1, y_4)}{0.7} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_1)}{0.9} \right), \left(\frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_2)}{1} \right), \left(\frac{(x_2, y_3)}{0.4}, \frac{(x_2, y_3)}{0.5} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.3}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

$$= F \times G$$

Olduğundan $R = F \times G$ bulanık bağıntısına *güçlü bulanık bağıntısı* olur.

Örnek 3.0.4. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ A klasik kümesi ve F bulanık kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı olsun. R bağıntısı

$$R = \{(x_1, y_3), (x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_4, y_1)\}$$

olsun.

$$A = \left\{ \frac{(x_1, y_3)}{1}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_3, y_2)}{1}, \frac{(x_4, y_1)}{1} \right\}$$

Her klasik küme, elemanlarının üyelik değeri 1 olan bir bulanık küme olduğundan bir klasik küme ile bir bulanık kümenin bulanık kartezyen çarpımından da bulanık bağıntı yazılabilir olduğundan tüm üyelik değerleri 1 dir.

Tanım 3.0.2. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $V = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ olsun. $U \times V$ üzerinde bir R bulanık bağıntısında $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ olmak üzere $\mu_R(x_i, y_j)$ değerlerinin aşağıdaki Şekil 3.1'daki gibi gösterilmesine R *bulanık bağıntının tablosu* denir.

R	y_1	y_2	...	y_m
x_1	$\mu_R(x_1, y_1)$	$\mu_R(x_1, y_2)$	...	$\mu_R(x_1, y_m)$
x_2	$\mu_R(x_2, y_1)$	$\mu_R(x_2, y_2)$	...	$\mu_R(x_2, y_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	$\mu_R(x_n, y_1)$	$\mu_R(x_n, y_2)$	...	$\mu_R(x_n, y_m)$

Tablo 3.1. R Bulanık Bağıntısının Tablosu

R bulanık bağıntının tablosundan elde edilen

$$[R]_{n \times m} = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_m) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_R(x_n, y_1) & \mu_R(x_n, y_2) & \cdots & \mu_R(x_n, y_m) \end{bmatrix}$$

matrise R bulanık bağıntısının *bulanık matrisi* denir. Bundan sonra bir karışıklığa neden olmayacaksa $[R]_{n \times m}$ yerine $[R]$ yazılır.

Örnek 3.0.5. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{1}, \frac{(x_3, y_2)}{0.4} \right\}$$

bulanık bağıntının tablosu Şekil 3.1. deki gibi olsun. Bulanık matrisini yazalım.

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.3	0	0.7	0.5
x_2	0.8	0.2	1	0
x_3	0	0.4	0	0

Şekil 3. 1. R Bulanık Bağıntısının Tablosu

$$[R] = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 3.0.3. $U \times V$ üzerinde tanımlı R bulanık bağıntısı verilsin.

$$R_U = \left\{ \frac{x}{\mu_{R_U}(x, y)} : \mu_{R_U}(x, y) = \max_{y \in V} \mu_R(x, y) \right\}$$

U üzerindeki bulanık kümesine R bağıntısının U üzerine *izdüşümü* ve

$$R_V = \left\{ \frac{x}{\mu_{R_V}(x, y)} : \mu_{R_V}(x, y) = \max_{y \in U} \mu_R(x, y) \right\}$$

U üzerindeki bulanık kümesine R bağıntısının V üzerine *izdüşümü* denir.

Örnek 3.0.6. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{1}, \frac{(x_3, y_2)}{0.4} \right\}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulanık bağıntının U ve V üzerindeki izdüşümlerini bulalım.

$$R_U = \left\{ \frac{x_1}{\max(0.3, 0.7, 0.5)}, \frac{x_2}{\max(0.8, 0.2, 1)}, \frac{x_3}{\max(0, 0.4, 0)} \right\}$$

$$R_V = \left\{ \frac{y_1}{\max(0.3, 0.8, 0)}, \frac{y_2}{\max(0, 0.2, 0.4)}, \frac{y_3}{\max(0.7, 1, 0)}, \frac{y_4}{\max(0.5, 0, 0)} \right\}$$

elde edilir ve buradan istenilenler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_U = \left\{ \frac{x_1}{0.7}, \frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{0.4} \right\}, \quad R_V = \left\{ \frac{y_1}{0.8}, \frac{y_2}{0.4}, \frac{y_3}{1}, \frac{y_4}{0.5} \right\}$$

Tanım 3.0.4. U, V ve W evrensel kümeleri olsun. U üzerinde bir F bulanık kümesi verilsin. $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$c(R) = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_F(x)} : (x, y) \in U \times V \right\}$$

bulanık bağıntısına F bulanık kümesinin $U \times V$ üzerindeki silindirik genişlemesi denir. Bulanık bağıntının da *silindirik genişlemesi* olur. $U \times V \times W$ üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısının. $U \times V \times W$ üzerindeki *silindirik genişlemesi* aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$c(R) = \left\{ \frac{(x, y, z)}{\mu_R(x, y)} : (x, y, z) \in U \times V \times W \right\}$$

Benzer şekilde silindirik genişleme genelleştirilebilir.

Örnek 3.0.7. Sırasıyla $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümeleri üzerinde tanımlı

$$F = \left\{ \frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.7}, \frac{x_3}{0.5} \right\}, \quad G = \left\{ \frac{y_1}{0.4}, \frac{y_2}{0.8} \right\}$$

iki bulanık kümesi verilsin. Bu iki bulanık kümenin $U \times V$ üzerindeki silindirik genişlemesi olan $c(F)$ ve $c(G)$ bulanık bağıntılarını bulalım.

$$c(F) = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_2)}{0.3}, \frac{(x_2, y_1)}{0.7}, \frac{(x_2, y_2)}{0.7}, \frac{(x_3, y_1)}{0.5}, \frac{(x_3, y_2)}{0.5} \right\}$$

$$c(G) = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.4}, \frac{(x_1, y_2)}{0.8}, \frac{(x_2, y_1)}{0.4}, \frac{(x_2, y_2)}{0.8}, \frac{(x_3, y_1)}{0.4}, \frac{(x_3, y_2)}{0.8} \right\}$$

Örnek 3.0.8. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_2)}{0.7}, \frac{(x_2, y_1)}{0.5}, \frac{(x_2, y_2)}{0.8}, \frac{(x_3, y_1)}{0.2}, \frac{(x_3, y_2)}{1} \right\}$$

bulanık bağıntısı olsun ve $W = \{z_1\}$ evrensel kümesi olsun. $F = \left\{ \frac{z_1}{0.4} \right\}$ olsun. Bu iki bulanık kümenin $U \times V \times W$ üzerindeki silindirik genişlemesi olan $c(R)$ ve $c(F)$ bulanık bağıntılarını bulalım.

$$c(R) = \left\{ \frac{(x_1, y_1, z_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_2, z_1)}{0.7}, \frac{(x_2, y_1, z_1)}{0.5}, \frac{(x_2, y_2, z_1)}{0.8}, \frac{(x_3, y_1, z_1)}{0.2}, \frac{(x_3, y_2, z_1)}{1} \right\}$$

$$c(F) = \left\{ \frac{(x_1, y_1, z_1)}{0.4}, \frac{(x_1, y_2, z_1)}{0.4}, \frac{(x_2, y_1, z_1)}{0.4}, \frac{(x_2, y_2, z_1)}{0.4}, \frac{(x_3, y_1, z_1)}{0.4}, \frac{(x_3, y_2, z_1)}{0.4} \right\}$$

Tanım 3.0.5. $U \times V$ üzerinde tanımlı R ve S bulanık bağıntıları verilsin.

$$R \cup S = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R \cup S}(x, y)} : \mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \right\}$$

$$R \cap S = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R \cap S}(x, y)} : \mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \right\}$$

$$R' = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R'}(x, y)} : \mu_{R'}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y) \right\}$$

bulanık bağıntılarına sırasıyla R ve S bulanık bağıntılarının *birleşimi*, *kesişimi* ve *tümleyeni* denir.

Örnek 3.0.9. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.6}, \frac{(x_1, y_3)}{0.3}, \frac{(x_1, y_4)}{0.7}, \frac{(x_2, y_1)}{0.9}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_2, y_3)}{0.5} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntı olsun. Bu bağıntıların birleşimini, kesişimini ve tümleyenini bulalım.

$$R \cup S = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R \cup S}(x, y)} : \mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \right\}$$

tanımını kullanarak

$$R \cup S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.6}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.7}, \frac{(x_2, y_1)}{0.9}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_2, y_3)}{0.5} \right\}$$

elde edilir.

$$R \cap S = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R \cap S}(x, y)} : \mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \right\}$$

tanımını kullanarak

$$R \cap S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.3}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

elde edilir.

$$R' = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R'}(x, y)} : \mu_{R'}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y) \right\}$$

tanımını kullanarak

$$R' = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.7}, \frac{(x_1, y_3)}{0.3}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.2}, \frac{(x_2, y_2)}{0.8}, \frac{(x_2, y_3)}{0.6} \right\}$$

ve

$$S' = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.4}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.3}, \frac{(x_2, y_1)}{0.1}, \frac{(x_2, y_2)}{0}, \frac{(x_2, y_3)}{0.5} \right\}$$

elde edilmiş olur.

Not 3.0.2. Bulanık bağıntılarda birer bulanık küme olduğu için bulanık kümelerde geçerli olan kesişim, birleşim ve tümleyen işlemleriyle ilgili bütün teoremler bulanık bağıntılar için de geçerli olduğu için onları burada tekrar vermeyeceğiz.

Tanım 3.0.6. $U \times V$ üzerinde tanımlı R ve S bulanık bağıntıları verilsin. Eğer

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(x, y) = \mu_S(x, y)$$

ise R ve S bulanık bağıntılarına *eşit bulanık bağıntılar* denir ve $R = S$ yazılır. Eğer

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$$

ise R bulanık bağıntısı S bulanık bağıntısının *alt bulanık bağıntısıdır* denir ve $R \subseteq S$ yazılır.

Örnek 3.0.10. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntı olsun. Tanım 3.0.6 ya göre $\mu_R(x, y) = \mu_S(x, y)$ olduğundan R ve S bulanık bağıntılarına eşit bulanık bağıntılar denir.

Örnek 3.0.11. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.4}, \frac{(x_1, y_3)}{0.8}, \frac{(x_1, y_4)}{0.8}, \frac{(x_2, y_1)}{1}, \frac{(x_2, y_2)}{0.5}, \frac{(x_2, y_3)}{0.6} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntı olsun. Tanım 3.0.6' ya göre

$$\mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$$

olduğundan R bulanık bağıntısı S bulanık bağıntısının alt bulanık bağıntısıdır. Burada $R \subseteq S$ dır.

Tanım 3.0.7. $U \times V$ üzerine tanımlı bir R bulanık bağıntıları verilsin. Eğer

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(x, y) = 1$$

ise R bulanık bağıntısına *evrensel bulanık bağıntı* denir ve U ile gösterilir. Eğer

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(x, y) = 0$$

ise R bulanık bağıntısına *boş bulanık bağıntı* denir ve $\emptyset$ ile gösterilir.

Örnek 3.0.12. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{1}, \frac{(x_1, y_2)}{1}, \frac{(x_2, y_1)}{1}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_3, y_1)}{1}, \frac{(x_3, y_2)}{1} \right\}$$

bulanık bağıntısı olsun. Tanım 3.0.7 ye göre $\mu_R(x, y) = 1$ ise R bulanık bağıntısına *evrensel bulanık bağıntı* denir.

Örnek 3.0.13. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0}, \frac{(x_1, y_2)}{0}, \frac{(x_2, y_1)}{0}, \frac{(x_2, y_2)}{0}, \frac{(x_3, y_1)}{0}, \frac{(x_3, y_2)}{0} \right\}$$

bulanık bağıntısı olsun. Tanım 3.0.7 ye göre $\mu_R(x, y) = 0$ ise R bulanık bağıntısına boş bulanık bağıntı denir.

Teorem 3.0.1. $U \times V$ üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntıları verilsin.

- i) $R \cup \emptyset = R$
- ii) $R \cup S = S$
- iii) $R \cap \emptyset = \emptyset$
- iv) $R \cap S = R$

İspat. i) Tanım 3.0.5 a göre

$$R \cup S = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R \cup S}(x, y)} : \mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \right\}$$

S kümesi de Tanım 3.0.7 ye göre $\mu_S(x, y) = 0$ ise S bulanık bağıntısı boş bulanık bağıntı olduğundan birleşim tanımına göre $R \cup \emptyset = R$ elde edilmiş olur.

ii) $U \times V$ üzerine tanımlı bir R bulanık bağıntısı ve S kümesi de bir klasik bağıntı olsun.

$$R \cup S = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R \cup S}(x, y)} : \mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \right\} = \mu_S(x, y) = 1$$

olduğundan $\mu_S(x, y) = 1$ her zaman büyük ya da eşit olur. Bulanık bağıntılarda birleşim tanımına göre de $R \cup S = S$ elde edilmiş olur.

iii) Tanım 3.0.5 e göre

$$R \cap S = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R \cap S}(x, y)} : \mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \right\}$$

S kümesi de Tanım 3.0.7 ye göre $\mu_S(x, y) = 0$ ise S bulanık bağıntısına boş bulanık bağıntı olduğundan bulanık bağıntılarda kesişim tanımına göre $R \cap \emptyset = \emptyset$ elde edilmiş olur.

iv) $U \times V$ üzerine tanımlı bir R bulanık bağıntısı ve S kümesi de bir klasik bağıntısı olsun.

$$R \cap S = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R \cap S}(x, y)} : \mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \right\} = \mu_S(x, y) = 1$$

olduğundan $\mu_S(x, y) = 1$ her zaman büyük ya da eşit olur. Bulanık bağıntılarda kesişim tanımına göre de $R \cap S = R$ elde edilmiş olur.

Tanım 3.0.8. $U \times V$ üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısı verilsin. Buna göre,

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{R^{-1}}(y, x)} : \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y) \right\}$$

ile tanımlı R^{-1} bulanık bağıntısına *ters bulanık bağıntı* denir.

Örnek 3.0.14. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.5}, \frac{(x_1, y_2)}{0.3}, \frac{(x_2, y_1)}{0.7}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_3, y_1)}{0.6}, \frac{(x_3, y_2)}{0.4} \right\}$$

bulanık bağıntısı olsun. Tanım 3.0.8 e göre

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.5}, \frac{(y_2, x_1)}{0.3}, \frac{(y_1, x_2)}{0.7}, \frac{(y_2, x_2)}{1}, \frac{(y_1, x_3)}{0.6}, \frac{(y_2, x_3)}{0.4} \right\}$$

R bulanık bağıntısının tersidir.

Teorem 3.0.2. $U \times V$ üzerinde tanımlı R ve S bulanık bağıntıları verilsin.

- i) $(R^{-1})^{-1} = R$
- ii) $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$
- iii) $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- iv) $[R^{-1}] = [R]^T$ (T:Transpozu)

İspat: i) $U \times V$ üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısı verilsin.

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{\mu_R(x, y) = \mu_{R^{-1}}(y, x)\} \\ (R^{-1})^{-1} &= \{\mu_{(R^{-1})^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)\} \\ (R^{-1})^{-1} &= R \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $U \times V$ üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısı verilsin.

