

**ARALIKLI TİP-2
BULANIK KÜMELERLE
DİLSEL ÖZETLEME**

Fatih Emre BORAN

**DOKTORA TEZİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2013
ANKARA**

Fatih Emre BORAN tarafından ARALIKLI TİP-2 BULANIK KÜMELERLE DİLSEL ÖZETLEME adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Diyar AKAY

Tez Danışmanı, Endüstri Müh. Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

Endüstri Müh. Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Diyar AKAY

Endüstri Müh. Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof.Dr. Mustafa KURT

Endüstri Müh. Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof.Dr. M.Ali AKCAYOL

Bilgisayar Müh. Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Kemal ALAYKIRAN

Endüstri Müh. Anabilim Dalı, Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi

Tarih: 25/09/2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatih Emre BORAN

ARALIKLI TİP-2 BULANIK KÜMELERLE DİLSEL ÖZETLEME**(Doktora Tezi)****Fatih Emre BORAN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Eylül 2013****ÖZET**

Bilgi teknolojilerinde meydana gelen gelişmeler veriye erişimi kolaylaştırmış ve farklı kaynaklardan elde edilen büyük boyutlu verinin saklanabilmesine imkan sağlamıştır. Büyük boyutlu veriye sahip olmaktan ziyade veriden insanlar tarafından kolay anlaşılacak bilginin çıkarılması daha önemli bir süreçtir. Bu nedenle bilginin doğal dil temelli cümlelerle gösterimini sağlayan dilsel özetleme işlemi son zamanlarda önemli bir veri madenciliği tekniği olarak ortaya çıkmıştır. Dilsel özetlemeyle ilgili yapılan çalışmaların çoğunda kelimeler klasik bulanık kümelerle (tip-1 bulanık kümelerle) modellenmiştir. Tip-1 bulanık kümeler kişiden kaynaklanan belirsizliği ele alabilmektedir; fakat, kişilerin farklı düşüncelerinden kaynaklanan belirsizliği ele alamamaktadır. Her iki tip belirsizliği ele alabilmek için dilsel özetleme işlemi aralıklı tip-2 bulanık kümelerle gerçekleştirilmiş ve dilsel özetlerin değerlendirilmesinde skalar kardinalite temelli doğruluk derecesi kullanılmıştır. Fakat skalar kardinalite temelli doğruluk derecesinin kullanımı bazı durumlarda tutarsız ve veri tarafından desteklenmeyen dilsel özetlerin üretilmesine neden olmaktadır. Bu tez çalışmasının ana konusu daha tutarlı ve veri tarafından desteklenen dilsel özetlerin üretilmesini sağlamaktır. Bu amacı gerçekleştirebilmek için aralıklı tip-2 bulanık kümelerle etiketlenen dilsel özetlerin değerlendirilmesinde iki yeni doğruluk derecesi önerilmiştir. Önerilen ilk doğruluk derecesi, aralıklı tip-2 bulanık kümelerin aralıklı alfa kesmeleriyle gösterimine dayanmaktadır. Bu nedenle, ilk olarak aralıklı tip-2 bulanık kümelerin aralıklı alfa kesmeleriyle

gösterilebileceği ispatlanmıştır. Daha sonra aralıklı tip-2 bulanık kümelerden aralıklı kütle atama fonksiyonunu elde eden yeni bir yöntem geliştirilmiş ve geliştirilen yöntemin literatürde tanımlanan şartları sağladığı ispat edilmiştir. Son olarak doğruluk derecesinin alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulabilmek için kısıtlı doğrusal olmayan matematiksel bir model önerilmiştir. Önerilen ikinci doğruluk derecesi aralıklı tip-2 bulanık kümenin alfa kesmesi ile elde edilen alt ve üst kesin kümelerle gösterimine dayanmaktadır. İlk olarak alt ve üst kesin kümeler bulunmuştur. Daha sonra her bir alfa kesmesi için olası değerler elde edilmiştir. Son olarak olasılık dağılımı ve olası değerlerin niceleyiciden almış olduğu en büyük ve en küçük değerler bulunarak aralıklı doğruluk derecesi hesaplanmıştır. Bu tez çalışmasında iki yeni doğruluk derecesinin yanısıra dilsel özetlerin yeterli veri tarafından kapsanıp kapsanmadığını, yararlı olup olmadığını ve aykırı bir özet olup olmadığını ölçen aralıklı kapsama derecesi, aralıklı fayda derecesi ve aralıklı aykırılık derecesi gibi yeni kalite ölçümleri önerilmiştir. Ayrıca, bu tez çalışmasında iki farklı dilsel özetin benzerliğinin ölçülmesi için yeni bir benzerlik ölçümü geliştirilmiştir. Geliştirilen benzerlik ölçümünün literatürde tanımlanan aksiyomları sağladığı ispatlanmış ve hangi alanlara uygulanabileceği tartışılmıştır. Önerilen doğruluk dereceleri ve literatürdeki mevcut doğruluk derecesi kullanılarak Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatları zaman serisi dilsel olarak özetlenmiştir. Elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında önerilen doğruluk dereceleri ile elde edilen özetlerin mevcut doğruluk derecesi kullanılarak elde edilen özetlere göre daha tutarlı olduğu görülmüştür.

Bilim Kodu : 906.1.071
Anahtar Kelimeler : Bulanık küme, Aralıklı tip-2 bulanık küme, Veri madenciliği, Dilsel özetleme
Sayfa Adedi : 249
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Diyar AKAY

LINGUISTIC SUMMARIZATION WITH INTERVAL TYPE-2 FUZZY SETS
(Ph.D Thesis)

Fatih Emre BORAN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
September 2013

ABSTRACT

The progress in information technology makes it easy to collect and give opportunity to store a huge amount of data from a variety of sources. The extraction of knowledge that is easily understood by the human beings from the data has become very important task rather than the storage of huge amount of data. Therefore, linguistic summarization allowing the representation of knowledge as natural language based sentences has recently turned out to be one of the important data mining techniques. Most studies on linguistic summarization have handled ordinary fuzzy sets (type-1 fuzzy set) for modeling words. Type-1 fuzzy set is able to deal with intrapersonal uncertainty; however, it is not capable of handling interpersonal uncertainty. In order to model both types of uncertainty, the linguistic summarization have been performed by type-2 fuzzy set, and the scalar cardinality based degree of truth has been used in evaluating the linguistic summaries. However, the use of scalar cardinality based degree of truth has led to generate inconsistent linguistic summaries not supported by enough data in some situations. The main objective of this thesis work is to provide by generating more consistent linguistic summaries supported by enough data. To achieve this objective, two degree of truths are proposed for evaluating the linguistic summaries labelled with interval type-2 fuzzy sets. The proposed first degree of truth is based on the representation of an interval type-2 fuzzy set with interval alpha-cuts. First, it is proved that an interval type-2 fuzzy set can be presented by the union of interval alpha-cuts.

Next, a way of how to obtain interval mass assignments from interval type-2 fuzzy sets is suggested, and then it is proved that the proposed method satisfies the given properties in the literature. Finally, a constrained non-linear mathematical programming model is established to find the minimum and the maximum values of the degree of truth. The proposed second degree of truth is based on the representation of an interval type-2 fuzzy set with the lower and the upper crisp sets obtained by the alpha-cuts. First, the lower and the upper crisp sets are found. Then the possible values for each alpha cuts are obtained. Finally, the degree of truth is computed by using the probability distribution and the minimum and the maximum values taken by a quantifier for each of the possible values. In this thesis work, new quality measures such as the interval coverage degree, interval usefulness degree and interval outlier degree have been also proposed. Furthermore, a new similarity measure has been introduced to measure the similarity between two linguistic summaries. It is proved that the proposed similarity measure satisfies the axioms given in the literature and discussed which areas was to be implemented. The time series of Europe Brent Spot Price (per barrel) has been linguistically summarized using the proposed two degree of truths and the existing degree of truth in the literature. When the results are compared, the results obtained by the proposed two degree of truths are more consistent than those of the existing degree of truth.

Science Code : 906.1.071
 Key Words : Fuzzy set, Interval type-2 fuzzy set, Data Mining,
 Linguistic summarization
 Page Number : 249
 Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Diyar AKAY

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Doç. Dr. Diyar AKAY'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan değerli aileme teşekkürü ederim. Son olarak, tez çalışmamı maddi olarak destekleyen TÜBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xi
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xiv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xvii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	6
2.1. Tip-1 Bulanık Kümeler	6
2.2. Tip-2 Bulanık Kümeler	20
2.3. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümeler	26
3. DİLSEL ÖZETLEME	38
3.1. Kardinalite Temelli Yöntemler	42
3.1.1. Skalarkardinalite temelli doğruluk derecesi	46
3.1.2. Bulanık kardinalite temelli doğruluk derecesi	62
3.1.3. Diğer yöntemler	95
3.1.4. Aralıklı tip-2 bulanık kümelerle dilsel özetleme.....	109
3.2. Eğer-İse Yapısındaki Kurallar.....	121
3.2.1. Bulanık kuralların modellenmesi	125
3.2.2. Bulanık kuralların değerlendirilmesi.....	133

Sayfa

4. DİLSEL ÖZETLEME UYGULAMALARI: LİTERATÜR ARAŞTIRMASI...	136
5. ARALIKLI TIP-2 BULANIK DİLSEL ÖZETLERİN DEĞERLENDİRİLMESİNDE OLASILIK TEMELLİ YÖNTEMLER	149
5.1. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümelerin Gösterimi	150
5.2. Aralıklı Kütle Atama Fonksiyonu	157
5.3. Tip-II Niceleyici Cümle Yapısındaki Aralıklı Tip-2 Bulanık Özetlerin Değerlendirilmesi: Aralıklı Kütle Atama Fonksiyonu Temelli Yöntem.....	168
5.4. Tip-I ve Tip-II Niceleyici Cümle Yapısındaki Aralıklı Tip-2 Bulanık Özetlerin Değerlendirilmesi: Olasılık Temelli Doğruluk Derecesi.....	184
5.4.1. Tip-I niceleyici cümleler	184
5.4.2. Tip-II niceleyici cümleler.....	193
5.5. Farklı Kalite Ölçümleri	209
6. DİLSEL ÖZETLER ARASINDAKİ BENZERLİĞİN ÖLÇÜLMESİ	213
6.1. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümeler için Yeni Bir Uzaklık ve Benzerlik Ölçüsü.....	213
6.2. Dilsel Özetlerin Benzerliğinin Ölçülmesi	220
7. UYGULAMA.....	222
8. SONUÇLAR	231
ÖZGEÇMİŞ	249

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Tez içeriği	5
Şekil 2.1. Farklı tipdeki bulanık kümeler : (a) Kesikli bulanık küme (b) Sürekli bulanık küme	7
Şekil 2.2. Bulanık kümelerde öz, destek, sınır, geçiş noktaları ve yükseklik	8
Şekil 2.3. Üçgensel bulanık sayı	9
Şekil 2.4. Dilsel değişken örneği	11
Şekil 2.5. (a) Üçgensel Tip-1 üyelik fonksiyonu (b) Bulanıklaştırılmış Üçgensel Tip-1 üyelik fonksiyonu	20
Şekil 2.6. (a) 3 boyutlu tip-2 üyelik fonksiyonu (b) $x = 2$ noktasında tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi	23
Şekil 2.7. Kesikli u ve x eksenlerinde BKA örneği.....	25
Şekil 2.8. (a) 3 boyutlu aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonu (b) $x = 2$ noktasında aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi.....	27
Şekil 2.9. Aralıklı tip-2 bulanık küme için BKA, alt, üst üyelik fonksiyonları ve gömülü tip-1 bulanık kümenin gösterimi	29
Şekil 3.1. (a) “yaklaşık 3” mutlak niceleyicisi (b) “çoğu” göreceli niceleyicisi.....	41
Şekil 3.2. Niceleyici için 3 farklı model : (a) ve (b) tip-1 BK (c) aralıklı tip-2 BK	55
Şekil 3.3. S tip $f(r)$ fonksiyonu.....	57
Şekil 3.4. (a) Almanya’nın güneyi (b) “Almanya’nın güneyinin en az %60’ı bulutludur” $Z_Q = 0$ (c) “Almanya’nın güneyinin en az %60’ı bulutludur” $Z_Q = 1$	60
Şekil 3.5. (a) Almanya’nın güneyi (b) “Almanya’nın güneyinin yaklaşık %10’u bulutludur” $Z_Q = 1$ (c) “Almanya’nın güneyinin yaklaşık %10’u bulutludur” $Z_Q = 1$	61

Şekil	Sayfa
Şekil 3.6. (a) Almanya'nın güneyi (b) "Almanya'nın güneyinin en az %60'ı bulutludur" $Y_Q = 0,1$ (c) "Almanya'nın güneyinin en az %60'ı bulutludur" $Y_Q = 0,6$	61
Şekil 3.7. Dereceli doğal sayı.....	78
Şekil 3.8. Dereceli sayılarda çıkarma işlemi	80
Şekil 3.9. Dereceli sayılarda bölme işlemi	82
Şekil 3.10. Yaklaşık yarısı niceleyicisi	84
Şekil 3.11. Dereceli sayılar yöntemiyle elde edilen doğruluk derecesi	85
Şekil 3.12. Bulanık doğruluk derecesi	103
Şekil 3.13. Yüksek kazanç ve genç bulanık kümeleri.....	105
Şekil 3.14. İsveçliler arasında sarışınların dağılımının dilsel olarak ifadesi.....	118
Şekil 3.15. Birkaçı ve çoğu niceleyicisi	120
Şekil 3.16. Magnus'un sarışın olmasının alt olasılık değeri	121
Şekil 3.17. Magnus'un sarışın olmasının üst olasılık değeri.....	121
Şekil 3.18. Dört temel $\mu_{\tau(v_i)}$ fonksiyonu	132
Şekil 4.1. Düzgün ε - yaklaşımı algoritmasının gösterimi : (a) Konilerin kesişimi (gri alan) (b) p_3 noktasından yeni koninin başlaması	137
Şekil 4.2. Dinamikliğin görsel olarak gösterimi	138
Şekil 4.3. Değişimin süresi için "uzun" bulanık kümesinin gösterimi	138
Şekil 4.4. Yerel trendlerin süresi, dinamikliği ve değişkenliği	140
Şekil 5.1. Bölüm 5 akış planı	149
Şekil 5.2. Tip-II niceleyici cümle yapısındaki özetleri değerlendirmesi için önerilen yöntem.....	172
Şekil 5.3. Genç dilsel etiketine ait aralıklı tip-2 BK	191

Şekil	Sayfa
Şekil 5.4. Yaklaşık üçte biri niceleyicisi.....	192
Şekil 5.5. Niceleyici cümle yapısındaki özetlerin değerlendirilmesi için olasılık temelli doğruluk derecesi	209
Şekil 7.1. 02 Ocak 2003-29 Ekim 2012 tarihleri arasındaki Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatı.....	222
Şekil 7.2. 16 Nisan 2012-08 Haziran 2012 tarihleri arasındaki Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatı ve yerel trendler.....	223
Şekil 7.3. Trendlerin değişimi için aralıklı tip-2 BK'lar	224
Şekil 7.4. Trendlerin süresi için aralıklı tip-2 BK'lar	224
Şekil 7.5. Trendlerin değişimi için aralıklı tip-2 BK'lar	224
Şekil 7.6. Niceleyiciler : (a) “Tümü” niceleyicisi (b) “Yaklaşık yarısı” niceleyicisi (c) “Çoğu” niceleyicisi	225

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Tip-2 BK'yı tanımlamada kullanılan semboller ve açıklamalar	21
Çizelge 2.2. Örnek 2.3 durum-I için kütle atama, inanç ve muhtemellik değerleri	37
Çizelge 2.3. Örnek 2.3 durum-II için kütle atama, inanç ve muhtemellik değerleri	37
Çizelge 3.1. Dilsel özetlemede kullanılan semboller ve açıklamaları	39
Çizelge 3.2. Tip I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için önerilen yöntemlerin sağladığı özellikler	69
Çizelge 3.3. Tip II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için önerilen yöntemlerin sağladığı özellikler	70
Çizelge 3.4. Yöntemler arasındaki ilişkiler	70
Çizelge 3.5. KS'de tümleyen ve kesişim işlemi	75
Çizelge 3.6. KS'de tümleyen ve kesişim ve birleşim işlemi	75
Çizelge 3.7. Tek özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyici	88
Çizelge 3.8. İki özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyici	88
Çizelge 3.9. Üç özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyici	89
Çizelge 3.10. Dört özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyici	90
Çizelge 3.11. Kesin kümeler	93
Çizelge 3.12. Hemen hemen tüm niceleyicisinin aldığı değerler	94
Çizelge 3.13. Uzun ve sarışın kümelerinin α kesmeleri	94
Çizelge 3.14. Hemen hemen tüm niceleyicisinin aldığı değerler	94
Çizelge 3.15. Kütle atama transferi ($x > 0$ pozitif transfer, $x < 0$ negatif transfer)	100
Çizelge 3.16. En az önyargılı kütle atama dağılımı	102
Çizelge 3.17. Doğruluk derecesi minimum yapan birleşik kütle atama dağılımı ...	103

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.18. Doğruluk derecesi maksimum yapan birleşik kütle atama dağılımı .	103
Çizelge 3.19. Çalışanların kazanç ve yaş değerleri	105
Çizelge 3.20. Çalışanların yüksek kazanç ve genç bulanık kümelerine aitlik dereceleri	106
Çizelge 3.21. F fonksiyonunun aldığı değerler	106
Çizelge 3.22. Çalışanların yüksek kazanç ve genç bulanık kümelerine aitlik dereceleri	108
Çizelge 4.1. Dilsel özetleme ile ilgili yapılan çalışmalar (zaman serileri).....	143
Çizelge 4.2. Dilsel özetleme ile ilgili yapılan çalışmalar (uygulamalar)	147
Çizelge 4.3. Dilsel özetleme ile ilgili yapılan çalışmalar (Tip-2 BK).....	148
Çizelge 5.1. Alt ve üst kesin kümeler	156
Çizelge 5.2. Aralıklı inanç ve mümkünlük fonksiyonları	165
Çizelge 5.3. Aralıklı inanç ve mümkünlük fonksiyonları	167
Çizelge 5.4. Aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı	170
Çizelge 5.5. Örnek 5.4 için niceleyicinin almış olduğu değerler	175
Çizelge 5.6. Örnek 5.5 için aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı	178
Çizelge 5.7. Örnek 5.6a için aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı.....	181
Çizelge 5.8. Örnek 5.6b için aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı.....	182
Çizelge 5.9. $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK için alt ve üst kesin kümeler	187
Çizelge 5.10. Genç aralıklı tip-2 BK için alt ve üst kesin kümeler.....	192
Çizelge 5.11. Alt ve üst kesin kümeler	195
Çizelge 5.12. Uzun ve sarışın aralıklı tip- 2 BK'larına ait alt ve üst kesin kümeler	203

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.13. Olası oran değerleri ve niceleyiciden almış oldukları en büyük ve en küçük değerler	203
Çizelge 5.14. Durum-I için $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait alt ve üst kümeler	204
Çizelge 5.15. Durum-II için $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait alt ve üst kümeler	205
Çizelge 5.16. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait alt ve üst kümeler	207
Çizelge 5.17. Olası oran değerleri ve niceleyiciden almış oldukları en büyük ve en küçük değer	207

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simge ve kısaltmalar açıklamaları ile aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklama
X	Evrensel küme
A	Tip-1 Bulanık küme
x_i	i. eleman
$\mu_A(x_i)$	x_i elemanın A kümesine aitlik derecesi
α	Alfa kesmesi
α^+	Güçlü alfa kesmesi
A_α	Elemanlarının üyelik dereceleri α 'ya eşit ya da büyük olan kesin küme
A_{α^+}	Elemanlarının üyelik dereceleri α 'dan büyük olan kesin küme
$ET(x)$	x değişkeninin etiket kümesi
G	Sözdizimsel kural
$\mathcal{M}$	Anlamsal kural
Θ	Dilsel atom
A_1	Tip-1 Bulanık küme
A_2	Tip-1 Bulanık küme
$\cap$	Kesişim operatörü
$\otimes$	t-norm operatörü
$\cup$	Birleşim operatörü
$\oplus$	t-konorm operatörü
I	Bulanık koşullu önerme operatörü
Z	Bulanık sayısı
Ng	Tümleyen

Simgeler	Açıklamalar
$\neg$	Tümleyen
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
ϕ	Sonlu genelleştirilmiş doğal sayı
β	Sonlu genelleştirilmiş doğal sayı
$\mathbb{C}$	Bulanık kardinalite
u	İkincil değişken
$\tilde{A}$	Tip-2 bulanık küme
J_x	Birincil üyelik derecesi
$u_{\tilde{A}}(x, u) (f_x(u)/u)$	İkincil üyelik derecesi
$\tilde{A}^I$	Aralıklı tip-2 bulanık küme
$\tilde{A}_e$	Gömülü tip-2 bulanık küme
$\tilde{A}_e^j$	j. gömülü tip-2 bulanık küme
$\tilde{A}_e^I$	Gömülü aralıklı tip-2 bulanık küme
$\tilde{A}_{e_j}^I$	j. gömülü aralıklı tip-2 bulanık küme
A_e	Gömülü tip-1 bulanık küme
A_e^j	j. gömülü aralıklı tip-1 bulanık küme
$\mu_A^I(x_i)$	Aralıklı üyelik derecesi
$\mu_A^L(x_i)$	Alt üyelik derecesi
$\mu_A^U(x_i)$	Üst üyelik derecesi
$\mathcal{L}^I$	Aralıklı kafes
$\otimes^I$	Aralıklı t-norm operatörü
$\oplus^I$	Aralıklı t-konorm operatörü
$\mathcal{N}$	Aralıklı tümleyen
α^I	Aralıklı alfa kesmesi

Simgeler**Açıklama**

$\tilde{A}_\alpha^l(x_i)$

Aralıklı tip-2 bulanık kümenin α kesmesi

$\underline{\tilde{A}}_\alpha^l(x_i)$

Aralıklı tip-2 bulanık kümenin α kesmesi ile oluşan alt kesin küme

$\bar{\tilde{A}}_\alpha^l(x_i)$

Aralıklı tip-2 bulanık kümenin α kesmesi ile oluşan üst kesin küme

$\tilde{A}_{[\alpha_i, \alpha_j]}^l(x_i)$

Aralıklı α kesmeleriyle oluşan kesin kümeler

Υ

Aralıklı seviye kümesi

Pl

Mümkünlük fonksiyonu

Bel

İnanç fonksiyonu

$\mathbb{D}$

Veritabanı

Y

Veritabanındaki tüm nesnelerin kümesi

y_m

Veritabanındaki m. nesne

v_k

k. özellik

X_k

 v_k 'in tanım kümesi

$v_k(y_m)$

m. kaydın k. özelliğine ait değeri

d_m

m. nesne için tüm özellikleri kapsayan kayıt

S_k

Özetleyici

$w_g(S_g)$

Öncül özetleyici

Q

Niceleyici

T

Doğruluk derecesi

T_2

Belirsizlik derecesi

T_3

Kapsama derecesi

T_4

Uygunluk derecesi

T_5

Özet uzunluğu

T_c

Yeterli kapsama derecesi

T_u

Fayda derecesi

T_o

Aykırlık derecesi

T_s

Basitlik derecesi

Simgeler	Açıklama
$\forall$	Tümü niceleyicisi
$\exists$	En az biri niceleyicisi
$\emptyset$	Boş küme
$Y_Q(S)$	Tip-I niceleyici cümleler için OWA Operatör Temelli Doğruluk Derecesi
b_i	S bulanık kümesine ait elemanların üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıralandığında i. en büyük değer
w_i	i. kalite ölçümüne ait ağırlık
$Z_Q(S)$	Tip-I niceleyici cümleler için Zadeh Tarafından Önerilen Doğruluk Derecesi
$C_Q(S)$	Tip-I niceleyici cümleler için Choquet İntegral Temelli Doğruluk Dereceleri
$P(S w_g(S_g))$	$w_g(S_g)$ bulanık kümesinin S bulanık kümesine göre göreceli skalar kardinalitesi
$Z_Q(S w_g(S_g))$	Tip-II niceleyici cümleler için Zadeh Tarafından Önerilen Doğruluk Derecesi
$Y_Q(S w_g(S_g))$	Tip-II niceleyici cümleler için OWA Operatör Temelli Doğruluk Derecesi
e_j	$w_g(S_g)$ bulanık kümesinin j. en küçük elemanı
j_i	$\overline{w_g(S_g)} \vee S$ bulanık kümesinin üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıralandığında i. en büyük üyelik derecesi
$G_Q(S)$	Tip-I niceleyici cümleler için G Tipi Bulanık kardinalite Temelli Yöntem
$E(S,i)$	S bulanık kümesinin i tane elemana sahip olmasının olabilirliği
$L(S,i)$	S bulanık kümesinin en az i tane elemana sahip olmasının olabilirliği

Simgeler	Açıklama
$GD_Q(S)$	Tip-I niceleyici cümleler için GD Tipi Bulanık kardinalite Temelli Yöntem
$ED(S, i)$	S bulanık kümesinin i tane elemana sahip olmasının olabilirliği
$Z(S, i)$	S bulanık kümesinin i tane elemana sahip olmasının olabilirliği
$GD_Q(S w_g(S_g))$	Tip-II Niceleyici Cümleleri Değerlendirmek için Olasılık Temelli Yöntem
$ER(S w_g(S_g), c)$	S bulanık kümesinin $w_g(S_g)$ bulanık kümesine göre göreceli bulanık kardinalitesi
c	Göreceli bulanık kardinalitenin oranı
$ZS_Q(S w_g(S_g))$	Tip-II Niceleyici Cümleleri Değerlendirmek için Olabilirlik Temelli Yöntem
$ES(S w_g(S_g), c)$	S bulanık kümesinin $w_g(S_g)$ bulanık kümesine göre göreceli bulanık kardinalite
Λ	α kesmelerinin oluşturduğu sonlu küme
ρ	Λ kümesinde tanımlı elemanı evrensel kümedeki bir alt kümeye götüren fonksiyon
(Λ_s, ρ_s)	S özelliğinin kısıtlama seviyesi ile gösterimi
Ω_s	$S = (\Lambda_s, \rho_s)$ kümesinin kesin gösterimlerinin oluşturduğu küme
m	Kütle olasılık ataması
$ST(E)$	Kısıtlama seviyesi temelli nümerik değerlendirme
$E_Q(S w_g(S_g))$	Kısıtlama seviyesi temelli doğruluk derecesi
x^c	Dereceli sayıların kanonik gösterimi
$\mathbb{N}_f$	Dereceli doğal sayılar
$\mathbb{Z}_f$	Dereceli tam sayılar

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{Q}_f$	Dereceli oransal sayılar
$\mathfrak{R}$	Dereceli tam sayılarda denklik bağıntısı
$\mathfrak{R}'$	Dereceli oransal sayılarda denklik bağıntısı
T_δ	Dereceli sayılar kullanılarak olasılık temelli doğruluk derecesi
T_ϕ	Dereceli sayılar kullanılarak olabilirlik temelli doğruluk derecesi
$\wp$	Kuvvet kümesi
$\tilde{\wp}$	Bulanık kuvvet kümesi
$Mk(Q)$	Bulanıklaştırma mekanizması
$Fm'(Q)$	Bağımsız bulanıklaştırma mekanizması
$m_{\frac{1}{2}}$	Genelleştirilmiş bulanık medyan
$med_{\frac{1}{2}}$	Bulanık medyan
$Y'_Q(S)$	Tip-I niceleyici cümleler için Yager OWA Operatör Temelli Olmayan Doğruluk Derecesi
$S_Q(S)$	Tip-I niceleyici cümleler için Sugeno İntegral Temelli Doğruluk Dereceleri
$V_Q(S w_g(S_g))$	Tip-II niceleyici cümleler için Villa Cubero Medina ve Pons Yöntemi
$\sigma_{w_g(S_g)}$	$w_g(S_g)$ kümesinin üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıranmış hali
$\mathfrak{M}$	Birleşik kütle olasılık ataması
$\mathfrak{M}^{LPD}$	En az ön yargılı olasılık ataması
T_m	Kütle olasılık atama temelli doğruluk derecesi
$E(x, (i_1, j_1), (i_2, j_2))$	Kütle olasılık transferi

Simgeler	Açıklama
$pos(\Delta\mathfrak{M})$	Pozitif kütle olasılık transferleri
$neg(\Delta\mathfrak{M})$	Negatif kütle olasılık transferleri
$\mathfrak{M}^{Min}$	Doğruluk derecesini minimum yapan olasılık ataması
$\mathfrak{M}^{Maks}$	Doğruluk derecesini maksimum yapan olasılık ataması
$T_{\omega(\beta)}$	Tip-I niceleyici cümleler için Küme Merkezli Fonksiyonel doğruluk derecesi
T_g	Tip-II niceleyici cümleler için Küme Merkezli Fonksiyonel doğruluk derecesi
$\tilde{Q}^I$	Aralıklı tip-2 BK ile modellenen niceleyici
$\tilde{S}_k^I$	Aralıklı tip-2 BK ile modellenen özetleyici
$\tilde{T}$	Aralıklı doğruluk derecesi
$OK(\tilde{S}_1^I)$	Aralıklı tip-2 BK için ortalama kardinalite
$\tilde{Y}_{DAO}^I$	Aralıklı tip-2 BK için dilsel ağırlıklı ortalama operatörü
Pr	Olasılık
π	Olabilirlik dağılımı
$\pi_{X_2 X_1}$	Koşullu olabilirlik dağılımı
Π	Olabilirlik ölçümü
Nec	Gereklilik ölçümü
Δ	Garantili olabilirlik ölçümü
∇	Potansiyel kesinlik ölçümü
$\mathbb{S}_+$	Pozitif örnekler
$\mathbb{S}_-$	Negatif örnekler
$\mathbb{S}_\pm$	İlgisiz örnekler
$T_{güv}$	Bulanık kurallar için doğruluk derecesi
η	Yerel trendin x eksenine yaptığı acı
t	Yerel trendin süresi

Simgeler	Açıklama
δ	Yerel trendle zaman serisinin değerleri arasındaki farklılık
Bel_m^-	Aralıklı inanç fonksiyonu alt değeri
Bel_m^+	Aralıklı inanç fonksiyonu üst değeri
Pl_m^-	Aralıklı mümkünlük fonksiyonu alt değeri
Pl_m^+	Aralıklı mümkünlük fonksiyonu üst değeri
$\tilde{T}_E$	Olasılık temelli doğruluk derecesi
T_E^L	Olasılık temelli doğruluk derecesinin alt değeri
T_E^U	Olasılık temelli doğruluk derecesinin üst değeri
$\tilde{T}_F$	Aralıklı kütle atama fonksiyonu temelli doğruluk derecesi
T_F^L	Aralıklı kütle atama fonksiyonu temelli doğruluk derecesinin alt değeri
T_F^U	Aralıklı kütle atama fonksiyonu temelli doğruluk derecesinin üst değeri
$\varphi(\alpha_i)$	α_i seviyesine atanan kanıt
$c_\diamond$	Muhtemel değerler/muhtemel oranlar
C_{α_i}	Muhtemel oranların oluşturmuş olduğu küme
$\tilde{T}_c$	Aralıklı kapsama derecesi
T_c^L	Aralıklı kapsama derecesinin alt değeri
T_c^U	Aralıklı kapsama derecesinin üst değeri
$\tilde{T}_u$	Aralıklı fayda derecesi
T_u^L	Aralıklı fayda derecesinin alt değeri
T_u^U	Aralıklı fayda derecesinin üst değeri
$\tilde{T}_o$	Aralıklı aykırılık derecesi
T_o^L	Aralıklı aykırılık derecesinin alt değeri
T_o^U	Aralıklı aykırılık derecesinin üst değeri

Kısaltmalar	Açıklama
BK	Bulanık küme
BA	Belirsizliğin kapladığı alan
BS	Bulanık sayı
GDS	Genelleştirilmiş doğal sayı
KGDS	Konveks genelleştirilmiş doğal sayı
KS	Kısıtlama seviyesi
SBK	Sonlu bulanık küme

1. GİRİŞ

Son yıllarda bilişim teknolojileri baş döndürücü bir hızla gelişmekte ve bu gelişmelerin neticesinde de çeşitli alanlara başarıyla uygulanmaktadır. Artan bilişim teknolojileri uygulamalarıyla birlikte veriye ulaşmak kolaylaşmakta, çok büyük boyutlu veri kolay bir şekilde saklanabilmekte ve paylaşılabilmektedir. Fakat, sadece ham veriye sahip olmak insanları veri zengini, bilgi yoksulu yapmaktadır. Çünkü veri hacminin ve çeşitliliğinin fazla olmasından ziyade bu veriden elde edilecek olan bilginin önemi daha fazladır. Bu nedenle *bilgi keşfi/veri madenciliği* olarak adlandırılan yaklaşım önemi giderek artan bir araştırma alanı olarak ortaya çıkmıştır [1, 2].

Veri madenciliği kısaca, verinin elde edilmesi ve ön işleme işlemlerin yapılmasının ardından çeşitli algoritmalar ve teknikler kullanılarak anlamlı ve faydalı bilginin elde edilmesi ve bu bilginin kullanılarak bir eylemin gerçekleşmesine kadar geçen süreci ifade etmek için kullanılır [3]. Veri madenciliğinde iki temel amaç söz konusudur. Bunlardan birincisi tahmin yapmak, ikincisi ise tanımlayıcı bilgileri ortaya çıkarmaktır [2]. Veri madenciliğinde tahmin, veritabanında yer alan belirli bir özelliğin değerinin diğer özelliklerin değerlerine dayanarak öngörülmesidir. Tahmin edilecek özellik hedef ya da bağımlı değişken, tahmin yapmak için kullanılacak girdi değişkenleri ise açıklayıcı ya da bağımsız değişkenler olarak adlandırılır. Tahmin modellemesinde sınıflandırma ve regresyon olmak üzere iki tip kategori vardır. Sınıflandırmada tahmin edilecek olan hedef değişken kategorik değer alırken, regresyonda ise sürekli ya da kategorik değer alabilmektedir. Günümüzde, veritabanlarında oldukça fazla sayıda özelliğe ait büyük hacimli veri tutulmaktadır. Bu ise özellikler arasında var olan ilişkilerin ortaya çıkarılmasını zorlaştırmaktadır. Bu nedenle, veri madenciliğinde tanımlayıcı modeller geliştirilmiştir. Bu modellerde ki amaç, veritabanında yer alan özellikler arasında var olan ilişkileri özetleyen örüntülerin elde edilmesidir [4]. Veritabanında yer alan veriden tanımlayıcı bilgilere ulaşmak için kullanılan yöntemlerden biri özetleme işlemidir. En bilinen özetleme işlemi istatistiksel özetlemedir. Veri setinin ortalaması, standart sapması, varyansı ve ortancası gibi değerleri hesaplanarak basit bir formda özetleme işlemi

yapılabilmektedir. Bu tip özetlemede veri setinde yer alan özelliklerin tanımlayıcı bilgileri kesindir; fakat sınırlıdır. Ayrıca, sayısal olmayan veri bu yöntemler ile özetlenememektedir.

İnsanlar günlük yaşamda daha az kesin olmasına rağmen rakamlar yerine doğal dili kullanmayı tercih etmektedirler. Çünkü insanlar kesin rakamlar yerine dilsel ifade biçimindeki bilgileri daha kolay yorumlamakta ve değerlendirebilmektedir. Örneğin, 183 cm uzunluğunda ki bayanlar yerine uzun boylu bayanlar ifadesi daha kolay hatırlanmaktadır [5]. Bu nedenle veritabanlarının dilsel olarak özetlenmesi daha anlaşılardır. Veritabanının dilsel olarak özetlenmesiyle veriden kısa, öz ve insanlar tarafından kolayca anlaşılacak ifadelerin üretilmesi özetlenmektedir. Bu yöntemde veri doğal dil yardımıyla dilsel ifadeler biçiminde açıklanmaktadır. Böylece, sayısal özetlerin yanında sayısal olmayan özetler de elde edilebilmektedir. Bu duruma veritabanından elde edilen *“çoğu orta yaşlı ve deneyimli çalışanların aylık kazancı fazladır”* gibi bir önerme örnek olarak verilebilir. Bu önerme insanlar tarafından kolay anlaşılabilen ve hatırlanabilmektedir.

