

**ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ
HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ**

HASAN KARA

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. HÜSEYİN BUDAK**

DÜZCE, 2024

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ
HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Hasan KARA tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet GÜMÜŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 12/09/2024

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

12 Eylül 2024

Hasan KARA

TEŞEKKÜR

"Evvel Refik Bade'l-Tarîk" der eskiler. "Önce yoldaş, sonra yol" anlamına gelen bu söz, yola çıkacağın insanın kıymetine binaen söylenmiştir. Doktora öğrenimimi ve bu tezin hazırlanmasını uzun bir yol olarak görürsek, bana çıktığım bu yolda rehber olan kıymetli hocam Doç. Dr. Hüseyin BUDAK'a gönülden teşekkür ederim. Sadece hocalığıyla değil, beni bir evladı gibi görüp insanlığıyla, karakteriyle, hayata bakışıyla bana bir baba gibi örnek olmuştur. Kendisinden öğrendiğim "cehdetmek" ve "nasip olması için yolda olmak gerek" şiarıyla çabanın insanı nerelere getirdiğini en kalbi duygularımla hissettiğim hocama teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tırnaklarıyla kazıyarak beni bugünlere getiren, verdikleri emek ve mücadele ile maddi manevi desteklerini esirgemeyen annem Gülizar KARA ve babam Salih KARA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım. Evlatları olmaktan gurur duyduğum bir kültürle beni yetiştirdikleri ve her zaman yanımda oldukları için minnettirim. Eğitim hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen evimizin çınar ağacı babaanem Saide KARA'ya ve gururla adını taşıdığım merhum dedem Hasan KARA'ya teşekkür ederim. Ailemizin bir evladı olan, doktora öğrenimim boyunca beni hep motive eden, desteğini her zaman hissettiğim Menekşe ÇAVDAR'a gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Gireceğim sınavlarda heyecanımı ve stresimi yenmemde büyük emeği olan, çalışmalarına yaptığı desteği ve hoşgörüsü ile, varlığını her zaman hissettiğim ağabeyim Doç. Dr. Fatih HEZENCİ hocama, kişilik ve karakteriyle bana yol gösteren, yardıma ihtiyacım olduğunda asla geri çevirmeyen, çalışmalarımı ve beni daima destekleyen ablam Doç. Dr. Tuba TUNÇ hocama, konuşmaları ve davranışlarıyla bana ilham olan, daima motive eden, her zaman yanımda olan ağabeyim Doç. Dr. İzzettin DEMİR'e gönülden teşekkür ederim.

Yaptığı çalışmalar, yol göstericiliği ve yetiştirdiği öğrenciler ile bize bir akademisyenin nasıl olması gerektiğini gösteren hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya, yüksek lisansımı birlikte tamamladığım, bir oğlunun isminin Hasan olmasından dolayı "Hasan adında iki oğlum var" diyen Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ hocama, önerileri ve

yönlendirmeleriyle doğru adımlar atmamı sağlayan hocam Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ'a, desteği, hoşgörüsü ve yapıcı tutumuyla hocam Doç. Dr. Nejla ÖZMEN'e, kullandığım yazılımla ilgili problemlerimde yardımcı olan hocam Doç. Dr. Zakir DENİZ'e gönülden teşekkür ederim.

Tüm bu süreç boyunca bana kapılarını her zaman açan, destek ve motivasyonlarıyla sofralarında yer veren ablam Özlem BUDAK'a, ablam Elif HEZENCİ'ye ve Dilif TUNÇ teyzeme çok teşekkür ederim. Bu süreçte yanımda olan herkese, ilkokul yıllarımdan bu yana derslerime girmiş tüm hocalarıma ve her zaman yanımda olan arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca, 2211/A Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na, bilime ve bilim insanına önem veren TÜBİTAK kurumuna teşekkür ederim.

12 Eylül 2024

Hasan KARA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SİMGELER	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
EXTENDED ABSTRACT	xii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	10
2.1. REEL DEĞERLİ FONKSİYONLAR	10
2.1.1. Reel Değerli Fonksiyonlar İçin Temel Kavramlar	10
2.1.2. Reel Değerli Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller	13
2.1.3. Reel Değerli Fonsiyonlar İçin Bazı Teoremler	19
2.2. ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR	25
2.2.1. Aralık Analizi	25
2.2.2. Aralık Değerli Fonksiyonların İntegrali	27
2.2.3. Aralık Değerli Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller	30
2.2.4. Aralık Değerli Fonksiyonlar İçin Bazı Tanım Ve Teoremler	32
3. TEK DEĞİŞKENLİ ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN HERMİTE–HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	39
4. İKİ DEĞİŞKENLİ ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER	52
4.1. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİNİ İÇEREN HERMİTE–HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	52
4.2. SARIKAYA KESİRLİ İNTEGRALLERİNİ İÇEREN HERMİTE–HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	72
4.3. FONKSİYONA GÖRE KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN HERMİTE–HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	88

5. ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN AĞIRLIKLİ EŞİTSİZLİKLER	108
5.1. TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN FEJER EŞİTSİZLİKLERİ.....	108
5.2. AĞIRLIKLİ JENSEN EŞİTSİZLİĞİ KULLANILARAK ELDE EDİLEN TEK DEĞİŞKENLİ FEJER EŞİTSİZLİKLERİ.....	119
5.3. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN FEJER EŞİTSİZLİKLERİ.....	122
5.4. AĞIRLIKLİ JENSEN EŞİTSİZLİĞİ KULLANILARAK ELDE EDİLEN İKİ DEĞİŞKENLİ FEJER EŞİTSİZLİKLERİ.....	131
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	139
7. KAYNAKLAR.....	142
ÖZGEÇMİŞ.....	146

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1. (3.9) eşitsizliğinin birinci terim ve ikinci teriminin karşılaştırılması	45
Şekil 3.2. (3.9) eşitsizliğinin ikinci terim ve üçüncü teriminin karşılaştırılması	46
Şekil 4.1. (4.15) eşitsizliğinin birinci terim ve ikinci teriminin karşılaştırılması	59
Şekil 4.2. (4.15) eşitsizliğinin ikinci terim ve üçüncü teriminin karşılaştırılması	60
Şekil 4.3. (4.15) eşitsizliğinin üçüncü terim ve dördüncü teriminin karşılaştırılması	60
Şekil 4.4. (4.15) eşitsizliğinin dördüncü terim ve beşinci teriminin karşılaştırılması	61

SİMGELER

ϕ'	ϕ fonksiyonunun 1. Dereceden Türevi
ϕ''	ϕ fonksiyonunun 2. Dereceden Türevi
$J_{a+}^{\alpha} \phi(x)$	Riemann-Liouville Sol Taraflı Kesirli İntegral
$J_{b-}^{\alpha} \phi(x)$	Riemann-Liouville Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$H_{a+}^{\alpha} \phi(x)$	Hadamard Sol Taraflı Kesirli İntegral
$H_{b-}^{\alpha} \phi(x)$	Hadamard Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$\mathfrak{I}_{a+,u}^{\alpha,k}(\phi)(x)$	Genelleştirilmiş Sol Taraflı Kesirli İntegral
$\mathfrak{I}_{b-,u}^{\alpha,k}(\phi)(x)$	Genelleştirilmiş Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$K_{a+, \rho}^{\alpha} \phi(x)$	Katugampola Sol Taraflı Kesirli İntegral
$K_{b-, \rho}^{\alpha} \phi(x)$	Katugampola Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$J_{a+; \varpi}^{\alpha} \phi(x)$	Fonksiyona göre Sol Taraflı Kesirli İntegral
$J_{b-; \varpi}^{\alpha} \phi(x)$	Fonksiyona göre Sağ Taraflı Kesirli İntegral
${}_{a+}I_{\varphi} \phi(x)$	Sarıkaya Sol Taraflı Kesirli İntegral
${}_{b-}I_{\varphi} \phi(x)$	Sarıkaya Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$L_1[a, b]$	1. Dereceden (a, b) Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu Öklid Uzayı
Γ	Gamma Fonksiyonu
$\mathcal{B}$	Beta Fonksiyonu

ÖZET

ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE–HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Hasan KARA

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin BUDAK

Eylül 2024, 145 sayfa

Bu tezde, aralık değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, tek değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için elde edilen genelleştirilmiş kesirli eşitsizlikleri içermektedir. İkinci bölümde ise iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu kısımda aralık değerli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri, Sarıkaya kesirli integralleri ve başka bir fonksiyona göre kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilmiştir. Üçüncü bölüm, aralık değerli fonksiyonlar için Hermite–Hadamard tipli eşitsizliklerin ağırlıklı versiyonlarından oluşmaktadır. Bu bölümde tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonların çarpımı için elde edilen eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca, ağırlıklı Jensen eşitsizliği yardımıyla aralıklı tek değişkenli fonksiyonlar ve aralık değerli iki değişkenli fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Aralık değerli fonksiyon, Konveks fonksiyon, Kesirli integral, Hermite–Hadamard eşitsizliği, Fejer eşitsizliği, Jensen eşitsizliği.

ABSTRACT

GENERALIZED HERMITE–HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR INTERVAL-VALUED FUNCTIONS

Hasan KARA

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin BUDAK

September 2024, 145 pages

In this thesis, generalized Hermite-Hadamard inequalities for interval-valued functions are obtained. This thesis consists of three main parts. The first part included generalized fractional inequalities obtained for interval-valued functions with one variable. In the second part, inequalities were obtained for interval-valued functions with two variables. This part acquired Hermite-Hadamard inequalities with the help of the Riemann-Liouville fractional integrals, Sarıkaya fractional integrals, and fractional integrals with respect to another function for interval-valued functions. The third part consists of weighted versions of Hermite–Hadamard type inequalities for interval-valued functions. In this part, the inequalities obtained for the product of single variable and two variables functions are given. In addition, with the help of the weighted Jensen inequality, inequalities are obtained for single variable functions with intervals and functions of two variables with interval values.

Keywords: Interval-valued function, Convex function, Fractional integral, Hermite–Hadamard inequality, Fejer inequality, Jensen inequality.

EXTENDED ABSTRACT

GENERALIZED HERMITE–HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR INTERVAL-VALUED FUNCTIONS

Hasan KARA

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin BUDAK

September 2024, 145 pages

1. INTRODUCTION

Convex functions have an important place in almost every field of mathematics and especially in the theory of inequalities. Integral inequalities are the most interesting aspect of the theory of inequalities in the literature. Integral inequalities are an area that has applications in many real-world practical problems. One of the inequalities between integral inequalities and convex functions is the Hermite-Hadamard type inequality.

Interval analysis is a useful tool in various areas where uncertain data is involved. It is used in applied computer graphics, experimental and theoretical physics, error analysis, robotic coding, etc. Particular attention is paid to integral inequalities obtained using interval-valued functions.

Fractional analysis is said to have originated in the 17th century, beginning with a correspondence between mathematicians. This subject was discussed during correspondence between L'Hospital and Leibniz. The basic idea here is "Can a fractional derivative or fractional integral of a function be taken?" based on the question. After Liouville, who organized and interpreted this idea, it became the subject of study by mathematicians such as Riemann, Fourier, Lagrange, Abel, Wely, Letnikov, Grünwald, and Euler.

Interval analysis is an analysis that generalizes classical analysis. This thesis is on interval-valued functions defined in interval analysis. In the first part of this thesis, the

theory of inequality, the concepts of fractional analysis and interval analysis, and their development processes will be discussed. The main conclusions of the thesis consist of the third, fourth, and fifth sections. The first of these sections contains the inequalities presented for interval-valued functions with one variable. This section has a subsection, which have definitions of generalized fractional integrals for interval-valued functions with one variable are given. In addition to this, some generalized Hermite–Hadamard-type inequalities are obtained by using these fractional integral definitions. The fourth section of the thesis has three subsections. In the first of these subsections, new Hermite–Hadamard type inequalities are obtained with the help of Riemann-Liouville fractional integrals for functions of two variables with interval values. In the second subsection of the fourth section, Hermite-Hadamard type inequalities are given for the Sarıkaya fractional integrals. In addition, in the last subsection of the fourth section, Hermite-Hadamard inequalities obtained by using fractional integrals according to the function for interval-valued functions with two variables. The fifth section of the thesis consists of weighted inequalities for interval-valued functions. The fifth section is analyzed in four subsections. The first subsection presents inequalities for the product of interval-valued functions. In the second subsection, inequalities are derived using Jensen’s inequality for interval-valued functions. In the third subsection, inequalities are established by the product of functions of two variables with interval values. In the last subsection, inequalities are given using Jensen’s inequality for functions of two variables with interval values. In the sixth section, the conclusions are presented and suggestions for future work are given to interested readers.

2. MATERIAL AND METHODS

Basic concepts for real-valued functions are given. Fractional integral definitions and some theorems are given for one variable and two variables of real-valued functions. Moreover, interval-valued functions are introduced. Fractional integrals are given for functions of univariate with interval and bivariate with interval value. Finally, obtained theorems for these integral definitions are given.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

The third, fourth, and fifth sections constitute the main part of the thesis work. The third part will include inequalities obtained for interval-valued functions with one variable. This section contains a subsection of Hermite–Hadamard-type inequalities developed with the help of generalized fractional integrals for interval-valued functions. The fourth section involves the inequalities obtained for two variables of interval-valued functions. The fourth section consists of three sub-titles. These subsections consist of Hermite-Hadamard type

inequalities including Riemann-Liouville fractional integrals, Sarikaya fractional integrals, and fractional integrals with respect to another function for interval-valued functions. The fifth section consists of weighted versions of Hermite-Hadamard-type inequalities for interval-valued functions. This section is analyzed under four subsections. It covers the product of interval-valued functions with the one variable interval-valued functions, weighted inequalities obtained using Jensen's inequality for interval-valued functions with one variable, inequalities obtained for products of interval-valued functions with two variables, and weighted inequalities obtained using Jensen's inequality for interval-valued functions with two variables.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this thesis, generalized Hermite-Hadamard type inequalities for interval-valued functions are obtained. The Hermite-Hadamard type inequalities are established with the help of generalized fractional integrals for single variable interval-valued functions. In addition, inequalities have been proved for two variables of interval-valued functions with the help of Riemann-Liouville, Sarikaya, and their fractional integrals by function. In addition, weighted inequalities are obtained for interval-valued functions. In the future, interested readers can apply different types of convexity for interval-valued functions and obtain new inequalities. In addition, new operators can be defined for interval-valued functions with the approaches included in fractional analysis. With the help of these defined operators, inequalities that are not in the literature can be obtained. Quantum analysis is also very popular today. A significant number of studies have been conducted in Quantum analysis for interval-valued functions. The inequalities derived in this thesis may serve as a source of motivation for the development of new inequalities and the exploration of new research areas within this field of analysis.

1. GİRİŞ

Konveks fonksiyonların çalışmalarına ilk olarak 19. yüzyılda başlanırken, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konvekslik, matematiğin hemen hemen her alanında ve özellikle eşitsizlikler teorisinde önemli bir yer tutar. Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar teorisi arasında büyük bir bağ vardır. Bu bağ konveks fonksiyonun tanımından başlayarak ortaya çıkmış ve sonrasında yapılan araştırmalarla ivmesi artırılmıştır. Konveks fonksiyonlardan yararlanarak elde edilen ve üzerine birçok araştırmaya konu olmuş Hermite–Hadamard eşitsizlikleri literatürde kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve üzerine araştırmalar inşa edilen bir konu olmaya devam etmektedir.

Eşitsizlik teorisinin gelişiminde rol oynayan ilk sistematik çalışma Hardy, Littlewood ve Polya tarafından sunulan ve 1934 yılında yayımlanan "Inequalities" adlı eserdir [16]. Bu kaynaktan sonra "Inequalities" ismiyle çıkan diğer ünlü bir eser Beckenbach ve Bellman'ın 1961 yılında ortaya koyduğu eserdir [2]. Bu kitaplarda bahsedilenleri daha da geliştiren ve bahsi geçmeyen konuların da yer verildiği Mitrinoviç'in 1970 senesinde "Analytic Inequalities" isimli eseridir [26]. İntegral eşitsizlikleri, eşitsizlikler teorisinin literatürde en ilgi gören kanatıdır. İntegral eşitsizlikleri gerçek dünyanın birçok pratik probleminde potansiyel uygulaması olan bir alandır. Fonksiyonel analiz ve sabit nokta teoreminin bazı temel araçların yardımıyla integral eşitsizlik teorisi günden güne daha çok geliştirilmiştir. Bu integral eşitsizlikleri ve konveks fonksiyonlar teorisi ile bağı en iyi aktaran ifadelerden biri: üzerinde sürekli çalışmalar yapılan Hermite ve Hadamard'ın birbirinden habersiz keşfettiği eşitsizliktir. İyi bilinen Hermite–Hadamard eşitsizliği:

$\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir I aralığı üzerinde reel sayıların konveks bir fonksiyon olsun. $a, b \in I$ ile $a < b$ olmak üzere,

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(x) dx \leq \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}$$

ifadesi ile belirtilen eşitsizliktir. Özellikle son otuz yıl içinde, bu türden eşitsizliklerin değişik varyansları elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerle ilişkili en iyi bilinen sonuçlar özel ortalamalar ve tahmin hatalarında sıklıkla kullanılan Orta nokta (Midpoint) tipli ve Yamuk (Trapozoid) tipli eşitsizliklerdir ([11], [22]). Daha sonra birçok yazar tarafından bu eşitsizliklerle ilgili çeşitli hesaplama koşulları altında yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Birçok matematikçinin ilgi odağı olan Hermite–Hadamard eşitsizliklerinin literatürdeki ilk anılan hali Hadamard eşitsizliği şeklindedir. E. F. Beckenbach, tarafından bu eşitsizliğin sol tarafının 1893'te Hadamard tarafından ispatlandığını dile getirilmiştir. Ayrıca birçok araştırmacı, yaptıkları araştırmalarda bu eşitsizlik kullanırken Hadamard'a atfedilmiştir. Ancak E. F. Beckenbach'ın söylediği tarihten daha önce 1881 yılında Charlers Hermite (1822-1901) tarafından ispat yapılmıştı. Hermite'in Mathesis dergisine gönderdiği bir metinde geçen bu eşitsizlik 1883 yılında yayımlanmıştı. Fejer (1880-1959) tarafından 1906 senesinde Hermite'nin bulduğu eşitsizliğini genelleştiren bir sonuca varmıştı. Şimdilerde Fejer eşitsizliği ya da Hermite–Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı versiyonu olarak anılmaktadır. Bulunan bu sonuç da sonraları Hermite'in bulduğu eşitsizliğe atfedilmişti. Jensen (1880-1959) tarafından Hermite eşitsizliklerinin içinde bulunan

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}$$

ifadesinden yola çıkarak konveks fonksiyonlar üzerine çalışmalar yapılmıştır. Zamanın teknolojisi, iletişim ağının şimdilerdeki gibi yaygın olmaması ve kendi yazdığı makalelerde dahi Hermite'in bu eşitsizliği kullanmamış olması bu eşitsizliğin Hadamard eşitsizliği olarak bilinmesine yol açmıştır. Bilim dünyası böyle bir ikilemde kalırken "Hermite and Convexity" ve "Convex functions, Partial Orderings and Statistical Applications" adlı yayınlarda ([28], [34]) Hermite–Hadamard eşitsizlikleri olarak literatürde yerini almıştır.

Diğer yandan aralık belirsizliği çözme yöntemlerinden biri olarak ele alınan aralık analizi, matematiksel ve bilgisayar modellenmiş hesaplamalarda önemli bir materyaldir. Bu teoremin, Arşimet'in bir dairenin çevresini hesaplamasına kadar süren tarihi bir geçmişi olsa da 1950'lere kadar bu alanda önemli bir çalışma yayımlanmadı. O zamandan bu yana birçok yazar bu konuda birçok araştırma ve uygulama yapmıştır. Aralık analizi ile ilgili ilk kitap 1966 yılında hesaplamalı matematikte aralık analizinin ilk kullanıcısı olarak

bilinen R. E. Moore tarafından yazılmıştır [30]. Bu kitaptan sonra ilgili araştırmacılar tarafından aralık aritmetiği teorisi ve uygulaması çalışılmaya başlanmıştır. Günümüzde bu uygulamaları içinde barındıran aralık analizi, belirsiz verilerin söz konusu olduğu çeşitli alanlarda kullanışlı bir araçtır. Uygulamalı bilgisayar grafikleri, deneysel ve teorik fizik, hata analizi, robotik kodlama ve diğerlerinde kullanılmaktadır. Özellikle aralık değerli fonksiyonlar kullanılarak elde edilen integral eşitsizlerine odaklanılmıştır. Sadowska [37] tarafından aralık değerli bir fonksiyon için Hermite–Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ aralık değerli konveks bir fonksiyon öyle ki $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{1}{b-a}(IR) \int_a^b \Phi(\kappa) d\kappa \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}$$

eşitsizliği vardır. Son yıllarda aralık değerli fonksiyonlar için daha birçok önemli eşitsizlik (Ostrowski, Minkowski ve Beckenbach vb.) çalışılmıştır. ([7, 8, 15, 36]).

Doğadaki hiçbir şey aslında birbiriyle tamamen özdeş değildir. İki eşit kütledeki cisim, aslında yeterince hassas teraziler olsa virgülden sonraki bir basamağında değişimi bir şekilde gözlemlenebilir. Aynı uzunluktaki iki obje, yeterince hassas uzunluk ölçü birimleri ile ifade edilse eşit olmadığı açığa çıkacaktır. Hiçbir şey bir birbirinin tamamen aynı ya da birbirine tamamen eşit olmayacaktır. Örneğin hava sıcaklığını 32 santigrat derece denilmesi yerine 32 ve 33 santigrat derece arasında bir yerde olduğunu söylenilmesi daha doğrudur.

R. E. Moore [30] tarafından bu ifadelerin daha iyi anlaşılması için aşağıdaki gibi ifade edildi.

Temel matematikte $\kappa^2 + \kappa - 6 = 0$ denklemi gibi bir problemin çözümü, denklemin köklerini bularak ifade edilir. Bu denklemin kökleri $\kappa_1 = -3$ ve $\kappa_2 = +2$ 'dir. Çok az kişi "Köklerin biri -4 ile -2 arasında diğeri 1 ile 3 arasındadır." ifadesini kullanır.

Ancak bu formdaki cevapların uygun olduğu temel problemleri bulmak için çokta uzağa bakılmasına gerek yoktur. Örneğin,

$$x^2 - 2 = 0$$

denkleminin pozitif çözümü $x = \sqrt{2}$ dir.

Ancak bu sayı, rakamla tam olarak temsil edilemez. Gerçekten irrasyonel sayı kavramı yukarıdan ve aşağıdan yaklaşım sürecini gerektirir.

Arşimet (M.Ö. 287-212) tarafından bir daireyi çizerken içten ve dıştan çokgenler yardımıyla π sınırlandırılmıştır. Çokgen sayısını arttırarak bu irrasyonel sayı için alttan artan bir alt sınır ve üstten azalan bir üst sınır dizisi elde edilmiştir.

Örneğin kareler yardımıyla $2\sqrt{2} \leq \pi \leq 4$ olduğu gösterilebilir. Bir kenarı $2\sqrt{2}$ olan bir karenin köşe noktaları üzerinde olacak en küçük daire çizilsin. Sonra da bu daireyi içine alacak en küçük bir kare daha çizilsin. Gerçekten içerideki karenin çevresi C_{ik} , Dairenin çevresi C_d ve dışarıdaki karenin çevresi C_{dk} olmak üzere

$$\frac{C_{ik}}{4} \leq \frac{C_d}{4} \leq \frac{C_{dk}}{4}$$

şeklindedir. Buradan verilen değerler yerine konulursa

$$\frac{8\sqrt{2}}{4} \leq \pi \leq \frac{16}{4}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirme yapıldığında

$$2\sqrt{2} \leq \pi \leq 4$$

şeklindeki istenilen sonuç elde edilir.

İrrasyonel sayıların yanı sıra birçok durum tam olarak temsil edilemeyen miktarları içerir. Makine hesaplamasında bir çözümü titizlikle tanımlamak için temsili alt ve üst sınırlar gerekir.

Bir sayı sınırlama, fizik problemlerinde de ortaya çıkar. Deneysel olarak ölçülebilen bir miktar, sadece sınırlı doğrulukla bilinebileceğinden bu miktarı içeren herhangi bir hesaplamaya kesin olmayan ilk verilerle başlanmalıdır.

Newton'un;

$$F = m.a \quad (1.1)$$

yasası ancak F kuvveti ve m kütlesi tam olarak bilindiğinde bir cismin a ivmesini tam olarak çözmemizi sağlar.

Eğer miktarların belirli bir aralıkta olduğu biliniyorsa, yani;

$$F_0 - \Delta F \leq F \leq F_0 + \Delta F$$

ve

$$m_0 - \Delta m \leq m \leq m_0 + \Delta m$$

ise a ivmesi alttan ve üstten

$$a_l \leq a \leq a_u \quad (1.2)$$

gibi sınırlanabilir.

a_l ve a_u ifadelerini F_0 , m_0 , ΔF ve Δm 'ye bağlı olarak hesaplamak kolaydır.

Örnek 1.1. $a = \frac{F}{m}$ için,

$$a_l = \frac{F_0 - \Delta F}{m_0 - \Delta m}$$

ve

$$a_u = \frac{F_0 + \Delta F}{m_0 + \Delta m}$$

şeklindedir.

Ancak daha karmaşık bağıntılar için sıradan cebir kullanışlı olmayabilir. Aralık analizi sınırların hesaplamasını kolay hale getirecektir. Aslında aralık hesaplaması makine uygulaması için tasarlanmıştır. Aralık analizinde eşitsizlik ifadelerini reel eksen üzerinde

kapalı aralıklar ile ifade edilecektir. Bir aralığı genellikle düzenli bir çift olarak temsil ettiğimiz bir sayı kümesi olarak düşünülecektir. Örneğin;

$$a_l \leq a \leq a_u$$

yerine

$$a \in [a_l, a_u] \quad (1.3)$$

yazılır.

$[a_l, a_u]$ aralığına a 'nın sınırları denir. Bundan sonra (1.2) yerine (1.3) gösterimi tercih edilecektir. Ayrıca bir sayıyı kapalı bir aralıkta sınırlamanın o sayıyı alttan ve üstten sınırlamayla aynı olduğu unutulmamalıdır.

Yukarıda (1.1) deki F ve m "ilk veriler" deki ölçüm hatası belirsizliğe yol açacağı ifade edildi. Genel anlamda F ve m 'yi tam olarak bilmesi istenir ki a doğru ve düzgün bir şekilde olarak ifade edilebilsin. Ancak başka durumlarda a 'nın nasıl değiştiğini göstermek için F ve m 'yi parametre olarak alınabilir ve incelenebilir.

Matematiksel olarak bu problem Örnek 1.1 ifadesindeki gibi ele alınmaktadır. Sadece çözümü sınırlandırma işlemi zayıf gösterebilir. Sonuçta çözümün kendisini vermez. Bu doğru olmakla birlikte bir çözümün sınırlandırılmasının doğruluk derecesi elde edilen sınırlamanın genişliğine büyük ölçüde bağlıdır. Bahsedilen $x^2 + x - 6 = 0$ denklemi için $x_1 \in [-3.001, -2.999]$ ve $x_2 \in [1.999, 2.001]$ formundaki cevap daha kabul edilebilirdir. $y \in [59, 62]$ ifadesi $y \cong 60$ formundaki bir cevaptan daha doğru bir ifade edişin gösterimidir. Bu örneklemeler ve bilgiler ışığında aralık analizi hakkında geniş bir bilgiye tezin ikinci bölümünde yer verilmiştir.

Öte yandan kesirli Analiz tarihi 17.yüzyılda bir mektuplaşmayla başlar. L'Hospital ve Leibniz mektuplaşmaları sırasında bu konunun bahsi açılmıştır. Buradaki temel fikir "Bir fonksiyonun kesirli türevi ya da kesirli integrali alınabilir mi?" sorusuna dayanmaktadır.

Bu fikri ise düzenli bir hale getirip yorumlayan Liouville'den sonra Riemann, Fourier, Lagrange, Abel, Wely, Letnikov, Grünwald, Euler gibi matematikçilerin çalışma konusu olmuştur. Günümüzde fizikte; elektrik devrelerinde, akışkanlar mekaniğinde, kuantum mekaniğinde, kimyada; akışkanlar teorisinde, elektro-analitik kimyada ve sıvıların kimyasal analizlerinde kullanılan kesirli analiz matematiğinin ise hemen hemen tüm branşlarında çalışma alanı içindedir.

Bu tezin amacı aralık değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite–Hadamard eşitsizliklerinin elde edilmesidir. Bu tez giriş ile birlikte altı bölüm içermektedir. İkinci bölüm olan genel bilgiler bölümünde bu reel değerli ve aralık değerli fonksiyonların özellikleri sunulur. Tezin ana kısmı üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerdir. Tezin amacı gereği, literatürde yapılan çalışmaları ve tezde elde edilen eşitsizliklerden aşağıdaki gibi söz edilebilir.

Reel değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integrallerin tanımlarını ve bu integraller yardımıyla elde edilen Hermite–Hadamard eşitsizliklerini Sarıkaya ve ark. [40] tarafından verildi. Bu tezin ana kısımlarından biri olan üçüncü bölümde aralık değerli tek değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integraller tanıtıldı. Ayrıca aralık değerli fonksiyonlar için elde edilen bu integral operatörlerinden yararlanarak elde edilen Hermite–Hadamard eşitsizlikleri sunulur.

Reel değerli tek değişkenli fonksiyonlar için Riemann–Liouville kesirli integrallerinden faydalanarak Sarıkaya ve ark. [43] tarafından konveks fonksiyonlar için Hermite–Hadamard eşitsizlikleri elde edildi. İki değişkenli fonksiyonlar için Riemann–Liouville kesirli integralleri Sarıkaya [42] tarafından verildi ve bu verilen integraller kullanılarak elde edilen koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Hermite–Hadamard eşitsizlikleri ispatlandı. Tek değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Riemann–Liouville kesirli integralinin sol tarafı Lupulescu ve ark. [24] tarafından ortaya koyuldu. Sonrasında sağ tarafı için kesirli integralleri Budak ve ark. [5] tarafından tanıtıldı. Bu tanımları göz önüne alarak Budak ve ark. [5] tarafından tek değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Hermite–Hadamard eşitsizlikleri ispat edildi. Bu tezin dördüncü bölümünün birinci alt bölümünde ise iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Riemann–Liouville kesirli integralleri tanıtıldı. Bu tanımlardan yola çıkarak aralık

değerli koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Hermite–Hadamard eşitsizlikleri ispat edildi.

Sarıkaya ve Ertuğrul [41] tarafından tek değişkenli fonksiyonlar için Sarıkaya kesirli integralleri tanıtıldı ve bu integraller için Hermite–Hadamard eşitsizliği oluşturuldu. İki değişkenli fonksiyonlar için Sarıkaya kesirli integrallerini ve bu integraller kullanılarak elde edilen koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Hermite–Hadamard eşitsizlikleri Turkay ve ark. [38] tarafından ispatlandı. Tek değişkenli aralık değerli fonksiyonlar göz önüne alındığında Sarıkaya kesirli integralini Zhao ve ark. [47] tarafından tanıtıldı ve bu integraller kullanılarak Hermite–Hadamard eşitsizlikleri ispat edildi. Bu tezin dördüncü bölümünün ikinci alt bölümünde iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Sarıkaya integralleri ortaya koyuldu. Ortaya koyulan bu kesirli integralleri içeren Hermite–Hadamard eşitsizlikleri ispat edildi.

Fonksiyona göre kesirli integral operatörlerini kullanarak Jleli ve Samet [19] tarafından reel değerli tek değişkenli fonksiyonlar için fonksiyona göre kesirli integraller için Hermite–Hadamard eşitsizlikleri elde edildi. İki değişkenli reel değerli fonksiyonlar için ise Budak ve Agarwal tarafından [4] elde edildi. Aralık değerli fonksiyonlar için Tunç [44] tarafından fonksiyona göre kesirli integralleri verilip bu integraller için Hermite–Hadamard eşitsizlikleri ortaya koyuldu. Bu tezin dördüncü bölümünün son alt bölümünde iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için fonksiyona göre kesirli integraller verildi ve bu integral operatör tanımları aracılığıyla aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizlikleri elde edildi.

Fejer eşitsizliği Hermite–Hadamard eşitsizliklerinin ağırlıklı versiyonu olarak da anılır. Bu bölümde aralık değerli fonksiyonlar için ağırlıklı eşitsizlikler elde edilir. Reel değerli fonksiyonlar için Fejer eşitsizliği 1906’da verildi [14]. Aralık değerli fonksiyonların çarpımı için elde edilen eşitsizlikleri Zhao ve ark. [48] tarafından ele alındı. Aralık değerli iki değişkenli fonksiyonların çarpımı için elde edilen eşitsizlikleri Zhao ve ark. [50] tarafından bulundu. Tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için Ağırlıklı Jensen eşitsizliği kullanarak elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliklerini Wu [45] tarafından elde edildi. Tezin beşinci bölümü ise dört alt başlıkta incelenir. Birinci alt başlıkta aralık değerli fonksiyonların çarpımı için Fejer tipli eşitsizlikler elde edilir. İkinci altbaşlığında

tek değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için ağırlıklı Jensen eşitsizliği tanıtılır. Ve bu eşitsizlik kullanılarak elde edilen eşitsizlikler verilir. Üücü alt başlıkta ise iki değişkenli aralık değerli fonksiyonların çarpımı için Fejer tipli eşitsizlikler elde edilir. Son alt başlıkta ise Ağırlı Jensen eşitsizliği yardımıyla elde edilen iki değişkenli fonksiyonlar için eşitsizlikler verilir.

Son olarak sonuçlar ve öneriler bölümünde tezde elde edilen eşitsizliklerin literatüre katkısından ve gelecekte yapılacak çalışmalarda geliştirilebilme yöntemlerinden bahsedilir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölüm reel değerli ve aralık değerli fonksiyonlar için genel bilgileri barındırır. Tezi daha anlaşılır kılmak için literatürde yer alan temel tanım ve teoremler ele alınır.

2.1. REEL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Bu alt bölümde reel değerli fonksiyonlar için temel kavramlara, kesirli integrallere ve bazı elde edilmiş teoremlere yer verilecektir.

2.1.1. Reel Değerli Fonksiyonlar İçin Temel Kavramlar

Reel değerli fonksiyonlar düşünüldüğünde, literatürdeki birçok çalışmanın araştırıldığı, geliştirildiği ve yürütüldüğü bir çerçeve söz konusudur. Bu çerçevede tezin içeriğine uygun olacak bazı spesifik kavramlar bu başlık altında incelenecektir.

Tanım 2.1. $\kappa \in [0, 1]$ için $x, y \in I$ ve $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\phi(\kappa x + (1 - \kappa)y) \leq \kappa\phi(x) + (1 - \kappa)\phi(y)$$

eşitsizliğini sağlayan ϕ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirilirse ϕ fonksiyonuna konkav fonksiyon denir [34].

$\mathbb{R}^2$ de $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ şeklinde tanımlansın. $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ olmak üzere $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\kappa \in [0, 1]$ için,

$$\phi(\kappa x + (1 - \kappa)z, \kappa y + (1 - \kappa)w) \leq \kappa\phi(x, y) + (1 - \kappa)\phi(z, w),$$

eşitsizliği sağlanırsa ϕ fonksiyonuna Δ üzerinde bir konveks fonksiyon denir. Ayrıca ϕ fonksiyonu konveks fonksiyon ise

$$\phi_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_y(u) = \phi(u, y)$$

ve

$$\phi_{\varkappa} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_{\varkappa}(v) = \phi(\varkappa, v),$$

fonksiyonları $\forall \varkappa \in [a, b]$ ve $\forall y \in [c, d]$ için konvektir [13].

Tanım 2.2. $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ olmak üzere $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\kappa, s \in [0, 1]$ ve $(\varkappa, u), (y, w) \in \Delta$ için

$$\begin{aligned} \phi(\kappa \varkappa + (1 - \kappa)y, su + (1 - s)w) &\leq \kappa s \phi(\varkappa, u) + s(1 - \kappa) \phi(y, u) + \kappa(1 - s) \phi(\varkappa, w) \\ &\quad + (1 - \kappa)(1 - s) \phi(y, w), \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise ϕ fonksiyonuna Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon ismi verilir [13].

Tanım 2.3. $\mathbb{R}$ üzerinde, $1 \leq p \leq \infty$ olacak şekilde

$$L_p = L_p(\mathbb{R}) = \left\{ \phi : \|\phi\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\varkappa)|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

ile tanımlanan kümeye ϕ fonksiyonlarının L_p uzayı denir [10].

Tanım 2.4. $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ olacak biçimde

$$|\varkappa + y| \leq |\varkappa| + |y|$$

eşitsizliği üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır [6].

Tanım 2.5. ϕ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde reel değerli ve sürekli bir fonksiyon olarak verilsin.

Burada

$$\left| \int_a^b \phi(\varkappa) d\varkappa \right| \leq \int_a^b |\phi(\varkappa)| d\varkappa$$

ifadesi integraller için üçgen eşitsizliği olarak bilinir [6].

Teorem 2.6. $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğunda ϕ ve ϖ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. $|\phi|^p$ ve $|\varpi|^q$ ise $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_a^b |\phi(\varkappa) \varpi(\varkappa)| \leq \left(\int_a^b |\phi(\varkappa)|^p d\varkappa \right)^{1/p} \left(\int_a^b |\varpi(\varkappa)|^q d\varkappa \right)^{1/q}$$

ifadesi integraller için Hölder eşitsizliği olarak isimlendirilir [27].

Tanım 2.7. $\phi : I = [a, b] \rightarrow R$ üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $v : I \rightarrow (0, \infty)$ ve $\varpi : I \rightarrow [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar ise bu durumda

$$\phi \left(\frac{\int_a^b v(x) \varpi(x) dx}{\int_a^b v(x) dx} \right) \leq \frac{\int_a^b v(x) \phi(\varpi(x)) dx}{\int_a^b v(x) dx}$$

eşitsizliğine Jensen eşitsizliği denir. ϕ konkav fonksiyon olduğunda eşitsizlik yön değiştirir [35].

Tanım 2.8. $\varkappa > 0$ olacak şekilde

$$\Gamma(\varkappa) = \int_0^{\infty} e^{-\kappa} \kappa^{\varkappa-1} d\kappa$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma Euler fonksiyonu denir. Aynı şekilde

$$\Gamma(\varkappa) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{\varkappa}}{\varkappa(\varkappa+1) \dots (\varkappa+n)}$$

olarak da tanımlanabilir [20].

Gamma Euler fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,
3. $\int_0^{\infty} \frac{\kappa^p}{1+\kappa} d\kappa = \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, $0 < p < 1$,
4. $2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2n)$.

Tanım 2.9. Euler'in birinci tip integrali olarakta adlandırılan Beta Euler fonksiyonu için $\varkappa > 0$ ve $y > 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}(\varkappa, y) = \int_0^1 \kappa^{\varkappa-1} (1-\kappa)^{y-1} d\kappa$$

şeklinde verilir [20]. Beta Euler fonksiyonun bazı önemli özellikleri:

1. $\mathcal{B}(\varkappa, y) = \mathcal{B}(y, \varkappa)$
2. $\mathcal{B}(\varkappa, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2\varkappa-1} \kappa) (\cos^{2y-1} \kappa) d\kappa$
3. $\mathcal{B}(\varkappa, y) \beta(\varkappa + y, 1 - y) = \frac{\pi}{x \sin(\pi y)}$.

Ayrıca Beta Euler fonksiyonu ile Gamma Euler fonksiyonu arasında şğıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\mathcal{B}(\varkappa, y) = \frac{\Gamma(\varkappa) \Gamma(y)}{\Gamma(\varkappa + y)}.$$

2.1.2. Reel Değerli Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller

Kesirli analiz doğduğı günden bu yana birçok araştırmacının odak noktası olmuştur. Özellikle kesirli integraller bu odak noktasının en önemli parçasıdır. Bu başlık altında reel değerli fonksiyonlar için kesirli integrallere yer verilir. Ayrıca tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için farklı türden kesirli integrallerin tanımları ele alınır.