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{\mu_R(x, y) = \mu_{R^{-1}}(y, x)\} \\ (R^{-1})^c &= \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R^{-1})^c}(y, x)} : \mu_{(R^{-1})^c}(y, x) = 1 - \mu_{R^{-1}}(y, x) \right\} \\ R^c &= \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{R^c}(x, y)} : \mu_{R^c}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y) \right\} \end{aligned}$$

$$(R^c)^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R^c)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(R^c)^{-1}}(y, x) = 1 - \mu_{R^{-1}}(y, x) \right\}$$

(1) = (2) olduğundan $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$ dir.

iii) $U \times V$ üzerinde tanımlı R ve S bulanık bağıntıları verilsin.

$$R \subseteq S \Rightarrow \forall (x, y) \in U \times V, \mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$$

$$R^{-1} = \{\mu_R(x, y) = \mu_{R^{-1}}(y, x)\}$$

$$S^{-1} = \{\mu_S(x, y) = \mu_{S^{-1}}(y, x)\}$$

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) \leq \mu_{S^{-1}}(x, y)$$

$$R^{-1} \subseteq S^{-1}$$

elde edilir. Tersini de gösterelim.

$$R^{-1} \subseteq S^{-1} \Rightarrow \mu_{R^{-1}}(x, y) \leq \mu_{S^{-1}}(x, y)$$

$$R^{-1} = \{\mu_R(x, y) = \mu_{R^{-1}}(y, x)\}$$

$$S^{-1} = \{\mu_S(x, y) = \mu_{S^{-1}}(y, x)\}$$

$$\mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$$

$$R \subseteq S$$

elde edilir. Dolayısıyla $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$ elde edilir.

iv) $U \times V$ üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısı verilsin.

$$[R^{-1}] = [R]^T \text{ (T : Transpozu)}$$

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{R^{-1}}(y, x)} : \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y) \right\}$$

$$[R^{-1}] = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = [R]^T$$

$$[R^{-1}] = [R]^T$$

elde edilir.

Örnek 3.0.15. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.5}, \frac{(x_1, y_2)}{0.3}, \frac{(x_2, y_1)}{0.7}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_3, y_1)}{0.6}, \frac{(x_3, y_2)}{0.4} \right\}$$

bulanık bağıntısı olsun. Tanım 3.0.8 e göre

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.5}, \frac{(y_2, x_1)}{0.3}, \frac{(y_1, x_2)}{0.7}, \frac{(y_2, x_2)}{1}, \frac{(y_1, x_3)}{0.6}, \frac{(y_2, x_3)}{0.4} \right\}$$

Tanım 3.0.8 e göre R^{-1} in tersini alalım.

$$(R^{-1})^{-1} = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.5}, \frac{(x_1, y_2)}{0.3}, \frac{(x_2, y_1)}{0.7}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_3, y_1)}{0.6}, \frac{(x_3, y_2)}{0.4} \right\}$$

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

elde edilir.

Örnek 3.0.16. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.5}, \frac{(x_1, y_2)}{0.3}, \frac{(x_2, y_1)}{0.7}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_3, y_1)}{0.6}, \frac{(x_3, y_2)}{0.4} \right\}$$

bulanık bağıntısı olsun. Tanım 3.0.8 e göre

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.5}, \frac{(y_2, x_1)}{0.3}, \frac{(y_1, x_2)}{0.7}, \frac{(y_2, x_2)}{1}, \frac{(y_1, x_3)}{0.6}, \frac{(y_2, x_3)}{0.4} \right\}$$

elde edilir. Tanım 3.0.5 e göre

$$(R^{-1})^c = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.5}, \frac{(y_2, x_1)}{0.7}, \frac{(y_1, x_2)}{0.3}, \frac{(y_2, x_2)}{0}, \frac{(y_1, x_3)}{0.4}, \frac{(y_2, x_3)}{0.6} \right\} \quad (1)$$

elde edilir.

$U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.5}, \frac{(x_1, y_2)}{0.3}, \frac{(x_2, y_1)}{0.7}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_3, y_1)}{0.6}, \frac{(x_3, y_2)}{0.4} \right\}$$

bulanık bağıntısı olsun. Tanım 3.0.5 e göre

$$(R^c) = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.5}, \frac{(x_1, y_2)}{0.7}, \frac{(x_2, y_1)}{0.3}, \frac{(x_2, y_2)}{0}, \frac{(x_3, y_1)}{0.4}, \frac{(x_3, y_2)}{0.6} \right\}$$

elde edilir. Tanım 3.0.8 e göre

$$(R^c)^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.5}, \frac{(y_2, x_1)}{0.7}, \frac{(y_1, x_2)}{0.3}, \frac{(y_2, x_2)}{0}, \frac{(y_1, x_3)}{0.4}, \frac{(y_2, x_3)}{0.6} \right\} \quad (2)$$

(1) = (2) olduğundan $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$ elde edilir.

Örnek 3.0.17. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.4}, \frac{(x_1, y_3)}{0.8}, \frac{(x_1, y_4)}{0.8}, \frac{(x_2, y_1)}{1}, \frac{(x_2, y_2)}{0.5}, \frac{(x_2, y_3)}{0.6} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntı olsun. Tanım 3.0.6 ya göre

$$\mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$$

olduğundan R bulanık bağıntısı S bulanık bağıntısının alt bulanık bağıntısıdır ve $R \subseteq S$ yazılır. R ve S bulanık bağıntıların Tanım 3.0.8 e göre

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.3}, \frac{(y_3, x_1)}{0.7}, \frac{(y_4, x_1)}{0.5}, \frac{(y_1, x_2)}{0.8}, \frac{(y_2, x_2)}{0.2}, \frac{(y_3, x_2)}{0.4} \right\}$$

ve

$$S^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.4}, \frac{(y_3, x_1)}{0.8}, \frac{(y_4, x_1)}{0.8}, \frac{(y_1, x_2)}{1}, \frac{(y_2, x_2)}{0.5}, \frac{(y_3, x_2)}{0.6} \right\}$$

elde edilir. Tanım 3.0.6 ya göre $\mu_{R^{-1}}(x, y) \leq \mu_S(x, y)$ olduğundan R bulanık bağıntısı S bulanık bağıntısının alt bulanık bağıntısıdır denir ve $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ yazılır. Dolayısıyla

$$R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$$

elde edilir. Tersini de aynı şekilde yapıldıktan sonra

$$R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$$

elde edilir.

Örnek 3.0.18. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.5}, \frac{(x_1, y_2)}{0.3}, \frac{(x_2, y_1)}{0.7}, \frac{(x_2, y_2)}{1}, \frac{(x_3, y_1)}{0.6}, \frac{(x_3, y_2)}{0.4} \right\}$$

bulanık bağıntısı olsun. Tanım 3.0.8 e göre

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.5}, \frac{(y_2, x_1)}{0.3}, \frac{(y_1, x_2)}{0.7}, \frac{(y_2, x_2)}{1}, \frac{(y_1, x_3)}{0.6}, \frac{(y_2, x_3)}{0.4} \right\}$$

R bağıntısının tersinin matrisini oluşturalım.

$$[R] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & 1 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Şimdi de bu matrisin transpozunu bulalım.

$$[R]^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 0.4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

elde edilir. Şimdi de R bağıntısının tersinin matrisini bulalım.

$$[R^{-1}] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 0.4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

(1) = (2) olduğundan $[R^{-1}] = [R]^T$ elde edilir.

Teorem 3.0.3. $U \times V$ üzerinde tanımlı R ve S bulanık bağıntıları verilsin.

i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

İspat. i) $U \times V$ üzerinde tanımlı R ve S bulanık bağıntıları verilsin.

$$(R \cup S)^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R \cup S)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(R \cup S)^{-1}}(y, x) = \mu_{R \cup S}(x, y) \right\}$$

bulanık bağıntıların tersi tanımından sonra Tanım 3.0.5. gereği,

$$(R \cup S)^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R \cup S)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(R \cup S)^{-1}}(y, x) = \max(\mu_{R^{-1}}(y, x), \mu_{S^{-1}}(y, x)) \right\} \quad (1)$$

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{R^{-1}}(y, x)} : \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y) \right\}$$

$$S^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{S^{-1}}(y, x)} : \mu_{S^{-1}}(y, x) = \mu_S(x, y) \right\}$$

$$R^{-1} \cup S^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{R^{-1} \cup S^{-1}}(y, x)} : \mu_{R^{-1} \cup S^{-1}}(y, x) = \max(\mu_{R^{-1}}(y, x), \mu_{S^{-1}}(y, x)) \right\} \quad (2)$$

(1) = (2) eşitliği sağlanmış oldu. Yani $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ elde edilir.

ii) $U \times V$ üzerinde tanımlı R ve S bulanık bağıntıları verilsin.

$$(R \cap S)^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R \cap S)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(R \cap S)^{-1}}(y, x) = \mu_{R \cap S}(x, y) \right\}$$

bulanık bağıntıların tersi tanımından sonra Tanım 3.0.5. gereği

$$(R \cap S)^{-1} = \left\{ \frac{(x, y)}{\mu_{(R \cap S)^{-1}}(x, y)} : \mu_{(R \cap S)^{-1}}(y, x) = \max(\mu_{R^{-1}}(y, x), \mu_{S^{-1}}(y, x)) \right\} \quad (1)$$

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{R^{-1}}(y, x)} : \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y) \right\}$$

$$S^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{S^{-1}}(y, x)} : \mu_{S^{-1}}(y, x) = \mu_S(x, y) \right\}$$

$$R^{-1} \cap S^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{R^{-1} \cap S^{-1}}(y, x)} : \mu_{R^{-1} \cap S^{-1}}(y, x) = \max(\mu_{R^{-1}}(y, x), \mu_{S^{-1}}(y, x)) \right\} \quad (2)$$

(1) = (2) eşitliği sağlandı. Yani $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ elde edilir.

Örnek 3.19. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.4}, \frac{(x_1, y_3)}{0.8}, \frac{(x_1, y_4)}{0.8}, \frac{(x_2, y_1)}{1}, \frac{(x_2, y_2)}{0.5}, \frac{(x_2, y_3)}{0.6} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntı olsun.

$$(R \cup S)^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R \cup S)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(R \cup S)^{-1}}(y, x) = \max(\mu_{R^{-1}}(y, x), \mu_{S^{-1}}(y, x)) \right\}$$

tanımından

$$R \cup S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.4}, \frac{(x_1, y_3)}{0.8}, \frac{(x_1, y_4)}{0.8}, \frac{(x_2, y_1)}{1}, \frac{(x_2, y_2)}{0.5}, \frac{(x_2, y_3)}{0.6} \right\}$$

$$(R \cup S)^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.4}, \frac{(y_3, x_1)}{0.8}, \frac{(y_4, x_1)}{0.8}, \frac{(y_1, x_2)}{1}, \frac{(y_2, x_2)}{0.5}, \frac{(y_3, x_2)}{0.6} \right\} \quad (1)$$

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.3}, \frac{(y_3, x_1)}{0.7}, \frac{(y_4, x_1)}{0.5}, \frac{(y_1, x_2)}{0.8}, \frac{(y_2, x_2)}{0.2}, \frac{(y_3, x_2)}{0.4} \right\}$$

$$S^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.4}, \frac{(y_3, x_1)}{0.8}, \frac{(y_4, x_1)}{0.8}, \frac{(y_1, x_2)}{1}, \frac{(y_2, x_2)}{0.5}, \frac{(y_3, x_2)}{0.6} \right\}$$

$$R^{-1} \cup S^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.4}, \frac{(y_3, x_1)}{0.8}, \frac{(y_4, x_1)}{0.8}, \frac{(y_1, x_2)}{1}, \frac{(y_2, x_2)}{0.5}, \frac{(y_3, x_2)}{0.6} \right\} \quad (2)$$

(1) = (2) eşitliği sağlandı. Yani $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ eşitliği örnek üzerinden gösterilmiş oldu.

Örnek 3.0.21. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.4}, \frac{(x_1, y_3)}{0.8}, \frac{(x_1, y_4)}{0.8}, \frac{(x_2, y_1)}{1}, \frac{(x_2, y_2)}{0.5}, \frac{(x_2, y_3)}{0.6} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntı olsun.

$$(R \cap S)^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R \cap S)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(R \cap S)^{-1}}(y, x) = \min(\mu_{R^{-1}}(y, x), \mu_{S^{-1}}(y, x)) \right\}$$

tanımından

$$R \cap S = \left\{ \frac{(x_1, y_1)}{0.3}, \frac{(x_1, y_3)}{0.7}, \frac{(x_1, y_4)}{0.5}, \frac{(x_2, y_1)}{0.8}, \frac{(x_2, y_2)}{0.2}, \frac{(x_2, y_3)}{0.4} \right\}$$

$$(R \cap S)^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.3}, \frac{(y_3, x_1)}{0.7}, \frac{(y_4, x_1)}{0.5}, \frac{(y_1, x_2)}{0.8}, \frac{(y_2, x_2)}{0.2}, \frac{(y_3, x_2)}{0.4} \right\} \quad (1)$$

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.3}, \frac{(y_3, x_1)}{0.7}, \frac{(y_4, x_1)}{0.5}, \frac{(y_1, x_2)}{0.8}, \frac{(y_2, x_2)}{0.2}, \frac{(y_3, x_2)}{0.4} \right\}$$

$$S^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.4}, \frac{(y_3, x_1)}{0.8}, \frac{(y_4, x_1)}{0.8}, \frac{(y_1, x_2)}{1}, \frac{(y_2, x_2)}{0.5}, \frac{(y_3, x_2)}{0.6} \right\}$$

$$R^{-1} \cap S^{-1} = \left\{ \frac{(y_1, x_1)}{0.3}, \frac{(y_3, x_1)}{0.7}, \frac{(y_4, x_1)}{0.5}, \frac{(y_1, x_2)}{0.8}, \frac{(y_2, x_2)}{0.2}, \frac{(y_3, x_2)}{0.4} \right\} \quad (2)$$

(1) = (2) eşitliği sağlandı. Yani $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ eşitliği elde edilir.

3.1. Bulanık Bileşkeler

Bu bölümde bulanık bağıntıların bileşkesini ve temel özelliklerini vereceğiz. Burada bileşkeyi bulanık küme ile bulanık bağıntı ve iki bulanık bağıntı arasında olmak üzere iki türlü tanımlayacağız.

Tanım 3.1.1. U ve V evrensel kümeler olsun. U üzerinde bir F bulanık kümesi ve $U \times V$ üzerinde bir R bulanık bağıntısı verilsin.

$$F \circ R = \left\{ \frac{y}{\mu_{F \circ R}(y)} : \mu_{F \circ R}(y) = \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x), \mu_R(x, y))) \right\}$$

bulanık bağıntısına F bulanık kümesiyle R *bulanık bağıntısının bileşkesi* veya *max-min bileşke* denir.