Dilsel özetleme işlemi literatürde birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Dilsel özetleme işlemi dilsel terimlerle gerçekleştirildiği için Zadeh tarafından önerilen bulanık küme (BK) teorisine dayanan çalışmalar literatürde oldukça yaygındır. BK’larla dilsel özetleme işleminde, veritabanında yer alan özellikler klasik BK’larla (tip-1 BK’larla) etiketlenmektedir [6]. Tip-1 BK’lar belirsizliği ele almada etkin bir yöntem olmasına rağmen hem kişiler arasından hem de kişilerden kaynaklanan belirsizliği ele almakta yeterli değildir. Tip-1 BK’nın genelleştirilmiş hali olan aralıklı tip-2 BK’lar her iki tip belirsizliği daha iyi ele aldığı için dilsel özetleme işleminde kullanılmıştır. Fakat, aralıklı tip-2 BK’larla dilsel özetleme işlemi yeni bir yaklaşım olduğu için dilsel özetlerin değerlendirilmesinde kullanılan kalite ölçümleri bazı durumlarda tutarsız sonuçlar üretmekte ve veri tarafından desteklenen özetlerin üretilmesini engellemektedir [7, 8]. Bu tez çalışmanın amacı aralıklı tip-2 BK’larla dilsel özetleme işleminde veri tarafından desteklenen tutarlı ve güvenilir özetlerin bulunması için yeni doğruluk dereceleri önermektir. Bu amaca ulaşabilmek için çalışma planı aşağıda listelenmiştir.

1. Bölüm 2’de tip-1 BK’lar, tip-2 BK’lar ve aralıklı tip-2 BK’larla ilgili temel tanımlar verilmiştir.
2. Bölüm 3’de tip-1 BK’lar ve aralıklı tip-2 BK’larla dilsel özetleme ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiş ve tip-1 BK’larla dilsel özetlemede kullanılan kalite ölçümleri skalar kardinalite temelli ve bulanık kardinalite temelli olmak üzere iki sınıfa ayrılmıştır. Bölüm 3’de ayrıca “eğer-ise” yapısındaki bulanık kural çeşitleri incelenmiştir.
3. Bölüm 4’de dilsel özetleme işlemiyle ilgili yapılan uygulama çalışmaları incelenmiştir. İncelenen uygulama çalışmaları, uygulama alanı ve kullanılan BK tipine göre sınıflandırılmıştır.
4. Bölüm 5’de aralıklı tip-2 BK’ların α kesmeleri ve aralıklı α kesmeleriyle gösterilebileceği ispatlanmıştır. Aralıklı tip-2 BK’ların aralıklı α kesmesi gösterimi kullanılarak aralıklı tip-2 BK’lardan aralıklı kütle atama olasılığını bulan yeni bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemin literatürde tanımlanan özellikleri sağladığı ispatlanmıştır. Bu yöntem kullanılarak aralıklı tip-2 BK’larla etiketlenen dilsel özetlerin değerlendirilmesi için yeni bir kalite ölçümü önerilmiştir. Ayrıca aralıklı tip-2 BK’ların α kesme gösterimi kullanılarak farklı bir doğruluk derecesi önerilmiştir. Bu doğruluk derecesinin hesaplanmasında ilk olarak alt ve üst kesin kümeler bulunmuştur. Daha sonra her bir alfa kesmesi için olası değerler elde edilmiştir. Son olarak olasılık dağılımı ve olası değerlerin niteleyiciden almış olduğu en büyük ve en küçük değerler bulunarak aralıklı doğruluk derecesi hesaplanmıştır. Önerilen yöntemler literatürde önerilen yöntemler ile karşılaştırıldığında tutarsız sonuçlar üretmediği örnekler üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca Bölüm 5’de dilsel özetlerin yeterli veri tarafından kapsanıp kapsamadığını, yararlı olup olmadığını ve aykırı bir özet olup olmadığını ölçen aralıklı kapsama derecesi, aralıklı fayda derecesi ve aralıklı aykırılık derecesi gibi yeni kalite ölçümleri önerilmiştir.
5. Bölüm 6’da niteleyicilerin ve özetleyicilerin aralıklı tip-2 BK’larla etiketlendiği dilsel özetler arasındaki benzerliğin ölçülmesi için yeni bir benzerlik ölçümü önerilmiştir. Önerilen benzerlik ölçümünün literatürde tanımlanan aksiyomları sağladığı ispatlanmıştır.

6. Bölüm 7’de, Bölüm 5.3 ve Bölüm 5.4’de önerilen doğruluk dereceleri ve literatürde önerilen doğruluk derecesi kullanılarak 2 Ocak 2003 - 29 Ekim 2012 tarihleri arasında yer alan 2537 iş gününü kapsayan Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatları zaman serisi dilsel olarak özetlenmiştir. Bu zaman serisi verisi üzerinde elde edilen özetler karşılaştırıldığında önerilen doğruluk dereceleri ile elde edilen özetlerin mevcut doğruluk derecesi kullanılarak elde edilen özetlere göre daha tutarlı olduğu görülmüştür.
7. Bölüm 8’de bu tez kapsamında önerilen yöntemler genel hatlarıyla değerlendirilmiş ve gelecekte tip-2 BK’larla dilsel özetlemeyle ilgili hangi tür çalışmaların yapılabileceğine değinilmiştir.

Tez bölümleri arasındaki bağlantıları göstermek ve tezin daha kolay anlaşılmasını sağlamak için bölümler hakkında bilgi veren tez içeriği Şekil 1.1’de sunulmuştur.

Bu tez kapsamında literatüre kazandırılan yeni teorik katkılar aşağıda belirtilmiştir.

- Aralıklı tip-2 BK’ların α kesmeleri ve aralıklı α kesmeleriyle gösterilebileceği ispatlanmıştır.
- Aralıklı tip-2 BK’lardan aralıklı kütle atama fonksiyonu elde eden yeni bir yöntem geliştirilmiştir.
- Aralıklı tip-2 BK’ların α kesmeleri ve aralıklı α kesmelerine dayanan yeni iki doğruluk derecesi önerilmiş ve literatürde önerilen yöntem karşılaştırılarak tutarlı sonuçlar ürettikleri gösterilmiştir.
- Aralıklı tip-2 BK ile elde edilen dilsel özetlerin yeterli veri tarafından kapsanıp kapsanmadığını, yararlı olup olmadığını ve aykırı bir özet olup olmadığını değerlendirmek için aralıklı kapsama derecesi, aralıklı fayda derecesi ve aralıklı aykırılık derecesi önerilmiştir.
- Niteleyicilerin ve özetleyicilerin aralıklı tip-2 BK’larla etiketlendiği dilsel özetler arasındaki benzerliğin ölçülmesi için yeni bir benzerlik ölçümü önerilmiştir.

Bölüm 1 Giriş	Araştırma konusu, problemin tanımı ve önemi
Bölüm 2 Temel Tanımlar	Tip-1 BK, Tip-2 BK, Aralıklı tip-2 BK ile ilgili temel tanımlar
Bölüm 3 Literatür Araştırması- Yöntemler	Tip-1 bulanık kümeler ve aralıklı tip-2 bulanık kümelerle dilsel özetleme ile ilgili yapılan teorik çalışmalar
Bölüm 4 Literatür Araştırması- Uygulamalar	Tip-1 bulanık kümeler ve aralıklı tip-2 bulanık kümelerle dilsel özetleme ile ilgili uygulama çalışmaları
Bölüm 5 Yeni Kalite Ölçümleri	Aralıklı tip-2 BK'ların α ve aralıklı α kesmeleriyle gösterimi ve bu gösterimlere dayanan yeni kalite dereceleri
Bölüm 6 Dilsel Özetlerin Benzerliği	Dilsel özetler arasındaki benzerliğin ölçülmesi için yeni bir benzerlik ölçümü
Bölüm 7 Uygulama	Önerilen doğruluk dereceleri kullanılarak Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatları zaman serisinin dilsel olarak özetlenmesi ve elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut yöntem ile karşılaştırılması
Bölüm 8 Sonuç ve Öneriler	Tartışma ve gelecek çalışmalar

Şekil 1.1. Tez içeriği

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tip-1 BK'lar ve tip-2 BK'lar hakkında temel tanımlara yer verilmiştir.

2.1. Tip-1 Bulanık Kümeler

Klasik küme teorisinde, elemanların evrensel kümenin alt kümesi olan A gibi bir kümeye ait olmaları veya ait olmamaları kesin sınırlarla belirlidir. Bir elemanın A kümesine ait olması 0-1 üyelik fonksiyonuyla gösterilir. Eğer bir eleman A kümesinin elemanı ise üyelik fonksiyonu değeri 1'e eşittir. Fakat belirsizliğin ve kesinsizliğin olduğu dünyamızda olayların iki değerli 0-1 mantıkla açıklanması tam olarak doğru bir yaklaşım değildir. Bu nedenle Zadeh klasik küme kavramının gerçek dünyada, özellikle insanları içeren kısmen karmaşık sistemlerle uğraşırken yetersiz kalmasından yola çıkarak, niteliklerin (küme elemanlarının) ikili üyelik fonksiyonuyla ifade edildiği klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonlarıyla ifade edilen BK'larla tanımlanmasını önermiştir [6]. Belirsizliği daha iyi ele alabilmek için BK'lar Zadeh tarafından önerilen tip- n BK'lar kavramıyla genelleştirilmiştir. BK'lar tip- n BK'ların özel bir hali olup ($n=1$) tip-1 BK'lar olarak da adlandırılmaktadırlar [9].

Tanım 2.1.

X evrensel kümesindeki bir bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlanır. Evrensel küme kesikli ise A BK'sı Eş. 2.1'deki gibi gösterilir.

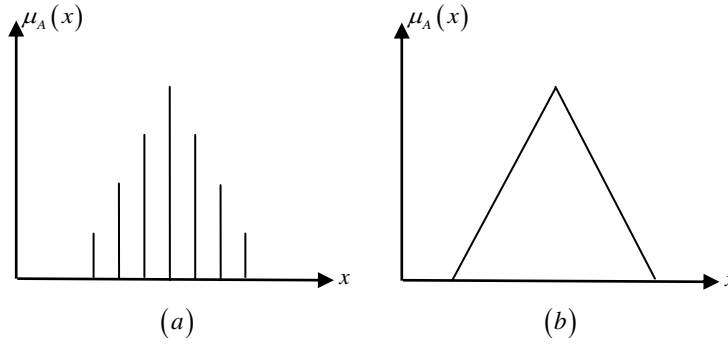
$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \right\} \quad (2.1)$$

$\mu_A(x_i)$, x_i elemanın A kümesine aitlik derecesini ifade eder. Eğer evrensel küme sürekli ve sonsuz ise A BK'sı Eş. 2.2'deki gibi gösterilir.

$$A = \left\{ \int_X \frac{\mu_A(x)}{x} \right\} \quad (2.2)$$

Eş. 2.1’de gösterilen “+” işareti cebirsel toplam işareti değildir, elemanların birleşimini gösterir. Aynı şekilde Eş. 2.2’de gösterilen integral işareti de sürekli değer alan elemanların birleşimini gösterir.

Şekil 2.1’de bir BK’ya ait elemanların üyelik fonksiyonlarının kesikli ve sürekli formda gösterimi verilmiştir [10].



Şekil 2.1. Farklı tipdeki bulanık kümeler : (a) Kesikli bulanık küme (b) Sürekli bulanık küme

Tanım 2.2.

BK’larda önemli kavramlardan iki tanesi alfa (α) kesmesi ve güçlü alfa (α^+) kesmesidir. X evrensel kümesinde bir bulanık A kümesi ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere α kesmesi ve α^+ kesmesi sırasıyla Eş.2.3 ve Eş.2.4’de gösterilmiştir.

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.3)$$

$$A_{\alpha^+} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\} \quad (2.4)$$

α kesmesiyle (güçlü kesmesiyle (α^+)) A BK'sının elemanlarının üyelik dereceleri α ya eşit yada büyük (α 'dan büyük) olan A_α (A_{α^+}) kesin kümesine dönüşmektedir [10, 11].

Tanım 2.3.

X evrensel kümesindeki bir bulanık A kümesinin özü, desteği, sınırı, geçiş noktaları ve yüksekliği Eş.2.5-Eş.2.9 ve Şekil 2.2'de gösterilmiştir [10, 11].

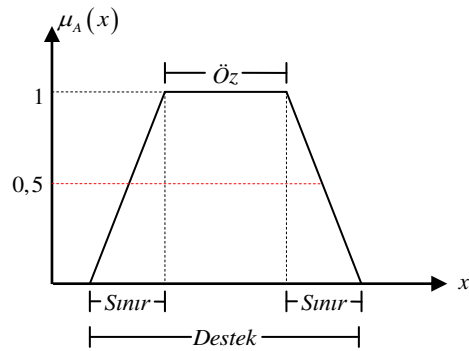
$$\text{Öz}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\} \quad (2.5)$$

$$\text{Destek}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (2.6)$$

$$\text{Sınır}(A) = \{x \in X \mid 0 < \mu_A(x) < 1\} \quad (2.7)$$

$$\text{Geçiş Noktaları}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 0,5\} \quad (2.8)$$

$$\text{Yükseklik}(A) = \sup_{x \in X} \{\mu_A(x)\} \quad (2.9)$$



Şekil 2.2. Bulanık kümelerde öz, destek, sınır, geçiş noktaları ve yükseklik

Tanım 2.4.

X evrensel kümesinde bir bulanık A kümesinin konveks olması için Eş. 2.10'da verilen şartı sağlaması gerekir [10, 11].

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1] \quad (2.10)$$

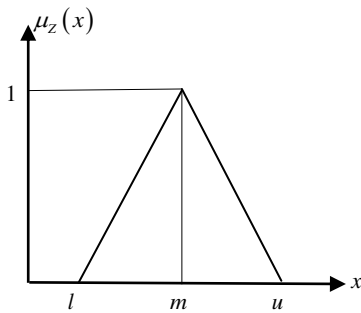
Tanım 2.5.

X evrensel kümesinde bir bulanık A kümesinin normal olması için Eş. 2.11’de verilen şartı sağlaması gerekir [10, 11].

$$\sup_{x \in X} \{\mu_A(x)\} = 1 \quad (2.11)$$

Tanım 2.6.

Z bulanık sayısının (BS) X evrensel kümesinde bir bulanık alt küme olabilmesi için konveks ve normal olması gerekir. Gerçek sayılar kümesinde tanımlanan BS’ler çeşitli BK tipleri içerisinde özel öneme sahip altkümelerdir. BS’ler, verilen gerçek sayıya yaklaşık sayıların kümesi olduğu için belirsizliğin olduğu mühendislik uygulamalarında ve karar vermede sıklıkla kullanılmaktadır. BS’ler üyelik fonksiyonlarının şekillerine göre isimlendirilir. Literatürde çok sayıda üyelik fonksiyonu tanımlanmakla birlikte işlem yükünün az olması nedeniyle en fazla kesikli, üçgen, gauss ve yamuk fonksiyonlar kullanılmaktadır. Şekil 2.3’de üçgensel BS’nin gösterimi verilmiştir. Üçgensel BS için üyelik fonksiyonu Eş. 2.12’de tanımlanmıştır [11].



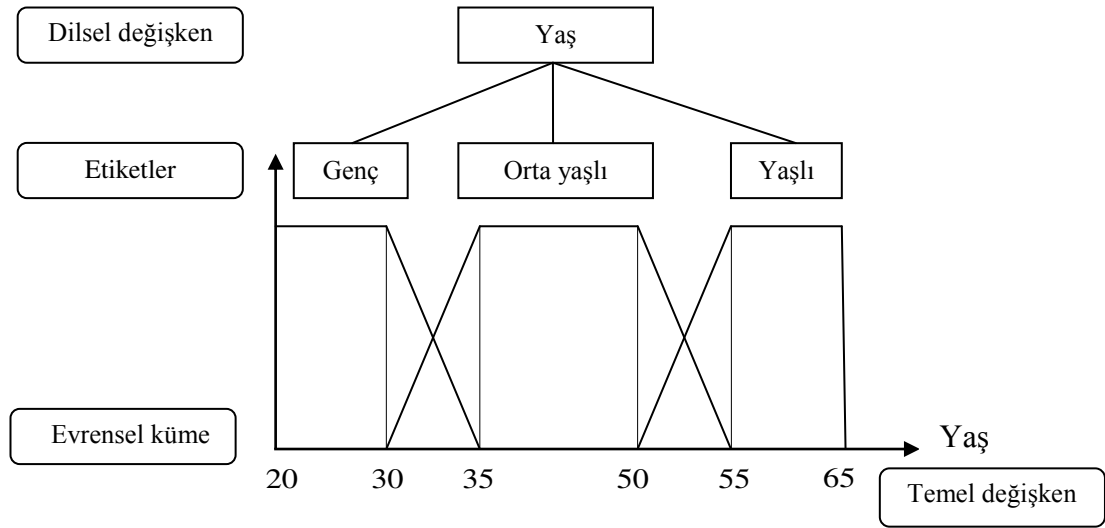
Şekil 2.3. Üçgensel bulanık sayı

$$\mu_z(x) = \begin{cases} 0 & x < l \\ (x-l)/(m-l) & l \leq x \leq m \\ (u-x)/(u-m) & m \leq x \leq u \\ 0 & x > u \end{cases} \quad (2.12)$$

Tanım 2.7.

İnsanların kararlarından, hislerinden ve algılarından etkilenen sistemlerin sayısal değerlerle modellenmesi oldukça zordur. Bu nedenle çok karmaşık olan düşünme ve karar verme süreçlerinde, kesin değerler yerine insan düşünce sistemine çok yakın olan dilsel değişkenler ve dilsel etiketlerin kullanılması gerekmektedir. Dilsel değişkenler, değerleri kesin sayı yerine kelimeler, doğal veya yapay dilde cümleler olan değişkenlerdir. Kesin sayılar yerine kelimeler ya da cümlelerin kullanılmasıyla daha az kesinliğin içerilmesi sağlanmaktadır. Örneğin yaş değişkenini ele aldığımızda “Ali gençtir” ifadesi “Ali 25 yaşındadır” ifadesine göre daha az kesindir. “Ali gençtir” ifadesinde “genç” yaş dilsel değişkenin dilsel etiketidir.

Bir dilsel değişken $(x, ET(x), X, G, \mathcal{M})$ fonksiyonuyla tanımlanabilir. Burada x dilsel değişkenin adını; $ET(x)$, x değişkeninin etiket kümesini ve X evrensel kümeyi göstermektedir. G sözdizimsel kuraldır ve $ET(x)$ kümesinde yer alan etiketleri üretir. $\mathcal{M}$ anlamsal kuraldır ve her A etiketinin (BK) anlamını gösterir. $\mathcal{M}(A)$ ise X uzayındaki bir BK’yı gösterir. Örneğin $x = \text{“yaş”}$ değişkeni olsun. Bu değişkenin $ET(x)$ etiket kümesi ise “genç”, “orta yaşlı” ve “yaşlı” dilsel etiketlerinden oluşabilir. Dilsel terimler temel değişken olan yaşa göre atanan BS’lerle ifade edilirler. Yaş için tanımlanan “genç” “orta yaşlı” ve “yaşlı” etiketlerinin gösterimi Şekil 2.4’de verilmiştir [9, 11].



Şekil 2.4. Dilsel değişken örneği

Tanım 2.8.

BK’larda dilsel etiketlerin üyelik dereceli dilsel eşiklerle değiştirilebilir. Dilsel atom

$\Theta = \int_x \mu_{\Theta}(x)/x$ ile ilgili dilsel eşikler Eş. 2.13-Eş.2.17’de verilmiştir.

$$\text{"çok"} \Theta = \Theta^2 = \int \frac{[\mu_{\Theta}(x)]^2}{x} \quad (2.13)$$

$$\text{"çok çok"} \Theta = \Theta^4 = \int \frac{[\mu_{\Theta}(x)]^4}{x} \quad (2.14)$$

$$\text{"fazla"} \Theta = \Theta^{1,25} = \int \frac{[\mu_{\Theta}(x)]^{1,25}}{x} \quad (2.15)$$

$$\text{"çok az"} \Theta = \sqrt{\Theta} = \int \frac{[\mu_{\Theta}(x)]^{0,5}}{x} \quad (2.16)$$

$$\text{"oldukça az"} \Theta = \Theta^{0,75} \quad (2.17)$$

Eş.2.13-Eş.2.15 verilen dilsel eşikler daraltma olarak adlandırılır. Daraltma elemanın kümeye ait olma derecesini azaltmaktadır. Üyelik derecesi 0,9 olan bir eleman “çok” dilsel eşikleriyle değiştirilse üyelik derecesi 0,81’e eşit olur. Bu durumda %10’luk bir

azalma vardır. Üyelik derecesi 0,1 olan bir eleman “çok” dilsel eşiğiyle değiştirilse üyelik derecesi 0,01’e eşit olur. Bu durumda azalma %90’dır. Eş. 2.16-Eş.2.17 verilen dilsel eşikler genişletme olarak adlandırılır. Genişletme elemanın kümeye ait olma derecesini arttırmaktadır. Üyelik derecesi 0,81’e eşit bir eleman “çok az” dilsel eşiğiyle değiştirilirse üyelik derecesi 0,9’a eşit olur. Bu durumda üyelik derecesinde %11’lik bir artış vardır. BK’larda tanımlanan bir diğer operasyonda yoğunlaştırma operasyonudur. Yoğunlaştırma operasyonu üyelik derecesi 0,5’den küçük olan elemanın üyelik derecesini azaltmakta, üyelik derecesi 0,5’den büyük olan elemanın üyelik derecesini arttırmaktadır. Eş.2.18’de yoğunlaştırma operasyonunun tanımı verilmiştir [10, 11].

$$\text{"Yoğunlaştırma"} \Theta = \begin{cases} 2\mu_{\Theta}(x), & 0 \leq \mu_{\Theta}(x) \leq 0,5 \\ 1 - 2[1 - \mu_{\Theta}(x)]^2, & 0,5 \leq \mu_{\Theta}(x) \leq 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Tanım 2.9.

A_1 ve A_2 , X evrensel kümesinde tanımlanmış tip-1 BK’lar ve bu kümelerin üyelik fonksiyonları $\mu_{A_1}(x)$ ve $\mu_{A_2}(x)$ ile gösterilsin.

A_1 ve A_2 tip-1 BK’ların kesişimi $A_1 \cap A_2$ ve üyelik fonksiyonu $\mu_{A_1 \cap A_2}(x)$ Eş.2.19’deki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \otimes : [0,1] \times [0,1] &\rightarrow [0,1] \\ \mu_{A_1 \cap A_2}(x) &= \otimes(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)) \quad \forall x \in X \end{aligned} \quad (2.19)$$

BK’larda kesişim işleminde kullanılan $\otimes$ operatörü t-norm olarak adlandırılır. Bir operatörün t-norm olabilmesi için sınır şartı, monotonluk, simetri ve birleşme özelliklerini sağlaması gerekir. Bu özellikler $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ için:

$$(A1(T)) \quad \otimes(x_1, 1) = x_1 \quad (\text{Sınır şartı})$$

$$(A2(T)) \quad y_1 \leq y_2 \text{ olduğu takdirde } \otimes(x_1, y_1) \leq \otimes(x_1, y_2) \quad (\text{Monotonluk})$$

$$(A3(T)) \quad \otimes(x_1, y_1) = \otimes(y_1, x_1) \quad (\text{Simetri})$$

$$(A4(T)) \quad \otimes(x_1, \otimes(x_2, y_2)) = \otimes(\otimes(x_1, x_2), y_2) \quad (\text{Birleşme})$$

Literatürde tanımlanan Minimum ($\otimes_{\min}$), Çarpım ($\otimes_{\text{Çar}}$), Lukasiewicz ($\otimes_{\text{Luk}}$), Drastik ($\otimes_{\text{Dra}}$) ve Hamacher çarpım ($\otimes_{\text{Ham}}$) operatörleri t-norm'dur ve Eş.2.20–Eş.2.24'de tanımları verilmiştir.

$$\otimes_{\min}(x_1, y_1) = \min(x_1, y_1) \quad (2.20)$$

$$\otimes_{\text{Çar}}(x_1, y_1) = x_1 y_1 \quad (2.21)$$

$$\otimes_{\text{Luk}}(x_1, y_1) = \max\{0, x_1 + y_1 - 1\} \quad (2.22)$$

$$\otimes_{\text{Dra}}(x_1, y_1) = \begin{cases} x_1, & \text{Eğer } y_1 = 1 \\ y_1, & \text{Eğer } x_1 = 1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\otimes_{\text{Ham}}(x_1, y_1) = \begin{cases} 0, & \text{Eğer } x_1 = y_1 = 0 \\ \frac{x_1 y_1}{x_1 + y_1 - x_1 y_1}, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Bazı durumlarda t-normların kısıtlanması istenir. Bu nedenle çeşitli özelliklerin sağlanması gerekir. Bu özelliklerden en önemli üç tanesi aşağıda verilmiştir.

$$(A5(T)) \quad \otimes \text{ 'ın sürekli bir fonksiyon olması (Süreklilik)}$$

$$\otimes\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \otimes(x_n, y_n)$$

$$(A6(T)) \quad \otimes(x_1, x_1) < x_1 \quad (\text{Alt eşgüçlülük})$$

$$(A7(T)) \quad x_1 < x_2 \text{ ve } y_1 < y_2 \text{ olduğu takdirde } \otimes(x_1, y_1) < \otimes(x_2, y_2) \quad (\text{katı monotonluk})$$

t-normlar sağladıkları özelliklere göre adlandırılmaktadır. Eğer t-norm sürekli bir fonksiyon ve alt eşgüçlülüğe sahip ise (A5(T)-A6(T)) bu tür t-normlar Archimedean t-norm olarak adlandırılır. Eğer Archimedean t-normunda her bir değişken katı bir şekilde artar ise bu durumda katı Archimedean t-norm olarak adlandırılır [10, 11].

Tanım 2.10.

A_1 ve A_2 , X evrensel kümesinde tanımlanmış tip-1 BK'lar ve bu kümelerin üyelik fonksiyonları $\mu_{A_1}(x)$ ve $\mu_{A_2}(x)$ ile gösterilsin.

A_1 ve A_2 tip-1 BK'ların birleşimi $A_1 \cup A_2$ ve üyelik fonksiyonu $\mu_{A_1 \cup A_2}(x)$ Eş.2.25'de tanımlanır.

$$\oplus: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$\mu_{A_1 \cup A_2}(x) = \oplus[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)] \quad \forall x \in X \quad (2.25)$$

BK'larda birleşim işleminde kullanılan $\oplus$ operatörü t-konorm olarak adlandırılır. Bir operatörün t-konorm olabilmesi için sınır şartı, monotonluk, simetri ve birleşme özelliklerini sağlaması gerekir. Bu özellikler $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ için:

$$(A1(S)) \quad \oplus(x_1, 0) = x_1 \quad (\text{Sınır şartı})$$

$$(A2(S)) \quad y_1 \leq y_2 \text{ olduğu takdirde } \oplus(x_1, y_1) \leq \oplus(x_1, y_2) \quad (\text{Monotonluk})$$

$$(A3(S)) \quad \oplus(x_1, y_1) = \oplus(y_1, x_1) \quad (\text{Simetri})$$

$$(A4(S)) \quad \oplus(x_1, \oplus(x_2, y_2)) = \oplus(\oplus(x_1, x_2), y_2) \quad (\text{Birleşme})$$

Literatürde tanımlanan Maksimum ($\oplus_{\text{maks}}$), Çarpım ($\oplus_{\text{Çar}}$) ve Lukasiewicz ($\oplus_{\text{Luk}}$), ve drastik ($\oplus_{\text{Dra}}$) operatörleri t-konormdur ve Eş. 2.26–Eş.2.29'da tanımları verilmiştir.

$$\oplus_{\text{maks}}(x_1, y_1) = \text{maks}(x_1, y_1) \quad (2.26)$$

$$\oplus_{\text{Çar}}(x_1, y_1) = x_1 + y_1 - x_1 y_1 \quad (2.27)$$

$$\oplus_{\text{Luk}}(x_1, y_1) = \min\{1, x_1 + y_1\} \quad (2.28)$$

$$\oplus_{\text{Dra}}(x_1, y_1) = \begin{cases} x_1, & \text{Eğer } y_1 = 0 \\ y_1, & \text{Eğer } x_1 = 0 \\ 1, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Bazı durumlarda t-konormların kısıtlanması istenir. Bu nedenle çeşitli özelliklerin sağlanması gerekmektedir. Bu özelliklerden en önemli üç tanesi aşağıda verilmiştir.

(A5(S)) $\oplus$ sürekli bir fonksiyon olması (Süreklilik)

(A6(S)) $\oplus(x_1, x_1) > x_1$ (Süper eşgüçlülük)

(A7(S)) $x_1 < x_2$ ve $y_1 < y_2$ olduğu takdirde $\oplus(x_1, y_1) < \oplus(x_2, y_2)$ (katı monotonluk)

t-konormlar sağladıkları özelliklere göre adlandırılmaktadır. Eğer t-norm sürekli bir fonksiyon ve süper eşgüçlülüğe sahip ise (A5(S)-A6(S)) bu tür t-konormlar Archimedean t-konorm olarak adlandırılır. Eğer Archimedean t-konormunda her bir değişken katı bir şekilde artar ise bu durumda katı Archimedean t-konorm olarak adlandırılır [10, 11].

Tanım 2.11.

A_1 , X evrensel kümesinde tanımlanmış tip-1 BK ve bu kümenin üyelik fonksiyonu $\mu_{A_1}(x)$ ile gösterilsin. A_1 kümesinin tümleyeni $\neg A_1$ ve üyelik fonksiyonu Eş.2.30'daki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} Ng : [0,1] &\rightarrow [0,1] \\ \mu_{\neg A_1}(x) &= Ng(\mu_{A_1}(x)) \quad \forall x \in X \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bir fonksiyonun tümleyen olabilmesi için aşağıda verilen şartları sağlamalıdır. Bu özellikler $\forall x, y \in [0,1]$ için:

$$(A1(Ng)) \quad Ng(0)=1 \quad \text{ve} \quad Ng(1)=0$$

$$(A2(Ng)) \quad \text{Eğer } x \leq y \text{ ise } Ng(y) \leq Ng(x) \quad \forall x, y \in [0,1]$$

Eğer bulanık tümleyen aşağıda verilen iki özelliği de sağlıyorsa katıdır.

$$(A3(Ng)) \quad Ng \text{ 'nin sürekli bir fonksiyon olması}$$

$$(A4(Ng)) \quad \text{Eğer } x < y \text{ ise } Ng(y) < Ng(x) \quad \forall x, y \in [0,1]$$

Eğer bulanık tümleyen A5(Ng) özelliğini sağlıyor ise

$$(A5(Ng)) \quad Ng(Ng(x)) = x \quad \forall x \in [0,1]$$

bulanık tümleyene kuvvetli bulanık tümleyen denir. $Ng(x) = 1-x$ ve

$Ng(x) = \sqrt{1-x^2}$ kuvvetli bulanık tümleyenlerdir [10, 11].

Tanım 2.12.

$I : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağladığı takdirde

bulanık koşullu önerme operatörüdür. Bu özellikler $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ için:

$$(A1(I)) \quad \text{Eğer } x_1 \leq x_2 \text{ ise } I(x_1, y_1) \geq I(x_2, y_1)$$

$$(A2(I)) \quad \text{Eğer } y_1 \leq y_2 \text{ ise } I(x_1, y_1) \leq I(x_2, y_2)$$

$$(A3(I)) \quad I(0,0)=1$$

$$(A4(I)) \quad I(1,1)=1$$

$$(A5(I)) \quad I(1,0)=0$$

Bulanık koşullu önerme operatörleri t-norm, t-konorm ve tümleyen operatörleri kullanılarak elde edilir. Bulanık koşullu önerme operatörlerini tanımlamanın 4 yolu aşağıda verilmiştir.

S (Strong)-Koşullu önermesi

$$I(x_1, y_1) = \oplus(Ng(x_1), y_1) \quad (2.31)$$

$\oplus$, t-konormu, Ng tümleyeni göstermektedir. S tipi koşullu önerme operatörü mantıkta bulunan $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ koşullu önermesinden elde edilmiştir.

R (Residuated)-Koşullu önermesi

$$I(x_1, y_1) = \sup \{z \in [0,1] \mid \otimes(x_1, z) \leq y_1\} \quad (2.32)$$

$\otimes$ soldan sürekli t-normu $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \otimes(x_n, y) = \otimes\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y\right) \right)$ göstermektedir.

QL(Quantum Logic)-Koşullu önermesi

$$I(x_1, y_1) = \oplus(Ng(x_1), \otimes(x_1, y_1)) \quad (2.33)$$

$\otimes$ t-normu, $\oplus$ t-konormu ve Ng kuvvetli tümleyeni göstermektedir.

D (Dishkant) -Koşullu önermesi

$$I(x_1, y_1) = \oplus(\otimes(Ng(x_1), Ng(y_1)), y_1) \quad (2.34)$$

$\otimes$ t-normu, $\oplus$ t-konormu ve Ng kuvvetli tümleyeni göstermektedir.

Literatürde önerilmiş olan altı temel bulanık koşullu önerme operatörü (Lukasiewicz (LK), Gödel (GD), Reichenbach (RC), Kleene-Dienes (KD), Goguen (GG), Rescher-Gaines (RG)) Eş.2.35-Eş.2.40'da sırasıyla verilmiştir [12-14].

$$I_{LK}(x_1, y_1) = \min(1, 1 - x_1 + y_1) \quad (2.35)$$

$$I_{GD}(x_1, y_1) = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } x_1 \leq y_1 \\ y_1, & \text{Eğer } x_1 > y_1 \end{cases} \quad (2.36)$$

$$I_{RC}(x_1, y_1) = 1 - x_1 + x_1 y_1 \quad (2.37)$$

$$I_{KD}(x_1, y_1) = \max(1 - x_1, y_1) \quad (2.38)$$

$$I_{GG}(x_1, y_1) = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } x_1 \leq y_1 \\ \frac{y_1}{x_1}, & \text{Eğer } x_1 > y_1 \end{cases} \quad (2.39)$$

$$I_{RG}(x_1, y_1) = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } x_1 \leq y_1 \\ 0, & \text{Eğer } x_1 > y_1 \end{cases} \quad (2.40)$$

Tanım 2.13.

A , X evrensel kümesinde tanımlanmış tip-1 BK'sının kardinalitesi Eş.2.41'de sürekli formda, Eş.2.42'de kesikli formda tanımlanmıştır [10, 11].

$$\text{kard}(A) = \int_X \mu_A(x) dx \quad (2.41)$$

$$\text{kard}(A) = \sum_X \mu_A(x) \quad (2.42)$$

Tanım 2.14.

Genelleştirilmiş doğal sayı (GDS $\phi: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$), $\mathbb{N}$ 'de tanımlı bir BK'dır. Eğer GDS sonlu bulanık kümelerde (SBK) tanımlanıyor ise sonlu GDS olarak

adlandırılır. GDS $\phi(k) \geq \phi(i) \otimes \phi(j)$, $i \leq k \leq j$ şartını sağlıyor ise GDS konvektir (KGDS). ϕ ve β sonlu GDS olsun. ϕ ve β sonlu GDS'lerin genişletilmiş toplamı Eş.2.43'de verilmiştir.

$$\phi \boxplus \beta(k) = \oplus \{ \phi(i) \otimes \beta(j); i + j = k \} \quad (2.43)$$

n tane GDS'nin genişletilmiş toplamı Eş.2.44'de verilmiştir.

$$(\phi_1 \boxplus \dots \boxplus \phi_n)(k) = \oplus \{ \phi_1(i_1) \otimes \dots \otimes \phi_n(i_n); i_1 + \dots + i_n = k \} \quad (2.44)$$

$\mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbb{C}: SBK(X) \rightarrow KGDS$ aşağıdaki özellikleri sağladığı takdirde bulanık kardinalitedir.

(A1K) *Toplanabilirlik* : A_1 ve A_2 , X evrensel kümesinde tanımlanmış tip-1 BK ve $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ olduğu takdirde $\mathbb{C}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{C}(A_1) \boxplus \mathbb{C}(A_2)$ şartını sağlar.

(A2K) *Değişkenlik* : A_1 ve A_2 , X evrensel kümesinde tanımlanmış tip-1 BK'lar $i > |destek A_1|$ ve $j > |destek A_2|$ olduğu takdirde $\mathbb{C}(A_1)(i) = \mathbb{C}(A_2)(j)$ ' dir.