Tanım 2.10. $\phi \in L_1[a, b]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere sol taraflı ve sağ taraflı Riemann- Liouville kesirli integralleri sırasıyla,

$$J_{a+}^{\alpha} \phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\varkappa} (\varkappa - \kappa)^{\alpha-1} \phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} \phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^b (\kappa - \varkappa)^{\alpha-1} \phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b$$

biçiminde tanımlanır [23, 39]. Ayrıca $J_{a+}^0 \phi(\varkappa) = J_{b-}^0 \phi(\varkappa) = \phi(\varkappa)$ olduğu da aşıkardır.

Tanım 2.11. $\alpha > 0$, $a \geq 0$ ve $\phi \in L_1([a, b])$ olsun. Sol taraflı ve sağ taraflı Hadamard kesirli integralleri sırasıyla

$$\mathbf{H}_{a+}^{\alpha} \phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\varkappa} \left(\ln \frac{\varkappa}{\kappa} \right)^{\alpha-1} \frac{\phi(\kappa)}{\kappa} d\kappa, \quad \varkappa > a$$

ve

$$\mathbf{H}_{b-}^{\alpha} \phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^b \left(\ln \frac{\kappa}{\varkappa} \right)^{\alpha-1} \frac{\phi(\kappa)}{\kappa} d\kappa, \quad \varkappa < b$$

şeklindedir [23, 39].

Tanım 2.12. $\alpha > 0$, $a \geq 0$, $\rho \neq 1$ ve $\phi \in L_1([a, b])$ olsun. Sol taraflı ve sağ taraflı Katugampola kesirli integralleri sırasıyla

$$\mathbf{K}_{a+, \rho}^{\alpha} \phi(\varkappa) = \frac{(\rho + 1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\varkappa} (\varkappa^{\rho+1} - \kappa^{\rho+1})^{\alpha-1} \kappa^{\rho} \phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a$$

ve

$$\mathbf{K}_{b-, \rho}^{\alpha} \phi(\varkappa) = \frac{(\rho + 1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^b (\kappa^{\rho+1} - \varkappa^{\rho+1})^{\alpha-1} \kappa^{\rho} \phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b$$

şeklinde tanımlanmıştır [21].

Tanım 2.13. $\alpha > 0$, ve $\phi \in L_1([a, b])$ olsun. Sol taraflı ve sağ taraflı Sarıkaya kesirli integralleri sırasıyla

$${}_{a+}\mathbf{I}_{\varphi} \phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\varkappa} \frac{\varphi(\varkappa - \kappa)}{\varkappa - \kappa} \phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a \quad (2.1)$$

ve

$${}_{b-}\mathbf{I}_{\varphi} \phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^b \frac{\varphi(\kappa - \varkappa)}{\kappa - \varkappa} \phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır [41]. Burada $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\int_0^1 \frac{\varphi(\kappa)}{\kappa} d\kappa < \infty$ şartını sağlar.

Tanım 2.13 ifadesinde bazı özel seçimler yapılarak bilinen kesirli integrallere ulaşılır.

1. $\varphi(\kappa) = \kappa$ olarak kabul edilirse (2.1) ve (2.2) ifadelerinin Riemann-integrallerine dönüştüğü görülür.
2. $\varphi(\kappa) = \frac{\kappa^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınırsa (2.1) ve (2.2) kesirli operatörleri sırasıyla $J_{a+}^{\alpha} \phi(\varkappa)$ ve $J_{b-}^{\alpha} \phi(\varkappa)$ Riemann-Liouville kesirli integrallerine dönüşür.

Tanım 2.14. $\varpi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif monoton artan bir fonksiyon olsun. $\varpi'(\varkappa)$, (a, b) üzerinde sürekli ve $(a, b]$ üzerinde integrallenebilir olarak ele alınsın. $\alpha > 0$ olmak üzere

sal taraflı ve sağ taraflı fonksiyona göre kesirli integraller sırasıyla,

$$\mathbf{J}_{a+;\varpi}^{\alpha}\phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\varkappa} \frac{\varpi'(\kappa)\phi(\kappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(\kappa)]^{1-\alpha}} d\kappa, \quad \varkappa > a \quad (2.3)$$

ve

$$\mathbf{J}_{b-;\varpi}^{\alpha}\phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^b \frac{\varpi'(\kappa)\phi(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}} d\kappa, \quad \varkappa < b, \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanmıştır [23].

Tanım 2.14 ifadesinde bazı özel seçimler yapılarak bilinen kesirli integrallere indirgenir.

1. $\varpi(\kappa) = \kappa$ olarak kabul edilirse (2.3) ve (2.4) ifadeleri sırasıyla $J_{a+}^{\alpha}\phi(\varkappa)$ ve $J_{b-}^{\alpha}\phi(\varkappa)$ Riemann-Liouville kesirli integrallerine eşit olduğu görülür.
2. $\varpi(\kappa) = \ln \kappa$ olarak incelenirse (2.3) ve (2.4) kesirli operatörleri sırasıyla $\mathbf{H}_{a+}^{\alpha}\phi(\varkappa)$, $\mathbf{H}_{b-}^{\alpha}\phi(\varkappa)$ Hadamard kesirli integrallerine dönüşür.
3. $\rho > 0$ olmak üzere $\varpi(\kappa) = \frac{\kappa^{\rho}}{\rho}$ olarak varsayılırsa (2.3) ve (2.4) tanımları sırasıyla $\mathbf{K}_{a+,\rho}^{\alpha}\phi(\varkappa)$ ve $\mathbf{K}_{b-,\rho}^{\alpha}\phi(\varkappa)$ Katugampola kesirli integral tanımlarına döner.

Tanım 2.15. $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında pozitif ve monoton artan bir fonksiyon ve $\phi, u \in L[a, b]$ olsun. $\alpha > 0$, $a \geq 0$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere sol taraflı ve sağ taraflı genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri

$$\mathfrak{I}_{a+,u}^{\alpha,k}(\phi)(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\varkappa} (\varkappa - \kappa)^{\alpha-1} (u(\varkappa) - u(\kappa))^k \phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a$$

ve

$$\mathfrak{I}_{b-,u}^{\alpha,k}(\phi)(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^b (\kappa - \varkappa)^{\alpha-1} (u(\kappa) - u(\varkappa))^k \phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b$$

şeklinde tanımlanır [40].

Şimdi de iki değişken içeren bir fonksiyon için Riemann-Liouville kesirli integrallerinin, fonksiyona göre kesirli integrallerinin ve Hadamard kesirli integrallerinin tanımları verilir.

Tanım 2.16. $\phi \in L_1(\Delta)$ ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. İki değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\kappa \int_c^y (\kappa - \kappa)^{\alpha-1} (y - s)^{\beta-1} \phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa > a, y > c,$$

$$J_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\kappa \int_y^d (\kappa - \kappa)^{\alpha-1} (s - y)^{\beta-1} \phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa > a, y < d,$$

$$J_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\kappa^b \int_c^y (\kappa - \kappa)^{\alpha-1} (y - s)^{\beta-1} \phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa < b, y > c$$

ve

$$J_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\kappa^b \int_y^d (\kappa - \kappa)^{\alpha-1} (y - s)^{\beta-1} \phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa < b, y < d$$

şeklinde tanımlanır [42].

Tanım 2.17. $\phi \in L_1(\Delta)$ olsun. $\alpha, \beta > 0$ ile $a, c \geq 0$ olmak üzere iki değişkenli fonksiyonlar için Hadamard kesirli integralleri

$\kappa > a, y > c$ için

$$\mathbf{H}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\kappa \int_c^y \left(\ln \frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{y}{s}\right)^{\beta-1} \frac{\phi(\kappa, s)}{\kappa s} ds d\kappa,$$

$\kappa > a, y < d$ için

$$\mathbf{H}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\kappa \int_y^d \left(\ln \frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{s}{y}\right)^{\beta-1} \frac{\phi(\kappa, s)}{\kappa s} ds d\kappa,$$

$\kappa < b, y > c$ için

$$\mathbf{H}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\kappa^b \int_c^y \left(\ln \frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{y}{s}\right)^{\beta-1} \frac{\phi(\kappa, s)}{\kappa s} ds d\kappa$$

ve $\varkappa < b, y < d$ için

$$\mathbf{H}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\varkappa}^b \int_y^d \left(\ln \frac{\kappa}{\varkappa} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{y}{s} \right)^{\beta-1} \frac{\phi(\kappa, s)}{\kappa s} ds d\kappa$$

biçiminde tanımlanır [4].

Tanım 2.18. $\rho, \sigma > 0$ olmak üzere $\varpi(\kappa) = \frac{\kappa^\rho}{\rho}$ ve $w(s) = \frac{s^\sigma}{\sigma}$ şeklinde alınırsa, $\phi \in L_1(\Delta)$ için Katugampola kesirli integral eşitsizlikleri

$\varkappa > a, y > c$ için

$${}^{\rho,\sigma}\mathbf{K}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y) = \frac{\rho^{1-\alpha}\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\varkappa \int_c^y \frac{\kappa^{\rho-1}}{(\varkappa^\rho - \kappa^\rho)^{1-\alpha}} \frac{s^{\sigma-1}}{(y^\sigma - s^\sigma)^{1-\beta}} \phi(\kappa, s) ds d\kappa,$$

$\varkappa > a, y < d$ için

$${}^{\rho,\sigma}\mathbf{K}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y) = \frac{\rho^{1-\alpha}\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\varkappa \int_y^d \frac{\kappa^{\rho-1}}{(\varkappa^\rho - \kappa^\rho)^{1-\alpha}} \frac{s^{\sigma-1}}{(s^\sigma - y^\sigma)^{1-\beta}} \phi(\kappa, s) ds d\kappa,$$

$\varkappa < b, y > c$ için

$${}^{\rho,\sigma}\mathbf{K}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y) = \frac{\rho^{1-\alpha}\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\varkappa^b \int_c^y \frac{\kappa^{\rho-1}}{(\kappa^\rho - \varkappa^\rho)^{1-\alpha}} \frac{s^{\sigma-1}}{(y^\sigma - s^\sigma)^{1-\beta}} \phi(\kappa, s) ds d\kappa$$

ve $\varkappa < b, y < d$ için

$${}^{\rho,\sigma}\mathbf{K}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y) = \frac{\rho^{1-\alpha}\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\varkappa^b \int_y^d \frac{\kappa^{\rho-1}}{(\kappa^\rho - \varkappa^\rho)^{1-\alpha}} \frac{s^{\sigma-1}}{(s^\sigma - y^\sigma)^{1-\beta}} \phi(\kappa, s) ds d\kappa$$

şeklinde tanımlanır [46].

Tanım 2.19. İki değişkenli fonksiyonlar için Sarıkaya kesirli integralleri ${}_{a+,c+}\mathbf{I}_{\phi,\psi}$, ${}_{a+,d-}\mathbf{I}_{\phi,\psi}$, ${}_{b-,c+}\mathbf{I}_{\phi,\psi}$, ${}_{b-,d-}\mathbf{I}_{\phi,\psi}$ aşağıdaki gibi verilmiştir:

$${}_{a+,c+}\mathbf{I}_{\phi,\psi} \phi(\varkappa, y) = \int_a^\varkappa \int_c^y \frac{\phi(\varkappa - \kappa)}{\varkappa - \kappa} \frac{\psi(y - s)}{y - s} \phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \varkappa > a, y > c, \quad (2.5)$$

$${}_{a+,d-}\mathbf{I}_{\varphi,\psi}\phi(\varkappa,y) = \int_a^\varkappa \int_y^d \frac{\varphi(\varkappa-\kappa)}{\varkappa-\kappa} \frac{\psi(s-y)}{s-y} \phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad \varkappa > a, y < d, \quad (2.6)$$

$${}_{b-,c+}\mathbf{I}_{\varphi,\psi}\phi(\varkappa,y) = \int_\varkappa^b \int_c^y \frac{\varphi(\kappa-\varkappa)}{\kappa-\varkappa} \frac{\psi(y-s)}{y-s} \phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y > c, \quad (2.7)$$

ve

$${}_{b-,d-}\mathbf{I}_{\varphi,\psi}\phi(\varkappa,y) = \int_\varkappa^b \int_y^d \frac{\varphi(\kappa-\varkappa)}{\kappa-\varkappa} \frac{\psi(s-y)}{s-y} \phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y < d. \quad (2.8)$$

Burada, $\phi \in L_1(\Delta)$ ve $\varphi, \psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları, $\int_0^1 \frac{\varphi(\kappa)}{\kappa} d\kappa < \infty$ ve $\int_0^1 \frac{\psi(s)}{s} ds < \infty$ şartlarını sağlar [38].

Tanım 2.19 ifadesindeki fonksiyonların özel seçimleri ile aşağıdaki sonuçlara varılır.

1. Eğer $\varphi(\kappa) = \kappa$ ve $\psi(s) = s$ şeklinde seçilirse (2.5), (2.6), (2.7) ve (2.8) integral operatörleri iki değişkenli fonksiyonlar için Riemann integraline dönüşecektir.
2. Özel olarak $\alpha, \beta > 0$ için $\varphi(\kappa) = \frac{\kappa^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ve $\psi(s) = \frac{s^\beta}{\Gamma(\beta)}$ kabul edilirse (2.5), (2.6), (2.7) ve (2.8) tanımları sırasıyla iki değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Liouville tanımları olan $J_{a+,c+}^{\alpha,\beta}\phi(\varkappa,y)$, $J_{a+,d-}^{\alpha,\beta}\phi(\varkappa,y)$, $J_{b-,c+}^{\alpha,\beta}\phi(\varkappa,y)$ ve $J_{b-,d-}^{\alpha,\beta}\phi(\varkappa,y)$ tanımlarına eşit olacaktır.

Tanım 2.20. $\varpi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(a, b]$ üzerinde pozitif artan fonksiyon ve $\varpi'(\varkappa)$ türevi (a, b) üzerinde sürekli olsun. Ayrıca $w : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(c, d]$ üzerinde pozitif artan bir fonksiyon olmakla beraber $w'(y)$ de (c, d) üzerinde sürekli bir fonksiyon olarak varsayalım. $\alpha, \beta > 0$ için $\phi \in L_1(\Delta)$ ise iki değişkenli fonksiyonlar için fonksiyona göre kesirli integraller,

$\varkappa > a, y > c$ için

$$\mathbf{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta}\phi(\varkappa,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\varkappa \int_c^y \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(\kappa)]^{1-\alpha}} \frac{w'(s)}{[w(y) - w(s)]^{1-\beta}} \phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad (2.9)$$

$\varkappa > a, y < d$ için

$$\mathbf{J}_{a+,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\varkappa \int_y^d \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(\kappa)]^{1-\alpha}} \frac{w'(s)}{[w(s) - w(y)]^{1-\beta}} \phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad (2.10)$$

$\varkappa < b, y > c$ için

$$\mathbf{J}_{b-,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\varkappa^b \int_c^y \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}} \frac{w'(s)}{[w(y) - w(s)]^{1-\beta}} \phi(\kappa, s) ds d\kappa \quad (2.11)$$

ve $\varkappa < b, y < d$ için

$$\mathbf{J}_{b-,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\varkappa^b \int_y^d \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}} \frac{w'(s)}{[w(s) - w(y)]^{1-\beta}} \phi(\kappa, s) ds d\kappa \quad (2.12)$$

biçiminde gösterilir [4].

Tanım 2.20 ifadesinde, bazı özel seçimler yapılırsa aşağıdaki bazı bilinen kesirli integrallere dönüşür.

1. $\varpi(\kappa) = \kappa$ ve $w(s) = s$ olarak seçildiğinde (2.9), (2.10), (2.11) ve (2.12) integralleri sırasıyla $J_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \phi$, $J_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \phi$, $J_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \phi$ ve $J_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \phi$ Riemann-Liouville kesirli integrallerine ulaşılır.
2. $\varpi(\kappa) = \ln \kappa$ ve $w(s) = \ln s$ şeklinde düşünülürse (2.9), (2.10), (2.11) ve (2.12) operatörleri $\mathbf{H}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \phi$, $\mathbf{H}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \phi$, $\mathbf{H}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \phi$ ve $\mathbf{H}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \phi$ Hadamard kesirli integrallerine indirgenir.
3. $\rho > 0$ ve $\sigma > 0$ olmak üzere $\varpi(\kappa) = \frac{\kappa^\rho}{\rho}$ ve $w(s) = \frac{s^\sigma}{\sigma}$ olarak varsayılırsa (2.9), (2.10), (2.11) ve (2.12) kesirli integralleri sırasıyla ${}^{\rho,\sigma}\mathbf{K}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y)$, ${}^{\rho,\sigma}\mathbf{K}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y)$, ${}^{\rho,\sigma}\mathbf{K}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y)$ ve ${}^{\rho,\sigma}\mathbf{K}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \phi(\varkappa, y)$ Katugampola kesirli integral tanımlarına döner.

2.1.3. Reel Değerli Fonsiyonlar İçin Bazı Teoremler

Bu bölümde literatürde reel değerli fonksiyonlar için elde edilen ve üzerine birçok çalışmalar yapılan bazı teoremler verilecektir. Özellikle matematik, fizik ve mühendislik

alanlarında birçok çalışmaya yön vermiş olan Hermite–Hadamard eşitsizliği ve bu eşitsizlik üzerine inşa edilen eşitsizlik tiplerinden söz edilir.

Teorem 2.21. $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(\varkappa) d\varkappa \leq \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde Hermite–Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır [17].

Teorem 2.22. $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun ve $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ noktasına göre simterik bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(\varkappa) d\varkappa \leq \int_a^b \phi(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \leq \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2} \int_a^b w(\varkappa) d\varkappa \quad (2.13)$$

eşitsizlikleri vardır. Hermite–Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı versiyonu olan ve ismiyle anılan Fejér eşitsizliği Fejér [14] tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.23. $0 \leq a < b$, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon ve $\phi(\varkappa) \in L[a, b]$ olsun. Ayrıca ϕ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olmak üzere $\alpha > 0$ için

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(a+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha \phi(b) + J_{b-}^\alpha \phi(a)] \leq \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu eşitsizlik Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite–Hadamard eşitsizliği olarak tanınır [43].

İşcan [18] tarafından ise Riemann-Liouville kesirli integralleriyle ilgili için aşağıdaki Lemma elde edildi.

Lemma 2.24. Eğer $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik ise $\alpha > 0$ için

$$J_{a+}^\alpha w(b) = J_{b-}^\alpha w(a) = \frac{1}{2} [J_{a+}^\alpha w(b) + J_{b-}^\alpha w(a)]$$

eşitlikleri sağlanır.

Daha sonra, İşcan [18] tarafından bu Lemma kullanılarak Riemann-Liouville kesirli integralleri için aşağıdaki Fejer tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 2.25. $0 \leq a < b$ ve $\phi \in L_1[a, b]$ olacak şekilde $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ele alınsın. Eğer $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallanabilir ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik ise, $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{a+b}{2}\right) [J_{a+}^{\alpha} w(b) + J_{b-}^{\alpha} w(a)] &\leq [J_{a+}^{\alpha} (\phi w)(b) + J_{b-}^{\alpha} (\phi w)(a)] \\ &\leq \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2} [J_{a+}^{\alpha} w(b) + J_{b-}^{\alpha} w(a)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 2.26. $\mathfrak{A} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\mathfrak{A}(\kappa) = \int_0^{\kappa} \frac{\phi((b-a)\kappa)}{\kappa} d\kappa \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlansın. $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olmakla beraber Sarıkaya kesirli integral operatörleri için

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2\mathfrak{A}(1)} [{}_{a+}\mathbf{I}_{\phi}\phi(b) + {}_{b-}\mathbf{I}_{\phi}\phi(a)] \leq \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2} \quad (2.16)$$

eşitsizlikleri sağlanır [41].

$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 \leq a < b < \infty$ olmak üzere $\phi \in L_{\infty}(a, b)$ için $\mathbf{J}_{a+; \varpi}^{\alpha} \phi(\kappa)$ ve

$\mathbf{J}_{b-; \varpi}^{\alpha} \phi(\kappa)$ kesirli integralleri tanımlanmış olsun. Burada,

$$\tilde{\phi}(\kappa) = \phi(a + b - \kappa) \quad \text{ve} \quad \vartheta(\kappa) = \phi(\kappa) + \tilde{\phi}(\kappa)$$

ifadeleri tanımlanır.

Teorem 2.27. $\alpha > 0$ olsun. $\phi, [a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise,

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(a+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^{\alpha}} [\mathbf{J}_{a+; \varpi}^{\alpha} \vartheta(b) + \mathbf{J}_{b-; \varpi}^{\alpha} \vartheta(a)] \leq \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir [19].

Teorem 2.28. $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde pozitif, monoton artan bir fonksiyon ve $\phi, u \in L[a, b]$ olsun. $\alpha > 0$, $a \geq 0$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere ψ integrallenebilir bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{a+b}{2}\right) & \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(\psi)(b) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(\psi)(a) \right] \\ & \leq \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır [40].

Hermite–Hadamard ile ilgili tek değişkenli fonksiyonlarla ilgili teoremlerin yanı sıra iki değişkenli fonksiyonlar için de teoremler verilmiştir. Bunlardan birkaçı aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.29. $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa + \frac{1}{d-c} \int_c^d \phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d \phi(\varkappa, y) dy d\varkappa \\ & \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(\varkappa, c) d\varkappa + \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(\varkappa, d) d\varkappa \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{d-c} \int_c^d \phi(a, y) dy + \frac{1}{d-c} \int_c^d \phi(b, y) dy \right] \\ & \leq \frac{\phi(a, c) + \phi(a, d) + \phi(b, c) + \phi(b, d)}{4} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir [13].

Teorem 2.30. $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon ve $\phi \in L_1(\Delta)$ ise,

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) & \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} \left[J_{a+}^\alpha \phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + J_{b-}^\alpha \phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\ & \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} \left[J_{c+}^\beta \phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + J_{d-}^\beta \phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[J_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \phi(b, d) + J_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \phi(b, c) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + J_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \phi(a,d) + J_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \phi(a,c) \Big] \\
& \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} \left[J_{a+}^\alpha \phi(b,c) + J_{a+}^\alpha \phi(b,d) + J_{b-}^\alpha \phi(a,c) + J_{b-}^\alpha \phi(a,d) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} \left[J_{c+}^\beta \phi(a,d) + J_{c+}^\beta \phi(b,d) + J_{d-}^\beta \phi(a,c) + J_{d-}^\beta \phi(b,c) \right] \\
& \leq \frac{\phi(a,c) + \phi(a,d) + \phi(b,c) + \phi(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

eşitsizliklerine ulaşılır [42].

$\mathfrak{A} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{B} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sırasıyla

$$\mathfrak{A}(\varkappa) = \int_0^\varkappa \frac{\varphi((b-a)\kappa)}{\kappa} d\kappa \text{ ve } \mathfrak{B}(y) = \int_0^y \frac{\psi((d-c)s)}{s} ds$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 2.31. $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon ve $\phi \in L_1(\Delta)$ ise, $a < b$, $c < d$ ve $\phi \in L_1(\Delta)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) & \leq \frac{1}{4\mathfrak{A}(1)} \left[{}_{a+}\mathbf{I}_\phi \phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + {}_{b-}\mathbf{I}_\phi \phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{1}{4\mathfrak{B}(1)} \left[{}_{c+}\mathbf{I}_\phi \phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + {}_{d-}\mathbf{I}_\psi \phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
& \leq \frac{1}{\mathfrak{A}(1)\mathfrak{B}(1)} \left[{}_{a+,c+}\mathbf{I}_{\phi,\psi} \phi(b,d) + {}_{a+,d-}\mathbf{I}_{\phi,\psi} \phi(b,c) \right. \\
& \quad \left. + {}_{b-,c+}\mathbf{I}_{\phi,\psi} \phi(a,d) + {}_{b-,d-}\mathbf{I}_{\phi,\psi} \phi(a,c) \right] \\
& \leq \frac{1}{8\mathfrak{A}(1)} \left[{}_{a+}\mathbf{I}_\phi \phi(b,c) + {}_{a+}\mathbf{I}_\phi \phi(b,d) + {}_{b-}\mathbf{I}_\phi \phi(a,c) + {}_{b-}\mathbf{I}_\phi \phi(a,d) \right] \\
& \quad + \frac{1}{8\mathfrak{B}(1)} \left[{}_{c+}\mathbf{I}_\phi \phi(a,d) + {}_{c+}\mathbf{I}_\phi \phi(b,d) + {}_{d-}\mathbf{I}_\phi \phi(a,c) + {}_{d-}\mathbf{I}_\phi \phi(b,c) \right] \\
& \leq \frac{\phi(a,c) + \phi(a,d) + \phi(b,c) + \phi(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir [38].

$\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $(\varkappa, y) \in [a, b] \times [c, d]$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1(\varkappa, y) &= \phi(a + b - \varkappa, y), \\
\tilde{\phi}_2(\varkappa, y) &= \phi(\varkappa, c + d - y), \\
\tilde{\phi}_3(\varkappa, y) &= \phi(a + b - \varkappa, c + d - y), \\
Y(\varkappa, y) &= \phi(\varkappa, y) + \tilde{\phi}_2(\varkappa, y), \\
H(\varkappa, y) &= \phi(\varkappa, y) + \tilde{\phi}_1(\varkappa, y), \\
K(\varkappa, y) &= \tilde{\phi}_1(\varkappa, y) + \tilde{\phi}_3(\varkappa, y), \\
L(\varkappa, y) &= \tilde{\phi}_2(\varkappa, y) + \tilde{\phi}_3(\varkappa, y), \\
F(\varkappa, y) &= \tilde{\phi}_1(\varkappa, y) + \tilde{\phi}_2(\varkappa, y) + \tilde{\phi}_3(\varkappa, y) + \phi(\varkappa, y) \\
&= \frac{Y(\varkappa, y) + H(\varkappa, y) + K(\varkappa, y) + L(\varkappa, y)}{2}.
\end{aligned}$$

Teorem 2.32. $\varpi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(a, b]$ aralığında pozitif, monoton artan ve $\varpi'(\varkappa)$ türevi (a, b) aralığında sürekli olsun. Ayrıca $w : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da $(c, d]$ üzerinde pozitif artan fonksiyon, $w'(y)$ türevi de (c, d) üzerinde sürekli olarak ele alınsın. $\alpha, \beta > 0$ ve $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlarda konveks bir fonksiyon için

$$\begin{aligned}
&\phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{8[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbf{J}_{a+; \varpi}^\alpha H\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \mathbf{J}_{b-; \varpi}^\alpha H\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{8[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbf{J}_{c+; w}^\beta Y\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \mathbf{J}_{d-; w}^\beta Y\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{16[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbf{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} F(b, d) + \mathbf{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} F(b, c) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} F(a, d) + \mathbf{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} F(a, c) \right] \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{16[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbf{J}_{a+; \varpi}^\alpha H(b, c) + \mathbf{J}_{b-, c+; \varpi, w}^\alpha H(b, d) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{J}_{b-; \varpi}^\alpha H(a, c) + \mathbf{J}_{b-; \varpi}^\alpha H(a, d) \right] \\
&\quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{16[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbf{J}_{c+; w}^\beta Y(a, d) + \mathbf{J}_{c+; w}^\beta Y(b, d) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{J}_{d-; w}^\beta Y(a, c) + \mathbf{J}_{d-; w}^\beta Y(b, c) \right] \\
&\leq \frac{\phi(a, c) + \phi(a, d) + \phi(b, c) + \phi(b, d)}{4}
\end{aligned}$$

biçimindeki Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikleri sağlanır [4].

2.2. ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Bu alt bölümde aralık değerli fonksiyonları anlamak için önce aralık analizi hakkında genel bilgiler verilir. Aralık değerli fonksiyonların tanım ve özelliklerinden sonra aralık değerli fonksiyonların integralleri, kesirli integralleri ve bu fonksiyon tipi için literatürde yer alan bazı teoremler ele alınır.

2.2.1. Aralık Analizi

Aralık analizi ile ilgili temel tanım ve kavramlar bu başlık altında incelenecektir.

$\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ kümesi sınırlı ve kapalı aralıklardan oluşan $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesidir. U , $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ kümesinin bir elemanı olsun. $\underline{u}, \bar{u} \in \mathbb{R}$ ve $\underline{u} \leq \bar{u}$ olmak üzere

$$U = [\underline{u}, \bar{u}] = \{\kappa \in \mathbb{R} : \underline{u} \leq \kappa \leq \bar{u}\}$$

olup $\underline{u}$ ve $\bar{u}$ sayıları ise U aralığının sırasıyla sol ve sağ uç noktaları olarak adlandırılır. Eğer $\underline{u} = \bar{u}$ ise U aralığına dejenere denilir ve bu durum $U = u = [u, u]$ notasyonu ile ifade edilir. $\underline{u} > 0$ olduğunda U aralığına pozitif veya $\bar{u} < 0$ olduğunda U aralığına negatif denilir. $\mathbb{R}$ kümesinin tüm kapalı aralıklarının kümesi $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve pozitif kapalı aralıklarının kümesi ve negatif kapalı aralıklarının kümesi sırasıyla $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ ve $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^-$ ile gösterilir. Ayrıca U ve V aralıklarının Hausdorff-Pompeiu mesafesi ise şöyle tanımlanmıştır:

$$d(U, V) = d([\underline{u}, \bar{u}], [\underline{v}, \bar{v}]) = \max\{|\underline{u} - \underline{v}|, |\bar{u} - \bar{v}|\}.$$

Bu metrik üzerinde, $(\mathbb{R}_{\mathcal{I}}, d)$ metrik uzayı tamdır [1].

Şimdi, $U = [\underline{u}, \bar{u}]$ ve $V = [\underline{v}, \bar{v}]$ aralıkları için temel aralık analizi işlemleri aşağıdaki gibi gösterilir [30].

1. $U + V = [\underline{u} + \underline{v}, \bar{u} + \bar{v}]$,
2. $U - V = [\underline{u} - \bar{v}, \bar{u} - \underline{v}]$,
3. $\Lambda = \{\underline{u} \underline{v}, \underline{u} \bar{v}, \bar{u} \underline{v}, \bar{u} \bar{v}\}$ olmak üzere $U.V = [\min \Lambda, \max \Lambda]$,

4. $\Delta = \{\underline{u}/\underline{v}, \underline{u}/\bar{v}, \bar{u}/\underline{v}, \bar{u}/\bar{v}\}$ ve $0 \notin V$ olmak üzere $U/V = [\min \Delta, \max \Delta]$
5. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, U aralığının skaler çarpımı aşağıdaki gibi gösterilir,

$$\theta U = \theta [\underline{u}, \bar{u}] = \begin{cases} [\theta \underline{u}, \theta \bar{u}], & \theta > 0, \\ \{0\}, & \theta = 0, \\ [\theta \bar{u}, \theta \underline{u}], & \theta < 0. \end{cases}$$

6. U aralığının tersi, $\delta = -1$ için

$$-U := (-1)U = [-\bar{u}, -\underline{u}].$$

7. Çıkarma işlemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$U - V = U + (-V) = [\underline{u} - \bar{v}, \bar{u} - \underline{v}].$$

Genel olarak, U için $-U$ tersi değildir, örneğin $U - U \neq 0$.

İşlemlerin tanımları, $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ uzayının yarı doğrusal uzay olmasına izin veren çok sayıda cebirsel özelliğe sahip olmasını sağlar. [29]. Bu özellikler aşağıdaki gibi yazılabilir ([24],[29],[30],[31]).

- (1) (Toplamanın birleşme özelliği) Her $U, V, W \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $(U + V) + W = U + (V + W)$,
- (2) (Yutan eleman özelliği) Her $U \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $U + 0 = 0 + U = 0$,
- (3) (Toplamanın değişme özelliği) Her $U, V \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için, $U + V = V + U$,
- (4) (Sadeleştirme kuralı) Her $U, V, W \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $U + W = V + W \implies U = V$,
- (5) (Çarpmanın birleşme özelliği) Her $U, V, W \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $(U.V).W = U.(V.W)$,
- (6) (Çarpmanın değişme özelliği) Her $U, V \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $U.V = V.U$,
- (7) (Birim eleman özelliği) Her $U \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $U.1 = 1.U$,
- (8) (Eşlenik kuralı) Her $U \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve her $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ için $\theta(\gamma U) = (\theta \gamma) U$,

(9) (Skalerle çarpmanın birinci dağılma özelliği) Her $U, V \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve her $\theta \in \mathbb{R}$ için $\theta(U + V) = \theta U + \theta V$,

(10) (Skalerle çarpmanın ikinci dağılma özelliği) Her $U \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve her $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ için $(\theta + \gamma)U = \theta U + \gamma U$.

Ayrıca, $U = [\underline{u}, \bar{u}]$ ve $V = [\underline{v}, \bar{v}]$ olmak üzere, küme özelliklerinden kapsama işlemi " $\subseteq$ " şöyle tanımlanmaktadır:

$$U \subseteq V \iff \underline{v} \leq \underline{u} \text{ ve } \bar{u} \leq \bar{v}.$$

Aritmetik işlemler, kapsama işlemi ile birlikte dikkate alındığında, aralık operatörlerinin kapsama izotonu (inclusion isotone of interval operations) adı verilen aşağıdaki özelliğe sahip olur:

⊙ işeminin toplama, çarpma, çıkarma veya bölme işlemleri olduğu varsayalım. U, V, W ve Y koşulları sağlayan aralıklar ise

$$U \subseteq V \text{ ve } W \subseteq Y$$

olması aşağıdaki bağlantıyı doğrular:

$$U \odot W \subseteq V \odot Y.$$

2.2.2. Aralık Değerli Fonksiyonların İntegrali

Bu alt bölümde, aralık değerli fonksiyonların integralinin nasıl alınabileceğine dair bilgiler verilir. Bu integrallerin tanımını daha anlaşılır kılmak için, öncesinde bazı temel kavramlar verilmiştir. $I = [a, b]$ boş olmayan bir aralık olmak üzere eğer her bir $\kappa \in [a, b]$ için

$$\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$$

ise Φ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığı üzerinde κ nin aralık değerli fonksiyonu denilir. $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı

$$D : a = \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_n = b$$

şeklinde tanımlansın. Tanıma göre D parçalanışının $[a, b]$ aralığının en az bir sonlu sıralı alt kümesi olduğu görülür. Bu durumda D parçalanışı için $mesh(D)$,

$$mesh(D) = \max \{ \kappa_i - \kappa_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n \}$$

biçiminde tanımlanır. $\mathcal{D}([a, b])$ ise $[a, b]$ aralığının tüm parçalanmalarının kümesi olarak gösterilsin. $\mathcal{D}(\delta, [a, b])$ ise $mesh(D) < \delta$ olan $D \in \mathcal{D}([a, b])$ parçalanışlarının kümesi olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için ξ_i , $[\kappa_{i-1}, \kappa_i]$ aralığının rastgele bir noktası olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ fonksiyonu için

$$S(\Phi, D, \delta) = \sum_{i=1}^n \Phi(\xi_i) [\kappa_i - \kappa_{i-1}]$$

eşitliğinde tanımlanan $S(\Phi, D, \delta)$ toplamına $D \in \mathcal{D}(\delta, [a, b])$ ye karşılık gelen Φ fonksiyonun Riemann toplamı denir.

Tanım 2.33. ([9],[32],[33]) $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ fonksiyonu verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\xi_i \in [\kappa_{i-1}, \kappa_i]$ seçiminin bağımsız her bir $D \in \mathcal{D}(\delta, [a, b])$ karşılık gelen Φ fonksiyonun her S Riemann toplamı için

$$d(S(\Phi, D, \delta), A) < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ varsa Φ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir bir fonksiyondur (IR -integrallenebilir) denir. Bu durumda, A ya Φ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde IR -integrali denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$A = (IR) \int_a^b \Phi(\kappa) d\kappa.$$

$[a, b]$ üzerinde tüm IR -integrallenebilir fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{IR}_{([a, b])}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki Teorem, IR -integrallenebilir ve Riemann integrallenebilir (R -integrallenebilir) arasındaki bağlantıyı açıklar:

Teorem 2.34. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli bir fonksiyon olsun. $\Phi \in \mathcal{IR}_{([a,b])}$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{R}_{([a,b])}$, R -integrallenebilir fonksiyonu göstermek üzere $\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa) \in \mathcal{R}_{([a,b])}$ için

$$(IR) \int_a^b \Phi(\kappa) d\kappa = \left[(R) \int_a^b \underline{\Phi}(\kappa) d\kappa, (R) \int_a^b \overline{\Phi}(\kappa) d\kappa \right]$$

eşitliği ile verilir.

$P_1 : a = \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_n = b$ ve her $i = 1, 2, 3, \dots, m$ için $\kappa_{i-1} \leq \xi_i \leq \kappa_i$ olmak üzere $\{\kappa_{i-1}, \xi_i, \kappa_i\}_{i=1}^m$ sayılarının kümesine $[a, b]$ kapalı aralığının P_1 parçalanışı denir.

Dahası, $\Delta\kappa_i = \kappa_i - \kappa_{i-1}$ olmak üzere $\Delta\kappa_i < \delta$ ise P_1 parçalanışına δ -fine denir. $[a, b]$ kapalı aralığının bütün δ -fine parçalanışlarının kümesi $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}(\delta, [a, b])$ şeklinde gösterilsin. $\{\kappa_{i-1}, \xi_i, \kappa_i\}_{i=1}^m$ ifadesi $[a, b]$ 'nin P_1 , δ -fine parçalanışı ve $\{s_{j-1}, \eta_j, s_j\}_{j=1}^n$ ifadesi $[c, d]$ 'nin P_2 , δ -fine parçalanışı olmak üzere

$$\Delta_{i,j} = [\kappa_{i-1}, \kappa_i] \times [s_{j-1}, s_j]$$

dikdörtgenleri $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ 'nin bir parçalanışdır ve (ξ_i, η_j) noktaları $[\kappa_{i-1}, \kappa_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ dikdörtgeninin içindedir. Ayrıca, $P_1 \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}(\delta, [a, b])$ ve $P_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}(\delta, [c, d])$ olmak üzere $P_1 \times P_2$ ile Δ 'nın P , δ -fine parçalanışlarının kümesi $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}(\delta, \Delta)$ olarak sembolize edilsin. $\Delta_{i,j}$ dikdörtgeninin alanı $\Delta A_{i,j}$ olsun. $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $\Delta_{i,j}$ dikdörtgenlerinin her birinde (ξ_i, η_j) keyfi noktaları ve

$$S(\Phi, P, \delta, \Delta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Phi(\xi_i, \eta_j) \Delta A_{i,j}.$$

eşitliği elde edilir. $P \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}(\delta, \Delta)$ yardımıyla Φ integral toplamı $S(\Phi, P, \delta, \Delta)$ şeklindedir.

Zhao ve ark. [49] tarafından aralık değerli fonksiyonlar için çift katlı integral aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Teorem 2.35. $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ olmak üzere herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $P \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}(\delta, \Delta)$ için

$$d(S(\Phi, P, \delta, \Delta)) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ var ise Φ , Δ üzerinde ID -integrallenebilirdir denir ve $U = (ID) \iint_{\Delta} \Phi(\kappa, s) dA$ şeklindedir. Δ üzerinde her ID -integrallenebilir fonksiyonlarının küme sınıfı $ID(\Delta)$ ile gösterilir [49].

Teorem 2.36. $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$, Δ üzerinde ID -integrallenebilir ise

$$(ID) \iint_{\Delta} \Phi(s, \kappa) dA = (IR) \int_a^b (IR) \int_c^d \Phi(s, \kappa) ds d\kappa$$

eşitliği vardır [49].

2.2.3. Aralık Değerli Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller

Aralık değerli tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için çeşitli kesirli integrallerin tanımlarına yer verilir.

Lupulescu [24] tarafından, reel değerli fonksiyonlar için Riemann-Liouville integrallerini dikkate alarak, aşağıdaki aralık değerli sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali tanımlandı.

Tanım 2.37. $\alpha > 0$ ve $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli bir fonksiyon olsun.

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^{\varkappa} (\varkappa - \kappa)^{\alpha-1} \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanan integrale Φ aralık değerli fonksiyonunun sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali denir.

Lupulescu'nun tanımına dayanarak, Budak ve ark. [5] tarafından, Φ aralık değerli fonksiyonunun sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali

$$\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_{\varkappa}^b (\kappa - \varkappa)^{\alpha-1} \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlandı.