Örnek 3.1.1. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise U üzerinde tanımlı

$$F = \left\{ \frac{x_1}{0.6}, \frac{x_2}{0.9}, \frac{x_3}{0.1} \right\} \Rightarrow [F]_{1 \times 3} = [0.6, 0.9, 0.1]$$

bulanık kümesi ve $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$[R]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulanık bağıntısı verilsin. $F \circ R = S$ olacak şekilde max - min bileşkesi alınırsa

$$\begin{aligned}
 [S]_{1 \times 4} &= [F]_{1 \times 3} \circ [R]_{3 \times 4} \\
 &= [0.6, 0.9, 0.1] \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= [\max(\min(0.6, 0.3), \min(0.9, 0.8), \min(0.1, 0.0)), \\
 &\quad \max(\min(0.6, 0.0), \min(0.9, 0.2), \min(0.1, 0.4)), \\
 &\quad \max(\min(0.6, 0.7), \min(0.9, 1.0), \min(0.1, 0.0)), \\
 &\quad \max(\min(0.6, 0.5), \min(0.9, 0.0), \min(0.1, 0.0))] \\
 &= [\max(0.3, 0.8, 0.0), \max(0.0, 0.2, 0.1), \max(0.6, 0.9, 0.0), \max(0.5, 0.0, 0.0)] \\
 &= [0.8, 0.2, 0.9, 0.5]
 \end{aligned}$$

Buradan

$$S = \left\{ \frac{y_1}{0.8}, \frac{y_2}{0.2}, \frac{y_3}{0.9}, \frac{y_4}{0.5} \right\}$$

elde edilir.

Not 3.3. Dikkat edilirse buradaki matris bileşke işlemi eğer “ min “ yerine çarpma ve “ max “ yerine toplama işlemi koyarsanız matris çarpımı gibidir.

Tanım 3.1.2. U , V ve W evrensel kümeler olsun. R bulanık bağıntısı $U \times V$ üzerinde ve S bulanık bağıntısı $V \times W$ üzerinde tanımlı ise

$$R \circ S = \left\{ \frac{(x, z)}{\mu_{R \circ S}(x, z)} : \mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in U} (\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))) \right\}$$

bulanık bağıntısına R ve S *bulanık bağıntısının bileşkesi* veya *max – min bileşkesi* denir.

Örnek 3.1.2. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ve $W = \{z_1, z_2\}$ olsun. Sırasıyla $U \times V$ ve $V \times W$ üzerinde tanımlı

$$[R]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.9 & 0.0 \\ 0.4 & 0.7 & 0.0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.8 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad [S]_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

bulanık bağıntıları verilsin. $R \circ S = T$ olacak şekilde max-min bileşkesini bulalım.

$$[T]_{3 \times 2} = [R]_{3 \times 4} \circ [S]_{4 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.9 & 0.0 \\ 0.4 & 0.7 & 0.0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.8 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$= [\max(\min(0.3,0.1), \min(0.6,0.3), \min(0.9,0.5), \min(0.0,0.7)), \\ \max(\min(0.3,0.0), \min(0.6,0.2), \min(0.9,0.4), \min(0.0,0.6))], \\ [\max(\min(0.4,0.1), \min(0.7,0.3), \min(0.0,0.5), \min(0.1,0.7)), \\ \max(\min(0.4,0.0), \min(0.7,0.2), \min(0.0,0.4), \min(0.1,0.6))], \\ [\max(\min(0.5,0.1), \min(0.8,0.3), \min(0.1,0.5), \min(0.2,0.7)), \\ \max(\min(0.5,0.0), \min(0.8,0.2), \min(0.1,0.4), \min(0.2,0.6))]$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0.1,0.3,0.5,0.0) & \max(0.0,0.2,0.4,0.0) \\ \max(0.1,0.3,0.0,0.1) & \max(0.0,0.2,0.0,0.1) \\ \max(0.1,0.3,0.1,0.2) & \max(0.0,0.2,0.1,0.2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 3.1.3. U üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısı verilsin. Eğer

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

ise R bulanık bağıntısına U üzerinde *bulanık birim bağıntı* denir ve I_U ile gösterilir. $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise U üzerindeki birim bağıntının matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[I_U]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.1.1. U üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısı verilsin.

i) $R \circ I_U = I_U \circ R$

ii) $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R$

İspat: i) U üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısı verilsin ve U üzerinde bulanık birim bağıntı var olsun.

$$R \circ I_U = \left\{ \frac{(x, z)}{\mu_{R \circ I_U}(x, z)} : \mu_{R \circ I_U}(x, z) = \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_R(x, y), \mu_{I_U}(y, z) \right) \right) \right\}$$

$$I_U \circ R = \left\{ \frac{(x, z)}{\mu_{I_U \circ R}(x, z)} : \mu_{I_U \circ R}(x, z) = \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_R(x, y), \mu_{I_U}(y, z) \right) \right) \right\}$$

Tanım 3.1.3. gereği I_U bulanık birim bağıntı olduğundan sonuçlar her ikisinde de $\mu_R(x, y)$ 'e eşittir. Dolayısıyla $R \circ I_U = I_U \circ R$ sağlanmış olur.

ii) U üzerinde tanımlı bir R bulanık bağıntısı verilsin ve U üzerinde bulanık birim bağıntı var olsun.

$$R \circ \emptyset = \left\{ \frac{(x, z)}{\mu_{R \circ \emptyset}(x, z)} : \mu_{R \circ \emptyset}(x, z) = \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_R(x, y), \mu_{\emptyset}(y, z) \right) \right) \right\}$$

$$\emptyset \circ R = \left\{ \frac{(x, z)}{\mu_{\emptyset \circ R}(x, z)} : \mu_{\emptyset \circ R}(x, z) = \max_{x \in U} \left(\min(\mu_{\emptyset}(x, y), \mu_R(y, z)) \right) \right\}$$

olduğunda üyelik fonksiyonu sıfır olduğu için her ikisinde de sonuç sıfırı verecek yani sonuç boş küme olacaktır. Dolayısıyla $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R$ sağlanmış olur.

Teorem 3.1.2. F ve G bulanık kümeleri U üzerinde ve R, S bulanık bağıntıları $U \times V$ üzerinde tanımlı olsun.

- i) $(F \cup G) \circ R = (F \circ R) \cup (G \circ R)$
- ii) $(F \cap G) \circ R \subset (F \circ R) \cap (G \circ R)$
- iii) $F \circ (R \cup S) = (F \circ R) \cup (F \circ S)$
- iv) $F \circ (R \cap S) \subset (F \circ R) \cap (F \circ S)$

İspat. i) F ve G bulanık kümeleri U üzerinde ve R bulanık bağıntıları $U \times V$ üzerinde tanımlı olsun.

$$F \cup G = \max(\mu_F(x, y), \mu_G(x, y))$$

$$(F \cup G) \circ R = \mu_{(F \cup G) \circ R}(x, y)$$

$$= \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_{(F \cup G) \circ R}(x), \mu_R(x, y) \right) \right)$$

$$= \max_{x \in U} \left(\min \left(\max(\mu_F(x), \mu_G(x)), \mu_R(x, y) \right) \right)$$

$$= \max_{x \in U} \left(\min(\mu_F(x), \mu_R(x, y)) \vee \min(\mu_G(x), \mu_R(x, y)) \right)$$

$$= \max_{x \in U} \left(\min(\mu_F(x), \mu_R(x, y)) \vee \max_{x \in U} (\min(\mu_G(x), \mu_R(x, y))) \right)$$

$$F \circ R = \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x), \mu_R(x, y))), \quad G \circ R = \max_{x \in U} (\min(\mu_G(x), \mu_R(x, y)))$$

olduğundan veya ifadesinin de birleşim işlemine denk geldiğinden

$$(F \cup G) \circ R = (F \circ R) \cup (G \circ R)$$

sağlanmış olur.

ii) F ve G bulanık kümeleri U üzerinde ve R bulanık bağıntıları U × V üzerinde tanımlı olsun.

$$F \cap G = \min(\mu_F(x, y), \mu_G(x, y))$$

$$(F \cap G) \circ R = \mu_{(F \cap G) \circ R}(x, y) = \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_{(F \cap G) \circ R}(x), \mu_R(x, y) \right) \right)$$

$$= \max_{x \in U} \left(\min \left(\min(\mu_F(x), \mu_G(x)), \mu_R(x, y) \right) \right)$$

$$= \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_F(x), \mu_R(x, y) \right) \wedge \min \left(\mu_G(x), \mu_R(x, y) \right) \right)$$

$$= \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_F(x), \mu_R(x, y) \right) \wedge \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_G(x), \mu_R(x, y) \right) \right) \right)$$

$$F \circ R = \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_F(x), \mu_R(x, y) \right) \right), \quad G \circ R = \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_G(x), \mu_R(x, y) \right) \right)$$

olduğundan ve ifadesinin de kesişim işlemine denk geldiğinden

$$(F \cap G) \circ R \subset (F \circ R) \cap (G \circ R)$$

sağlanmış olur.

iii) F bulanık kümesi U üzerinde ve R, S bulanık bağıntıları U × V üzerinde tanımlı olsun.

$$R \cup S = \max(\mu_R(y, z), \mu_S(y, z))$$

$$F \circ (R \cup S) = \mu_{F \circ (R \cup S)}(x, z) = \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_F(x, y), \mu_{(R \cup S)}(y, z) \right) \right)$$

$$= \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_F(x, y), \max_{x \in U} \left(\mu_R(y, z), \mu_S(y, z) \right) \right) \right)$$

$$= \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_R(y, z)) \vee \min(\mu_F(x, y), \mu_S(y, z)))$$

$$= \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_R(y, z)) \vee \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_S(y, z))))$$

$$F \circ R = \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_R(y, z))), \quad F \circ S = \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_S(y, z)))$$

olduğundan veya ifadesinin de birleşim işlemine denk geldiğinden

$$F \circ (R \cup S) = (F \circ R) \cup (F \circ S)$$

elde edilir.

iv) F bulanık kümesi U üzerinde ve R, S bulanık bağıntıları $U \times V$ üzerinde tanımlı olsun.

$$R \cap S = \min(\mu_R(y, z), \mu_S(y, z))$$

$$F \circ (R \cap S) = \mu_{F \circ (R \cap S)}(x, z) = \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_{R \cap S}(y, z)))$$

$$= \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \min(\mu_R(y, z), \mu_S(y, z))))$$

$$\subset \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_R(y, z)) \wedge \min(\mu_F(x, y), \mu_S(y, z)))$$

$$= \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_R(y, z)) \wedge \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_S(y, z))))$$

$$F \circ R = \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_R(y, z))), \quad F \circ S = \max_{x \in U} (\min(\mu_F(x, y), \mu_S(y, z)))$$

olduğundan ve ifadesinin de kesişim işlemine denk geldiğini düşünürsek

$$F \circ (R \cap S) \subset (F \circ R) \cap (F \circ S)$$

sağlanmış olur.

Teorem 3.1.3. R bulanık bağıntısı $U \times V$ üzerinde S, S_1, S_2 bulanık bağıntıları $V \times W$ üzerinde ve T bulanık bağıntısı $W \times X$ üzerinde tanımlı olsun.

i) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

ii) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

iii) $R \circ (S_1 \cap S_2) = (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$

iii) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow (R \circ S_1) \subseteq (R \circ S_2)$

İspat. i) R bulanık bağıntısı $U \times V$ üzerinde S bulanık bağıntısı $V \times W$ üzerinde tanımlı olsun.

$$(R \circ S)^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R \circ S)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(R \circ S)^{-1}}(y, x) = \mu_{(R \circ S)}(x, y) \right\}$$

$$(R \circ S)^{-1} = \max_{x \in U} (\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))) \quad (1)$$

$$S^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(S)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(S)^{-1}}(y, x) = \mu_{(S)}(x, y) \right\}$$

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(y, x)}{\mu_{(R)^{-1}}(y, x)} : \mu_{(R)^{-1}}(y, x) = \mu_{(R)}(x, y) \right\}$$

$$S^{-1} \circ R^{-1} = \max_{x \in U} (\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))) \quad (2)$$

(1) = (2) olduğundan $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ elde edilir.

ii) R bulanık bağıntısı $U \times V$ üzerinde S, bulanık bağıntısı $V \times W$ üzerinde ve T bulanık bağıntısı $W \times X$ üzerinde tanımlı olsun.

$$(R \circ S) \circ T = \left\{ \mu_{(R \circ S) \circ T}(x, z) = \max_{x \in U} (\min(\mu_{(R \circ S)}(x, y), \mu_T(y, z))) \right\}$$

$$R \circ S = \left\{ \mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{x \in U} (\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))) \right\}$$

$$\begin{aligned}
(R \circ S) \circ T &= \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_{(R \circ S)}(x, z), \mu_T(z, t) \right) \right) \\
&= \max_{x \in U} \left(\min \left(\max_{x \in U} \left(\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)) \right) \right), \mu_T(z, t) \right) \\
&= \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_R(x, y), \max_{x \in U} \left(\min(\mu_S(y, z), \mu_T(z, t)) \right) \right) \right) \\
&= R \circ (S \circ T)
\end{aligned}$$

$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ elde edilir.

iii) R bulanık bağıntısı $U \times V$ üzerinde S_1, S_2 bulanık bağıntıları $V \times W$ üzerinde tanımlı olsun.

$$\begin{aligned}
S_1 \cap S_2 &= \min(\mu_{S_1}(y, z), \mu_{S_2}(y, z)) \\
R \circ (S_1 \cap S_2) &= \mu_{R \circ (S_1 \cap S_2)}(x, z) = \max_{x \in U} \left(\min(\mu_R(x, y), \mu_{(S_1 \cap S_2)}(y, z)) \right) \\
&= \max_{x \in U} \left(\min(\mu_R(x, y), \min(\mu_{S_1}(y, z), \mu_{S_2}(y, z))) \right) \\
&= \max_{x \in U} \left[\min(\mu_R(x, y), \mu_{S_1}(y, z)) \right] \wedge \max_{x \in U} \left[\min(\mu_R(x, y), \mu_{S_2}(y, z)) \right] \\
(R \circ S_1) &= \max_{x \in U} \left[\min(\mu_R(x, y), \mu_{S_1}(y, z)) \right] \wedge (R \circ S_2) \\
&= \max_{x \in U} \left[\min(\mu_R(x, y), \mu_{S_2}(y, z)) \right]
\end{aligned}$$

olduğundan ve ifadesinin de kesişim işlemine denk geldiğinden

$$= \max_{x \in U} \left(\min(\mu_R(x, y), \mu_{S_1}(y, z)) \right) \cap \max_{x \in U} \left(\min(\mu_R(x, y), \mu_{S_2}(y, z)) \right)$$

$R \circ (S_1 \cap S_2) = (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$ elde edilir.

iv) R bulanık bağıntısı $U \times V$ üzerinde S_1, S_2 bulanık bağıntıları $V \times W$ üzerinde tanımlı olsun.

$$S_1 \subseteq S_2 \text{ ise } \mu_{S_1}(y, z) \leq \mu_{S_2}(y, z)$$

$$\max_{x \in U} (\mu_{S_1}(y, z)) \leq \max_{x \in U} (\mu_{S_2}(y, z))$$

$$\max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_R(x, y), \mu_{S_1}(y, z) \right) \right) \leq \max_{x \in U} \left(\min \left(\mu_R(x, y), \mu_{S_2}(y, z) \right) \right)$$

$(R \circ S_1) \subseteq (R \circ S_2)$ yani $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow (R \circ S_1) \subseteq (R \circ S_2)$ elde edilir.

4. ARALIK DEĞERLİ BULANIK KÜMELER

Zadeh (1975), aralık değerli bulanık kümeler kavramını bulanık kümelerin bir uzantısı olarak tanımladı. Aralık değerli bulanık kümeler, üyelik değeri $[0, 1]$ aralığından bir reel sayı yerine $[0,1]$ reel sayı aralığının bir alt kümesidir. Aralık değerli bulanık küme, bulanık küme kavramının genelleştirilmiş halidir. Aralık değerli bulanık kümeler, bulanık kümelere kıyasla sisteme daha fazla hassasiyet, esneklik ve uyumluluk sağlar. Bulanık kontrol gibi uygulamalarda aralık değerli bulanık kümeler kullanılır.