(A3K) *Tutarlılık* : A_1 , X evrensel kümesinde kesin bir küme ise $\mathbb{C}(A_1)(i) \in \{0,1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ 'dir ve eğer $n = |destek A_1|$ ise $\mathbb{C}(A_1)(n) = 1$.

(A4K) *Monotonluk* : Eğer $x \in X$, $y \in X$, $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$ ve $a \leq b$ ise

$$\mathbb{C}(a/x)(0) \geq \mathbb{C}(b/y)(0)$$

$$\mathbb{C}(a/x)(1) \leq \mathbb{C}(b/y)(1)$$

Yukarıda verilen şartları sağlayan bulanık kardinalite örnekleri $FGCount(A)$, (A BK'sının en az i tane elemana sahip olması), $FLCount(A)$ (A BK'sının en fazla i

tane elemana sahip olması) ve $FECount(A)$ (A BK'sının i tane elemana sahip olması) Eş.2.45-Eş.2.47'de tanımlanmıştır [15, 16].

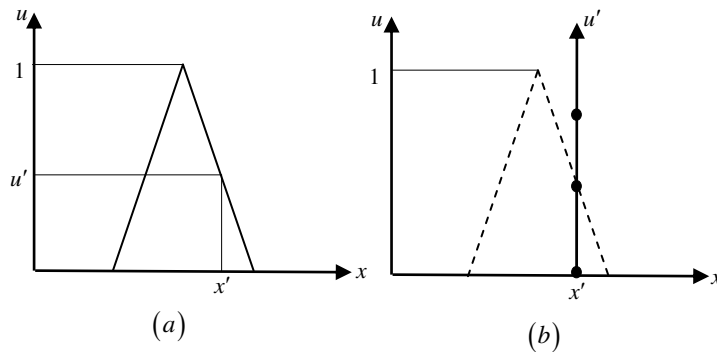
$$FGCount(A) = [A]_i = \otimes \{ \alpha \in [0,1] \mid |A_\alpha| \geq i \}; i \in \mathbb{N} \quad (2.45)$$

$$FLCount(A) = 1 - [A]_{i+1}; i \in \mathbb{N} \quad (2.46)$$

$$FECCount(A) = [A]_i \otimes 1 - [A]_{i+1}; i \in \mathbb{N} \quad (2.47)$$

2.2. Tip-2 Bulanık Kümeler

Tip-1 BK'larda bir elemanın bir kümeye ait olma derecesini belirten üyelik fonksiyonu değeri $[0,1]$ aralığındaki kesin bir değere eşittir. Şekil 2.5a'da $x = x'$ noktasında bir u' değeri bulunmaktadır. Şekil 2.5a'da gösterilen üyelik fonksiyonlarının değerleri sağa sola kaydırılarak Şekil 2.5b'de gösterilen bulanıklaştırılmış tip-1 BK elde edilmektedir. Şekil 2.5b'de $x = x'$ noktasında u' dikey eksenyle gri alanın kesişmesiyle birden fazla u değeri elde edilir. Bu değerlerin eşit olarak ağırlıklandırılmaları gerekmemektedir. Bu nedenle tüm bu değerlere bir dağılım atanabilir. Tanım kümesinde verilen tüm elemanlar için bu işlem yapıldıktan sonra 3 boyutlu olan tip-2 üyelik fonksiyonu elde edilmektedir. Tip-1 BK'lar ve tip-2 BK'lar Zadeh tarafından önerilen tip-n BK'ların dereceleri sırasıyla 1 ve 2 olan özel halleridir [17-19].



Şekil 2.5. (a) Üçgensel Tip-1 üyelik fonksiyonu (b) Bulanıklaştırılmış Üçgensel Tip-1 üyelik fonksiyonu

Tip-2 BK'lar belirsizliği ele almada tip-1 BK'lara göre daha etkindir; çünkü tip-2 BK'lar tip-1 BK'lara göre daha fazla parametreyle açıklanmaktadır. Fakat, bu durum hesaplama zorluğu ve anlaşılma güçlüğü de beraberinde getirmektedir [17].

Bu bölümde kullanılacak olan semboller ve açıklamaları Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Tip-2 BK'yı tanımlamada kullanılan semboller ve açıklamalar

Sembol	Açıklama
x	Birincil değişken
u	İkincil değişken
$\tilde{A}$	Tip-2 bulanık küme
J_x	Birincil üyelik derecesi
$u_{\tilde{A}}(x, u) \left(f_x(u)/u \right)$	İkincil üyelik derecesi

Tanım 2.15.

$x \in X$ ve $u \in J_x \subseteq [0,1]$ iken $\tilde{A}$ bir tip-2 BK, $u_{\tilde{A}}(x, u)$ 'de bu kümenin tip-2 üyelik fonksiyonu olmak üzere, tip-2 BK $\tilde{A}$, Eş. 2.48'de tanımlanmıştır.

$$\tilde{A} = \left\{ \langle (x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u) \rangle \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1] \right\} \quad (2.48)$$

$$0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1 \text{ 'dir.}$$

Tip-2 BK $\tilde{A}$, aynı zamanda Eş. 2.49'daki gibi ifade edilebilir.

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x, u)}{(x, u)} J_x \subseteq [0,1] \quad (2.49)$$

$\int \int$ simgesi sürekli değer alan x ve u 'ların birleşimini göstermektedir. Eğer evrensel küme kesikli formda tanımlanırsa $\int \int$ simgesi yerine $\sum \sum$ simgesi kullanılmalıdır.

Tanımda verilen $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ kısıtlaması tip-1 BK'larda verilen $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ 'de verilen kısıtlamayla aynıdır. Belirsizlik ortadan kalktığı zaman tip-2 BK, tip-1 BK'ya dönüşmektedir ve u , $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 'e eşit olmaktadır [17-19].

Tanım 2.16.

$x \in X$ ve $\forall u \in J_x \subseteq [0,1]$ olmak üzere x' in her bir değeri için $(x = x')$ ikincil üyelik fonksiyonu değeri $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ ekseninin dikey kesitine eşittir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) = \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} f_{x'}(u) / u \quad J_{x'} \subseteq [0,1] \quad (2.50)$$

Eş. 2.50 yardımıyla tip-2 BK $\tilde{A}$ Eş. 2.51'deki gibi

$$\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid \forall x \in X \} \quad (2.51)$$

ya da Eş. 2.52'deki gibi tanımlanabilir [17-19].

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x \quad J_x \subseteq [0,1] \quad (2.52)$$

Tanım 2.17.

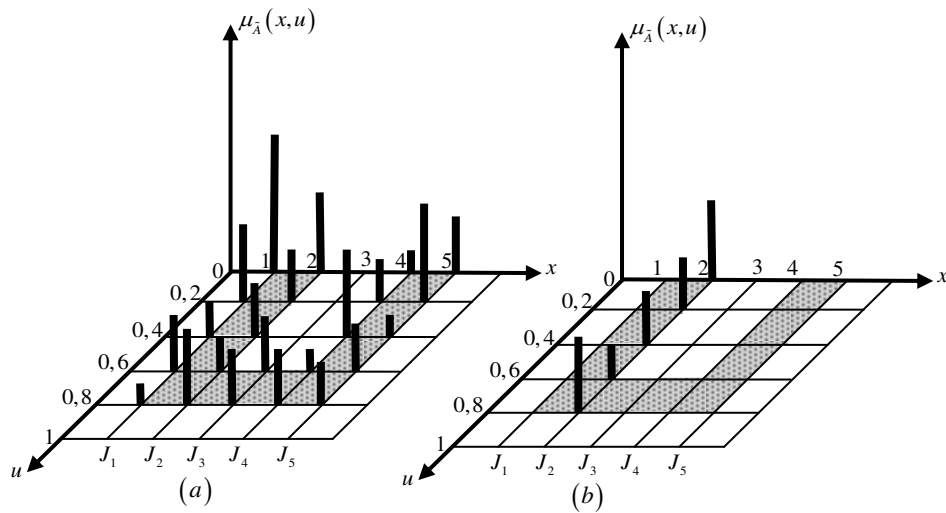
İkincil üyelik fonksiyonuna ait tanım kümesi x 'in birincil üyeliği olarak isimlendirilmektedir. Eş. 2.52'de J_x , x 'in birincil üyelik fonksiyonudur. Burada $\forall x \in X$ için $J_x \subseteq [0,1]$ 'dir. Eş. 2.52'de $f_x(u)$ ikincil fonksiyonun büyüklüğünü gösteren ikincil derecedir. X ve J_x kesikli değerlere sahip ise $\tilde{A}$ Eş. 2.53'deki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \sum_{x \in X} \left[\sum_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{u \in J_{x_i}} f_{x_i}(u) / u \right] / x_i \\
&= \left[\sum_{k=1}^{M_1} f_{x_1}(u_{1k}) / u_{1k} \right] / x_1 + \dots + \left[\sum_{k=1}^{M_N} f_{x_N}(u_{Nk}) / u_{Nk} \right] / x_N
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Eş. 2.53’de “+” simgesi elemanların birleşimini göstermektedir. X değeri N tane kesikli değere sahiptir ve her bir J_x değeri M_i tane kesikli değere sahiptir [17-19].

Örnek 2.1.

Şekil 2.6a’da x ve u kesikli değer alan değişkenler olmak üzere tip-2 üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ dikey kesit gösterim şekli verilmiştir. $X = \{1,2,3,4,5\}$ ve $U = \{0,0,2,0,4,0,6,0,8\}$ ’dir. Şekil 2.6b’de $x = 2$ ’de tip-2 üyelik fonksiyonu gösterilmektedir. $x = 2$ ’de ikincil üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(2) = 0,5/0 + 0,35/0,2 + 0,35/0,4 + 0,2/0,6 + 0,5/0,8$ ’dir. Birincil üyelikler ise $J_1, J_2, J_4, J_5 = \{0,0,2,0,4,0,6,0,8\}$ ve $J_3 = \{0,6,0,8\}$ ’dir [17-19].



Şekil 2.6. (a) 3 boyutlu tip-2 üyelik fonksiyonu (b) $x = 2$ noktasında tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi

Tanım 2.18.

Tip-2 BK'nın birincil üyeliklerindeki belirsizlik, Belirsizliğin Kapladığı Alan (BKA) olarak adlandırılan sınırlı bir alan oluşturur. BKA tüm birincil üyeliklerin birleşimidir.

$$BKA(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \quad (2.54)$$

BKA kavramı sadece tip-2 BK'ların üyelik fonksiyonundaki belirsizliğe odaklanmayıp aynı zamanda tip-2 üyelik fonksiyonlarının ikincil dereceleri için uygun destek aralığı sağlar. Ayrıca BKA tip-2 BK'ların 3 boyutlu grafik yerine 2 boyutlu grafikte gösterilmesini sağlar [17-19].

Tanım 2.19.

X ve U kesikli evrensel kümeler, $\tilde{A}_e$ N elemana sahip gömülü tip-2 BK olup $J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_N}$ 'den kesinlikle bir tane eleman kapsamaktadır. $u_1, u_2, \dots, u_N$ ikincil değişkenler ve ilgili ikincil üyelik dereceleri $f_{x_1}(u_1), f_{x_2}(u_2), \dots, f_{x_N}(u_N)$ olmak üzere $\tilde{A}_e$ gömülü tip-2 BK Eş. 2.55'de tanımlanmıştır.

$$\tilde{A}_e = \sum_{i=1}^N \left[f_{x_i}(u_i) / u_i \right] / x_i \quad u_i \in J_{x_i} \subseteq [0,1] \quad (2.55)$$

Tip-2 bulanık $\tilde{A}$ kümesindeki $\tilde{A}_e$ gömülü tip-2 BK'ların sayısı $\prod_{i=1}^N M_i$ kadardır. X ve U kesikli evrensel kümeler için, N elemanlı gömülü tip-1 BK, A_e , Eş. 2.56'da tanımlanmıştır.

$$A_e = \sum_{i=1}^N u_i / x_i \quad u_i \in J_{x_i} \subseteq [0,1] \quad (2.56)$$

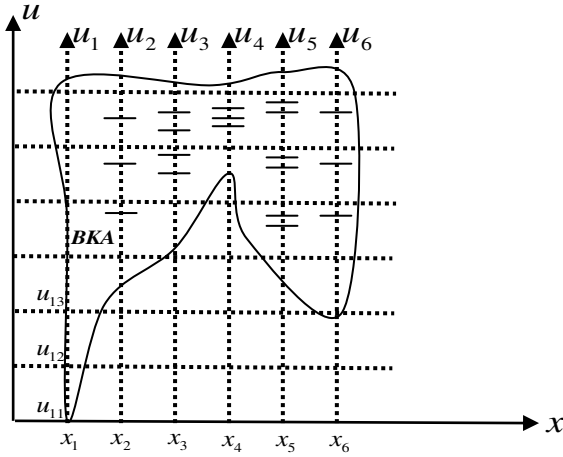
A_e kümesi Eş. 2.55’de ki $\tilde{A}_e$ kümesinin tüm birincil üyeliklerinin birleşimidir ve toplam sayısı $\prod_{i=1}^N M_i$ kadardır [17-19].

Teorem 2.1.

Şekil 2.7’de BKA gri alan ile gösterilmiştir. u_i ekseninde bulunan her bir nokta düğüm olarak adlandırılınsın. u_i eksenini boyunca her bir düğüm

$$n_l = \prod_{j=1, j \neq l}^N M_j \quad (2.57)$$

tane gömülü tip-2 BK kapsar [17-19].



Şekil 2.7. Kesikli u ve x eksenlerinde BKA örneği

Teorem 2.2.

$\tilde{A}_e^j$, j . gömülü tip-2 BK, Eş. 2.58’de ki gibi tanımlansın.

$$\tilde{A}_e^j \equiv \left\{ \left(u_i^j, f_{x_i} \left(u_i^j \right) \right), i = 1, \dots, N \right\} \quad (2.58)$$

Tip-2 BK, tüm gömülü tip-2 BK'ların birleşiminden oluşur [17-19].

$$\tilde{A} = \sum_{j=1}^n \tilde{A}_e^j \quad (2.59)$$

$$n \equiv \prod_{i=1}^N M_i \quad (2.60)$$

2.3. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümeler

Tip-2 BK'larda ikincil üyelik fonksiyonu birden çok değer alabilmektedir ve bu değerlere bir dağılım atanabilir. Düzgün dağılım atandığı takdirde ikincil üyelik fonksiyonlarının değeri bire eşit olup tip-2 BK'lar aralıklı tip-2 BK'lar olarak adlandırılır. Dubois ve Parade [20], Gehrke ve ark. [21] ve Walker ve Walker [22] aralıklı BK'nın aralıklı tip-2 BK'ya denk olduğunu göstermişlerdir. Bu nedenle bu bölümde aralıklı tip-2 BK ile aralıklı BK'nın gösterimi aynıdır. Bu bölümde aralıklı tip-2 BK'larla ilgili temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.20.

Tip-2 BK'da $\mu_{\tilde{A}}(x, u) = 1 \quad \forall x, u$ olduğu takdirde $\tilde{A}'$, aralıklı tip-2 BK olarak adlandırılır.

$$\tilde{A}' = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} 1/(x, u) \quad J_x \subseteq [0, 1] \quad (2.61)$$

Tanım 2.21.

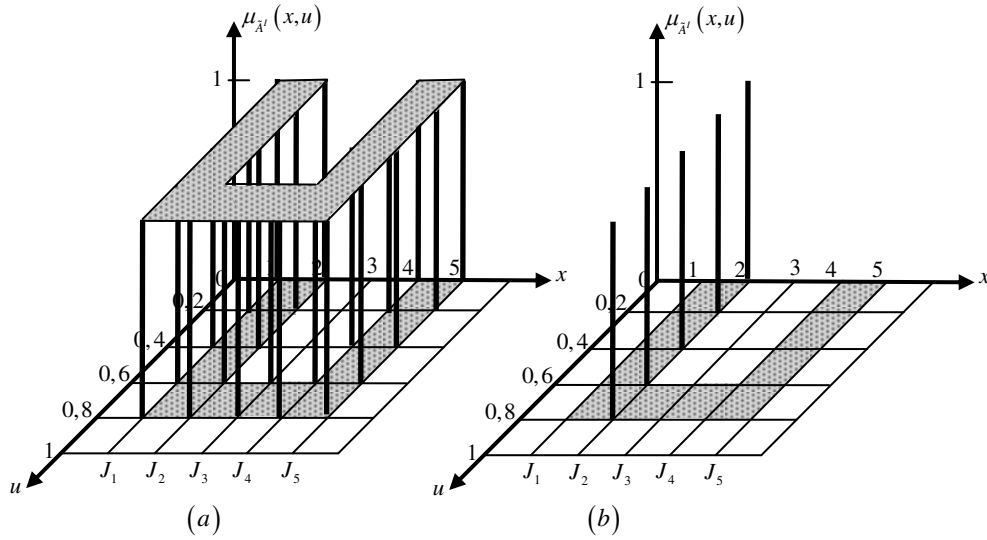
$x' \in X$ ve $\forall u \in J_{x'} \subseteq [0, 1]$ olmak üzere x 'in her bir değeri için $(x = x')$ ikincil üyelik fonksiyonu değeri $\mu_{\tilde{A}'}(x, u)$ ekseninin dikey kesitine eşittir [23].

$$\mu_{\tilde{A}'}(x = x', u) = \mu_{\tilde{A}'}(x') = \int_{u \in J_{x'}} 1/u \quad J_{x'} \subseteq [0,1]$$

$$\tilde{A}' = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}'}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} 1/u \right] / x \quad J_x \subseteq [0,1] \quad (2.62)$$

Örnek 2.2.

x ve u kesikli değer alan değişkenler olmak üzere aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}'}(x, u)$ dikey kesit gösterimi Şekil 2.8a'da verilmiştir. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $U = \{0, 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8\}$ 'dir. Şekil 2.8b'de de $x = 2$ noktasında aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi verilmiştir [23].



Şekil 2.8. (a) 3 boyutlu aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonu (b) $x = 2$ noktasında aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi

Tanım 2.22.

BKA bir alandır ve alt ve üst sınırları belirlidir. Aralıklı tip-2 BK için alt ve üst sınırlar tip-1 üyelik fonksiyonudur ve bunlar alt ve üst üyelik fonksiyonlar olarak adlandırılmıştır. Eş. 2.63 ve Eş. 2.64'de BKA'nın alt ve üst sınırları ile ilgili alt ve üst üyelik fonksiyonları tanımlanmıştır.

$$\mu_{\tilde{A}'}^L(x) \equiv \underline{BKA(\tilde{A}')} \quad \forall x \in X \quad (2.63)$$

$$\mu_{\tilde{A}'}^U(x) \equiv \overline{BKA(\tilde{A}')} \quad \forall x \in X \quad (2.64)$$

Aralıklı tip-2 BK'lar için $J_x = [\mu_{\tilde{A}'}^L(x), \mu_{\tilde{A}'}^U(x)]$, $\forall x \in X$ 'dır [23].

Tanım 2.23.

X ve U kesikli evrensel kümeler için, N elemanlı gömülü aralıklı tip-2 BK $\tilde{A}_e'$ Eş. 2.65'de verilmiştir [23].

$$\tilde{A}_e' = \sum_{i=1}^N [1/u_i] / x_i \quad u_i \in J_{x_i} \subseteq [0,1] \quad (2.65)$$

Aralıklı tip-2 bulanık $\tilde{A}'$ kümesinde $\tilde{A}_e'$ gömülü kümelerin sayısı $\prod_{i=1}^N M_i$ kadardır. X ve U kesikli evrensel kümeler için, N elemanlı gömülü tip-1 BK'sı A_e Eş. 2.66' da verilmiştir.

$$A_e = \sum_{i=1}^N u_i / x_i \quad u_i \in J_{x_i} \subseteq [0,1] \quad (2.66)$$

A_e kümesi Eş. 2.65'deki $\tilde{A}_e'$ kümesinin tüm birincil üyeliklerinin birleşimidir ve toplam sayısı $\prod_{i=1}^N M_i$ kadardır. Şekil 2.9'da gömülü tip-1 BK'sı gösterilmiştir.

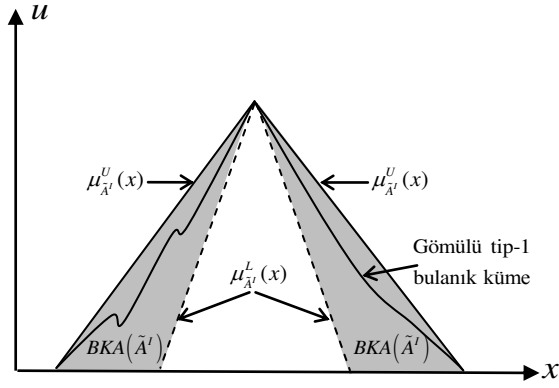
Teorem 2.3.

X ve U kesikli olup, aralıklı tip-2 BK'sı $\tilde{A}'$, tüm gömülü aralıklı tip-2 BK'ların birleşiminden oluşur [23].

$$\tilde{A}^I = \sum_{j=1}^{n_A} \tilde{A}_{e_j}^I \quad (j=1,2,3,\dots,n_A) \quad (2.67)$$

$$\tilde{A}_{e_j}^I = \sum_{i=1}^N [1/u_i^j] / x_i \quad u_i^j \in J_{x_i} \subseteq [0,1] \quad (2.68)$$

$$n_A = \prod_{i=1}^N M_i \quad (2.69)$$



Şekil 2.9. Aralıklı tip-2 bulanık küme için BKA, alt, üst üyelik fonksiyonları ve gömülü tip-1 bulanık kümenin gösterimi

Sonuç 2.1.

Aralıklı tip-2 BK'ların ikincil dereceleri 1'e eşit olduğu için Eş. 2.67 ve Eş. 2.68'de tanımlanan $\tilde{A}^I$ ve $\tilde{A}_{e_j}^I$ kümeleri Eş. 2.70-Eş. 2.72'deki gibi tanımlanabilir .

$$\tilde{A}^I = 1 / BKA(\tilde{A}^I) \quad (2.70)$$

$$BKA(\tilde{A}^I) = \sum_{j=1}^{n_A} A_{e_j}^j = \begin{cases} \{\mu_{\tilde{A}^I}^L(x), \dots, \mu_{\tilde{A}^I}^U(x)\} & \forall x \in X_{kes} \\ [\mu_{\tilde{A}^I}^L(x), \mu_{\tilde{A}^I}^U(x)] & \forall x \in X \end{cases} \quad (2.71)$$

$$A_{e_j}^j = \sum_{i=1}^N u_i^j / x_i \quad u_i^j \in J_{x_i} \subseteq [0,1] \quad (2.72)$$

Eş. 2.71'in ilk satırında yer alan ifade de kesikli ve n_A tane eleman (fonksiyon) içermektedir. İkinci satırdaki ifadede evrensel küme süreklidir ve $\forall x \in X$ $\mu_{\tilde{A}'}^U(x) - \mu_{\tilde{A}'}^L(x)$ aralığında sonsuz sayıdaki elemanı içermektedir [23].

İspat.

Her bir gömülü aralıklı tip-2 BK, $\tilde{A}'_{e_j} 1/A_e^j$ şeklinde ifade edildiğinde Eş. 2.70, Eş. 2.73'deki gibi ifade edilebilir.

$$\tilde{A}' = \sum_{i=1}^{n_A} (1/A_{e_j}) = 1 / \sum_{i=1}^{n_A} (A_{e_j}) \equiv 1 / BKA(\tilde{A}') \quad (2.73)$$

$\mu_{\tilde{A}'}^L(x)$ ve $\mu_{\tilde{A}'}^U(x)$ A_e^j kümesinin n_A tane elemanlarından ikisi olup alt ve üst sınır fonksiyonlarıdır. Bu nedenle $BKA(\tilde{A}')$ kesikli evrensel kümelerde Eş. 2.71'in ilk satırında yer alan ifadeyle, sürekli evrensel kümelerde ise Eş. 2.71'in ikinci satırında yer alan ifadeyle açıklanabilir [23].

Tanım 2.24.

Aralıklı tip-2 BK $\tilde{A}'$ 'nin kardinalitesi, tüm gömülü tip-1 BK'ların kardinalitesinin birleşimidir.

$$kard(\tilde{A}') = \bigcup_{\forall A_e} kard(A_e) = [kard(\underline{A}), kard(\bar{A})] \quad (2.74)$$

Aralıklı tip-2 BK $\tilde{A}'$ 'nin ortalama kardinalitesi Eş. 2.75'de tanımlanmıştır [24].

$$OK(\tilde{A}') = \frac{kard(\underline{A}) + kard(\bar{A})}{2} \quad (2.75)$$

Tanım 2.25.

$\tilde{A}'$ ve $\tilde{B}'$ aralıklı tip-2 BK'lar olmak üzere bu kümelerin birleşimi, kesişimi ve $\tilde{A}'$ aralıklı tip-2 BK'sının tümleyeni sırasıyla Eş. 2.76-Eş. 2.78'de verilmiştir [23].

$$\tilde{A}' \cup \tilde{B}' = 1 / \left[\mu_{\tilde{A}'}^L(x) \vee \mu_{\tilde{B}'}^L(x), \mu_{\tilde{A}'}^U(x) \vee \mu_{\tilde{B}'}^U(x) \right] \quad (2.76)$$

$$\tilde{A}' \cap \tilde{B}' = 1 / \left[\mu_{\tilde{A}'}^L(x) \wedge \mu_{\tilde{B}'}^L(x), \mu_{\tilde{A}'}^U(x) \wedge \mu_{\tilde{B}'}^U(x) \right] \quad (2.77)$$

$$\bar{\tilde{A}}' = 1 / \left[1 - \mu_{\tilde{A}'}^U(x), 1 - \mu_{\tilde{A}'}^L(x) \right] \quad (2.78)$$

Tanım 2.26.

Aralıklı tip-2 BK'larda t-norm ve t-conorm operatörlerini tanımlamadan önce aralıklı üyelik derecelerinin sıralanması gerekmektedir. Reel sayılarda sıralama oldukça kolaydır; fakat, aralıklı sayıların sıralanması reel sayılar kadar kolay değildir. $\tilde{A}_1'$ ve $\tilde{A}_2'$ aralıklı tip-2 BK'lar olsun. $\tilde{A}_1' \leq \tilde{A}_2'$ olması için ancak ve ancak $\mu_{\tilde{A}_1'}^L(x_i) \leq \mu_{\tilde{A}_2'}^L(x_i)$ ve $\mu_{\tilde{A}_1'}^U(x_i) \leq \mu_{\tilde{A}_2'}^U(x_i)$ olması gerekmektedir. Aralıklı tip-2 BK'larda iki önemli üyelik dereceleri $\left[\mu_{\tilde{A}_1'}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}_1'}^U(x_i) \right] = [0, 0]$ ve $\left[\mu_{\tilde{A}_1'}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}_1'}^U(x_i) \right] = [1, 1]$ 'dir.

x ve y aralıklı iki sayı olsun $x = [x_1, x_2]$ $y = [y_1, y_2]$. $\mathcal{L}' = (\leq_{L'})$ aşağıda belirtilen şartları sağladığı takdirde tam kafestir.

$$L' = \left\{ [x_1, x_2] \mid (x_1, x_2) \in [0, 1]^2, x_1 \leq x_2 \right\}$$

$$[x_1, x_2] \leq_{L'} [y_1, y_2] \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \quad \forall [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in L'$$

$\mathcal{L}'$ 'nin en küçük elemanı $[0, 0]$, en büyük elemanı da $[1, 1]$ 'dir [25-28].

Tanım 2.26 verildikten sonra aralıklı tip-2 BK'lar üzerinde t-norm, t-konorm ve tümleyen operatörleri tanımlanabilir.

Tanım 2.27.

$\tilde{A}_1'$ ve $\tilde{A}_2'$, $\mathcal{L}'$ 'da tanımlanmış aralıklı tip-2 BK'lar ve bu kümelerin üyelik fonksiyonları $\mu_{\tilde{A}_1'}'(x_i) = [\mu_{\tilde{A}_1'}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}_1'}^U(x_i)]$ ve $\mu_{\tilde{A}_2'}'(x_i) = [\mu_{\tilde{A}_2'}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}_2'}^U(x_i)]$ ile gösterilsin.

$\tilde{A}_1'$ ve $\tilde{A}_2'$ kümelerinin kesişimi $\tilde{A}_1' \cap \tilde{A}_2'$ ve üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}_1' \cap \tilde{A}_2'}'(x_i)$ Eş.2.79'daki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \otimes' : [0,1]^2 \times [0,1]^2 &\rightarrow [0,1]^2 \\ \mu_{\tilde{A}_1'}'(x_i) \otimes' \mu_{\tilde{A}_2'}'(x_i) &= \left[\otimes \left(\mu_{\tilde{A}_1'}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}_2'}^L(x_i) \right), \otimes \left(\mu_{\tilde{A}_1'}^U(x_i), \mu_{\tilde{A}_2'}^U(x_i) \right) \right] \quad \forall x \in X \end{aligned} \quad (2.79)$$

Aralıklı tip-2 BK'ların kesişim işleminde kullanılan fonksiyon $\otimes$ tip-1 BK'larda kullanılan t-normlardır. Bir fonksiyonun aralıklı t-norm ($\otimes'$) olabilmesi için sınır şartı, monotonluk, simetri ve birleşme özelliklerini sağlaması gerekir. Bu özellikler $\forall [x_1, x_2], [y_1, y_2], [z_1, z_2] \in [0,1]^2$ için:

$$(A1(TI)) \quad \otimes'([x_1, x_2], [1, 1]) = [x_1, x_2] \quad (\text{Sınır şartı})$$

$$(A2(TI)) \quad [y_1, y_2] \leq [z_1, z_2] \text{ olduğu takdirde}$$

$$\otimes'([x_1, x_2], [y_1, y_2]) \leq \otimes'([x_1, x_2], [z_1, z_2]) \quad (\text{Monotonluk})$$

$$(A3(TI)) \quad \otimes'([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \otimes'([y_1, y_2], [x_1, x_2]) \quad (\text{Simetri})$$

$$(A4(TI)) \quad \otimes'([x_1, x_2], \otimes'([y_1, y_2], [z_1, z_2])) = \otimes'(\otimes'([x_1, x_2], [y_1, y_2]), [z_1, z_2])$$

(Birleşme)

$\tilde{A}'_1$ ve $\tilde{A}'_2$, $\mathcal{L}'$ 'de tanımlanmış aralıklı tip-2 BK'lar olduğu için verilen tüm şartları sağlamaktadır [25, 28-31].

Tanım 2.28.

$\tilde{A}'_1$ ve $\tilde{A}'_2$, $\mathcal{L}'$ 'de tanımlanmış aralıklı tip-2 BK'lar ve bu kümelerin üyelik fonksiyonları $\mu_{\tilde{A}'_1}^I(x_i) = [\mu_{\tilde{A}'_1}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}'_1}^U(x_i)]$ ve $\mu_{\tilde{A}'_2}^I(x_i) = [\mu_{\tilde{A}'_2}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}'_2}^U(x_i)]$ ile gösterilsin.

$\tilde{A}'_1$ ve $\tilde{A}'_2$, kümelerinin birleşimi $\tilde{A}'_1 \cup \tilde{A}'_2$ ve üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}'_1 \cup \tilde{A}'_2}^I(x_i)$ Eş.2.80'de tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \oplus' : [0,1]^2 \times [0,1]^2 &\rightarrow [0,1]^2 \\ \mu_{\tilde{A}'_1}^I(x_i) \oplus' \mu_{\tilde{A}'_2}^I(x_i) &= \left[\oplus \left(\mu_{\tilde{A}'_1}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}'_2}^L(x_i) \right), \oplus \left(\mu_{\tilde{A}'_1}^U(x_i), \mu_{\tilde{A}'_2}^U(x_i) \right) \right] \quad \forall x \in X \end{aligned} \quad (2.80)$$

Aralıklı tip-2 BK'ların kesişim işleminde kullanılan fonksiyon $\oplus$ tip-1 BK'larda kullanılan t-konormlardır. Bir fonksiyonun aralıklı t-konorm $(\oplus')$ olabilmesi için sınır şartı, monotonluk, simetri ve birleşme özelliklerini sağlaması gerekir. Bu özellikler $\forall [x_1, x_2], [y_1, y_2], [z_1, z_2] \in [0,1]^2$ için:

$$(A1(SI)) \quad \oplus'([x_1, x_2], [0, 0]) = [x_1, x_2] \quad (\text{Sınır şartı})$$

$$(A2(SI)) \quad [y_1, y_2] \leq [z_1, z_2] \text{ olduğu takdirde } \oplus'([x_1, x_2], [y_1, y_2]) \leq \oplus'([x_1, x_2], [z_1, z_2])$$

(Monotonluk)

$$(A3(SI)) \quad \oplus'([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \oplus'([y_1, y_2], [x_1, x_2]) \quad (\text{Simetri})$$

$$(A4(SI)) \quad \oplus'([x_1, x_2], \oplus'([y_1, y_2], [z_1, z_2])) = \oplus'(\oplus'([x_1, x_2], [y_1, y_2]), [z_1, z_2])$$

(Birleşme)

$\tilde{A}_1'$ ve $\tilde{A}_2'$, $\mathcal{L}'$ 'de tanımlanmış aralıklı tip-2 BK'lar olduğu için verilen tüm şartları sağlamaktadır [29, 32].

Tanım 2.29.

$\tilde{A}_1'$, X evrensel kümesinde tanımlanmış aralıklı tip-2 BK ve bu kümenin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}_1'}^I(x_i) = [\mu_{\tilde{A}_1'}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}_1'}^U(x_i)]$ ile gösterilsin.

$\tilde{A}_1'$ kümesinin tümleyeni $\neg\tilde{A}_1'$ ve üyelik fonksiyonu Eş.2.81'deki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}: [0,1]^2 &\rightarrow [0,1]^2 \\ \mu_{\neg\tilde{A}_1'}(x) &= \mathcal{N}(\mu_{\tilde{A}_1'}(x)) \quad \forall x \in X \end{aligned} \quad (2.81)$$

Bir fonksiyonun aralıklı tümleyen olabilmesi için aşağıda verilen şartları sağlamalıdır. Bu özellikler $\forall [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in [0,1]^2$ için:

$$(A1(NI)) \quad \mathcal{N}([0,0]) = [1,1] \text{ ve } \mathcal{N}([1,1]) = [0,0]$$

$$(A2(NI)) \quad \text{Eğer } [x_1, x_2] \leq [y_1, y_2] \text{ ise } \mathcal{N}([y_1, y_2]) \leq \mathcal{N}([x_1, x_2])$$

Eğer aralıklı bulanık tümleyen aşağıda verilen iki özelliği de sağlıyorsa, katıdır.

$$(A3(NI)) \quad \mathcal{N} \text{ sürekli bir fonksiyon}$$

$$(A4(NI)) \quad \text{Eğer } [x_1, x_2] < [y_1, y_2] \text{ ise } \mathcal{N}([y_1, y_2]) < \mathcal{N}([x_1, x_2])$$

Eğer aralıklı bulanık tümleyen (A5(NI)) özelliğini sağlıyorsa ise bulanık tümleyene kuvvetli aralıklı bulanık tümleyen denir [28-32].

$$(A5(NI)) \quad \mathcal{N}(\mathcal{N}([x_1, x_2])) = [x_1, x_2]$$

2.4. Dempster Shafer Teorisi (İnanç ve Mümkünlük Ölçümleri)

Dempster ve Shafer tarafından önerilen Dempster-Shafer teorisi belirsizliği ele almada önemli yöntemlerden bir tanesidir [33-35]. Dempster-Shafer teorisi Bayes öznal olasılık teorisinin genelleştirilmiş bir hali olup farklı şekilde belirsizliği ele almaktadır. Her iki teoride ele alınan durumlara bir ağırlık değeri atanmaktadır. Bayes öznal olasılık değeriinde bir durumun olası sonuçlarına atanan olasılık değeriyle o değerin tümleyeninin toplamı 1'e eşittir. Diğer bir deyişle bir durumun olası sonuçları kesindir. Fakat, Dempster-Shafer teorisinde böyle bir zorunluluk yoktur ve bir durumun olası sonuçları kesin değildir. Eğer Dempster-Shafer teorisinde bir durumun olası sonuçları kesin olursa olasılık teorisine dönüşmektedir. Dempster-Shafer teorisinde durumların alacağı değerlerin oluşturduğu kümenin tüm alt kümelerine bir değeri atanır ve atanan bu değerlerin toplamı 1'e eşittir. Atanan bu değeri, kütle ataması olarak adlandırılmıştır [33-35].

Tanım 2.30.