Tanım 2.38. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ ve $\Phi \in IR_{([a,b])}$ olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli konveks bir fonksiyon olsun. Φ aralık değerli fonksiyonunun soldan ve sağdan Sarıkaya kesirli integralleri

$${}_{a+}I_{\varphi}\Phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^{\varkappa} \frac{\varphi(\varkappa - \kappa)}{\varkappa - \kappa} \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a$$

ve

$${}_{b-}I_{\varphi}\Phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_{\varkappa}^b \frac{\varphi(\kappa - \varkappa)}{\kappa - \varkappa} \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b$$

şeklinde tanımlanmıştır [47]. Burada $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\int_0^1 \frac{\varphi(\kappa)}{\kappa} d\kappa < \infty$ şartını sağlar.

Tanım 2.39. $\varpi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b]$ üzerinde pozitif ve monoton artan bir fonksiyonu verilsin. Ayrıca $\varpi'(\varkappa)$, (a, b) 'de sürekli ve $\Phi \in \mathcal{IR}_{([a,b])}$ olsun. Φ aralık değerli fonksiyonun $[a, b]$ üzerinde tanımlı ϖ fonksiyonuna göre sol taraflı ve sağ taraflı kesirli integralleri, $\alpha > 0$ için

$$\mathbb{J}_{a+}^{\alpha; \varpi} \Phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^{\varkappa} \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(\kappa)]^{1-\alpha}} \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a \quad (2.19)$$

ve

$$\mathbb{J}_{b-}^{\alpha; \varpi} \Phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_{\varkappa}^b \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}} \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b \quad (2.20)$$

biçiminde tanımlanmıştır [44].

Tanım 2.39 ifadesinde bazı özel seçimler yapılarak aşağıdaki gibi sonuçlar elde edilir.

1. $\varpi(\kappa) = \kappa$ olarak seçilirse (2.19) ve (2.20) ifadelerinin sırasıyla $\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(\varkappa)$ ve $\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(\varkappa)$ Riemann-Liouville kesirli integrallerine eşit olduğu görülür.
2. $\varpi(\kappa) = \ln \kappa$ olarak incelenirse (2.19) ve (2.20) kesirli operatörleri sırasıyla

$$\mathbb{H}_{a+}^{\alpha} \Phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^{\varkappa} \left(\ln \frac{\varkappa}{\kappa} \right)^{\alpha-1} \frac{\Phi(\kappa)}{\kappa} d\kappa, \quad \varkappa > a$$

ve

$$\mathbb{H}_{b-}^{\alpha} \Phi(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_{\varkappa}^b \left(\ln \frac{\kappa}{\varkappa} \right)^{\alpha-1} \frac{\Phi(\kappa)}{\kappa} d\kappa, \quad \varkappa < b$$

olmak üzere Hadamard kesirli integrallerine dönüşür.

3. $\rho > 0$ olmak üzere $\varpi(\kappa) = \frac{\kappa^{\rho}}{\rho}$ olarak varsayılırsa

$$\mathbb{K}_{a+, \rho}^{\alpha} \Phi(\varkappa) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^{\varkappa} (\varkappa^{\rho+1} - \kappa^{\rho+1})^{\alpha-1} \kappa^{\rho} \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a$$

ve

$$\mathbb{K}_{b-, \rho}^{\alpha} \Phi(\varkappa) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_{\varkappa}^b (\kappa^{\rho+1} - \varkappa^{\rho+1})^{\alpha-1} \kappa^{\rho} \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b$$

şeklinde Katugampola kesirli integralleri bulunur.

2.2.4. Aralık Değerli Fonksiyonlar İçin Bazı Tanım Ve Teoremler

Aralık değerli fonksiyonlar için tez boyunca kullanılan tanımlara yer verilecektir. Ayrıca bu başlıkta fonksiyonlar aralık değerli olduğunda elde edilmiş bazı teoremlere yer verilir. Aralık değerli fonksiyonlar ile ilgili elde edilen teoremler reel değerli fonksiyonlar için elde edilmiş olan literatürdeki eşitsizlikleri genelleştirmiş olduğu görülecektir.

Tanım 2.40. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli bir fonksiyon olsun. Her $\varkappa, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için

$$\lambda \Phi(\varkappa) + (1 - \lambda) \Phi(y) \subseteq \Phi(\lambda \varkappa + (1 - \lambda)y)$$

eşitsizliği sağlınyorsa Φ fonksiyonuna aralık değerli konvex fonksiyon denir [37].

Teorem 2.41. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$ aralık değerli konvex bir fonksiyon ise

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{1}{b-a} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) d\varkappa \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \quad (2.21)$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

Teorem 2.42. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ ve $\Omega(\kappa) = [\underline{\Omega}(\kappa), \overline{\Omega}(\kappa)]$ olacak şekilde, eğer $\Phi, \Omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ aralık değerli konveks fonksiyon ve

$$\begin{aligned} M(a, b) &= \Phi(a)\Omega(a) + \Phi(b)\Omega(b), \\ N(a, b) &= \Phi(a)\Omega(b) + \Phi(b)\Omega(a) \end{aligned} \quad (2.22)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{b-a} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) d\varkappa \supseteq \frac{1}{3} M(a, b) + \frac{1}{6} N(a, b) \quad (2.23)$$

şeklinde görülen eşitsizlik Zhao ve ark. [48] tarafından elde edildi.

Teorem 2.43. Teorem 2.42 koşulları altında

$$\begin{aligned} &2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\supseteq \frac{1}{b-a} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) d\varkappa + \frac{1}{6} M(a, b) + \frac{1}{3} N(a, b) \end{aligned} \quad (2.24)$$

eşitsizliği vardır ve bu eşitsizlik Zhao ve ark. [48] tarafından yazıldı.

Aralık değerli fonksiyonlar için elde edilen Riemann-Liouville kesirli integrallerin tanımlarından yola çıkarak aşağıdaki teoremler Budak ve ark. tarafından [5] aşağıdaki Teoremler elde edildi.

Teorem 2.44. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olacak biçimde $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli fonksiyonu için

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(\varkappa) = [\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \underline{\Phi}(\varkappa), \mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \overline{\Phi}(\varkappa)]$$

ve

$$\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(\varkappa) = [\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \underline{\Phi}(\varkappa), \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \overline{\Phi}(\varkappa)]$$

eşitlikleri geçerlidir [5].

Teorem 2.45. $\alpha > 0$ ve $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olacak biçimde $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ aralık değerli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a)] \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \quad (2.25)$$

ifadesi sağlanır [5]. Elde edilen bu ifadeye, aralık değerli fonksiyon için Riemann-Liouville kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite–Hadamard eşitsizlikleri olarak ifade edilebilir.

Tüm bu sonuçlara ek olarak, Liu ve ark. [25] tarafından, aralık değerli fonksiyonlar için Hermite–Hadamard tipli aşağıdaki eşitsizlikler geliştirildi.

Teorem 2.46. $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik (yani $w(\varkappa) = w(a+b-\varkappa)$) bir fonksiyon olarak ele alınsın. $\Phi = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ şeklinde ve eğer $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ aralık değerli konveks bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) [\mathcal{J}_{a+}^\alpha w(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha w(a)] \\ & \supseteq [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b)w(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a)w(a)] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha w(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha w(a)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

eşitsizlikleri bulunur [25].

Teorem 2.47. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ ile $\underline{\Phi}, \overline{\Phi} \in \mathcal{R}_{([a,b])}$ olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli fonksiyon olsun. $\alpha > 0$ için

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{\frac{a+b}{2}+}^\alpha \Phi(b) + \mathcal{J}_{\frac{a+b}{2}-}^\alpha \Phi(a)] \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \quad (2.27)$$

ve

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler Zhao ve ark. [47] tarafından elde edilen eşitsizliklerdir.

Teorem 2.48. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ ve $\Omega(\kappa) = [\underline{\Omega}(\kappa), \overline{\Omega}(\kappa)]$ olmak üzere $\Phi, \Omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ iki aralık değerli konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b)\Omega(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a)\Omega(a)] \\ & \supseteq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) M(a, b) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} N(a, b) \end{aligned} \quad (2.29)$$

ve

$$\begin{aligned} & 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b)\Omega(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a)\Omega(a)] \\ & \quad + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} M(a, b) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) N(a, b). \end{aligned} \quad (2.30)$$

eşitsizlikleri sağlanır [5]. Burada $M(a, b)$ ve $N(a, b)$ (2.22) ifadesinde tanımlandığı gibidir.

Ayrıca

$$\Lambda(\varkappa) = (IR) \int_0^\varkappa \frac{\varphi((b-a)\kappa)}{\kappa} d\kappa, \quad \Delta(y) = (IR) \int_0^y \frac{\psi((d-c)s)}{s} ds$$

tanımları tez boyunca kullanılacaktır.

Teorem 2.49. Eğer $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ aralık değerli konveks bir fonksiyon olsun öyle ki $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$. Sarıkaya kesirli integralleri kullanılarak Φ aralık değerli fonksiyonu için

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_a I_\varphi \Phi(b) + {}_b I_\varphi \Phi(a)] \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}. \quad (2.31)$$

eşitsizlikleri sağlanır [47].

Teorem 2.50. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ ve $\Omega(\kappa) = [\underline{\Omega}(\kappa), \overline{\Omega}(\kappa)]$ iken $\Phi, \Omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ aralık değerli iki konveks fonksiyon olsun. Ayrıca $M(a, b)$, $N(a, b)$ (2.22) ifadesinde tanımlandığı gibi ve

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\varphi((b-a)\kappa)}{\kappa} (2\kappa^2 - 2\kappa + 1) d\kappa,$$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{\varphi((b-a)\kappa)}{\kappa} (2\kappa - 2\kappa^2) d\kappa$$

olmak üzere

$${}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b)\Omega(b) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a)\Omega(a) \supseteq J_1M(a,b) + J_2N(a,b) \quad (2.32)$$

eşitsizliği elde edilir [47].

Teorem 2.51. J_1, J_2 Teorem 2.50’de tanımlandığı şekilde kabul edilsin. $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ ise (2.22) ifadesinde tanımlandığı gibi varsayılın. Ayrıca $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ ve $\Omega(\kappa) = [\underline{\Omega}(\kappa), \overline{\Omega}(\kappa)]$ iken $\Phi, \Omega : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ aralık değerli iki konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b)\Omega(b) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a)\Omega(a)] \\ & \quad + \frac{1}{2\Lambda(1)} [J_2M(a,b) + J_1N(a,b)] \end{aligned} \quad (2.33)$$

eşitsizliğine ulaşılır [47].

Teorem 2.52. $\varpi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$, (a,b) üzerinde artan ve pozitif monoton bir fonksiyon olmak üzere, $\varpi'(\varkappa)$ türevi ise (a,b) üzerinde sürekli olduğu kabul edilsin. $\Phi, [a,b]$ üzerinde aralık değerli konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[\varpi(b)-\varpi(a)]^{\alpha}} [\mathbb{J}_{a+;\varpi}^{\alpha}\Psi(b) + \mathbb{J}_{b-;\varpi}^{\alpha}\Psi(a)] \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \quad (2.34)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\varkappa \in [a,b]$ için $\Psi(\varkappa) = \Phi(\varkappa) + \tilde{\Phi}(\varkappa)$ ve $\tilde{\Phi}(\varkappa) = \Phi(a+b-\varkappa)$ şeklindedir [44].

Tanım 2.53. Her $(\varkappa, u), (y, w) \in \Delta$ ve $s, \kappa \in [0, 1]$ için $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \Phi(\kappa\varkappa + (1-\kappa)y, su + (1-s)w) \\ & \supseteq \kappa s\Phi(\varkappa, u) + \kappa(1-s)\Phi(\varkappa, w) + s(1-\kappa)\Phi(y, u) + (1-s)(1-\kappa)\Phi(y, w) \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlarsa Φ fonksiyonuna Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks bir fonksiyon denir [50].

Teorem 2.54. Eğer $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} (IR) \int_a^b \Phi\left(\kappa, \frac{c+d}{2}\right) d\kappa + \frac{1}{d-c} (IR) \int_c^d \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\
& \supseteq \frac{1}{(b-a)(d-c)} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\kappa, y) dy d\kappa \\
& \supseteq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{b-a} (IR) \int_a^b [\Phi(\kappa, c) + \Phi(\kappa, d)] d\kappa \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{d-c} (IR) \int_c^d [\Phi(a, y) + \Phi(b, y)] dy \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)}{4}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [50].

Teorem 2.55. $\Phi(\kappa, s) = [\underline{\Phi}(\kappa, s), \overline{\Phi}(\kappa, s)]$ ve $\Omega(\kappa, s) = [\underline{\Omega}(\kappa, s), \overline{\Omega}(\kappa, s)]$ olmak üzere $\Phi, \Omega : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ aralık değerli iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
K(a, b, c, d) &= \Phi(a, c)\Omega(a, c) + \Phi(b, c)\Omega(b, c) + \Phi(a, d)\Omega(a, d) + \Phi(b, d)\Omega(b, d), \\
L(a, b, c, d) &= \Phi(a, c)\Omega(b, c) + \Phi(b, c)\Omega(a, c) + \Phi(a, d)\Omega(b, d) + \Phi(b, d)\Omega(a, d), \\
M(a, b, c, d) &= \Phi(a, c)\Omega(a, d) + \Phi(b, c)\Omega(b, d) + \Phi(a, d)\Omega(a, c) + \Phi(b, d)\Omega(b, c), \\
N(a, b, c, d) &= \Phi(a, c)\Omega(b, d) + \Phi(b, c)\Omega(a, d) + \Phi(a, d)\Omega(b, c) + \Phi(b, d)\Omega(a, c).
\end{aligned}$$

için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)(d-c)} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\kappa, y)\Omega(\kappa, y) d\kappa dy \\
& \supseteq \frac{1}{9} K(a, b, c, d) + \frac{1}{18} [L(a, b, c, d) + M(a, b, c, d)] + \frac{1}{36} N(a, b, c, d)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 4\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{(b-a)(d-c)} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(x, y) \Omega(x, y) dx dy + \frac{5}{36} K(a, b, c, d) \\
& \quad + \frac{7}{36} [L(a, b, c, d) + M(a, b, c, d)] + \frac{2}{9} N(a, b, c, d)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

eşitsizlikleri vardır [50].



3. TEK DEĞİŞKENLİ ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN HERMİTE–HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Tek değişken içeren aralık değerli fonksiyonlarla ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan hareketle bu bölümde kesirli integraller içeren yeni eşitsizlikler elde edilir. İlk önce aralık değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri tanımlanır. Bu tanımlar yardımıyla bazı Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilir.

Tanım 3.1. $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde artan ve pozitif bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli konveks bir fonksiyon olsun. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ için genelleştirilmiş kesirli integral tanımları

$$\mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Phi)(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(IR) \int_a^{\varkappa} (\varkappa - \kappa)^{\alpha-1} [u(\varkappa) - u(\kappa)]^k \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa > a$$

ve

$$\mathfrak{L}_{b-,u}^{\alpha,k}(\Phi)(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(IR) \int_{\varkappa}^b (\kappa - \varkappa)^{\alpha-1} [u(\kappa) - u(\varkappa)]^k \Phi(\kappa) d\kappa, \quad \varkappa < b$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımlar kullanılarak, aşağıdaki örnekler verilir.

Örnek 3.2. $\beta \in \mathbb{R}$ için $u(\kappa) = \kappa - \beta$ ve $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$, $\Phi(\kappa) = [\kappa - \frac{a+b}{2}, \kappa - a]$ olarak tanımlansın. Böylece

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Phi)(b) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(IR) \int_a^b (b - \kappa)^{\alpha-1} (b - \kappa)^k \left[\kappa - \frac{a+b}{2}, \kappa - a \right] d\kappa \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^b (b - \kappa)^{\alpha-1+k} \left(\kappa - \frac{a+b}{2} \right) d\kappa, \int_a^b (b - \kappa)^{\alpha-1+k} (\kappa - a) d\kappa \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1-\alpha-k}{2(\alpha+k)(\alpha+k+1)} (b-a)^{\alpha+k+1}, \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} (b-a)^{\alpha+k+1} \right] \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha+k+1}}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1-\alpha-k}{2}, 1 \right]
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_{b-,u}^{\alpha,k}(\Phi)(a) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^b (\kappa-a)^{\alpha-1} (\kappa-a)^k \left[\kappa - \frac{a+b}{2}, \kappa-a \right] d\kappa \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha+k+1}}{(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\alpha+k-1}{2(\alpha+k)}, 1 \right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 3.3. $\beta \in \mathbb{R}$ için $u(\kappa) = \kappa - \beta$, $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ fonksiyonu $\Phi(\kappa) = [\kappa - b, \kappa - \frac{a+b}{2}]$ şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Phi)(b) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^b (b-\kappa)^{\alpha-1} (b-\kappa)^k \left[\kappa - b, \kappa - \frac{a+b}{2} \right] d\kappa \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^b (b-\kappa)^{\alpha-1+k} (\kappa-b) d\kappa, \int_a^b (b-\kappa)^{\alpha-1+k} \left(\kappa - \frac{a+b}{2} \right) d\kappa \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{(\alpha+k+1)} (b-a)^{\alpha+k+1}, \frac{1-\alpha-k}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} (b-a)^{\alpha+k+1} \right] \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha+k+1}}{(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha)} \left[1, \frac{1-\alpha-k}{2(\alpha+k)} \right]
\end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_{b-,u}^{\alpha,k}(\Phi)(a) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^b (\kappa-a)^{\alpha-1} (\kappa-a)^k \left[\kappa - b, \kappa - \frac{a+b}{2} \right] d\kappa \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha+k+1}}{(\alpha+k+1)(\alpha+k)\Gamma(\alpha)} \left[-1, \frac{\alpha+k-1}{2} \right]
\end{aligned}$$

hesaplamaları bulunur.

Reel değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integraller ile aralık değerli fonksiyonlar için yeni tanımlanan genelleştirilmiş kesirli integraller arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 3.4. $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde artan ve pozitif bir fonksiyon ve $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli konveks bir fonksiyon ise öyle ki $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere

$$\mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Phi)(\varkappa) = \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(\underline{\Phi})(\varkappa), \mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(\overline{\Phi})(\varkappa) \right]$$

ve

$$\mathfrak{L}_{b-,u}^{\alpha,k}(\Phi)(\varkappa) = \left[\mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(\underline{\Phi})(\varkappa), \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(\overline{\Phi})(\varkappa) \right]$$

elde edilir.

Teorem 3.5. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ ile $\underline{\Phi}, \overline{\Phi} \in \mathcal{R}_{([a,b])}$ olmak üzere $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli fonksiyon olsun. Ayrıca (a, b) üzerinde $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton artan fonksiyon olsun ve $u \in L[a, b]$. Sonrasında $\Psi \in \mathcal{IR}_{([a,b])}$, $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve genelleştirilmiş kesirli integral için

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[\mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(b) + \mathfrak{L}_{b-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(a) \right] \\ & \supseteq \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada $\varkappa \in [a, b]$ için $\Psi(\varkappa)$, Teorem 2.52 ifadesinde tanımlandığı gibi, yani Φ aralık değerli konveks bir fonksiyon olduğundan Ψ fonksiyonu da aralık değerli konveks bir fonksiyondur.

İspat. Φ , $[a, b]$ üzerinde aralık değerli konveks bir fonksiyon olduğundan, her $\varkappa, y \in [a, b]$ için

$$\Phi\left(\frac{\varkappa+y}{2}\right) \supseteq \frac{\Phi(\varkappa) + \Phi(y)}{2} \quad (3.2)$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.2) eşitsizliğinde $\kappa \in [0, 1]$ için $\varkappa = \kappa a + (1 - \kappa)b$ ve $y = (1 - \kappa)a + \kappa b$ değişken değişikliği yapılırsa

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{1}{2} [\Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) + \Phi((1 - \kappa)a + \kappa b)] \quad (3.3)$$

eşitsizliği bulunur. (3.3) ifadesi $\kappa^{\alpha-1} [u(b) - u(\kappa a + (1 - \kappa)b)]^k$ ile çarpılır $[0, 1]$ üzerinde κ 'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} (u(b) - u(\kappa a + (1 - \kappa)b))^k d\kappa \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} [u(b) - u(\kappa a + (1 - \kappa)b)]^k \Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) d\kappa \right. \\ & \quad \left. + (IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} [u(b) - u(\kappa a + (1 - \kappa)b)]^k \Phi((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $y = \kappa a + (1 - \kappa)b$ değişken değişikliği ile,

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \frac{(b-y)^{\alpha-1}}{(b-a)^\alpha} (u(b) - u(y))^k dy \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_a^b \frac{(b-y)^{\alpha-1}}{(b-a)^\alpha} (u(b) - u(y))^k \Phi(y) dy \right. \\ & \quad \left. + (IR) \int_a^b \frac{(b-y)^{\alpha-1}}{(b-a)^\alpha} (u(b) - u(y))^k \Phi(a+b-y) dy \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu durumda

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1)(b) \supseteq \mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(b) \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer olarak, (3.3) ifadesinin her iki tarafı $\kappa^{\alpha-1} [u((1 - \kappa)a + \kappa b) - u(a)]^k$ çarpılır ve $[0, 1]$ üzerinde κ 'ye göre integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} [u((1 - \kappa)a + \kappa b) - u(a)]^k d\kappa \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} [u((1 - \kappa)a + \kappa b) - u(a)]^k \Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) d\kappa \right. \\ & \quad \left. + (IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} [u((1 - \kappa)a + \kappa b) - u(a)]^k \Phi((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazmak açıktır. $y = (1 - \kappa)a + \kappa b$ değişken değişikliği yardımıyla

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathfrak{T}_{b^-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \supseteq \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{b^-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(a) \quad (3.5)$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.4) ve (3.5) eşitsizliği birleştirilirse

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\mathfrak{T}_{a^+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{T}_{b^-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \supseteq \frac{1}{2} \left[\mathfrak{L}_{a^+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(b) + \mathfrak{L}_{b^-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(a) \right]$$

olduğu görülür. Böylece (3.1) eşitsizliklerinin birinci eşitsizliğinin ispatı yapılmış olur.

(3.1) eşitsizliklerinin ikinci eşitsizliği için, $\Phi, [a, b]$ üzerinde aralık değerli konveks bir fonksiyon olduğundan

$$\Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) + \Phi((1 - \kappa)a + \kappa b) \supseteq \Phi(a) + \Phi(b) \quad (3.6)$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.6) ifadesi $\kappa^{\alpha-1} [u(b) - u(\kappa a + (1 - \kappa)b)]^k$ ile çarpılır ve daha sonra $[0, 1]$ üzerinde κ 'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & (IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} [u(b) - u(\kappa a + (1 - \kappa)b)]^k \Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) d\kappa \\ & + (IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} [u(b) - u(\kappa a + (1 - \kappa)b)]^k \Phi((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \\ & \supseteq [\Phi(a) + \Phi(b)] \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} [u(b) - u(\kappa a + (1 - \kappa)b)]^k d\kappa \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\mathfrak{L}_{a^+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(b) \supseteq [\Phi(a) + \Phi(b)] \mathfrak{T}_{a^+,u}^{\alpha,k}(1)(b) \quad (3.7)$$

eşitsizliği yazılabilir. Benzer şekilde, (3.6) eşitsizliğinin her iki yanı $\kappa^{\alpha-1} [u((1 - \kappa)a + \kappa b) - u(a)]^k$ ifadesi ile çarpılır ve $[0, 1]$ üzerinde κ 'ye göre integral alınırsa

$$\mathfrak{L}_{b^-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(a) \supseteq [\Phi(a) + \Phi(b)] \mathfrak{T}_{b^-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \quad (3.8)$$

ifadesi açıktır. (3.7) ve (3.8) taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1}{2} \left[\mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(b) + \mathfrak{L}_{b-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(a) \right] \supseteq \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 3.5'in ispatı tamamlanır. $\square$

Örnek 3.6. Teorem 3.5 ifadesinde $a = 0$ ve $b = 1$ olmak üzere $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli fonksiyonu $\Phi(\kappa) = [\kappa^2, 6 - \kappa^2]$ şeklinde ele alınırsa $\Psi(\kappa) = [\kappa^2 + (1 - \kappa)^2, 12 - (\kappa^2 + (1 - \kappa)^2)]$ olur. Ayrıca $u(\kappa) = \kappa - \beta$ olsun. $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere (3.1) eşitsizliklerinin birinci terimi

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \\ &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \left[\mathfrak{T}_{0+,u}^{\alpha,k}(1)(1) + \mathfrak{T}_{1-,u}^{\alpha,k}(1)(0) \right] \\ &= \left[\frac{1}{4}, \frac{23}{4} \right] \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-t)^{\alpha+k-1} dt + \int_0^1 t^{\alpha+k-1} dt \right] \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)(\alpha+k)} [1, 23] \end{aligned}$$

şeklinde dir. (3.1) eşitsizliklerinin ikinci terimi ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(b) + \mathfrak{L}_{b-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(a) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathfrak{L}_{0+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(1) + \mathfrak{L}_{1-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(0) \right] \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \left[(IR) \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} (1-t)^k \left[t^2 + (1-t)^2, 12 - (t^2 + (1-t)^2) \right] dt \right. \\ & \quad \left. + (IR) \int_0^1 t^{\alpha-1} t^k \left[t^2 + (1-t)^2, 12 - (t^2 + (1-t)^2) \right] dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\beta(\alpha+k, 3) + \frac{1}{\alpha+k+2}, \frac{12}{\alpha+k} - \beta(\alpha+k, 3) - \frac{1}{\alpha+k+2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1) eşitsizliklerinin üçüncü terimi için

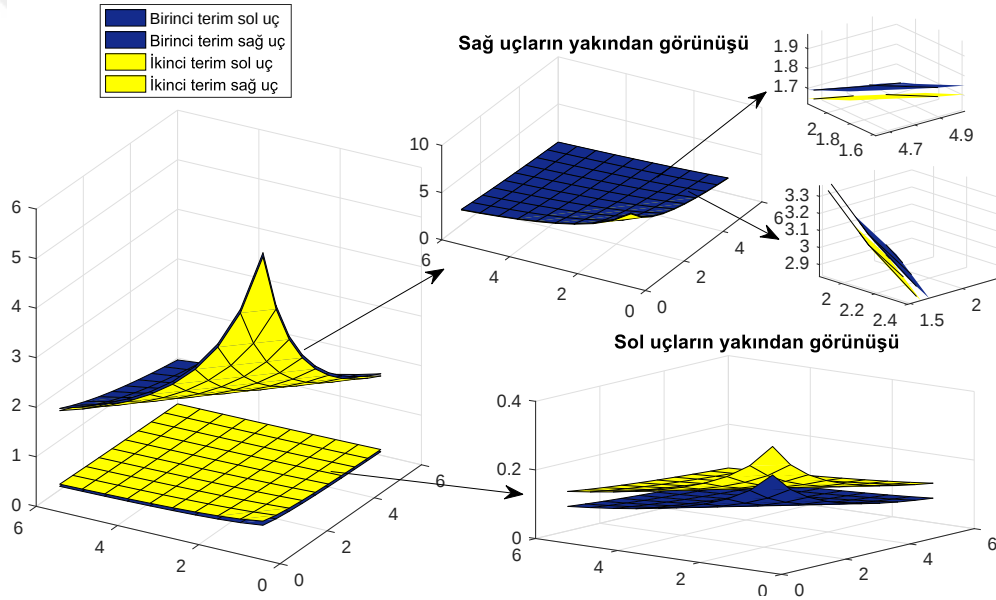
$$\begin{aligned} & \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)} [1, 11] \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Böylece

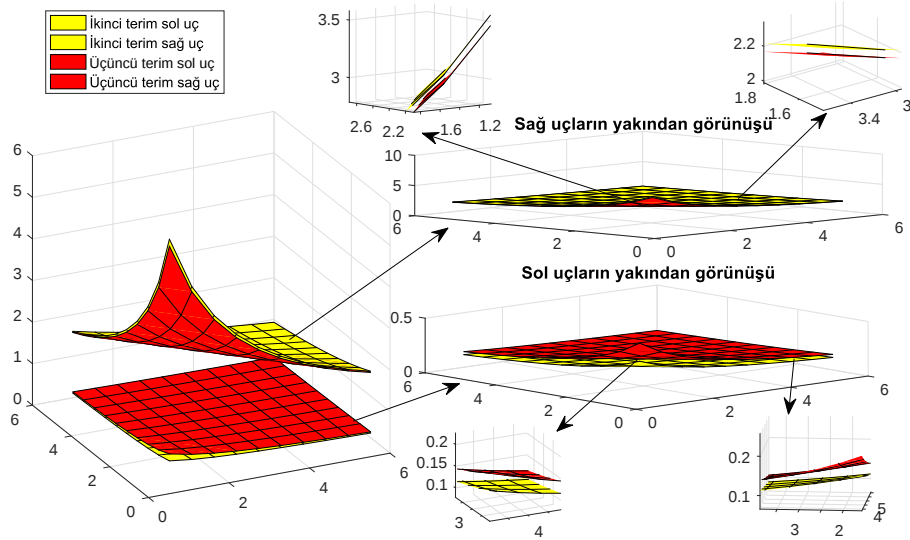
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2(\alpha+k)} [1, 23] \\
 & \supseteq \left[\mathcal{B}(\alpha+k, 3) + \frac{1}{\alpha+k+2}, \frac{12}{\alpha+k} - \mathcal{B}(\alpha+k, 3) - \frac{1}{\alpha+k+2} \right] \\
 & \supseteq \frac{1}{\alpha+k} [1, 11]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

olduğu görülür.

Örnekte elde ettiğimiz eşitsizliklerin doğruluğu, MATLAB programından faydalanarak hesaplanan Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de aşağıdaki gibi gösterilmiştir.



Şekil 3.1. (3.9) eşitsizliğinin birinci terim ve ikinci teriminin karşılaştırılması



Şekil 3.2. (3.9) eşitsizliğinin ikinci terim ve üçüncü teriminin karşılaştırılması

Sonuç 3.7. Teorem 3.5 içinde $k = 0$ seçilirse (2.25) eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 3.8. Teorem 3.5 şartlarında eğer $\beta \in \mathbb{R}$ için $u(\kappa) = \kappa - \beta$ fonksiyonu olarak kabul edilirse

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{2(b-a)^{\alpha+k}} \left[\mathcal{J}_{a+}^{\alpha+k}(\Phi)(b) + \mathcal{J}_{b-}^{\alpha+k}(\Phi)(a) \right] \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 3.9. Teorem 3.5 şartları aynı şekilde varsayalım. Ayrıca, $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Psi \in \mathcal{IR}_{([a,b])}$ ve kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\mathfrak{I}_{\frac{a+b}{2}+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{I}_{\frac{a+b}{2}-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[\mathfrak{L}_{\frac{a+b}{2}+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(b) + \mathfrak{L}_{\frac{a+b}{2}-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(a) \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \left[\mathfrak{I}_{\frac{a+b}{2}+,u}^{\alpha,k}(1)(b) + \mathfrak{I}_{\frac{a+b}{2}-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \right] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

İspat. Öncelikle, (3.2) eşitsizliğinde $\kappa \in [0, 1]$ için $\varkappa = \frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b$ ve $y = \frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b$ seçilirse

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b\right) + \Phi\left(\frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b\right) \right] \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.10) ifadesi $\kappa^{\alpha-1} \left(u(b) - u \left(\frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b \right) \right)^k$ ile çarpılır ve $[0, 1]$ üzerinde κ 'ye göre integral alınır

$$\begin{aligned}
& \Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u(b) - u \left(\frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b \right) \right)^k d\kappa \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u(b) - u \left(\frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b \right) \right)^k \Phi \left(\frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b \right) d\kappa \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u(b) - u \left(\frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b \right) \right)^k \Phi \left(\frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b \right) d\kappa \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u(b) - u \left(\frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b \right) \right)^k d\kappa
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $y = \frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b$ değişken değişikliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(\frac{2}{b-a} \right)^\alpha \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-y)^{\alpha-1} (u(b) - u(y))^k dy \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{b-a} \right)^\alpha (IR) \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-y)^{\alpha-1} (u(b) - u(y))^k \Phi(y) dy \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{2}{b-a} \right)^\alpha (IR) \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-y)^{\alpha-1} (u(b) - u(y))^k \Phi(a+b-y) dy \right] \\
& = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{b-a} \right)^\alpha (IR) \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-y)^{\alpha-1} (u(b) - u(y))^k [\Phi(y) + \Phi(a+b-y)] dy \\
& \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \left(\frac{2}{b-a} \right)^\alpha \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-y)^{\alpha-1} (u(b) - u(y))^k dy.
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Buradan

$$\Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) \mathfrak{I}_{\frac{a+b}{2}+,u}^{\alpha,k}(1)(b) \supseteq \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{\frac{a+b}{2}+,u}^{\alpha,k}(\Psi)(b) \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \mathfrak{I}_{\frac{a+b}{2}+,u}^{\alpha,k}(1)(b) \quad (3.11)$$

ifadesi yazılabilir. Benzer bir şekilde, (3.10) ifadesini $\kappa^{\alpha-1} \left(u \left(\frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b \right) - u(a) \right)^k$ ile çarpar ve $[0, 1]$ üzerinde κ 'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u \left(\frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b \right) - u(a) \right)^k d\kappa \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u \left(\frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b \right) - u(a) \right)^k \Phi \left(\frac{\kappa}{2}a + \frac{2-\kappa}{2}b \right) d\kappa \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u \left(\frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b \right) - u(a) \right)^k \Phi \left(\frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b \right) d\kappa \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u \left(\frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b \right) - u(a) \right)^k d\kappa
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur. $y = \frac{2-\kappa}{2}a + \frac{\kappa}{2}b$ değişken değişikliği yardımıyla

$$\Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) \mathfrak{T}_{\frac{a+b}{2}-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \supseteq \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{\frac{a+b}{2}-,u}^{\alpha,k}(\Psi)(a) \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \mathfrak{T}_{\frac{a+b}{2}-,u}^{\alpha,k}(1)(a) \quad (3.12)$$

şeklinde düzenlenir. (3.11) ve (3.12) birleştirilirse istenilen ispat elde edilmiş olur. $\square$

Sonuç 3.10. Teorem 3.9 ifadesinde $k = 0$ kabul edilirse (2.27) eşitsizliğine eşit olacaktır.

Sonuç 3.11. Teorem 3.9 koşulları altında $\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u(\kappa) = \kappa - \beta$ olarak incelenirse

$$\Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) \supseteq \frac{2^{\alpha+k-1} \Gamma(\alpha+k+1)}{(b-a)^{\alpha+k}} \left[\mathcal{J}_{\frac{a+b}{2}+}^{\alpha+k} \Phi(b) + \mathcal{J}_{\frac{a+b}{2}-}^{\alpha+k} \Phi(a) \right] \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}$$

elde edilir.

Teorem 3.12. Teorem 3.5 şartları varsayılın. Ayrıca, $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\Psi \in \mathcal{IR}_{([a,b])}$ olmak üzere genelleştirilmiş kesirli integraller için Hermite–Hadamard eşitsizlikleri

$$\begin{aligned}
& \Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1) \left(\frac{a+b}{2} \right) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[\mathfrak{L}_{a+,u}^{\alpha,k}(\Psi) \left(\frac{a+b}{2} \right) + \mathfrak{L}_{b-,u}^{\alpha,k}(\Psi) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \\
& \supseteq \left[\mathfrak{T}_{a+,u}^{\alpha,k}(1) \left(\frac{a+b}{2} \right) + \mathfrak{T}_{b-,u}^{\alpha,k}(1) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

İspat. (3.2) eşitsizliklerinde $\kappa \in [0, 1]$ için $x = \frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b$ ve $y = \frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b$ değişken değişikliği yapılırsa

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{1}{2}\Phi\left[\left(\frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b\right) + \Phi\left(\frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b\right)\right] \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \quad (3.13)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.13) eşitsizliğinin iki tarafı da $\kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u\left(\frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b\right)\right)^k$ ifadesi ile çarpılır ve 0'dan 1'e kadar κ 'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u\left(\frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b\right)\right)^k d\kappa \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u\left(\frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b\right)\right)^k \Phi\left(\frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b\right) d\kappa \right. \\ & \quad \left. + (IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u\left(\frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b\right)\right)^k \Phi\left(\frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b\right) d\kappa \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u\left(\frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b\right)\right)^k d\kappa \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $z = \frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b$ değişken değişikliği aracılığıyla

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - z\right)^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u(z)\right)^k dz \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha (IR) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - z\right)^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u(z)\right)^k \Phi(z) dz \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha (IR) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - z\right)^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u(z)\right)^k \Phi(a+b-z) dz \right] \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha (IR) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - z\right)^{\alpha-1} \\ & \quad \times \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u(z)\right)^k [\Phi(z) + \Phi(a+b-z)] dz \end{aligned}$$

$$\supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \left(\frac{2}{b-a} \right)^\alpha \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - z \right)^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u(z) \right)^k dz$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathfrak{T}_{a^+,u}^{\alpha,k}(1)\left(\frac{a+b}{2}\right) &\supseteq \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{a^+,u}^{\alpha,k}(\Psi)\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \mathfrak{T}_{a^+,u}^{\alpha,k}(1)\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

ifadesi açıktır. Benzer olarak, (3.13) ifadesinin her iki tarafı $\kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b\right) - u\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^k$ ile çarpılır ve $[0, 1]$ üzerinde κ 'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b\right) - u\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^k d\kappa \\ &\supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b\right) - u\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^k \Phi\left(\frac{1+\kappa}{2}a + \frac{1-\kappa}{2}b\right) d\kappa \right. \\ &\quad \left. + (IR) \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b\right) - u\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^k \Phi\left(\frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b\right) d\kappa \right] \\ &\supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} \left(u\left(\frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b\right) - u\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^k d\kappa \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $z = \frac{1-\kappa}{2}a + \frac{1+\kappa}{2}b$ değişken değişikliği düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathfrak{T}_{b^-,u}^{\alpha,k}(1)\left(\frac{a+b}{2}\right) &\supseteq \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{b^-,u}^{\alpha,k}(\Psi)\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} \mathfrak{T}_{b^-,u}^{\alpha,k}(1)\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

ifadesini yazmak mümkün olacaktır. (3.14) ve (3.15) toplanırsa, ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 3.13. Teorem 3.12 koşulları altında $k = 0$ seçilirse, (2.28) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.14. Eğer $\beta \in \mathbb{R}$ için Teorem 3.12 ifadesinde $u(\kappa) = \kappa - \beta$ şeklinde ele alınırsa

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq \frac{2^{\alpha+k-1}\Gamma(\alpha+k+1)}{(b-a)^{\alpha+k}} \left[\mathcal{J}_{a+}^{\alpha+k} \Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) + \mathcal{J}_{b-}^{\alpha+k} \Phi \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \\
&\supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.



4. İKİ DEĞİŞKENLİ ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Riemann-Liouville, Sarıkaya ve fonksiyona göre kesirli integraller üç alt bölümde incelenecektir. Bu alt bölümlerde gerekli tanımlar verilir ve bazı Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilir.

4.1. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİNİ İÇEREN HERMİTE–HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu alt bölümde, Riemann-Liouville kesirli integrallerinin uygulamaları yardımıyla aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Hermite–Hadamard integral eşitsizlikleri oluşturulur. Ayrıca, aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonların sonuçları için Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler verilir. Öncelikle iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri tanımlansın.