Tanım 4.0.1. U bir evrensel küme ve $a, b \in [0, 1]$ olmak üzere

$$P([0, 1]) = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

olsun. Her bir $x \in U$ için

$$\mu_A : U \rightarrow P([0, 1]), \mu_A(x) = [\mu_A^-(x), \mu_A^+(x)]$$

fonksiyonu ile verilen

$$A = \left\{ \frac{x}{[\mu_A^-(x), \mu_A^+(x)]} : x \in U \right\}$$

kümesine U üzerinde tanımlı bir *aralık değerli bulanık küme* denir. Burada μ_A fonksiyonuna A aralık değerli bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu denir. Aralık değerli bulanık kümeler genellikle $A, B, C, \dots$ gibi harflerle ve bunların üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_A, \mu_B, \mu_C \dots$ şeklinde gösterilir.

NOT 4.0.1. U evrensel kümesi her elemanı aralık değeri $[1,1] = 1$ olan bir aralık değerli bulanık kümedir.

Örnek 4.0.1. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde tanımlı

$$A = \left\{ \frac{x_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_2}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.6, 0.7]}, \frac{x_5}{[0.3, 0.5]}, \frac{x_6}{[0.8, 0.9]} \right\}$$

bir aralık değerli bulanık kümedir.

Tanım 4.0.2. U üzerinde tanımlı bir A aralık değerli bulanık kümesi verilsin. Eğer her $x \in U$ için $\mu_A(x) = [0,0] = 0$ oluyorsa, A aralık değerli bulanık kümesine *boş aralık değerli bulanık küme* denir ve $\emptyset_U$ ile gösterilir.

Örnek 4.0.2. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde bir A aralık değerli bulanık kümesinin üyelik fonksiyonları değerleri

$$\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2) = \mu_A(x_3) = \mu_A(x_4) = \mu_A(x_5) = \mu_A(x_6) = 0$$

ise $A = \emptyset_U$ boş aralık değerli bulanık kümedir.

Tanım 4.0.3. U üzerinde tanımlı bir A aralık değerli bulanık kümesi verilsin. Her $x \in U$ için $\mu_A(x) = [0, 1]$ oluyorsa, A bulanık kümesine *evrensel aralık değerli bulanık küme* denir ve U ile gösterilir.

Örnek 4.0.3. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde bir A aralık değerli bulanık kümesinin üyelik fonksiyonları değerleri

$$\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2) = \mu_A(x_3) = \mu_A(x_4) = \mu_A(x_5) = \mu_A(x_6) = [0,1]$$

ise $A = U$ evrensel aralık değerli bulanık kümedir.

Tanım 4.0.4. A ve B, U üzerinde tanımlı birer aralık değerli bulanık küme olsun. Eğer her $x \in U$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ oluyorsa, A ve B aralık değerli bulanık kümelerine *eşit aralık değerli bulanık kümeler* denir ve $A = B$ ile gösterilir.

Örnek 4.0.4. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ üzerinde

$$A = \left\{ \frac{x_1}{[0.1,0.7]}, \frac{x_2}{[0.3,0.5]}, \frac{x_3}{[0.2,0.8]} \right\} \text{ ve } B = \left\{ \frac{x_1}{[0.1,0.7]}, \frac{x_2}{[0.3,0.5]}, \frac{x_3}{[0.2,0.8]} \right\}$$

aralık değerli bulanık kümeleri verilsin. Burada,

$$\mu_A(x_1) = \mu_B(x_1) = [0.1,0.7],$$

$$\mu_A(x_2) = \mu_B(x_2) = [0.3, 0.5],$$

$$\mu_A(x_3) = \mu_B(x_3) = [0.2, 0.8],$$

olduğu için $A = B$ olur.

Not 4.0.2. Bir U üzerinde tanımlı her $F = \{(x, \mu_F(x)) : x \in U\}$ bulanık kümesi her $x \in U$ için $\mu_F(x) = \mu_F^-(x) = \mu_F^+(x)$ olarak seçilmiş bir aralık değerli bulanık kümedir.

Tanım 4.0.5. A ve B , U üzerinde tanımlı birer aralık değerli bulanık küme olsun. Eğer her $x \in U$ için $\mu_A(x) \subseteq \mu_B(x)$ oluyorsa, A aralık değerli bulanık kümesi A aralık değerli bulanık kümesinin bir *alt aralık değerli bulanık kümesi* olur ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Örnek 4.0.5. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ üzerinde

$$A = \left\{ \frac{x_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2}{[0.3, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.2, 0.8]} \right\} \text{ ve } B = \left\{ \frac{x_1}{[0.3, 0.8]}, \frac{x_2}{[0.5, 1]}, \frac{x_3}{[0.7, 0.9]} \right\}$$

aralık değerli bulanık kümeleri verilsin. Burada,

$$[0.2, 0.7] \subseteq [0.3, 0.8] \Rightarrow \mu_A(x_1) \subseteq \mu_B(x_1)$$

$$[0.3, 0.5] \subseteq [0.5, 1] \Rightarrow \mu_A(x_2) \subseteq \mu_B(x_2)$$

$$[0.3, 0.8] \subseteq [0.7, 0.9] \Rightarrow \mu_A(x_3) \subseteq \mu_B(x_3)$$

olduğundan $A \subseteq B$ olur.

4.1. Aralık Değerli Bulanık Küme İşlemleri

Burada aralık değerli bulanık küme işlemlerini ve temel özelliklerini vereceğiz.

Tanım 4.1.1. U üzerinde tanımlı A ve B aralık değerli bulanık kümeleri verilsin. A ve B aralık değerli bulanık kümelerinin birleşimi

$$A \cup B = \left\{ \frac{x}{\mu_{A \cup B}(x)} : x \in U \right\}$$

şekilde tanımlanır ve burada

$$\mu_{A \cup B}(x) = [\mu_{A \cup B}^-(x), \mu_{A \cup B}^+(x)]$$

ve burada

$$\mu_{A \cup B}^-(x) = \max\{\mu_A^-(x), \mu_B^-(x)\}, \mu_{A \cup B}^+(x) = \max\{\mu_A^+(x), \mu_B^+(x)\}$$

şeklindedir.

Örnek 4.1.1. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ 'da

$$A = \left\{ \frac{x_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2}{[0.3, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.2, 0.8]} \right\} \text{ ve } B = \left\{ \frac{x_1}{[0.3, 0.4]}, \frac{x_2}{[0.2, 0.3]}, \frac{x_3}{[0.1, 0.9]} \right\}$$

aralık değerli bulanık kümeleri verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} A \cup B &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cup B}^-(x), \mu_{A \cup B}^+(x)]} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x)), \max(\mu_A^+(x), \mu_B^+(x))]} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_2}{[0.3, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.2, 0.9]} \right\} \end{aligned}$$

Teorem 4.1.1. A, U üzerinde tanımlı bir aralık değerli bulanık küme olsun.

- i) $A \cup A = A$
- ii) $A \cup \emptyset = A$
- iii) $A \cup U = U$

İspat. U üzerinde tanımlı A aralık değerli bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$A \cup A = \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cup A}^-(x), \mu_{A \cup A}^+(x)]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_A^-(x), \mu_A^-(x)), \max(\mu_A^+(x), \mu_A^+(x))]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\mu_A^-(x), \mu_A^+(x)]} : x \in U \right\} = A$$

ii)

$$A \cup \emptyset = \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cup \emptyset}^-(x), \mu_{A \cup \emptyset}^+(x)]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\max\{\mu_A^-(x), \mu_{\emptyset}^-(x)\}, \max\{\mu_A^+(x), \mu_{\emptyset}^+(x)\}]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\mu_A^-(x), \mu_A^+(x)]} : x \in U \right\} = A$$

iii)

$$A \cup U = \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cup U}^-(x), \mu_{A \cup U}^+(x)]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_A^-(x), \mu_U^-(x)), \max(\mu_A^+(x), \mu_U^+(x))]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\mu_U^-(x), \mu_U^+(x)]} : x \in U \right\} = U$$

Teorem 4.1.2. A, B ve C, U üzerinde tanımlı birer aralık değerli bulanık küme olsun.

i) $A \cup B = B \cup A$

ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

İspat. A, B ve C, U üzerinde tanımlı birer aralık değerli bulanık küme olsun.

i) $A \cup B = \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cup B}^-(x), \mu_{A \cup B}^+(x)]} : x \in U \right\}$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x)), \max(\mu_A^+(x), \mu_B^+(x))]} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_B^-(x), \mu_A^-(x)), \max(\mu_B^+(x), \mu_A^+(x))]} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{[\mu_{B \cup A}^-(x), \mu_{B \cup A}^+(x)]} : x \in U \right\} = B \cup A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } A \cup (B \cup C) &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cup (B \cup C)}^-(x), \mu_{A \cup (B \cup C)}^+(x)]} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_A^-(x), \mu_{B \cup C}^-(x)), \max(\mu_A^+(x), \mu_{B \cup C}^+(x))]} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x), \mu_C^-(x)), \max(\mu_A^+(x), \mu_B^+(x), \mu_C^+(x))]} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_{A \cup B}^-(x), \mu_C^-(x)), \max(\mu_{A \cup B}^+(x), \mu_C^+(x))]} : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \frac{x}{[\mu_{(A \cup B) \cup C}^-(x), \mu_{(A \cup B) \cup C}^+(x)]} : x \in U \right\} = (A \cup B) \cup C
\end{aligned}$$

Tanım 4.1.2. U üzerinde tanımlı A ve B aralık değerli bulanık kümeleri verilsin. A ve B aralık değerli bulanık kümelerinin kesişimi

$$A \cap B = \left\{ \frac{x}{\mu_{A \cap B}(x)} : x \in U \right\}$$

şekilde tanımlanır ve burada

$$\mu_{A \cap B}(x) = [\mu_{A \cap B}^-(x), \mu_{A \cap B}^+(x)]$$

ve burada

$$\mu_{A \cap B}^-(x) = \min(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x)), \quad \mu_{A \cap B}^+(x) = \min(\mu_A^+(x), \mu_B^+(x))$$

Örnek 4.1.2. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ 'da

$$A = \left\{ \frac{x_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2}{[0.3, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.2, 0.8]} \right\} \text{ ve } B = \left\{ \frac{x_1}{[0.3, 0.4]}, \frac{x_2}{[0.2, 0.3]}, \frac{x_3}{[0.1, 0.9]} \right\}$$

aralık değerli bulanık kümeleri verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cap B}^-(x), \mu_{A \cap B}^+(x)]} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{[\min(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x)), \min(\mu_A^+(x), \mu_B^+(x))]} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x_1}{[0.2, 0.4]}, \frac{x_2}{[0.2, 0.3]}, \frac{x_3}{[0.1, 0.8]} \right\} \end{aligned}$$

Teorem 4.1.3. A , U üzerinde tanımlı bir aralık değerli bulanık küme olsun.

- i) $A \cap A = A$
- ii) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- iii) $A \cap U = A$

İspat. A , U üzerinde tanımlı bir aralık değerli bulanık küme olsun.

i)

$$\begin{aligned} A \cap A &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cap A}^-(x), \mu_{A \cap A}^+(x)]} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{[\min(\mu_A^-(x), \mu_A^-(x)), \min(\mu_A^+(x), \mu_A^+(x))]} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{[\mu_A^-(x), \mu_A^+(x)]} : x \in U \right\} = A \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 A \cap \emptyset &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cap \emptyset}^-(x), \mu_{A \cap \emptyset}^+(x)]} : x \in U \right\} \\
 &= \left\{ \frac{x}{[\min(\mu_A^-(x), \mu_{\emptyset}^-(x)), \min(\mu_A^+(x), \mu_{\emptyset}^+(x))]} : x \in U \right\} \\
 &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{\emptyset}^-(x), \mu_{\emptyset}^+(x)]} : x \in U \right\} = \emptyset
 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
 A \cap U &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cap U}^-(x), \mu_{A \cap U}^+(x)]} : x \in U \right\} \\
 &= \left\{ \frac{x}{[\min(\mu_A^-(x), \mu_U^-(x)), \min(\mu_A^+(x), \mu_U^+(x))]} : x \in U \right\} \\
 &= \left\{ \frac{x}{[\mu_A^-(x), \mu_A^+(x)]} : x \in U \right\} = A
 \end{aligned}$$

Teorem 4.1.4. A, B ve C, U üzerinde tanımlı birer aralık değerli bulanık küme olsun.

i) $A \cap B = B \cap A$

ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

İspat. A, B ve C, U üzerinde tanımlı birer aralık değerli bulanık küme olsun.

i)

$$\begin{aligned}
 A \cap B &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cap B}^-(x), \mu_{A \cap B}^+(x)]} : x \in U \right\} \\
 &= \left\{ \frac{x}{[\min(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x)), \min(\mu_A^+(x), \mu_B^+(x))]} : x \in U \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\min(\mu_B^-(x), \mu_A^-(x)), \min(\mu_B^+(x), \mu_A^+(x))]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\mu_{B \cap A}^-(x), \mu_{B \cap A}^+(x)]} : x \in U \right\} = B \cap A$$

ii)

$$A \cap (B \cap C) = \left\{ \frac{x}{[\mu_{A \cap (B \cap C)}^-(x), \mu_{A \cap (B \cap C)}^+(x)]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\min(\mu_A^-(x), \mu_{B \cap C}^-(x)), \min(\mu_A^+(x), \mu_{B \cap C}^+(x))]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\min(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x), \mu_C^-(x)), \min(\mu_A^+(x), \mu_B^+(x), \mu_C^+(x))]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\max(\mu_{A \cap B}^-(x), \mu_C^-(x)), \max(\mu_{A \cap B}^+(x), \mu_C^+(x))]} : x \in U \right\}$$

$$= \left\{ \frac{x}{[\mu_{(A \cap B) \cap C}^-(x), \mu_{(A \cap B) \cap C}^+(x)]} : x \in U \right\} = (A \cap B) \cap C$$

Tanım 4.1.3. U üzerinde tanımlı A aralık değerli bulanık kümesi verilsin. A aralık değerli bulanık kümelerinin tümleyeni

$$A^c = \left\{ \frac{x}{\mu_{A^c}(x)} : x \in U \right\}$$

şekilde tanımlanır ve burada

$$\mu_{A^c}(x) = [\mu_{A^c}^-(x), \mu_{A^c}^+(x)]$$

burada da

$$\mu_{A^c}^-(x) = 1 - \mu_A^-(x), \mu_{A^c}^+(x) = 1 - \mu_A^+(x)$$

şeklindedir.