Herhangi bir durumun alabileceği değerlerin oluşturduğu küme ζ olsun. Bir fonksiyonun $m: \wp(\zeta) \rightarrow [0,1]$ kütle atama fonksiyonu olması için aşağıda belirtilen özellikleri sağlaması gerekir.

$$(1) \quad m(\emptyset) = 0$$

$$(2) \quad \sum_{A \in \wp(\zeta)} m(A) = 1$$

$m(A)$ değeri A kümesine atanan kanaatinin ölçüsü olarak tanımlanır. $m(A) > 0$ olan herhangi bir A alt kümesi odak eleman olarak adlandırılır [11, 34].

Tanım 2.31.

A kümesine ve A kümesinin bütün alt kümelerine atanan kanaat değeri inanç fonksiyonu olarak adlandırılıp Eş.2.82’de tanımlanmıştır.

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (2.82)$$

A kümesi ve A kümesiyle kesişen tüm kümelere atanan kanaat değeri mümkünlük fonksiyonu olarak adlandırılıp Eş.2.83’de tanımlanmıştır.

$$Pl(A) = \sum_{B|A \cap B \neq \emptyset} m(B) \quad (2.83)$$

İnanç ve mümkünlük fonksiyonları arasındaki ilişki Eş.2.84 ve Eş.2.85’de tanımlanmıştır [11, 34].

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}) \quad (2.84)$$

$$Bel(A) = 1 - Pl(\bar{A}) \quad (2.85)$$

Örnek 2.3.

Rafael tarafından yapıldığı düşünülen eski bir tablo bulunmuştur. Fakat, bulunan tablonun durumuyla ilgili aşağıda belirtilen kuşkular söz konusudur.

1. Tablo Rafael tarafından yapılmıştır.
2. Tablo Rafael’in öğrencilerinden biri tarafından yapılmıştır.
3. Tablo sahtedir.

Bu üç durum sırasıyla R , D ve C ile gösterilsin $\zeta = \{R, D, C\}$. Tabloyu bir uzman incelemiş ve bu üç durumun oluşturduğu kümenin alt kümelerine bir kütle değeri

atamıştır. Durum-I için bu değerler Çizelge 2.2’de gösterilmiştir. Çizelgede 2.2’de belirtilen kütle atama değerlerine göre $m(R \cup D) = 0,15$ değeri bulunan tablonun Rafael veya Rafael’in öğrencilerinden biri tarafından yapıldığı fikrine atanan kütle değerini göstermektedir. Çizelge 2.2’de ζ kümesinin alt kümelerine ait inanç ve mümkünlük fonksiyonları hesaplanmıştır. Tablonun Rafael veya Rafael’in öğrencilerinden biri tarafından yapıldığı fikrine olan inanç değeri 0,20’ye eşittir. Tablonun Rafael veya Rafael’in öğrencilerinden biri tarafından yapıldığı fikrine olan karşıt inanç değeri ise 0,05’dir. Bu durumda bir belirsizlik söz konusu olup belirsizlik değeri 0,75’e eşittir. Aslında Tablonun Rafael veya Rafael’in öğrencilerinden biri tarafından yapıldığı fikrine olan inanç değeri $[0,20 ; 0,95]$ aralığında değişmektedir. Bu durumu Bayes öznel olasılık teorisiyle yorumlanmak gerekirse; olasılık değeri belirsizdir ve $[0,20 ; 0,95]$ arasındaki herhangi bir değere eşit olabilir.

Çizelge 2.2. Örnek 2.3 durum-I için kütle atama, inanç ve muhtemellik değerleri

Odak Elemanlar	m	<i>Bel</i>	<i>Pl</i>
<i>R</i>	0,05	0,05	0,90
<i>D</i>	0,00	0,00	0,80
<i>C</i>	0,05	0,05	0,80
$R \cup D$	0,15	0,20	0,95
$R \cup C$	0,10	0,20	1,00
$D \cup C$	0,05	0,10	1,00
$R \cup D \cup C$	0,60	1,00	1,00

Bulunan tabloyu ilgili uzman görüşü durum-II için Çizelge 2.3’deki gibi tanımlansın. Bu durumda Tablonun Rafael tarafından yapıldığına olan inanç değeri 0,45, karşıt inanç değeri ise 0,55’dir. Bu durumda herhangi bir belirsizlik söz konusu olmayıp Dempster Shafer teorisi Bayes öznel olasılık teorisine dönüşmektedir [11].

Çizelge 2.3. Örnek 2.3 durum-II için kütle atama, inanç ve muhtemellik değerleri

Odak Elemanlar	m	<i>Bel</i>	<i>Pl</i>
<i>R</i>	0,45	0,45	0,45
<i>D</i>	0,30	0,30	0,30
<i>C</i>	0,25	0,25	0,25

3. DİLSEL ÖZETLEME

Özetleme işlemi veri madenciliğinde kullanılan tanımlayıcı yöntemlerden biridir. Bu işlemde amaç veriden bilgi çıkarımıdır. Özetleme işlemiyle ilgili yapılan ilk çalışmalar istatistik temellidir [36]. Kişilerin gelirleri, internet üstünden alışveriş yapıp yapmadıkları ve bu kişilerin yaşlarının bulunduğu bir veritabanının mevcut olduğu kabul edilsin. “Yıllık geliri 5 bin TL’den fazla ve internet üzerinden alışveriş yapan kişilerin yaşlarının ortalaması 38’dir” gibi bir özet çıkarılabilir [2]. Bu örnekte yaş özelliğinin ortalaması hesaplanmıştır. İstatistik temelli özetlemelerde ayrıca özelliklerin standart sapması ve ortancası gibi değerler hesaplanarak basit formda özetleme işlemi yapılabilir. Fakat bu durumda elde edilen bilgi sınırlıdır ve insanlar tarafından kolay bir şekilde anlaşılamayabilir. Bu nedenle, Yager [36] verinin doğal dil yardımıyla insanlar tarafından kolaylıkla anlaşılacak biçimde özetlenmesini sağlayan “Dilsel Özetleme” yöntemini önermiştir. Yager, yapmış olduğu çalışmada dilsel özetleme işlemi için BK’ları kullanmış ve iki tip özet yapısı önermiştir. Fakat özetleme işleminde sadece bir tane özetleyici kullanmıştır. George ve Srikanth [37], Yager tarafından önerilen yöntemde birden çok özetleyici kullanmışlardır. En temel dilsel özetleme formu niceleyici cümle yapısıdır. Çizelge 3.1’de dilsel özetleme işleminde kullanılan semboller ve açıklamaları verilmiştir.

Y nesne kümesi $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_M\}$, nesnelere ait özelliklerin kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_K\}$ ve $X_k (k = 1, 2, 3, \dots, K)$ v_k ’in tanım kümesi olarak tanımlansın. $v_k(y_m) \equiv v_k^m \in X_k$, m . nesnenin k . özelliğine ait değeri göstermektedir. Veritabanı $\mathbb{D}$, Y kümesine ait nesnelerle ilgili veriden oluşmaktadır.

$$\mathbb{D} = \left\{ \langle v_1^1, v_2^1, \dots, v_K^1 \rangle, \langle v_1^2, v_2^2, \dots, v_K^2 \rangle, \dots, \langle v_1^M, v_2^M, \dots, v_K^M \rangle \right\} \equiv \{d_1, d_2, \dots, d_M\} \quad (3.1)$$

S_k özetleyicisi tip-1 BK ile etiketlendiği takdirde Eş. 3.3 elde edilmektedir.

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_K\} \quad (3.2)$$

Çizelge 3.1. Dilsel özetlemede kullanılan semboller ve açıklamaları

Sembol	Açıklama	Örnek
$\mathbb{D}$	Veritabanı	İnsan kaynakları veritabanı
Y	Veritabanındaki tüm nesnelerin kümesi	Çalışanlar
y_m	Veritabanındaki m. nesne	Veritabanındaki m. çalışan
v_k	k. özellik	Yaş, aylık kazanç
X_k	v_k 'in tanım kümesi	[35-65] yaş, [5-10] bin TL aylık kazanç için
$v_k(y_m)$	m. kayıttan k. özelliğine ait değeri	m. çalışanın yaşı
d_m	m. nesnenin tüm özelliklerini kapsayan kayıt	<35,5bin TL,...>
S_k	Özetleyici	Genç, orta, vb
Q	Niceleyici	Çoğu, yaklaşık yarısı, tümü, vb
$w_g(S_g)$	Niteleyici	Genç, orta, vb
T_1	Doğruluk derecesi	[0,1] aralığında bir değer
T_2	Belirsizlik derecesi	[0,1] aralığında bir değer
T_3	Kapsama derecesi	[0,1] aralığında bir değer
T_4	Uygunluk derecesi	[0,1] aralığında bir değer
T_5	Özet uzunluğu	[0,1] aralığında bir değer
T_c	Yeterli kapsama derecesi	[0,1] aralığında bir değer
T_u	Fayda derecesi	[0,1] aralığında bir değer
T_o	Aykırlık derecesi	[0,1] aralığında bir değer
T_s	Basitlik derecesi	[0,1] aralığında bir değer

$$\mu_s(d_m) \equiv \bigotimes_{k=1}^K \mu_{s_k}(v_k^m) \quad k = 1, 2, \dots, K; m = 1, 2, \dots, M \quad (3.3)$$

Dilsel özetlemede kullanılan iki tip özet yapısı vardır. Bunlar tip-I ve tip-niceleyici cümlelerdir.

1. “ $Q \ Y(nesneler) \ S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ dir. $[T]$ ”: Bu özet yapısı tip-I niceleyici cümleler olarak adlandırılıp, Q tip-1 BK ile modellenen dilsel niceleyici (yaklaşık yarısı, çoğu, tümü vb.), Y nesneler kümesi, S özetleyiciler kümesi ve T özetin doğruluk derecesidir. Doğruluk derecesi veri setinin özeti ne derece desteklediğini göstermektedir. T değeri büyüdükçe daha fazla veri özeti desteklemektedir. T değeri Eş. 3.4’de verilen eşitlikle hesaplanmaktadır.

$$T_1 = \mu_Q\left(\frac{r}{R}\right) \quad (3.4)$$

$$r = \sum_{m=1}^M \mu_s(d_m) \quad (3.5)$$

$$R = \begin{cases} M, & \text{Göreceli niceleyici (çoğu)} \\ 1, & \text{Mutlak niceleyici (100' den fazla)} \end{cases} \quad (3.6)$$

Eş. 3.5 ve Eş. 3.6'da tanımlanan r ve R değerleri elde edilip r/R oranı hesaplanır. Q dilsel niceleyicisinde bu orana ait üyelik fonksiyonu değeri özetin doğruluk derecesidir. Bu formdaki özetlemeye “Çoğu çalışan gençtir [0,6]” ifadesi örnek olarak verilebilir. Bu örnekte “çoğu” dilsel niceleyici, “çalışan” nesne, “genç” özetleyici ve “0,6” özetin doğruluk derecesini göstermektedir.

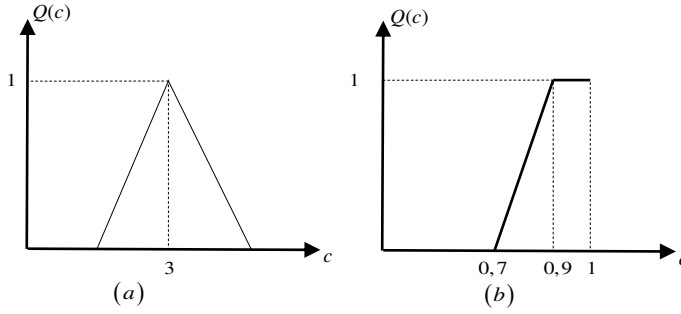
2. “ $Q_{w_g}(S_g) Y(nesneler), \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ dir. $[T]$ ” : Bu özet yapısı tip-II niceleyici cümleler olarak adlandırılıp, $w_g(S_g) \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ kümesinden tanımlanmış öncül özetleyicidir ve niteleyici olarak isimlendirilir. Bu durumda doğruluk derecesi Eş. 3.7 ile tanımlanır.

$$T_1 = \mu_Q \left(\frac{r}{\sum_{m=1}^M \mu_{w_g}(v_g^m)} \right) \quad (3.7)$$

Bu özet yapısında sadece göreceli niceleyici kullanılabilir. Tip-II niceleyici cümleye “Çoğu genç çalışanın aylık kazancı ortadır [0,7]” ifadesi örnek olarak verilebilir. Bu ifadede “çoğu” dilsel niceleyici, “çalışan” nesne, “genç” öncül özetleyici (niteleyici), “aylık kazancı ortadır” özetleyici ve “0,7” özetin doğruluk derecesini göstermektedir.

Bu cümlelerde yer alan “çoğu” ifadesi niceleyicidir. Literatürde farklı niceleyiciler tanımlanmıştır. Genel anlamda evrensel niceleyiciler “tümü” ($\forall$) ve “var” ($\exists$) niceleyicileridir. Dilsel özetleme işleminde mutlak ve göreceli olarak adlandırılan iki farklı tip niceleyici kullanılmaktadır. Bu niceleyiciler negatif olmayan tamsayı yada [0,1] aralığında olabilirlik dağılımı olarak tanımlanır. Mutlak niceleyiciler negatif

olmayan bulanık tamsayı yada bir aralığı tanımlamada kullanılır. Bu tip niceleyicilere “yaklaşık 3”, “2 ile 4 arasında” örnek olarak verilebilir. Şekil 3.1a’da “yaklaşık 3” mutlak niceleyicisi gösterilmiştir. Göreceli niceleyiciler ise bulanık oranı göstermektedir. Şekil 3.1b’de “çoğu” göreceli niceleyicisi gösterilmiştir. Bu tip niceleyicilere “çoğu”, “yaklaşık yarısı” örnek olarak verilebilir. “Genç” ifadesi ise dilsel etiket olup BK’larla modellenmektedir.



Şekil 3.1. (a) “yaklaşık 3” mutlak niceleyicisi (b) “çoğu” göreceli niceleyicisi

Niceleyici cümleler doğruluk derecesinin hesaplanmasıyla değerlendirilir. Niceleyici cümlelerin doğruluk derecesi skalar kardinalite veya bulanık kardinalitenin kullanıldığı yöntemlerle elde edilmektedir. Tip-II niceleyici cümlelerde niceleyici “tümü” olduğu takdirde, ifade “eğer-ise” kural yapısına dönüşmektedir. Bu yapıdaki kurallar kesişim temelli ve koşullu önerme temelli olmak üzere iki ana sınıfa ayrılmaktadır. Kesişim temelli kural tipleri t-norm operatörleri (minimum ve çarpım), yada diğer adlarıyla Mamdani, Larsen çıkarım mekanizması ile modellenen kurallardır. Koşullu önerme temelli kural tipleri ise verinin yapısı ve dağılımına göre çeşitli koşullu önerme operatörleri kullanılarak modellenen kurallardır [38, 39].

Bu bölüm 2 alt bölüme ayrılmıştır. Bölüm 3.1’de, niceleyici cümleleri kullanan skalar kardinalite ve bulanık kardinalite temelli dilsel özetleme yöntemleri açıklanmıştır. Bölüm 3.2. de ise “eğer-ise” yapısını kullanan yöntemler incelenmiştir.

3.1. Kardinalite Temelli Yöntemler

Dilsel özetleme işleminin en önemli adımlarından bir tanesi kuşkusuz özetlerin değerlendirilmesidir. Özetler doğruluk derecesinin hesaplanmasıyla değerlendirilir. Eğer doğruluk derecesi güvenilir olarak hesaplanmaz ise elde edilen özetler gerçeği yansıtmaz ve yanlış sonuçlar çıkarılmasına neden olur. Bu nedenle doğruluk derecesinin doğru ve güvenilir bir şekilde hesaplanması oldukça önemlidir. Delgado ve ark. tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin bazı özellikleri sağlaması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu özellikler aşağıda verilmiştir [38].

Tip-I Niceleyici Cümlelerin Değerlendirilmesinde Doğruluk Derecesinin Sağlaması Gereken Özellikler

Özellik 3.1.

(Kesin durum) S kesin küme ve Q göreceli niceleyici ise, doğruluk derecesi Eş. 3.8’de verilen ifadeye eşit olmalıdır.

$$Q\left(\frac{|S|}{|Y|}\right) \quad (3.8)$$

Q mutlak niceleyici ise 3.9’da verilen ifadeye eşit olmalıdır.

$$Q(|S|) \quad (3.9)$$

Özellik 3.2.

Niceleyicinin “tümü” ($\forall$) ve “var” ($\exists$) olduğu durumlarda, değerlendirme işlemi bulanık mantıkla tutarlı olmalıdır. Niceleyicinin $Q = \exists$ olduğu “ Q $Y(nesneler)$

$\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ 'dir'' ifadesi Eş.3.10 ile gösterilebilmeli ve değerlendirilebilmelidir.

$$\bigoplus_{m=1}^M \mu_S(d_m) \quad (3.10)$$

BK'larda birleşim işlemi için t-konorm operatörleri kullanılmaktadır. Niceleyici $Q = \forall$ olduğu " $Q \ Y(nesneler) \ \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ 'dir'' ifadesi Eş. 3.11 ile gösterilebilmeli ve değerlendirilebilmelidir.

$$\bigotimes_{m=1}^M \mu_S(d_m) \quad (3.11)$$

Kesişim işlemi için t-norm operatörleri kullanılır.

Özellik 3.3.

Değerlendirme işlemi, niceleyicilerin kapsama durumuna göre tutarlı olmalıdır. $Q \subseteq Q'$ olduğu durumda değerlendirme işlemi $T("Q \ Y(nesneler) \ S' \ dir.") \leq T("Q' \ Y(nesneler) \ S' \ dir.")$ olmalıdır.

Özellik 3.4.

Değerlendirme işleminin hesaplama karmaşıklığı $O(M)$ ile $O(M \log M)$ arasında olmalıdır.

Özellik 3.5.

Değerlendirme işlemi katı olmamalıdır.

$H = \{p / q \mid p \in \{0, \dots, M\}, q \in \{1, \dots, M\}\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir niceleyici, $Q \neq \emptyset$ ve $Q \neq H$ olduğu durumda bir S BK'sı varsa doğruluk derecesi $\{0,1\}$ 'e eşit olmamalıdır.

Özellik 3.6.

Değerlendirme işleminde herhangi bir niceleyici kullanılabilir. Negatif olmayan tamsayılar yada $[0,1]$ aralığı üzerinde herhangi bir olasılık dağılımı bu duruma örnektir.

Tip-II Niceleyici Cümlelerin Değerlendirilmesinde Doğruluk Derecesinin Sağlaması Gereken Özellikler

Özellik 3.7.

(Kesin durum) Eğer $w_g(S_g)$ ve S kesin kümeler ve Q göreceli niceleyici ise, doğruluk derecesi Eş. 3.12'de tanımlanmıştır.

$$Q\left(\frac{|S \cap w_g(S_g)|}{|w_g(S_g)|}\right) \quad (3.12)$$

Özellik 3.8.

Göreceli niceleyiciler kullanıldığında ve $w_g(S_g) = Y$ olduğu durumda değerlendirme işleminde kullanılan doğruluk derecesi tip-I cümlelerin değerlendirmesinde kullanılan doğruluk derecesine dönüşmektedir. Bu durumda tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesi tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin özel bir halidir.

Özellik 3.9.

Değerlendirme işleminin hesaplama karmaşıklığı $O(M)$ ile $O(M \log M)$ arasında olmalıdır.

Özellik 3.10.

Eğer $w_g(S_g) \subseteq S$ ve $w_g(S_g)$ normal BK ise, doğruluk derecesi $Q(1)$ ’e eşit olur.

Özellik 3.11.

Eğer $w_g(S_g) \cap S = \emptyset$ ise, doğruluk derecesi $Q(0)$ ’a eşit olur.

Özellik 3.12.

Niceleyicinin “tümü” ve “var” olduğu durumlarda, değerlendirme işlemi bulanık mantıkla tutarlı olmalıdır. Niceleyici $Q = \exists$ olduğu takdirde Eş.3.13 ile gösterilebilmelidir.

$$\bigoplus_{m=1}^M \left(\bigotimes_{k \in \{K\} \setminus g} \mu_{S_k}(v_k^m) \bigotimes \mu_{w_g(S_g)}(v_g^m) \right) \quad (3.13)$$

BK’larda birleşim işlemi için t-konorm operatörleri kullanılır. Eğer niceleyici $Q = \forall$ ise Eş.3.14 ile gösterilebilmelidir.

$$\bigotimes_{m=1}^M \left(\mu_{w_g(S_g)}(v_g^m) \rightarrow \bigotimes_{k \in \{K\} \setminus g} \mu_{S_k}(v_k^m) \right) \quad (3.14)$$

Kesişim işlemi için t-norm, $\rightarrow$ işlemi için bulanık koşullu önerme operatörleri kullanılır.

Özellik 3.13.

Değerlendirme işleminde herhangi bir niceleyici kullanılabilmelidir. $[0,1]$ aralığı üzerinde herhangi bir olabilirlik dağılımı bu duruma örnektir.

Özellik 3.14.

Değerlendirme işlemi katı olmamalıdır.

$H = \{p / q \mid p \in \{0, \dots, M\}, q \in \{1, \dots, M\}\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir niceleyici, $Q \neq \emptyset$ ve $Q \neq H$ olduğu durumda, S ve $w_g(S_g)$ BK'ları varsa doğruluk derecesi $\{0,1\}$ e eşit olmamalıdır.

3.1.1. Skalar kardinalite temelli doğruluk derecesi

Dilsel özetleme işleminde tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan bazı doğruluk dereceleri skalar kardinalite temellidir. Bu alt bölümde literatürde önerilen skalar kardinalite temelli doğruluk dereceleri incelenmiştir.

Tip-I Niceleyici Cümleler

Bu bölümde “ $Q \ Y(nesneler) \ S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ ’dır. $[T]$ ” yapısındaki tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk dereceleri ve bu doğruluk derecelerinin hangi özellikleri sağlayıp sağlamadıkları incelenmiştir. Doğruluk dereceleri sırasıyla Zadeh tarafından önerilen skalar kardinaliteye dayanan doğruluk derecesi [40], Yager tarafından önerilen OWA (sıralı ağırlıklı ortalama) operatörüne dayanan doğruluk derecesi [41], ve Choquet integral temelli doğruluk derecesidir [42, 43].

Zadeh Tarafından Önerilen Doğruluk Derecesi

Zadeh tarafından önerilen doğruluk derecesi skalar kardinalite kullanılarak hesaplanmaktadır [40]. Tip-I niceleyici cümlede göreceli niceleyici kullanıldığı takdirde doğruluk derecesi Eş. 3.15’de:

$$Z_Q(S) = Q \left(\frac{\sum_{m=1}^M \mu_S(d_m)}{|Y|} \right) \quad (3.15)$$

mutlak niceleyici kullanıldığında ise Eş. 3.16’da tanımlanmıştır.

$$Z_Q(S) = Q \left(\sum_{m=1}^M \mu_S(d_M) \right) \quad (3.16)$$

Zadeh tarafından önerilen doğruluk derecesi özellik 3.2 ve özellik 3.5’i sağlamamaktadır. $S = \{0/y_1, 0,5/y_2\}$ bir BK ve “var” niceleyici olsun. Bu durumda doğruluk derecesi 1’e eşit olmaktadır. Fakat $0 \oplus 0,5 = 1$ olan bir t-konorm bulunmamaktadır (Tüm t-konormlar $0 \oplus a = a$ şartını sağlar). $S = \{1/y_1, 0,9/y_2\}$ bir BK ve “tümü” niceleyici olsun. Bu durumda doğruluk derecesi 0’a eşit olmaktadır. Fakat $1 \otimes 0,9 = 0$ olan bir t-norm bulunmamaktadır (Tüm t-normlar $1 \wedge a = a$ şartını sağlar). Bu örnekler özellik 3.2’nin sağlanmadığını göstermektedir. Doğruluk derecesi, ancak ve ancak $S=Y$ olduğu takdirde 1’e eşit olup diğer durumlarda 0 değerini almaktadır. “var” niceleyici kullanıldığında ise doğruluk derecesi ancak ve ancak $S = \emptyset$ olduğu takdirde 0’a eşit olmaktadır. Bu örnekler özellik 3.5’in sağlanmadığını göstermektedir. Zadeh tarafından önerilen yöntemin hesaplama karmaşıklığı $O(M)$ ’dir.

OWA Operatör Temelli Doğruluk Derecesi

Yager tarafından önerilen doğruluk derecesi sadece göreceli niceleyicilerin ve $Q(0)=0$, $Q(1)=1$ şartını sağlayan azalmayan niceleyicilerin (tutarlı niceleyiciler) kullanıldığı ifadelerin doğruluk derecesini hesaplamada kullanılmaktadır [41]. $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ tutarlı niceleyiciler kümesi olmak üzere $Q_1 = \forall$, $Q_n = \exists$ ve $Q_i \subset Q_{i+1}$ şartını sağlayan niceleyicilerdir. Özellik 3.2’de, $Q_1 = \forall$, $Q_n = \exists$ niceleyicilerle modellenen ifadeler t-norm (genellikle minimum) ve t-konorm (genellikle maksimum) kullanılarak değerlendirmektedir. Diğer tutarlı niceleyicilerle modellenen ifadeler ise OWA operatörü kullanılarak değerlendirilmektedir. Doğruluk derecesi OWA operatörüyle birleştirilen elemanların minimumu ile maksimumu arasında bir değer olarak elde edilir. OWA operatör temelli doğruluk derecesi Eş. 3.17’de verilmiştir.

$$Y_Q(S) = \sum_{i=1}^M w_i b_i \quad (3.17)$$

$$w_i = Q(i/M) - Q((i-1)/M), \quad i \in \{1, 2, \dots, M\} \text{ ve } Q(0) = 0$$

b_i , S BK’sına ait elemanların üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıralandığında i . en büyük değerdir. Bu yöntem özellik 3.6 hariç diğer özellikleri sağlamaktadır. Eğer elemanların üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıralanmış ise hesaplama karmaşıklığı $O(M)$, sıralanmamış ise $O(M \log M)$ ’dir.

Choquet İntegral Temelli Doğruluk Dereceleri

Tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan yöntemlerden bir tanesi de Choquet İntegral temelli doğruluk derecesidir. Göreceli niceleyici kullanıldığında tip-I niceleyici cümleler Eş. 3.18’de tanımlanan Choquet integral temelli doğruluk derecesi kullanılarak değerlendirilir [42, 43].

$$C_Q(S) = \sum_{i=1}^M b_i \times (Q(i/M) - Q((i-1)/M)) \quad (3.18)$$

b_i S BK'sına ait elemanların üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıralandığında i . en büyük değerdir. Choquet integral temelli doğruluk derecesi Yager tarafından önerilmiş olan OWA temelli doğruluk derecesinin genel bir halidir.

Tip-II Niceleyici Cümleler

Tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi tip-I cümlelerin değerlendirilmesinden daha karmaşıktır. Bu nedenle tip-II niceleyici cümleleri değerlendirmek için önerilen doğruluk derecelerinin sayısı tip-I niceleyici cümleleri değerlendirmek için önerilen doğruluk derecelerinin sayısından daha azdır. Bu bölümde literatürde yer alan çalışmalar incelenmiştir.

Zadeh Tarafından Önerilen Doğruluk Derecesi

Zadeh tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için kardinalite temelli doğruluk derecesini önermiştir. Doğruluk derecesi, $w_g(S_g)$ BK'sının S BK'sına göre göreceli kardinalitesinin hesaplanmasına dayanmaktadır [40].

$$P(S|w_g(S_g)) = \frac{\sum_{m=1}^M \mu_S(d_m)}{\sum_{m=1}^M \mu_{w_g(S_g)}(v_g^m)} \quad (3.19)$$

Tip II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için tanımlanan doğruluk derecesi Eş. 3.20'de verilmiştir.

$$Z_Q\left(S\left|w_g\left(S_g\right)\right.\right)=Q\left(P\left(S\left|w_g\left(S_g\right)\right.\right)\right)=Q\left(\frac{\sum_{m=1}^M \mu_S\left(d_m\right)}{\sum_{m=1}^M \mu_{w_g\left(S_g\right)}\left(v_g^m\right)}\right) \quad (3.20)$$

Zadeh tarafından önerilen doğruluk derecesi özellik 3.7’i sağlamaktadır. $w_g\left(S_g\right)=Y$ olduğu takdirde, $Z_Q\left(S\left|w_g\left(S_g\right)\right.\right)=Z_Q(S)$ ’e dönüşmektedir. Bu nedenle özellik 3.8 sağlanmaktadır, fakat özellik 3.12 ve özellik 3.14 sağlanmamaktadır. Doğruluk derecesinin hesaplama karmaşıklığı $O(M)$ olduğu için özellik 3.9 sağlanmaktadır. Özellik 3.10, özellik 3.11 ve özellik 3.13’nin sağlandığı açıkça görülmektedir.

OWA Operatör Temelli Doğruluk Derecesi

Yager tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için OWA temelli doğruluk derecesini önermiştir [44]. Yöntem tutarlı ve göreceli niceleyicilerle modellenen cümlelerin değerlendirmesinde kullanılmaktadır.

$$P_i=\frac{1}{t} \sum_{j=1}^i e_j \quad \text{ve} \quad t=\sum_{j=1}^M e_j \quad (3.21)$$

$$w_i=Q\left(P_i\right)-Q\left(P_{i-1}\right), \quad i \in\{1,2, \ldots, M\}$$

e_j , $w_g\left(S_g\right)$ BK’sının j. en küçük elemanıdır ve $P_0=0$ ’dır. Değerlendirme işleminde kullanılan doğruluk derecesi Eş. 3.22’de tanımlanmıştır.

$$Y_Q\left(S\left|w_g\left(S_g\right)\right.\right)=\sum_{i=1}^M w_i j_i \quad (3.22)$$

j_i , $\neg w_g\left(S_g\right) \oplus S$ BK’sının üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıralandığında i. en büyük üyelik derecesidir.

$S = \{1/y_1, 0/y_2\}$, $w_g(S_g) = \{0/y_1, 0,7/y_2\}$ ve $Q = \exists$ olsun. Bu durumda doğruluk derecesi 0,3'e eşit çıkmaktadır fakat beklenen değer 0 olmalıdır. Bu nedenle özellik 3.11 sağlanmamaktadır. $S = \{1/y_1, 0,9/y_2\}$, $w_g(S_g) = \{1/y_1, 0,5/y_2\}$ ve $Q(c) = c$ olsun. $w_g(S_g) \subseteq S$ ve $w_g(S_g)$ normal BK olduğu için $Q(1) = 1$ 'e eşit olması gerekmektedir, fakat doğruluk derecesi 0,93 olarak hesaplanmıştır. Bu nedenle özellik 3.10 sağlanmamaktadır. $S = \{1/y_1, 0/y_2\}$, $w_g(S_g) = \{0/y_1, 0,7/y_2\}$ ve $Q = \exists$ olsun. Bu durumda özellik 3.12 “Var” niceleyicisi için sağlanamamaktadır, çünkü $\oplus(0,0) = 0,3$ sonucunu veren herhangi bir t-konorm yoktur. Özellik 3.12 “tümü” niceleyicisi için sağlanmaktadır. Özellik 3.13'nin sağlanmadığı açıkça görülmektedir. Bu özelliklerin dışındaki diğer özellikler sağlanmaktadır.

Farklı Kalite Ölçümlerinin Kullanıldığı Yöntemler

Kacprzyk ve Yager [45], Wu ve Mendel [8] tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde, sadece doğruluk derecesinin kullanılmasının yeterli olmadığını savunmuşlardır. Bu nedenle, niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için doğruluk derecesinin yanında birliktelik kurallarını değerlendirmede kullanılan bazı ilginçlik ölçütlerinin kalite ölçütü olarak kullanılması gerektiğini önermişlerdir. Bu kalite ölçütlerine dayanan yöntemler aşağıda verilmiştir.

Kacprzyk ve Yager Yaklaşımı

Özetlerin kalitelerinin değerlendirilmesinde kullanılan temel ölçüm doğruluk derecesidir. Fakat sadece doğruluk derecesinin tek başına kullanılması yeterli değildir. Bu nedenle, literatürde, doğruluk derecesine ek olarak, Kacprzyk [46], Kacprzyk ve Strykowski [47] tarafından kalite ölçümleri önerilmiştir. Bunlardan bir tanesi de belirsizlik derecesidir. Belirsizlik derecesi oldukça önemli bir kalite ölçümüdür. “hemen hemen tüm kış günleri soğuktur” gibi bir özetin doğruluk derecesi 1'e eşit olabilir fakat herkes tarafından bilinen bir ifade olduğu için içerdiği bilgi önemli değildir. Belirsizlik derecesi Eş. 3.23'de verilmiştir.

$$T_2 = 1 - \sqrt[k]{\prod_{k=1,2,\dots,K} in(S_k)} \quad (3.23)$$

$$in(S_k) = \frac{kard\{v \in X_k : \mu_{s_k}(v_k) > 0\}}{kard X_k} \quad (3.24)$$

Eş. 3.24’de tanımlanan “*kard*” ifadesi belirtilen kümenin (bulanık olmayan) kardinalitesini göstermektedir.

Kapsama derecesi, veritabanında w_g niteleyicisinin şartlarını sağlayan nesnelerin kaç tanesinin özet tarafından kapsandığını ifade etmektedir.

$$T_3 = \frac{\sum_{m=1}^M t_m}{\sum_{m=1}^M h_m} \quad (3.25)$$

$$t_m = \begin{cases} 1, & \mu_S(d_m) > 0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.26)$$

$$h_m = \begin{cases} 1, & \mu_{w_g}(v_g^m) > 0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Uygunluk derecesi S özetleyici kümesini K tane kısmi özete böler. Her bir kısmi özette yalnızca bir özetleyici bulunmaktadır.

$$T_4 = \left| \prod_{k=1}^K r_k - T_3 \right| \quad (3.28)$$

$$r_k = \frac{\sum_{m=1}^M t_{k,m}}{M} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3.29)$$

$$t_{k,m} = \begin{cases} 1, & \mu_{S_k}(v_k^m) > 0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.30)$$

Uygunluk derecesi, Kacprzyk ve Zadrozny [48] tarafından verilen bir örnekle açıklanabilir. İnsan kaynakları ile ilgili bir veritabanında, çalışanların %50'si 25 yaşının altında ve %50'si de yüksek niteliklere sahip ise, çalışanların %25'inin 25 yaşının altında ve yüksek niteliklere sahip olduğu beklenen bir durumdur. Fakat uygunluk derecesi, eğer 0,39'a eşit ise (çalışanların %39'unun 25 yaşının altında ve yüksek niteliklere sahip olduğu) özet beklenen ilişkiyi yansıtmıyordur; yani ilginçtir.

Kacprzyk ve Zadrozny [48]'e göre özeti uzunluğu önemli bir kalite ölçüsüdür; çünkü, uzun özetlerin insanlar tarafından anlaşılması oldukça güçtür. Bu nedenle özet uzunluğuyla ilgili kalite ölçümü Eş. 3.31'de tanımlanmıştır.

$$T_5 = 2(0,5^{kard\ S}) \quad (3.31)$$

kard S özetle yer alan özetleyicilerin sayısıdır.

Kacprzyk ve Zadrozny [48], Eş. 3.32'de genel bir geçerlilik derecesi tanımlayarak özetlerin değerlendirilme işlemini gerçekleştirmişlerdir. En büyük değeri alan özet en iyi özet olarak seçilir. w_i kalite ölçümlerinin önem derecelerini belirten ağırlıklardır.

$$T(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = \sum_{i=1}^5 w_i T_i \quad (3.32)$$

$$T^* = \arg \max_T \sum_{i=1}^5 w_i T_i \quad (3.33)$$

Wu ve Mendel Yaklaşımı

Wu ve Mendel [8], “eğer ise” yapısını kullanarak hem tip-1 BK’larla hem de aralıklı tip-2 BK’larla dilsel özetleme işlemini gerçekleştirmişlerdir. “eğer ise” yapısındaki kanonik form

$$\text{"Eğer } X_1 \text{ } S_1 \text{ ise, } X_2 \text{ } S_2 \text{'dir. [T]"} \quad (3.34)$$

şeklindedir. Bu yapıda X_1 ve X_2 v_k 'in tanım kümesinde bulunan elemanlar, S_1 ve S_2 özetleyiciler ve T doğruluk derecesidir. Bu kanonik forma örnek olarak “Eğer çalışanların yaşı genç ise, aylık kazançları ortadır. $[0,7]$ ” verilebilir. Bu örnekte “çalışanların yaşı” ve “aylık kazançları” veritabanında yer alan nesnelere ait özellikler, “genç” ve “orta” ise özetleyicilerdir.