Tanım 4.1. $\Phi \in L_1(\Delta)$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_a^\kappa \int_c^y (\kappa - \kappa)^{\alpha-1} (y-s)^{\beta-1} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa > a, y > c,$$

$$\mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_a^\kappa \int_y^d (\kappa - \kappa)^{\alpha-1} (s-y)^{\beta-1} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa > a, y < d,$$

$$\mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_\kappa^b \int_c^y (\kappa - \kappa)^{\alpha-1} (y-s)^{\beta-1} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa < b, y > c,$$

$$\mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(\kappa, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_\kappa^b \int_y^d (\kappa - \kappa)^{\alpha-1} (s-y)^{\beta-1} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa < b, y < d$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.2. Eğer $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ fonksiyonu Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks ve $\Phi(\kappa, s) = [\underline{\Phi}(\kappa, s), \overline{\Phi}(\kappa, s)]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \\
& \quad \times \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b, d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b, c) + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a, d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a, c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{8(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, c) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, d) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{8(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a, d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b, d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a, c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b, c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)}{4}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Φ , Δ üzerinde koordinatlarda aralık değerli konveks fonksiyon olduğundan, $\Omega_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$, $\Omega_y(x) := \Phi(x, y)$ fonksiyonu her $x \in [a, b]$ için $[a, b]$ üzerinde aralık değerli konveks fonksiyon olur. Bu durumda (2.25) ifadesinden

$$\Omega_y\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Omega_y(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Omega_y(a)] \supseteq \frac{\Omega_y(a) + \Omega_y(b)}{2}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) &\supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, y) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, y)] \\ &\supseteq \frac{\Phi(a, y) + \Phi(b, y)}{2}\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Aralık değerli integral kullanılarak

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) & \\ &\supseteq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \left[(IR) \int_a^b (b-\kappa)^{\alpha-1} \Phi(\kappa, y) d\kappa + (IR) \int_a^b (\kappa-a)^{\alpha-1} \Phi(\kappa, y) d\kappa \right] \\ &\supseteq \frac{\Phi(a, y) + \Phi(b, y)}{2}\end{aligned} \tag{4.2}$$

şekinde ifade edilebilir. (4.2) eşitsizliğinin her tarafı $\frac{\beta(d-y)^{\beta-1}}{2(d-c)^\beta}$ çarpılır ve daha sonra elde edilen her tarafı $[c, d]$ üzerinde y ye göre integrali alınır

$$\begin{aligned}&\frac{\beta}{2(d-c)^\beta} (IR) \int_c^d \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) (d-y)^{\beta-1} dy \\ &\supseteq (IR) \int_a^b \int_c^d (b-\kappa)^{\alpha-1} (d-y)^{\beta-1} \Phi(\kappa, y) dy d\kappa \\ &\quad + (IR) \int_a^b \int_c^d (\kappa-a)^{\alpha-1} (d-y)^{\beta-1} \Phi(\kappa, y) dy d\kappa \\ &\supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{\beta}{2(d-c)^\beta} (IR) \int_c^d \Phi(a, y) (d-y)^{\beta-1} dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{2(d-c)^\beta} (IR) \int_c^d \Phi(b, y) (d-y)^{\beta-1} dy \right]\end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Tekrar, (4.2) eşitsizliğin her tarafı $\frac{\beta(y-c)^{\beta-1}}{2(d-c)^\beta}$ çarpılır ve $[c, d]$ üzerinde y ye göre integrali alınır

$$\frac{\beta}{2(d-c)^\beta} (IR) \int_c^d \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) (y-c)^{\beta-1} dy \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq \frac{\alpha\beta}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[(IR) \int_a^b \int_c^d (b-\kappa)^{\alpha-1} (y-c)^{\beta-1} \Phi(\kappa, y) dy d\kappa \right. \\
&\quad \left. + (IR) \int_a^b \int_c^d (\kappa-a)^{\alpha-1} (y-c)^{\beta-1} \Phi(\kappa, y) dy d\kappa \right] \\
&\supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{\beta}{2(d-c)^\beta} (IR) \int_c^d \Phi(a, y) (y-c)^{\beta-1} dy \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta}{2(d-c)^\beta} (IR) \int_c^d \Phi(b, y) (y-c)^{\beta-1} dy \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Dahası, (4.3) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \\
&\supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b, d) + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a, d) \right] \\
&\supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a, d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b, d) \right].
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.4) eşitsizliği ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \\
&\supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b, c) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a, c) \right] \\
&\supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a, c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b, c) \right].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Benzer olarak $y \in [a, b]$ için, $H_{\varkappa} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$, $H_{\varkappa}(y) := \Phi(\varkappa, y)$, $[c, d]$ üzerinde aralık değerli konveks bir fonksiyon olur ki, buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \\
&\supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b, d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b, c) \right] \\
&\supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, c) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, d) \right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d) \right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitsizlikleri yazılır. (4.5), (4.6), (4.7) ve (4.8) eşitsizlikleri toplanırsa, Teorem 4.2 ifadesinin ikinci, üçüncü ve dördüncü eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca (2.25) ifadesinden

$$\begin{aligned}
& \Phi \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi \left(b, \frac{c+d}{2} \right) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \Phi \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi \left(\frac{a+b}{2}, d \right) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi \left(\frac{a+b}{2}, c \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklinde yazılabilir. (4.9) ve (4.10) toplanırsa (4.1) ifadesinin ilk eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \Phi \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi \left(b, \frac{c+d}{2} \right) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi \left(\frac{a+b}{2}, d \right) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi \left(\frac{a+b}{2}, c \right) \right]
\end{aligned}$$

şeklinde ortaya çıkar. Son olarak, (2.25) eşitsizliğinden

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) \right] \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(b,c)}{2}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d) \right] \supseteq \frac{\Phi(a,d) + \Phi(b,d)}{2}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a,d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) \right] \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d)}{2}, \tag{4.13}$$

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \right] \supseteq \frac{\Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{2} \quad (4.14)$$

ifadeleri elde edilir. Eğer (4.11), (4.12), (4.13) ve (4.14) eşitsizlikleri toplanıp $\frac{1}{4}$ ile çarpılırsa Teorem 4.2 eşitsizliklerinin son eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{8(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d) \right] \\ & + \frac{\Gamma(\beta+1)}{8(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a,d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilebilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Örnek 4.3. Teorem 4.2 ifadesinde $a = c = 0$ ve $b = d = 1$ olmak üzere $\Phi : \Delta := [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_\mathcal{I}^+$ fonksiyonu $\Phi(\kappa, s) = [\kappa^2 s^2, 6 - \kappa^2 s^2]$ şeklinde tanımlansın. 4.1 eşitsizliklerinin birinci terimi

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) = \left[\frac{1}{16}, \frac{95}{16}\right]$$

elde edilir. (4.1) eşitsizliklerinin ikinci terimi için ise

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\ & + \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\ & = \frac{\alpha}{4} \left[(IR) \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \left[\frac{t^2}{4}, \frac{24-t^2}{4} \right] dt \right. \\ & \quad \left. + (IR) \int_0^1 t^{\alpha-1} \left[\frac{t^2}{4}, \frac{24-t^2}{4} \right] dt \right] \\ & + \frac{\beta}{4} \left[(IR) \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} \left[\frac{t^2}{4}, \frac{24-t^2}{4} \right] dt \right. \\ & \quad \left. + (IR) \int_0^1 t^{\beta-1} \left[\frac{t^2}{4}, \frac{24-t^2}{4} \right] dt \right] \\ & = \frac{\alpha}{16} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{1}{\alpha+2}, \frac{48}{\alpha} - \frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \right\} \\ & + \frac{\beta}{16} \left\{ \left[\frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{1}{\beta+2}, \frac{48}{\beta} - \frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} - \frac{1}{\beta+2} \right] \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir. (4.1) eşitsizliklerinin üçüncü terimi ise

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \\
& \times \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c) + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c) \right] \\
& = \frac{\alpha\beta}{4} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} [t^2 s^2, 6-t^2 s^2] ds dt \right. \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} s^{\beta-1} [t^2 s^2, 6-t^2 s^2] ds dt \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} [t^2 s^2, 6-t^2 s^2] ds dt \\
& \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 t^{\alpha-1} s^{\beta-1} [t^2 s^2, 6-t^2 s^2] ds dt \right\} \\
& = \frac{\alpha\beta}{4} [A_1(\alpha, \beta), A_2(\alpha, \beta)].
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
A_1(\alpha, \beta) &= \frac{4}{\alpha\beta(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+2)} \\
&+ \frac{2}{(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{1}{(\alpha+2)(\beta+2)},
\end{aligned}$$

$$A_2(\alpha, \beta) = \frac{24}{\alpha\beta} - A_1(\alpha, \beta)$$

şeklindedir. (4.1) eşitsizliklerinin dördüncü terimi

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{8(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d)] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{8(d-c)^\beta} [\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a,d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c)] \\
& = \frac{\alpha}{8} \left[\frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{1}{\alpha+2}, \frac{24}{\alpha} - \frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \\
& + \frac{\beta}{8} \left[\frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{1}{\beta+2}, \frac{24}{\beta} - \frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} - \frac{1}{\beta+2} \right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. (4.1) eşitsizliklerinin beşinci terimi için

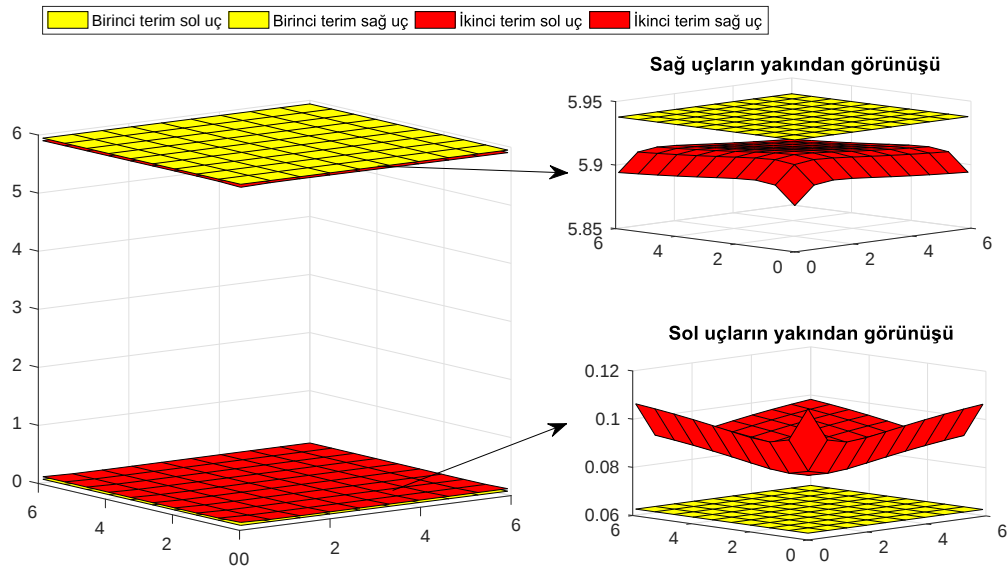
$$\frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4} = \frac{1}{4} [1, 23]$$

elde edilir. Sonuç olarak

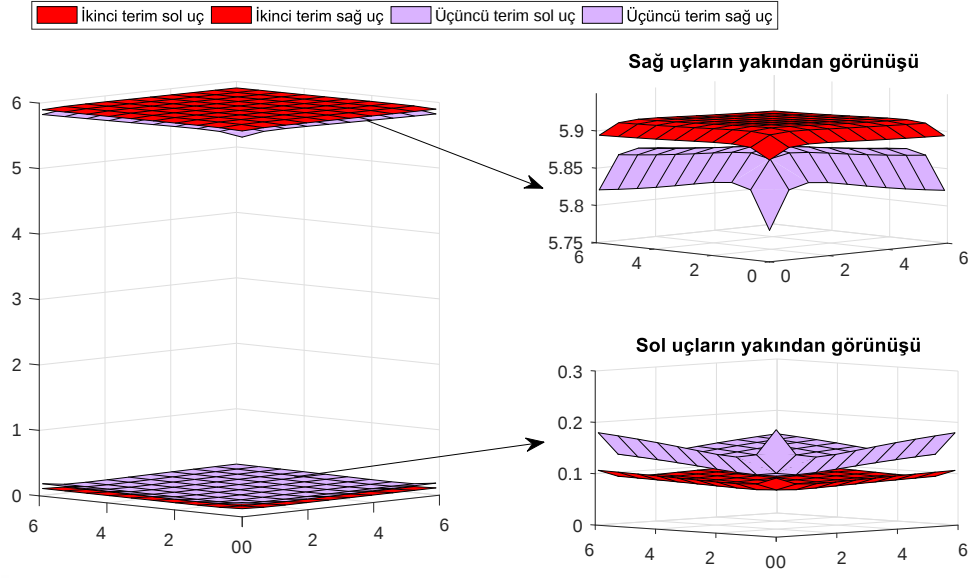
$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} [1, 95] \\ & \supseteq \left[\frac{\alpha}{16} \left(\frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{1}{\alpha+2} \right) + \frac{\beta}{16} \left(\frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{1}{\beta+2} \right), \right. \\ & \quad \left. \frac{\alpha}{16} \left(\frac{48}{\alpha} - \frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha+2} \right) + \frac{\beta}{16} \left(\frac{48}{\beta} - \frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} - \frac{1}{\beta+2} \right) \right] \\ & \supseteq \frac{\alpha\beta}{4} [A_1(\alpha, \beta), A_2(\alpha, \beta)] \\ & \supseteq \left[\frac{\alpha}{8} \left(\frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{1}{\alpha+2} \right) + \frac{\beta}{8} \left(\frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{1}{\beta+2} \right), \right. \\ & \quad \left. \frac{\alpha}{8} \left(\frac{24}{\alpha} - \frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) + \frac{\beta}{8} \left(\frac{24}{\beta} - \frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} - \frac{1}{\beta+2} \right) \right] \\ & \supseteq \frac{1}{4} [1, 23] \end{aligned} \tag{4.15}$$

olduğu görülür.

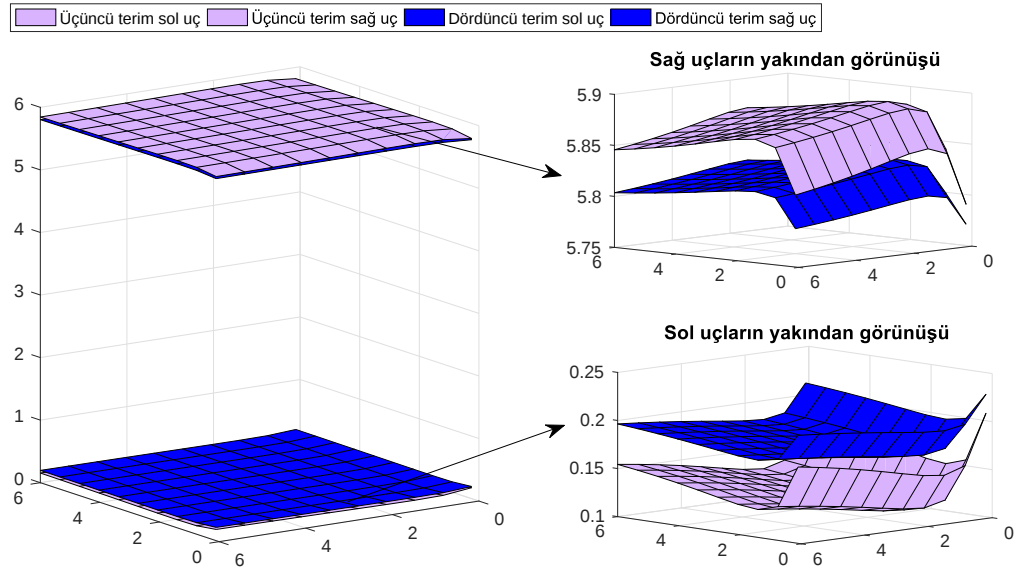
Örnekte elde ettiğimiz eşitsizliklerin doğruluğu, MATLAB programından faydalanarak hesaplanan Şekil 4.1-Şekil 4.4’de aşağıdaki gibi gösterilmiştir.



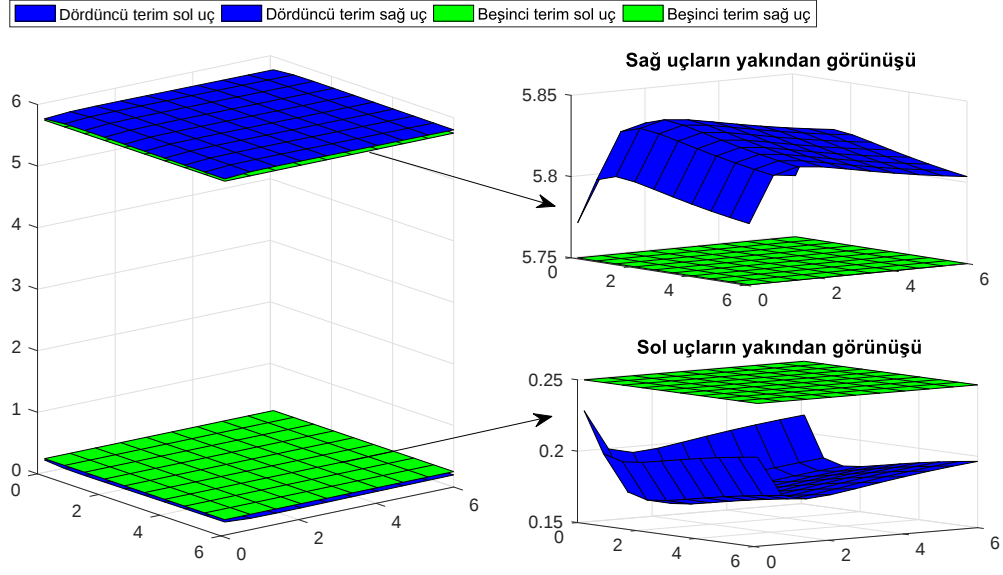
Şekil 4.1. (4.15) eşitsizliğinin birinci terim ve ikinci teriminin karşılaştırılması



Şekil 4.2. (4.15) eşitsizliğinin ikinci terim ve üçüncü teriminin karşılaştırılması



Şekil 4.3. (4.15) eşitsizliğinin üçüncü terim ve dördüncü teriminin karşılaştırılması



Şekil 4.4. (4.15) eşitsizliğinin dördüncü terim ve beşinci teriminin karşılaştırılması

Sonuç 4.4. Eğer Teorem 4.2 ifadesinde $\alpha = \beta = 1$ olarak düşünülürse (2.35) eşitsizlikleriyle eşit olacaktır.

Teorem 4.5. $\Phi(\kappa, s) = [\underline{\Phi}(\kappa, s), \overline{\Phi}(\kappa, s)]$ ve $\Omega(\kappa, s) = [\underline{\Omega}(\kappa, s), \overline{\Omega}(\kappa, s)]$ olmak üzere, ayrıca $K(a, b, c, d)$, $L(a, b, c, d)$, $M(a, b, c, d)$ ve $N(a, b, c, d)$ (2.36) ifadesinde tanımlandığı gibi olsun. $\Phi, \Omega : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ fonksiyonları Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d)\Omega(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c)\Omega(b,c) \right. \\
 & \quad \left. + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d)\Omega(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c)\Omega(a,c) \right] \\
 & \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) K(a,b,c,d) \\
 & \quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} L(a,b,c,d) \\
 & \quad + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) M(a,b,c,d) \\
 & \quad + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} N(a,b,c,d)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Φ ve Ω , Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonlar olduğundan, $\Phi_{\varkappa} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ ve $\Omega_{\varkappa} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ olmak üzere $\Phi_{\varkappa}(y) = \Phi(\varkappa, y)$ ve $\Omega_{\varkappa}(y) = \Omega(\varkappa, y)$ şeklinde tanımlanan $\Phi_{\varkappa}(y)$ ve $\Omega_{\varkappa}(y)$ fonksiyonları her $\varkappa \in [a, b]$ için $[c, d]$ üzerinde

konveks fonksiyonlar olur. $\Phi_{\varkappa}(y)$ ve $\Omega_{\varkappa}(y)$ konveks fonksiyonları için (2.29) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^{\beta}} \left[\mathcal{J}_{c+}^{\beta} \Phi_{\varkappa}(d) \Omega_{\varkappa}(d) + \mathcal{J}_{d-}^{\beta} \Phi_{\varkappa}(c) \Omega_{\varkappa}(c) \right] \\ & \supseteq \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\Phi_{\varkappa}(c) \Omega_{\varkappa}(c) + \Phi_{\varkappa}(d) \Omega_{\varkappa}(d)] \\ & \quad + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\Phi_{\varkappa}(c) \Omega_{\varkappa}(d) + \Phi_{\varkappa}(d) \Omega_{\varkappa}(c)] \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{2(d-c)^{\beta}} \left[(IR) \int_c^d (d-y)^{\beta-1} \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) dy + (IR) \int_c^d (y-a)^{\beta-1} \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) dy \right] \\ & \supseteq \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\Phi(\varkappa, c) \Omega(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, d)] \\ & \quad + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\Phi(\varkappa, c) \Omega(\varkappa, d) + \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, c)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklinde açıkça yazılabilir. (4.18) eşitsizliği $\frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} (b-\varkappa)^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve $[a, b]$ üzerinde $\varkappa$ 'e göre integralenirse

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^{\alpha} (d-c)^{\beta}} \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b, d) \Omega(b, d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b, c) \Omega(b, c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(b, c) \Omega(b, c) + \mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(b, d) \Omega(b, d)] \\ & \quad + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(b, c) \Omega(b, d) + \mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(b, d) \Omega(b, c)] \end{aligned} \quad (4.19)$$

ifadesi elde edilir. Benzer bir şekilde, (4.18) eşitsizliği $\frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} (\varkappa-a)^{\alpha-1}$ ifadesiyle çarpılır ve $[a, b]$ üzerinde $\varkappa$ 'e göre integralenirse

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^{\alpha} (d-c)^{\beta}} \left[\mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a, d) \Omega(a, d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a, c) \Omega(a, c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(a, c) \Omega(a, c) + \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(a, d) \Omega(a, d)] \\ & \quad + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(a, c) \Omega(a, d) + \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(a, d) \Omega(a, c)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

eşitsizliği bulunur. (4.19) ve (4.20) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \\
& \times \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d)\Omega(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c)\Omega(b,c) \right. \\
& \left. + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d)\Omega(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c)\Omega(a,c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c)\Omega(b,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c)\Omega(a,c)] \\
& + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d)\Omega(b,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d)\Omega(a,d)] \\
& + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c)\Omega(b,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c)\Omega(a,d)] \\
& + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d)\Omega(b,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d)\Omega(a,c)]
\end{aligned} \tag{4.21}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (4.21) eşitsizliğinin sağ tarafının her bir terimi için (2.29) ifadesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c)\Omega(b,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c)\Omega(a,c)] \\
& \supseteq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) [\Phi(a,c)\Omega(a,c) + \Phi(b,c)\Omega(b,c)] \\
& + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [\Phi(a,c)\Omega(b,c) + \Phi(b,c)\Omega(a,c)],
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d)\Omega(b,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d)\Omega(a,d)] \\
& \supseteq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) [\Phi(a,d)\Omega(a,d) + \Phi(b,d)\Omega(b,d)] \\
& + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [\Phi(a,d)\Omega(b,d) + \Phi(b,d)\Omega(a,d)],
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c)\Omega(b,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c)\Omega(a,d)] \\
& \supseteq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) [\Phi(a,c)\Omega(a,d) + \Phi(b,c)\Omega(b,d)] \\
& + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [\Phi(a,c)\Omega(b,d) + \Phi(b,c)\Omega(a,d)]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d)\Omega(b,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d)\Omega(a,c)] \\
& \supseteq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) [\Phi(a,d)\Omega(a,c) + \Phi(b,d)\Omega(b,c)] \\
& \quad + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [\Phi(a,d)\Omega(b,c) + \Phi(b,d)\Omega(a,c)]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.22)'den (4.25)'e kadar olan tüm ifadeler (4.21) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, (4.16) eşitsizliğinde istenen sonuca varılır. $\square$

Sonuç 4.6. Teorem 4.5'te verilen eşitsizlikte $\alpha = \beta = 1$ olarak incelenirse (2.37) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.7. Teorem 4.5 ifadesinde her $(\varkappa, y) \in \Delta$ için $\Omega(\varkappa, y) = [1, 1]$ olarak alınır

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \\
& \quad \times [\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c) + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c)] \\
& \supseteq \frac{1}{4} [\Phi(a,c) + \Phi(b,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,d)]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Teorem 4.8. $K(a,b,c,d)$, $L(a,b,c,d)$, $M(a,b,c,d)$ ve $N(a,b,c,d)$ ifadeleri (2.36) ifadesinde verildiği gibi ve $\Phi, \Omega : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_T^+$ fonksiyonları Teorem 4.5 koşullarında belirtilildiği gibi alınır aşağıdaki Hermite–Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& 4\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} [\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d)\Omega(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c)\Omega(b,c) \\
& \quad + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d)\Omega(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c)\Omega(a,c)] \\
& \quad + \left[\frac{\alpha}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \right] K(a,b,c,d) \\
& \quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right] L(a,b,c,d) \\
& \quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right] M(a,b,c,d) \\
& \quad + \left[\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right] N(a,b,c,d).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

İspat. Φ ve Ω , Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonlar olmak üzere

(2.30) eşitsizliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \left[(IR) \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} \Phi\left(x, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} \Phi\left(x, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \right] \\
& \quad + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \\
& \quad \times \left[\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\beta}{2(d-c)^\beta} \left[(IR) \int_c^d (d-y)^{\beta-1} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_c^d (y-c)^{\beta-1} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\
& \quad + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \left[\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \\
& \quad \times \left[\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.27) ve (4.28) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
& 8\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \left[\int_a^b (b-x)^{\alpha-1} 2\Phi\left(x, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \right.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
& + (IR) \int_a^b (\varkappa - a)^{\alpha-1} 2\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \Bigg] \\
& + \frac{\beta}{2(d-c)^\beta} \left[(IR) \int_c^d (d-y)^{\beta-1} 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right. \\
& \left. + \int_c^d (y-c)^{\beta-1} 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\
& + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \\
& \times \left[2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + 2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \\
& \times \left[2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + 2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \\
& \times \left[2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \\
& \times \left[2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\Phi_\varkappa : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ ve $\Omega_\varkappa : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ fonksiyonları $\Phi_\varkappa(y) = \Phi(\varkappa, y)$ ve $\Omega_\varkappa(y) = \Omega(\varkappa, y)$ şeklinde tanımlanan aralık değerli konveks fonksiyonlarından ve (2.30) eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a, d) \Omega(a, d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a, c) \Omega(a, c) \right] \\
& + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\Phi(a, c) \Omega(a, c) + \Phi(a, d) \Omega(a, d)] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\Phi(a, c) \Omega(a, d) + \Phi(a, d) \Omega(a, c)],
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
& \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) \Omega(b,d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \Omega(b,c) \right] \\
& + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\Phi(b,c) \Omega(b,c) + \Phi(b,d) \Omega(b,d)] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\Phi(b,c) \Omega(b,d) + \Phi(b,d) \Omega(b,c)], \\
\\
& 2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a,d) \Omega(b,d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) \Omega(b,c) \right] \\
& + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\Phi(a,c) \Omega(b,c) + \Phi(a,d) \Omega(b,d)] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\Phi(a,c) \Omega(b,d) + \Phi(a,d) \Omega(b,c)]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) \Omega(a,d) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \Omega(a,c) \right] \\
& + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} [\Phi(b,c) \Omega(a,c) + \Phi(b,d) \Omega(a,d)] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) [\Phi(b,c) \Omega(a,d) + \Phi(b,d) \Omega(a,c)]
\end{aligned} \tag{4.33}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde $\Phi_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_T^+$, $\Phi_y(\varkappa) = \Phi(\varkappa, y)$ ve $\Omega_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_T^+$, $\Omega_y(\varkappa) = \Omega(\varkappa, y)$ fonksiyonları aralık değerli konveks fonksiyonların yardımıyla ve (2.30) eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c) \Omega(b,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) \Omega(a,c) \right] \\
& + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [\Phi(a,c) \Omega(a,c) + \Phi(b,c) \Omega(b,c)] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) [\Phi(a,c) \Omega(b,c) + \Phi(b,c) \Omega(a,c)],
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, d) \Omega(b, d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, d) \Omega(a, d)] \\
& \quad + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [\Phi(a, d) \Omega(a, d) + \Phi(b, d) \Omega(b, d)] \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right) [\Phi(a, d) \Omega(b, d) + \Phi(b, d) \Omega(a, d)],
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, c) \Omega(b, d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, c) \Omega(a, d)] \\
& \quad + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [\Phi(a, c) \Omega(a, d) + \Phi(b, c) \Omega(b, d)] \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right) [\Phi(a, c) \Omega(b, d) + \Phi(b, c) \Omega(a, d)],
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, d) \Omega(b, c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, d) \Omega(a, c)] \\
& \quad + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [\Phi(a, d) \Omega(a, c) + \Phi(b, d) \Omega(b, c)] \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right) [\Phi(a, d) \Omega(b, c) + \Phi(b, d) \Omega(a, c)]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer yandan, (2.30) eşitsizliğinin uygulanılması ile

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} (IR) \int_a^b (b-\varkappa)^{\alpha-1} 2\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \\
& \supseteq \frac{\alpha\beta}{4(b-a)^\alpha (d-c)^\beta} \left[(IR) \int_a^b \int_c^d (b-\varkappa)^{\alpha-1} (d-y)^{\beta-1} \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) dy d\varkappa \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \int_c^d (b-\varkappa)^{\alpha-1} (y-c)^{\beta-1} \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) dy d\varkappa \right] \\
& \quad + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
& \times (IR) \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} [\Phi(x, c) \Omega(x, c) + \Phi(x, d) \Omega(x, d)] dx \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \\
& \times (IR) \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} [\Phi(x, c) \Omega(x, d) + \Phi(x, d) \Omega(x, c)] dx \\
& = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b, d) \Omega(b, d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b, c) \Omega(b, c) \right] \\
& + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, c) \Omega(b, c) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, d) \Omega(b, d) \right] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \\
& \times \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, c) \Omega(b, d) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b, d) \Omega(b, c) \right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} (IR) \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} 2\Phi\left(x, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a, d) \Omega(a, d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a, c) \Omega(a, c) \right] \\
& + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, c) \Omega(a, c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, d) \Omega(a, d) \right] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, c) \Omega(a, d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a, d) \Omega(a, c) \right],
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta}{2(d-c)^\beta} (IR) \int_c^d (d-y)^{\beta-1} 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b, d) \Omega(b, d) + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a, d) \Omega(a, d) \right] \\
& + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a, d) \Omega(a, d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b, d) \Omega(b, d) \right] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a, d) \Omega(b, d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b, d) \Omega(a, d) \right]
\end{aligned} \tag{4.39}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta}{2(d-c)^\beta} \int_c^d (y-c)^{\beta-1} 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c) \Omega(b,c) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c) \Omega(a,c) \right] \\
& + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) \Omega(a,c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \Omega(b,c) \right] \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) \Omega(b,c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \Omega(a,c) \right]
\end{aligned} \tag{4.40}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Eğer (4.30) ifadesinden (4.40) ifadesine kadar olan ifadeler (4.29) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& 8\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d) \Omega(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c) \Omega(b,c) \right. \\
& + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d) \Omega(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c) \Omega(a,c) \left. \right] \\
& + \frac{2\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a,d) \Omega(a,d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) \Omega(b,d) \right] \right. \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) \Omega(a,c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \Omega(b,c) \right] \left. \right\} \\
& + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \\
& \times \left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a,d) \Omega(b,d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) \Omega(a,d) \right] \right. \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) \Omega(b,c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \Omega(a,c) \right] \left. \right\} \\
& + \frac{2\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c) \Omega(b,c) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d) \Omega(b,d) \right] \right. \\
& + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) \Omega(a,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d) \Omega(a,d) \right] \left. \right\} \\
& + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \\
& \times \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c) \Omega(b,d) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d) \Omega(b,c) \right] \right. \\
& + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) \Omega(a,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d) \Omega(a,c) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} K(a,b,c,d) \\
& + \frac{2\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) M(a,b,c,d) \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \frac{2\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} L(a,b,c,d) \\
& + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) N(a,b,c,d)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca (2.29) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a,d) \Omega(a,d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) \Omega(b,d) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) \Omega(a,c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \Omega(b,c) \right] \\
& \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) K(a,b,c,d) + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} M(a,b,c,d),
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(a,d) \Omega(b,d) + \mathcal{J}_{c+}^\beta \Phi(b,d) \Omega(a,d) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(a,c) \Omega(b,c) + \mathcal{J}_{d-}^\beta \Phi(b,c) \Omega(a,c) \right] \\
& \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) L(a,b,c,d) + \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} N(a,b,c,d),
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c) \Omega(b,c) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d) \Omega(b,d) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) \Omega(a,c) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d) \Omega(a,d) \right] \\
& \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) K(a,b,c,d) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} L(a,b,c,d)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,c) \Omega(b,d) + \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b,d) \Omega(b,c) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[\mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,c) \Omega(a,d) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a,d) \Omega(a,c) \right] \\
& \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) M(a,b,c,d) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} N(a,b,c,d)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

eşitsizlikleri yazılır. Eğer (4.42) eşitsizliğinden (4.45) eşitsizliğine kadar olan tüm eşitsizlikler (4.41) ifadesinde yerine konulursa ve elde edilen eşitsizliğin her tarafı 2'ye bölünürse (4.26) ifadesinde belirtilen sonuca ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.9. Teorem 4.8'de verilen eşitsizlikte içinde α ve β , 1'e eşit olacak şekilde seçilirse (2.38) eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 4.10. Teorem 4.8 ifadesinde $\Omega(\varkappa, y)$, $[1, 1]$ aralığı olarak kabul edilirse

$$\begin{aligned} & 4\phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \\ & \quad \times \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c) + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c) \right] \\ & \quad + \frac{3}{4} [\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)] \end{aligned}$$

eşitsizliği görülebilir.

4.2. SARIKAYA KESİRLİ İNTEGRALLERİNİ İÇEREN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integrallerin tanımları verilir. Ayrıca bu tanımlardan yararlanılarak koordinatlarda aralık değerli konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilir. Bölüm boyunca $\Phi(\varkappa, y) = [\underline{\Phi}(\varkappa, y), \overline{\Phi}(\varkappa, y)]$ ve $\Omega(\varkappa, y) = [\underline{\Omega}(\varkappa, y), \overline{\Omega}(\varkappa, y)]$ şeklinde kullanılacaktır.

Tanım 4.11. $\Phi \in \mathcal{IR}_{([a,b] \times [c,d])}$ fonksiyonu verilsin. Aralık değerli fonksiyonlar için Sarıkaya kesirli integraller

$$\begin{aligned} {}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(\varkappa, y) &= (IR) \int_a^\varkappa \int_c^y \frac{\varphi(\varkappa - \kappa)}{\varkappa - \kappa} \frac{\psi(y-s)}{y-s} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \varkappa > a, y > c, \\ {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(\varkappa, y) &= (IR) \int_a^\varkappa \int_y^d \frac{\varphi(\varkappa - \kappa)}{\varkappa - \kappa} \frac{\psi(s-y)}{s-y} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \varkappa > a, y < d, \end{aligned}$$

$${}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(\varkappa,y) = (IR) \int_{\varkappa}^b \int_c^y \frac{\varphi(\kappa-\varkappa)}{\kappa-\varkappa} \frac{\psi(y-s)}{y-s} \Phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y > c$$

ve

$${}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(\varkappa,y) = (IR) \int_{\varkappa}^b \int_y^d \frac{\varphi(\kappa-\varkappa)}{\kappa-\varkappa} \frac{\psi(s-y)}{s-y} \Phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y < d$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\varphi, \psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları, $\int_0^1 \frac{\varphi(\kappa)}{\kappa} d\kappa < \infty$ ve $\int_0^1 \frac{\psi(s)}{s} ds < \infty$ şartlarını sağlar.

Teorem 4.12. $\Phi(\varkappa, y) = [\underline{\Phi}(\varkappa, y), \overline{\Phi}(\varkappa, y)]$ fonksiyonu için $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, Δ üzerinde koordinatlarda aralık değerli konveks, $a < b$, $c < d$ ve $\Phi \in L_1(\Delta)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)} \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{4\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\varphi}\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\ & \supseteq \frac{1}{\Lambda(1)\Delta(1)} \\ & \quad \times \left[{}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,c) \right. \\ & \quad \left. + {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,c) \right] \\ & \supseteq \frac{1}{8\Lambda(1)} \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d) \right] \\ & \quad + \frac{1}{8\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\varphi}\Phi(a,d) + {}_{c+}I_{\varphi}\Phi(b,d) + {}_{d-}I_{\varphi}\Phi(a,c) + {}_{d-}I_{\varphi}\Phi(b,c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4} \end{aligned} \tag{4.46}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat. $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ aralık değerli koordinatlarda konveks bir fonksiyon olduğundan, her $y \in [c, d]$ için $\Omega_{\varkappa} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ fonksiyonu $\Omega_{\varkappa}(y) = \Phi(\varkappa, y)$ olacak şekilde $\Omega_{\varkappa}(y)$ aralık değerli fonksiyonu $[c, d]$ üzerinde konvekstir. (2.31) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\Omega_{\varkappa}\left(\frac{c+d}{2}\right) \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\varphi}\Omega_{\varkappa}(d) + {}_{d-}I_{\varphi}\Omega_{\varkappa}(c) \right] \supseteq \frac{\Omega_{\varkappa}(c) + \Omega_{\varkappa}(d)}{2}$$

eşitsizliği yazılır. O halde, her $\varkappa \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[(IR) \int_c^d \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(\varkappa, y) dy + (IR) \int_c^d \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi(\varkappa, y) dy \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d)}{2}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. (4.47) eşitsizliğinin her iki tarafı sırasıyla $\frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa}$ ve $\frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a}$ çarpılır ve $[a, b]$ üzerinde $\varkappa$ 'e göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& (IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \\
& \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[(IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(\varkappa, y) d\varkappa dy \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi(\varkappa, y) d\varkappa dy \right] \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \Phi(\varkappa, c) d\varkappa + (IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \Phi(\varkappa, d) d\varkappa \right]
\end{aligned} \tag{4.48}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (IR) \int_a^b \frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a} \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \\
& \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[(IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a} \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(\varkappa, y) d\varkappa dy \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a} \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi(\varkappa, y) d\varkappa dy \right] \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a} \Phi(\varkappa, c) d\varkappa + (IR) \int_a^b \frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a} \Phi(\varkappa, d) d\varkappa \right]
\end{aligned} \tag{4.49}$$

eşitsizlikleri bulunur. $\Omega_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, $\Omega_y : \Phi(\varkappa, y)$ fonksiyonu için benzer argümanlar uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& (IR) \int_c^d \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[(IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(\varkappa, y) d\varkappa dy \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a} \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(\varkappa, y) d\varkappa dy \right] \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_c^d \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(a, y) dy + (IR) \int_c^d \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(b, y) dy \right]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (IR) \int_c^d \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[(IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi(\varkappa, y) d\varkappa dy \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(\varkappa, y) d\varkappa dy \right] \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi(a, y) dy + (IR) \int_a^b \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi(b, y) dy \right]
\end{aligned} \tag{4.51}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.48) den (4.51) ifadesine kadar olan ifadeler birleştirilir ise

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Lambda(1)} \left[{}_{a+}I_{\varphi} \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + {}_{b-}I_{\varphi} \Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& + \frac{1}{\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\varphi} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + {}_{d-}I_{\psi} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] (IR) \int_0^1 \frac{\varphi((b-a)\kappa)}{\kappa} d\kappa \\
& \supseteq \frac{1}{\Lambda(1)\Delta(1)} \left[{}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi} \Phi(b, d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi} \Phi(b, c) \right. \\
& \quad \left. + {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi} \Phi(a, d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi} \Phi(a, c) \right] \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_{a+}I_{\varphi} \Phi(b, c) + {}_{a+}I_{\varphi} \Phi(b, d) + {}_{b-}I_{\varphi} \Phi(a, c) + {}_{b-}I_{\varphi} \Phi(a, d) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\Delta(1)} [{}_{c+}I_{\varphi}\Phi(a,d) + {}_{c+}I_{\varphi}\Phi(b,d) + {}_{d-}I_{\varphi}\Phi(a,c) + {}_{d-}I_{\varphi}\Phi(b,c)]$$

ifadesi bulunur. Böylece (4.46) ifadesindeki ikinci ve üçüncü eşitsizliğin ispatı tamamlanır.

(2.31) ifadesinin birinci eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\kappa)}{b-\kappa} \Phi\left(\kappa, \frac{c+d}{2}\right) d\kappa + (IR) \int_a^b \frac{\varphi(\kappa-a)}{\kappa-a} \Phi\left(\kappa, \frac{c+d}{2}\right) d\kappa \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[(IR) \int_c^d \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy + (IR) \int_c^d \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılır. Bu eşitsizliklerin toplamından

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)} \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{4\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\varphi}\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + {}_{d-}I_{\varphi}\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği açığa çıkacaktır. Böylece (4.46) ifadesinin birinci eşitsizliği ispatlanmış olur.