Örnek 4.1.3. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ 'da

$$A = \left\{ \frac{x_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2}{[0.3, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.2, 0.8]} \right\}$$

aralık değerli bulanık kümesi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} A^C &= \left\{ \frac{x}{[\mu_{A^C}^-(x), \mu_{A^C}^+(x)]} : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{[1 - \mu_A^-(x), 1 - \mu_A^+(x)]} : x \in U \right\} \\ A^C &= \left\{ \frac{x_1}{[0.8, 0.3]}, \frac{x_2}{[0.7, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.8, 0.2]} \right\} \end{aligned}$$

Not 4.1.1. A , U üzerinde tanımlı bir aralık değerli bulanık küme olsun.

i) $A \cup A^C \neq U$

ii) $A \cap A^C \neq \emptyset$

Örneğin, yukarıdaki örmekten $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ üzerinde

$$A = \left\{ \frac{x_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2}{[0.3, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.2, 0.8]} \right\}$$

$$A^C = \left\{ \frac{x_1}{[0.8, 0.3]}, \frac{x_2}{[0.7, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.8, 0.2]} \right\}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$A \cup A^C = \left\{ \frac{x_1}{[0.8, 0.7]}, \frac{x_2}{[0.7, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.8, 0.8]} \right\} \neq U$$

$$A \cap A^C = \left\{ \frac{x_1}{[0.2, 0.3]}, \frac{x_2}{[0.3, 0.5]}, \frac{x_3}{[0.2, 0.2]} \right\} \neq \emptyset$$

5. ARALIK DEĞERLİ BULANIK BAĞINTI

Aralık değerli bulanık bağıntı iki küme elemanlarının belli bir üyelik değeriyle eşleşmesiyle tanımlanır. Aralık değerli bulanık bağıntı kavramı Roy ve Biswas (1992) tarafından çalışılmıştır. Bu bölümde aralık değerli bulanık bağıntı ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 5.0.1. V bir küme ve bu kümenin elemanlarından oluşan E bir bağıntısı olsun. $E = \{xy : x, y \in V\}$ şeklinde tanımlansın. E üzerinde tanımlı

$$B = \left\{ \frac{xy}{[\mu_{B^-}, \mu_{B^+}]} : xy \in E \right\},$$

bağıntısına *aralık değerli bulanık bağıntı* denir.

Örnek 5.0.1. $V = \{a, b, c\}$ bulanık kümesi $E = \{ab, ac, bc\}$ bağıntısı olsun.

$$A = \left\{ \frac{a}{[0.5, 0.7]}, \frac{b}{[0.2, 0.5]}, \frac{c}{[0.4, 0.6]} \right\}$$

A, V kümesinin aralık değerli bulanık kümesi ve

$$B = \left\{ \frac{ab}{[0.5, 0.7]}, \frac{ac}{[0.2, 0.5]}, \frac{bc}{[0.4, 0.6]} \right\}$$

B kümesi E üzerinde tanımlı bir aralık değerli bulanık bağıntıdır.

Tanım 5.0.2. R ve S aralık değerli bulanık kümeleri sırasıyla U ve V üzerinde tanımlı olsun.

$$F = R \times S = \left\{ \frac{(x, y)}{[\mu_{R^-}, \mu_{R^+}]} : (x, y) \in U \times V \right\}, \mu_F(x, y) \leq \min(\mu_R(x), \mu_S(x))$$

$U \times V$ üzerinde bir aralık değerli bulanık bağıntının *kartezyen çarpımı* denir.

Örnek 5.0.2. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_1 y_3}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_4}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.2, 0.5]}, \frac{x_2 y_3}{[0.4, 0.9]} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_3}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_1 y_4}{[0.3, 0.6]}, \frac{x_2 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.1, 1]}, \frac{x_2 y_3}{[0.3, 0.7]} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir bulanık bağıntı olsun.

$$R \times S = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_3}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_1 y_4}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_3}{[0.3, 0.7]} \right\}$$

elde edilir.

Tanım 5.0.3. R ve S aralık değerli bulanık kümeleri sırasıyla U ve V üzerinde tanımlı olsun.

$$R \cup S = \left\{ \frac{xy}{[\mu_{(R \cup S)^-}, \mu_{(R \cup S)^+}]} : \mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_{(R \cup S)^-}(x, y), \mu_{(R \cup S)^+}(x, y)) \right\}$$

$$R \cap S = \left\{ \frac{xy}{[\mu_{(R \cap S)^-}, \mu_{(R \cap S)^+}]} : \mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_{(R \cap S)^-}(x, y), \mu_{(R \cap S)^+}(x, y)) \right\}$$

$$R' = \left\{ \frac{xy}{[\mu_{R'^-}, \mu_{R'^+}]} : \mu_{R'}(xy) = [(1 - \mu_{R^-}(x, y)), (1 - \mu_{R^+}(x, y))] \right\}$$

aralık değerli bulanık bağıntılarına sırasıyla R ve S aralık değerli bulanık bağıntılarının *birleşimi*, *kesişimi* ve *tümleyeni* denir.

Örnek 5.0.3. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_1 y_3}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_4}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.2, 0.5]}, \frac{x_2 y_3}{[0.4, 0.9]} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_3}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_1 y_4}{[0.3, 0.6]}, \frac{x_2 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.1, 1]}, \frac{x_2 y_3}{[0.3, 0.7]} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı aralık değerli bir bulanık bağıntı olsun. Bu aralık değerli bulanık bağıntıların birleşimini, kesişimini ve tümleyenini bulunuz.

$$R \cup S = \left\{ \frac{xy}{[\mu_{(R \cup S)^-}, \mu_{(R \cup S)^+}]} : \mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_{(R \cup S)^-}(x, y), \mu_{(R \cup S)^+}(x, y)) \right\}$$

tanımını kullanarak

$$R \cup S = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_1 y_3}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_4}{[0.3, 0.6]}, \frac{x_2 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.2, 1]}, \frac{x_2 y_3}{[0.4, 0.9]} \right\}$$

elde edilir.

$$R \cap S = \left\{ \frac{xy}{[\mu_{(R \cap S)^-}, \mu_{(R \cap S)^+}]} : \mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_{(R \cap S)^-}(x, y), \mu_{(R \cap S)^+}(x, y)) \right\}$$

tanımını kullanarak

$$R \cap S = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_3}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_1 y_4}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_3}{[0.3, 0.7]} \right\}$$

elde edilir.

$$R' = \left\{ \frac{xy}{[\mu_{R'^-}, \mu_{R'^+}]} : \mu_{R'}(xy) = [(1 - \mu_{R^-}(x, y)), (1 - \mu_{R^+}(x, y))] \right\}$$

tanımını kullanarak

$$R' = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.7, 0.3]}, \frac{x_1 y_3}{[0.8, 0.4]}, \frac{x_1 y_4}{[0.9, 0.5]}, \frac{x_2 y_1}{[0.8, 0.3]}, \frac{x_2 y_2}{[0.8, 0.5]}, \frac{x_2 y_3}{[0.6, 0.1]} \right\}$$

ve

$$S' = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.8, 0.4]}, \frac{x_1 y_3}{[0.9, 0.5]}, \frac{x_1 y_4}{[0.7, 0.4]}, \frac{x_2 y_1}{[0.7, 0.3]}, \frac{x_2 y_2}{[0.9, 0]}, \frac{x_2, y_3}{[0.7, 0.3]} \right\}$$

elde edilmiş olur.

Not 5.0.1. Bulanık bağıntılarda geçerli olan kesişim, birleşim ve tümleyen işlemleriyle ilgili bütün teoremler aralık değerli bulanık bağıntılar için de geçerli olduğu için onları burada tekrar vermeyeceğiz.

Tanım 5.0.4. $U \times V$ üzerinde tanımlı R ve S bulanık bağıntıları verilsin. Eğer

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(xy) = \mu_S(xy)$$

ise R ve S bulanık bağıntılarına *eşit aralık değerli bulanık bağıntılar* denir ve $R = S$ ile gösterilir. Eğer

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(xy) \leq \mu_S(xy)$$

ise R bulanık bağıntısı S bulanık bağıntısının *aralık değerli alt bulanık bağıntısıdır* denir ve $R \subseteq S$ ile gösterilir.

Örnek 5.0.4. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_1 y_3}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_4}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.2, 0.5]}, \frac{x_2, y_3}{[0.4, 0.9]} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_1 y_3}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_4}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.2, 0.5]}, \frac{x_2, y_3}{[0.4, 0.9]} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir aralık değerli bulanık bağıntı olsun. Tanım 5.0.4 e göre $\mu_R(xy) = \mu_S(xy)$ olduğundan R ve S aralık değerli bulanık bağıntılarına eşit bulanık bağıntılar denir.

Örnek 5.0.5. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.2, 0.5]}, \frac{x_1 y_3}{[0, 0.3]}, \frac{x_1 y_4}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_2 y_1}{[0.2, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.2, 0.5]}, \frac{x_2 y_3}{[0.2, 0.5]} \right\}$$

kümesi ve

$$S = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[0.2, 0.6]}, \frac{x_1 y_3}{[0.1, 0.5]}, \frac{x_1 y_4}{[0.3, 0.6]}, \frac{x_2 y_1}{[0.3, 0.7]}, \frac{x_2 y_2}{[0.3, 1]}, \frac{x_2 y_3}{[0.3, 0.7]} \right\}$$

kümesi $U \times V$ üzerinde tanımlı bir aralık değerli bulanık bağıntı olsun. Tanım 5.0.4 ya göre

$$\mu_R(xy) \leq \mu_S(xy)$$

olduğundan R bulanık bağıntısı S bulanık bağıntısının alt aralık değerli bulanık bağıntısıdır denir ve $R \subseteq S$ ile gösterilir.

Tanım 5.0.5. $U \times V$ üzerine tanımlı bir R bulanık bağıntıları verilsin. Eğer

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(xy) = [1, 1]$$

ise R bulanık bağıntısına *aralık değerli evrensel bulanık bağıntı* denir ve U ile gösterilir. Eğer

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(x, y) = [0, 0]$$

ise R aralık değerli bulanık bağıntısına *aralık değerli boş bulanık bağıntı* denir ve $\emptyset$ ile gösterilir.

Örnek 5.0.6. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{x_1 y_1}{[1, 1]}, \frac{x_1 y_3}{[1, 1]}, \frac{x_1 y_4}{[1, 1]}, \frac{x_2 y_1}{[1, 1]}, \frac{x_2 y_2}{[1, 1]}, \frac{x_2 y_3}{[1, 1]} \right\}$$

kümesi aralık değerli bulanık bağıntısı olsun. Tanım 5.0.5 ye göre

$$\forall (x, y) \in U \times V, \quad \mu_R(xy) = [1,1]$$

ise R bulanık bağıntısına aralık değerli evrensel bulanık bağıntı denir.

Örnek 5.0.7. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ise

$$R = \left\{ \frac{x_1y_1}{[0,0]}, \frac{x_1y_3}{[0,0]}, \frac{x_1y_4}{[0,0]}, \frac{x_2y_1}{[0,0]}, \frac{x_2y_2}{[0,0]}, \frac{x_2y_3}{[0,0]} \right\}$$

kümesi aralık değerli bulanık bağıntısı olsun. Tanım 5.0.5 ye göre

$$\forall (x, y) \in U \times V \text{ için } \mu_R(xy) = [0,0]$$

ise R bulanık bağıntısına aralık değerli boş bulanık bağıntı denir.

Tanım 5.0.6. $U \times V$ üzerinde tanımlı bir R aralık değerli bulanık bağıntısı verilsin. Buna göre,

$$R^{-1} = \left\{ \frac{(yx)}{[\mu_{R^{-1}}, \mu_{R^{-1}}]} : \mu_{R^{-1}}(yx) = \mu_R(x, y) \right\}$$

$U \times V$ üzerinde tanımlı R^{-1} bulanık bağıntısına *aralık değerli ters bulanık bağıntı* denir.

Örnek 5.0.8. $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $V = \{y_1, y_2\}$ ise $U \times V$ üzerinde tanımlı

$$R = \left\{ \frac{x_1y_1}{[0.1,0.5]}, \frac{x_1y_2}{[0.3,0.7]}, \frac{x_2y_1}{[0.2,0.7]}, \frac{x_2y_2}{[0.2,0.6]}, \frac{x_3y_1}{[0.3,0.5]}, \frac{x_3y_2}{[0.4,0.8]} \right\}$$

aralık değerli bulanık bağıntısı olsun. Tanım 5.0.6 ya göre

$$R^{-1} = \left\{ \frac{y_1x_1}{[0.1,0.5]}, \frac{y_2x_1}{[0.3,0.7]}, \frac{y_1x_2}{[0.2,0.7]}, \frac{y_2x_2}{[0.2,0.6]}, \frac{y_1x_3}{[0.3,0.5]}, \frac{y_2x_3}{[0.4,0.8]} \right\}$$

olduğundan R aralık değerli bulanık bağıntısının tersini bulduk.

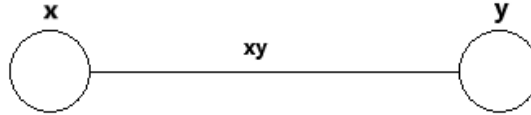
6. ARALIK DEĞERLİ BULANIK GRAFİKLER

Grafikler (çizelgeler), köşelerden ve köşeleri birleştiren kenarlardan oluşan yapılardır. Bu bölümde, aralık değerli bulanık kümelerin grafiklerini ve temel özelliklerini vereceğiz. Klasik grafik teorisinin bir genellemesi olarak bulanık grafik teorisi ilk kez Rosenfeld (1975) tarafından tanımlanmıştır. Aralık değerli bulanık grafikler ilk olarak Akram ve Dudek (2011) tarafından çalışılmıştır. Burada vereceğimiz aralık değerli bulanık grafiklerin üzerinde yapacağımız çalışmalar, (Akrama ve Dudek, 2011), (Rosenfeld 1975), (Rashmanlou ve Pal, 2013), (Borzooei ve Rashmanlou, 2016) ve (Talebi ve ark., 2016) kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 6.0.1. V boştan farklı köşeler yani düğümler kümesi ve E köşeleri birleştiren kenarlar kümesi olmak üzere V ve E kümelerinden oluşan çizelgeye bir *klasik grafik* denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$M = (V, E)$$

Örnek 6.0.1. Köşeleri $V = \{(x,y)\}$ ve kenarları $E = \{xy\}$ olan basit $M = (V,E)$ klasik grafiği aşağıdaki Şekil 6.0.1'deki gibi çizilir.



Şekil 6.0.1. Bir Klasik Grafik Örneği

Not: Burada ve bundan sonraki grafiklerde köşe noktalarını gösterirken biraz abartarak çember şeklinde göstereceğiz. Noktalar ile ilgili bilgileri de çemberin içine yazacağız.

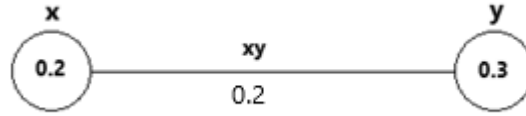
Tanım 6.0.2. $M = (V,E)$ klasik grafiği verilsin. V üzerinde bir F bulanık kümesi ve E üzerinde bir R bulanık bağıntısı tanımlansın. F bulanık kümesiyle R bulanık bağıntısının oluşturduğu çizelgeye M klasik grafiğinin *bulanık grafiği* denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$K = (F,R)$$

Örnek 6.0.2. Köşeleri $V = \{(x,y)\}$ ve kenarları $E = \{xy\}$ olan basit bir $M = (V,E)$ klasik grafiği verilsin. Burada V üzerinde

$$F = \left\{ \frac{x}{0.2}, \frac{y}{0.3} \right\} \quad R = \left\{ \frac{xy}{0.2} \right\}$$

F bulanık kümesi ve E üzerinde bulanık bağıntısı tanımlanmış ise $K = (F,R)$ bulanık grafiği aşağıdaki Şekil 6.0.2'deki gibi çizilir.



Şekil 6.2. Bir Bulanık Grafik Örneği

6.1. Aralık Değerli Bulanık Grafikler ve İşlemleri

Bu bölümde, M klasik grafik ve G aralık değerli bir bulanık grafik olarak alınacaktır.