Eş. 3.34’de tanımlanan kanonik form, Eş. 3.35’de tanımlanan forma eşdeğerdir.

$$"Tüm S_1 Y(nesneler) S_2 'dir. [T]" \quad (3.35)$$

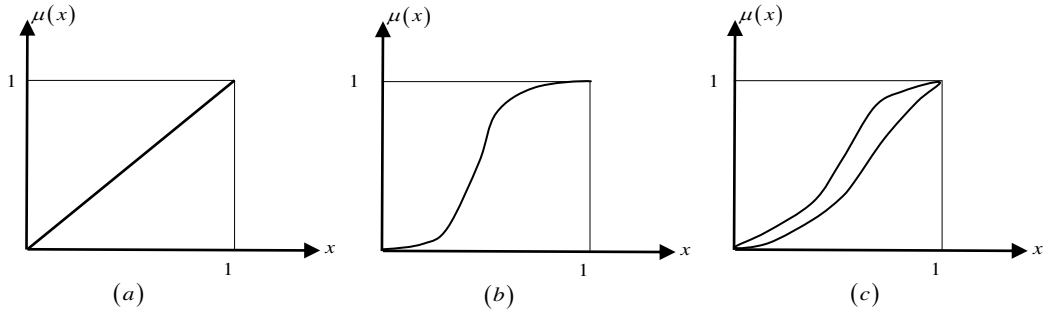
Bu formdaki yapı ise Yager [36] tarafından tanımlanmış, niceleyicisi “tüm” olan ikinci kanonik forma eşdeğerdir. Bu nedenle Eş. 3.34’de tanımlanan doğruluk derecesi, Eş. 3.35 kullanılarak hesaplanabilir. Bu durumda doğruluk derecesi Eş. 3.36’daki gibi hesaplanır.

$$T = \mu_{tüm} \left(\frac{\sum_{m=1}^M \min(\mu_{S_1}(v_1^m), \mu_{S_2}(v_2^m))}{\sum_{m=1}^M \mu_{S_1}(v_1^m)} \right) \quad (3.36)$$

Şekil 3.2’de görüldüğü gibi farklı yapılar “tüm” niceleyicisini modellemek için kullanılabilir. Eğer niceleyici tip-1 BK ile modellenirse doğruluk derecesi T kesin bir değere eşit olmakta, aralıklı tip-2 BK ile modellenirse aralıklı bir değere eşit olmaktadır. “tüm” niceleyicisi, Şekil 3.2a’da verilen fonksiyon ile modellenirse doğruluk derecesi Eş. 3.37’deki gibi hesaplanır.

$$T = \left(\frac{\sum_{m=1}^M \min(\mu_{S_1}(v_1^m), \mu_{S_2}(v_2^m))}{\sum_{m=1}^M \mu_{S_1}(v_1^m)} \right) \quad (3.37)$$

Eş. 3.37’de elde edilen formül; Koska [49] tarafından önerilen tip-1 BK için alt kümeliğin ölçümünde kullanılan formül, Zadeh [40] tarafından önerilen dilsel önerilerin doğruluk derecesinin ölçümünde kullanılan formül, bulanık olayların koşullu olasılığının hesaplanmasında kullanılan formül [50] ve birliktelik kurallarında güven ölçüsü için tanımlanmış formül [51-54] ile aynıdır.



Şekil 3.2. Niceleyici için 3 farklı model : (a) ve (b) tip-1 BK (c) aralıklı tip-2 BK

Doğruluk derecesi, Wu ve Mendel [8] tarafından BK’larda kardinalite tanımı kullanılarak farklı bir şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.

Veritabanı $\mathbb{D}$ ’de tanımlı tip-1 BK S_1 ’in kardinalitesi Eş. 3.38’de tanımlanmıştır [8].

$$kard(S_1) = \sum_{m=1}^M \mu_{S_1}(v_1^m) \quad (3.38)$$

Tanım 3.2.

Veritabanı $\mathbb{D}$ ’de tanımlı tip-1 BK’lar $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ kardinalitesi Eş. 3.39’da tanımlanmıştır [8].

$$kard(S_1, S_2, \dots, S_K) = \sum_{m=1}^M \min \{ \mu_{S_1}(v_1^m), \dots, \mu_{S_K}(v_K^m) \} \quad (3.39)$$

Tanım 3.1-3.2 kullanılarak, Eş. 3.37, Eş. 3.40'daki gibi tanımlanabilir.

$$T = \frac{kard(S_1, S_2)}{kard(S_1)} \quad (3.40)$$

Eş. 3.40 ile tanımlanan doğruluk derecesi olasılık teorisindeki koşullu olasılık formülüne benzemektedir. S_1 ve S_2 iki olay olmak üzere, S_1 olayının gerçekleştiği bilindiğinde S_2 olayının olma olasılığı $P(S_2 | S_1)$, Eş. 3.41'de tanımlanmıştır.

$$P(S_2 | S_1) = \frac{P(S_1, S_2)}{P(S_1)} \quad (3.41)$$

$P(S_1, S_2)$ S_1 ve S_2 iki olayın birlikte olma olasılıkları, $P(S_1)$ ise S_1 olayının olma olasılığıdır.

Doğruluk derecesine ek olarak Wu ve Mendel [8], genelliği, yararlılığı ve yeniliği dikkate alan 3 kalite ölçümü daha önermişlerdir. Bu ölçümlerden genellikle ilgili olanı yeterli kapsama derecesidir. Yeterli kapsama derecesi özetin yeterli veri tarafından desteklenip desteklenmediğini göstermektedir. Yeterli kapsama derecesi, doğruluk derecesinden bağımsızdır; çünkü doğruluk derecesi yüksek bir değer alırken, yeterli kapsama derecesi düşük bir değer alabilir. Yeterli kapsama derecesini hesaplamak için ilk olarak kapsama oranının hesaplanması gerekir.

$$r = \frac{\sum_{m=1}^M t_m}{M} \quad (3.42)$$

$$t_m = \begin{cases} 1, & \mu_{S_1}(v_1^m) > 0 \text{ ve } \mu_{S_2}(v_2^m) > 0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.43)$$

Eş. 3.42'de tanımlanan r özetin öncül ve ardılını sağlayan nesnelerin oranını göstermektedir. Bu oran doğrudan kullanılmamaktadır; çünkü genellikle aldığı değer

çok küçüktür (0,1'den küçük). Eğer bu değer 0,15 ise kuralın yeterli sayıda veriyi kapsadığı düşünülür ve yeterli kapsama derecesi 1'e eşit olur. Kapsama oranı ve yeterli kapsama derecesi arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyon Eş. 3.44'de tanımlanmıştır.

$$T_c = f(r) = \begin{cases} 0, & r \leq r_1 \\ \frac{2(r-r_1)}{(r_2-r_1)^2}, & r_1 < r < \frac{r_1+r_2}{2} \\ 1 - \frac{2(r-r_1)}{(r_2-r_1)^2}, & \frac{r_1+r_2}{2} \leq r < r_2 \\ 1, & r \geq r_2 \end{cases} \quad (3.44)$$

$r_1 = 0,02$ ve $r_2 = 0,15$ durumu için $f(r)$ Şekil 3.3'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3. S tip $f(r)$ fonksiyonu

Wu ve Mendel [8] tarafından tanımlanan fayda derecesi, çıkarılan özeti ne derece faydalı olduğunu belirtmektedir. Bir özeti faydalı olabilmesi için verilen dilsel özeti “doğruluk derecesi yüksek” ve “yeterli kapsama derecesine sahip olmalı” şartlarını sağlaması gerekir. Fayda derecesi Eş. 3.45’de tanımlanmıştır.

$$T_u = \min(T, T_c) \quad (3.45)$$

Wu ve Mendel [8] tarafından tanımlanan aykırılık derecesi, özetten elde edilen bilginin yeni ya da beklenmedik olduğuyla ilgilidir. Özetin yeni ya da beklenmedik olabilmesi için kapsama derecesinin düşük ve doğruluk derecesinin ya çok yüksek yada çok düşük olması gerekir. Aykırılık derecesi Eş. 3.46'da tanımlanmıştır.

$$T_o = \begin{cases} \min(\max(T, 1-T), 1-T_c), & T > 0 \\ 0, & T = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Wu ve Mendel [8] tarafından tanımlanan basitlik derecesi özetin uzunluğunu ölçmektedir. Özette yer alan öncüllerin ve ardılların sayısına göre basitlik derecesi hesaplanmaktadır. Basitlik derecesinin formülü Eş. 3.47'de verilmiştir.

$$T_s = 2^{2-l} \quad (3.47)$$

l özetteki öncül ve ardıl özetleyicilerin sayısıdır. En basit formdaki bir ardıl ve bir öncülün bulunduğu özetle basitlik derecesi $T_s = 1$ 'e eşit olmaktadır.

Örnek 3.1.

$w_g(S_g)$ ve $S, Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel uzayında iki BK:

$$w_g(S_g) = \left\{ \frac{1}{y_1}, \frac{0}{y_2} \right\} \quad S = \left\{ \frac{0}{y_1}, \frac{1}{y_2} \right\}$$

olsun. Minimum operatörü t-norm olarak kullanıldığında bu kümelerin kesişimi $S \cap w_g(S_g)$ aşağıda verilmiştir.

$$S \cap w_g(S_g) = \left\{ \frac{0}{y_1}, \frac{0}{y_2} \right\}$$

$w_g(S_g)$ ve S farklı kümeler olup $T = 0$ olmaktadır [55, 56].

Örnek 3.2.

$w_g(S_g)$ ve S , $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{1000}\}$ evrensel uzayında iki BK:

$$w_g(S_g) = \left\{ \frac{1}{y_1}, \frac{0,01}{y_2}, \frac{0,01}{y_3}, \dots, \frac{0,01}{y_{1000}} \right\} \quad S = \left\{ \frac{0,01}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{0,01}{y_3}, \dots, \frac{0,01}{y_{1000}} \right\}$$

olsun. Minimum operatörü t-norm olarak kullanıldığında bu kümelerin kesişimi $S \cap w_g(S_g)$ aşağıda verilmiştir.

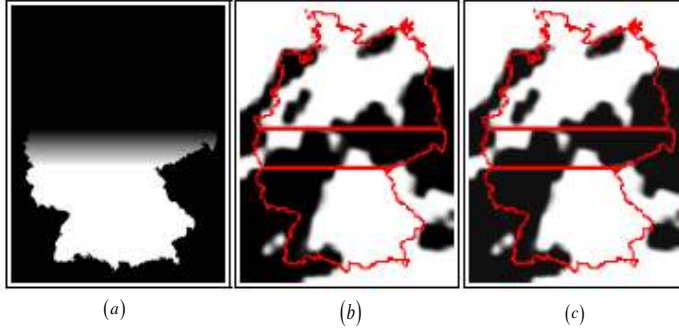
$$S \cap w_g(S_g) = \left\{ \frac{0,01}{y_1}, \frac{0,01}{y_2}, \frac{0,01}{y_3}, \dots, \frac{0,01}{y_{1000}} \right\}$$

$w_g(S_g)$ ve S farklı kümeler olmalarına rağmen $T = 0,91$ gibi büyük bir değer çıkmaktadır. Bunun nedeni küçük üyelik dereceleriyle büyük üyelik dereceleri arasındaki farkın ayırt edilememesidir. Ayrıca küçük üyelik dereceleri hesaplamada etkin rol oynamaktadır. 0,01 gibi 0'a yakın değerler nedeniyle T değeri çok büyük çıkmaktadır. İki örnekte skalar kardinalitenin doğruluk derecesini hesaplamada kullanılmasının tutarsız sonuçlar ürettiğini göstermektedir [55, 56].

Örnek 3.3.

Knoll ve Glöcker, tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için önerilen bazı yöntemlerin tutarsız sonuç ürettiklerini meteoroloji veri seti üzerinde göstermişlerdir [57]. Şekil 3.4a'da Almanya'nın güney kesimi gösterilmiştir. Beyaz ile gösterilen alanın güney Almanya'ya ait olma derecesi bire eşit iken gri ve grinin tonu olan renklerin aitlik derecesi sıfır bir aralığında bir değere eşittir. Siyah renkle

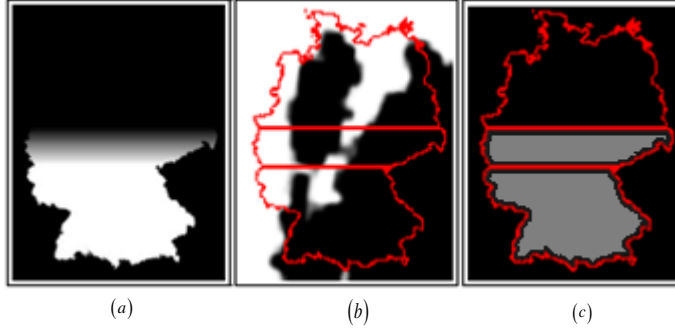
gösterilen alanın aitlik derecesi sıfıra eşittir. Şekil 3.4b ve Şekil 3.4c’de beyaz alan havanın bulutlu olduğunu göstermektedir. “Almanya’nın güneyinin en az %60’ı bulutludur” ifadesi ele alınsın. Şekil 3.4b için bu ifadenin doğruluk derecesi $Z_Q = 0$ ’a eşit iken, Şekil 3.4c için doğruluk derecesi $Z_Q = 1$ ’e eşittir. İki resim arasında çok az bir farklılık olmasına rağmen doğruluk derecesindeki değişim oldukça fazladır. Bu durumun nedeni Zadeh tarafından önerilen yöntemin özellik 3.14’i sağlamamasıdır. Çok az değişimin olduğu bir durumda doğruluk derecesi büyük oranda değişmektedir.



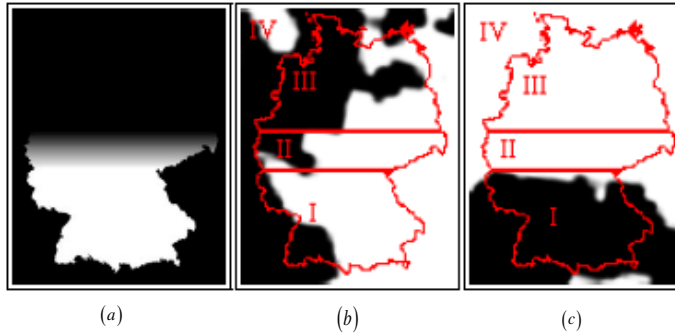
Şekil 3.4. (a) Almanya’nın güneyi (b) “Almanya’nın güneyinin en az %60’ı bulutludur” $Z_Q = 0$ (c) “Almanya’nın güneyinin en az %60’ı bulutludur” $Z_Q = 1$

Şekil 3.5’te “Almanya’nın güneyinin yaklaşık %10’u bulutludur” ifadesi ele alınmıştır. Şekil 3.5b’de $Z_Q = 1$ ’e eşittir ve bu beklenen bir değerdir; çünkü Almanya’nın güneyinin %10’luk bir kesimi bulutludur. Şekil 3.5c’de deki durumda da $Z_Q = 1$ ’e eşittir. Bu durum beklenmeyen bir durumdur; çünkü Almanya’nın güneyi çok az bulutludur. Diğer bir değişle bu durumun bulutlu olma kümesine üyeliği 0,1’e eşittir. Şekil 3.5c’deki resimden “Almanya’nın güneyinin yaklaşık %10’u bulutludur.” gibi bir ifadenin çıkarılması yanlıştır; çünkü Almanya’nın güneyinin tamamı az bulutludur. Şekil 3.5c’deki durumda $Z_Q = 1$ ’e eşit olmasının nedeni doğruluk derecesini hesaplamada fazla sayıdaki küçük üyelik derecelerinin toplamının az sayıdaki büyük üyelik derecelerinin toplamına eşit olmasıdır.

Şekil 3.6’da “Almanya’nın güneyinin en az %60’ı bulutludur” ifadesinin doğruluk derecesi Eş. 3.22’de tanımlanan OWA operatörü kullanılarak hesaplanmıştır. Şekil 3.6b’deki durum için doğruluk derecesi 0,1’e eşit çıkmıştır. Şekil 3.6c’deki durum için ise doğruluk derecesi 0,6’ya eşit çıkmıştır. Şekil 3.6b’den de anlaşılacağı gibi Almanya’nın güneyinin en az %60’lık kesimi bulutludur. Bu nedenle doğruluk derecesinin 1’e eşit çıkması beklenmektedir. Şekil 3.6c’deki durum için doğruluk derecesinin 0’a yakın bir değer çıkması beklenmektedir. Ayrıca Şekil 3.6c’deki durum için hesaplanan doğruluk derecesinin Şekil 3.6b’deki durum için hesaplanan doğruluk derecesinden daha büyüktür.



Şekil 3.5. (a) Almanya’nın güneyi (b) “Almanya’nın güneyinin yaklaşık %10’u bulutludur” $Z_Q = 1$ (c) “Almanya’nın güneyinin yaklaşık %10’u bulutludur” $Z_Q = 1$



Şekil 3.6. (a) Almanya’nın güneyi (b) “Almanya’nın güneyinin en az %60’ı bulutludur” $Y_Q = 0,1$ (c) “Almanya’nın güneyinin en az %60’ı bulutludur” $Y_Q = 0,6$

3.1.2. Bulanık kardinalite temelli doğruluk derecesi

Doğruluk derecesinin hesaplanmasında skalar kardinalite kullanımı bazı durumlarda tutarsız sonuçlar üretmektedir. Bu nedenle doğruluk derecesinin hesaplanmasında skalar kardinalite yerine bulanık kardinaliteyi kullanan yöntemler önerilmiştir. Bu bölümde tip-I ve tip-II niceleyici cümleleri değerlendirmede kullanılan bulanık kardinalite temelli yöntemler incelenmiştir.

Tip-I Niceleyici Cümleler

Bu bölümde tip-I niceleyici cümleleri değerlendirmede kullanılan bulanık kardinalite temelli yöntemler incelenmiştir. Bu yöntemler sırasıyla G tipi bulanık kardinalite temelli yöntem, GD tipi bulanık kardinalite temelli yöntem ve ZS tipi bulanık kardinalite temelli yöntemlerdir.

G Tipi Bulanık Kardinalite Temelli Yöntem

Delgado ve ark. mutlak niceleyicilerle modellenen tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için Eş. 3.48'de verilen bulanık kardinalite temelli yöntemi önermişlerdir [38].

$$G_Q(S) = \bigoplus_{i \in \{0, \dots, M\}} (E(S, i) \otimes Q(i)) \quad (3.48)$$

Eğer tip-I niceleyici cümle göreceli niceleyicilerle modellenirse, doğruluk derecesinin hesaplanması için Eş. 3.49'da tanımlanan eşitlik kullanılır.

$$G_Q(S) = \bigoplus_{i \in \{0, \dots, M\}} (E(S, i) \otimes Q(i/M)) \quad (3.49)$$

Eş. 3.48'de tanımlanan $E(S, i)$, S BK'sının i tane elemana sahip olmasının olabilirliğini ifade etmekte olup Eş. 3.50'de tanımlanmıştır [58].

$$E(S,i) = L(S,i) \otimes \overline{L(S,i+1)} \quad (3.50)$$

$L(S,i) = b_i$, S BK'sının en az i tane elemana sahip olmasının olabilirliğini ifade etmek olup Eş. 3.51'de tanımı verilmiştir [58].

$$L(S,i) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i > M \\ \bigoplus_{(l_1, \dots, l_i) \in I_i} (S(y_{l_1}) \otimes \dots \otimes S(y_{l_i})), & 1 \leq i \leq M \end{cases} \quad (3.51)$$

I_i i tane elemana sahip indislerin kümesi olup

$$I_i = \{(l_1, \dots, l_i) | l_1 < l_2 < \dots < l_i, l_j \in \{1, \dots, M\} \forall j \in \{1, \dots, i\}\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer t-konorm maksimum, t-norm minimum olduğu takdirde

$$L(S,i) = b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.52)$$

Eş.3.52 elde edilir. b_i , S BK'sına ait elemanların üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıralandığında i . en büyük değerdir.

GD Tipi Bulanık Kardinalite Temelli Yöntem

Bu yöntem bir önceki yöntemde kullanılan E tipi bulanık kardinalitenin özel bir hali olan ED bulanık kardinaliteye dayanmaktadır. Delgado ve ark. mutlak niceleyicilerle modellenen tip-I cümlelerin değerlendirilmesi için Eş. 3.53'de tanımlanan ED tipi bulanık kardinalite temelli yöntemi önermişlerdir [38].

$$GD_Q(S) = \sum_{i=0}^M ED(S,i) \times Q(i) \quad (3.53)$$

Eğer tip-I niceleyici cümle göreceli niceleyicilerle modellenirse, doğruluk derecesinin hesaplanması için Eş. 3.54’de tanımlanan eşitlik kullanılır.

$$GD_Q(S) = \sum_{i=0}^M ED(S, i) \times Q(i/M) \quad (3.54)$$

ED bulanık kardinalitesi, E tipi bulanık kardinalitenin özel halidir. t-konorm maksimum, t-norm minimum olduğu takdirde $L(S, i) = b_i$ ’ye eşit olmaktadır. Eş. 3.50’de $L(S, i) = b_i$ ifadesi yerine konulursa Eş. 3.55 elde edilir.

$$E(S, i) = b_i \otimes 1 - b_{i+1} \quad (3.55)$$

t-norm olarak Lukasiewicz normu kullanılırsa Eş. 3.56 elde edilir [58].

$$\begin{aligned} E(S, i) &= \max\{b_i + 1 - b_{i+1} - 1, 0\} = b_i - b_{i+1} \\ ED(S, i) &= b_i - b_{i+1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

ZS Tipi Bulanık Kardinalite Temelli Yöntem

Delgado ve ark. mutlak niceleyicilerle modellenen tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde için Eş. 3.57’de tanımlanan Zadeh tarafından önerilen bulanık kardinalite temelli yöntemi önermişlerdir [38].

$$ZS_Q(S) = \max_{i \in \{0, \dots, M\}} \min(Z(S, i), Q(i)) \quad (3.57)$$

Eğer tip-I niceleyici cümle göreceli niceleyiciyle modellenirse, değerlendirme işleminde doğruluk derecesinin hesaplanması için Eş. 3.58’de tanımlanan eşitlik kullanılır.

$$ZS_Q(S) = \max_{i \in \{0, \dots, M\}} \min(Z(S, i), Q(i/M)) \quad (3.58)$$

Zadeh tarafından önerilen bulanık kardinalite $Z(S, i)$ Eş. 3.59'da tanımlanmıştır [40].

$$Z(S, i) = \begin{cases} 0, & \text{Eğer } \alpha \mid |S_\alpha| = i \text{ yok ise} \\ \sup \{ \alpha \mid |S_\alpha| = i \}, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.59)$$

Tip-II Niceleyici Cümleler

Bu bölümde tip-II niceleyici cümleleri değerlendirmede kullanılan bulanık kardinalite temelli yöntemler incelenmiştir. Bu yöntemler sırasıyla olasılık temelli yöntem ve olabilirlik temelli yöntemdir.

Tip-II Niceleyici Cümleleri Değerlendirmek için Olasılık Temelli Yöntem

Delgado ve ark. tip-II cümlelerin değerlendirilmesi için Eş. 3.60'da tanımlanan göreceli bulanık kardinalitenin hesaplanmasına dayanan olasılık temelli yöntemi önermişlerdir [38].

$$GD_Q(S \mid w_g(S_g)) = \sum_{c \in CR(S \mid w_g(S_g))} ER(S \mid w_g(S_g), c) \times Q(c) \quad (3.60)$$

$ER(S \mid w_g(S_g), c)$, S BK'sının $w_g(S_g)$ BK'sına göre göreceli bulanık kardinalitesi olup Eş. 3.61'de tanımı verilmiştir.

$$ER(S \mid w_g(S_g), c) = \sum_{c \in C(S \mid w_g(S_g), \alpha_i)} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \quad \forall c \in CR(S \mid w_g(S_g)) \quad (3.61)$$

c , göreceli bulanık kardinalitenin oranını göstermektedir. Bu oranın bulunabilmesi için $C(S|_{w_g(S_g)}, \alpha_i)$ ve $CR(S|_{w_g(S_g)})$ kümelerinin bilinmesi gerekir. Bu kümeler Eş. 3.62 ve Eş. 3.63’de tanımlanmıştır.

$$C(S|_{w_g(S_g)}, \alpha_i) = \frac{|(S \cap w_g(S_g))_{\alpha_i}|}{|w_g(S_g)_{\alpha_i}|} \quad (3.62)$$

$$CR(S|_{w_g(S_g)}) = \left\{ \frac{|(S \cap w_g(S_g))_{\alpha}|}{|w_g(S_g)_{\alpha}|}, \text{ öyleki } \alpha \in \Gamma(S|_{w_g(S_g)}) \right\} \quad (3.63)$$

Eş. 3.63’de verilen $\Gamma(S|_{w_g(S_g)})$, $S \cap w_g(S_g)$ ve $w_g(S_g)$ kümelerinde bulunan elemanların üyelik derecelerinin birleşimiyle oluşan bir kümedir. $w_g(S_g)$ BK’sı normal BK olmak zorundadır. Eğer normal BK değilse normalize edilir. Normalizasyonda kullanılan katsayıyla ayrıca $S \cap w_g(S_g)$ kümesi de normalize edilmelidir.

$$\Gamma(S|_{w_g(S_g)}) = \Gamma(S \cap w_g(S_g)) \cup \Gamma(w_g(S_g)) \quad (3.64)$$

$\Gamma(S|_{w_g(S_g)}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ kümesi, α kesmelerinden oluşan bir küme olup $1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > \alpha_{m+1} = 0$ şartını sağlamaktadır. $\Gamma(S|_{w_g(S_g)})$ kümesinin nasıl bulunduğu örnek 3.4’de açıklanmıştır.

Örnek 3.4.

$w_g(S_g)$ ve S , $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ evrensel uzayında iki BK olsun.

$$w_g(S_g) = \left\{ \frac{0,3}{y_1}, \frac{0,5}{y_2}, \frac{0,8}{y_3} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{0,2}{y_1}, \frac{0,4}{y_2}, \frac{0,6}{y_3} \right\}$$

Minimum operatörü t-norm olarak kullanıldığında bu kümelerin kesişimi $S \cap w_g(S_g)$ aşağıda verilmiştir.

$$S \cap w_g(S_g) = \left\{ \frac{0,2}{y_1}, \frac{0,4}{y_2}, \frac{0,6}{y_3} \right\}$$

$w_g(S_g)$ kümesi normal BK değildir. Bu nedenle $w_g(S_g)$ ve $S \cap w_g(S_g)$ kümelerinin normalize edilmeleri gerekmektedir. Normalizasyon katsayı 0,8' dir. Normalizasyon işlemi sonrası

$$w_g(S_g) = \left\{ \frac{0,375}{y_1}, \frac{0,625}{y_2}, \frac{1}{y_3} \right\}$$

$$S \cap w_g(S_g) = \left\{ \frac{0,25}{y_1}, \frac{0,5}{y_2}, \frac{0,75}{y_3} \right\}$$

olarak elde edilir. $\Gamma(S|w_g(S_g)) = \{1; 0,75; 0,625; 0,5; 0,375; 0,25\}$ olarak bulunur.

Eş. 3.60'da verilen eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra Eş. 3.65 elde edilir.

$$GD_Q(S|w_g(S_g)) = \sum_{\alpha_i \in \Gamma(S|w_g(S_g))} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \times Q \left(\frac{\left| (S \cap w_g(S_g))_{\alpha_i} \right|}{\left| w_g(S_g)_{\alpha_i} \right|} \right) \quad (3.65)$$

Tip-II Niceleyici Cümleleri Değerlendirmek için Olabilirlik Temelli Yöntem

Delgado ve ark. tip-II niceleyici cümleleri değerlendirmede göreceli bulanık kardinalitenin hesaplanmasına dayanan Eş. 3.66'da verilen olabilirlik temelli yöntemi önermişlerdir [38].

$$ZS_Q(S|w_g(S_g)) = \max_{c \in CR(S|w_g(S_g))} \min(ES(S|w_g(S_g), c), Q(c)) \quad (3.66)$$

$ES(S|w_g(S_g), c)$, S BK'sının $w_g(S_g)$ BK'sına göre göreceli bulanık kardinalitesi olup Eş. 3.67'de verilmiştir.

$$ES(S|w_g(S_g), c) = \max \left\{ \alpha \in \Gamma(S|w_g(S_g)) \mid c = \frac{|(S \cap w_g(S_g))_\alpha|}{|w_g(S_g)_\alpha|} \right\} \quad (3.67)$$

$w_g(S_g)$ BK'sı normal BK olmak zorundadır. Eğer normal BK değilse normalize edilir. Normalizasyonda kullanılan katsayıyla ayrıca $S \cap w_g(S_g)$ kümeside normalize edilmelidir. Eş. 3.66'da verilen eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra Eş. 3.68 elde edilir.

$$ZS_Q(S|w_g(S_g)) = \max_{\alpha_i \in \Gamma(S|w_g(S_g))} \min \left(\alpha, Q \left(\frac{|(S \cap w_g(S_g))_{\alpha_i}|}{|w_g(S_g)_{\alpha_i}|} \right) \right) \quad (3.68)$$

Tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan yöntemlerden birisi olan $GD_Q(S)$, Yager tarafından önerilen OWA temelli yöntemin geliştirilmiş halidir. Yager tarafından önerilen OWA temelli yöntemde sadece tutarlı niceleyiciler kullanılabilirken bu yöntemde tutarlı ve tutarsız tüm niceleyiciler kullanılabilir [41]. $ZS_Q(S)$, Sugeno integralinin kullanıldığı yöntemin

genelleştirilmiş halidir. Bu yöntemde de tüm niceleyiciler kullanılabilir. Tip II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için olasılık temelli $GD_Q(S|w_g(S_g))$ ve olabilirlik temelli $ZS_Q(S|w_g(S_g))$ yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemler özellik 3.7-3.14 sağlamaktadır. Tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için önerilen yöntemlerin sağladığı özellikler Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3’de verilmiştir.

Çizelge 3.4’te var olan yöntemler arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Eğer $w_g(S_g)$ BK’sı evrensel uzaya eşit olursa bu durumda $GD_Q(S|w_g(S_g))$, $GD_Q(S)$ ’e dönüşmektedir. $GD_Q(S)$ yönteminde tüm niceleyiciler kullanılabilir. Eğer kullanılan niceleyiciler göreceli ve tutarlı olursa $GD_Q(S)$, Yager tarafından önerilen OWA operatörü temelli yönteme dönüşmektedir. Aynı şekilde eğer $w_g(S_g)$ BK’sı evrensel uzaya eşit olursa bu durumda $ZS_Q(S|w_g(S_g))$, $ZS_Q(S)$ formülüne dönüşmektedir. $ZS_Q(S)$ yönteminde tüm niceleyiciler kullanılabilir. Eğer kullanılan niceleyiciler göreceli ve tutarlı olursa $ZS_Q(S)$ Sugeno integralinin kullanıldığı yönteme dönüşmektedir.

Çizelge 3.2. Tip I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için önerilen yöntemlerin sağladığı özellikler

	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
$Z_Q(S)$	✓	×	✓	$O(M)$	×	✓
$Y_Q(S)$	✓	✓	✓	$O(M \log M)$	✓	×
$GD_Q(S)$	✓	✓	✓	$O(M \log M)$	✓	✓
$ZS_Q(S)$	✓	✓	✓	$O(M \log M)$	✓	✓

(✓:Özelliğin sağlandığı ispat edilmiştir ×: Özelliğin sağlanmadığı ispat edilmiştir)

Çizelge 3.3. Tip II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için önerilen yöntemlerin sağladığı özellikler

	3.7	3.8	3.9	3.10	3.11	3.12- $\exists$	3.12- $\forall$	3.13	3.14
$Z_Q(S w_g(S_g))$	✓	✓	$O(M)$	✓	✓	×	×	✓	×
$Y_Q(S w_g(S_g))$	✓	✓	$O(M \log M)$	×	×	×	✓	×	×
$GD_Q(S w_g(S_g))$	✓	✓	$O(M \log M)$	✓	✓	✓	?	✓	✓
$ZS_Q(S w_g(S_g))$	✓	✓	$O(M \log M)$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

(✓:Özellğin sağlandığı ispat edilmiştir ×: Özellğin sağlanmadığı ispat edilmiştir ? : Özellğin sağlanıp sağlanmadığı ispat edilememiştir.)

Çizelge 3.4. Yöntemler arasındaki ilişkiler

	Olasılıksal		Olabilirlikli	
	Yöntem	Kardinalite	Yöntem	Kardinalite
Tip II niceleyiciler	$GD_Q(S w_g(S_g))$	$ER(S w_g(S_g))$	$ZS_Q(S w_g(S_g))$	$ES(S w_g(S_g))$
	↓	↓	↓	↓
Tip I Göreceli ve mutlak niceleyiciler	$GD_Q(S)$	$ES(S)$	$ZS_Q(S)$	$Z(S)$
	↓		↓	
Tip I Göreceli ve tutarlı niceleyiciler	Choquet (Yager-OWA)		Sugeno	

Örnek 3.5.

Örnek 3.2 ile skalar kardinalitenin doğruluk derecesini hesaplamada tutarsız sonuçlar ürettiği gösterilmiştir. Aynı veri kullanılarak problem bulanık kardinalite temelli yöntemler ve OWA operatörü kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar $ZS_Q(S|w_g(S_g))=0,01$, $GD_Q(S|w_g(S_g))=0,01$ $Y_Q(S|w_g(S_g))=0,91$ olarak bulunmuştur. S ve $w_g(S_g)$ farklı kümeler olmalarına rağmen $Y_Q(S|w_g(S_g))=0,91$ gibi büyük bir değer çıkmıştır. Bulanık kardinalite temelli yöntemler kullanıldığında sonuç 0,01 gibi küçük bir değere eşit olmuştur.

Örnek 3.6.

$w_g(S_g)$ ve $S, Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel uzayında iki BK:

$$w_g(S_g) = \left\{ \frac{1}{y_1}, \frac{0,99}{y_2} \right\} \quad S = \left\{ \frac{1}{y_1}, \frac{0,01}{y_2} \right\}$$

ve $Q = \forall$ olsun. İki BK ve t-norm minimum alındığında bu kümelerin kesişimi $S \cap w_g(S_g)$ kümesi aşağıda verilmiştir.

$$S \cap w_g(S_g) = \left\{ \frac{1}{y_1}, \frac{0,01}{y_2} \right\}$$

Problem olasılık ve olabilirlik temelli bulanık kardinalite yöntemleriyle çözüldüğü takdirde $GD_{\forall}(S|w_g(S_g)) = 0,02$ ve $ZS_{\forall}(S|w_g(S_g)) = 1$ sonuçları elde edilir. Sonuçlardan görüldüğü gibi iki durum arasındaki fark oldukça yüksektir. Bu örnekte görüldüğü gibi $ZS_{\forall}(S|w_g(S_g)) = 1$ sonucu tutarlı bir sonuç değildir. Çünkü bu yöntemde maksimum ve minimum operatörlerinin kullanılmasıyla $w_g(S_g)$ ve S kümelerinde bulunan bazı elemanlar hakkındaki bilgiler göz ardı edilmektedir [59].

Bulanık Kardinalite Temelli Diğer Yöntemler

Bu alt bölümde bulanık kardinalite temelli diğer yöntemler açıklanmıştır.

Kısıtlama Seviye Temelli Yöntem

Tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan bulanık kardinalite temelli yöntemlerin çoğu α kesmelerine dayanmaktadır. BK'lar bu α kesmelerinin birleşimiyle ifade edilmektedir. Bir başka gösterim şekli olan kısıtlama

seviyesi (KS) Delgado ve ark. tarafından önerilmiştir [60, 61]. Bu gösterim şekli BK'ların α kesmeleriyle gösterilmesine benzerdir, fakat temelde bazı farklılıkları vardır. Bu farklılıklar her bir seviyede bağımsız olarak gerçekleştirilen kesin işlemlerin ve tanımların kesin olmayan duruma genişletilmesidir. KS ile ilgili temel tanımlar Tanım 3.3-Tanım 3.6'da, KS temelli doğruluk derecesi ise Tanım 3.7'de verilmiştir.

Tanım 3.3.