Son olarak, (2.31) ifadesinin ikinci eşitsizliği aracılığıyla

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\kappa)}{b-\kappa} \Phi(\kappa, c) d\kappa + (IR) \int_a^b \frac{\varphi(\kappa-a)}{\kappa-a} \Phi(\kappa, c) d\kappa \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(b, c)}{2}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\Lambda(1)} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\kappa)}{b-\kappa} \Phi(\kappa, d) d\kappa + (IR) \int_a^b \frac{\varphi(\kappa-a)}{\kappa-a} \Phi(\kappa, d) d\kappa \right]$$

$$\supseteq \frac{\Phi(a, d) + \Phi(b, d)}{2},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta(1)} \left[(IR) \int_c^d \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(a, y) dy + (IR) \int_c^d \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi(a, y) dy \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(a, d)}{2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta(1)} \left[(IR) \int_c^d \frac{\varphi(d-y)}{d-y} \Phi(b, y) dy + (IR) \int_c^d \frac{\varphi(y-c)}{y-c} \Phi(b, y) dy \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(b, c) + \Phi(b, d)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Elde edilen bu dört eşitsizliğin toplamından

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\Lambda(1)} \left[{}_{a+}I_{\varphi} \Phi(b, c) + {}_{a+}I_{\varphi} \Phi(b, d) + {}_{b-}I_{\varphi} \Phi(a, c) + {}_{b-}I_{\varphi} \Phi(a, d) \right] \\ & + \frac{1}{8\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\varphi} \Phi(a, d) + {}_{c+}I_{\varphi} \Phi(b, d) + {}_{d-}I_{\varphi} \Phi(a, c) + {}_{d-}I_{\varphi} \Phi(b, c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)}{4} \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Buradan ispat sonlanır. $\square$

Sonuç 4.13. Teorem 4.12 şartları altında $\varphi(\kappa) = \kappa$ ve $\psi(s) = s$ olarak kabul edilirse, (2.35) eşitsizliklerine ulaşılır.

Sonuç 4.14. Teorem 4.12 koşulları kabul edilip $\varphi(\kappa) = \frac{\kappa^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ ve $\psi(s) = \frac{s^{\beta}}{\Gamma(\beta)}$ olarak seçilirse (4.46) eşitsizlikleri (4.1) eşitsizliklerine dönüşür.

Bu kısımda aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonların çarpımı için Sarıkaya kesirli integralleri aracılığıyla Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilir. Bu bölümde kullanılan notasyonlar I_1 ve I_2 aşağıdaki gibidir:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\psi((d-c)s)}{s} (2s^2 - 2s + 1) ds$$

ve

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\psi((d-c)s)}{s} (2s - 2s^2) ds.$$

Teorem 4.15. $\Phi, \Omega : \Delta := [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, Δ üzerinde koordinatlarda aralık değerli konveks fonksiyonlar olsun. $K(a, b, c, d)$, $L(a, b, c, d)$, $M(a, b, c, d)$ ve $N(a, b, c, d)$ (2.36) ifadesinde tanımlandığı gibi, J_1 ve J_2 ise Teorem 2.50 ifadesindeki gibi olmak üzere Sarıkaya kesirli integraller için Hermite–Hadamard tipli eşitsizlik

$${}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) \quad (4.52)$$

$$+ {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,c)\Omega(a,c)$$

$$\supseteq I_1 J_1 K(a, b, c, d) + I_1 J_2 L(a, b, c, d) + I_2 J_1 M(a, b, c, d) + I_2 J_2 N(a, b, c, d)$$

şeklinde dir.

İspat. Φ ve Ω , Δ üzerinde koordinatlarda aralık değerli konveks bir fonksiyon olduğundan her $\varkappa \in [a, b]$ için $\Phi_\varkappa : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, $\Phi_\varkappa(y) = \Phi(\varkappa, y)$ ve $\Omega_\varkappa : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, $\Omega_\varkappa(y) = \Omega(\varkappa, y)$ fonksiyonları, $[c, d]$ üzerinde konvekstir. $\Phi_\varkappa(y)$ ve $\Omega_\varkappa(y)$ konveks fonksiyonları için (2.32) eşitsizliği uygulanırsa

$${}_{c+}I_\psi\Phi_\varkappa(d)\Omega_\varkappa(d) + {}_{d-}I_\psi\Phi_\varkappa(c)\Omega_\varkappa(c) \quad (4.53)$$

$$\supseteq I_1 [\Phi_\varkappa(c)\Omega_\varkappa(c) + \Phi_\varkappa(d)\Omega_\varkappa(d)] + I_2 [\Phi_\varkappa(c)\Omega_\varkappa(d) + \Phi_\varkappa(d)\Omega_\varkappa(c)]$$

eşitsizliği yazılabilir. Açık olarak

$$\left[(IR) \int_c^d \frac{\psi((d-y)s)}{s} \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) dy + (IR) \int_c^d \frac{\psi((y-c)s)}{s} \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) dy \right] \quad (4.54)$$

$$\supseteq I_1 [\Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, d)] + I_2 [\Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, d) + \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, c)]$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.54) eşitsizliği $\frac{\varphi((b-\kappa)\kappa)}{\kappa}$ ifadesiyle çarpılır ve a dan b ye κ 'e göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & {}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) \\ & \supseteq I_1 \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) \right] \\ & \quad + I_2 \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,d) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,c) \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

eşitsizliği bulunur. Benzer bir şekilde (4.54) eşitsizliği $\frac{\varphi((\kappa-a)\kappa)}{\kappa-a}$ ifadesiyle çarpılır ve $[a,b]$ üzerinde κ 'e göre integralenirse

$$\begin{aligned} & {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) \\ & \supseteq I_1 \left[{}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(b,c) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) \right] \\ & \quad + I_2 \left[{}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(a,d) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,c) \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

ifadesi elde edilir. (4.55) ve (4.56) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} & {}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) \\ & \quad + {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) \\ & \supseteq I_1 \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) \right] \\ & \quad + I_1 \left[{}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(b,c) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) \right] \\ & \quad + I_2 \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,d) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,c) \right] \\ & \quad + I_2 \left[{}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(a,d) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,c) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

ifadesi açıktır. (4.57) ifadesinin her bir sağ terimine, (2.32) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) \\ & \supseteq J_1 [\Phi(a,c)\Omega(a,c) + \Phi(b,c)\Omega(b,c)] + J_2 [\Phi(a,c)\Omega(b,c) + \Phi(b,c)\Omega(a,c)], \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} & {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(b,c) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) \\ & \supseteq J_1 [\Phi(a,d)\Omega(a,d) + \Phi(b,d)\Omega(b,d)] + J_2 [\Phi(a,d)\Omega(b,d) + \Phi(b,c)\Omega(a,d)], \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned}
& {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,d) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) \\
& \supseteq J_1 [\Phi(a,c)\Omega(a,d) + \Phi(b,c)\Omega(b,b)] + J_2 [\Phi(a,c)\Omega(b,d) + \Phi(b,c)\Omega(a,d)]
\end{aligned} \tag{4.60}$$

ve

$$\begin{aligned}
& {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(a,d) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,c) \\
& \supseteq J_1 [\Phi(a,d)\Omega(a,c) + \Phi(b,d)\Omega(b,c)] + J_2 [\Phi(a,d)\Omega(b,c) + \Phi(b,d)\Omega(a,c)]
\end{aligned} \tag{4.61}$$

eşitsizlikleri bulunur. (4.58) eşitsizliğinden (4.61) eşitsizliğine kadar olan eşitsizlikler (4.57) ifadesinde yerine konulursa, (4.52) eşitsizliğinde istenilen sonuç bulunmuş olur.

□

Sonuç 4.16. Teorem 4.15 ifadesinde $\varphi(\kappa) = \kappa$ ve $\psi(s) = s$ olarak alınırsa (2.37) ifadesine varılır.

Sonuç 4.17. Teorem 4.15 şartlarında $\varphi(\kappa) = \frac{\kappa^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ve $\psi(s) = \frac{s^\beta}{\Gamma(\beta)}$ kabul edilirse (4.52) eşitsizlikleri (4.16) eşitsizliklerine dönüşür.

Sonuç 4.18. Teorem 4.15 ifadesinde, her $(\varkappa, y) \in \Delta$ için $\Omega(\varkappa, y) = 1$ varsayılırsa,

$$\begin{aligned}
& {}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,c) + {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,c) \\
& \supseteq (\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)) [I_1J_1 + I_2J_1 + I_1J_2 + I_2J_2]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. $\Omega(\varkappa, y) = 1$ için,

$$\begin{aligned}
K(a,b,c,d) &= L(a,b,c,d) = M(a,b,c,d) \\
&= N(a,b,c,d) = \Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& I_1J_1K(a,b,c,d) + I_1J_2L(a,b,c,d) + I_2J_1M(a,b,c,d) + I_2J_2N(a,b,c,d) \\
&= (\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)) [I_1J_1 + I_2J_1 + I_1J_2 + I_2J_2]
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu sonuç ispatı tamamlar.

□

Teorem 4.19. Teorem 4.15 ifadesinin koşulları altında

$$\begin{aligned}
& 4\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \\
& \quad \times \left[{}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) \right. \\
& \quad \left. + {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) \right] \\
& \quad + \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \{ [J_2I_1 + I_2J_1 + J_2I_2] K(a,b,c,d) \\
& \quad + [J_1I_1 + J_2I_2 + J_1I_2] L(a,b,c,d) \\
& \quad + [J_2I_2 + J_1I_1 + J_2I_1] M(a,b,c,d) + [J_1I_2 + J_2I_1 + J_1I_1] N(a,b,c,d) \}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Φ ve Ω nin, Δ üzerinde koordinatlarda aralık değerli konveks fonksiyonlar olmasından ve (2.33) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a} \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \right] \\
& \quad + \frac{J_2}{2\Lambda(1)} \left[\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{J_1}{2\Lambda(1)} \left[\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{4.63}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[(IR) \int_c^d \frac{\psi(d-y)}{d-y} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_c^d \frac{\psi(y-c)}{y-c} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right]
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{I_2}{2\Delta(1)} \left[\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] \\
& + \frac{I_1}{2\Delta(1)} \left[\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. (4.63) ve (4.64) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
& 8\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \tag{4.65} \\
& \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} 2\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \frac{\varphi(\varkappa-a)}{\varkappa-a} 2\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \right] \\
& \quad + \frac{1}{2\Delta(1)} \left[(IR) \int_c^d \frac{\psi(d-y)}{d-y} 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_c^d \frac{\psi(y-c)}{y-c} 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\
& \quad + \frac{J_2}{2\Delta(1)} \left[2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + 2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{J_1}{2\Delta(1)} \left[2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + 2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{I_2}{2\Delta(1)} \left[2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] \\
& \quad + \frac{I_1}{2\Delta(1)} \left[2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\Phi_\varkappa : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_\varkappa(y) = \Phi(\varkappa, y)$ ve $\Omega_\varkappa : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega_\varkappa(y) = \Omega(\varkappa, y)$ fonksiyonlarına (2.33) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \tag{4.66} \\
& \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[{}_c I_\psi \Phi(a, d) \Omega(a, d) + {}_d I_\psi \Phi(a, c) \Omega(a, c) \right] \\
& \quad + \frac{I_2}{2\Delta(1)} \left[\Phi(a, c) \Omega(a, c) + \Phi(a, d) \Omega(a, d) \right] \\
& \quad + \frac{I_1}{2\Delta(1)} \left[\Phi(a, c) \Omega(a, d) + \Phi(a, d) \Omega(a, c) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\psi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) \right] \\
& + \frac{I_2}{2\Delta(1)} [\Phi(b,c)\Omega(b,c) + \Phi(b,d)\Omega(b,d)] \\
& + \frac{I_1}{2\Delta(1)} [\Phi(b,c)\Omega(b,d) + \Phi(b,d)\Omega(b,c)],
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\psi}\Phi(a,d)\Omega(b,d) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(a,c)\Omega(b,c) \right] \\
& + \frac{I_2}{2\Delta(1)} [\Phi(a,c)\Omega(b,c) + \Phi(a,d)\Omega(b,d)] \\
& + \frac{I_1}{2\Delta(1)} [\Phi(a,c)\Omega(b,d) + \Phi(a,d)\Omega(b,c)]
\end{aligned} \tag{4.68}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Delta(1)} \left[{}_{c+}I_{\psi}\Phi(b,d)\Omega(a,d) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(b,c)\Omega(a,c) \right] \\
& + \frac{I_2}{2\Delta(1)} [\Phi(b,c)\Omega(a,c) + \Phi(b,d)\Omega(a,d)] \\
& + \frac{I_1}{2\Delta(1)} [\Phi(b,c)\Omega(a,d) + \Phi(b,d)\Omega(a,c)]
\end{aligned} \tag{4.69}$$

ifadeleri açıktır. Benzer olarak $\Phi_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_y(\varkappa) = \Phi(\varkappa, y)$ ve $\Omega_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega_y(\varkappa) = \Omega(\varkappa, y)$ fonksiyonlarına (2.33) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) \right] \\
& + \frac{J_2}{2\Lambda(1)} [\Phi(a,c)\Omega(a,c) + \Phi(b,c)\Omega(b,c)] \\
& + \frac{J_1}{2\Lambda(1)} [\Phi(a,c)\Omega(b,c) + \Phi(b,c)\Omega(a,c)],
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_a I_{\varphi} \Phi(b, d) \Omega(b, d) + {}_b I_{\varphi} \Phi(a, d) \Omega(a, d) \right] \\
& \quad + \frac{J_2}{2\Lambda(1)} [\Phi(a, d) \Omega(a, d) + \Phi(b, d) \Omega(b, d)] \\
& \quad + \frac{J_1}{2\Lambda(1)} [\Phi(a, d) \Omega(b, d) + \Phi(b, d) \Omega(a, d)],
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_a I_{\varphi} \Phi(b, c) \Omega(b, d) + {}_b I_{\varphi} \Phi(a, c) \Omega(a, d) \right] \\
& \quad + \frac{J_2}{2\Lambda(1)} [\Phi(a, c) \Omega(a, d) + \Phi(b, c) \Omega(b, d)] \\
& \quad + \frac{J_1}{2\Lambda(1)} [\Phi(a, c) \Omega(b, d) + \Phi(b, c) \Omega(a, d)]
\end{aligned} \tag{4.72}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_a I_{\varphi} \Phi(b, d) \Omega(b, c) + {}_b I_{\varphi} \Phi(a, d) \Omega(a, c) \right] \\
& \quad + \frac{J_2}{2\Lambda(1)} [\Phi(a, d) \Omega(a, c) + \Phi(b, d) \Omega(b, c)] \\
& \quad + \frac{J_1}{2\Lambda(1)} [\Phi(a, d) \Omega(b, c) + \Phi(b, d) \Omega(a, c)]
\end{aligned} \tag{4.73}$$

eşitsizlikleri bulunur. Diğer yandan, (2.33) eşitsizliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Lambda(1)} (IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} 2\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) d\varkappa \\
& \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \left[(IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \frac{\psi(d-y)}{d-y} \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) d\varkappa dy \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} \frac{\psi(y-c)}{y-c} \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) d\varkappa dy \right] \\
& \quad + \frac{I_2}{4\Lambda(1)\Delta(1)} (IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\varkappa)}{b-\varkappa} [\Phi(\varkappa, c) \Omega(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, d)] d\varkappa
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{I_1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} (IR) \int_a^b \frac{\varphi(b-\kappa)}{b-\kappa} [\Phi(\kappa, c) \Omega(\kappa, d) + \Phi(\kappa, d) \Omega(\kappa, c)] d\kappa \\
& = \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b, d)\Omega(b, d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b, c)\Omega(b, c)] \\
& + \frac{I_2}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b, c)\Omega(b, c) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b, d)\Omega(b, d)] \\
& + \frac{I_1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b, c)\Omega(b, d) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b, d)\Omega(b, c)]
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Ayrıca benzer olarak

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Lambda(1)} (IR) \int_a^b \frac{\varphi(\kappa-a)}{\kappa-a} 2\Phi\left(\kappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\kappa, \frac{c+d}{2}\right) d\kappa \\
& \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{b-,c+}I_{\varphi}\Phi(a, d)\Omega(a, d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi}\Phi(a, c)\Omega(a, c)] \\
& + \frac{I_2}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a, c)\Omega(a, c) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a, d)\Omega(a, d)] \\
& + \frac{I_1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a, c)\Omega(a, d) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a, d)\Omega(a, c)],
\end{aligned} \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta(1)} (IR) \int_c^d \frac{\psi(d-y)}{d-y} 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b, d)\Omega(b, d) + {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a, d)\Omega(a, d)] \\
& + \frac{J_2}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{c+}I_{\psi}\Phi(a, d)\Omega(a, d) + {}_{c+}I_{\psi}\Phi(b, d)\Omega(b, d)] \\
& + \frac{J_1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{c+}I_{\psi}\Phi(a, d)\Omega(b, d) + {}_{c+}I_{\psi}\Phi(b, d)\Omega(a, d)]
\end{aligned} \tag{4.76}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta(1)} (IR) \int_c^d \frac{\psi(y-c)}{y-c} 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b, c)\Omega(b, c) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a, c)\Omega(a, c)] \\
& + \frac{J_2}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{d-}I_{\psi}\Phi(a, c)\Omega(a, c) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(b, c)\Omega(b, c)] \\
& + \frac{J_1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [{}_{d-}I_{\psi}\Phi(a, c)\Omega(b, c) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(b, c)\Omega(a, c)]
\end{aligned} \tag{4.77}$$

eşitsizliklerine ulaşılabilir. (4.66) eşitsizliğinden (4.77) eşitsizliğine kadar olan eşitsizlikler (4.65) ifadesinde yerine konursa,

$$\begin{aligned}
& 8\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \\
& \times \left[{}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) \right. \\
& \left. + {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) \right] \\
& + \frac{J_2}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \left\{ \left[{}_{c+}I_{\psi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) + {}_{c+}I_{\psi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) \right] \right. \\
& \left. + \left[{}_{d-}I_{\psi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) \right] \right\} \\
& + \frac{J_1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \left\{ \left[{}_{c+}I_{\psi}\Phi(a,d)\Omega(b,d) + {}_{c+}I_{\psi}\Phi(b,d)\Omega(a,d) \right] \right. \\
& \left. + \left[{}_{d-}I_{\psi}\Phi(a,c)\Omega(b,c) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(b,c)\Omega(a,c) \right] \right\} \\
& + \frac{I_2}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \left\{ \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) \right] \right. \\
& \left. + \left[{}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) \right] \right\} \\
& + \frac{I_1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \left\{ \left[{}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,d) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,c) \right] \right. \\
& \left. + \left[{}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(a,d) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,c) \right] \right\} \\
& + \frac{J_2I_2}{2\Lambda(1)\Delta(1)}K(a,b,c,d) + \frac{J_2I_1}{2\Lambda(1)\Delta(1)}M(a,b,c,d) \\
& + \frac{J_1I_2}{2\Lambda(1)\Delta(1)}L(a,b,c,d) + \frac{J_1I_1}{2\Lambda(1)\Delta(1)}N(a,b,c,d)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

eşitsizliklerine elde edilir. (2.32) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& {}_{c+}I_{\psi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) + {}_{c+}I_{\psi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) \\
& + \left[{}_{d-}I_{\psi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) \right] \\
& \supseteq I_1K(a,b,c,d) + I_2M(a,b,c,d),
\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
& {}_{c+}I_{\psi}\Phi(a,d)\Omega(b,d) + {}_{c+}I_{\psi}\Phi(b,d)\Omega(a,d) \\
& + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(a,c)\Omega(b,c) + {}_{d-}I_{\psi}\Phi(b,c)\Omega(a,c) \\
& \supseteq I_1L(a,b,c,d) + I_2N(a,b,c,d),
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
& {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,c) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,d) \\
& + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(a,c) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,d) \\
& \supseteq J_1K(a,b,c,d) + J_2L(a,b,c,d)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

ve

$$\begin{aligned}
& {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,c)\Omega(b,d) + {}_{a+}I_{\varphi}\Phi(b,d)\Omega(b,c) \\
& + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,c)\Omega(a,d) + {}_{b-}I_{\varphi}\Phi(a,d)\Omega(a,c) \\
& \supseteq J_1M(a,b,c,d) + J_2N(a,b,c,d)
\end{aligned} \tag{4.82}$$

eşitsizliklerine ulaşılabilir. (4.79) eşitsizliğinden (4.82) eşitsizliğine kadar olan eşitsizlikler (4.78) ifadesinde yerine konulursa ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.20. Teorem 4.19 koşulları göz önünde bulundurulduğunda $\varphi(\kappa) = \kappa$ ve $\psi(s) = s$ eşitlikleri yerine konulursa (2.38) eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 4.21. Teorem 4.19 şartları kabul edilip $\varphi(\kappa) = \frac{\kappa^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ve $\psi(s) = \frac{s^\beta}{\Gamma(\beta)}$ şeklinde düşünülürse (4.52) eşitsizliği (4.26) eşitsizliğine dönecektir.

Sonuç 4.22. Her $(\varkappa, y) \in \Delta$ için Teorem 4.19 ifadesinde $\Omega(\varkappa, y) = 1$ varsayılırsa aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& 4\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \left[{}_{a+,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,d) + {}_{a+,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(b,c) + {}_{b-,c+}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,d) + {}_{b-,d-}I_{\varphi,\psi}\Phi(a,c) \right] \\
& + \frac{3[\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)]}{4\Lambda(1)\Delta(1)} [J_1I_1 + J_1I_2 + J_2I_1 + J_2I_2].
\end{aligned}$$

İspat. $\Omega(\varkappa, y) = 1$ olarak düşünülürse

$$\begin{aligned}
K(a,b,c,d) &= L(a,b,c,d) = M(a,b,c,d) \\
&= N(a,b,c,d) = \Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Yani bu ifade

$$[J_2I_1 + I_2J_1 + J_2I_2]K(a,b,c,d)$$

$$\begin{aligned}
& + [J_1 I_1 + J_2 I_2 + J_1 I_2] L(a, b, c, d) \\
& + [J_2 I_2 + J_1 I_1 + J_2 I_1] M(a, b, c, d) \\
& + [J_1 I_2 + J_2 I_1 + J_1 I_1] N(a, b, c, d) \\
& = \frac{[\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)]}{4\Lambda(1)\Delta(1)} \{ [J_2 I_1 + I_2 J_1 + J_2 I_2] \\
& + [J_1 I_1 + J_2 I_2 + J_1 I_2] + [J_2 I_2 + J_1 I_1 + J_2 I_1] \\
& + [J_1 I_2 + J_2 I_1 + J_1 I_1] \}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa ispat tamamlanır. $\square$

4.3. FONKSİYONA GÖRE KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN HERMİTE–HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Öncelikle iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için fonksiyona göre kesirli integral tanımları verilir. Sonrasında iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Hadamard kesirli integrallerini ve Katugumpola kesirli integrallerinin tanımları verilir. Bu kesirli integraller arasındaki ilişki incelenir. Bu tanımlar verildikten sonra iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için yeni Hermite–Hadamard eşitsizlikleri elde edilir.

Bu bölüm boyunca $\varpi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $(a, b]$ üzerinde pozitif, monoton artan ve $\varpi'(\kappa)$ türevi (a, b) aralığında sürekli olsun. Benzer şekilde $w : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $(c, d]$ üzerinde pozitif, monoton artan bir fonksiyon, $w'(y)$ türevi (c, d) üzerinde sürekli olarak kabul edilsin.

Tanım 4.23. $\Phi \in \mathcal{IR}_{([a,b] \times [c,d])}$ olmak üzere, $\alpha, \beta > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \Phi(\kappa, y) \\
& := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_a^\kappa \int_c^y \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(\kappa)]^{1-\alpha}} \frac{w'(s)}{[w(y) - w(s)]^{1-\beta}} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa > a, y > c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \Phi(\kappa, y) \\
& := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_a^\kappa \int_y^d \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(\kappa)]^{1-\alpha}} \frac{w'(s)}{[w(s) - w(y)]^{1-\beta}} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \kappa > a, y < d,
\end{aligned}$$

$$\mathbb{J}_{b-,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta}\Phi(\varkappa,y) \\ := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(IR) \int_{\varkappa}^b \int_c^y \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}} \frac{w'(s)}{[w(y) - w(s)]^{1-\beta}} \Phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y > c$$

ve

$$\mathbb{J}_{b-,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta}\Phi(\varkappa,y) \\ := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(IR) \int_{\varkappa}^b \int_y^d \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}} \frac{w'(s)}{[w(s) - w(y)]^{1-\beta}} \Phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y < d$$

tanımları verilsin.

Ayrıca bu tanımlar için

$$\mathbb{J}_{a+;\varpi}^{\alpha}\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(IR) \int_a^{\varkappa} \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(a)]^{1-\alpha}} \Phi\left(\kappa, \frac{c+d}{2}\right) d\kappa, \quad \varkappa > a,$$

$$\mathbb{J}_{b-;\varpi}^{\alpha}\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(IR) \int_{\varkappa}^b \frac{\varpi'(\kappa)}{[\varpi(\kappa) - \varpi(b)]^{1-\alpha}} \Phi\left(\kappa, \frac{c+d}{2}\right) d\kappa, \quad \varkappa < b,$$

$$\mathbb{J}_{c+;w}^{\beta}\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}(IR) \int_c^y \frac{w'(\kappa)}{[w(y) - w(\kappa)]^{1-\beta}} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, s\right) ds, \quad y > c$$

ve

$$\mathbb{J}_{d-;w}^{\beta}\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}(IR) \int_c^y \frac{w'(\kappa)}{[w(s) - w(y)]^{1-\beta}} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, s\right) ds, \quad y < d$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 4.23 ifadesinde tanımlanan operatörlerde $\alpha, \beta > 0$ ve $\rho, \sigma > 0$ için $\varpi(\kappa) = \frac{\kappa^\rho}{\rho}$ ve $w(s) = \frac{s^\sigma}{\sigma}$ varsayılırsa aşağıdaki tanım elde edilir.

Tanım 4.24. $\Phi \in \mathcal{IR}_{([a,b] \times [c,d])}$ için Katugampola kesirli integralleri

$$\rho, \sigma \mathbb{K}_{a+,c+}^{\alpha,\beta}\Phi(\varkappa,y) \\ := \frac{\rho^{1-\alpha}\sigma^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(IR) \int_a^{\varkappa} \int_c^y \frac{\kappa^{\rho-1}}{[\varkappa^\rho - \kappa^\rho]^{1-\alpha}} \frac{s^{\sigma-1}}{[y^\sigma - s^\sigma]^{1-\beta}} \Phi(\kappa,s) ds d\kappa, \quad \varkappa > a, y > c,$$

$$\begin{aligned} & \rho, \sigma \mathbb{K}_{a+, d-}^{\alpha, \beta} \Phi(\varkappa, y) \\ &:= \frac{\rho^{1-\alpha} \sigma^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (IR) \int_a^\varkappa \int_y^d \frac{\kappa^{\rho-1}}{[\varkappa^\rho - \kappa^\rho]^{1-\alpha}} \frac{s^{\sigma-1}}{[s^\sigma - y^\sigma]^{1-\beta}} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \varkappa > a, y < d, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho, \sigma \mathbb{K}_{b-, c+}^{\alpha, \beta} \Phi(\varkappa, y) \\ &:= \frac{\rho^{1-\alpha} \sigma^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (IR) \int_\varkappa^b \int_c^y \frac{\kappa^{\rho-1}}{[\kappa^\rho - \varkappa^\rho]^{1-\alpha}} \frac{s^{\sigma-1}}{[y^\sigma - s^\sigma]^{1-\beta}} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y > c \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \rho, \sigma \mathbb{K}_{b-, d-}^{\alpha, \beta} \Phi(\varkappa, y) \\ &:= \frac{\rho^{1-\alpha} \sigma^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (IR) \int_\varkappa^b \int_y^d \frac{\kappa^{\rho-1}}{[\kappa^\rho - \varkappa^\rho]^{1-\alpha}} \frac{s^{\sigma-1}}{[s^\sigma - y^\sigma]^{1-\beta}} \Phi(\kappa, s) ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y < d \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca Tanım 4.23 $\varpi(\kappa) = \ln \kappa$ ve $w(s) = \ln s$ şeklinde seçilirse aşağıdaki tanım yazılabilir.

Tanım 4.25. $\alpha, \beta > 0$ ve $a, c \geq 0$ olmak üzere $\Phi \in \mathcal{IR}_{([a, b] \times [c, d])}$ fonksiyonu için iki değişkenli aralık değerli Hadamard kesirli integralleri

$$\mathbb{H}_{a+, c+}^{\alpha, \beta} \Phi(\varkappa, y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (IR) \int_a^\varkappa \int_c^y \left(\ln \frac{\varkappa}{\kappa} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{y}{s} \right)^{\beta-1} \frac{\Phi(\kappa, s)}{\kappa s} ds d\kappa, \quad \varkappa > a, y > c,$$

$$\mathbb{H}_{a+, d-}^{\alpha, \beta} \Phi(\varkappa, y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (IR) \int_a^\varkappa \int_y^d \left(\ln \frac{\varkappa}{\kappa} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{s}{y} \right)^{\beta-1} \frac{\Phi(\kappa, s)}{\kappa s} ds d\kappa, \quad \varkappa > a, y < d,$$

$$\mathbb{H}_{b-, c+}^{\alpha, \beta} \Phi(\varkappa, y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (IR) \int_\varkappa^b \int_c^y \left(\ln \frac{\kappa}{\varkappa} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{y}{s} \right)^{\beta-1} \frac{\Phi(\kappa, s)}{\kappa s} ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y > c$$

ve

$$\mathbb{H}_{b-, d-}^{\alpha, \beta} \Phi(\varkappa, y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (IR) \int_\varkappa^b \int_y^d \left(\ln \frac{\kappa}{\varkappa} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{y}{s} \right)^{\beta-1} \frac{\Phi(\kappa, s)}{\kappa s} ds d\kappa, \quad \varkappa < b, y < d$$

şeklinde verilir.

$\Phi \in \mathcal{IR}_{([a,b] \times [c,d])}$ olmak üzere, $(\varkappa, y) \in [a, b] \times [c, d]$ için sıklıkla kullanacağımız fonksiyonlar aşağıdaki notasyonlarla gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_1(\varkappa, y) &= \Phi(a + b - \varkappa, y), \\
\widetilde{\Phi}_2(\varkappa, y) &= \Phi(\varkappa, c + d - y), \\
\widetilde{\Phi}_3(\varkappa, y) &= \Phi(a + b - \varkappa, c + d - y), \\
S(\varkappa, y) &= \Phi(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_2(\varkappa, y), \\
\mathcal{H}(\varkappa, y) &= \Phi(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_1(\varkappa, y), \\
\mathcal{K}(\varkappa, y) &= \widetilde{\Phi}_1(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_3(\varkappa, y), \\
\mathcal{L}(\varkappa, y) &= \widetilde{\Phi}_2(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_3(\varkappa, y), \\
\mathcal{F}(\varkappa, y) &= \widetilde{\Phi}_1(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_2(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_3(\varkappa, y) + \Phi(\varkappa, y) \\
&= \frac{S(\varkappa, y) + \mathcal{H}(\varkappa, y) + \mathcal{K}(\varkappa, y) + \mathcal{L}(\varkappa, y)}{2}.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Teorem 4.26. $\mathcal{F}$ fonksiyonu (4.83) ifadesinde tanımlandığı gibi ele alındığında, eğer $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_\mathcal{I}^+$ fonksiyonu Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks bir fonksiyon ise, $\alpha, \beta > 0$ için aşağıdaki Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikleri geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
&\supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{16[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \\
&\quad \times \left[\mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,d) + \mathbb{J}_{a+,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,c) + \mathbb{J}_{b-,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,d) + \mathbb{J}_{b-,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,c) \right] \\
&\supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4}.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

İspat. Φ , Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks bir fonksiyon olduğundan, $(u, p), (v, q) \in \Delta$ için

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}, \frac{p+q}{2}\right) \supseteq \frac{\Phi(u,p) + \Phi(u,q) + \Phi(v,p) + \Phi(v,q)}{4} \tag{4.85}$$

şeklinde yazılır. $\kappa, s \in [0, 1]$ için $u = \kappa a + (1 - \kappa)b$, $v = (1 - \kappa)a + \kappa b$, $p = cs + (1 - s)d$ ve $q = (1 - s)c + sd$ değişken değişikliği ile

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq \frac{1}{4}\Phi(\kappa a + (1-\kappa)b, cs + (1-s)d) + \frac{1}{4}\Phi(\kappa a + (1-\kappa)b, (1-s)c + sd) \\
&\quad + \frac{1}{4}\Phi((1-\kappa)a + \kappa b, cs + (1-s)d) + \frac{1}{4}\Phi((1-\kappa)a + \kappa b, (1-s)c + sd)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.86) ifadesinin her iki tarafı

$$\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}}$$

ifadesiyle çarpılır ve $[0, 1] \times [0, 1]$ üzerinde κ ve s ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) (IR) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \right] ds d\kappa \\
&\supseteq \frac{(b-a)(d-c)}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b, cs + (1-s)d) \right] ds d\kappa \\
&\quad + \frac{(b-a)(d-c)}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b, (1-s)c + sd) \right] ds d\kappa \\
&\quad + \frac{(b-a)(d-c)}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \Phi((1-\kappa)a + \kappa b, cs + (1-s)d) \right] ds d\kappa \\
&\quad + \frac{(b-a)(d-c)}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \Phi((1-\kappa)a + \kappa b, (1-s)c + sd) \right] ds d\kappa
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Basit bir hesaplama ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} (IR) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} ds d\kappa \\ = \frac{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta}{\alpha\beta(b-a)(d-c)}. \end{aligned}$$

Ayrıca $\tau = (1-\kappa)a + \kappa b$ ve $\eta = (1-s)c + sd$ değişken değişikliği ile

$$\begin{aligned} & \frac{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{1}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varpi'(\tau)}{[\varpi(b) - \varpi(\tau)]^{1-\alpha}} \frac{w'(\eta)}{[w(d) - w(\eta)]^{1-\beta}} \Phi(a+b-\tau, c+d-\eta) d\eta d\tau \\ & + \frac{1}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varpi'(\tau)}{[\varpi(b) - \varpi(\tau)]^{1-\alpha}} \frac{w'(\eta)}{[w(d) - w(\eta)]^{1-\beta}} \Phi(a+b-\tau, \eta) d\eta d\tau \\ & + \frac{1}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varpi'(\tau)}{[\varpi(b) - \varpi(\tau)]^{1-\alpha}} \frac{w'(\eta)}{[w(d) - w(\eta)]^{1-\beta}} \Phi(\tau, c+d-\eta) d\eta d\tau \\ & + \frac{1}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_a^b \int_c^d \frac{\varpi'(\tau)}{[\varpi(b) - \varpi(\tau)]^{1-\alpha}} \frac{w'(\eta)}{[w(d) - w(\eta)]^{1-\beta}} \Phi(\tau, \eta) d\eta d\tau \\ & = \frac{1}{4} \left[\mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \widetilde{\Phi}_3(b,d) + \mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \widetilde{\Phi}_1(b,d) + \mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \widetilde{\Phi}_2(b,d) + \mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d) \right] \\ & = \frac{1}{4} \mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,d) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki eşitsizlik açıktır:

$$\frac{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \supseteq \frac{1}{4} \mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,d). \quad (4.87)$$

Benzer şekilde, (4.86) ün her tarafı

$$\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w((1-s)c + sd) - w(c)]^{1-\beta}}$$

ifadesiyle çarpılır ve $[0, 1] \times [0, 1]$ üzerinde κ ve s ye göre integral alınırsa

$$\frac{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \supseteq \frac{1}{4} \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, c) \quad (4.88)$$

yazılabilir. Ek olarak, (4.86) ün her tarafı

$$\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi((1-\kappa)a + \kappa b) - \varpi(a)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}}$$

ve

$$\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi((1-\kappa)a + \kappa b) - \varpi(a)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w((1-s)c + sd) - w(c)]^{1-\beta}}$$

ifadeleriyle çarpılır ve $[0, 1] \times [0, 1]$, üzerinde κ ve s ye göre integral alınırsa, sırasıyla

$$\frac{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \supseteq \frac{1}{4} \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, d) \quad (4.89)$$

ve

$$\frac{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \supseteq \frac{1}{4} \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, c) \quad (4.90)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(4.87) ifadesinden (4.90) ifadesine kadar olan ifadeler toplanır

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{16 [\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \\ & \times \left[\mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, c) + \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, d) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, c) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.84) eşitsizliğinin ilk kısmının ispatı tamamlanır.

(4.84) eşitsizliğinin ikinci kısmının ispatı için Φ aralık değerli koveks bir fonksiyon olduğundan

$$\Phi(\kappa a + (1-\kappa)b, cs + (1-s)d) + \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b, (1-s)c + sd) \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned}
& + \Phi((1-\kappa)a + \kappa b, cs + (1-s)d) + \Phi((1-\kappa)a + \kappa b, (1-s)c + sd) \\
& \supseteq \Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.91) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}}$$

ifadesiyle çarpılır ve $[0, 1] \times [0, 1]$ üzerinde κ ve s ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
& \quad \times \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b, cs + (1-s)d) \Big] ds d\kappa \\
& + \frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
& \quad \times \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b, (1-s)c + sd) \Big] ds d\kappa \\
& + \frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (IR) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
& \quad \times \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \Phi((1-\kappa)a + \kappa b, cs + (1-s)d) \Big] ds d\kappa \\
& + \frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \right. \\
& \quad \times \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} \Phi((1-\kappa)a + \kappa b, (1-s)c + sd) \Big] ds d\kappa \\
& \supseteq \frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} [\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)] \\
& \quad \times (IR) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}} ds d\kappa
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonrasında

$$\mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \widetilde{\Phi}_3(b, d) + \mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \widetilde{\Phi}_1(b, d) + \mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \widetilde{\Phi}_2(b, d) + \mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \Phi(b, d)$$

$$\geq [\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)] \frac{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, d) \geq \Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d) \quad (4.92)$$

eşitsizliğine varılır. Benzer şekilde (4.91)'nin her iki tarafını

$$\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi(b) - \varpi((1-\kappa)a + \kappa b)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w((1-s)c + sd) - w(c)]^{1-\beta}},$$

$$\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi((1-\kappa)a + \kappa b) - \varpi(a)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w(d) - w((1-s)c + sd)]^{1-\beta}}$$

ve

$$\frac{(b-a)(d-c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\varpi'((1-\kappa)a + \kappa b)}{[\varpi((1-\kappa)a + \kappa b) - \varpi(a)]^{1-\alpha}} \frac{w'((1-s)c + sd)}{[w((1-s)c + sd) - w(c)]^{1-\beta}}$$

ifadeleriyle çarpılır ve $[0, 1] \times [0, 1]$ üzerinde κ ve s ye göre integralleri alınır, sırasıyla

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, c) \geq \Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d), \quad (4.93)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, d) \geq \Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d), \quad (4.94)$$

ve

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, c) \geq \Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d) \quad (4.95)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(4.92) ifadesinden (4.95) ifadesine kadar olan ifadeler toplanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \\ & \times \left[\mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, c) + \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, d) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, c) \right] \\ & \geq 4[\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)] \end{aligned} \quad (4.96)$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (4.96) eşitsizliğinin her iki tarafı 16 ile bölünürse (4.84) eşitsizliğinin ikinci kısmının ispatı tamamlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 4.27. Teorem 4.26 eşitsizliğinde $\varpi(\kappa) = \kappa$ ve $w(s) = s$ şeklinde seçilirse aşağıdaki aralık değerli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integral eşitsizlikleri elde edilir:

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \\ & \quad \times \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(b,c) + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \Phi(a,d) + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \Phi(a,c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.28. Teorem 4.26 eşitsizliğinde eğer $\varpi(\kappa) = \ln \kappa$ ve $w(s) = \ln s$ şeklinde varsayılırsa

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{16 \left[\ln \frac{b}{a}\right]^\alpha \left[\ln \frac{d}{c}\right]^\beta} \\ & \quad \times \left[\mathbb{H}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,d) + \mathbb{H}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,c) + \mathbb{H}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,d) + \mathbb{H}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4} \end{aligned}$$

eşitsizliklerine, literatürde aralık değerli fonksiyonlar için Hadamard kesirli integral eşitsizlikleri olarak bilinen eşitsizliklere ulaşılır.