Tanım 6.1.1. $M = (V,E)$ klasik grafiği verilsin. V üzerinde bir $A = [\mu_A^-, \mu_A^+]$, aralık değerli bulanık kümesi ve E üzerinde bir $B = [\mu_B^-, \mu_B^+]$ aralık değerli bulanık bağıntısı tanımlansın. A aralık değerli bulanık kümesiyle B aralık değerli bulanık bağıntısının oluşturduğu çizelgeye M klasik grafiğinin *aralık değerli bulanık grafiği* denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$G = (A,B)$$

Örnek 6.1.1. Burada iki örnek vereceğiz.

a) İlk olarak Örnek 6.0.1'de verilen basit klasik grafik ve Örnek 6.0.2'de verilen bulanık grafik ile karşılaştırmak için aynı grafiklerin aralık değerli bulanık grafiklerini örnek olarak verelim.

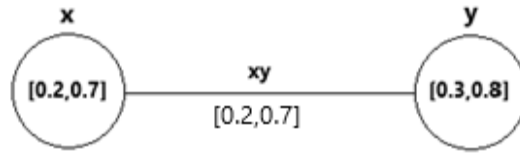
Köşeleri $V = \{(x,y)\}$ ve kenarları $E = \{xy\}$ olan basit bir $M = (V,E)$ klasik grafiği verilsin. Burada V üzerinde

$$A = \left\{ \frac{x}{[0.2,0.7]}, \frac{y}{[0.3,0.8]} \right\}$$

aralık değerli bulanık kümesi ve E üzerinde

$$B = \left\{ \frac{xy}{[0.2,0.7]} \right\}$$

aralık değerli bulanık bağıntısı tanımlanmış ise $G = (A,B)$ bulanık grafiği aşağıdaki Şekil 6.3'deki gibi çizilir.



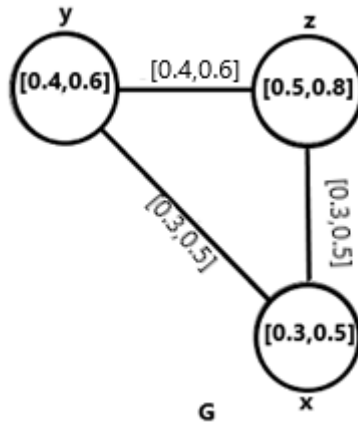
Şekil 6.3. Bir Aralık Değerli Bulanık Grafik Örneği

b) $V = \{x, y, z\}$, $E = \{xy, yz, zx\}$ şeklinde bir $M = (V, E)$ grafiği düşünün. A, aralık değerli bir bulanık V kümesi olsun ve B ile tanımlanan aralık değerli bir $E \subseteq V \times V$ kümesi olsun.

$$A = \left\{ \frac{x}{[0.3,0.5]}, \frac{y}{[0.4,0.6]}, \frac{z}{[0.5,0.8]} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{xy}{[0.3,0.5]}, \frac{yz}{[0.4,0.6]}, \frac{zx}{[0.3,0.5]} \right\}$$

Grafiğimizde de Şekil 6.4 deki gibi gösterilmiş olur.



Şekil 6.4. Aralık Değerli Bulanık Grafik Örneği

Tanım 6.1.2. $G^*_1 = (V_1, E_1)$ ve $G^*_2 = (V_2, E_2)$ grafiklerinin iki aralık değerli bulanık grafiğinin $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ kartezyen çarpımı $G_1 \times G_2$ bir çift olarak tanımlanır $(A_1 \times A_2, B_1 \times B_2)$ öyle ki $\forall (x_1, x_2) \in V$ için

$$(i) \begin{cases} \mu_{A_1}^- \times \mu_{A_2}^-(x_1, x_2) = \min(\mu_{A_1}^-(x_1), \mu_{A_2}^-(x_2)) \\ \mu_{A_1}^+ \times \mu_{A_2}^+(x_1, x_2) = \min(\mu_{A_1}^+(x_1), \mu_{A_2}^+(x_2)) \end{cases}$$

$\forall x \in V_1$ ve $x_2 y_2 \in E_2$ için

$$(ii) \begin{cases} \mu_{B_1}^- \times \mu_{B_2}^-((x, x_2), (x, y_2)) = \min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{B_2}^-(x_2 y_2)) \\ \mu_{B_1}^+ \times \mu_{B_2}^+((x, x_2), (x, y_2)) = \min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{B_2}^+(x_2 y_2)) \end{cases}$$

$\forall z \in V_2$ ve $x_1 y_1 \in E_1$ için

$$(iii) \begin{cases} \mu_{B_1}^- \times \mu_{B_2}^-((x_1, z)(y_1, z)) = \min(\mu_{B_1}^-(x_1 y_1), \mu_{A_2}^-(z)) \\ \mu_{B_1}^+ \times \mu_{B_2}^+((x_1, z)(y_1, z)) = \min(\mu_{B_1}^+(x_1 y_1), \mu_{A_2}^+(z)) \end{cases}$$

Örnek 6.1.2. $M_1 = (V_1, E_1)$ ve $M_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 = \{a, b\}$, $V_2 = \{c, d\}$, $E_1 = \{ab\}$ ve $E_2 = \{cd\}$ olacak şekilde grafikler olsun. İki aralık değerli bulanık grafiği $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ şeklinde verilsin.

$$A_1 = \left\{ \frac{a}{[0.3, 0.5]}, \frac{b}{[0.5, 0.7]} \right\} \quad A_2 = \left\{ \frac{c}{[0.2, 0.5]}, \frac{d}{[0.4, 0.7]} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \frac{ab}{[0.1, 0.3]} \right\} \quad B_2 = \left\{ \frac{cd}{[0.2, 0.4]} \right\}$$

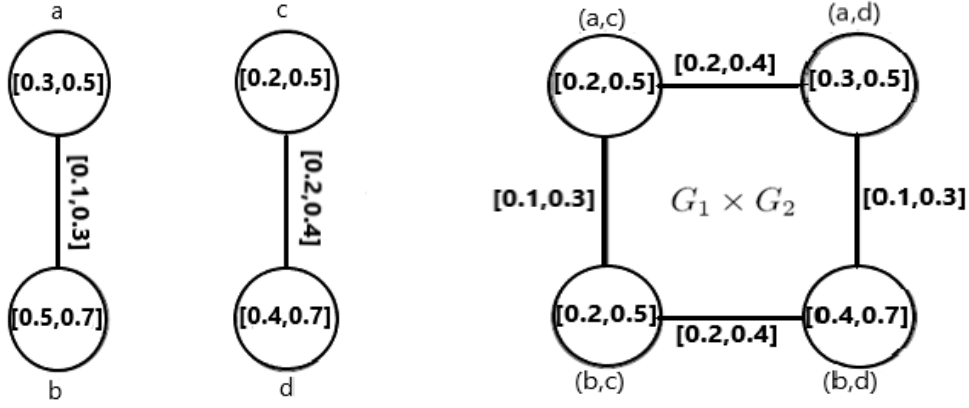
$$(\mu_{B_1}^- \times \mu_{B_2}^-)((a, c)(a, d)) = 0.2, \quad (\mu_{B_1}^- \times \mu_{B_2}^-)((a, c)(b, c)) = 0.1$$

$$(\mu_{B_1}^- \times \mu_{B_2}^-)((a, d)(b, d)) = 0.1, \quad (\mu_{B_1}^- \times \mu_{B_2}^-)((b, c)(b, d)) = 0.2$$

$$(\mu_{B_1}^+ \times \mu_{B_2}^+)((a, c)(a, d)) = 0.4, \quad (\mu_{B_1}^+ \times \mu_{B_2}^+)((a, c)(b, c)) = 0.3$$

$$(\mu_{B_1}^+ \times \mu_{B_2}^+)((a, d)(b, d)) = 0.3, \quad (\mu_{B_1}^+ \times \mu_{B_2}^+)((b, c)(b, d)) = 0.4$$

şeklinde yazılır. Şimdi de Şekil 6.5. deki grafik olarak gösterelim.



Şekil 6.5. Aralık Değerli İki Bulanık Grafiğin Kartezyen Çarpım Örneği

Önerme 6.1.1. $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ grafiklerinin iki aralık değerli bulanık grafiğinin $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ kartezyen çarpımı $G_1 \times G_2$ bir çift olarak tanımlayalım. G_1 ve G_2 grafiklerinin aralık değerli iki bulanık grafiğinin Kartezyen çarpımı $G_1 \times G_2 = (A_1 \times A_2, B_1 \times B_2)$, $G_1^* \times G_2^*$ 'nin aralık değerli bulanık grafiğidir.

İspat: $A_1 \times A_2$ için koşullar Tanım 3.0.3 ün (i) maddesinden dolayı $A_1 \times A_2$ nin aralık değerli bulanık grafiğidir. Bu yüzden de yalnızca $B_1 \times B_2$ koşullarını doğrulamamız yeterli olacaktır. $x \in V_1, x_2 y_2 \in E_2$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
 (\mu_{\beta_1}^- \times \mu_{\beta_2}^-)((x, x_2)(x, y_2)) &= \min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{B_2}^-(x_2 y_2)) \\
 &\leq \min(\mu_{A_1}^-(x), \min(\mu_{A_2}^-(x_2), \mu_{A_2}^-(y_2))) \\
 &= \min(\min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_2}^-(x_2)), \min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_2}^-(y_2))) \\
 &= \min((\mu_{A_1}^- \times \mu_{A_2}^-)(x, x_2), (\mu_{A_1}^- \times \mu_{A_2}^-)(x, y_2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mu_{\beta_1}^+ \times \mu_{\beta_2}^+)((x, x_2)(x, y_2)) &= \min(\mu_{A_1}^+(x), (\mu_{B_2}^+(x_2 y_2))) \\
 &\leq \min(\mu_{A_1}^+(x), \min(\mu_{A_2}^+(x_2), \mu_{A_2}^+(y_2))) \\
 &= \min(\min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_2}^+(x_2)), \min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_2}^+(y_2))) \\
 &= \min((\mu_{A_1}^+ \times \mu_{A_2}^+)(x, x_2), (\mu_{A_1}^+ \times \mu_{A_2}^+)(x, y_2))
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $z \in V_2$ ve $x_1 y_1 \in E_1$ için elimizde

$$\begin{aligned}
 (\mu_{B_1}^- \times \mu_{B_2}^-)((x_1, z)(y_1, z)) &= \min(\mu_{B_1}^-(x_1 y_1), \mu_{A_2}^-(z)) \\
 &\leq \min(\min(\mu_{A_1}^-(x_1), \mu_{A_1}^-(y_1)), \mu_{A_2}^-(z)) \\
 &= \min(\min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_2}^-(z)), \min(\mu_{A_1}^-(y_1), \mu_{A_2}^-(z))) \\
 &= \min((\mu_{A_1}^- \times \mu_{A_2}^-)(x_1, z), (\mu_{A_1}^- \times \mu_{A_2}^-)(y_1, z)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mu_{B_1}^+ \times \mu_{B_2}^+)((x_1, z)(y_1, z)) &= \min(\mu_{B_1}^+(x_1 y_1), \mu_{A_2}^+(z)) \\
 &\leq \min(\min(\mu_{A_1}^+(x_1), \mu_{A_1}^+(y_1)), \mu_{A_2}^+(z)) \\
 &= \min(\min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_2}^+(z)), \min(\mu_{A_1}^+(y_1), \mu_{A_2}^+(z))) \\
 &= \min((\mu_{A_1}^+ \times \mu_{A_2}^+)(x_1, z), (\mu_{A_1}^+ \times \mu_{A_2}^+)(y_1, z)),
 \end{aligned}$$

Tanım 6.1.3. G_1^* ve G_2^* grafiklerinin aralık değerli iki bulanık grafiği G_1 ve G_2 'nin

$$G_1 [G_2] = (A_1 \circ A_2, B_1 \circ B_2)$$

bileşimi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\forall (x_1, x_2) \in V$ için

$$i) \begin{cases} \mu_{A_1}^- \circ \mu_{A_2}^-(x_1, y_1) = \min(\mu_{A_1}^-(x_1), \mu_{A_2}^-(x_2)) \\ \mu_{A_1}^+ \circ \mu_{A_2}^+(x_1, y_1) = \min(\mu_{A_1}^+(x_1), \mu_{A_2}^+(x_2)) \end{cases},$$

$\forall x \in V_1$ ve $(x_2 y_2) \in E_2$ için

$$ii) \begin{cases} (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((x, x_2)(x, y_2)) = \min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{B_2}^-(x_2 y_2)) \\ (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((x, x_2)(x, y_2)) = \min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{B_2}^+(x_2 y_2)) \end{cases},$$

$\forall x \in V_2$ ve $(x_1 y_1) \in E_1$ için

$$iii) \begin{cases} (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((x_1, z)(y_1, z)) = \min(\mu_{B_1}^-(x_1 y_1), \mu_{A_2}^-(z)) \\ (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((x_1, z)(y_1, z)) = \min(\mu_{B_1}^+(x_1 y_1), \mu_{A_2}^+(z)) \end{cases},$$

$\forall (x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E$ için

$$(iv) \begin{cases} (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = \min(\mu_{A_2}^-(x_2), \mu_{A_2}^-(y_2), \mu_{B_1}^-(x_1 y_1)) \\ (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = \min(\mu_{A_2}^+(x_2), \mu_{A_2}^+(y_2), \mu_{B_1}^+(x_1 y_1)) \end{cases},$$

Örnek 6.1.3. $M_1 = (V_1, E_1)$ ve $M_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 = \{a, b\}$, $V_2 = \{c, d\}$, $E_1 = \{ab\}$ ve $E_2 = \{cd\}$ olacak şekilde grafikler olsun. İki aralık değerli bulanık grafiği $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ şeklinde verilsin.

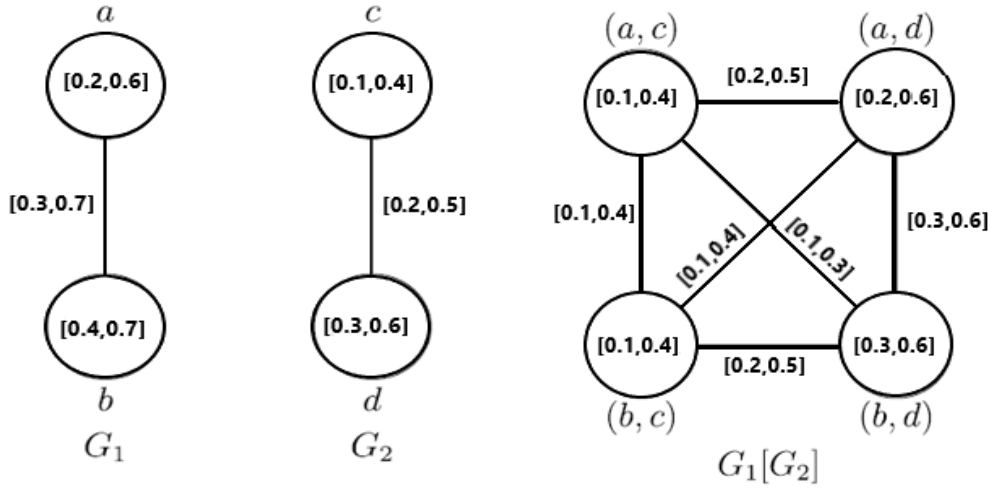
$$A_1 = \left\{ \frac{a}{[0.2, 0.6]}, \frac{b}{[0.4, 0.7]} \right\} \quad A_2 = \left\{ \frac{c}{[0.1, 0.4]}, \frac{d}{[0.3, 0.6]} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \frac{ab}{[0.3, 0.7]} \right\} \quad B_2 = \left\{ \frac{cd}{[0.2, 0.5]} \right\}$$

olsun. $G_1 \circ G_2$ gösterelim.

$$\begin{aligned} (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((a, c)(a, d)) &= 0.2, & (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((a, c)(a, d)) &= 0.5 \\ (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((b, c)(b, d)) &= 0.2, & (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((b, c)(b, d)) &= 0.5 \\ (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((a, c)(b, c)) &= 0.1, & (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((a, c)(b, c)) &= 0.4 \\ (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((a, d)(b, d)) &= 0.3, & (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((a, d)(b, d)) &= 0.6 \\ (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((a, c)(b, d)) &= 0.1, & (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((a, c)(b, d)) &= 0.3 \\ (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((b, c)(a, d)) &= 0.1, & (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((b, c)(a, d)) &= 0.4 \end{aligned}$$

$G_1 \circ G_2$ grafiğimiz aşağıdaki Şekil 6.6. da gösterilmiştir.