α kesmelerinin oluşturduğu sonlu küme $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ olsun ve $1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > \alpha_{m+1} = 0$, $m > 1$ şartları sağlansın.

Λ , α kesmelerinin oluşturduğu sonlu küme ve ρ fonksiyon olsun. KS, (Λ, ρ) ikilisiyle gösterilir.

$$\rho: \Lambda \rightarrow P(Y) \quad (3.69)$$

ρ , fonksiyonu Λ kümesinde tanımlı elemanı Y evrensel kümesindeki bir alt kümeye götürmektedir. KS, sonlu sayıda ikililerle $\{(\alpha_1, \rho(\alpha_1)), \dots, (\alpha_n, \rho(\alpha_n))\}$ gösterilebilir. S özelliğinin KS ile gösterimi $S = (\Lambda_s, \rho_s)$ şeklindedir [61-63].

Tanım 3.4.

KS, $S = (\Lambda_s, \rho_s)$ kümesinin kesin gösterimlerinin oluşturduğu küme Ω_s Eş. 3.70'de verilmiştir.

$$\Omega_s = \{\rho_s(\alpha) | \alpha \in \Lambda_s\} \quad (3.70)$$

BK'lar, KS gösterim şeklinin özel bir halidir. S BK'sının KS ile gösterimi Eş. 3.71' de verilmiştir.

$$\Lambda_S = \{\mu_S(y) \mid y \in destek(S)\} \cup \{1\} \quad (3.71)$$

$\rho_S(\alpha) = S_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda_S$ ve S_α , S BK'sının α kesmesiyle oluşan alt kümedir. KS'nin kesin gösterimlerinin alfa kesmelerinde olduğu gibi iç içe geçmiş olmaları zorunlu değildir. $\{(1, \{a, b\}), (0, 7, \{a, c\}), (0, 1, \{b\})\}$ kümesi bu duruma örnektir [61-63].

Tanım 3.5.

KS, (Λ, ρ) ikilisiyle gösterilir. İlgili olasılık dağılımı $\omega: \Lambda \rightarrow [0, 1]$ tanımlı olup $\omega(\alpha_i) = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ 'dir. $\omega(\alpha)$, α seviyesine atanan kanıtları göstermektedir. Olasılık ataması $m: \Omega \rightarrow [0, 1]$ KS'nin kesin gösterimleriyle Eş. 3.72'deki gibi ifade edilebilir.

$$m(J) = \sum_{\alpha_i \mid J = \rho(\alpha_i)} \alpha_i - \alpha_{i+1} \quad \forall J \in \Omega \quad (3.72)$$

m ile modellenen Ω kümesi rassal kümedir. Farklı KS'ler aynı rassal kümeyi oluşturabilir. $A = \{(1, \{a, b\}), (0, 5, \{c, d\})\}$ ve $B = \{(1, \{c, d\}), (0, 5, \{a, b\})\}$ olması durumunda rassal küme $m(\{a, b\}) = m(\{c, d\}) = 0,5$ şeklinde elde edilir. KS A 'dan elde edilen m_A ile gösterilen rassal küme A 'daki bilgileri özetlemektedir; çünkü KS A 'nın kesin gösterimleriyle ilgili kanıtı ifade etmektedir [61-63].

Tanım 3.6.

S ve $w_g(S_g)$ iki kesin olmayan özellik ve bu iki özelliğin KS ile gösterimleri $S = (\Lambda_S, \rho_S)$ ve $w_g(S_g) = (\Lambda_{w_g(S_g)}, \rho_{w_g(S_g)})$ olsun. $S \wedge w_g(S_g)$ ve $S \vee w_g(S_g)$ 'nin KS ile gösterimleri Eş. 3.73-Eş. 3.75'de verilmiştir.

$$\Lambda_{S \wedge w_g(S_g)} = \Lambda_{S \vee w_g(S_g)} = \Lambda_S \cup \Lambda_{w_g(S_g)} \quad (3.73)$$

$$\rho_{S \wedge w_g(S_g)}(\alpha) = \rho_S(\alpha) \cap \rho_{w_g(S_g)}(\alpha) \quad (3.74)$$

$$\rho_{S \vee w_g(S_g)}(\alpha) = \rho_S(\alpha) \cup \rho_{w_g(S_g)}(\alpha) \quad (3.75)$$

S kesin olmayan özellik (Λ_S, ρ_S) ile gösterilsin. $\neg S$ kesin olmayan özellik $(\neg \Lambda_S, \neg \rho_S)$ ile gösterilir.

$$\neg \Lambda_S = \Lambda_S \quad (3.76)$$

$$\neg \rho_S(\alpha) = \overline{\rho_S(\alpha)} \quad (3.77)$$

Eş. 3.77'de belirtilen ifade, kesin kümelerde tanımlanan tümleyen işlemidir [61-63].

Örnek 3.7.

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ evrensel küme, $S = \{1/y_1, 0, 8/y_2, 0, 5/y_3, 0, 4/y_5\}$ ve $w_g(S_g) = \{0, 9/y_1, 0, 6/y_3, 0, 5/y_4\}$ iki BK olarak tanımlansın. Bu durumda $\neg \Lambda_S = \Lambda_S = \{1; 0, 8; 0, 5; 0, 4\}$ ve $\neg \Lambda_{w_g(S_g)} = \Lambda_{w_g(S_g)} = \{1; 0, 9; 0, 6; 0, 5\}$ olur. $\alpha = 1$ için $\rho_S(1) = \{y_1\}$ iken, $\overline{\rho_S(1)} = \{y_2, y_3, y_4, y_5\}$ ve $\rho_{w_g(S_g)}(1) = \emptyset$ iken, $\overline{\rho_{w_g(S_g)}(1)} = Y$ olarak bulunur. Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6'da detaylı örnekler bulunmaktadır [61-63].

Çizelge 3.5. KS’de tümleyen ve kesişim işlemi

α	$\rho_S(\alpha)$	$\neg\rho_S(\alpha)$	$\rho_{w_g(S_g)}(\alpha)$	$\rho_{\neg w_g(S_g)}(\alpha)$	$\rho_{S \wedge \neg w_g(S_g)}(\alpha)$	$\rho_{\neg S \wedge w_g(S_g)}(\alpha)$
1	$\{y_1\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	$\emptyset$	Y	$\{y_1\}$	$\emptyset$
0,9	$\{y_1\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
0,8	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_3, y_4, y_5\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	$\{y_2\}$	$\emptyset$
0,6	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_4, y_5\}$	$\{y_1, y_3\}$	$\{y_2, y_4, y_5\}$	$\{y_2\}$	$\emptyset$
0,5	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_4, y_5\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	$\{y_2, y_5\}$	$\{y_2\}$	$\{y_4\}$
0,4	$\{y_1, y_2, y_3, y_5\}$	$\{y_4\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	$\{y_2, y_5\}$	$\{y_2, y_5\}$	$\{y_4\}$

Çizelge 3.6. KS’de tümleyen ve kesişim ve birleşim işlemi

α	$\rho_{S \wedge w_g(S_g)}(\alpha)$	$\rho_{S \vee w_g(S_g)}(\alpha)$	$\rho_{\neg(S \wedge w_g(S_g))}(\alpha)$	$\rho_{\neg(S \vee w_g(S_g))}(\alpha)$	$\rho_{\neg S \vee \neg w_g(S_g)}(\alpha)$
1	$\emptyset$	$\{y_1\}$	Y	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	Y
0,9	$\{y_1\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$
0,8	$\{y_1\}$	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	$\{y_3, y_4, y_5\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$
0,6	$\{y_1, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_2, y_4, y_5\}$	$\{y_4, y_5\}$	$\{y_2, y_4, y_5\}$
0,5	$\{y_1, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$	$\{y_2, y_4, y_5\}$	$\{y_5\}$	$\{y_2, y_4, y_5\}$
0,4	$\{y_1, y_3\}$	Y	$\{y_2, y_4, y_5\}$	$\emptyset$	$\{y_2, y_4, y_5\}$

Verilen temel tanımlar sonrasında tip-II niceleyici cümlelerin KS ile değerlendirilmesi için önerilen doğruluk derecesi Tanım 3.7’de verilmiştir.

Tanım 3.7.

KS kullanılarak tip-II niceleyici cümleler değerlendirilebilmektedir. KS kullanılarak geliştirilen yöntem niceleyici ve göreceli kardinalite arasındaki uygunluğu hesaplamayı temel almaktadır. İlk olarak her bir seviyedeki göreceli kardinalite $\left(\left|S \cap w_g(S_g)\right|/\left|w_g(S_g)\right|\right)$ hesaplanarak bir KS sayısı elde edilir. Daha sonra niceleyici (Q) ile uygunluğu $Q\left(\left|S \cap w_g(S_g)\right|/\left|w_g(S_g)\right|\right)$ hesaplanır. Son olarak farklı α seviyelerindeki olasılık değerleri temel alınarak uygunluk değerleri birleştirilir ve tek bir değer elde edilir. “ $Q_{w_g(S_g)}(Y(nesneler), \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\})$ dir.” şeklinde

tanımlanan tip-II niceleyici cümlelerin KS ile değerlendirilmesinde Eş. 3.78 kullanılır.

$$ST(E) = \sum_{B \in \Omega_E} m_E(B) \times B \quad (3.78)$$

E , KS gösterim şekliyle elde edilen değerlendirmeyi göstermektedir. $\Lambda_E = \Lambda_S \cup \Lambda_{w_g(S_g)}$ ve $\alpha \in \Lambda_E$ için Eş. 3.79 sağlanır.

$$\rho_E(\alpha) = Q \left(\frac{|\rho_{S \wedge w_g(S_g)}(\alpha)|}{|\rho_{w_g(S_g)}(\alpha)|} \right) = Q \left(\frac{|\rho_{w_g(S_g)}(\alpha) \cap \rho_{w_g(S_g)}(\alpha)|}{|\rho_{w_g(S_g)}(\alpha)|} \right) \quad (3.79)$$

Eş. 3.78, Eş. 3.80 ile de ifade edilebilir.

$$E_Q(S|w_g(S_g)) = \sum_{\alpha_i \in \Lambda_S \cup \Lambda_{w_g(S_g)}} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \times Q \left(\frac{|\rho_{S \wedge w_g(S_g)}(\alpha_i)|}{|\rho_{w_g(S_g)}(\alpha_i)|} \right) \quad (3.80)$$

S ve $w_g(S_g)$ BK ise Eş. 3.80'de önerilen yöntem Eş. 3.65'de önerilen GD_Q yöntem ile aynıdır [38]. Fakat KS temelli yöntem niceleyicilerin dahili ve harici tümleyeninin alındığı durumlarda tutarlı sonuç üretmektedir [61-63].

Dereceli Sayı Temelli Yöntem

Tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan çoğu yöntem kardinalite ve bulanık kardinalite temellidir. Bulanık kardinalite, BK'nın eleman sayısını BK ile göstermektedir. Rocacher, bulanık kardinaliteye karşılık gelen dereceli doğal tamsayıları ($\mathbb{N}_f$ 'nin elemanları) tanımlamıştır [64]. Tip-I ve tip-II niceleyici cümleleri değerlendirmek için $\mathbb{N}_f$ 'yi $\mathbb{Z}_f$ ve $\mathbb{Q}_f$ 'ye genişleterek dereceli sayılar

üstünde çıkarma, çarpma ve bölme operatörleri tanımlanmıştır [65, 66]. Dereceli sayılarla ilgili temel tanımlar Tanım 3.8-Tanım 3.11’de verilmiştir.

Tanım 3.8.

S BK’sının, $\mathbb{N}$ ’de tanımlı $FGCount(S)$ bulanık kardinalitesi Eş. 3.81’de verilmiştir.

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \mu_{|S|}(i) = \sup \{ \alpha \mid |S_\alpha| \geq i \} \quad (3.81)$$

S_α , S BK’sının α kesmesiyle oluşan kesin kümeyi göstermektedir. $FGCount(S)$, S BK’sının en az i tane elemana sahip olmasının derecesini göstermektedir. Rocacher ve Bosc, Lietard ve Rocacher bulanık kardinaliteyi olabilirlik dağılımına bağlı bir BS olarak yorumlamamışlardır [65, 66]. $FGCount(S)$ bulanık kardinalitesini ifade etmek için BS terimi yerine dereceli sayılar terimini kullanmışlardır. Bulanık kardinalite ifadesini $\mathbb{N}_f$ olarak adlandırmışlardır (dereceli doğal tamsayılar kümesi).

Dereceli doğal sayı x ’in α kesmesi x_α , üyelik derecesi α ’ya eşit yada büyük elemanların sayısını belirtmektedir. Diğer bir deyişle, α kesmesiyle elde edilen kümedeki en büyük tamsayıdır.

$$x_\alpha = \max \{ o \in \mathbb{N} \mid \mu_x(o) \geq \alpha \} \quad (3.82)$$

Eğer x , S BK’sının $FGCount(S)$ bulanık kardinalitesini ifade ediyorsa, Eş. 3.83’de tanımlanan eşitlik elde edilir.

$$x_\alpha = |S_\alpha| \quad (3.83)$$

Bu yöntem, Dubois ve Prade tarafından önerilen $L \setminus \{0\}$ ’den S kümesine bir atama fonksiyonu a_e olarak tanımlanan S kümesindeki bulanık elemana (e) benzemektedir.

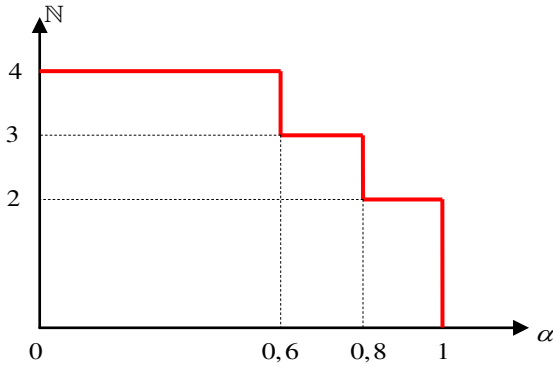
Bu bakış açısıyla $\mathbb{N}_f$ 'ye ait olan dereceli doğal sayı x , $]0,1]$ 'den $\mathbb{N}$ 'ye tanımlı bir atama fonksiyonu a_x olarak gösterilebilir [67].

$$\forall \alpha \in]0,1] \quad a_x(\alpha) = x_\alpha \quad (3.84)$$

Eğer x , S BK'sının bulanık kardinalitesini gösteriyor ise, $a_x(\alpha)$ S BK'sının α kesmesinin kardinalitesidir .

Örnek 3.8.

$S = \{1/y_1, 1/y_2, 0,8/y_3, 0,6/y_4\}$ BK'sının $FGCount(S)$ bulanık kardinalitesi $|S| = \{1/0,1/2, 0,8/3, 0,6/4\}$, $a_{|S|}$ atama fonksiyonu tarafından tanımlanan dereceli doğal sayı olarak Şekil 3.7'de gösterilmiştir [65, 66].



Şekil 3.7. Dereceli doğal sayı

İki doğal tamsayı üstünde herhangi bir işlem ($\#$), x ve y dereceli doğal tamsayılarına Eş. 3.85 verilen tanımla genişletilebilir.

$$\forall \alpha \in]0,1], \quad a_{x\#y}(\alpha) = a_x(\alpha) \# a_y(\alpha) = x_\alpha \# y_\alpha \quad (3.85)$$

Dereceli tamsayıların özelliği nedeniyle $\mathbb{N}_f$ yarı halkadır. Bundan dolayı toplama ve çarpma işlemi tanımlanabilir. Fakat çıkarma işlemi tanımlanamaz. Çıkarma işlemi Tanım 3.9'da tanımlanmıştır.

Tanım 3.9.

$\mathbb{N}_f$ üzerinde iki dereceli doğal tamsayının çıkarma işlemi tanımlanamaz. Bu nedenle $\mathbb{N}_f$, grup olması için $\mathbb{Z}_f$ 'ye genişletilir. Dereceli göreceli tamsayılar kümesi $(\mathbb{Z}_f)$, $(\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f)$ üzerinde tanımlı tüm denk sınıfların bölüm kümesi olan $(\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f)/\mathfrak{R}$ ile gösterilir. Denklik bağıntısı $(\mathfrak{R})$ Eş. 3.86'da tanımlanmıştır.

$$\forall (x^+ - x^-), (y^+ - y^-) \in \mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f, (x^+, x^-) \mathfrak{R} (y^+, y^-) \Leftrightarrow x^+ + y^- = x^- + y^+ \quad (3.86)$$

Bulanık göreceli tamsayının $(x^+ - x^-)$ alfa kesmesi göreceli tamsayı $(x_\alpha^+ - x_\alpha^-)$ olarak tanımlanır. Farklı alfa kesmeleriyle elde edilen bulanık göreceli tamsayı x , x^c kanonik gösterimi ile Eş. 3.87'de tanımlanmıştır.

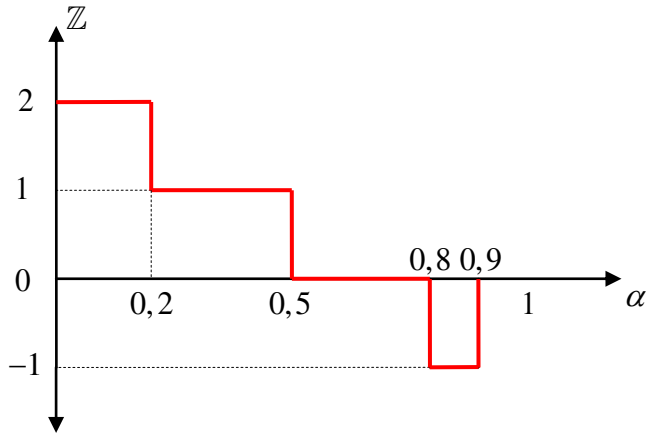
$$x^c = \sum \frac{\alpha_i}{(x_{\alpha_i}^+ - x_{\alpha_i}^-)} \quad (3.87)$$

Bulanık göreceli tamsayının atama fonksiyonu $a_x]0,1]$ 'den $\mathbb{Z}$ 'ye tanımlı bir fonksiyondur [65, 66].

$$\forall \alpha \in]0,1], a_x(\alpha) = x_\alpha^+ - x_\alpha^- = x_\alpha \quad (3.88)$$

Örnek 3.9.

$x = \{1/0; 1/1; 0,8/2; 0,5/3; 0,2/4\}$ ve $y = \{1/0; 1/1; 0,9/2\}$ olsun. Çıkarma işlemi sonucu elde edilen göreceli tamsayının kanonik formu $(x, y)^c = \{1/0; 0,9/-1; 0,8/0; 0,5/1; 0,2/2\}$ 'dir. $x_{0,9} = 1$ ve $y_{0,9} = 2$ 'dir. (x, y) 'nin α kesmesi 0,9 düzeyinde ise $x_{0,9} - y_{0,9} = -1$ 'dir. (x, y) 'nin atama fonksiyonu Şekil 3.8'de gösterilmiştir [65, 66].



Şekil 3.8. Dereceli sayılarda çıkarma işlemi

Dereceli sayılarda bölme işlemi $\mathbb{Z}_f$ üzerinde tanımlanamaz. Dereceli sayılar üzerinde bölme işlemi tanım 3.10'da tanımlanmıştır.

Tanım 3.10.

Dereceli oransal sayıları tanımlamak için ilk olarak dereceli tam sayılar kümesi $(\mathbb{Z}_f^* \forall \alpha]0,1], x_\alpha \neq 0$ ve denklik bağıntısı $\mathfrak{R}'$ Eş. 3.89'da tanımlanmıştır.

$$\forall (x^n, x^d), (y^n, y^d) \in \mathbb{Z}_f \times \mathbb{Z}_f^* (x^n, x^d) \mathfrak{R}' (y^n, y^d) \Leftrightarrow x^n \times y^d = x^d \times y^n \quad (3.89)$$

Bulanık oransal sayıların oluşturduğu küme Eş. 3.90'da tanımlanmıştır.

$$\mathbb{Q}_f = (\mathbb{Z}_f \times \mathbb{Z}_f^*) / \mathfrak{R}' \quad (3.90)$$

(x^n, x^d) ile gösterilen bulanık oransal sayı bulanık doğal sayı olarak $\left[(x^{n+}, x^{n-}), (x^{d+}, x^{d-}) \right]$ şeklinde ifade edilebilir. Bulanık oransal sayı x 'in alfa kesmesi x_α Eş. 3.91'deki gibi ifade edilebilir.

$$\forall \alpha [0,1], \quad x_\alpha = [x_\alpha^n, x_\alpha^d] = \left[(x_\alpha^{n+}, x_\alpha^{n-}), (x_\alpha^{d+}, x_\alpha^{d-}) \right] \quad (3.91)$$

Farklı alfa kesmeleriyle elde edilen bulanık oransal sayı x 'in kanonik gösterimi Eş. 3.92'de verilmiştir [65, 66].

$$x^c = \sum \frac{\alpha_i}{(x_{\alpha_i}^{n+} - x_{\alpha_i}^{n-}) \div (x_{\alpha_i}^{d+} - x_{\alpha_i}^{d-})} \quad (3.92)$$

Örnek 3.10.

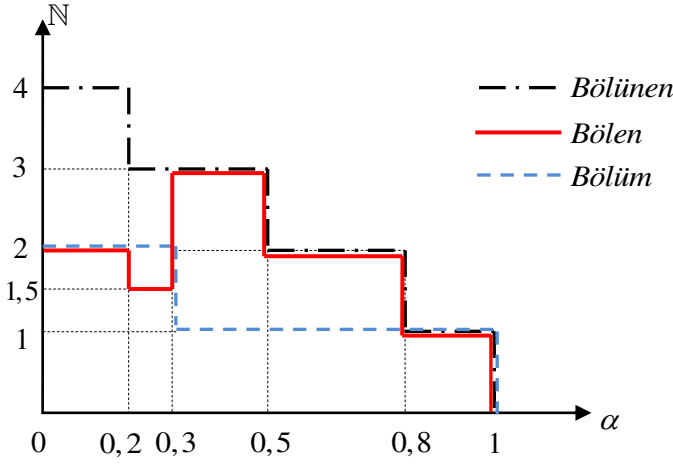
$(x^{n+}, x^{n-}) = \{1/0; 1/1; 0,8/2; 0,5/3; 0,2/4\}$ ve $(x^{d+}, x^{d-}) = \{1/0; 1/1; 0,3/2\}$ iki pozitif göreceli tamsayı olsun. $\left[(x^{n+}, x^{n-}), (x^{d+}, x^{d-}) \right]$, $\mathbb{Q}_f$ 'ye ait x bulanık oransal sayıyı gösterebilir. Bulanık oransal sayı ayrıca aşağıda verilen şekilde gösterilebilir.

$$\left[(x^{n+}, x^{n-}), (x^{d+}, x^{d-}) \right] = \left[\left(\{1/0; 1/1; 0,8/2; 0,5/3; 0,2/4; 0,2/5; 0,2/6\} \right), \left(\{1/0; 1/1; 0,3/2; 0,2/3\} \right) \right]$$

$\mathfrak{R}'$ bağıntısıyla x 'in y 'de denk olduğu aşağıda gösterilmiştir.

$$x^{n+} \times y^{d+} = x^{d+} \times y^{n+} = \left\{ 1/0; 0,8/2; 0,5/3; 0,3/4; 0,3/5; 0,3/6; 0,2/7; 0,2/8; \right. \\ \left. 0,2/9; 0,2/8; 0,2/9; 0,2/10; 0,2/11; 0,2/12 \right\}$$

Tüm α kesmeleri için $\{1;0,8;0,5;0,3;0,2\}$ $x_{\alpha}^{n+} \times y_{\alpha}^{d+} = x_{\alpha}^{d+} \times y_{\alpha}^{n+}$ eşitliği sağlanır. Bundan dolayı $x_{\alpha}^{n+} \div x_{\alpha}^{d+} = y_{\alpha}^{n+} \div y_{\alpha}^{d+}$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak oranlar $1 \div 1, 2 \div 1, 3 \div 1, 3 \div 2, 4 \div 2$ olarak bulunur. Şekil 3.9’da bölme işlemi gösterilmiştir. x bulanık oransal sayısı ve y bulanık oransal sayısı denk olup aynı kanonik gösterime sahiptirler [65, 66].



Şekil 3.9. Dereceli sayılarda bölme işlemi

$$x^c = y^c = \{1/1;0,8/2;0,5/3;0,3/1,5;0,2/2\} \quad (3.93)$$

Verilen temel tanımlar sonrasında tip-II niceleyici cümlelerin KS ile değerlendirilmesi için önerilen doğruluk derecesi Tanım 3.11’de verilmiştir.

Tanım 3.11.

“ $Q_{w_g(S_g)} Y(nesneler), \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ dir.” şeklinde tanımlanan tip-II niceleyici cümlelerin dereceli sayılar ile değerlendirilmesi için Eş. 3.94’de tanımlanan yöntem kullanılır [65, 66].

$$T_{\delta} = \int_0^1 \left(\mu_Q(\alpha) \times p \times \alpha^{p-1} d\alpha \right)^{1/p} \quad (3.94)$$

Eş. 3.94’de verilen eşitlikte $p=1$ olduğu takdirde T_δ değeri μ_Q fonksiyonu tarafından sınırlanan alan olur. Bu durumda T_δ Eş. 3.95 ile hesaplanır.

$$T_\delta = (\alpha_1 - \alpha_2) \times \mu_Q(\alpha_1) + (\alpha_2 - \alpha_3) \times \mu_Q(\alpha_2) + \dots + (\alpha_m - \alpha_{m+1}) \times \mu_Q(\alpha_m) \quad (3.95)$$

Eş. 3.95’de tanımlanan $\mu_Q(\alpha_i) = \mu_Q\left(\left|S \cap w_g(S_g)\right|_{\alpha_i} / \left|w_g(S_g)\right|_{\alpha_i}\right)$ ’ye eşittir ve $\alpha_1 > \dots > \alpha_2 > \alpha_m$ şeklinde sıralanmıştır. Tüm alfa değerleri Eş. 3.64’de tanımlanan kümenin elemanıdır. Eğer $w_g(S_g)$ BK’sı normal BK olursa bu durumda Eş. 3.95, Eş. 3.96’ya eşittir.

$$T_\delta = \sum_{\alpha_i \in \Gamma(S|w_g(S_g))} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \times \mu_Q\left(\frac{\left|S \cap w_g(S_g)\right|_{\alpha_i}}{\left|w_g(S_g)\right|_{\alpha_i}}\right) \quad (3.96)$$

Sonuç olarak Eş. 3.96’da önerilen dereceli sayılı yöntem Eş. 3.65’de önerilen GD yöntemiyle aynıdır. Tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için ayrıca Eş. 3.97’de tanımlanan yöntem önerilmiştir.

$$T_\phi = \max_{\beta \in [0,1]} \min(\beta, H(\beta)) \quad (3.97)$$

$H(\beta)$ her bir alfa kesmesi için $\mu_Q(\alpha) \geq \beta$ şartını sağlamaktadır ve tanımı Eş. 3.98’de verilmiştir.

$$H(\beta) = \sum_{\forall \alpha \in]\alpha_i, \alpha_j], \mu_Q(\alpha) \geq \beta} (\alpha_j - \alpha_i) \quad (3.98)$$

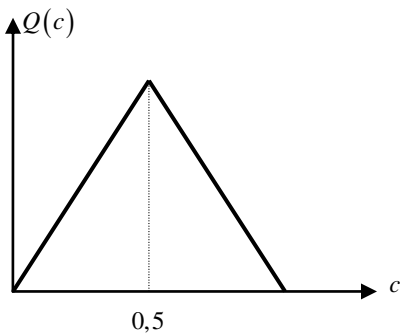
β , $[0,1]$ arasında değişen herhangi bir değer olabilir. Bu durumda T_ϕ 'nin hesaplama bakımından kısıtlanması gerekir. Eş. 3.97 verilen eşitlikte $\beta = \mu_Q(\alpha)$ alındığı takdirde Eş. 3.99 elde edilmektedir.

$$T_\phi = \max_{\exists \alpha, \beta = \mu_Q(\alpha)} \min(\beta, H(\beta)) \quad (3.99)$$

Örnek 3.11.

$w_g(S_g) = \{1/y_1; 0,9/y_2; 0,7/y_3; 0,3/y_4\}$ ve $S = \{0,8/y_1; 0,3/y_2; 1/y_3; 1/y_4\}$ iki BK olsun. Yaklaşık yarısı niceleyicisi Şekil 3.10'da verilmiştir.

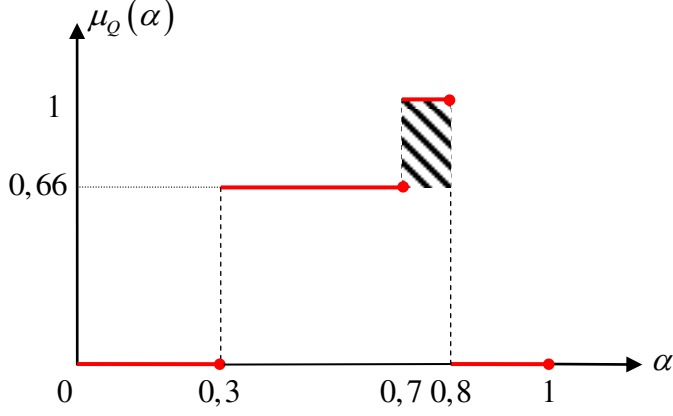
Minimum operatörü t-norm olarak kullanıldığı takdirde bu iki kümenin kesişimi $S \cap w_g(S_g) = \{0,8/y_1; 0,3/y_2; 0,7/y_3; 0,3/y_4\}$ olarak bulunur. α kesmelerinin oluşturduğu küme Eş. 3.64 kullanılarak $\Gamma(S|w_g(S_g)) = \{1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,3\}$ olarak elde edilir. Eş. 3.96 kullanılarak elde edilen doğruluk derecesi Şekil 3.11'de gösterilmiştir.



Şekil 3.10. Yaklaşık yarısı niceleyicisi

Eş. 3.96'da önerilen formül aslında Şekil 3.11'de verilen taralı alanı hesaplamaktadır. Eş. 3.96 kullanılarak doğruluk derecesi Eş. 3.100'de hesaplanmıştır.

$$T_s = (0,3-0) \times 0 + (0,7-0,3) \times (2 \div 3) + (0,8-0,7) \times 1 + (1-0,8) \times 0 = 0,364 \quad (3.100)$$



Şekil 3.11. Dereceli sayılar yöntemiyle elde edilen doğruluk derecesi

Eş. 3.99 kullanılarak doğruluk derecesini hesaplanabilmesi için β ve $H(\beta)$ değerlerinin hesaplanması gerekir. $\beta = \mu_Q(\alpha)$ olduğu için $\beta = 1$ ve $\beta = 0,66$ olarak bulunur. Eş. 3.98 kullanılarak $H(1) = (0,8 - 0,7) = 0,1$ ve $H(0,66) = (0,8 - 0,7) + (0,7 - 0,3) = 0,5$ olarak bulunur. Doğruluk derecesi Eş. 3.101’de hesaplanmıştır [65, 66].

$$T_\phi = \max\{\min(1; 0,1); (0,66; 0,5)\} = 0,5 \quad (3.101)$$

Yarı Bulanık Niceleyici Temelli Yöntem

Tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin oluşturulmasında niceleyici olarak evrensel niceleyiciler “tümü” ve “var” niceleyicilerinin yanında mutlak ve göreceli niceleyici kullanılmaktadır. Bu tip niceleyicilerle özelliklerin BK’larla ifade edildiği özetler değerlendirilebilmektedir. Bu yapıdaki özetlerin içermiş olduğu bilgi sınırlıdır. Eğer özellikler BK’larla modelleniyor ise daha fazla bilgi içeren özet yapılarının mutlak ve göreceli bulanık niceleyicilerle modellenmesi mümkün değildir. “Yaklaşık beşi hariç tüm öğrenciler çalışandır” gibi bir ifade mutlak ve göreceli bulanık niceleyicilerle modellenemez. Bu nedenle Diaz ve ark. yarı bulanık niceleyicilerin bu

tip cümleleri modellemede kullanılabileceğini göstermişler ve farklı yapıdaki yarı bulanık niceleyiciler tanımlamışlardır [68].

Yarı bulanık niceleyiciler, klasik dilsel teoride tanımlanan genelleştirilmiş niceleyiciler temel alınarak tanımlanmıştır [69-73]. Yarı bulanık niceleyicilerin bulanık niceleyicilerden en önemli farklı, bulanık niceleyiciler BK'ları sıfır bir aralığında bir sayıya atarken, yarı bulanık niceleyiciler kesin kümeleri sıfır bir aralığında bir sayıya atamaktadır. BK'lar α kesmeleri tanımlanarak kesin kümelere dönüştürülebilmektedir. α kesmeleriyle elde edilen kesin kümelerin birleşimi BK'yı oluşturmaktadır. Böylelikle özelliklerin BK'larla ifade edildiği durumlarda niceleyici cümleler yarı bulanık niceleyicilerle modellenebilmektedir. BK'larla tanımlanan özelliklerle yarı bulanık niceleyicilerin kullanılabilmesi için literatürde çeşitli bulanıklaştırma mekanizmaları önerilmiştir [57, 68, 74-79]. Bu alt bölümde farklı yapıdaki yarı bulanık niceleyicilerin ve yarı bulanık niceleyiciler için bulanıklaştırıcı mekanizmalarının tanımları verilmiştir.

Tanım 3.12.

Q , $Y \neq \emptyset$ evrensel kümesinde tanımlı niceleyici ve $S_1, S_2, \dots, S_K \in \wp(Y)$ özelliklerin kesin kümesi olsun. Bu durumda Q yarı bulanık niceleyicisi her bir kesin kümeyi sıfır bir aralığında bir değere atar.

$$Q: \wp(Y)^k \rightarrow [0,1]$$

$$Q(S_1, S_2, \dots, S_K) \in [0,1] \quad (3.102)$$

Farklı tipteki yarı bulanık niceleyici tanımlanmıştır. Bu niceleyicilerin gösterilmesi için Eş. 3.103'de tanımlanan notasyon kullanılmıştır [68].

$$Q_{Y,a,tip}^{BS} \quad \text{yada} \quad Q_{Y,a,tip}^{BS,v} \quad (3.103)$$

Eş. 3.103’de tanımlanan gösterim şeklinde BS, $\mathbb{Z}$ ’de tanımlı BS, eğer oransallık söz konusu ise $v \in [0,1]$, Y evrensel kümeyi, a dikkate alınan özellik sayısını ve tip ise niceleyicinin kardinalite temelli (*kard*) yada oransallık (*oransal*) temelli olduğu hakkında bilgi vermektedir. Bu tanımlamaya bağlı olarak tek bir özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyiciler Çizelge 3.7’de verilmiştir.

“Yaklaşık beş kişi öğrencidir” ifadesi tip-I niceleyici cümlesinde mutlak bulanık niceleyici kullanılarak modellenenabilir. Fakat “Yaklaşık beş kişi hariç tüm kişiler öğrencidir” ifadesi mutlak bulanık niceleyicilerle modellenemez. Eğer özellik sayısı iki tane olursa Çizelge 3.8’de tanımlanan yarı bulanık niceleyiciler kullanılır.

Çizelge 3.8’de verilen yarı bulanık niceleyicilerle farklı tipte özetler elde edilebilir. “Öğrencilerin yaklaşık %10’u hariç tüm öğrenciler çalışkandır.” ifadesi buna örnektir. Bu örnekte S_1 kümesi öğrencileri, S_2 kümesi çalışkan kişileri göstermektedir. Ayrıca “Kadınlardan yaklaşık olarak beş tane fazla erkek vardır” ifadesi de bulanık niceleyiciler kullanılarak modellenemez.

Çizelge 3.9’da üç özelliğin kullanıldığı yarı bulanık niceleyicilerin tanımları verilmiştir. “Öğretmenlere göre yaklaşık on yada daha fazla öğrenci partideydi” niceleyici cümlesinde S_1 kümesi partiye gidenleri, S_2 kümesi öğrencileri, S_3 kümesi öğretmenleri göstermektedir. Çizelge 3.10’da dört özelliğin kullanıldığı yarı bulanık niceleyicilerin tanımları verilmiştir.

Çizelge 3.7-Çizelge 3.10’de verilen özet yapılarının değerlendirilmesi için kullanılan temel bulanıklaştırma mekanizmaları Tanım 3.13-Tanım 3.14’te verilmiştir.