Sonuç 4.29. Teorem 4.26 ifadesinde, $\rho, \sigma > 0$ olmak üzere $\varpi(\kappa) = \frac{\kappa^\rho}{\rho}$ ve $w(s) = \frac{s^\sigma}{\sigma}$ şeklinde ele alınırsa, aşağıdaki aralık değerli fonksiyonlar için Katugampola kesirli integral eşitsizlikleri sağlanır:

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\rho^\alpha\sigma^\beta}{16[b^\rho - a^\rho]^\alpha[d^\sigma - c^\sigma]^\beta} \\ & \quad \times \left[{}^{\rho,\sigma}\mathbb{K}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,d) + {}^{\rho,\sigma}\mathbb{K}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,c) + {}^{\rho,\sigma}\mathbb{K}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,d) + {}^{\rho,\sigma}\mathbb{K}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4}. \end{aligned}$$

Teorem 4.30. Teorem 4.26 ifadesinin koşulları altında $\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$ ve S fonksiyonu (4.83) ifadesinde tanımlandığı gibiyse

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{8[\varpi(b)-\varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \mathcal{H}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \mathcal{H}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{8[w(d)-w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+; w}^\beta S\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta S\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{16[\varpi(b)-\varpi(a)]^\alpha [w(d)-w(c)]^\beta} \\
& \quad \times \left[\mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, c) + \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, d) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{16[\varpi(b)-\varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \mathcal{H}(b, c) + \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \mathcal{H}(b, d) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \mathcal{H}(a, c) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \mathcal{H}(a, d) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{16[w(d)-w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+; w}^\beta S(a, d) + \mathbb{J}_{c+; w}^\beta S(b, d) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta S(a, c) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta S(b, c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)}{4}
\end{aligned} \tag{4.97}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Φ , Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks bir fonksiyon olduğundan, eğer $h_\varkappa^1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $h_\varkappa^1(y) = \Phi(\varkappa, y)$ şeklinde tanımlanırsa, her $\varkappa \in [a, b]$ için $h_\varkappa^1(y)$ konveks ve $\mathcal{H}_\varkappa^1(y) = h_\varkappa^1(y) + \widetilde{h}_\varkappa^1(y) = \Phi(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_2(\varkappa, y) = S(\varkappa, y)$ şeklindedir. Eğer $h_\varkappa^1(y)$ konveks fonksiyonu için (2.34) eşitsizliği uygulanırsa

$$h_\varkappa^1\left(\frac{c+d}{2}\right) \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{4[w(d)-w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+; w}^\beta \mathcal{H}_\varkappa^1(d) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta \mathcal{H}_\varkappa^1(c) \right] \supseteq \frac{h_\varkappa^1(c) + h_\varkappa^1(d)}{2},$$

eşitsizlikleri yazılır. Başka bir ifadeyle

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\beta}{4[w(d)-w(c)]^\beta} \\
& \quad \times \left[(IR) \int_c^d \frac{w'(y)}{[w(d)-w(y)]^{1-\beta}} S(\varkappa, y) dy + (IR) \int_c^d \frac{w'(y)}{[w(y)-w(c)]^{1-\beta}} S(\varkappa, y) dy \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d)}{2}
\end{aligned} \tag{4.98}$$

şeklinde yazılabilir. (4.98) eşitsizlikleri

$$\frac{\alpha}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(b) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}}$$

ve

$$\frac{\alpha}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(a)]^{1-\alpha}}$$

çarpılır ve a dan b ye $\varkappa$ 'e integral alınırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \Phi \left(b, \frac{c+d}{2} \right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} S(b, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} S(b, c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \Phi(b, c) + \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \Phi(b, d) \right] \end{aligned} \quad (4.99)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \Phi \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} S(a, d) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} S(a, c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \Phi(a, c) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \Phi(a, d) \right] \end{aligned} \quad (4.100)$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan, Φ, Δ üzerinde koordinatlarda konveks, eğer $h_\varkappa^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $h_\varkappa^2(y) = \widetilde{\Phi}_1(\varkappa, y)$ şeklinde tanımlanırsa her $\varkappa \in [a, b]$ için $h_\varkappa^2(y)$ konveks ve $\mathcal{H}_\varkappa^2(y) = h_\varkappa^2(y) + \widetilde{h}_\varkappa^2(y) = \widetilde{\Phi}_1(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_3(\varkappa, y) = \mathcal{K}(\varkappa, y)$ olur. $h_\varkappa^2(y)$ fonksiyonu için (2.34) eşitsizliğinden yararlanarak

$$h_\varkappa^2 \left(\frac{c+d}{2} \right) \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{4[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+; w}^\beta \mathcal{H}_\varkappa^2(d) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta \mathcal{H}_\varkappa^2(c) \right] \supseteq \frac{h_\varkappa^2(c) + h_\varkappa^2(d)}{2}$$

eşitsizliğini yazılabilir. Açıkça

$$\begin{aligned} & \widetilde{\Phi}_1 \left(\varkappa, \frac{c+d}{2} \right) \\ & \supseteq \frac{\beta}{4[w(d) - w(c)]^\beta} \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[(IR) \int_c^d \frac{w'(y)}{[w(d) - w(y)]^{1-\beta}} \mathcal{K}(\varkappa, y) dy + (IR) \int_c^d \frac{w'(y)}{[w(y) - w(c)]^{1-\beta}} \mathcal{K}(\varkappa, y) dy \right] \\ & \supseteq \frac{\widetilde{\Phi}_1(\varkappa, c) + \widetilde{\Phi}_1(\varkappa, d)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği şeklinde ele alınabilir. Benzer şekilde, (4.101) eşitsizlikleri

$$\frac{\alpha}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(b) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}}$$

ve

$$\frac{\alpha}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(a)]^{1-\alpha}}$$

çarpılır ve a dan b 'ye $\varkappa$ 'e göre integral alınırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1 \left(b, \frac{c+d}{2} \right) \tag{4.102} \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{K}(b, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{K}(b, c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1(b, c) + \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1(b, d) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1 \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \tag{4.103} \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{K}(a, d) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{K}(a, c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1(a, c) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1(a, d) \right] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Dahası, $h_y^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $h_y^1(\varkappa) = \Phi(\varkappa, y)$ şeklinde tanımlansın, $y \in [c, d]$ için $h_y^1(\varkappa)$ konveks ve $\mathcal{H}_y^1(\varkappa) = h_y^1(\varkappa) + \widetilde{h}_y^1(\varkappa) = \Phi(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_1(\varkappa, y) = \mathcal{H}(\varkappa, y)$ olur. $h_y^1(\varkappa)$ fonksiyonu için (2.34) eşitsizliğinden faydalanarak

$$h_y^1 \left(\frac{a+b}{2} \right) \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \mathcal{H}_y^1(b) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \mathcal{H}_y^1(a) \right] \supseteq \frac{h_y^1(a) + h_y^1(b)}{2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \\
& \supseteq \frac{\alpha}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \\
& \quad \times \left[(IR) \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(b) - \varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}} \mathcal{H}(\varkappa, y) d\varkappa + (IR) \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(a)]^{1-\alpha}} \mathcal{H}(\varkappa, y) d\varkappa \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a, y) + \Phi(b, y)}{2}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

şeklinde açık olarak ifade edebiliriz. (4.104) eşitsizliğini

$$\frac{\beta}{[w(d) - w(c)]^\beta} \frac{w'(y)}{[w(d) - w(y)]^{1-\beta}}$$

ve

$$\frac{\beta}{[w(d) - w(c)]^\beta} \frac{w'(y)}{[w(y) - w(c)]^{1-\beta}}$$

ifadeleriyle çarpılır ve c den d 'ye kadar y 'ye göre integrali alınırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\beta + 1)}{[w(d) - w(c)]^\beta} \mathbb{J}_{c+;w}^\beta \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{H}(b, d) + \mathbb{J}_{b-,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{H}(a, d) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+;w}^\beta \Phi(a, d) + \mathbb{J}_{c+;w}^\beta \Phi(b, d) \right]
\end{aligned} \tag{4.105}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\beta + 1)}{[w(d) - w(c)]^\beta} \mathbb{J}_{d-;w}^\beta \Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{a+,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{H}(b, c) + \mathbb{J}_{b-,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{H}(a, c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{d-;w}^\beta \Phi(a, c) + \mathbb{J}_{d-;w}^\beta \Phi(b, c) \right]
\end{aligned} \tag{4.106}$$

elde edilir.

Ek olarak, $h_y^2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $h_y^2(\varkappa) = \widetilde{\Phi}_2(\varkappa, y)$ şeklinde tanımlanırsa, her $y \in [c, d]$ için $h_y^2(\varkappa)$ konveks ve $\mathcal{H}_y^2(\varkappa) = h_y^2(\varkappa) + \widetilde{h}_y^2(\varkappa) = \widetilde{\Phi}_2(\varkappa, y) + \widetilde{\Phi}_3(\varkappa, y) = \mathcal{L}(\varkappa, y)$ eşitliği

şeklindedir. $h_y^2(\varkappa)$ fonksiyonu için (2.34) eşitliğinden

$$h_y^2\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[\varpi(b)-\varpi(a)]^\alpha} [\mathbb{J}_{a+;\varpi}^\alpha \mathcal{H}_y^2(b) + \mathbb{J}_{b-;w}^\alpha \mathcal{H}_y^2(a)] \supseteq \frac{h_y^2(a) + h_y^2(b)}{2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \widetilde{\Phi}_2\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \\ & \supseteq \frac{\alpha}{4[\varpi(b)-\varpi(a)]^\alpha} \\ & \times \left[(IR) \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(b)-\varpi(\varkappa)]^{1-\alpha}} \mathcal{L}(\varkappa, y) d\varkappa + (IR) \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(\varkappa)-\varpi(a)]^{1-\alpha}} \mathcal{L}(\varkappa, y) d\varkappa \right] \\ & \supseteq \frac{\widetilde{\Phi}_2(a, y) + \widetilde{\Phi}_2(b, y)}{2} \end{aligned} \quad (4.107)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, (4.107) eşitsizliği

$$\frac{\beta}{[w(d)-w(c)]^\beta} \frac{w'(y)}{[w(d)-w(y)]^{1-\beta}}$$

ve

$$\frac{\beta}{[w(d)-w(c)]^\beta} \frac{w'(y)}{[w(y)-w(c)]^{1-\beta}}$$

çarpılır ve c 'den d 'ye y 'ye göre integralenirse, sırasıyla

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta+1)}{[w(d)-w(c)]^\beta} \mathbb{J}_{c+;w}^\beta \widetilde{\Phi}_2\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4[\varpi(b)-\varpi(a)]^\alpha [w(d)-w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{a+,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{L}(b, d) + \mathbb{J}_{b-,c+;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{L}(a, d) \right] \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{2[w(d)-w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+;w}^\beta \widetilde{\Phi}_2(a, d) + \mathbb{J}_{c+;w}^\beta \widetilde{\Phi}_2(b, d) \right] \end{aligned} \quad (4.108)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta+1)}{[w(d)-w(c)]^\beta} \mathbb{J}_{d-;w}^\beta \widetilde{\Phi}_2\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4[\varpi(b)-\varpi(a)]^\alpha [w(d)-w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{a+,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{L}(b, c) + \mathbb{J}_{b-,d-;\varpi,w}^{\alpha,\beta} \mathcal{L}(a, c) \right] \\ & \supseteq \frac{\Gamma(\beta+1)}{2[w(d)-w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{d-;w}^\beta \widetilde{\Phi}_2(a, c) + \mathbb{J}_{d-;w}^\beta \widetilde{\Phi}_2(b, c) \right] \end{aligned} \quad (4.109)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(4.99)-(4.109) eşitsizlikleri toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \Phi \left(b, \frac{c+d}{2} \right) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \Phi \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1 \left(b, \frac{c+d}{2} \right) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1 \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+; w}^\beta \Phi \left(\frac{a+b}{2}, d \right) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta \Phi \left(\frac{a+b}{2}, c \right) \right. \\
& \quad \left. + \mathbb{J}_{c+; w}^\beta \widetilde{\Phi}_2 \left(\frac{a+b}{2}, d \right) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta \widetilde{\Phi}_2 \left(\frac{a+b}{2}, c \right) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \\
& \quad \times \left[\mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} S(b, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} S(b, c) + \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} S(a, d) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} S(a, c) \right. \\
& \quad + \mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{K}(b, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{K}(b, c) + \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{K}(a, d) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{K}(a, c) \\
& \quad + \mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{H}(b, d) + \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{H}(a, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{H}(b, c) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{H}(a, c) \\
& \quad \left. + \mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{L}(b, d) + \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{L}(a, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{L}(b, c) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{L}(a, c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \Phi(b, c) + \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \Phi(b, d) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \Phi(a, c) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \Phi(a, d) \right. \\
& \quad \left. + \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1(b, c) + \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1(b, d) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1(a, c) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \widetilde{\Phi}_1(a, d) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+; w}^\beta \Phi(a, d) + \mathbb{J}_{c+; w}^\beta \Phi(b, d) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta \Phi(a, c) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta \Phi(b, c) \right. \\
& \quad \left. + \mathbb{J}_{c+; w}^\beta \widetilde{\Phi}_2(a, d) + \mathbb{J}_{c+; w}^\beta \widetilde{\Phi}_2(b, d) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta \widetilde{\Phi}_2(a, c) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta \widetilde{\Phi}_2(b, c) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \mathcal{H} \left(b, \frac{c+d}{2} \right) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \mathcal{H} \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+; w}^\beta S \left(\frac{a+b}{2}, d \right) + \mathbb{J}_{d-; w}^\beta S \left(\frac{a+b}{2}, c \right) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha [w(d) - w(c)]^\beta} \\
& \quad \times \left[\mathbb{J}_{a+, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, d) + \mathbb{J}_{a+, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(b, c) + \mathbb{J}_{b-, c+; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, d) + \mathbb{J}_{b-, d-; \varpi, w}^{\alpha, \beta} \mathcal{F}(a, c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \mathcal{H}(b, c) + \mathbb{J}_{a+; \varpi}^\alpha \mathcal{H}(b, d) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \mathcal{H}(a, c) + \mathbb{J}_{b-; \varpi}^\alpha \mathcal{H}(a, d) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+;w}^\beta S(a, d) + \mathbb{J}_{c+;w}^\beta S(b, d) + \mathbb{J}_{d-;w}^\beta S(a, c) + \mathbb{J}_{d-;w}^\beta S(b, c) \right]$$

şeklinde olacaktır. Böylece elde edilen hesaplama (4.97) ifadesinin ikinci ve üçüncü eşitsizliklerinin ispatıdır.

Diğer yandan, (2.34) ifadesinin ilk eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\alpha}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(b) - \varpi(\varkappa)]^\alpha} [\Phi(\varkappa) + \Phi(a+b-\varkappa)] d\varkappa \right. \\ & \quad \left. + \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(a)]^\alpha} [\Phi(\varkappa) + \Phi(a+b-\varkappa)] d\varkappa \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

yazılabilir. Φ, Δ üzerinde aralık değerli konveks bir fonksiyon olmasından yardımla ve (4.110) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\alpha}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \\ & \quad \times \left[(IR) \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(b) - \varpi(\varkappa)]^\alpha} \left[\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) + \Phi\left(a+b-\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \right] d\varkappa \right. \\ & \quad \left. + (IR) \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) + \Phi\left(a+b-\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \right] d\varkappa \right] \\ & = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[\mathbb{J}_{a+;\varpi}^\alpha \mathcal{H}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \mathbb{J}_{b-;\varpi}^\alpha \mathcal{H}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.111)$$

ifadesi açıktır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \supseteq \frac{\beta}{4[w(d) - w(c)]^\beta} \\ & \quad \times \left[(IR) \int_c^d \frac{w'(y)}{[w(d) - w(y)]^\beta} \left[\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) + \Phi\left(\frac{a+b}{2}, c+d-y\right) \right] dy \right] \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned}
& + (IR) \int_c^d \frac{w'(y)}{[w(y) - w(c)]^\alpha} \left[\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) + \Phi\left(\frac{a+b}{2}, c+d-y\right) \right] dy \Bigg] \\
& = \frac{\Gamma(\beta+1)}{4[w(d) - w(c)]^\beta} \left[\mathbb{J}_{c+;w}^\beta S\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \mathbb{J}_{d-;w}^\beta S\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.111) ve (4.112) ifadelerini birleştirilirse, (4.97) ifadesinin birinci eşitsizliği ispatı tamamlanır.

(2.34) ifadesinin ikinci eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} \left[(IR) \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(b) - \varpi(\varkappa)]^\alpha} [\Phi(\varkappa) + \Phi(a+b-\varkappa)] d\varkappa \right. \\
& \quad \left. + (IR) \int_a^b \frac{\varpi'(\varkappa)}{[\varpi(\varkappa) - \varpi(a)]^\alpha} [\Phi(\varkappa) + \Phi(a+b-\varkappa)] d\varkappa \right] \\
& \geq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}.
\end{aligned} \tag{4.113}$$

yazılabilir. (4.113) eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} [\mathbb{J}_{a+;\varpi}^\alpha \mathcal{H}(b, c) + \mathbb{J}_{b-;\varpi}^\alpha \mathcal{H}(a, c)] \geq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(b, c)}{2}, \tag{4.114}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[\varpi(b) - \varpi(a)]^\alpha} [\mathbb{J}_{a+;\varpi}^\alpha \mathcal{H}(b, d) + \mathbb{J}_{b-;\varpi}^\alpha \mathcal{H}(a, d)] \geq \frac{\Phi(a, d) + \Phi(b, d)}{2}, \tag{4.115}$$

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{4[w(d) - w(c)]^\beta} [\mathbb{J}_{c+;w}^\beta S(a, d) + \mathbb{J}_{d-;w}^\beta S(a, c)] \geq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(a, d)}{2} \tag{4.116}$$

ve

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{4[w(d) - w(c)]^\beta} [\mathbb{J}_{c+;w}^\beta S(b, d) + \mathbb{J}_{d-;w}^\beta S(b, c)] \geq \frac{\Phi(b, c) + \Phi(b, d)}{2}. \tag{4.117}$$

şeklinde eşitsizlikleri yazılabilir. (4.114) ifadesinden (4.117) ifadesine kadar ele alınırsa, (4.97) ifadesinin son eşitsizliği ispatlanır.

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 4.31. Teorem 4.30 ifadesinde $\varpi(\kappa) = \kappa$ ve $w(s) = s$ olarak ele alınırsa aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Riemann Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen (4.1) eşitsizliklerine dönüşür.

Sonuç 4.32. Teorem 4.30 ifadesinin koşulları altında $\varpi(\kappa) = \ln \kappa$ ve $w(s) = \ln s$ yazılırsa aralık değerli fonksiyonlar için Hadamard kesirli integraller eşitsizlikleri

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{8 [\ln \frac{b}{a}]^\alpha} \left[\mathbb{H}_{a+}^\alpha \mathcal{H}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \mathbb{H}_{b-}^\alpha \mathcal{H}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{8 [\ln \frac{d}{c}]^\beta} \left[\mathbb{H}_{c+}^\beta S\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \mathbb{H}_{d-}^\beta S\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{16 [\ln \frac{b}{a}]^\alpha [\ln \frac{d}{c}]^\beta} \\
& \quad \times \left[\mathbb{H}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,d) + \mathbb{H}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,c) + \mathbb{H}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,d) + \mathbb{H}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{16 [\ln \frac{b}{a}]^\alpha} \left[\mathbb{H}_{a+}^\alpha \mathcal{H}(b,c) + \mathbb{H}_{a+}^\alpha \mathcal{H}(b,d) + \mathbb{H}_{b-}^\alpha \mathcal{H}(a,c) + \mathbb{H}_{b-}^\alpha \mathcal{H}(a,d) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{16 [\ln \frac{d}{c}]^\beta} \left[\mathbb{H}_{c+}^\beta S(a,d) + \mathbb{H}_{c+}^\beta S(b,d) + \mathbb{H}_{d-}^\beta S(a,c) + \mathbb{H}_{d-}^\beta S(b,c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

bulunmuş olur.

Sonuç 4.33. Teorem 4.30 ifadesinde $\varpi(\kappa) = \frac{\kappa^\rho}{\rho}$ ve $w(s) = \frac{s^\sigma}{\sigma}$ olarak düşünülürse, aralık değerli fonksiyonlar için Katugampola kesirli integral eşitsizlikleri

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\rho^\alpha}{8 [b^\rho - a^\rho]^\alpha} \left[{}^\rho\mathbb{K}_{a+}^\alpha \mathcal{H}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + {}^\rho\mathbb{K}_{b-}^\alpha \mathcal{H}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)\sigma^\beta}{8 [d^\sigma - c^\sigma]^\beta} \left[{}^\sigma\mathbb{K}_{c+}^\beta S\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + {}^\sigma\mathbb{K}_{d-}^\beta S\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\rho^\alpha\sigma^\beta}{16 [b^\rho - a^\rho]^\alpha [d^\sigma - c^\sigma]^\beta} \\
& \quad \times \left[{}^{\rho,\sigma}\mathbb{K}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,d) + {}^{\rho,\sigma}\mathbb{K}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(b,c) + {}^{\rho,\sigma}\mathbb{K}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,d) + {}^{\rho,\sigma}\mathbb{K}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} \mathcal{F}(a,c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)\rho^\alpha\sigma^\beta}{16 [b^\rho - a^\rho]^\alpha} \left[{}^\rho\mathbb{K}_{a+}^\alpha \mathcal{H}(b,c) + {}^\rho\mathbb{K}_{a+}^\alpha \mathcal{H}(b,d) + {}^\rho\mathbb{K}_{b-}^\alpha \mathcal{H}(a,c) + {}^\rho\mathbb{K}_{b-}^\alpha \mathcal{H}(a,d) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Gamma(\beta+1)\sigma^\beta}{16[d^\sigma - c^\sigma]^\beta} \left[\sigma \mathbb{K}_{c+}^\beta S(a,d) + \sigma \mathbb{K}_{c+}^\beta S(b,d) + \sigma \mathbb{K}_{d-}^\beta S(a,c) + \sigma \mathbb{K}_{d-}^\beta S(b,c) \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a,c) + \Phi(a,d) + \Phi(b,c) + \Phi(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir.



5. ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER

Bu bölüm ağırlı fonksiyonlardan faydalanarak tek değişkenli iki alt bölüm ve iki değişkenli iki alt bölüm olmak üzere dört alt başlıkta incelenir.

5.1. TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN FEJER EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde aralık değerli fonksiyonların çarpımı için Fejér tipli eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 5.1. $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\varkappa = \frac{a+b}{2}$, ye göre simetrik (yani $w(\varkappa) = w(a+b-\varkappa)$) bir fonksiyon olsun.

$\Phi(\varkappa) = [\underline{\Phi}(\varkappa), \overline{\Phi}(\varkappa)]$ ve $\Omega(\varkappa) = [\underline{\Omega}(\varkappa), \overline{\Omega}(\varkappa)]$ olacak şekilde, eğer $\Phi, \Omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ aralık değerli konveks fonksiyon, $M(a, b)$ ve $N(a, b)$, (2.22) ifadesindeki gibi olmak üzere

$$\begin{aligned} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa &\supseteq \frac{M(a, b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b-\varkappa)^2 w(\varkappa) d\varkappa \\ &+ \frac{N(a, b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b-\varkappa)(\varkappa-a) w(\varkappa) d\varkappa \end{aligned} \quad (5.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Φ ve Ω fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde aralık değerli konveks bir fonksiyon olduğundan

$$\Phi((1-\kappa)a + \kappa b) \supseteq (1-\kappa)\Phi(a) + \kappa\Phi(b) \quad (5.2)$$

ve

$$\Omega((1-\kappa)a + \kappa b) \supseteq (1-\kappa)\Omega(a) + \kappa\Omega(b) \quad (5.3)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (5.2) ve (5.3) aracılığıyla

$$\Phi((1-\kappa)a + \kappa b) \Omega((1-\kappa)a + \kappa b) \quad (5.4)$$

$$\supseteq (1 - \kappa)^2 \Phi(a)\Omega(a) + \kappa^2 \Phi(b)\Omega(b) + \kappa(1 - \kappa) [\Phi(a)\Omega(b) + \Phi(b)\Omega(a)]$$

eşitsizliği elde edilir. (5.4) eşitsizliği $w((1 - \kappa)a + \kappa b)$ çarpılır ve 0 dan 1'e κ 'ye göre integral alınır

$$\begin{aligned} & (IR) \int_0^1 \Phi((1 - \kappa)a + \kappa b) \Omega((1 - \kappa)a + \kappa b) w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \quad (5.5) \\ & \supseteq (IR) \int_0^1 \Phi(a)\Omega(a) (1 - \kappa)^2 w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \\ & \quad + (IR) \int_0^1 \Phi(b)\Omega(b) \kappa^2 w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \\ & \quad + (IR) \int_0^1 [\Phi(a)\Omega(b) + \Phi(b)\Omega(a)] \kappa(1 - \kappa) w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \\ & = \Phi(a)\Omega(a)(R) \int_0^1 (1 - \kappa)^2 w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \\ & \quad + \Phi(b)\Omega(b)(R) \int_0^1 \kappa^2 w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \\ & \quad + [\Phi(a)\Omega(b) + \Phi(b)\Omega(a)] (R) \int_0^1 \kappa(1 - \kappa) w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\varkappa = (1 - \kappa)a + \kappa b$ değişken değiştirmesi yardımıyla

$$\begin{aligned} & (IR) \int_0^1 \Phi((1 - \kappa)a + \kappa b) \Omega((1 - \kappa)a + \kappa b) w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \quad (5.6) \\ & = \left[(R) \int_0^1 \underline{\Phi}((1 - \kappa)a + \kappa b) \underline{\Omega}((1 - \kappa)a + \kappa b) w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa, \right. \\ & \quad \left. (R) \int_0^1 \overline{\Phi}((1 - \kappa)a + \kappa b) \overline{\Omega}((1 - \kappa)a + \kappa b) w((1 - \kappa)a + \kappa b) d\kappa \right] \\ & = \left[\frac{1}{b-a} (R) \int_a^b \underline{\Phi}(\varkappa) \underline{\Omega}(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa, \frac{1}{b-a} (R) \int_a^b \overline{\Phi}(\varkappa) \overline{\Omega}(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \right] \\ & = \frac{1}{b-a} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Diğer yandan, $w, \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} (R) \int_0^1 \kappa^2 w((1-\kappa)a + \kappa b) d\kappa &= \frac{1}{(b-a)^3} (R) \int_a^b (\varkappa - a)^2 w(\varkappa) d\varkappa \quad (5.7) \\ &= \frac{1}{(b-a)^3} (R) \int_a^b (b - \varkappa)^2 w(\varkappa) d\varkappa \end{aligned}$$

ve

$$(R) \int_0^1 (1-\kappa)^2 w((1-\kappa)a + \kappa b) d\kappa = \frac{1}{(b-a)^3} (R) \int_a^b (b - \varkappa)^2 w(\varkappa) d\varkappa \quad (5.8)$$

eşitlikleri görülebilir. Ayrıca,

$$(R) \int_0^1 \kappa(1-\kappa) w((1-\kappa)a + \kappa b) d\kappa = \frac{1}{(b-a)^3} (R) \int_a^b (b - \varkappa)(\varkappa - a) w(\varkappa) d\varkappa \quad (5.9)$$

şeklinde integral sonucu elde edilebilir. (5.6) ifadesinden (5.9) ifadesine kadar olan ifadeler (5.5) eşitsizliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \quad (5.10) \\ &\geq \frac{\Phi(a)\Omega(a) + \Phi(b)\Omega(b)}{(b-a)^3} (R) \int_a^b (b - \varkappa)^2 w(\varkappa) d\varkappa \\ &\quad + \frac{\Phi(a)\Omega(b) + \Phi(b)\Omega(a)}{(b-a)^3} (R) \int_a^b (b - \varkappa)(\varkappa - a) w(\varkappa) d\varkappa \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. (5.10) ifadesinin her iki tarafı $(b-a)$ ile çarpılırsa istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Örnek 5.2. Teorem 5.1 ifadesinde $\Phi(\varkappa) = [\varkappa^2, 6 - \varkappa^2]$ ve $\Omega(\varkappa) = [\varkappa^3, 6 - \varkappa^3]$ olsun. Ayrıca $a = 0$ ve $b = 1$ olarak alınırsa $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $w(\varkappa) = (\varkappa - \frac{1}{2})^2$ olsun. (5.1) eşitsizliğinin birinci ifadesi

$$(IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa$$

$$\begin{aligned}
&= (IR) \int_0^1 [\varkappa^2, 6 - \varkappa^2] [\varkappa^3, 6 - \varkappa^3] \left(\varkappa - \frac{1}{2} \right)^2 d\varkappa \\
&= \left[(R) \int_0^1 \varkappa^5 \left(\varkappa - \frac{1}{2} \right)^2 d\varkappa, (R) \int_0^1 (6 - \varkappa^2) (6 - \varkappa^3) \left(\varkappa - \frac{1}{2} \right)^2 d\varkappa \right] \\
&= \left[\frac{1}{142}, \frac{529}{168} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.1) eşitsizliğinin ikinci ifadesi

$$\begin{aligned}
&\frac{M(a,b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b-\varkappa)^2 w(\varkappa) d\varkappa + \frac{N(a,b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b-\varkappa) (\varkappa-a) w(\varkappa) d\varkappa \\
&= [\Phi(0)\Omega(0) + \Phi(1)\Omega(1)] (R) \int_a^b (1-\varkappa)^2 \left(\varkappa - \frac{1}{2} \right)^2 d\varkappa \\
&\quad + [\Phi(0)\Omega(1) + \Phi(1)\Omega(0)] (R) \int_a^b \varkappa (1-\varkappa)^2 \left(\varkappa - \frac{1}{2} \right)^2 d\varkappa \\
&= \frac{1}{30} [1, 61] + \frac{1}{240} [0, 60] \\
&= \left[\frac{1}{30}, \frac{137}{60} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left[\frac{1}{142}, \frac{529}{168} \right] \supseteq \left[\frac{1}{30}, \frac{137}{60} \right]$$

olduğu görülür.

Sonuç 5.3. Her $\varkappa \in [a, b]$ için Teorem 5.1 ifadesinde $w(\varkappa) = 1$ şeklinde kabul edilirse, Teorem 5.1 eşitsizliği (2.23) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.4. Eğer Teorem 5.1 ifadesinde $\Omega(\varkappa) = [1, 1]$ şeklinde seçilirse her $\varkappa \in [a, b]$ için

$$(IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} (R) \int_a^b w(\varkappa) d\varkappa$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (5.1) eşitsizliğinde $\Omega(\varkappa)$ fonksiyonunu $[1, 1]$ aralığı olarak incelenirse her $\varkappa \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
 (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa &\supseteq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{(b-a)^2} \left[(R) \int_a^b (b-\varkappa)^2 w(\varkappa) d\varkappa \right. \\
 &\quad \left. + (R) \int_a^b (b-\varkappa)(\varkappa-a) w(\varkappa) d\varkappa \right] \\
 &= \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{(b-a)} (IR) \int_a^b (b-\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

eşitliği açıktır. $w, \varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'e göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
 &(R) \int_a^b (b-\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \\
 &= (R) \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa + (R) \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \\
 &= (R) \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa + (R) \int_a^{\frac{a+b}{2}} (\varkappa-a) w(a+b-\varkappa) d\varkappa \\
 &= (b-a) (R) \int_a^{\frac{a+b}{2}} w(\varkappa) d\varkappa \\
 &= \frac{(b-a)}{2} (R) \int_a^b w(\varkappa) d\varkappa
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

eşitliği yazılabilir. (5.12) sonucu (5.11) de yerine yazılırsa, gerekli sonuca ulaşılır. $\square$

Teorem 5.5. $M(a, b)$ ve $N(a, b)$, (2.22) ifadesinde tanımlandığı gibi ve Teorem 2.34 şartları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 &2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}\right) (R) \int_a^b w(\varkappa) d\varkappa \\
 &\supseteq (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$+ \frac{M(a,b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b-x)(x-a)w(x)dx + \frac{N(a,b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b-x)^2 w(x)dx$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat. $\kappa \in [0, 1]$ için

$$\frac{a+b}{2} = \frac{(1-\kappa)a + \kappa b}{2} + \frac{\kappa a + (1-\kappa)b}{2}$$

ifadesi yazılabilir. Φ ve Ω , $[a, b]$ üzerinde aralık değerli konveks fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{(1-\kappa)a + \kappa b}{2} + \frac{\kappa a + (1-\kappa)b}{2}\right) \\ & \quad \times \Omega\left(\frac{(1-\kappa)a + \kappa b}{2} + \frac{\kappa a + (1-\kappa)b}{2}\right) \\ &\supseteq \frac{1}{4} [\Phi((1-\kappa)a + \kappa b) + \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b)] \\ & \quad \times [\Omega((1-\kappa)a + \kappa b) + \Omega(\kappa a + (1-\kappa)b)] \\ &= \frac{1}{4} [\Phi((1-\kappa)a + \kappa b) \Omega((1-\kappa)a + \kappa b) \\ & \quad + \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b) \Omega(\kappa a + (1-\kappa)b)] \\ & \quad + \frac{1}{4} [\Phi((1-\kappa)a + \kappa b) \Omega(\kappa a + (1-\kappa)b) \\ & \quad + \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b) \Omega((1-\kappa)a + \kappa b)] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Son eşitliğin ikinci ifadesi için, Φ ve Ω fonksiyonlarının konveksliklerinden faydalanarak

(5.14)

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\supseteq \frac{1}{4} [\Phi((1-\kappa)a + \kappa b) \Omega((1-\kappa)a + \kappa b) \\ & \quad + \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b) \Omega(\kappa a + (1-\kappa)b)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \kappa (1 - \kappa) [\Phi(a)\Omega(a) + \Phi(b)\Omega(b)] \\
& + \frac{1}{4} [\kappa^2 + (1 - \kappa)^2] [\Phi(a)\Omega(b) + \Phi(b)\Omega(a)]
\end{aligned}$$

eşitsizliği görülebilir. (5.14) ifadesi $w((1 - \kappa)a + \kappa b)$ ve $[0, 1]$ üzerinde κ 'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right)(R)\int_0^1 w((1-\kappa)a + \kappa b) d\kappa \\
& \supseteq \frac{1}{4}(IR)\int_0^1 [\Phi((1-\kappa)a + \kappa b)\Omega((1-\kappa)a + \kappa b) \\
& \quad + \Phi(\kappa a + (1-\kappa)b)\Omega(\kappa a + (1-\kappa)b)w((1-\kappa)a + \kappa b)] d\kappa \\
& \quad + \frac{M(a,b)}{2}(R)\int_0^1 \kappa(1-\kappa)w((1-\kappa)a + \kappa b) d\kappa \\
& \quad + \frac{N(a,b)}{4}(R)\int_0^1 [\kappa^2 + (1-\kappa)^2]w((1-\kappa)a + \kappa b) d\kappa
\end{aligned} \tag{5.15}$$

elde edilir. (5.6) ifadesinden (5.9) ifadesine kadar olan ifadeler (5.15) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}(R)\int_a^b w(\varkappa) d\varkappa \\
& \supseteq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{b-a}(IR)\int_a^b \Phi(\varkappa)\Omega(\varkappa)w(\varkappa) d\varkappa + \frac{1}{b-a}(IR)\int_a^b \Phi(\varkappa)\Omega(\varkappa)w(a+b-\varkappa) d\varkappa\right] \\
& \quad + \frac{M(a,b)}{2(b-a)^3}(R)\int_a^b (b-\varkappa)(\varkappa-a)w(\varkappa) d\varkappa + \frac{N(a,b)}{2(b-a)^3}(R)\int_a^b (b-\varkappa)^2w(\varkappa) d\varkappa
\end{aligned} \tag{5.16}$$

eşitsizliğe ulaşılır. (5.16) ifadesi $2(b-a)$ ile çarpılır ise (5.13) eşitsizliği elde edilir. $\square$

Sonuç 5.6. Teorem 5.5 eşitsizliğinde $w(\varkappa) = 1$ olarak varsayılırsa, her $\varkappa \in [a, b]$ için Teorem 5.5, (2.24) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 5.7. Her $\varkappa \in [a, b]$ için Teorem 5.5 ifadesinde $\Omega(\varkappa) = [1, 1]$ olarak gözlemlenirse

$$2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)(R)\int_a^b w(\varkappa)d\varkappa \supseteq (IR)\int_a^b \Phi(\varkappa)w(\varkappa)d\varkappa \\ + \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{b-a}(R)\int_a^b (b-\varkappa)w(\varkappa)d\varkappa$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Eğer (5.13) ifadesinde $\Omega(\varkappa) = [1, 1]$ için, her $\varkappa \in [a, b]$ için

$$2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)(IR)\int_a^b w(\varkappa)d\varkappa \\ \supseteq (IR)\int_a^b \Phi(\varkappa)w(\varkappa)d\varkappa + \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{(b-a)^2} \left[(R)\int_a^b (b-\varkappa)(\varkappa-a)w(\varkappa)d\varkappa \right. \\ \left. + (R)\int_a^b (b-\varkappa)^2 w(\varkappa)d\varkappa \right] \\ = (IR)\int_a^b \Phi(\varkappa)w(\varkappa)d\varkappa + \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{b-a}(R)\int_a^b (b-\varkappa)w(\varkappa)d\varkappa$$

eşitsizliği yazılabilir. (5.12) eşitliğinden yararlanarak istenilen sonuca ulaşılır. $\square$

Burada verilen sonuçlardan faydalanarak aralık değerli kesirli integraller içeren Fejer tipli eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 5.8. $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik (yani $w(\varkappa) = w(a+b-\varkappa)$) bir fonksiyon olsun. $M(a, b)$ ve $N(a, b)$, (2.22) ifadesindeki gibi ve Gamma fonksiyonu Γ notasyonu ile gösterilsin. $\alpha > 0$, $\Phi(\varkappa) = [\underline{\Phi}(\varkappa), \overline{\Phi}(\varkappa)]$ ve $\Omega(\varkappa) = [\underline{\Omega}(\varkappa), \overline{\Omega}(\varkappa)]$ olmak üzere $\Phi, \Omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_T^+$ aralık değerli iki fonksiyon ise

$$\mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b)\Omega(b)w(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a)\Omega(a)w(a) \\ \supseteq \frac{M(a, b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} (R)\int_a^b (b-\varkappa)^{\alpha-1} \left[(b-\varkappa)^2 + (\varkappa-a)^2 \right] w(\varkappa)d\varkappa \\ + \frac{2N(a, b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} (R)\int_a^b (\varkappa-a)(b-\varkappa)^\alpha w(\varkappa)d\varkappa \quad (5.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. w negatif olmayan, integrallenebilir ve $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olduğundan, $h(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(b-\varkappa)^{\alpha-1} + (\varkappa-a)^{\alpha-1} \right] w(\varkappa)$ fonksiyonunun negatif olmayan, integrallenebilir ve $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğu açıktır. Böylece, Teorem 5.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) h(\varkappa) d\varkappa &\supseteq \frac{M(a,b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b-\varkappa)^2 h(\varkappa) d\varkappa \\ &+ \frac{N(a,b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b-\varkappa)(\varkappa-a) h(\varkappa) d\varkappa \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^b (b-\varkappa)^{\alpha-1} \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^b (\varkappa-a)^{\alpha-1} \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \\ &\supseteq \frac{M(a,b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} (R) \int_a^b (b-\varkappa)^2 \left[(b-\varkappa)^{\alpha-1} + (\varkappa-a)^{\alpha-1} \right] w(\varkappa) d\varkappa \\ &+ \frac{N(a,b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} (R) \int_a^b (b-\varkappa)(\varkappa-a) \left[(b-\varkappa)^{\alpha-1} + (\varkappa-a)^{\alpha-1} \right] w(\varkappa) d\varkappa \end{aligned} \quad (5.18)$$

ifadesi görülebilir. (2.17) ve (2.18) eşitlikleri aracılığıyla

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^b (b-\varkappa)^{\alpha-1} \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (IR) \int_a^b (\varkappa-a)^{\alpha-1} \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) w(\varkappa) d\varkappa \\ &= \mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(b) \Omega(b) w(b) + \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(a) \Omega(a) w(a) \end{aligned} \quad (5.19)$$

ifadesini görmek kolaydır. w , $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan

$$(R) \int_a^b (b-\varkappa)^2 \left[(b-\varkappa)^{\alpha-1} + (\varkappa-a)^{\alpha-1} \right] w(\varkappa) d\varkappa \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
&= (R) \int_a^b (b-x)^{\alpha+1} w(x) dx + (R) \int_a^b (b-x)^2 (x-a)^{\alpha-1} w(x) dx \\
&= (R) \int_a^b (b-x)^{\alpha+1} w(x) dx + (R) \int_a^b (x-a)^2 (b-x)^{\alpha-1} w(x) dx \\
&= (R) \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} \left[(b-x)^2 + (x-a)^2 \right] w(x) dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&(R) \int_a^b (b-x)(x-a) \left[(b-x)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-1} \right] w(x) dx \quad (5.21) \\
&= (R) \int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x) dx + (R) \int_a^b (b-x)(x-a)^{\alpha} w(x) dx \\
&= (R) \int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x) dx + (R) \int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x) dx \\
&= 2(R) \int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x) dx
\end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır. Eğer (5.19) ifadesinden (5.21) ifadesine kadar olan ifadeler (5.18) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 5.9. Teorem 5.8 şartlarında $w(x) = 1$ şeklinde seçilirse (2.29) eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 5.10. Teorem 5.8 koşulları altında $\alpha = 1$ kabul edilirse, Teorem 5.1 ifadesine dönüşür.