Şekil 6.6. Aralık Değerli İki Bulanık Grafiğin Bileşke İşlemi Örneği

Önerme 6.1.2. G_1^* ve G_2^* 'nin aralık değerli bulanık grafikleri G_1 ve G_2 'nin $G_1 [G_2]$ bileşimi, $G_1^* [G_2^*]$ 'nin aralık değerli bir bulanık grafiğidir.

İspat. Önceki ispatta olduğu gibi, sadece $B_1 \circ B_2$ koşullarını doğrularız. $x \in V_1$, $x_2 y_2 \in E_2$ durumunda, (ii) 'ye göre elde ederiz.

$$\begin{aligned}
 (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((x, x_2)(x, y_2)) &= \min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{B_2}^-(x_2 y_2)) \\
 &\leq \min(\mu_{A_1}^-(x), \min(\mu_{A_2}^-(x_2), \mu_{A_2}^-(y_2))) \\
 &= \min(\min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_2}^-(x_2)), \min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_2}^-(y_2))) \\
 &= \min((\mu_{A_1}^- \circ \mu_{A_2}^-)(x, x_2), (\mu_{A_1}^- \circ \mu_{A_2}^-)(x, y_2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((x, x_2)(x, y_2)) &= \min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{B_2}^+(x_2 y_2)) \\
 &\leq \min(\mu_{A_1}^+(x), \min(\mu_{A_2}^+(x_2), \mu_{A_2}^+(y_2))) \\
 &= \min(\min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_2}^+(x_2)), \min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_2}^+(y_2))) \\
 &= \min((\mu_{A_1}^+ \circ \mu_{A_2}^+)(x, x_2), (\mu_{A_1}^+ \circ \mu_{A_2}^+)(x, y_2))
 \end{aligned}$$

$z \in V_2, x_1 y_1 \in E_1$ durumunda ispat benzerdir. $(x_1, x_2) (y_1, y_2) \in E$ durumunda, $x_1 y_1 \in E_1$ ve $x_2 \neq y_2$ 'ye sahibiz, ki bu (iv) 'e göre

$$\begin{aligned} (\mu_{B_1}^- \circ \mu_{B_2}^-)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) &= \min(\mu_{A_2}^-(x_2), \mu_{A_2}^-(y_2), \mu_{B_1}^-(x_1 y_1)) \\ &\leq \min(\mu_{A_2}^-(x_2), \mu_{A_2}^-(y_2), \min(\mu_{A_1}^-(x_1), \mu_{A_1}^-(y_1))) \\ &= \min(\min(\mu_{A_1}^-(x_1), \mu_{A_2}^-(x_2)), \min(\mu_{A_1}^-(y_1), \mu_{A_2}^-(y_2))) \\ &= \min((\mu_{A_1}^- \circ \mu_{A_2}^-)(x_1, x_2), (\mu_{A_1}^- \circ \mu_{A_2}^-)(y_1, y_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu_{B_1}^+ \circ \mu_{B_2}^+)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) &= \min(\mu_{A_2}^+(x_2), \mu_{A_2}^+(y_2), \mu_{B_1}^+(x_1 y_1)) \\ &\leq \min(\mu_{A_2}^+(x_2), \mu_{A_2}^+(y_2), \min(\mu_{A_1}^+(x_1), \mu_{A_1}^+(y_1))) \\ &= \min(\min(\mu_{A_1}^+(x_1), \mu_{A_2}^+(x_2)), \min(\mu_{A_1}^+(y_1), \mu_{A_2}^+(y_2))) \\ &= \min((\mu_{A_1}^+ \circ \mu_{A_2}^+)(x_1, x_2), (\mu_{A_1}^+ \circ \mu_{A_2}^+)(y_1, y_2)) \end{aligned}$$

Tanım 6.1.4. G_1^* ve G_2^* grafiklerinin aralık değerli iki bulanık grafiği G_1 ve G_2 'nin $G_1 \cup G_2 = (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$ birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$i) \begin{cases} (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x) = \mu_{A_1}^-(x) \text{ ise } x \in V_1 \text{ ve } x \notin V_2 \\ (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x) = \mu_{A_2}^-(x) \text{ ise } x \in V_2 \text{ ve } x \notin V_1 \\ (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x) = \max(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_2}^-(x)) \text{ ise } x \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x) = \mu_{A_1}^+(x) \text{ ise } x \in V_1 \text{ ve } x \notin V_2 \\ (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x) = \mu_{A_2}^+(x) \text{ ise } x \in V_2 \text{ ve } x \notin V_1 \\ (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x) = \max(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_2}^+(x)) \text{ ise } x \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) = \mu_{B_1}^-(xy) \text{ ise } xy \in E_1 \text{ ve } xy \notin E_2 \\ (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) = \mu_{B_2}^-(xy) \text{ ise } xy \in E_2 \text{ ve } xy \notin E_1 \\ (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) = \max(\mu_{B_1}^-(xy), \mu_{B_2}^-(xy)) \text{ ise } xy \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$iv) \begin{cases} (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) = \mu_{B_1}^+(xy) & \text{ise } xy \in E_1 \text{ ve } xy \notin E_2 \\ (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) = \mu_{B_2}^+(xy) & \text{ise } xy \in E_2 \text{ ve } xy \notin E_1 \\ (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) = \max(\mu_{B_1}^+(xy), \mu_{B_2}^+(xy)) & \text{ise } xy \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

Örnek 6.1.4. $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$, $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$,

$E_1 = \{ab, bc, be, ce, ad, ed\}$, $V_2 = \{a, b, c, d, f\}$ ve $E_2 = \{ab, bc, cf, bf, bd\}$ olacak şekilde grafikler olsun.

$$A_1 = \left\{ \frac{a}{[0.3, 0.5]}, \frac{b}{[0.5, 0.6]}, \frac{c}{[0.2, 0.8]}, \frac{d}{[0.4, 0.7]}, \frac{e}{[0.3, 0.7]} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \frac{a}{[0.3, 0.5]}, \frac{b}{[0.2, 0.6]}, \frac{c}{[0.3, 0.7]}, \frac{d}{[0.2, 0.5]}, \frac{f}{[0.4, 0.7]} \right\}$$

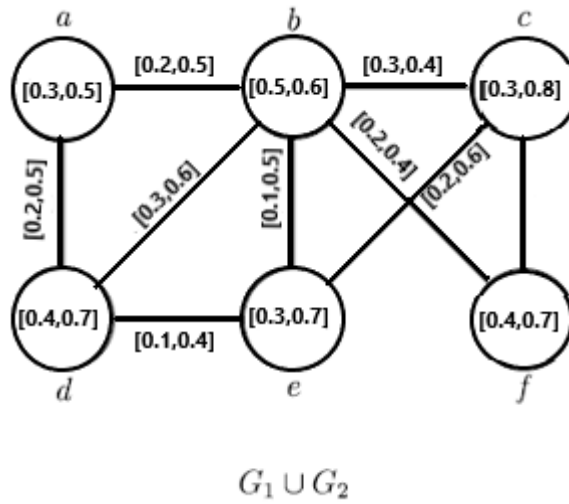
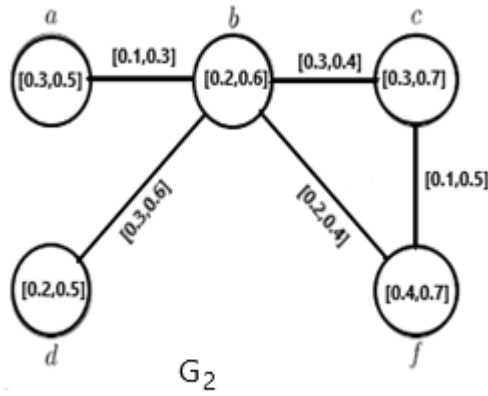
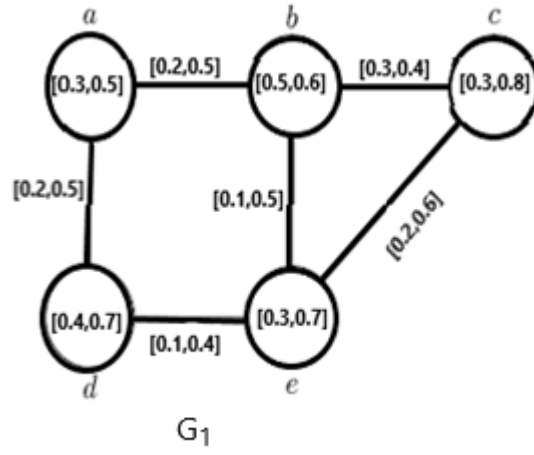
$$B_1 = \left\{ \frac{ab}{[0.2, 0.5]}, \frac{bc}{[0.3, 0.4]}, \frac{ce}{[0.2, 0.6]}, \frac{be}{[0.1, 0.5]}, \frac{ad}{[0.2, 0.5]}, \frac{de}{[0.1, 0.4]} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \frac{ab}{[0.1, 0.3]}, \frac{bc}{[0.3, 0.4]}, \frac{cf}{[0.1, 0.5]}, \frac{bf}{[0.2, 0.4]}, \frac{bd}{[0.3, 0.6]} \right\}$$

ile tanımlanan aralık değerli iki bulanık grafik $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ düşünelim ve ardından ,

$$\begin{array}{lll} (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(a) = 0.3, & (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(b) = 0.5, & (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(c) = 0.3 \\ (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(d) = 0.4, & (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(e) = 0.3, & (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(f) = 0.4 \\ (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(a) = 0.5, & (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(b) = 0.6, & (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(c) = 0.8 \\ (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(d) = 0.7, & (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(e) = 0.7, & (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(f) = 0.7 \\ (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(ab) = 0.2, & (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(bc) = 0.3, & (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(ce) = 0.2 \\ (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(be) = 0.1, & (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(ad) = 0.2, & (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(de) = 0.1 \\ (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(bd) = 0.3, & (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(bf) = 0.2, & (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(cf) = 0.1 \\ (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(ab) = 0.5, & (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(bc) = 0.4, & (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(ce) = 0.6 \\ (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(be) = 0.5, & (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(ad) = 0.5, & (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(de) = 0.4 \\ (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(bd) = 0.6, & (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(bf) = 0.4, & (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(cf) = 0.5 \end{array}$$

$G_1 \cup G_2 = (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$, $G_1^* \cup G_2^*$ grafiğinin aralık değerli bir bulanık grafiği
Şekil 6.7. deki gibi gösterilmiştir.



Şekil 6.7. Aralık Değerli İki Bulanık Grafiğin Birleşim İşlemi Örneği

Önerme 6.1.3. İki aralık değerli bulanık grafiğin birleşimi, aralık değerli bir bulanık grafikdir.

İspat. $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ sırasıyla G_1^* ve G_2^* 'nin aralık değerli bulanık grafikleri olsun. $G_1 \cup G_2 = (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$ 'nin, $G_1^* \cup G_2^*$ grafiğinin aralık değerli bir bulanık grafiği olduğunu ispatlıyoruz. $A_1 \cup A_2$ için tüm koşullar karşılandığından, yalnızca $B_1 \cup B_2$ koşullarını doğrularız. İlk önce $xy \in E_1 \cap E_2$ olduğu durumu ele alıyoruz. Daha sonra

$$\begin{aligned} (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) &= \max(\mu_{B_1}^-(xy), \mu_{B_2}^-(xy)) \\ &\leq \max(\min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_1}^-(y)), \min(\mu_{A_2}^-(x), \mu_{A_2}^-(y))) \\ &= \min(\max(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_2}^-(x)), \max(\mu_{A_1}^-(y), \mu_{A_2}^-(y))) \\ &= \min((\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) &= \max(\mu_{B_1}^+(xy), \mu_{B_2}^+(xy)) \\ &\leq \max(\min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_1}^+(y)), \min(\mu_{A_2}^+(x), \mu_{A_2}^+(y))) \\ &= \min(\max(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_2}^+(x)), \max(\mu_{A_1}^+(y), \mu_{A_2}^+(y))) \\ &= \min((\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(y)) \end{aligned}$$

$xy \in E_1$ ve $xy \notin E_2$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) &\leq \min((\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(y)), \\ (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) &\leq \min((\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(y)) \end{aligned}$$

$xy \in E_2$ ve $xy \notin E_1$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) &\leq \min((\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(y)), \\ (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) &\leq \min((\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(y)) \end{aligned}$$

Bu ispatı tamamlamış oluruz.

Tanım 6.1.5. G_1^* ve G_2^* grafiklerinin aralık değerli iki bulanık grafiği G_1 ve G_2 'nin $G_1 + G_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$ birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$x \in V_1 \cup V_2$ için

$$i) \begin{cases} (\mu_{A_1}^- + \mu_{A_2}^-)(x) = (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x) \\ (\mu_{A_1}^+ + \mu_{A_2}^+)(x) = (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x) \end{cases}$$

$x \in E_1 \cap E_2$ için

$$ii) \begin{cases} (\mu_{B_1}^- + \mu_{B_2}^-)(xy) = (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) \\ (\mu_{B_1}^+ + \mu_{B_2}^+)(xy) = (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) \end{cases}$$

$xy \in E$ ise burada E , V_1 ve V_2 köşelerini birleştiren tüm kenarların kümesidir.

$$iii) \begin{cases} (\mu_{B_1}^- + \mu_{B_2}^-)(xy) = \min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_2}^-(y)) \\ (\mu_{B_1}^+ + \mu_{B_2}^+)(xy) = \min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_2}^+(y)) \end{cases}$$

Önerme 6.1.4. Aralık değerli bulanık grafiklerin birleşimi, aralık değerli bir bulanık grafikdir.