Çizelge 3.7. Tek özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyici

Yarı bulanık kardinalite	Örnek
$Q_{Y,1,kard}^{BS}(S) = BS(S)$	Yaklaşık beş kişi öğrencidir.
$Q_{Y,1,oran}^{BS}(S) = BS\left(\frac{ S }{ Y }\right)$	Kişilerin yaklaşık %70'i öğrencidir.
$Q_{Y,1,hepsi_hariç_kard}^{BS}(S) = BS(Y - S)$	Yaklaşık beş kişi hariç tüm kişiler öğrencidir.
$Q_{Y,1,hepsi_hariç_kard}^{BS}(S) = BS\left(\frac{ Y - S }{ Y }\right)$	Yaklaşık %30 hariç tüm kişiler öğrencidir.

Çizelge 3.8. İki özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyici

Yarı bulanık kardinalite	Örnek
$Q_{Y,2,kard}^{BS}(S_1, S_2) = BS(S_1 \cap S_2)$	Yaklaşık beş öğrenci çalışkandır.
$Q_{Y,2,ko_kard}^{BS}(S_1, S_2) = BS(S_1 - S_2)$	Yaklaşık beş öğrenci hariç tüm öğrenciler çalışkandır.
$Q_{Y,2,oransal}^{BS,v}(S_1, S_2) = \begin{cases} BS\left(\frac{ S_1 \cap S_2 }{ S_1 }\right), & S_1 \neq \emptyset \\ 1, & S_1 = \emptyset \end{cases}$	Öğrencilerin yaklaşık %10'u çalışkandır.
$Q_{Y,2,ko_oransal}^{BS,v}(S_1, S_2) = \begin{cases} BS\left(\frac{ S_1 - S_2 }{ S_1 }\right), & S_1 \neq \emptyset \\ 1, & S_1 = \emptyset \end{cases}$	Öğrencilerin yaklaşık %10'u hariç tüm öğrenciler çalışkandır.
$Q_{Y,2,kard_karş}^{BS}(S_1, S_2) = BS(S_1 - S_2)$	Kadınlardan yaklaşık olarak beş tane fazla erkek vardır.
$Q_{Y,2,oransal_karş}^{BS,v}(S_1, S_2) = \begin{cases} BS(S_1 / S_2), & S_2 \neq \emptyset \\ BS(\infty), & S_1 \neq \emptyset \wedge S_2 = \emptyset \\ BS(1), & S_1 = \emptyset \wedge S_2 \neq \emptyset \end{cases}$	Kadınlara kıyasla iki kat daha fazla erkek vardır.

Çizelge 3.9. Üç özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyici

Yarı bulanık kardinalite	Örnek
$Q_{Y,3,kard_karş}^{BS}(S_1, S_2, S_3) = BS(S_1 \cap S_3 - S_2 \cap S_3)$	Öğretmenlere göre yaklaşık on yada daha fazla öğrenci partideydi.
$Q_{Y,3,kard_karş}^{BS}(S_1, S_2, S_3) = BS(S_1 \cap S_2 - S_1 - S_3)$	Partidekine göre gölde on yada daha fazla öğrenci vardı.
$Q_{Y,3,oransal_karş}^{BS}(S_1, S_2, S_3)$ $= \begin{cases} BS\left(\frac{ S_1 \cap S_3 }{ S_2 \cap S_3 }\right), & S_1 \cap S_3 \neq \emptyset \wedge S_2 \cap S_3 \neq \emptyset \\ BS(\infty), & S_1 \cap S_3 \neq \emptyset \wedge S_2 \cap S_3 = \emptyset \\ BS(1), & S_1 \cap S_3 = \emptyset \wedge S_2 \cap S_3 = \emptyset \end{cases}$	Öğretmenlere göre yaklaşık iki kat yada daha fazla öğrenci partideydi.
$Q_{Y,3,oransal_karş}^{BS}(S_1, S_2, S_3)$ $= \begin{cases} BS\left(\frac{ S_1 \cap S_2 }{ S_1 \cap S_3 }\right), & S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \wedge S_1 \cap S_3 \neq \emptyset \\ BS(\infty), & S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \wedge S_1 \cap S_3 = \emptyset \\ BS(1), & S_1 \cap S_2 = \emptyset \wedge S_1 \cap S_3 = \emptyset \end{cases}$	Partidekine göre en az iki kat daha fazla öğrenci göldeydi.
$Q_{Y,3,oransal_karş}^{BS,v}(S_1, S_2, S_3)$ $= \begin{cases} BS\left(\frac{ S_1 \cap S_3 }{ S_1 } \Big/ \frac{ S_2 \cap S_3 }{ S_2 }\right), & \begin{matrix} S_1 \cap S_3 / S_1 \neq \emptyset \\ S_2 \cap S_3 / S_2 \neq \emptyset \end{matrix} \\ BS(\infty), & S_2 \cap S_3 / S_2 = \emptyset \\ v \in [0,1], & \end{cases}$	Bisiklet süren erkeklere göre bisiklet süren kadınlar oransal olarak iki kat ya da iki kattan daha fazladır.
$Q_{Y,3,oransal_karş}^{BS}(S_1, S_2, S_3)$ $= \begin{cases} BS\left(\frac{\frac{ S_1 \cap S_2 }{ S_1 }}{\frac{ S_1 \cap S_3 }{ S_1 }}\right) = BS\left(\frac{ S_1 \cap S_2 }{ S_1 \cap S_3 }\right) \end{cases}$	Yürüyüş yapan bayanlara göre bisiklet süren kadınlar oransal olarak iki kat ya da iki kattan daha fazladır.

Çizelge 3.10. Dört özelliğin ele alındığı yarı bulanık niceleyici

Yarı bulanık kardinalite	Örnek
$Q_{Y,4,kard_karş}^{BS}(S_1, S_2, S_3, S_4) = BS(S_1 \cap S_2 - S_3 \cap S_4)$	Partideki öğretmenlerden en az on tane daha fazla öğrenci göldeydi.
$Q_{Y,4,oransal_karş}^{BS}(S_1, S_2, S_3, S_4)$ $= \begin{cases} BS\left(\frac{ S_1 \cap S_2 }{ S_3 \cap S_4 }\right), & S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \wedge S_3 \cap S_4 \neq \emptyset \\ BS(\infty), & S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \wedge S_3 \cap S_4 = \emptyset \\ BS(1), & S_1 \cap S_2 = \emptyset \wedge S_3 \cap S_4 = \emptyset \end{cases}$	Partideki öğretmenlerden yaklaşık iki kat yada daha fazla öğrenci göldeydi.
$Q_{Y,3,oransal_karş}^{BS,v}(S_1, S_2, S_3, S_4)$ $= \begin{cases} BS\left(\frac{ S_1 \cap S_2 }{ S_1 } \Big/ \frac{ S_3 \cap S_4 }{ S_3 }\right), & S_1 \cap S_2 / S_1 \neq \emptyset \\ & S_3 \cap S_4 / S_3 \neq \emptyset \\ BS(\infty), & S_3 \cap S_4 / S_3 = \emptyset \\ v \in [0,1], & \end{cases}$	Yürüyüş yapan erkeklerle göre bisiklet süren kadınlar oransal olarak iki kat ya da iki kattan daha fazladır.

Tanım 3.13.

$Y \neq \emptyset$ evrensel kümesinde tanımlı BK'lar $S_1, \dots, S_K \in \tilde{\wp}(Y)$ ve $\gamma \in [0,1]$ olsun. Tüm yarı bulanık niceleyiciler için $Q: \wp(Y)^k \rightarrow [0,1]$, bulanık niceleyici $Mk(Q): \tilde{\wp}(Y)^k \rightarrow [0,1]$, Eş. 3.104'de tanımlanmıştır.

$$Mk(Q)(S_1, \dots, S_K) = \int_0^1 Q_\gamma(S_1, \dots, S_K) d\gamma \quad (3.104)$$

Bulanık niceleyici $Q_\gamma: \tilde{\wp}(Y)^k \rightarrow [0,1]$ Eş. 3.105'de tanımlanmıştır.

$$Q_\gamma(S_1, \dots, S_K) = m_{\frac{1}{2}} \left\{ Q(P_1, \dots, P_K): (S_i)_\gamma^{\min} \subseteq P_i \subseteq (S_i)_\gamma^{\max} \right\} \quad (3.105)$$

Genelleştirilmiş bulanık medyan $md_{\frac{1}{2}} : \wp([0,1]) \rightarrow [0,1]$ tanımı Eş. 3.106'da verilmiştir.

$$md_{\frac{1}{2}} S = med_{\frac{1}{2}} (\inf S, \sup S) \quad (3.106)$$

Bulanık medyan $med_{\frac{1}{2}} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ Eş. 3.107'de tanımlanmıştır.

$$med_{\frac{1}{2}}(r_1, r_2) = \begin{cases} \min(r_1, r_2), & \min(r_1, r_2) > 1/2 \\ \max(r_1, r_2), & \max(r_1, r_2) < 1/2 \\ 1/2 & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.107)$$

Eş. 3.105'de tanımlanan kesin kümeler $S_{\gamma}^{\min}, S_{\gamma}^{\max} \in \wp(Y)$ Eş. 3.108-Eş. 3.109'da tanımlanmıştır [68].

$$S_{\gamma}^{\min} = \begin{cases} S_{>1/2} & \gamma = 0 \\ S_{\geq 1/2 + \gamma/2} & \gamma > 0 \end{cases} \quad (3.108)$$

$$S_{\gamma}^{\max} = \begin{cases} S_{\geq 1/2} & \gamma = 0 \\ S_{> 1/2 - \gamma/2} & \gamma > 0 \end{cases} \quad (3.109)$$

Tanım 3.14.

$Y \neq \emptyset$ evrensel kümesinde tanımlı BK'lar $S_1, \dots, S_K \in \tilde{\wp}(Y)$ ve $(S_k)_{\geq \alpha}$, S_k kümesinin alfa kesmesiyle oluşan kümeyi göstermektedir. Eş. 3.110'da yarı bulanık niceleyici için bağımsız bulanıklaştırma mekanizması önerilmiştir.

$$Fm^I(Q) = \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((S_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (S_K)_{\geq \alpha_K}) d\alpha_1 \dots d\alpha_K \quad (3.110)$$

Eğer evrensel küme sonlu ise yarı bulanık niceleyici için bağımsız bulanıklaştırma mekanizması Eş. 3.111’de tanımlanmıştır [68].

$$Fm^I(Q) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_K=0}^{m_K} Q\left((S_1)_{\geq \alpha_{1,i_1}}, \dots, (S_K)_{\geq \alpha_{K,i_K}}\right) m(\alpha_{1,i_1}) \dots m(\alpha_{K,i_K}) \quad (3.111)$$

Örnek 3.12.

$w_g(S_g) = \{0,8/y_1; 0,9/y_2; 1/y_3; 0,2/y_4\}$ ve $S = \{1/y_1; 0,8/y_2; 0,3/y_3; 0,1/y_4\}$ iki BK olsun. $w_g(S_g)$ uzun insanlar BK’sı, S ise sarışın insanlar kümesini gösterebilir. “Hemen hemen tüm” niceleyicisi Eş. 3.112’de verilmiştir.

$$Q = \max \left\{ 2 \left(\frac{|S \cap w_g(S_g)|}{|w_g(S_g)|} \right) - 1, 0 \right\} \quad (3.112)$$

“Hemen hemen tüm uzun insanlar sarışındır” ifadesinin doğruluk derecesinin Tanım 3.13 kullanılarak hesaplanması için ilk olarak $S_\gamma^{\min}$, $S_\gamma^{\max}$, $(w_g(S_g))_\gamma^{\min}$, $(w_g(S_g))_\gamma^{\max}$ değerlerinin hesaplanması gerekir. Bu değerler Çizelge 3.11’de hesaplanmıştır. $\gamma = 0$ değeri için $S_{>\frac{1}{2}}^{\min}$ kümesi elde edilir. Bu kümedeki elemanların üyelik derecesi 0,5’e eşit veya daha büyüktür. $\gamma \in [0; 0,4]$ ifadesinde γ 0 ile 0,4 arasında herhangi bir değer alabilir. $\gamma = 0,2$ olduğu takdirde $S_{\geq 0,6}$ olup üyelik derecesi 0,6’ya eşit veya daha büyük olan elemanların oluşturduğu kümeyi göstermektedir. Bu kümede $\{y_1, y_2, y_3\}$ ’dir.

Q_γ değerleri Çizelge 3.12’de hesaplanmıştır. $\gamma \in [0,4; 0,6]$ için $S_\gamma^{\min} = \{y_1, y_2, y_3\}$ ve $(w_g(S_g))_\gamma^{\min} = \{y_1, y_2\}$, $S_\gamma^{\max} = \{y_1, y_2, y_3\}$ ve $(w_g(S_g))_\gamma^{\max} = \{y_1, y_2, y_3\}$ ’e eşittir.

Eş. 3.105 ve Eş. 3.106 kullanılarak $Q(\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2\})$ ve $Q(\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2, y_3\})$ elde edilir. Eş. 3.112 kullanılarak $Q(\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2\}) = 1/3$ ve $Q(\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2, y_3\}) = 1$ olarak hesaplanır. Eş. 3.107'ye göre $\min(1/3, 1) = 1/3 < 1/2$ ve $\max(1/3, 1) = 1 > 1/2$ olduğu için $md_{\frac{1}{2}}(1/3, 1) = 1/2$ olarak bulunur. Q_γ değerleri bulunduktan sonra doğruluk derecesi Eş. 3.104'den yararlanılarak hesaplanmıştır.

$$Mk(Q) = \int_0^1 Q_\gamma(S, w_g(S_g)) d\gamma$$

$$= (1-0,8) \times 1/2 + (0,8-0,6) \times 1/2 + (0,6-0,4) \times 1/2 + (0,4-0) \times 1/3 = 0,433 \quad (3.113)$$

Aynı örneği Eş. 3.111 verilen yöntemle çözmek için ilk olarak α kesmeleriyle oluşan kümelerin bulunması gerekir. $\alpha_1 \in]0,9;1]$ olduğu takdirde $(w_g(S_g))_{\geq \alpha_1}$ kümesi üyelik dereceleri 0,9' dan büyük elemanlardan oluşur.

Çizelge 3.11. Kesin kümeler

	$(w_g(S_g))_\gamma^{\min}$	$(w_g(S_g))_\gamma^{\max}$	$S_\gamma^{\min}$	$S_\gamma^{\max}$
$\gamma \in [0;0,4]$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$
$\gamma \in]0,4;0,6]$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$
$\gamma \in]0,6;0,8]$	$\{y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$	$\{y_1\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$
$\gamma \in]0,8;1]$	$\{y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$	$\{y_1\}$	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

Çizelge 3.13'de $Q(w_g(S_g)_{\geq \alpha_1}, S_{\geq \alpha_2})$ değerleri farklı durumlar için hesaplanmıştır.

Çizelge 3.14'de $\alpha_1 \in]0,9;1]$ ve $\alpha_2 \in]0,8;1]$ için 0,02:0 değeri bulunmuştur.

$m(\alpha_{1,1}) = (1-0,9) = 0,1$ ve $m(\alpha_{2,1}) = 0,2$ olup $m(\alpha_{1,1}) \times m(\alpha_{2,1}) = 0,02$ 'ye eşittir.

Bu kümelerin kesişimi boş kümedir.

Çizelge 3.12. Hemen hemen tüm niceleyicisinin aldığı değerler

Q_γ	
$\gamma \in]0;0,4]$	$Q(\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2\}) = 1/3$
$\gamma \in]0,4;0,6]$	$md_{\frac{1}{2}}(Q(\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2\}), Q(\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2, y_3\})) = 1/2$
$\gamma \in]0,6;0,8]$	$1/2$
$\gamma \in]0,8;1]$	$1/2$

Çizelge 3.13. Uzun ve sarışın kümelerinin α kesmeleri

	$(w_g(S_g))_{\geq \alpha_1}$		$S_{\geq \alpha_2}$
$\alpha_1 \in]0,9;1]$	$\{y_3\}$	$\alpha_2 \in]0,8;1]$	$\{y_1\}$
$\alpha_1 \in]0,8;0,9]$	$\{y_2, y_3\}$	$\alpha_2 \in]0,3;0,8]$	$\{y_1, y_2\}$
$\alpha_1 \in]0,2;0,8]$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\alpha_2 \in]0,1;0,3]$	$\{y_1, y_2, y_3\}$
$\alpha_1 \in]0;0,2]$	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$	$\alpha_2 \in]0;0,1]$	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

Çizelge 3.14. Hemen hemen tüm niceleyicisinin aldığı değerler

Q	$\alpha_2 \in]0,8;1]$	$\alpha_2 \in]0,3;0,8]$	$\alpha_2 \in]0,1;0,3]$	$\alpha_2 \in]0;0,1]$
$\alpha_1 \in]0,9;1]$	0,02:0	0,05:0	0,02:1	0,01:1
$\alpha_1 \in]0,8;0,9]$	0,02:0	0,05:0	0,02:1	0,01:1
$\alpha_1 \in]0,2;0,8]$	0,12:0	0,3:1/3	0,12:1	0,06:1
$\alpha_1 \in]0;0,2]$	0,04:0	0,1:0	0,04:1/2	0,02:1

Eş. 3.111 kullanılarak “Hemen hemen tüm uzun insanlar sarışındır” özetinin doğruluk derecesi Eş. 3.114’de hesaplanmıştır [68].

$$Fm^l(Q) = 0,02 \times 0 + 0,05 \times 0 + 0,02 \times 1 + \dots + 1 \times 0,02 = 0,38 \quad (3.114)$$

3.1.3. Diğer yöntemler

Tip-I ve tip-II niceleyici cümleleri değerlendirmede skalar kardinalite ve bulanık kardinalitenin yanı sıra olabilirlik teorisine dayanan doğruluk dereceleri de bulunmaktadır.

Tip I Niceleyici Cümleler

Tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk dereceleri sırasıyla Yager tarafından önerilen OWA operatör temelli olmayan doğruluk derecesi [80] ve Sugeno integral temelli doğruluk derecesidir [42, 43].

Yager OWA Operatör Temelli Olmayan Doğruluk Derecesi

Yager göreceli niceleyicilerle modellenen tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için OWA operatörü temelli olmayan doğruluk derecesini Eş. 3.115’de tanımlamıştır [80].

$$Y'_Q(S) = \max_{C \subseteq Y} \otimes_1 \left(Q\left(\frac{|C|}{M}\right), \otimes_2 \mu_S(d_m) \right) \quad (3.115)$$

Mutlak niceleyicilerin kullanıldığı tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesi Eş. 3.116’da tanımlanmıştır.

$$Y'_Q(S) = \max_{C \subseteq Y} \otimes_1 \left(Q(|C|), \otimes_2 \mu_S(d_m) \right) \quad (3.116)$$

$\otimes_1$ ve $\otimes_2$ t normdur. $\otimes_1 = \otimes_2 = \min$ olduğu ve göreceli niceleyicilerin kullanıldığı tip-I cümlelerin doğruluk derecesi Eş. 3.117’de tanımlanmıştır.

$$Y'_Q(S) = \max_{C \subseteq Y} \min \left(Q\left(\frac{|C|}{M}\right), \min_{d_m \in C} \mu_S(d_m) \right) \quad (3.117)$$

Sugeno İntegral Temelli Doğruluk Derecesi

Göreceli niceleyici kullanıldığı tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde Eş. 3.118'de tanımlanan Sugeno İntegral temelli doğruluk derecesi kullanılır [42, 43].

$$S_Q(S) = \max_{1 \leq i \leq M} \min(Q(i/M), b_i) \quad (3.118)$$

b_i , S BK'sına ait elemanların üyelik derecelerinin küçükten büyüğe sıralandığında i . en büyük değerdir. Sugeno integral temelli doğruluk derecesi Yager tarafından önerilmiş olan OWA temelli olmayan doğruluk derecesiyle aynıdır [80]. Sugeno integrali temelli doğruluk derecesi özellik 3.2- 3.5'i sağlamaktadır. Hesaplama karmaşıklığı, eğer elemanların üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıralanmış ise $O(M)$, sıralanmamış ise $O(M \log M)$ dir. Özellik 3.1 sadece tutarlı niceleyiciler için sağlanmaktadır ve bu nedenle özellik 3.1 ve özellik 3.6 ile bağdaşmamaktadır.

$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $S = \{1/y_1, 1/y_2, 0/y_3\}$ bir BK ve $Q(0) = 0$, $Q(1/3) = 1$, $Q(2/3) = 0$, $Q(1) = 0$ olsun. $S_Q(S) = \max\{\min(1,1), \min(0,1), \min(0,0)\} = 1$ eşit olmaktadır. $|S| = 2$, $M = 3$ olduğu için sonucun $Q(2/3) = 0$ 'e eşit olması gerekir. Bu nedenle özellik 3.1 niceleyicinin tutarsız olduğu durumda sağlanamamaktadır.

Tip-II Niceleyici Cümleler

Villa Cubero Medina ve Pons Yöntemi

Yöntem, tutarlı niceleyicilerle modellenen cümleleri değerlendirmede Yager tarafından önerilen “veyalık” derecesini kullanmaktadır [41]. Bu değer $[0,1]$ aralığında tanımlanır ve bir niceleyicinin “tümü” niceleyicisine komşuluk derecesini

belirtir. Veyalık($\exists$)=1, Veyalık($\forall$)=0 olup, bu niceleyiciler arasında tanımlanmış bir niceleyici $[0,1]$ arasında bir değere sahiptir. Yöntem Eş. 3.119'da tanımlanmıştır [81].

$$V_Q(S|w_g(S_g)) = Q_O \max_{y \in Y} (\mu_S(d_m)) + (1 - Q_O) \min_{y \in Y} \left(\bigotimes_{k \in \{K\} \setminus g} \mu_{S_k}(v_k^m) \oplus \left(1 - \mu_{w_g(S_g)}(v_g^m) \right) \right) \quad (3.119)$$

$$Q_O = \sum_{i=1}^M \left(\frac{M-i}{M-1} \right) \times (Q(i/M) - Q((i-1)/M))$$

Yöntemin hesaplama karmaşıklığı $O(M)$ olup özellik 3.9'ün yanında özellik 3.12 ve 3.13'ü de sağlamaktadır.

Kütle Atama Yöntemi

Literatürde kütle ataması temelli çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Lawry kütle atamasını kullanarak Bayes çıkarımı gibi olasılıksal çıkarım kurallarını dilsel çıkarım kurallarına dönüştürerek daha az hesaplama ile dilsel ifadeler elde etmiş ve bu ifadelerin değerlendirmesini yapmıştır [82, 83]. Martin ve ark. birliktelik kurallarının değerlendirilmesi için kütle ataması temelli doğruluk derecesini önermişlerdir [55, 56]. Yöntem, Wu ve Mendel tarafından önerilen özet yapısını değerlendirmede kullanılmaktadır. Yöntem temel olarak kümelerde bulunan elemanların kütle atama değerlerinin hesaplanmasına bağlıdır. $w_g(S_g)$ ve S BK'ları

$$w_g(S_g) = \left\{ \mu_{w_g(S_g)}(y_1)/y_1, \mu_{w_g(S_g)}(y_2)/y_2, \dots, \mu_{w_g(S_g)}(y_m)/y_m \right\}$$

$$S = \left\{ \mu_S(y_1)/y_1, \mu_S(y_2)/y_2, \dots, \mu_S(y_m)/y_m \right\}$$

olsun. $w_g(S_g)$ kümesinin üyelik dereceleri büyükten küçüğe sıranmış hali Eş. 3.120'de verilmiştir.

$$\sigma_{w_g(S_g)} = \left\{ \mu_{w_g(S_g)}^{(1)}, \mu_{w_g(S_g)}^{(2)}, \dots, \mu_{w_g(S_g)}^{(l_{w_g(S_g)})} \right\} \quad (3.120)$$

$\mu_{w_g(S_g)}^{(1)} > \mu_{w_g(S_g)}^{(2)} > \dots > \mu_{w_g(S_g)}^{(l_{w_g(S_g)})}$ ve $l_{w_g(S_g)} < |w_g(S_g)|$ olsun. $w_g(S_g)$ kümesinin i elemanına ait kütle atama fonksiyonu Eş. 3.121’de tanımlanmıştır.

$$m_{w_g(S_g)}(w_g(S_g)_i) = \mu_{w_g(S_g)}^{(i)} - \mu_{w_g(S_g)}^{(i+1)} \quad (3.121)$$

$i > l_{w_g(S_g)}$ olduğu takdirde $\mu_{w_g(S_g)}^{(i)} = 0$ ’e eşittir. $w_g(S_g)$ ve S BK’larının kütle atamaları Eş. 3.122’de tanımlanmıştır.

$$\mathfrak{M}_{w_g(S_g)} = \left\{ w_g(S_g)_i : m_{w_g(S_g)}(w_g(S_g)_i) \right\}, 1 \leq i \leq l_{w_g(S_g)} \quad (3.122)$$

$$\mathfrak{M}_S = \left\{ S_j : m_S(S_j) \right\}, 1 \leq j \leq l_S \quad (3.123)$$

Birleşik kütle ataması Eş. 3.124’de tanımlanmıştır.

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{w_g(S_g)} \oplus \mathfrak{M}_S = \{ Y : m(Y) \} \quad (3.124)$$

m , Eş. 3.125-Eş. 3.126 tarafından kısıtlanır.

$$\sum_{j=1}^{l_S} m_{ij} = m_{w_g(S_g)}(w_g(S_g)_i) \quad (3.125)$$

$$\sum_{i=1}^{l_{w_g(S_g)}} m_{ij} = m_S(S_j) \quad (3.126)$$

m_{ij} i. satır j. sütuna ((i,j) hücresi) atanan kütle atama büyüklüğünü ifade etmektedir. Kütle atamasına dayalı doğruluk derecesi Eş. 3.127’de tanımlanmıştır.

$$T_m(\mathfrak{M}) = \frac{\sum_{i,j} m_{ij} \times \left| \left(w_g(S_g) \right)_i \cap S_j \right|}{\sum_{i=1}^{l_{w_g(S_g)}} \left(\sum_j m_{ij} \times \left| \left(w_g(S_g) \right)_i \right| \right)} \quad (3.127)$$

Eş. 3.125-Eş. 3.126 verilen kısıtlar göz önüne alınarak kütle atamaları yapılır. Çok fazla sayıda atama alternatifi bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi de en az önyargılı kütle atama dağılımdır ($\mathfrak{M}^{LPD}$). Bunun yanında doğruluk derecesini minimum ve maksimum yapan atamalarda bulunmaktadır. Bu atamalara bağlı olarak doğruluk derecesi BK olarak ifade edilebilir.

$\mathfrak{M}^l$ herhangi bir birleşik kütle ataması olsun. Çizelge 3.15’de bu atamada yapılabilecek kütle transferleri gösterilmiştir. Çizelge 3.15’de gösterilen kütle atama transferi $E(x, (i_1, j_1), (i_2, j_2))$ olarak gösterilir. Kütle atama transferi yapıldıktan sonra elde edilen birleşik kütle ataması Eş. 3.128’de verilmiştir.

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}^l + E(x, (i_1, j_1), (i_2, j_2)) \quad (3.128)$$

İki birleşik kütle ataması arasındaki pozitif ve negatif kütle atama transferlerin toplamı Eş. 3.129-Eş. 3.130’da verilmiştir.

$$pos(\Delta\mathfrak{M}) = \sum_{i,j \mid \Delta\mathfrak{M}_{ij} > 0} \Delta\mathfrak{M}_{ij} \quad (3.129)$$

$$neg(\Delta\mathfrak{M}) = - \sum_{i,j \mid \Delta\mathfrak{M}_{ij} < 0} \Delta\mathfrak{M}_{ij} \quad (3.130)$$

Çizelge 3.15. Kütle atama transferi ($x > 0$ pozitif transfer, $x < 0$ negatif transfer)

	...	S_{j_1}	...	S_{j_2}	...
...	...	...	...	...	...
$w_g(S_g)_{i_1}$	...	$+x$	...	$-x$	...
...	...	...	...	...	...
$w_g(S_g)_{i_2}$	...	$-x$	...	$+x$	...
...	...	...	...	...	...

Eğer $pos(\Delta \mathfrak{M}) = neg(\Delta \mathfrak{M})$ ise iki birleşik kütle ataması aynıdır. Doğruluk derecesini minimum ($\mathfrak{M}^{\min}$) ve maksimum ($\mathfrak{M}^{\max}$) yapan atamalarda sırasıyla Eş. 3.131-Eş.3.132’de verilmiştir.

$$\mathfrak{M}^{\min}(i, j) = \min \left(m_{w_g(S_g)}^{(i)}, m_S^{(j)}, \max \left(0, \min \left(\mu_{w_g(S_g)}^{(i)} + \mu_S^{(j)} - 1, m_{w_g(S_g)}^{(i)} + m_S^{(j)} - (\mu_{w_g(S_g)}^{(i)} + \mu_S^{(j)} - 1) \right) \right) \right) \quad (3.131)$$

$$\mathfrak{M}^{\max}(i, j) = \min \left(m_{w_g(S_g)}^{(i)}, m_S^{(j)}, \max \left(0, \min \left(m_{w_g(S_g)}^{(i)} - (\mu_{w_g(S_g)}^{(i)} - \mu_S^{(j)}), m_S^{(j)} - (\mu_S^{(j)} - \mu_{w_g(S_g)}^{(i)}) \right) \right) \right) \quad (3.132)$$

En az önyargılı kütle atama dağılımı referans alınarak doğruluk derecesi BK olarak ifade edilebilir. En az önyargılı kütle atama dağılımı dikkate alınarak bulunan doğruluk derecesinin üyelik derecesi bire eşit olup BK’nın yüksekliğini göstermektedir. Minimum ve maksimum doğruluk derecesi ve bu değerler arasındaki değerler üstünde doğruluk derecesi BK olarak tanımlanmaktadır. BK’nın üyelik derecesi Eş. 3.133’de tanımlanmıştır.

$$\mu_T(T_m(\mathfrak{M})) = 1 - \frac{pos(\mathfrak{M}^{LPD} - \mathfrak{M})}{\mathfrak{N}} \quad (3.133)$$

$$\mathfrak{N} = \max\left(\text{pos}\left(\mathfrak{M}^{\max} - \mathfrak{M}^{LPD}\right), \text{pos}\left(\mathfrak{M}^{\min} - \mathfrak{M}^{LPD}\right)\right)$$

Örnek 3.13.

$w_g(S_g) = \{1/y_1; 0,8/y_2; 0,5/y_3; 0,2/y_4\}$ ve $S = \{1/y_1; 0,4/y_2; 0,8/y_3; 0,7/y_4\}$ iki BK olsun. Eş. 3.120 kullanılarak $\sigma_{w_g(S_g)} = \{1; 0,8; 0,5; 0,2\}$ olarak bulunur. Eş. 3.121 kullanılarak

$$\begin{aligned} m_{w_g(S_g)}(w_g(S_g)_1) &= 0,2 & m_{w_g(S_g)}(w_g(S_g)_2) &= 0,3 \\ m_{w_g(S_g)}(w_g(S_g)_3) &= 0,3 & m_{w_g(S_g)}(w_g(S_g)_4) &= 0,2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eş. 3.122 kullanılarak $\mathfrak{M}_{w_g(S_g)}$ kümesi oluşturulur. Aynı işlemler S kümesi içinde yapılarak $\mathfrak{M}_S$ kümesi bulunur.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{w_g(S_g)} &= \{[y_1]: 0,2; [y_1, y_2]: 0,3; [y_1, y_2, y_3]: 0,3; [y_1, y_2, y_3, y_4]: 0,2\} \\ \mathfrak{M}_S &= \{[y_1]: 0,2; [y_1, y_3]: 0,1; [y_1, y_3, y_4]: 0,3; [y_1, y_2, y_3, y_4]: 0,4\} \end{aligned}$$

Eş. 3.125-Eş. 3.126 verilen kısıtlar göz önüne alınarak kütle atamaları yapılır. Çok fazla sayıda atama alternatifi bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi de en az önyargılı kütle atama dağılımdır. Bu atama kütle değerleri çarpılarak bulunur. Çizelge 3.16'da bu atama gösterilmiştir. En az önyargılı kütle atama dağılımına dayalı doğruluk derecesi Eş. 3.134'de hesaplanmıştır.

$$T_m(\mathfrak{M}^{LPD}) = \frac{\sum_{i,j} m_{ij} \times \left| \left(w_g(S_g) \right)_i \cap S_j \right|}{\sum_{i=1}^4 \left(\sum_j m_{ij} \times \left| \left(w_g(S_g) \right)_i \right| \right)} = \frac{(0,04 \times 1) + (0,02 \times 1) + \dots + (0,08 \times 4)}{(0,2 \times 1) + (0,3 \times 2) + (0,3 \times 3) + (0,2 \times 4)}$$

$$\frac{1,86}{2,5} = 0,744 \quad (3.134)$$

Doğruluk derecesini minumum yapan birleşik kütle atama dağılımı Eş. 3.131 kullanılarak Çizelge 3.17’de elde edilmiştir. Minumum doğruluk derecesi Çizelge 3.17 temel alınarak Eş. 3.135’de hesaplanmıştır.

$$T_m(\mathfrak{M}^{\min}) = \frac{(0,2 \times 1) + (0,1 \times 1) + \dots + (0,2 \times 2) + (0,2 \times 1)}{(0,2 \times 1) + (0,3 \times 2) + (0,3 \times 3) + (0,2 \times 4)} = \frac{1,5}{2,5} = 0,60 \quad (3.135)$$

Doğruluk derecesini maksimum yapan birleşik kütle atama dağılımı Eş. 3.132 kullanılarak Çizelge 3.18’de elde edilmiştir. Maksimum doğruluk derecesi Çizelge 3.18 temel alınarak Eş. 3.136’da hesaplanmıştır.

Çizelge 3.16. En az önyargılı kütle atama dağılımı

S		0,2	0,1	0,3	0,4
$w_g(S_g)$		$[y_1]$	$[y_1, y_3]$	$[y_1, y_3, y_4]$	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$
0,2	$[y_1]$	$[y_1]$	$[y_1]$	$[y_1]$	$[y_1]$
		0,04	0,02	0,06	0,08
0,3	$[y_1, y_2]$	$[y_1]$	$[y_1]$	$[y_1]$	$[y_1, y_2]$
		0,06	0,03	0,09	0,12
0,3	$[y_1, y_2, y_3]$	$[y_1]$	$[y_1, y_3]$	$[y_1, y_3]$	$[y_1, y_2, y_3]$
		0,06	0,03	0,09	0,12
0,2	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$	$[y_1]$	$[y_1, y_3]$	$[y_1, y_3, y_4]$	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$
		0,04	0,02	0,06	0,08

$$T_m(\mathfrak{M}^{\max}) = \frac{(0,2 \times 1) + (0,1 \times 1) + \dots + (0,2 \times 3) + (0,2 \times 4)}{(0,2 \times 1) + (0,3 \times 2) + (0,3 \times 3) + (0,2 \times 4)} = \frac{2,1}{2,5} = 0,84 \quad (3.136)$$

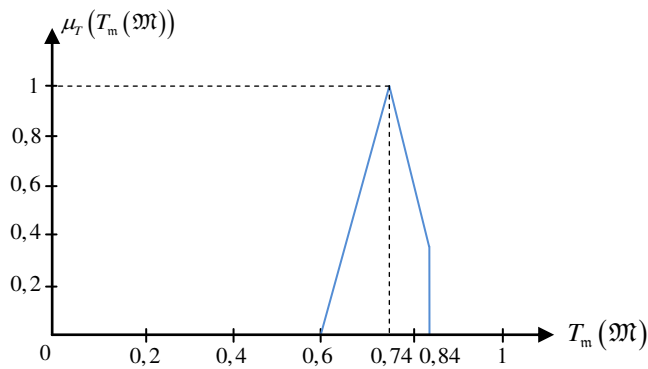
Çizelge 3.17. Doğruluk derecesi minimum yapan birleşik kütle atama dağılımı

S		0,2	0,1	0,3	0,4
$w_g(S_g)$		$[y_1]$	$[y_1, y_3]$	$[y_1, y_3, y_4]$	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$
0,2	$[y_1]$	$[y_1]$ 0	$[y_1]$ 0	$[y_1]$ 0	$[y_1]$ 0,2
0,3	$[y_1, y_2]$	$[y_1]$ 0	$[y_1]$ 0	$[y_1]$ 0,1	$[y_1, y_2]$ 0,2
0,3	$[y_1, y_2, y_3]$	$[y_1]$ 0	$[y_1, y_3]$ 0,1	$[y_1, y_3]$ 0,2	$[y_1, y_2, y_3]$ 0
0,2	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$	$[y_1]$ 0,2	$[y_1, y_3]$ 0	$[y_1, y_3, y_4]$ 0	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$ 0

Çizelge 3.18. Doğruluk derecesi maksimum yapan birleşik kütle atama dağılımı

S		0,2	0,1	0,3	0,4
$w_g(S_g)$		$[y_1]$	$[y_1, y_3]$	$[y_1, y_3, y_4]$	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$
0,2	$[y_1]$	$[y_1]$ 0,2	$[y_1]$ 0	$[y_1]$ 0	$[y_1]$ 0
0,3	$[y_1, y_2]$	$[y_1]$ 0	$[y_1]$ 0,1	$[y_1]$ 0,2	$[y_1, y_2]$ 0
0,3	$[y_1, y_2, y_3]$	$[y_1]$ 0	$[y_1, y_3]$ 0	$[y_1, y_3]$ 0,1	$[y_1, y_2, y_3]$ 0,2
0,2	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$	$[y_1]$ 0	$[y_1, y_3]$ 0	$[y_1, y_3, y_4]$ 0	$[y_1, y_2, y_3, y_4]$ 0,2

Eş. 3.133 kullanılarak bulanık doğruluk derecesi Şekil 3.12’de ifade edilmiştir [55, 56].