Sonuç 5.11. Teorem 5.8 ifadesinde $\Omega(x) = [1, 1]$ olarak incelenirse her $x \in [a, b]$ için

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(b)w(b) + \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(a)w(a) \geq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} [J_{a+}^{\alpha} w(b) + J_{b-}^{\alpha} w(a)]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik Teorem 2.46 eşitsizliklerinin ikinci eşitsizliğine eşittir.

İspat. Lemma 2.24 kullanılıp (5.17) eşitsizliğinde $\Omega(x) = [1, 1]$ seçilirse, her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \Phi(b)w(b) + \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \Phi(a)w(a) \quad (5.22) \\
&\geq \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} (R) \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} \left[(b-x)^2 + (x-a)^2 \right] w(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\Phi(a) + \Phi(b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} (R) \int_a^b (\varkappa - a) (b - \varkappa)^\alpha w(\varkappa) d\varkappa \\
& = \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} \\
& \quad \times \left[(R) \int_a^b (b - \varkappa)^{\alpha-1} \left[(b - \varkappa)^2 + (\varkappa - a)^2 + 2(\varkappa - a)(b - \varkappa) \right] w(\varkappa) d\varkappa \right] \\
& = \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b - \varkappa)^{\alpha-1} w(\varkappa) d\varkappa \\
& = \frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2} [J_{a+}^\alpha w(b) + J_{b-}^\alpha w(a)]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 5.12. Teorem 5.8 koşulları ele alınırsa

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}\right) [J_{a+}^\alpha w(b) + J_{b-}^\alpha w(a)] \\
& \supseteq \mathcal{J}_{a+}^\alpha \Phi(b) \Omega(b) w(b) + \mathcal{J}_{b-}^\alpha \Phi(a) \Omega(a) w(a) \\
& \quad + \frac{2M(a,b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} (R) \int_a^b (\varkappa - a) (b - \varkappa)^\alpha w(\varkappa) d\varkappa \\
& \quad + \frac{N(a,b)}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha)} (R) \int_a^b (b - \varkappa)^{\alpha-1} \left[(b - \varkappa)^2 + (\varkappa - a)^2 \right] w(\varkappa) d\varkappa
\end{aligned} \tag{5.23}$$

eşitsizliği sağlar.

İspat. Madem ki w negatif olmayan, integrallenebilir ve $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan $h(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(b - \varkappa)^{\alpha-1} + (\varkappa - a)^{\alpha-1} \right] w(\varkappa)$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğu açıktır. Böylece, Teorem 5.5 kullanılarak

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}\right) (R) \int_a^b h(\varkappa) d\varkappa \\
& \supseteq (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \Omega(\varkappa) h(\varkappa) d\varkappa \\
& \quad + \frac{M(a,b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b - \varkappa) (\varkappa - a) h(\varkappa) d\varkappa + \frac{N(a,b)}{(b-a)^2} (R) \int_a^b (b - \varkappa)^2 h(\varkappa) d\varkappa
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(R)\int_a^b\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x) \\
& \supseteq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(IR)\int_a^b\Phi(x)\Omega(x)\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx \\
& \quad + \frac{M(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}(R)\int_a^b(b-x)(x-a)\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx \\
& \quad + \frac{N(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}(R)\int_a^b(b-x)^2\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (5.19) ifadesinden (5.21) ifadesine kadar olan ifadeler (5.18) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 5.13. Teorem 5.12 şartları altında $w(x) = 1$ olarak incelenirse her $x \in [a, b]$ Teorem 5.12, (2.30) eşitsizliğine eşit olur.

Sonuç 5.14. Teorem 5.12 ifadesinde $\alpha = 1$ kabul edilirse, (5.23) eşitsizliği (5.13) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.15. Her $x \in [a, b]$ için Teorem 5.12 koşullarında $\Omega(x) = [1, 1]$ olarak ele alınırsa

$$\begin{aligned}
& 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right] \\
& \supseteq \mathcal{J}_{a+}^{\alpha}\Phi(b)w(b)+\mathcal{J}_{b-}^{\alpha}\Phi(a)w(a) \\
& \quad + \frac{\Phi(a)+\Phi(b)}{2}\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (5.22) eşitsizliğinden faydalananarak ispat aşıkardır. $\square$

5.2. AĞIRLIKLİ JENSEN EŞİTSİZLİĞİ KULLANILARAK ELDE EDİLEN TEK DEĞİŞKENLİ FEJER EŞİTSİZLİKLERİ

Bu alt bölümde konveks fonksiyonlar için bazı ağırlıklı Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır.

İntegraller için ağırlıklı Jensen eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilir:

Teorem 5.16 (Aralık Değerli Fonksiyonlar İçin Ağırlıklı Jensen Eşitsizliği). $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ve $w : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyon olsun. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere, $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_I$ fonksiyonu aralık değerli konveks bir fonksiyon ise

$$\Phi \left(\frac{1}{\int_a^b w(\kappa) d\kappa} \int_a^b w(\kappa) \theta(\kappa) d\kappa \right) \supseteq \frac{1}{\int_a^b w(\kappa) d\kappa} (IR) \int_a^b \Phi(\theta(\kappa)) w(\kappa) d\kappa$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Konveks $\underline{\Phi}$ fonksiyonu ve konkav $\overline{\Phi}$ fonksiyonu için klasik Jensen eşitsizliği uygulanırsa, ağırlıklı Jensen eşitsizliğinin elde edileceği aşikardır. $\square$

Teorem 5.17. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \overline{\Phi}(\kappa)]$ olmak üzere, $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ aralık değerli konveks fonksiyon olsun. $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan Riemann integrallenebilir fonksiyon ve $\lambda = \left(\int_0^1 \kappa \theta(\kappa) d\kappa \right) / \left(\int_0^1 \theta(\kappa) d\kappa \right)$ iken,

$$\Phi(\lambda a + (1 - \lambda)b) \supseteq \frac{1}{\Theta} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \theta \left(\frac{b - \varkappa}{b - a} \right) d\varkappa \supseteq \lambda \Phi(a) + (1 - \lambda) \Phi(b) \quad (5.24)$$

elde edilir. Burada

$$\Theta = \int_a^b \theta \left(\frac{b - \varkappa}{b - a} \right) d\varkappa$$

olarak tanımlanır.

İspat. İspat için ilk olarak $\varkappa = \kappa a + (1 - \kappa)b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{1}{\int_a^b \theta \left(\frac{b - \varkappa}{b - a} \right) d\varkappa} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa) \theta \left(\frac{b - \varkappa}{b - a} \right) d\varkappa = \frac{1}{\int_0^1 \theta(\kappa) d\kappa} (IR) \int_0^1 \Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) \theta(\kappa) d\kappa \quad (5.25)$$

bulunur. Φ , $[a, b]$ üzerinde aralık değerli konveks fonksiyon olduğundan

$$\Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) \supseteq (\kappa \Phi(a) + (1 - \kappa) \Phi(b)) \theta(\kappa) d\kappa$$

elde edilir. θ negatif olmayan ve $[0, 1]$ aralığında integrallenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} (IR) \int_0^1 \Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) \theta(\kappa) d\kappa &\supseteq (IR) \int_0^1 (\kappa \Phi(a) + (1 - \kappa) \Phi(b)) \theta(\kappa) d\kappa \quad (5.26) \\ &= \Phi(a) \int_0^1 \kappa \theta(\kappa) d\kappa + \Phi(b) \int_0^1 (1 - \kappa) \theta(\kappa) d\kappa \end{aligned}$$

olur. (5.25) ve (5.26) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\int_a^b \theta\left(\frac{b-\kappa}{b-a}\right) d\kappa} (IR) \int_a^b \Phi(\kappa) \theta\left(\frac{b-\kappa}{b-a}\right) d\kappa \\
& \supseteq \left(\frac{1}{\int_0^1 \theta(\kappa) d\kappa} \int_0^1 \kappa \theta(\kappa) d\kappa \right) \Phi(a) + \left(1 - \frac{1}{\int_0^1 \theta(\kappa) d\kappa} \int_0^1 \kappa \theta(\kappa) d\kappa \right) \Phi(b) \\
& = \lambda \Phi(a) + (1 - \lambda) \Phi(b)
\end{aligned}$$

(5.24) eşitsizliğinin sağ tarafı ispatlanmış olur.

Bu durumda, Φ aralık değerli konveks fonksiyon ve θ negatif olmayan $[0, 1]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olduğundan, aralık değerli fonksiyonlar için ağırlıklı Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\int_0^1 \theta(\kappa) d\kappa} (IR) \int_0^1 \Phi(\kappa a + (1 - \kappa)b) \theta(\kappa) d\kappa \\
& \subseteq \Phi \left(\frac{1}{\int_0^1 \theta(\kappa) d\kappa} \int_0^1 (\kappa a + (1 - \kappa)b) \theta(\kappa) d\kappa \right) \\
& = \Phi \left[\left(\frac{1}{\int_0^1 \theta(\kappa) d\kappa} \int_0^1 \kappa \theta(\kappa) d\kappa \right) a + \left(1 - \frac{1}{\int_0^1 \theta(\kappa) d\kappa} \int_0^1 \kappa \theta(\kappa) d\kappa \right) b \right] \\
& = \Phi(a\lambda + (1 - \lambda)b)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 5.17 ispatlanmış olur. $\square$

Sonuç 5.18. Her $\kappa \in [0, 1]$ için, $\theta(\kappa) = 1$ seçilirse, Theorem 5.17, (2.21) eşitsizliğine indirgenmiş olur.

Teorem 5.19. $\Phi(\kappa) = [\underline{\Phi}(\kappa), \bar{\Phi}(\kappa)]$ olacak şekilde, $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ aralık değerli konveks fonksiyonu verilsin. θ negatif olmayan fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$\lambda = \left(\int_a^b (b - \kappa) \theta(a + b - \kappa) d\kappa \right) / \left(\int_a^b (b - \kappa) \theta(\kappa) d\kappa \right)$$

yazılır. Bu durumda

$$\Phi\left(\frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}\right) \supseteq \frac{1}{\int_a^b \theta(\kappa) d\kappa} (IR) \int_a^b \Phi(\kappa) \theta(\kappa) d\kappa \supseteq \frac{\Phi(a) + \lambda \Phi(b)}{1 + \lambda}$$

elde edilir.

İspat. θ , $[a, b]$ üzerinde negatif olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olduğu için, $\varphi(\kappa) = \theta(b - (b - a)\kappa)$ fonksiyonunun da $[0, 1]$ aralığında negatif olmayan ve integrallenebilir olduğu kolayca görülür. Bu nedenle Teorem 5.17 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Phi(\mu a + (1 - \mu)b) &\supseteq \frac{1}{\int_a^b \varphi\left(\frac{b-\kappa}{b-a}\right) d\kappa} (IR) \int_a^b \Phi(\kappa) \varphi\left(\frac{b-\kappa}{b-a}\right) d\kappa \\ &\supseteq \mu \Phi(a) + (1 - \mu) \Phi(b)\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\int_0^1 \varphi(\kappa) d\kappa} \int_0^1 \kappa \varphi(\kappa) d\kappa \\ &= \frac{1}{\int_0^1 \theta(b - (b - a)\kappa) d\kappa} \int_0^1 \kappa \theta(b - (b - a)\kappa) d\kappa \\ &= \frac{1}{\int_a^b (b - \kappa) \theta(\kappa) d\kappa} \int_a^b (b - \kappa) \theta(\kappa) d\kappa \\ &= \frac{1}{\int_a^b (b - \kappa) \theta(\kappa) d\kappa + \int_a^b (b - \kappa) \theta(a + b - \kappa) d\kappa} \int_a^b (b - \kappa) \theta(\kappa) d\kappa \\ &= \frac{1}{1 + \lambda}\end{aligned}$$

olarak ifade edildiğinden ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 5.20. Teorem 5.19'de θ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ için simetrik olursa (yani tüm $\kappa \in [a, b]$ için $\theta(\kappa) = \theta(a + b - \kappa)$), Teorem 5.19, (2.26) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınmış haline eşittir.

5.3. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN FEJER EŞİTSİZLİKLERİ

Aralık değerli iki değişkenli fonksiyonların çarpımı için yeni eşitsizlikler elde edilir.

$\Upsilon_k(\varkappa; m, n)$ ve $\Xi_k(\varkappa; m, n)$ bu alt bölüm boyunca aşağıdaki gibi ele alınacaktır. $w_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $k = 1, 2, \dots$ için

$$\Upsilon_k(\varkappa; m, n) = \int_m^n (n - \varkappa)^2 w_k(\varkappa) d\varkappa \text{ and } \Xi_k(\varkappa; m, n) = \int_m^n (n - \varkappa)(\varkappa - m) w_k(\varkappa) d\varkappa.$$

Teorem 5.21. Φ ve $\Omega : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_\mathcal{I}^+$, Δ üzerinde tanımlı $\Phi(\kappa, s) = [\underline{\Phi}(\kappa, s), \overline{\Phi}(\kappa, s)]$ ve $\Omega(\kappa, s) = [\underline{\Omega}(\kappa, s), \overline{\Omega}(\kappa, s)]$ olacak şekilde koordinatlarda konveks aralık değerli iki fonksiyon olsunlar. Ayrıca $w_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir, $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'e göre simetrik (yani, $w_1(\varkappa) = w_1(a + b - \varkappa)$) ve $w_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir, $y = \frac{c+d}{2}$ e göre simetrik fonksiyonları tanımlansın. Buna göre

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)(d-c)} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\ & \supseteq \frac{\Upsilon_2(y; c, d)}{(b-a)^3 (d-c)^3} [K(a, b, c, d) \Upsilon_1(\varkappa; a, b) + L(a, b, c, d) \Xi_1(\varkappa; a, b)] \\ & \quad + \frac{\Xi_2(y; c, d)}{(b-a)^3 (d-c)^3} [M(a, b, c, d) \Upsilon_1(\varkappa; a, b) + N(a, b, c, d) \Xi_1(\varkappa; a, b)] \end{aligned}$$

Hermite–Hadamard-Fejér tipli eşitsizliği elde edilir. Burada, $K(a, b, c, d)$, $L(a, b, c, d)$, $M(a, b, c, d)$ ve $N(a, b, c, d)$ (2.36) ifadesindeki şekliyle tanımlanmıştır.

İspat. Φ ve Ω fonksiyonları Δ üzerinde tanımlı koordinatlarda konveks ve aralık değerli iken, $\Phi_\varkappa(y) = \Phi(\varkappa, y)$ ve $\Omega_\varkappa(y) = \Omega(\varkappa, y)$, $[c, d]$ aralığında aralık değerli konveks fonksiyonlar olduğundan, $\Phi_\varkappa$ ve $\Omega_\varkappa$ fonksiyonlarına (5.1) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d-c} (IR) \int_c^d \Phi_\varkappa(y) \Omega_\varkappa(y) w_2(y) dy \\ & \supseteq \frac{\Upsilon_2(y; c, d)}{(d-c)^3} [\Phi_\varkappa(c) \Omega_\varkappa(c) + \Phi_\varkappa(d) \Omega_\varkappa(d)] \\ & \quad + \frac{\Xi_2(y; c, d)}{(d-c)^3} [\Phi_\varkappa(c) \Omega_\varkappa(d) + \Phi_\varkappa(d) \Omega_\varkappa(c)] \end{aligned} \tag{5.27}$$

eşitsizliği bulunur. Ve bu eşitsizlik

$$\frac{1}{d-c} (IR) \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) w_2(y) dy \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned} &\supseteq \frac{\Upsilon_2(y; c, d)}{(d-c)^3} [\Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, d)] \\ &\quad + \frac{\Xi_2(y; c, d)}{(d-c)^3} [\Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, d) + \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, c)] \end{aligned}$$

anlamına gelir. (5.28) eşitsizliği $\frac{w_1(\varkappa)}{b-a}$ ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[a, b]$ sınırları altında $\varkappa$ e göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(b-a)(d-c)} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y)\Omega(\varkappa, y)w_1(\varkappa)w_2(y)dyd\varkappa \\ &\supseteq \frac{\Upsilon_2(y; c, d)}{(b-a)(d-c)^3} (IR) \int_a^b [\Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, d)] w_1(\varkappa)d\varkappa \\ &\quad + \frac{\Xi_2(y; c, d)}{(b-a)(d-c)^3} (IR) \int_a^b [\Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, d) + \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, c)] w_1(\varkappa)d\varkappa \end{aligned} \quad (5.29)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlik (5.29) içindeki her integrale uygulandığında

$$(IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, c)w_1(\varkappa)d\varkappa \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} &\supseteq \frac{\Upsilon_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} [\Phi(a, c)\Omega(a, c) + \Phi(b, c)\Omega(b, c)] \\ &\quad + \frac{\Xi_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} [\Phi(a, c)\Omega(b, c) + \Phi(b, c)\Omega(a, c)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, d)w_1(\varkappa)d\varkappa \\ &\supseteq \frac{\Upsilon_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} [\Phi(a, d)\Omega(a, d) + \Phi(b, d)\Omega(b, d)] \\ &\quad + \frac{\Xi_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} [\Phi(a, d)\Omega(b, d) + \Phi(b, d)\Omega(a, d)], \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}
& (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, c) \Omega(\varkappa, d) w_1(\varkappa) d\varkappa \\
& \supseteq \frac{\Upsilon_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} [\Phi(a, c) \Omega(a, d) + \Phi(b, c) \Omega(b, d)] \\
& \quad + \frac{\Xi_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} [\Phi(a, c) \Omega(b, d) + \Phi(b, c) \Omega(a, d)]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, c) w_1(\varkappa) d\varkappa \\
& \supseteq \frac{\Upsilon_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} [\Phi(a, d) \Omega(a, c) + \Phi(b, d) \Omega(b, c)] \\
& \quad + \frac{\Xi_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} [\Phi(a, d) \Omega(b, c) + \Phi(b, d) \Omega(a, c)]
\end{aligned} \tag{5.33}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. (5.29) de, (5.30)-(5.33) de bulunan eşitsizlikler yerine konularak düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. Öte yandan $\Phi_y(\varkappa) = \Phi(\varkappa, y)$ ve $\Omega_y(\varkappa) = \Omega(\varkappa, y)$ aralık değerli fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak da aynı sonuca varılır. $\square$

Teorem 5.22. $\Phi, \Omega : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, Δ üzerinde tanımlı $\Phi(\kappa, s) = [\underline{\Phi}(\kappa, s), \overline{\Phi}(\kappa, s)]$ ve $\Omega(\kappa, s) = [\underline{\Omega}(\kappa, s), \overline{\Omega}(\kappa, s)]$ olacak şekilde aralık değerli koordinatlarda konveks iki fonksiyon olsunlar. Buna ek olarak, $w_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir, $\varkappa = \frac{a+b}{2}$ 'e göre simetrik (yani, $w_1(\varkappa) = w_1(a+b-\varkappa)$) ve $w_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir, $y = \frac{c+d}{2}$ e göre simetrik fonksiyonları tanımlansın. O halde Hermite–Hadamard–Fejér tipli eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
& 4(IR) \int_a^b \int_c^d \Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\
& \supseteq (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\
& \quad + \frac{K(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} [\Xi_1(\varkappa; a, b) \Upsilon_2(y; c, d) + \Xi_2(y; c, d) \Upsilon_1(\varkappa; a, b) + \Xi_1(\varkappa; a, b) \Xi_2(y; c, d)] \\
& \quad + \frac{L(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} [\Xi_2(y; c, d) \Xi_1(\varkappa; a, b) + \Upsilon_2(y; c, d) \Upsilon_1(\varkappa; a, b) + \Upsilon_1(\varkappa; a, b) \Xi_2(y; c, d)] \\
& \quad + \frac{M(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} [\Xi_2(y; c, d) \Xi_1(\varkappa; a, b) + \Upsilon_2(y; c, d) \Upsilon_1(\varkappa; a, b) + \Xi_1(\varkappa; a, b) \Upsilon_2(y; c, d)]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{N(a,b,c,d)}{(b-a)^2(d-c)^2} [\Upsilon_1(\varkappa; a, b) \Xi_2(y; c, d) + \Upsilon_2(y; c, d) \Xi_1(\varkappa; a, b) + \Upsilon_2(y; c, d) \Upsilon_1(\varkappa; a, b)]$$

ifadesi elde edilir.

İspat. Φ ve Ω fonksiyonları Δ üzerinde aralık değerli ve koordinatlarda konveks olduğundan, $\Phi_\varkappa$, $\Omega_\varkappa$, Φ_y , ve Ω_y fonksiyonları da aralık değerli konveksler. $\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right)$ ve $\Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right)$ fonksiyonları için (5.13) eşitsizliği uygulanır ve bulunan sonuç $2(IR) \int_c^d w_2(y)dy$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & 4\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \int_a^b \int_c^d w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\ & \geq 2(IR) \int_a^b \int_c^d \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\ & \quad + \frac{2}{(b-a)^2} \left[\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\ & \quad \times \left(\int_c^d w_2(y) dy \right) \Xi_1(\varkappa; a, b) \\ & \quad + \frac{2}{(b-a)^2} \left[\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + \Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\ & \quad \times \left(\int_c^d w_2(y) dy \right) \Upsilon_1(\varkappa; a, b) \end{aligned} \quad (5.34)$$

bulunur. Benzer şekilde $\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right)$ ve $\Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right)$ fonksiyonları için de (5.13) eşitsizliği uygulanır ve bulunan sonuç $2(IR) \int_a^b w_1(\varkappa) d\varkappa$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & 4\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \int_a^b \int_c^d w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\ & \geq 2(IR) \int_a^b \int_c^d \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\ & \quad + \frac{2}{(d-c)^2} \left[\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] \\ & \quad \times \left(\int_a^b w_1(\varkappa) d\varkappa \right) \Xi_2(y; c, d) \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{(d-c)^2} \left[\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + \Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
& \times \left(\int_a^b w_1(\varkappa) d\varkappa \right) \Upsilon_2(y; c, d)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (5.34)-(5.35) eşitsizliklerinin sağ tarafındaki her bir terim için (5.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \int_c^d w_2(y) dy & \supseteq (IR) \int_c^d \Phi(a, y) \Omega(a, y) w_2(y) dy \quad (5.36) \\
& + \left[\frac{\Phi(a, c) \Omega(a, c) + \Phi(a, d) \Omega(a, d)}{(d-c)^2} \right] \Xi_1(y; c, d) \\
& + \left[\frac{\Phi(a, c) \Omega(a, d) + \Phi(a, d) \Omega(a, c)}{(d-c)^2} \right] \Upsilon_1(y; c, d),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \int_c^d w_2(y) dy & \supseteq (IR) \int_c^d \Phi(b, y) \Omega(b, y) w_2(y) dy \quad (5.37) \\
& + \left[\frac{\Phi(b, c) \Omega(b, c) + \Phi(b, d) \Omega(b, d)}{(d-c)^2} \right] \Xi_1(y; c, d) \\
& + \left[\frac{\Phi(b, c) \Omega(b, d) + \Phi(b, d) \Omega(b, c)}{(d-c)^2} \right] \Upsilon_1(y; c, d),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \int_c^d w_2(y) dy & \supseteq (IR) \int_c^d \Phi(a, y) \Omega(b, y) w_2(y) dy \quad (5.38) \\
& + \left[\frac{\Phi(a, c) \Omega(b, c) + \Phi(a, d) \Omega(b, d)}{(d-c)^2} \right] \Xi_1(y; c, d) \\
& + \left[\frac{\Phi(a, c) \Omega(b, d) + \Phi(a, d) \Omega(b, c)}{(d-c)^2} \right] \Upsilon_1(y; c, d),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \int_c^d w_2(y) dy & \supseteq (IR) \int_c^d \Phi(b, y) \Omega(a, y) w_2(y) dy \quad (5.39) \\
& + \left[\frac{\Phi(b, c) \Omega(a, c) + \Phi(b, d) \Omega(a, d)}{(d-c)^2} \right] \Xi_1(y; c, d) \\
& + \left[\frac{\Phi(b, c) \Omega(a, d) + \Phi(b, d) \Omega(a, c)}{(d-c)^2} \right] \Upsilon_1(y; c, d),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \int_a^b w_1(\varkappa) d\varkappa &\supseteq (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, c) \Omega(\varkappa, c) w_1(\varkappa) d\varkappa \quad (5.40) \\
&+ \left[\frac{\Phi(a, c) \Omega(a, c) + \Phi(b, c) \Omega(b, c)}{(b-a)^2} \right] \Xi_1(\varkappa; a, b) \\
&+ \left[\frac{\Phi(a, c) \Omega(b, c) + \Phi(b, c) \Omega(a, c)}{(b-a)^2} \right] \Upsilon_1(\varkappa; a, b),
\end{aligned}$$

$$2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \int_a^b w_1(\varkappa) d\varkappa \supseteq (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, d) w_1(\varkappa) d\varkappa \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
&+ \left[\frac{\Phi(a, d) \Omega(a, d) + \Phi(b, d) \Omega(b, d)}{(b-a)^2} \right] \Xi_1(\varkappa; a, b) \\
&+ \left[\frac{\Phi(a, d) \Omega(b, d) + \Phi(b, d) \Omega(a, d)}{(b-a)^2} \right] \Upsilon_1(\varkappa; a, b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \int_a^b w_1(\varkappa) d\varkappa &\supseteq (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, d) w_1(\varkappa) d\varkappa \quad (5.42) \\
&+ \left[\frac{\Phi(a, d) \Omega(a, d) + \Phi(b, d) \Omega(b, d)}{(b-a)^2} \right] \Xi_1(\varkappa; a, b) \\
&+ \left[\frac{\Phi(a, d) \Omega(b, d) + \Phi(b, d) \Omega(a, d)}{(b-a)^2} \right] \Upsilon_1(\varkappa; a, b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \int_a^b w_1(\varkappa) d\varkappa &\supseteq (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, c) \Omega(\varkappa, d) w_1(\varkappa) d\varkappa \quad (5.43) \\
&+ \left[\frac{\Phi(a, c) \Omega(a, d) + \Phi(b, c) \Omega(b, d)}{(b-a)^2} \right] \Xi_1(\varkappa; a, b) \\
&+ \left[\frac{\Phi(a, c) \Omega(b, d) + \Phi(b, c) \Omega(a, d)}{(b-a)^2} \right] \Upsilon_1(\varkappa; a, b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \int_a^b w_1(\varkappa) d\varkappa &\supseteq (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, c) w_1(\varkappa) d\varkappa \quad (5.44) \\
&+ \left[\frac{\Phi(a, d) \Omega(a, c) + \Phi(b, d) \Omega(b, c)}{(b-a)^2} \right] \Xi_1(\varkappa; a, b)
\end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{\Phi(a, d)\Omega(b, c) + \Phi(b, d)\Omega(a, c)}{(b-a)^2} \right] \Upsilon_1(\varkappa; a, b)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (5.36)-(5.44) bulguları (5.34) ve (5.35) eşitsizliklerinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& 8\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \int_a^b \int_c^d w_1(\varkappa)w_2(y)dyd\varkappa \quad (5.45) \\
& \supseteq 2(IR) \int_a^b \int_c^d \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right)\Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) w_1(\varkappa)w_2(y)dyd\varkappa \\
& + 2(IR) \int_a^b \int_c^d \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right)\Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) w_1(\varkappa)w_2(y)dyd\varkappa \\
& + \frac{\Xi_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} (IR) \int_c^d [\Phi(a, y)\Omega(a, y) + \Phi(b, y)\Omega(b, y)] w_2(y)dy \\
& + \frac{\Upsilon_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} (IR) \int_c^d [\Phi(a, y)\Omega(b, y) + \Phi(b, y)\Omega(a, y)] w_2(y)dy \\
& + \frac{\Xi_2(y; c, d)}{(d-c)^2} (IR) \int_a^b [\Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, d)] w_1(\varkappa)d\varkappa \\
& + \frac{\Upsilon_2(y; c, d)}{(d-c)^2} (IR) \int_a^b [\Phi(\varkappa, c)\Omega(\varkappa, d) + \Phi(\varkappa, d)\Omega(\varkappa, c)] w_1(\varkappa)d\varkappa \\
& + \frac{2K(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} \Xi_1(\varkappa; a, b)\Xi_2(y; c, d) \\
& + \frac{2L(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} \Upsilon_1(\varkappa; a, b)\Xi_2(y; c, d) \\
& + \frac{2M(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} \Xi_1(\varkappa; a, b)\Upsilon_2(y; c, d) \\
& + \frac{2N(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} \Upsilon_1(\varkappa; a, b)\Upsilon_2(y; c, d)
\end{aligned}$$

bulunur. $\Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right)$ ve $\Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right)$ fonksiyonlarına (5.13) uygulanırsa

$$2(IR) \int_a^b \int_c^d \Phi\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\varkappa, \frac{c+d}{2}\right) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} &\supseteq (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\ &\quad + \frac{\Xi_2(y; c, d)}{(d-c)^2} (IR) \int_a^b [\Phi(\varkappa, c) \Omega(\varkappa, c) + \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, d)] w_1(\varkappa) d\varkappa \\ &\quad + \frac{\Upsilon_2(y; c, d)}{(d-c)^2} (IR) \int_a^b [\Phi(\varkappa, c) \Omega(\varkappa, d) + \Phi(\varkappa, d) \Omega(\varkappa, c)] w_1(\varkappa) d\varkappa \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Benzer şekilde $\Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right)$ ile $\Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right)$ fonksiyonlarına da (5.13) uygulanırsa

$$2(IR) \int_a^b \int_c^d \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, y\right) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} &\supseteq (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \Omega(\varkappa, y) w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \\ &\quad + \frac{\Xi_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} (IR) \int_c^d [\Phi(a, y) \Omega(a, y) + \Phi(b, y) \Omega(b, y)] w_2(y) dy \\ &\quad + \frac{\Upsilon_1(\varkappa; a, b)}{(b-a)^2} (IR) \int_c^d [\Phi(a, y) \Omega(b, y) + \Phi(b, y) \Omega(a, y)] w_2(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. (5.46) ve (5.47) ifadeleri (5.45) ifadesinde yerine yazılırsa

$$8\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \int_a^b \int_c^d w_1(\varkappa) w_2(y) dy d\varkappa \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq 2(IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(x, y) \Omega(x, y) w_1(x) w_2(y) dy dx \\
&+ \frac{2\Xi_1(x; a, b)}{(b-a)^2} (IR) \int_c^d [\Phi(a, y) \Omega(a, y) + \Phi(b, y) \Omega(b, y)] w_2(y) dy \\
&+ \frac{2\Upsilon_1(x; a, b)}{(b-a)^2} (IR) \int_c^d [\Phi(a, y) \Omega(b, y) + \Phi(b, y) \Omega(a, y)] w_2(y) dy \\
&+ \frac{2\Xi_2(y; c, d)}{(d-c)^2} (IR) \int_a^b [\Phi(x, c) \Omega(x, c) + \Phi(x, d) \Omega(x, d)] w_1(x) dx \\
&+ \frac{2\Upsilon_2(y; c, d)}{(d-c)^2} (IR) \int_a^b [\Phi(x, c) \Omega(x, d) + \Phi(x, d) \Omega(x, c)] w_1(x) dx \\
&+ \frac{2K(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} \Xi_1(x; a, b) \Xi_2(y; c, d) \\
&+ \frac{2L(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} \Upsilon_1(x; a, b) \Xi_2(y; c, d) \\
&+ \frac{2M(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} \Xi_1(x; a, b) \Upsilon_2(y; c, d) \\
&+ \frac{2N(a, b, c, d)}{(b-a)^2(d-c)^2} \Upsilon_1(x; a, b) \Upsilon_2(y; c, d)
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. (5.48) içindeki her bir integrale (5.1) uygulandığında istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 5.23. Teorem 5.21 ve Teorem 5.22 de $w_1(x) = 1$ ve $w_2(y) = 1$ olarak seçilirse, sırasıyla (2.37) ile (2.38) elde edilir.

Sonuç 5.24. Teorem 5.21 ve Teorem 5.22’de $\alpha > 0$ şartıyla $w_1(x) = \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha-1}} [(b-x)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-1}]$ ve $\beta > 0$ şartıyla $w_2(y) = \frac{\beta}{(d-c)^{\beta-1}} [(d-y)^{\beta-1} + (y-c)^{\beta-1}]$ olarak seçilirse sırasıyla (4.16) ve (4.26) eşitsizliklerine dönüşür.

5.4. AĞIRLIKLİ JENSEN EŞİTSİZLİĞİ KULLANILARAK ELDE EDİLEN İKİ DEĞİŞKENLİ FEJER EŞİTSİZLİKLERİ

Bu alt bölümde aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyonlar için bazı ağırlıklı Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler sunulmuştur.

Teorem 5.25. $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ fonksiyonu Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks fonksiyon olsun. $\theta_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\theta_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan Riemann integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^1 \theta_1(\kappa) d\kappa} \int_0^1 \kappa \theta_1(\kappa) d\kappa \text{ ve } \varsigma = \frac{1}{\int_0^1 \theta_2(s) ds} \int_0^1 s \theta_2(s) ds$$

eşitlikleri yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \Phi(\lambda a + (1 - \lambda)b, \varsigma c + (1 - \varsigma)d) \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Theta_1} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, \varsigma c + (1 - \varsigma)d) \theta_1\left(\frac{b - \varkappa}{b - a}\right) d\varkappa \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Theta_2} (IR) \int_c^d \Phi(\lambda a + (1 - \lambda)b, y) \theta_2\left(\frac{d - y}{d - c}\right) dy \right] \\ & \supseteq \frac{1}{\Theta_1 \Theta_2} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \theta_1\left(\frac{b - \varkappa}{b - a}\right) \theta_2\left(\frac{d - y}{d - c}\right) dy d\varkappa \\ & \supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{\varsigma}{\Theta_1} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, c) \theta_1\left(\frac{b - \varkappa}{b - a}\right) d\varkappa + \frac{(1 - \varsigma)}{\Theta_1} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d) \theta_1\left(\frac{b - \varkappa}{b - a}\right) d\varkappa \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda}{\Theta_2} (IR) \int_c^d \Phi(a, y) \theta_2\left(\frac{d - y}{d - c}\right) dy + \frac{(1 - \lambda)}{\Theta_2} (IR) \int_c^d \Phi(b, y) \theta_2\left(\frac{d - y}{d - c}\right) dy \right] \\ & \supseteq \varsigma \lambda \phi(a, c) + \lambda (1 - \varsigma) \Phi(a, d) + (1 - \lambda) \varsigma \phi(b, c) + (1 - \varsigma) (1 - \lambda) \Phi(b, d) \end{aligned} \tag{5.49}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada

$$\Theta_1 = \int_a^b \theta_1\left(\frac{b - \varkappa}{b - a}\right) d\varkappa, \quad \Theta_2 = \int_c^d \theta_2\left(\frac{d - y}{d - c}\right) dy.$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. Φ fonksiyonu Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks olduğundan, $\Phi_\varkappa : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ şartıyla tanımlanan $\Phi_\varkappa(y) = \Phi(\varkappa, y)$ fonksiyonunun her $\varkappa \in [a, b]$ için $[c, d]$ aralığında aralık değerli konveks fonksiyon olduğu görülür. $\Phi_\varkappa(y)$ aralık değerli konveks

fonksiyonunda (5.24) eşitsizliği uygulandığında

$$\Phi_{\varkappa}(\varsigma c + (1 - \varsigma)d) \supseteq \frac{1}{\int_c^d \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy} (IR) \int_c^d \Phi_{\varkappa}(y) \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy \supseteq \varsigma \phi_{\varkappa}(c) + (1 - \varsigma) \Phi_{\varkappa}(d) \quad (5.50)$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte gerekli düzeltmelerle birlikte

$$\Phi(\varkappa, \varsigma c + (1 - \varsigma)d) \supseteq \frac{1}{\Theta_2} (IR) \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy \supseteq \varsigma \phi(\varkappa, c) + (1 - \varsigma) \Phi(\varkappa, d) \quad (5.51)$$

elde edilir. Ardından, (5.51) eşitsizliği $\frac{\theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right)}{\Theta_1}$ ifadesi ile çarpıldıktan sonra $\varkappa$ değişkenine göre a dan b ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Theta_1} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, \varsigma c + (1 - \varsigma)d) \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa \\ & \supseteq \frac{1}{\Theta_1 \Theta_2} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy d\varkappa \\ & \supseteq \frac{\varsigma}{\Theta_1} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, c) \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa + \frac{(1 - \varsigma)}{\Theta_1} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d) \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa \end{aligned} \quad (5.52)$$

bulunur. Benzer şekilde Δ üzerinde aralık değerli koordinatlarda konveks olan Φ fonksiyonu için, $\Phi_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ şartıyla tanımlanan $\Phi_y(\varkappa) = \Phi(\varkappa, y)$ fonksiyonuna göre $\Phi_y(\varkappa)$ de her $y \in [c, d]$ için $[a, b]$ aralığında aralık değerli ve konvektir. Aralık değerli konveks $\Phi_y(\varkappa)$ fonksiyonunda (5.24) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \Phi_y(\lambda a + (1 - \lambda)b) & \supseteq \frac{1}{\int_a^b \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa} (IR) \int_a^b \Phi_y(\varkappa) \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa \\ & \supseteq \lambda \phi_y(a) + (1 - \lambda) \Phi_y(b) \end{aligned} \quad (5.53)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda a + (1-\lambda)b, y) &\supseteq \frac{1}{\int_a^b \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, y) \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa \quad (5.54) \\
&\supseteq \lambda \phi(a, y) + (1-\lambda) \Phi(b, y)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur. $\frac{\theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right)}{\Theta_2}$ ile (5.54) eşitsizliği çarpılır ve sonrasında $[c, d]$ aralığında y 'ye göre integrali alınır

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Theta_2} (IR) \int_c^d \Phi(\lambda a + (1-\lambda)b, y) \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy \quad (5.55) \\
&\supseteq \frac{1}{\Theta_1 \Theta_2} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy d\varkappa \\
&\supseteq \frac{\lambda}{\Theta_2} (IR) \int_c^d \Phi(a, y) \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy + \frac{(1-\lambda)}{\Theta_2} (IR) \int_c^d \Phi(b, y) \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (5.52) ve (5.55) deki eşitsizlikler toplandığında (5.49) de verilen ikinci ve üçüncü eşitsizlikler elde edilir.

$\Phi(\varkappa, \varsigma c + (1-\varsigma)d)$, $[a, b]$ aralığında aralık değerli ve konveks fonksiyon ve $\theta_1(\varkappa)$ ise pozitif ve integrallenebilir bir fonksiyon olduğundan, (5.24) deki ilk eşitsizlik yardımıyla

$$\Phi(\lambda a + (1-\lambda)b, \varsigma c + (1-\varsigma)d) \supseteq \frac{1}{\Theta_1} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, \varsigma c + (1-\varsigma)d) \theta_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa \quad (5.56)$$

yazılır. Aynı şekilde, $\Phi(\lambda a + (1-\lambda)b, y)$ fonksiyonu $[c, d]$ üzerinde aralık değerli konveks iken $\theta_2(y)$ de pozitif ve integrallenebilir olduğu için, yine (5.24) deki ilk eşitsizlik kullanılarak

$$\Phi(\lambda a + (1-\lambda)b, \varsigma c + (1-\varsigma)d) \supseteq \frac{1}{\Theta_2} (IR) \int_c^d \Phi(\lambda a + (1-\lambda)b, y) \theta_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy \quad (5.57)$$

sonucuna varılır. (5.56) ve (5.57) eşitsizlikleri toplanırsa, (5.49)deki ilk eşitsizlik elde edilir.