İspat. $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ sırasıyla G_1^* ve G_2^* 'nin aralık değerli bulanık grafikleri olsun. $G_1 + G_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$ 'nin, $G_1^* + G_2^*$ grafiğinin aralık değerli bir bulanık grafiği olduğunu ispatlıyoruz. Önerme 6.1.3' e göre, $xy \in E'$ olduğunda durumu doğrulamak için yeterlidir. Bu durumda sahip olduğumuz

$$\begin{aligned} (\mu_{B_1}^- + \mu_{B_2}^-)(xy) &= \min(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_1}^-(y)) \\ &\leq \min((\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(y)) \\ &= \min((\mu_{A_1}^- + \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- + \mu_{A_2}^-)(y)), \end{aligned}$$

$$(\mu_{B_1}^+ + \mu_{B_2}^+)(xy) = \min(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_1}^+(y))$$

$$\begin{aligned}
&\leq \min \left((\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(y) \right) \\
&= \min \left((\mu_{A_1}^+ + \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ + \mu_{A_2}^+)(y) \right),
\end{aligned}$$

Önerme 6.1.5. $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olan aralık değerli bulanık grafikler olsun. A_1, A_2, B_1 ve B_2 , sırasıyla V_1, V_2, E_1 ve E_2 'nin aralık değerli bulanık alt kümeleri olsun. O halde $G_1 \cup G_2 = (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$, $G_1^* \cup G_2^*$ 'nin aralık değerli bir bulanık grafiğidir ancak ve ancak $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ sırasıyla G_1^* ve G_2^* 'nin aralık değerli bulanık grafikleridir.

İspat: $G_1 \cup G_2 = (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$ 'nin, $G_1^* \cup G_2^*$ 'nin aralık değerli bir bulanık grafiği olduğunu varsayalım. $xy \in E_1$ olsun. Sonra $xy \notin E_2$ ve $x \in V_1, y \in V_2$. Böylece

$$\begin{aligned}
\mu_{B_1}^-(xy) &= (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) \\
&\leq \min \left((\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(y) \right) \\
&= \min \left(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_1}^-(y) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{B_1}^+(xy) &= (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) \\
&\leq \min \left((\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(y) \right) \\
&= \min \left(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_1}^+(y) \right),
\end{aligned}$$

Bu, $G_1 = (A_1, B_1)$ 'in aralık değerli bir bulanık grafik olduğunu gösterir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\mu_{B_2}^-(xy) &= (\mu_{B_1}^- \cup \mu_{B_2}^-)(xy) \\
&\leq \min \left((\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- \cup \mu_{A_2}^-)(y) \right) \\
&= \min \left(\mu_{A_2}^-(x), \mu_{A_2}^-(y) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{B_2}^+(xy) &= (\mu_{B_1}^+ \cup \mu_{B_2}^+)(xy) \\
&\leq \min \left((\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ \cup \mu_{A_2}^+)(y) \right) \\
&= \min \left(\mu_{A_2}^+(x), \mu_{A_2}^+(y) \right),
\end{aligned}$$

$G_2 = (A_2, B_2)$ 'nin aralık değerli bir bulanık grafiklerdir.

Önerme 6.1.6. $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olan aralık değerli bulanık grafikler olsun. A_1, A_2, B_1 ve B_2 , sırasıyla V_1, V_2, E_1 ve E_2 'nin aralık değerli bulanık alt kümeleri olsun. O halde $G_1 + G_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$, G^* 'nin aralık değerli bir bulanık grafiğidir ancak ve ancak $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ sırasıyla G_1^* ve G_2^* 'nin aralık değerli bulanık grafikleridir.

İspat. $G_1 + G_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$ 'nin, $G_1^* + G_2^*$ 'nin aralık değerli bir bulanık grafiği olduğunu varsayalım. $xy \in E_1$ olsun. Sonra $xy \notin E_2$ ve $x \in V_1, y \in V_2$. Böylece

$$\begin{aligned}\mu_{B_1}^-(xy) &= (\mu_{B_1}^- + \mu_{B_2}^-)(xy) \\ &\leq \min\left((\mu_{A_1}^- + \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- + \mu_{A_2}^-)(y)\right) \\ &= \min\left(\mu_{A_1}^-(x), \mu_{A_1}^-(y)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{B_1}^+(xy) &= (\mu_{B_1}^+ + \mu_{B_2}^+)(xy) \\ &\leq \min\left((\mu_{A_1}^+ + \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ + \mu_{A_2}^+)(y)\right) \\ &= \min\left(\mu_{A_1}^+(x), \mu_{A_1}^+(y)\right),\end{aligned}$$

Bu, $G_1 = (A_1, B_1)$ 'in aralık değerli bir bulanık grafik olduğunu gösterir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\mu_{B_2}^-(xy) &= (\mu_{B_1}^- + \mu_{B_2}^-)(xy) \\ &\leq \min\left((\mu_{A_1}^- + \mu_{A_2}^-)(x), (\mu_{A_1}^- + \mu_{A_2}^-)(y)\right) \\ &= \min\left(\mu_{A_2}^-(x), \mu_{A_2}^-(y)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{B_2}^+(xy) &= (\mu_{B_1}^+ + \mu_{B_2}^+)(xy) \\ &\leq \min\left((\mu_{A_1}^+ + \mu_{A_2}^+)(x), (\mu_{A_1}^+ + \mu_{A_2}^+)(y)\right) \\ &= \min\left(\mu_{A_2}^+(x), \mu_{A_2}^+(y)\right),\end{aligned}$$

$G_2 = (A_2, B_2)$ 'nin aralık değerli bir bulanık grafikdir.

6.2. Aralık Değerli Bulanık Grafiklerin İzomorfizmaları

Bu bölümde, aralık değerli bulanık grafiklerin izomorfizmaları verilecektir.

Tanım 6.2.1. $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ aralık değerli iki bulanık grafik olsun. A bir homomorfizma $f: V_1 \rightarrow V_2$ eşlemesidir, öyle ki

$$i) \mu_{A_1}^-(x_1) \leq \mu_{A_2}^-(f(x_1)), \mu_{A_1}^+(x_1) \leq \mu_{A_2}^+(f(x_1)), \quad \forall x_1 \in V_1$$

$$ii) \mu_{B_1}^-(x_1 y_1) \leq \mu_{B_2}^-(f(x_1) f(y_1)), \mu_{B_1}^+(x_1 y_1) \leq \mu_{B_2}^+(f(x_1) f(y_1)), \quad \forall x_1 y_1 \in V_1$$

özelliliği ile birebir ve örten homomorfizma

$$iii) \mu_{A_1}^-(x_1) = \mu_{A_2}^-(f(x_1)), \mu_{A_1}^+(x_1) = \mu_{A_2}^+(f(x_1)),$$

zayıf bir izomorfizm olarak adlandırılır.

Birebir ve örten homomorfizma, $f: G_1 \rightarrow G_2$, öyle ki

$$iv) \mu_{B_1}^-(x_1 y_1) = \mu_{B_2}^-(f(x_1) f(y_1)), \mu_{B_1}^+(x_1 y_1) = \mu_{B_2}^+(f(x_1) f(y_1)), \quad \forall x_1 y_1 \in V_1$$

bir eş-izomorfizma olarak adlandırılır.

$f: G_1 \rightarrow G_2$ üçüncü ve dördüncü maddeleri sağlayan birebir ve örten grafik izomorfizma olarak adlandırılır.

Örnek 6.2.1. $V_1 = \{a, b\}$, $V_2 = \{x, y\}$, $E_1 = \{ab\}$ ve $E_2 = \{xy\}$ olacak şekilde $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ grafiklerini düşünün A_1, A_2, B_1 ve B_2 ,

$$A_1 = \left\{ \frac{a}{[0.3, 0.6]}, \frac{b}{[0.2, 0.8]} \right\} \text{ ve } A_2 = \left\{ \frac{x}{[0.2, 0.8]}, \frac{y}{[0.3, 0.6]} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \frac{ab}{[0.2, 0.6]} \right\} \text{ ve } B_2 = \left\{ \frac{xy}{[0.1, 0.5]} \right\}$$

tarafından tanımlanan aralık değerli bulanık alt kümeler olsun.

O halde, görülmesi kolay olduğu gibi, $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ sırasıyla G_1^* ve $G_1^{*'}$ nin aralık değerli bulanık grafikleridir. Tanım 6.2.1. dolayı $f(a) = y$ ve $f(b) = x$ ile tanımlanan $f: V_1 \rightarrow V_2$ zayıf bir izomorfizmdir ancak bir izomorfizm değildir.

Örnek 6.2.1. G_1^* ve G_2^* önceki örnekteki gibi olsun ve A_1, A_2, B_1 ve B_2 tarafından tanımlanan aralık değerli bulanık alt kümeler olsun.

$$A_1 = \left\{ \frac{a}{[0.3, 0.5]}, \frac{b}{[0.5, 0.7]} \right\} \text{ ve } A_2 = \left\{ \frac{x}{[0.5, 0.7]}, \frac{y}{[0.3, 0.5]} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \frac{ab}{[0.1, 0.6]} \right\} \text{ ve } B_2 = \left\{ \frac{xy}{[0.1, 0.6]} \right\}$$

O halde $G_1 = (A_1, B_1)$ ve $G_2 = (A_2, B_2)$ sırasıyla G_1^* ve $G_2^{*'}$ nin aralık değerli bulanık grafikleridir. $f(a) = y$ ve $f(b) = x$ ile tanımlanan $f: V_1 \rightarrow V_2$ zayıf bir izomorfizmdir ancak bir eş izomorfizm değildir.

7. SONUÇ

Bu tezde, öncelikle çalışılacak konunun temelini oluşturan bulanık mantık, bulanık kümeler, bulanık bağıntı kavramları ve temel özellikleri verilmiştir. Sonra aralık değerli bulanık bağıntı ve aralık değerli bulanık küme işlemleri tanıtılmıştır. Daha sonra tezin amacı olan aralık değerli bulanık grafikler ve temel özelliklerini incelenmiştir.



KAYNAKÇA

- Akram M. 2008. Fuzzy Lie ideals of lie algebras with interval-valued membership functions, Quasigroups Related Systems 16, 1-12
- Akram M. ve Dar K.H. 2010. Generalized Fuzzy K-Algebras, VDM Verlag, ISBN: 978-3-639-27095-2, pp. 288.
- Akram M. ve Dudek W.A. 2011. Interval-valued fuzzy graphs, Computers Mathematics with Applications ,Volume 61, Issue 2, January 2011,Pages 289-299
- Akram M. ,Alshehri N. O. ve Dudek W.A. 2013. Certain types of interval-valued fuzzy graphs. Journal of Applied Mathematics.
- Alaoui A. 1999. On fuzzification of some concepts of graphs, Fuzzy Sets Syst. 101 363–389.
- Atanassov K.T. 1999. Intuitionistic fuzzy sets: Theory and applications, Studies in fuzziness and soft computing, Physica-Verl.
- Atanassov K.T. 1986. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems,vol.20,no.1,pp, 87-96.
- Baykal N. ve Beyan T. 2004. Bulanık Mantık İlke ve Temelleri. Ankara: Bıçaklar Kitabevi.
- Bhattacharya P. 1987. Some remarks on fuzzy graphs, Pattern Recognit. Lett. 6 . 297–302.
- Bhutani K.R. 1989. On automorphism of fuzzy graphs, Pattern Recognit. Lett. 9 , 159–162.
- Bhutani K.R. ve Battou A. 2003. On M-strong fuzzy graphs, Inf. Sci. 155. 103–109.
- Bhutani K.R. ve Rosenfeld A. 2003. Strong arcs in fuzzy graphs, Inf. Sci. 152, 319–322.
- Boorzoei R.A.ve Rashmanlou H. 2016. Cayley Interval – Valued Fuzzy Graphs.UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics 78.3, 83-94.
- Dubois D. ve Prade H. 1980. Fuzzy sets and systems: Theory and applications, Academic Press.

- Gorzalczany M.B. 1989. An Interval valued fuzzy inference method some basic properties. *Fuzzy Sets syst.*3, 243-251.
- Gorzalczany M.B. 1987. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, *Fuzzy Sets Syst.* 21, 1–17.
- Harary F. 1972. *Graph Theory*, 3rd Edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.
- Hongmei J. ve Lianhua W. 2009. Interval-valued fuzzy subsemigroups and subgroups associated by interval valued fuzzy graphs, in: 2009 WRI Global Congress on Intelligent Systems, pp. 484–487.
- Huber K.P. ve Berthold M.R. 2002. Application of fuzzy graphs for metamodeling, in: *Proceedings of the 2002 IEEE Conference*, pp. 640-644.
- Mathew S. ve Sunitha M.S. 2010. Node connectivity and arc connectivity of a fuzzy graph, *Inf. Sci.* 180 (4) 519–531.
- Klir G.J. ve Folger T.A. 1988. *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*. Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs.
- Mendel J.M. 2001. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Mendel J.M. 2006. X. Gang, Fast computation of centroids for constant-width interval-valued fuzzy sets, *Fuzzy information processing society, NAFIPS* , 621–626.
- Mordeson J.N. 1994. C.S. Peng, Operations on fuzzy graphs, *Inf. Sci.* 79. 159–170.
- Mordeson J.N. Nair P.S. 1998. *Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs*, Physica Verlag, Heidelberg, Second edition 2001.
- Mordeson J.N. 1993. Fuzzy Line Graphs. *Pattern Recognit. Lett.*14, 381-384.
- Nagoorgani A. ve Radha K. 2008. Isomorphism on fuzzy graphs, *Int. J. Comput. Math. Sci.* 2. 190–196.
- Özdemir O. ve Kalinkara Y. 2020. Bulanık Mantık. *ACTA INFOLOGICA*, 155,174.
- Perchant A. ve Bloch I. 2002. Fuzzy morphisms between graphs, *Fuzzy Sets Syst.* 128. 149–168.
- Rashmanlou H. ve Pal M. 2013. Irregular Interval Valued Fuzzy Graphs. *Annals of Pure Applied Mathematics*, 56-66.

- Rosenfeld A. 1975. Fuzzy Graphs. In: Fuzzy Sets and their Applications. Academic Press, New York, 77-95.
- Rosenfeld, A. 1975. Fuzzygraphs, in: L.A. Zadeh, K.S. Fu, M. Shimura (Eds.), Fuzzy Sets and Their Applications, Academic Press, New York, pp. 77–95.
- Roy, M. K and Biswas, R. 1992. I-v fuzzy relations and Sanchez's approach for medical diagnosis, Fuzzy Sets and Systems, 47, 35-38.
- Shahzamanian M.H. , Shirmohammadi M. ve Davvaz B. 2010. Roughness in Cayleygraphs, Information Sciences, 180(17), 3362-3372.
- Sunitha M.S. , Vijayakumar A. 2002. Complement of a fuzzy graph, Indian J. Pure Appl. Math. 33 1451–1464.
- Talebi A.A. , Rashmanlou H. ve Ameri R. 2016. New Concepts of Product Interval Valued Fuzzy Graph, J. Appl. Math. & Informatics Vol. 34(2016), No. 3 - 4, pp. 179-192.
- Tanaka H. 1987. Fuzzy data analysis by possibilistic linear models. Fuzzy Sets and Systems, 24, 363-375.
- Turksen I.B. 1986. Interval Valued Fuzzy Sets Based on normal forms. Fuzzy Sets syst. 20, 191-210.
- Wu S.Y. 1986 The Compositions of fuzzydigraphs, Journal of Research in Education Sciences, 31, 603-628.
- Zadeh, L. 1975. The concept of a linguistic and application to approximate reasoning I. *Inf. Sci.* 8, 199–249.
- Zadeh L. 1971. Similarity relations and fuzzy orderings, *Inf. Sci.* 3, 177–200
- Zadeh, L. 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control* , 8(3), 338-353.
- Zimmermann H.J. 1991. Fuzzy Set Theory and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, Boston. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7949-0>

ÖZGEÇMİŞ