$\Phi(\varkappa, c)$ ve $\Phi(\varkappa, d)$, $[a, b]$ aralığında aralık değerli konveks olduğundan ve $\theta_1(\varkappa)$ fonksiyonunun pozitif ve integrallenebilirliği sayesinde, (5.24) deki ikinci eşitsizlikte gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} & \frac{\varsigma}{\Theta_1}(IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, c) \theta_1 \left(\frac{b-\varkappa}{b-a} \right) d\varkappa + \frac{(1-\varsigma)}{\Theta_1}(IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d) \theta_1 \left(\frac{b-\varkappa}{b-a} \right) d\varkappa \quad (5.58) \\ & \supseteq \varsigma \lambda \phi(a, c) + \varsigma (1-\lambda) \Phi(b, c) + (1-\varsigma) \lambda \phi(a, d) + (1-\varsigma) (1-\lambda) \Phi(b, d) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\Phi(a, y)$ ile $\Phi(b, y)$ fonksiyonları $[c, d]$ üzerinde aralık değerli konveks ve $\theta_2(y)$ ifadesinde pozitif ve integrallenebilir olduğu için, (5.24) eşitsizliklerinde ikinci eşitsizlikten yararlanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\Theta_2}(IR) \int_c^d \Phi(a, y) \theta_2 \left(\frac{d-y}{d-c} \right) dy + \frac{(1-\lambda)}{\Theta_2}(IR) \int_c^d \Phi(b, y) \theta_2 \left(\frac{d-y}{d-c} \right) dy \quad (5.59) \\ & \supseteq \varsigma \lambda \phi(a, c) + \lambda (1-\varsigma) \Phi(a, d) + (1-\lambda) \varsigma \phi(b, c) + (1-\varsigma) (1-\lambda) \Phi(b, d) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan (5.58) ve (5.59) eşitsizlikleri toplanarak, (5.49) ifadesindeki son eşitsizlik bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 5.26. Teorem 5.25 koşulları altında, her $\kappa, s \in [0, 1]$ için, $\theta_1(\kappa) = 1$ ve $\theta_2(s) = 1$ olacak şekilde seçilirse (2.35) eşitsizliklerine ulaşılır.

Teorem 5.27. $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ olmak üzere, $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ fonksiyonu Δ üzerinde aralık değerli ve koordinatlarda konveks olsun. Bu durumda $\theta_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\theta_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan Riemann integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\lambda = \frac{1}{\int_a^b (b-\varkappa) \theta_1(\varkappa) d\varkappa} \int_a^b (b-\varkappa) \theta_1(a+b-\varkappa) d\varkappa$$

ve

$$\varsigma = \frac{1}{\int_c^d (d-y) \theta_2(y) dy} \int_c^d (d-y) \theta_2(c+d-y) dy$$

olarak yazılır. Ardından

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}, \frac{c+\varsigma d}{1+\varsigma}\right) \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Theta_3} (IR) \int_a^b \Phi\left(\varkappa, \frac{c+\varsigma d}{1+\varsigma}\right) \theta_1(\varkappa) d\varkappa + \frac{1}{\Theta_4} (IR) \int_c^d \Phi\left(\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}, y\right) \theta_2(y) dy \right] \\
& \supseteq \frac{1}{\Theta_3 \Theta_4} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \theta_1(\varkappa) \theta_2(y) dy d\varkappa \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+\varsigma)\Theta_3} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, c) \theta_1(\varkappa) d\varkappa + \frac{\varsigma}{(1+\varsigma)\Theta_3} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, d) \theta_1(\varkappa) d\varkappa \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(1+\lambda)\Theta_4} (IR) \int_c^d \Phi(a, y) \theta_2(y) dy + \frac{\lambda}{(1+\lambda)\Theta_4} (IR) \int_c^d \Phi(b, y) \theta_2(y) dy \right] \\
& \supseteq \frac{\Phi(a, c) + \varsigma \phi(a, d) + \lambda \phi(b, c) + \lambda \varsigma \phi(b, d)}{(1+\lambda)(1+\varsigma)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\Theta_3 = \int_a^b \theta_1(\varkappa) d\varkappa$ ve $\Theta_4 = \int_c^d \theta_2(y) dy$ olarak tanımlanmıştır.

İspat. θ_1 ve θ_2 fonksiyonları sırasıyla $[a, b]$ ve $[c, d]$ aralıklarında tanımlı negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonlar olduğundan, $\varphi_1(\kappa) = \theta_1(b - (b-a)\kappa)$ ve $\varphi_2(s) = \theta_2(d - (d-c)s)$ fonksiyonlarının da $[0, 1]$ üzerinde negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonlar oldukları kolaylıkla gösterilebilir. Böylece Theorem 5.25 kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \Phi(\gamma a + (1-\gamma)b, \delta c + (1-\delta)d) \\
& \supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\int_a^b \varphi_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa} (IR) \int_a^b \Phi(\varkappa, \delta c + (1-\delta)d) \varphi_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) d\varkappa \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\int_c^d \varphi_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy} (IR) \int_c^d \Phi(\gamma a + (1-\gamma)b, y) \varphi_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy \right] \\
& \supseteq \frac{1}{\int_a^b \int_c^d \varphi_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) \varphi_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy d\varkappa} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\varkappa, y) \varphi_1\left(\frac{b-\varkappa}{b-a}\right) \varphi_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) dy d\varkappa
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{\delta}{\int_a^b \varphi_1 \left(\frac{b-\kappa}{b-a} \right) d\kappa} (IR) \int_a^b \Phi(\kappa, c) \varphi_1 \left(\frac{b-\kappa}{b-a} \right) d\kappa \right. \\ &\quad + \frac{(1-\delta)}{\int_a^b \varphi_1 \left(\frac{b-\kappa}{b-a} \right) d\kappa} (IR) \int_a^b \Phi(\kappa, d) \varphi_1 \left(\frac{b-\kappa}{b-a} \right) d\kappa \\ &\quad + \frac{\gamma}{\int_c^d \varphi_2 \left(\frac{d-y}{d-c} \right) dy} (IR) \int_c^d \Phi(a, y) \varphi_2 \left(\frac{d-y}{d-c} \right) dy \\ &\quad \left. + \frac{(1-\gamma)}{\int_c^d \varphi_2 \left(\frac{d-y}{d-c} \right) dy} (IR) \int_c^d \Phi(b, y) \varphi_2 \left(\frac{d-y}{d-c} \right) dy \right] \end{aligned}$$

$$\supseteq \delta \gamma \phi(a, c) + \gamma(1-\delta) \Phi(a, d) + (1-\gamma) \delta \phi(b, d) + (1-\delta)(1-\gamma) \Phi(b, d)$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlik sayesinde

$$\Phi(\gamma a + (1-\gamma)b, \delta c + (1-\delta)d)$$

$$\begin{aligned} &\supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Theta_3} (IR) \int_a^b \Phi(\kappa, \delta c + (1-\delta)d) \theta_1(\kappa) d\kappa + \frac{1}{\Theta_4} (IR) \int_c^d \Phi(\gamma a + (1-\gamma)b, y) \theta_2(y) dy \right] \\ &\supseteq \frac{1}{\Theta_3 \Theta_4} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\kappa, y) \theta_1(\kappa) \theta_2(y) dy d\kappa \\ &\supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{\delta}{\Theta_3} (IR) \int_a^b \Phi(\kappa, c) \theta_1(\kappa) d\kappa + \frac{(1-\delta)}{\Theta_3} (IR) \int_a^b \Phi(\kappa, d) \theta_1(\kappa) d\kappa \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{\Theta_4} (IR) \int_c^d \Phi(a, y) \theta_2(y) dy + \frac{(1-\gamma)}{\Theta_4} (IR) \int_c^d \Phi(b, y) \theta_2(y) dy \right] \\ &\supseteq \delta \gamma \phi(a, c) + \gamma(1-\delta) \Phi(a, d) + (1-\gamma) \delta \phi(b, d) + (1-\delta)(1-\gamma) \Phi(b, d) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\gamma = \frac{1}{\int_0^1 \theta_1(b - (b-a)\kappa) d\kappa} \int_0^1 \kappa \theta_1(b - (b-a)\kappa) d\kappa$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\int_a^b (b-a) \theta_1(\kappa) d\kappa} \int_a^b (b-\kappa) \theta_1(\kappa) d\kappa \\
&= \frac{\int_a^b (b-\kappa) \theta_1(\kappa) d\kappa}{\int_a^b (b-\kappa) \theta_1(\kappa) d\kappa + \int_a^b (b-\kappa) \theta_1(a+b-\kappa) d\kappa} = \frac{1}{1+\lambda}
\end{aligned}$$

ve

$$\delta = \frac{1}{\int_0^1 \theta_2(d-(d-c)s) ds} \int_0^1 s \theta_2(d-(d-c)s) ds = \frac{1}{1+\zeta}.$$

olarak ifade edilir. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 5.28. Teorem 5.27 ifadesinin varsayımları altında, herhangi bir $\kappa \in [a, b]$ için, $\theta_1(\kappa) = \theta_1(a+b-\kappa)$ ve herhangi bir $y \in [c, d]$ için $\theta_2(y) = \theta_2(c+d-y)$ eşitlikleri tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
&\supseteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Theta_3} (IR) \int_a^b \Phi\left(\kappa, \frac{c+d}{2}\right) \theta_1(\kappa) d\kappa + \frac{1}{\Theta_4} (IR) \int_c^d \Phi\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \theta_2(y) dy \right] \\
&\supseteq \frac{1}{\Theta_3 \Theta_4} (IR) \int_a^b \int_c^d \Phi(\kappa, y) \theta_1(\kappa) \theta_2(y) dy d\kappa \\
&\supseteq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\Theta_3} (IR) \int_a^b [\Phi(\kappa, c) + \Phi(\kappa, d)] \theta_1(\kappa) d\kappa \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Theta_4} (IR) \int_c^d [\Phi(a, y) + \Phi(b, y)] \theta_2(y) dy \right] \\
&\supseteq \frac{\Phi(a, c) + \Phi(a, d) + \Phi(b, c) + \Phi(b, d)}{4}.
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde reel değerli fonksiyonlarda yapılan bazı çalışmaları genelleştirecek yeni eşitsizlikler elde edildi. Giriş kısmında verilen tezin amacı olan aralık değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler elde edildi. Tezde düşünülen amaca uygun adımlar atılmış ve istenilen eşitsizlikler ispat edildi.

Genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri ile elde edilen Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler, Sarıkaya ve ark. [40] tarafından reel değerli tek değişkenli fonksiyonlar için tanımlanmıştır. Bu tezde, tek değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integral tanımları verildi. Aralık değerli tek değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri ile Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilebilir mi sorusu yanıtlanmış ve bu problem çözülmüştür.

Tek değişkenli reel değerli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler, Sarıkaya ve ark. [43] tarafından elde edilmiştir. İki değişkenli reel değerli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler ise Sarıkaya [42] tarafından sunulmuştur. Tek değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler Budak ve ark. [5] tarafından elde edilmiştir. Bu tezde, iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integral tanımları verildi. Aralık değerli iki değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilebilir mi sorusu cevaplanmış ve yeni eşitsizlikler ortaya konulmuştur.

Sarıkaya ve Ertuğrul [41], reel değerli tek değişkenli fonksiyonlar için Sarıkaya kesirli integralini tanımlamış ve bu integral yardımıyla Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikleri ispatlamıştır. İki değişkenli reel değerli fonksiyonlar için Sarıkaya kesirli integralleri ve bu integral yardımıyla elde edilen Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler ise Turkay ve ark. [38] tarafından sunulmuştur. Aralık değerli tek değişkenli fonksiyonlar için Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler Zhao ve ark. [47] tarafından ortaya konulmuştur. Bu tezde, iki değişkenli

aralık değerli fonksiyonlar için Sarıkaya kesirli integral operatörleri verildi. Aralık değerli iki değişkenli fonksiyonlar için Sarıkaya kesirli integral operatörleri ile Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilebilir mi sorusuna yanıt aranmış ve bu bağlamda yeni sonuçlar ortaya konulmuştur.

Fonksiyona göre kesirli integral operatörlerini kullanarak Jleli ve Samet [19], tek değişkenli reel değerli fonksiyonlar için Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikleri elde etmiştir. İki değişkenli fonksiyonlar için Budak ve Agarwal [4] bu eşitsizlikleri sunmuştur. Aralık değerli iki değişkenli fonksiyonlar için fonksiyona göre kesirli integrallerini içeren Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler Tunç [44] tarafından elde edilmiştir. Bu tezde iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için fonksiyona göre kesirli integral operatörleri verildi. Verilen bu operatörler kullanılarak aralık değerli iki değişkenli fonksiyonlar için fonksiyona göre kesirli integral operatörleri kullanılarak Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiş ve bu bağlamda literatürde eksik kalan bir soru yanıtlanmıştır. Ayrıca iki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için Hadamard kesirli integral ve Katugompola kesirli integral operatörleri de tanıtıldı. Tanımlanan bu operatörler ile ilgili yeni sonuçlar elde edildi.

Tek değişkenli aralık değerli fonksiyonların çarpımını içeren Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler Zhao ve ark. [48] tarafından elde edilmiştir. Bu tezde bunun ağırlıklı versiyonu yapılabilir mi sorusu cevaplanmış ve bu bağlamda yeni sonuçlar ortaya konulmuştur. Ayrıca, iki değişkenli aralık değerli fonksiyonların çarpımını içeren Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler Zhao ve ark. [50] tarafından sunulmuştur. Bu tezde, bunun ağırlıklı versiyonu elde edilebilir mi sorusuna yanıt aranmış ve bu problem çözülmüştür.

Wu [45], ağırlıklı Jensen eşitsizliği kullanarak reel değerli tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikleri ortaya koymuştur. Bu tezde, aralık değerli tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için aynı eşitsizliklerin elde edilip edilemeyeceği sorusu incelenmiş ve bu problem çözülmüştür.

Sonuç olarak, bu tezde ortaya konulan eşitsizliklerden hareketle, okuyuculara iki değişkenli reel değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integrallerle Hermite–Hadamard tipli eşitsizliğin elde edilebileceği öngörülmektedir. Bu eşitsizlikten sonra, "İki değişkenli aralık değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integrallerle Hermite–Hadamard

tipli eşitsizlik elde edilebilir mi?" sorusu yeni bir problem olarak önerilmektedir. Ayrıca, aralık değerli fonksiyonlar için elde edilen eşitsizliklerin geometrik yorumları da yeni bir çalışma alanı olarak belirlenebilir. Bu tezde elde edilen aralık değerli fonksiyonlar için ağırlıklı Jensen Eşitsizliği kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilebilir ve bu alandaki çalışmalar genişletilebilir. Gelecekte, ilgili okuyucular, konveksliğin farklı türlerini aralık değerli fonksiyonlar için uygulayarak yeni eşitsizlikler elde edebilirler. Aynı zamanda, kesirli analizde bulunan yaklaşımlar kullanılarak aralık değerli fonksiyonlar için yeni operatörler tanımlanabilir ve bu operatörlerle literatürde olmayan yeni eşitsizlikler elde edilebilir. Son olarak, günümüzde oldukça rağbet gören quantum analizi ile aralık değerli fonksiyonlar için çalışılabilecek yeni alanlar ortaya çıkabilir ve bu tezde elde edilen eşitsizlikler quantum analizi yardımıyla yeni eşitsizliklere ve çalışma alanlarına katkı sağlayabilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] J. P. Aubin ve A. Cellina, *Differential Inclusions*, New York, ABD: Springer, 1984.
- [2] E. F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Almanya: Springer-Verlag, 1961.
- [3] H. Budak ve M. Z. Sarıkaya, “Hermite-Hadamard type inequalities for products of two co-ordinated convex mappings via fractional integrals,” *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, c. 58, sayı 4, ss. 11-30, 2019.
- [4] H. Budak ve P. Agarwal, “On Hermite-Hadamard-Type Inequalities for Coordinated Convex Mappings Utilizing Generalized Fractional Integrals,” *International Workshop on Advanced Theory and Applications of Fractional Calculus*, Springer, ss. 227-249, 2018.
- [5] H. Budak, T. Tunç ve M. Z. Sarıkaya, “Fractional Hermite-Hadamard-type inequalities for interval-valued functions,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, c. 148, sayı 2, ss. 705-718, 2020.
- [6] M. Balcı, *Matematik Analiz*, 7. Baskı, İstanbul, Türkiye: Sürat Üniversite Yayınları, 2012.
- [7] Y. Chalco-Cano, A. Flores-Franulic ve H. Roman-Flores, “Ostrowski type inequalities for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative,” *Comput. Appl. Math.*, c. 31, sayı 1, ss. 457-472, 2012.
- [8] Y. Chalco-Cano, W. A. Lodwick ve W. Condori-Equice, “Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration for interval-valued functions,” *Soft Comput.*, c. 19, ss. 3293-3300, 2015.
- [9] A. Dinghas, “Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen,” *Math. Z.*, c. 66, sayı 1, ss. 173-188, 1956.
- [10] A. Dönmez, *Reel Analiz*, 2. Baskı, Ankara, Türkiye: Seçkin Yayıncılık, 2001.
- [11] S. S. Dragomir ve R. P. Agarwal, “Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula,” *Appl. Math. Lett.*, c. 11, sayı 5, ss. 91-95, 1998.
- [12] S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce, “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications,” *RGMI Monographs*, Victoria University, 2000.
- [13] S. S. Dragomir, “On the Hadamard’s inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, ss. 775-788, 2001.
- [14] L. Fejér, “Über die Fourierreihen, II. Math. Naturwiss.,” *Anz Ungar. Akad. Wiss.*, c. 24, sayı 1, ss. 369-390, 1906.
- [15] A. Flores-Franulic, Y. Chalco-Cano ve H. Roman-Flores, “An Ostrowski type inequality for interval-valued functions,” *IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting IEEE*, c. 35, ss. 1459-1462, 2013.

- [16] G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Pólya, *Inequalities*, 2. Baskı, Cambridge, İngiltere: Cambridge University Press, 1942.
- [17] J. Hadamard, “Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d’une fonction considérée par Riemann,” *Journal de mathématiques pures et appliquées*, ss. 171-216, 1893.
- [18] I. Iscan, “Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for convex functions via fractional integrals,” *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, c. 60, sayı 3, ss. 355-366, 2015.
- [19] M. Jleli ve B. Samet, “On Hermite-Hadamard type inequalities via fractional integrals of a function with respect to another function,” *J. Nonlinear Sci. Appl.*, c. 9, sayı 3, ss. 1252-1260, 2016.
- [20] P. Kannapan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Almanya: Springer, 2009.
- [21] U. N. Katugampola, “New approach to a generalized fractional integral,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 218, sayı 3, ss. 860-865, 2011.
- [22] U. S. Kırmacı, “Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula,” *Appl. Math. Comp.*, c. 147, ss. 137-146, 2004.
- [23] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava ve J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, c. 204, 2006.
- [24] V. Lupulescu, “Fractional calculus for interval-valued functions,” *Fuzzy Sets and Systems*, c. 265, ss. 63-85, 2015.
- [25] X. Liu, G. Ye, D. Zhao ve W. Liu, “Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for interval-valued functions,” *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2019, sayı 1, ss. 1-11, 2019.
- [26] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Berlin, Almanya / New York, ABD: Springer-Verlag, 1970.
- [27] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić ve A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, c. 740, Birleşik Krallık: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [28] D. S. Mitrinović ve I. B. Lacković, “Hermite and convexity,” *Aequationes mathematicae*, c. 28, sayı 1, ss. 229-232, 1985.
- [29] S. Markov, “On the algebraic properties of convex bodies and some applications,” *Journal of Convex Analysis*, c. 7, sayı 1, ss. 129-166, 2000.
- [30] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Englewood Cliffs, NJ, ABD: Prentice-Hall, Inc., 1966.
- [31] R. E. Moore, R. B. Kearfott ve M. J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, c. 110, ABD: SIAM, 2009.

- [32] B. Piatek, *On the Riemann Integral of Set-Valued Functions*, Polonya: Zeszyty Naukowe. Matematyka Stosowana, Politechnika Śląska, 2012.
- [33] B. Piatek, "On the Sincov Functional Equation," *Demonstratio Mathematica*, c. 38, sayı 4, ss. 875-882, 2005.
- [34] J. E. Pečarić, F. Proschan ve Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Boston, ABD: Academic Press, 1992.
- [35] B. G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*, Amsterdam, Holland: Elsevier. Science, c. 67, ss. 11-45, 2005.
- [36] H. Roman-Flores, Y. Chalco-Cano ve W. A. Lodwick, "Some integral inequalities for interval-valued functions," *Comput. Appl. Math.*, c. 37, ss. 1306-1318, 2018.
- [37] E. Sadowska, "Hadamard inequality and a refinement of Jensen inequality for set-valued functions," *Results in Mathematics*, c. 32, ss. 332-337, 1997.
- [38] M. E. Turkay, M. Z. Sarikaya, H. Budak ve H. Yildirim, "Some Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinated convex functions via generalized fractional integrals," *Journal of Applied Mathematics and Computing with applications*, 2(1), 2021, 1-21.
- [39] S. G. Samko, A. A. Kilbas ve O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, cilt 1, Yverdon-les-Bains, İsviçre: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [40] M. Z. Sarikaya, H. Budak ve F. Usta, "Some generalized integral inequalities via fractional integrals," *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, c. 89, sayı 1, ss. 27-38, 2019.
- [41] M. Z. Sarikaya ve F. Ertugral, "On the generalized Hermite-Hadamard inequalities," *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, c. 47, sayı 1, ss. 193-213, 2020.
- [42] M. Z. Sarikaya, "On the Hermite-Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex function via fractional integrals," *Integral Transforms and Special Functions*, c. 25, sayı 2, ss. 134-147, 2014.
- [43] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz ve N. Başak, "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities," *Mathematical and Computer Modelling*, c. 57, sayı 9-10, ss. 2403-2407, 2013.
- [44] T. Tunç, "Hermite-Hadamard type inequalities for interval-valued fractional integrals with respect to another function," *Mathematica Slovaca*, c. 72, sayı 6, ss. 1501-1512, 2022.
- [45] S. Wu, "On the weighted generalization of the Hermite-Hadamard inequality and its applications," *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, c. 39, sayı 5, ss. 1741-1749, 2009.
- [46] H. Yaldiz, "On Hermite-Hadamard type inequalities via Katugampola fractional integrals," *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, c. 9, sayı 4, ss. 773-785, 2019.

- [47] D. Zhao, M. A. Ali, A. Kashuri, H. Budak ve M. Z. Sarıkaya, “Hermite-Hadamard-type inequalities for the interval-valued approximately h-convex functions via generalized fractional integrals,” *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2020, sayı 1, ss. 1-38, 2020.
- [48] D. Zhao, T. An, G. Ye ve W. Liu, “New Jensen and Hermite-Hadamard type inequalities for h-convex interval-valued functions,” *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2018, sayı 302, 2018.
- [49] D. Zhao, T. An, G. Ye ve W. Liu, “Chebyshev type inequalities for interval-valued functions,” *Fuzzy Sets and Systems*, 2019.
- [50] D. Zhao, M. A. Ali ve G. Murtaza, “On the Hermite-Hadamard inequalities for interval-valued co-ordinated convex functions,” *Adv. Differ. Equ.*, c. 2020 sayı 1 ss. 1-14, 2020.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hasan KARA
Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2024
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2018
Lisans	Matematik	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2015

TEZDEN ÇIKAN YAYINLAR

1. H. Budak, H. Kara ve F. Hezenci, “Generalized Hermite-Hadamard inclusions for a generalized fractional integral,” *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, c. 53, sayı 2, ss. 383–395, 2023.
2. H. Budak, H. Kara, M. A. Ali, S. Khan ve Y. Chu, “Fractional Hermite-Hadamard-type inequalities for interval-valued co-ordinated convex functions,” *Open Mathematics*, c. 19, sayı 1, ss. 1081–1097, 2021.
3. M. J. Vivas-Cortez, H. Kara, H. Budak, M. A. Ali ve S. Chasreechai, “Generalized fractional Hermite-Hadamard type inclusions for co-ordinated convex interval-valued functions,” *Open Mathematics*, c. 20, sayı 1, ss. 1887-1903, 2022.
4. H. Kara, M. A. Ali ve H. Budak, “Hermite-Hadamard-type inequalities for interval-valued coordinated convex functions involving generalized fractional integrals,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 44, sayı 1, ss. 104-123, 2021.
5. H. Budak, H. Kara ve S. Erden, “On Fejér type inclusions for products of interval-valued convex functions,” *Filomat*, c. 35, sayı 14, ss. 4937–4955, 2021.
6. H. Budak ve H. Kara, “On the weighted generalization of Hermite-Hadamard type Inclusions for interval-valued convex functions,” *Filomat*, c. 36, sayı 14, ss. 4779–4791, 2022.

7. H. Kara, H. Budak, M. A. Ali, M. Z. Sarıkaya ve Y. Chu, "Weighted Hermite-Hadamard type inclusions for products of co-ordinated convex interval-valued functions," *Advances in Difference Equations*, c. 2021, sayı 1, ss. 1–16, 2021.

DiĞER YAYINLAR

A. SCI ve SCI-Exp Kapsamındaki Dergilerinde Yayımlanan Makaleler

1. **H. Kara**, H. Budak ve M. Eyüp Kiriş, "On Fejer type inequalities for co-ordinated hyperbolic ρ -convex functions", *AIMS Mathematics*, c. 5, sayı 5, ss. 4681–4701, 2020.
2. H. Budak, **H. Kara**, M. Zeki Sarıkaya ve M. Eyüp Kiriş, "New Extensions of the Hermite-Hadamard Inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals", *Miskolc Mathematical Notes*, c. 21, sayı 2, ss. 665-678, 2020.
3. X. You, **H. Kara**, H. Budak ve H. Kalsoom, "Quantum Inequalities of Hermite-Hadamard Type for r -Convex Functions", *Journal of Mathematics*, c. 2021, sayı 1, 2021.
4. H. Budak, F. Hezenci ve **H. Kara**, "On parameterized inequalities of Ostrowski and Simpson type for convex functions via generalized fractional integrals", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 44, sayı 17, ss. 12522-12536, 2021.
5. H. Budak, S. Kılınç Yıldırım, **H. Kara** ve H. Yıldırım, "On new generalized inequalities with some parameters for co-ordinated convex functions via generalized fractional integrals", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 44, sayı 17, ss. 13069-13098, 2021.
6. H. Budak, F. Hezenci ve **H. Kara**, "On generalized Ostrowski, Simpson and Trapezoidal type inequalities for co-ordinated convex functions via generalized fractional integrals", *Advances in Difference Equations*, c. 2021, sayı 1, ss. 1-32, 2021.
7. H. Kalsoom, H. Budak, **H. Kara** ve M. A. Ali, "Some new parameterized inequalities for co-ordinated convex functions involving generalized fractional integrals", *Open Mathematics*, c. 19, sayı 1, ss. 1153-1186, 2021.
8. **H. Kara**, H. Budak, N. Alp, H. Kalsoom, M. Zeki Sarıkaya, "On new generalized quantum integrals and related Hermite-Hadamard inequalities", *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2021, sayı 1, ss. 1-15, 2021.
9. F. Hezenci, H. Budak, **H. Kara**, "New version of Fractional Simpson type inequalities for twice differentiable functions", *Advances in Difference Equations*, c. 2021, sayı 1, ss. 1-10, 2021.
10. M. A. Ali, **H. Kara**, J. Tariboon, S. Asawasamrit, H. Budak, F. Hezenci, "Some New Simpson's-Formula-Type Inequalities for Twice-Differentiable Convex Functions via Generalized Fractional Operators", *Symmetry-Basel*, c. 13, sayı 12, ss. 2249, 2021.

11. T. Sitthiwiratttham, H. Budak, **H. Kara**, M. A. Ali, J. Reunsumrit, "On Some New Fractional Ostrowski-and Trapezoid-Type Inequalities for Functions of Bounded Variations with Two Variables", *Symmetry-Basel*, c. 13, sayı 9, ss. 1724, 2021.
12. **H. Kara**, M. A. Ali, H. Budak, "Hermite-Hadamard-Mercer type inclusions for interval-valued functions via Riemann-Liouville fractional integrals", *Turkish Journal of Mathematics*, c. 46, sayı 6, ss. 2193-2207, 2022.
13. **H. Kara**, M. A. Ali, H. Budak, "On quantum Hermite-Hadamard inequalities for differentiable convex functions", *Filomat*, c. 36, sayı 5, ss. 1477-1486, 2022.
14. P. Kösem, **H. Kara**, H. Budak, M. A. Ali, K. Nonlaopon, "On Fractional Newton Inequalities via Coordinated Convex Functions", *Symmetry-Basel*, c. 14, sayı 8, ss. 1526, 2022.
15. X. You, M. A. Ali, H. Budak, **H. Kara**, D. Zhao, "Some parameterized Simpson's type inequalities for differentiable convex functions involving generalized fractional integrals", *Advances in Continuous and Discrete Models*, c. 2022, sayı 1, ss. 1-22, 2022.
16. X. You, F. Hezenci, H. Budak, **H. Kara**, "New Simpson type inequalities for twice differentiable functions via generalized fractional integrals", *AIMS Mathematics*, c. 7, sayı 3, ss. 3959-3971, 2022.
17. **H. Kara**, H. Budak, F. Hezenci, "New extensions of the parameterized inequalities based on Riemann-Liouville fractional integrals", *Mathematics*, c. 2022, sayı 10(18), ss. 3374, 2022; <https://doi.org/10.3390/math10183374>.
18. B. Bin Mohsin, M. Z. Javed, M. U. Awan, H. Budak, **H. Kara**, M. A. Noor, "Conticrete quantum integral inequalities in the setting of majorization theory and applications", *Symmetry-Basel*, c. 14, sayı 9, ss. 1925, 2022.
19. H. Budak, P. Kosem, **H. Kara**, "On new Milne-type inequalities for fractional integrals", *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2023, sayı 10, ss. 1-16, 2023.
20. **H. Kara**, H. Budak, M. A. Ali, "On inequalities of Simpson type for co-ordinated convex functions via generalized fractional integrals", *Filomat*, c. 37, sayı 8, ss. 2605-2631, 2023.
21. H. Budak, **H. Kara**, F. Hezenci, M. Z. Sarıkaya, "New parameterized inequalities for twice differentiable functions", *Filomat*, c. 37, sayı 12, ss. 3737-3753, 2023.
22. F. Hezenci, H. Budak, **H. Kara**, M. Z. Sarıkaya, "Generalized fractional midpoint type inequalities for co-ordinated convex functions", *Filomat*, c. 37, sayı 13, ss. 4103-4124, 2023.
23. **H. Kara**, H. Budak, F. Hezenci, "On extensions of Hermite-Hadamard type inclusions for interval-valued convex functions", *Filomat*, c. 37, sayı 18, ss. 5873-5882, 2023.
24. F. Hezenci, **H. Kara**, H. Budak, "Conformable Fractional Versions of Hermite-Hadamard-Type Inequalities for Twice-Differentiable Functions", *Boundary Value Problems*, c. 2023, sayı 1, ss. 1-16, 2023.

25. F. Hezenci, H. Budak, **H. Kara**, "A study on conformable fractional version of Bullen-type inequalities", *Turkish Journal of Mathematics*, c. 47, sayı 4, ss. 1306–1317, 2023.
26. M. Bohner, H. Budak, **H. Kara**, "Post-quantum Hermite–Jensen–Mercer inequalities", *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, c. 53, sayı 1, ss. 17-26, 2023.
27. **H. Kara**, H. Budak, S. Etemad, S. Rezapour, H. Ahmad, M. K. A. Kaabar, "A Study on the New Class of Inequalities of Midpoint-Type and Trapezoidal-Type Based on Twice Differentiable Functions with Conformable Operators", *Journal of Function Spaces*, c. 2023, Article ID 4624604, 2023.
28. **H. Kara**, H. Budak, A. Ocak Akdemir, "Some new parameterized inequalities based on Riemann-Liouville fractional integrals", *Filomat*, c. 37, sayı 23, ss. 7867–7880, 2023.
29. H. Budak, F. Hezenci, **H. Kara**, M. Z. Sarıkaya, "Bounds for the Error in Approximating a Fractional Integral by Simpson's Rule", *Mathematics*, c. 11, sayı 10, ss. 2282, 2023.
30. H. Budak, **H. Kara**, "On quantum Hermite-Jensen-Mercer Inequalities", *Miskolc Mathematical Notes*, c. 24, sayı 3, ss. 1247-1257, 2023.
31. F. Hezenci, H. Budak, **H. Kara**, U. Baş, "Novel results of Milne-type inequalities involving tempered fractional integrals", *Boundary Value Problems*, c. 2024, sayı 12, ss. 2024:12, 2024.
32. **H. Kara**, H. Budak, "On Hermite-Hadamard type inequalities for newly defined generalized quantum integrals", *Ricerche di Matematica*, c. 73, sayı 2, ss. 1145-1166, 2024.
33. H. Budak, **H. Kara**, T. Tunc, F. Hezenci, S. Khan, "On new trapezoid and midpoint type inequalities for generalized quantum integrals", *Filomat*, c. 38, sayı 7, ss. 2323-2341, 2024.
34. H. Budak, F. Hezenci, T. Tunc, **H. Kara**, "On New Versions of Hermite-Hadamard-Type Inequalities Based on Tempered Fractional Integrals", *Filomat*, c. 38, sayı 7, ss. 2361-2379, 2024.

B. ESCI Kapsamındaki Dergilerinde Yayımlanan Makaleler

1. M. E. Kiriş ve **H. Kara**, "On some new inequalities for s-convex functions", *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, c. 9, sayı 1, ss. 101-113, 2019.
2. H. Budak, **H. Kara**, M. E. Kiriş, "On Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinated trigonometrically ρ -convex functions", *Tbilisi Mathematical Journal*, c. 13, sayı 2, ss. 1-26, 2020.

3. H. Budak, **H. Kara**, M. A. Ali ve M. E. Kiriş, "On some inequalities related to fractional Hermite-Hadamard type for differentiable convex functions", *Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series*, c. 48, sayı 2, ss. 222-233, 2021.
4. H. Budak, **H. Kara**, R. Kaucu, "New midpoint type inequalities for generalized fractional integral", *Computational Methods for Differential Equations*, c. 10, sayı 1, ss. 93-108, 2022.
5. **H. Kara**, H. Budak, M. A. Ali, F. Hezenci, "On inequalities of Simpson's type for convex functions via generalized fractional integrals", *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, c. 71, sayı 3, ss. 806-825, 2022.
6. H. Budak, M. Yavuz, **H. Kara**, "On some new generalized fractional inequalities for twice differentiable functions", *Arabian Journal of Mathematics*, c. 11, sayı 3, ss. 507-519, 2022.
7. **H. Kara**, H. Budak, M. E. Kiriş, "On Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for co-ordinated trigonometrically ρ -convex functions", *Asian European Journal of Mathematics*, c. 16, sayı 3, art. 2350043, 2023.
8. **H. Kara**, S. Erden, H. Budak, "Hermite-Hadamard, Trapezoid, and Midpoint type inequalities involving generalized fractional integrals for convex functions", *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, c. 20, sayı 2, ss. 85-107, 2023.
9. F. Hezenci, **H. Kara**, H. Budak, "Perturbed Fractional Newton type Inequalities via Twice Differentiable Functions", *Honam Mathematical Journal*, c. 45, sayı 2, ss. 285-299, 2023.
10. H. Budak, **H. Kara**, F. Hezenci, "Fractional Simpson type inequalities for twice differentiable functions", *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, c. 20, sayı 3, ss. 97-108, 2023.
11. **H. Kara**, H. Budak, M. A. Ali, "On new generalization of Fejer type inequalities for double integrals", *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, c. 14, sayı 1, ss. 375-391, 2023.
12. S. Kılınc Yıldırım, **H. Kara**, H. Budak, H. Yıldırım, "On new generalized fractional midpoint type inequalities for co-ordinated convex and co-ordinated concave functions", *Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics*, c. 38, sayı 2, ss. 407-428, 2023.
13. F. Hezenci, **H. Kara**, H. Budak, "Inequalities of Simpson-type for twice-differentiable convex functions via conformable fractional integrals", *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, c. 15, sayı 3, ss. 1-10, 2024.

C. Diğer Uluslararası Hakemli Dergilerinde Yayımlanan Makaleler

1. G. Bayrak, M. E. Kiriş, **H. Kara** ve H. Budak, "On new weighted Ostrowski type inequalities for co-ordinated s -convex functions", *Turkish Journal of Inequalities*, c. 5, sayı 1, ss. 76-92, 2021.
2. H. D. Desta, H. Budak, **H. Kara**, "New perspectives on fractional Milne-Type inequalities: Insights from twice-differentiable functions", *Universal Journal of Mathematics and Applications*, c. 7, sayı 1, ss. 30-37, 2024.

D. Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan Tam Metin Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler

1. **H. Kara** ve M. E. Kiriş, "On Some New Inequalities for s -convex Functions", 1st International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2018), April 30-May 4, 2018, Antalya, Turkey.
2. **H. Kara**, H. Budak ve M. E. Kiriş, "On Fejer type inequalities for co-ordinated trigonometrically ρ -convex functions", 2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2019), April 27-30, 2019, Antalya, Turkey, ss. 75-83.
3. **H. Kara**, H. Budak, M. A. Ali, M. Z. Sarıkaya, "On Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinated trigonometrically ρ -convex functions", 3rd International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2020), 2020, Antalya, Turkey.
4. **H. Kara**, H. Budak, F. Hezenci, M. Z. Sarıkaya, "New generalizations of inequalities of midpoint type for co-ordinated convex functions via generalized fractional integrals", 8th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2021), September 24-27, 2021, Bodrum/Muğla, Turkey, ss. 137-152.
5. F. Hezenci, **H. Kara**, H. Budak, M. Z. Sarıkaya, "On New Generalization of Hermite-Hadamard Type Inequalities for Fractional Integrals", 8th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2021), September 24-27, 2021, Bodrum/Muğla, Turkey, ss. 98-108.
6. H. Budak, **H. Kara**, F. Hezenci, "New Weighted Generalizations of Hermite-Hadamard Inequalities for Co-ordinated Convex Functions", 8th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2021), September 24-27, 2021, Bodrum/Muğla, Turkey, ss. 153-160.
7. F. Hezenci, H. Budak, **H. Kara**, "On Midpoint type inequalities for co-ordinated convex functions via generalized fractional integrals", 7th International IFS and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM 2021), May 25-29, 2021, Mersin University, Turkey.

8. **H. Kara**, H. Budak, F. Hezenci, "On new inequalities of Hermite-Hadamard type for fractional integrals", 7th International IFS and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM 2021), May 25-29, 2021, Mersin University, Turkey.
9. **H. Kara**, F. Hezenci, H. Budak, M. K. Yıldız, "On New Versions of Bullen-type inequalities based on conformable fractional integrals", 5th International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2022), October 27-30, 2022, Antalya, Turkey, ss. 11-22.
10. M. E. Kiriş, G. Bayrak, H. Budak, **H. Kara**, "Conformable fractional trapezoid type inequalities via s -convex functions", 5th International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2022), October 27-30, 2022, Antalya, Turkey, ss. 34-42.
11. G. Bayrak, M. E. Kiriş, M. K. Yıldız, H. Budak, **H. Kara**, "Midpoint type inequalities based on conformable fractional integrals for s -convex mappings", 5th International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2022), October 27-30, 2022, Antalya, Turkey, ss. 43-53.
12. H. Budak, **H. Kara**, M. Z. Sarıkaya, "Refinements of Hermite-Hadamard inequalities for conformable fractional integrals", 5th International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2022), October 27-30, 2022, Antalya, Turkey, ss. 54-62.

E. Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan Özet Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler

1. **H. Kara**, H. Budak ve M. E. Kiriş, "On Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinated trigonometrically ρ -convex functions", 2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2019), April 27-30, 2019, Antalya, Turkey.
2. **H. Kara** ve H. Budak, "Generalized Hermite-Hadamard-Fejer Type Inclusions for Interval-Valued Convex Functions", 5th International Conference on Mathematical Sciences (ICMS 2021), June 23-27, 2021, Maltepe University, Turkey, ss. 165-172.
3. **H. Kara**, H. Budak, F. Hezenci, "Some new refinements of Hermite-Hadamard type inclusions for interval-valued convex functions", 4th International Conference on Life and Engineering Sciences (ICOLES 2021), September 23-25, 2021, Fenerbahçe University, İstanbul, Turkey.
4. **H. Kara**, H. Budak, F. Hezenci, "A new refinements of Hermite-Hadamard inclusion based on interval-valued convex mappings", 2nd International Conference on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Computer Algebra: Applications in Engineering (OPSFCA-2022), October 15-16, 2022, Anand-ICE, Jaipur, India.
5. **H. Kara**, H. Budak, F. Hezenci, "Generalizations in conformable fractional integral inequalities with parameters", 34th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA-2023), July 31 - August 4, 2023, University of Helsinki, Finland.