Şekil 3.12. Bulanık doğruluk derecesi

Küme Merkezli Fonksiyonel Dilsel Özetleme

Bu yöntem niceleyici cümlelerin değerlendirilmesi için Lietard tarafından önerilmiştir [84]. Bu yöntemde ilk olarak özelliklerin tanım kümelerinin kartezyen çarpımında yer alan elemanları $[0,1]$ arasında değişen nümerik bir değere atayan bir fonksiyon tanımlanır. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_K\}$ özellikleri, $X_1, X_2, \dots, X_K$ özelliklerin tanım kümesini gösterebilir. Tanım kümeleri üzerinde tanımlanan BK'ların $S = \{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ bulanık kartezyen çarpımı $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_K$ 'dir. Küme merkezli fonksiyonu F , bulanık kartezyen çarpım üzerinde Eş. 3.137'de tanımlanmıştır.

$$F : BK(X_1) \times BK(X_2) \times \dots \times BK(X_K) \rightarrow [0,1] \quad (3.137)$$

$$F(S_1 \times S_2 \times \dots \times S_K) = \max_{\alpha \in [0,1]} \min \left(\alpha, F((S_1)_\alpha \times (S_2)_\alpha \times \dots \times (S_K)_\alpha) \right) \quad (3.138)$$

Eş. 3.138'de tanımlanan eşitlikte α 'nın alacağı değerler $[0,1]$ arasında sonsuz değer olabilir. Bu durum işlem yükünü beraberinde getirmektedir. Bu nedenle α 'nın, $D = \left\{ \min(\mu_{S_1}(v_1^m), \mu_{S_2}(v_2^m), \dots, \mu_{S_K}(v_K^m)) \mid m=1, 2, \dots, M \right\}$ kümesinde yer alan değerlere eşit olduğu yeni bir tanım Eş. 3.139'da verilmiştir.

$$T_\omega = F(S_1 \times S_2 \times \dots \times S_K) = \max_{\alpha \in D} \min \left(\alpha, F((S_1)_\alpha \times (S_2)_\alpha \times \dots \times (S_K)_\alpha) \right) \quad (3.139)$$

F , fonksiyonu $S_1, S_2, \dots, S_K$ özetleyicilerinin farklı α kesmeleriyle oluşturulan kesin kümelerinin kartezyen çarpımlarının tanım kümesinde yer alan elemanların evrensel kümede yer alan tüm elemanlara oranını göstermektedir.

$$F((S_1)_\alpha \times (S_2)_\alpha \times \dots \times (S_K)_\alpha) = \frac{\left| \sum_{m=1}^M y_m \right|}{|Y|} \quad y_m \in ((S_1)_\alpha \times \dots \times (S_K)_\alpha), \alpha \in D \quad (3.140)$$

Eş. 3.139 tanımlanan F fonksiyonu tip-I niceleyici cümleleri değerlendirmek için kullanılır.

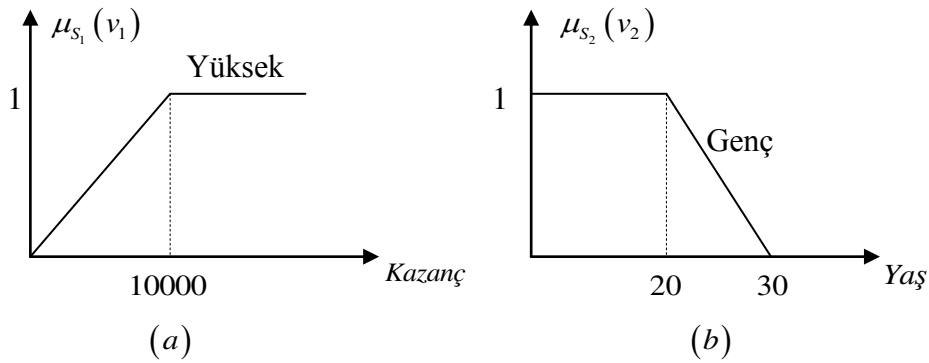
Örnek 3.14.

Çalışan yaşı ve aylığından oluşan insan kaynakları veritabanı Çizelge 3.19'da verilmiştir.

Çizelge 3.19. Çalışanların kazanç ve yaş değerleri

No	Kazanç (S_1)	Yaş (S_2)
1 (y_1)	15000	22
2 (y_2)	5000	25
3 (y_3)	2000	20
4 (y_4)	20000	20
5 (y_5)	6000	25
6 (y_6)	15000	29

Çalışanın kazancı yüksek BK'sı Şekil 3.13a'da yaşının genç olması Şekil 3.13b'de tanımlanmıştır.



Şekil 3.13. Yüksek kazanç ve genç bulanık kümeleri

Şekil 3.13'de tanımlanan üyelik fonksiyonlarına göre Çizelge 3.19'da verilen değerlere karşılık gelen üyelik dereceleri Çizelge 3.20'de verilmiştir.

α , D kümesinde yer alan değerlere eşit olur. D kümesi Eş. 3.141'de tanımlanmıştır.

$$D = \{\min(1;0,8), \min(0,5;0,5), \dots, \min(1;0,1)\} = \{1;0,8;0,5;0,2;0,1\} \quad (3.141)$$

Çizelge 3.20. Çalışanların yüksek kazanç ve genç bulanık kümelerine aitlik dereceleri

No	$\mu_{S_1}(v_1)$	$\mu_{S_2}(v_2)$
1 (y_1)	1	0,8
2 (y_2)	0,5	0,5
3 (y_3)	0,2	1
4 (y_4)	1	1
5 (y_5)	0,6	0,5
6 (y_6)	1	0,1

Farklı α kesmeleri değerleriyle elde edilen $(S_1)_\alpha$, $(S_2)_\alpha$ ve $F((S_1)_\alpha, (S_2)_\alpha)$ değerleri Çizelge 3.21’de verilmiştir. $F((S_1)_\alpha, (S_2)_\alpha)$ değeri, $\alpha = 1$ için kazançları ve yaşları $[10000, +\infty[\times [0, 20]$ kartezyen çarpımında yer alan çalışanların tüm çalışanlara oranını göstermektedir. 4 nolu çalışanın (y_4) kazancı 20000 yaşı 20 olup bu şartları sağlayan tek çalışandır. Eş. 3.140 kullanılarak $F((S_1)_1, (S_2)_1) = 1/6$ olarak hesaplanır. Verilen bilgilere göre “çalışanlar genç ve kazancı yüksektir” özetinin doğruluk derecesi Eş. 3.139 kullanılarak Eş. 3.142’de hesaplanmıştır [84].

Çizelge 3.21. F fonksiyonunun aldığı değerler

α	$(S_1)_\alpha$	$(S_2)_\alpha$	$F((S_1)_\alpha, (S_2)_\alpha)$
1	$[10000, +\infty[$	$[0, 20]$	1/6
0,8	$[8000, +\infty[$	$[0, 22]$	1/3
0,5	$[5000, +\infty[$	$[0, 25]$	2/3
0,2	$[2000, +\infty[$	$[0, 28]$	5/6
0,1	$[1000, +\infty[$	$[0, 29]$	1

$$\begin{aligned} T_\omega &= \max\{\min(1;1/6), \min(0,8;1/3), \min(0,5;2/3), \min(0,2;5/6), \min(0,1;1)\} \\ &= \max\{1/6; 1/3; 0,5; 0,2; 0,1\} = 0,5 \end{aligned} \quad (3.142)$$

Lietard, doğruluk derecesini iki farklı şekilde yorumlamıştır. İlk yorum nicelik ile ilgili olup verilen örnek için “Çalışanların en az yarısı genç ve kazançları yüksektir şartlarını en az 0,5 derecesinde sağlamaktadır.” ifadesiyle açıklanır. İkinci yorum nitelik ile ilgili olup “Çalışanların en az yarısının kazançları ve yaşları kartezyen $[5000, +\infty[\times [0, 25]$ çarpımındaki herhangi değer çiftine eşittir.” ifadesiyle açıklanır [84].

Lietard, önermiş olduğu yöntemle tip-II niceleyici cümlelerin doğruluk derecesini de hesaplamıştır. İlk olarak öncül özetleyici kümesi farklı α kesmeleriyle kesin kümelerle dönüştürülür. Dönüştürülen her bir kesin küme evrensel küme gibi düşünülerek tip-I niceleyici cümle yapısına indirgenir ve doğruluk derecesi hesaplanır. Bu işlem öncül özetleyici kümesinden farklı α kesmeleriyle elde edilen tüm kesin kümeler için yapılır. Eş. 3.143’de önerilen eşitlikle doğruluk derecesi hesaplanır.

$$T_{\omega(\lambda)} = \max_{\alpha \in D_\lambda} \min \left(\alpha, F \left((S_1)_\alpha \times \dots \times (S_K)_\alpha, \lambda \right) \right) \quad (3.143)$$

λ , öncül özetleyiciler kümesinde tanımlanan α kesmelerini göstermektedir. Eş. 3.143’de α , $D_\lambda = \left\{ \min \left(\mu_{S_1}(v_1^m), \mu_{S_2}(v_2^m), \dots, \mu_{S_K}(v_K^m) \right), \mu_{w_g(S_g)}(v_g^m) \right\}$ kümesinde yer alan değerlere eşit olur. Farklı doğruluk dereceleri Eş. 3.144 kullanılarak tek bir değere indirgenir.

$$T_g = \min_{\lambda \in DR} \left(T_{\omega(\lambda)} \right) \quad (3.144)$$

λ , $DR = \left\{ \mu_{w_g(S_g)}(v_g^m) \mid m = 1, \dots, M \right\}$ kümesinde yer alan üyelik derecelerine eşittir.

Örnek 3.15.

Çizelge 3.22’de çalışanların yaşlarının “genç” ve “kazancının yüksek” BK’larına aitlik dereceleri verilmiştir. Bu örnekte “Tüm genç çalışanların kazancı yüksektir” özetinin doğruluk derecesi hesaplanmıştır.

Çizelge 3.22. Çalışanların yüksek kazanç ve genç bulanık kümelerine aitlik dereceleri

No	$\mu_{w_g(S_g)}(v_1)$	$\mu_s(v_2)$
1 (y_1)	1	1
2 (y_2)	1	0,7
3 (y_3)	1	0,1
4 (y_4)	0,9	0,8
5 (y_5)	0,7	0,3
6 (y_6)	0,7	0,4
7 (y_7)	0,7	1
8 (y_8)	0,7	0,8

$\lambda = 1$ için $(w_g(S_g))_1 = \{y_1, y_2, y_3\}$, $\lambda = 0,9$ için $(w_g(S_g))_{0,9} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ve $\lambda = 0,7$ için $(w_g(S_g))_{0,7} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8\}$ kümeleri elde edilir. Eş. 3.143 kullanılarak üç farklı durum için doğruluk derecesi Eş. 3.145-Eş. 3.147’de hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
 T_{\omega(1)} &= \max\{\min(1; 1/3), \min(0,7; 2/3), \min(0,1; 1)\} \\
 &= \max\{1/3; 2/3; 0,1\} = 2/3
 \end{aligned} \tag{3.145}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\omega(0,9)} &= \max\{\min(1; 1/4), \min(0,8; 2/4), \min(0,7; 3/4), \min(0,1; 1)\} \\
 &= \max\{1/4; 2/4; 0,7; 0,1\} = 7/10
 \end{aligned} \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\omega(0,7)} &= \max\{\min(1; 2/8), \min(0,8; 4/8), \min(0,7; 5/8), \min(0,4; 6/8), \dots, \min(0,1; 1)\} \\
 &= \max\{2/8; 4/8; 5/8; 0,4; 0,3; 0,1\} = 5/8
 \end{aligned} \tag{3.147}$$

Eş. 3.144 kullanılarak “Tüm genç çalışanların kazancı yüksektir” özetinin doğruluk derecesi $T_g = \min\{2/3; 0,7; 5/8\} = 5/8$ olarak bulunur [84].

3.1.4. Aralıklı tip-2 bulanık kümelerle dilsel özetleme

Niewiadomski Yaklaşımı

Niewiadomski, dilsel özetleme işleminde tip-2 BK ve aralıklı tip-2 BK'ların kullanılabileceğini önermiştir [5, 85-88]. Aralıklı tip-2 BK'nın dilsel özetlemede kullanılabilmesi için en azından Q ve S_k 'lerden birinin aralıklı tip-2 BK ile modellenmesinin gerektiğini belirtmiştir. Bu da iki durumun ortaya çıkmasına neden olmuştur.

1. $\tilde{Q}'$ aralıklı tip-2 BK ve S_k tip-1 BK
2. Q tip-1 BK ve $\tilde{S}_k'$ aralıklı tip-2 BK

Aralıklı tip-2 BK Niceleyici $\tilde{Q}'$ ve tip-1 BK S_k : Niceleyicinin aralıklı tip-2 BK, özetleyicilerin tip-1 BK ile modellendiği durumdur.

1. “ $\tilde{Q}'$ $Y(nesneler)$ $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ dır. $[\tilde{T}]$ ”: Tip-II niceleyici cümlelerde aralıklı değer alan $\tilde{T}$ doğruluk derecesi Eş. 3.148'de tanımlanmıştır.

$$\tilde{T} = \left[\mu_{\tilde{Q}'} \left(\frac{r}{R} \right), \mu_{\tilde{Q}'} \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad (3.148)$$

r ve R Eş. 3.5 ve Eş. 3.6'da verilmiştir.

2. “ $\tilde{Q}' w_g(S_g) Y(nesneler), \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_K\}$ dır $[\tilde{T}]$ ”: Tip-II niceleyici cümlelerde $w_g(S_g)$ niteleyicidir. Bu durumda aralıklı değer alan $\tilde{T}$ doğruluk derecesi Eş. 3.149'daki gibi tanımlanır.

$$\tilde{T} = \left[\mu_{\tilde{Q}^I} \left(\frac{r}{\sum_{m=1}^M \mu_{w_g} (v_g^m)} \right), \mu_{\tilde{Q}^I} \left(\frac{r}{\sum_{m=1}^M \mu_{w_g} (v_g^m)} \right) \right] \quad (3.149)$$

Tip II niceleyici cümlelerde sadece göreceli niceleyici $\tilde{Q}^I$ kullanılabilir.

Tip-1 BK Niceleyici Q ve tip-2 BK $\tilde{S}_k^I$: Niceleyicinin tip-1 BK, özetleyicilerin aralıklı tip-2 BK ile modellendiği durumdur.

1. “ Q $Y(nesneler)$ $\{\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I, \tilde{S}_2^I, \dots, \tilde{S}_K^I\}$ $dır. [\tilde{T}]$ ”: Tip-II niceleyici cümlelerde aralıklı değer alan $\tilde{T}$ doğruluk derecesi Eş. 3.150’de tanımlanmıştır.

$$\tilde{T} = \left[\inf_{r \in [\underline{r}, \bar{r}]} \mu_Q \left(\frac{r}{R} \right), \sup_{r \in [\underline{r}, \bar{r}]} \mu_Q \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad (3.150)$$

Eş. 3.150’deki $\underline{r}$ ve $\bar{r}$ Eş. 3.151 ve Eş. 3.152’de tanımlanmıştır.

$$\underline{r}' = \sum_{m=1}^M \min \left\{ \mu_{\tilde{S}_1^I}^L (v_1^m), \dots, \mu_{\tilde{S}_K^I}^L (v_K^m) \right\} \quad (3.151)$$

$$\bar{r}' = \sum_{m=1}^M \min \left\{ \mu_{\tilde{S}_1^I}^U (v_1^m), \dots, \mu_{\tilde{S}_K^I}^U (v_K^m) \right\} \quad (3.152)$$

2. “ Q $w_g(S_g)$ $Y(nesneler)$ $\{\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I, \tilde{S}_2^I, \dots, \tilde{S}_K^I\}$ $dır. [\tilde{T}]$ ”: Tip-II niceleyici cümlelerde $w_g(S_g)$ niteleyicidir. Bu durumda aralıklı değer alan $\tilde{T}$ doğruluk derecesi Eş. 3.153 ile tanımlanır.

$$\tilde{T} = \left[\inf_{r \in [\underline{r}', \bar{r}']} \mu_Q \left(\frac{r}{\sum_{m=1}^M \mu_{w_g} (v_g^m)} \right), \sup_{r \in [\underline{r}', \bar{r}']} \mu_Q \left(\frac{r}{\sum_{m=1}^M \mu_{w_g} (v_g^m)} \right) \right] \quad (3.153)$$

Eş. 3.153'deki $\underline{r}'$ ve $\bar{r}'$ Eş. 3.154 –Eş. 3.155'de tanımlanmıştır.

$$\underline{r}' = \sum_{m=1}^M \min \left\{ \mu_{\tilde{S}_1^I}^L (v_1^m), \dots, \mu_{\tilde{S}_K^I}^L (v_K^m) \right\} \quad (3.154)$$

$$\bar{r}' = \sum_{m=1}^M \min \left\{ \mu_{\tilde{S}_1^I}^U (v_1^m), \dots, \mu_{\tilde{S}_K^I}^U (v_K^m) \right\} \quad (3.155)$$

Bu formdaki özetleme işleminde $\{\tilde{S}_1^I, \dots, \tilde{S}_{g-1}^I, \tilde{S}_{g+1}^I, \dots, \tilde{S}_K^I\}$ kümesi aralıklı tip-2 BK ile modellenirken $w_g(S_g)$ öncül özetleyici tip-1 BK ile modellenmiştir. Niewiadomski [5, 85-88], Kacprzyk [46], Kacprzyk ve Strykowski [47] tarafından önerilen kalite ölçümlerini aralıklı tip-2 BK'ya genişletmiş ve özetleri değerlendirirken bu ölçütlerin ağırlıklı toplamalarını kullanmıştır.

Wu ve Mendel Yaklaşımı

Wu ve Mendel [8] tip-1 BK'larla dilsel özetleme işlemini aynı zamanda aralıklı tip-2 BK kullanarak gerçekleştirmiştir. Bölüm 3.2'de önerilen kalite ölçümlerini aralıklı tip-2 BK'ya genişletmişlerdir. Aralıklı tip-2 BK kullanıldığında “eğer ise” yapısındaki özet

$$\text{"Eğer } X_1 \tilde{S}_1^I \text{ ise, } X_2 \tilde{S}_2^I \text{ dir. } [T]"} \quad (3.156)$$

şeklindedir. Eş. 3.156'da tanımlanan özet yapısı, Eş. 3.157'de tanımlanan tip-II niceleyici cümleye eşdeğerdir.

$$\text{"Tüm } \tilde{S}_1^I \text{ } Y(\text{nesneler}) \tilde{S}_2^I \text{ 'dir. } [T]"} \quad (3.157)$$

Bu formdaki yapı ise Niewiadomski [5, 85-88] tarafından tanımlanmış olan niceleyicisi “tüm” olan tip-II niceleyici cümlesine benzerdir. Aralarındaki tek fark, Niewiadomski [5, 85-88] tarafından tanımlanmış özet yapısında $w_g (S_g)$ tip-1 BK ile modellenirken, Mendel ve Wu [8] tarafından önerilen formda aralıklı tip-2 BK ile modellenmektedir. Doğruluk derecesini aralıklı tip-2 BK’lar kullanıldığında tanımlamak için kardinalite ile ilgili tanımlar verilmiştir.

Tanım 3.15.

Aralıklı tip-2 BK ile tanımlanmış $\tilde{S}_1^I$ ’in kardinalitesi Eş. 3.158’de tanımlanmıştır.

$$kard(\tilde{S}_1^I) \equiv [kard(\underline{S}_1), kard(\bar{S}_1)] = \left[\sum_{m=1}^M \mu_{\tilde{S}_1^I}^L(v_1^m), \sum_{m=1}^M \mu_{\tilde{S}_1^I}^U(v_1^m) \right] \quad (3.158)$$

Aralıklı tip-2 BK $\tilde{S}_1^I$ ’in ortalama kardinalitesi

$$OK(\tilde{S}_1^I) = \frac{kard(\underline{S}_1) + kard(\bar{S}_1)}{2} \quad (3.159)$$

olarak tanımlanır [8].

Tanım 3.16.

Aralıklı tip-2 BK’lar ile tanımlanmış $\{\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I, \tilde{S}_2^I, \dots, \tilde{S}_K^I\}$ kardinalitesi Eş. 3.160’da tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} kard(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I, \dots, \tilde{S}_K^I) &\equiv [kard(\underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_K), kard(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_K)] \\ &= \left[\sum_{m=1}^M \min \{ \mu_{\tilde{S}_1^I}^L(v_1^m), \dots, \mu_{\tilde{S}_K^I}^L(v_K^m) \}, \sum_{m=1}^M \min \{ \mu_{\tilde{S}_1^I}^U(v_1^m), \dots, \mu_{\tilde{S}_K^I}^U(v_K^m) \} \right] \end{aligned} \quad (3.160)$$

Aralıklı tip-2 BK $\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I, \dots, \tilde{S}_K^I$ 'lerin ortalama kardinalitesi

$$OK(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I, \dots, \tilde{S}_K^I) = \frac{kard(\underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_K) + kard(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_K)}{2} \quad (3.161)$$

olarak tanımlanır [8].

Tanım 3.15 ve Tanım 3.16 kullanılarak, doğruluk derecesi Eş. 3.162'de tanımlanmıştır.

$$\tilde{T} = \frac{kard(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I)}{kard(\tilde{S}_1^I)} \quad (3.162)$$

$kard(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I)$ ve $kard(\tilde{S}_1^I)$ aralıklı bir değere eşit olduğu için doğruluk derecesi $\tilde{T}$ 'de aralıklı bir değere eşit olacaktır. Fakat $\tilde{T}$ Eş. 3.163'deki gibi basit aralıklı aritmetik işlemle hesaplanamaz. Çünkü pay ve paydada bulunan $\tilde{S}_1^I$ 'de farklı tip gömülü tip-1 BK'lar bulunmaktadır.

$$\tilde{T} \neq \left[\frac{\sum_{m=1}^M \min\{\mu_{\tilde{S}_1^I}^L(v_1^m), \mu_{\tilde{S}_2^I}^L(v_2^m)\}}{\sum_{m=1}^M \mu_{\tilde{S}_1^I}^U(v_1^m)}, \frac{\sum_{m=1}^M \min\{\mu_{\tilde{S}_1^I}^U(v_1^m), \mu_{\tilde{S}_2^I}^U(v_2^m)\}}{\sum_{m=1}^M \mu_{\tilde{S}_1^I}^L(v_1^m)} \right] \quad (3.163)$$

Doğruluk derecesi $\tilde{T}$ aralıklı tip-2 BK'larda "gösterim teorisi" kullanılarak aralıklı değer alacak şekilde hesaplanabilir; fakat bu durum işlem yükünü de beraberinde getirmektedir [8]. Bu nedenle ortalama kardinalite tanımı kullanılarak doğruluk derecesi Eş. 3.164 ile hesaplanır.

$$\tilde{T} = \frac{OK(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I)}{OK(\tilde{S}_1^I)} \quad (3.164)$$

Mendel ve Wu [8] tarafından tip-1 BK özetleme işlemi için tanımlanan kalite ölçümleri aralıklı tip-2 BK içinde kullanılabilir. Fakat, kapsama derecesinde Eş. 3.43'ün Eş. 3.165'deki gibi tanımlanması gerekmektedir.

$$t_m = \begin{cases} 1, & \mu_{\tilde{S}_1^I}^U(v_1^m) > 0 \text{ ve } \mu_{\tilde{S}_2^I}^U(v_2^m) > 0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.165)$$

Mendel ve Wu [8] özet öncül ve ardılının çoklu olduğu durumu da düşünerek Eş. 3.166'daki formu tanımlamışlardır.

$$\text{Eğer } X_1 \tilde{S}_1^I \text{ ve } \dots \text{ ve } X_F \tilde{S}_F^I, \text{ ise } X_{F+1} \tilde{S}_{F+1}^I \text{ ve } \dots \text{ ve } X_K \tilde{S}_K^I \text{ 'dir } [T] \quad (3.166)$$

Eş. 3.166'daki özet formu, Eş. 3.167'de tanımlanan doğruluk derecesi ile değerlendirilir.

$$\tilde{T} = \frac{OK(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I, \dots, \tilde{S}_K^I)}{OK(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I, \dots, \tilde{S}_F^I)} \quad (3.167)$$

Özette yer alan öncül ve ardılların çoklu olduğu durumda kapsama derecesini hesaplamak için t_m :

$$t_m = \begin{cases} 1, & \mu_{\tilde{S}_k^I}^U(v_k^m) > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, K \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.168)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.16.

Doğruluk derecesinin hesaplanmasında benzer sorun tip-2 BK'larla yapılan çalışmalarda da karşılaşılmaktadır. Tip-1 BK'larda kullanılan doğruluk derecesi

aralıklı tip-2 BK'larda kullanılan doğruluk derecesinin özel bir halidir. Aralıklı tip-2 BK'larda birincil üyelik derecesi $J_x = [\mu_{\tilde{A}'}^L(x), \mu_{\tilde{A}'}^U(x)]$ şeklinde ifade edilir. Eğer $\mu_{\tilde{A}'}^L(x) = \mu_{\tilde{A}'}^U(x)$ olduğu takdirde aralıklı tip-2 BK, tip-1 BK'ya dönüşmektedir. Niewiadomski tarafından önerilen doğruluk derecesi eşitlik 3.153'de verilmiştir. Alt ve üst üyelik dereceleri birbirine eşit olduğu takdirde Eş. 3.154-Eş.3.155:

$$r = \sum_{m=1}^M \min \{ \mu_{S_1}(v_1^m), \mu_{S_2}(v_2^m) \} \quad (3.169)$$

Eş. 3.169'a dönüşmektedir. Eş. 3.169 kullanılarak Eş. 3.153:

$$\tilde{T} = \mu_Q \left(\frac{\sum_{m=1}^M \min \{ \mu_{S_1}(v_1^m), \mu_{S_2}(v_2^m) \}}{\sum_{m=1}^M \mu_{S_1}(v_1^m)} \right) \quad (3.170)$$

Eş. 3.170'e dönüşmektedir.

Benzer sorun Mendel ve Wu tarafından Eş. 3.164'de önerilen doğruluk derecesi içinde geçerlidir. Eğer Eş. 3.164 açık şekilde yazıldığı takdirde:

$$\tilde{T} = \frac{\frac{\sum_{m=1}^M \min \{ \mu_{S_1}^L(v_1^m), \mu_{S_2}^L(v_2^m) \} + \sum_{m=1}^M \min \{ \mu_{S_1}^U(v_1^m), \mu_{S_2}^U(v_2^m) \}}{2}}{\frac{\sum_{m=1}^M \mu_{S_1}^L(v_1^m) + \sum_{m=1}^M \mu_{S_1}^U(v_1^m)}{2}} \quad (3.171)$$

Eş. 3.171 elde edilir.

$\mu_{\tilde{S}_1'}^L(v_1^m) = \mu_{\tilde{S}_1'}^U(v_1^m) = \mu_{S_1}(v_1^m)$ ve $\mu_{\tilde{S}_2'}^L(v_2^m) = \mu_{\tilde{S}_2'}^U(v_2^m) = \mu_{S_2}(v_2^m)$ olduğu takdirde Eş.

3.171, Eş. 3.172'ye dönüşmektedir.

$$T = \frac{\sum_{m=1}^M \min\{\mu_{S_1}(v_1^m), \mu_{S_2}(v_2^m)\}}{\sum_{m=1}^M \mu_{S_1}(v_1^m)} \quad (3.172)$$

Aralıklı tip-2BK'ların alt ve üst üyelik dereceleri birbirine eşit olduğu takdirde, tip-2 BK'larla dilsel özetleme işleminde tanımlanmış olan doğruluk dereceleri, tip-1 BK'larla dilsel özetleme işleminde kullanılan doğruluk derecesine dönüşmektedir. Örnek 3.1 ve Örnek 3.2 tip-1 BK'larla dilsel özetlemede kullanılan doğruluk derecesinin tutarsız olduğunu göstermiştir. Aralıklı tip-2 BK'larla dilsel özetlemede kullanılan doğruluk derecesi tip-1 BK'larla dilsel özetlemede kullanılan doğruluk derecesinin genelleştirilmiş bir hali olduğu için benzer sorun aralıklı tip-2 BK'larla dilsel özetlemede kullanılan doğruluk derecesi içinde geçerlidir.

Magnus Problemi için Rajati ve ark. Yaklaşımı

Zadeh bulanık niceleyicilerin kullanıldığı Magnus problemi olarak adlandırılan bir problemi ele almıştır. Bu problemde Magnus bir İsveçlidir. İsveçliler ile ilgili yaygın olarak bilenen “Çoğu İsveçli uzun boyludur.” ve “Çoğu uzun boylu İsveçliler sarışıdır.” ifadeleridir. Zadeh, “Magnus bir İsveçli olduğuna göre Magnus’un sarışın olmasının olasılığı nedir?” sorusunu cevaplandırmaya çalışmıştır. Bu nedenle Eş. 3.173-Eş. 3.174’de tanımlanan ifadeleri kullanarak bazı çıkarımlar yapmıştır.

$$Q_1 S_1, S_2 'dir \quad (3.173)$$

$$Q_2 (S_1 \text{ ve } S_2), S_3 'dir \quad (3.174)$$

Eş. 3.173-Eş. 3.174 kullanılarak Eş. 3.175-Eş. 3.176 elde edilir.

$$Q_1 \odot Q_2 S_1, (S_2 \text{ ve } S_3) 'dir \quad (3.175)$$

$$Enaz(Q_1 \odot Q_2) S_1, S_3 'dir \quad (3.176)$$

Eş. 3.175-Eş. 3.176'da $\odot$ çarpımı, Q_1 ve Q_2 çoğu niceleyicisi, S_1 kümesi İsveçlileri, S_2 kümesi uzun ve S_3 kümesi sarışınları göstermektedir. Genişleme prensibi kullanılarak Eş. 3.177 elde edilir.

$$\mu_{Q_1 \odot Q_2}(t) = \sup_{t=xz} \left(\min(\mu_{Q_1}(x), \mu_{Q_2}(z)) \right) \quad (3.177)$$

En az, niceleyiciler üzerinde bir operatör olarak tanımlanmıştır.

$$\mu_{En\ az}(x) = \sup_{z \leq x} \mu_Q(z) \quad x, z \in [0,1] \quad (3.178)$$

Verilen bilgiler kullanılarak “*En az* ($Q = \text{çoğu} \odot \text{coğu}$) İsveçli uzun ve sarışındır” ifadesi elde edilir. Diğer bir ifadeyle uzun ve sarışın İsveçlilerin oranı “en az $\text{çoğu} \odot \text{çoğu}$ ” kadardır. Bu nedenle Magnus’un sarışın olmasının olasılığı Eş. 3.179’da tanımlanmıştır.

$$\Pr(\text{Magnus sarışındır}) = \text{çoğu} \odot \text{çoğu} \quad (3.179)$$

Rajati ve ark. Magnus problemini aralıklı tip-2 BK kullanarak incelemişlerdir [89]. Magnus probleminde yer alan niceleyicileri ve kümeleri aralıklı tip-2 BK ile modellemişlerdir. Zadeh tarafından ele alınan örnekte İsveçlilerin çoğunun uzun boylu olduğu bilinmektedir. Belli bir oran uzun boylu ise bu oranın tümleyeni doğal olarak uzun boylu değildir. Bu ifadenin niceleyici cümle ile gösterimi Eş. 3.180’de verilmiştir.

$$\neg Q S_1, \neg S_2 \text{ 'dir} \quad (3.180)$$

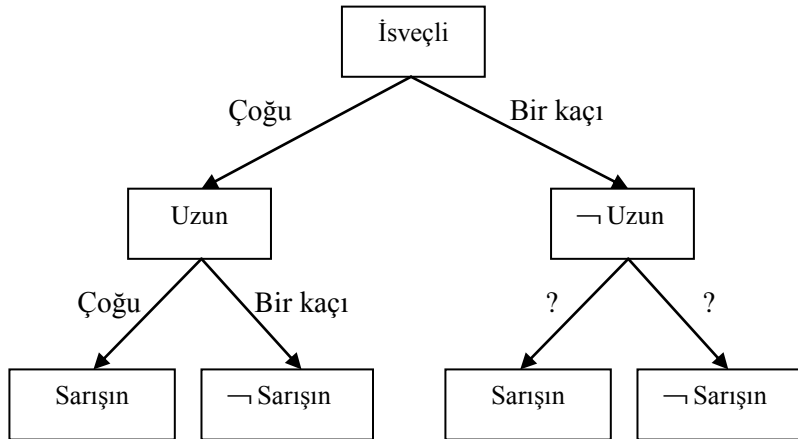
$\neg Q$, Q niceleyicisinin tümleyeni olup Eş. 3.181’de tanımı verilmiştir.

$$\mu_{\neg Q}(x) = \mu_Q(1-x), \quad x \in [0,1] \quad (3.181)$$

$\neg S_2$ 'de S_2 kümesinin tümleyeni olup Eş. 3.182'de tanımı verilmiştir.

$$\mu_{\neg S_2}(v_2) = 1 - \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.182)$$

Eş. 3.180'de verilen niceleyici cümle “Birkaç İsveçli uzun boylu değildir ” anlamına gelmektedir. “Birkaç” niceleyicisi “çoğu” niceleyicisinin karşıtıdır. Zadeh'in belirtmiş olduğu iki ifade “Çoğu İsveçli uzun boyludur.” ve “Çoğu uzun boylu İsveçliler sarışındır.”. Eş. 3.180 kullanılarak “Birkaç İsveçli uzun değildir.” ve “Birkaç uzun İsveçli sarışın değildir.” ifadeleri elde edilebilir. Fakat, Zadeh tarafından verilen iki ifadeye göre uzun olmayan İsveçlilerin sarışın olup olmamaları hakkında bir şey söylenemez. Zadeh tarafından verilen iki ifadeyle elde edilen tüm ifadeler Şekil 3.14'de gösterilmiştir.



Şekil 3.14. İsveçliler arasında sarışınların dağılımının dilsel olarak ifadesi

Ele alınan problem Magnus'un sarışın olmasının olasılığıydı. Bu nedenle tüm sarışınların oranının bilinmesi gerekmektedir. Uzun olmayan İsveçlilerin tümünün sarışın olduğu yada hiçbirinin sarışın olmadığı varsayılın. Bu durumda Magnus'un sarışın olmasının olasılığı üst ve alt olasılık değerleriyle aralıklı bir şekilde Eş. 3.183-Eş. 3.184 tanımlanmıştır.

$$\Pr^-(\text{Magnus sarışındır}) = \frac{\text{Çoğu} \times \text{Çoğu} + \text{Bir kaç} \times \text{Hiç biri}}{\text{Çoğu} + \text{Bir kaç}} \quad (3.183)$$

$$\text{Pr}^+ (\text{Magnus sarışındır}) = \frac{\text{Çoğu} \times \text{Çoğu} + \text{Bir kaç} \times \text{Tüm}}{\text{Çoğu} + \text{Bir kaç}} \quad (3.184)$$

Tüm ve hiçbir niceleyicileri Eş. 3.185-Eş. 3.186’da tanımlanmıştır.

$$\mu_{\text{Tüm}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.185)$$

$$\mu_{\text{Hiç biri}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.186)$$

Eş. 3.183-Eş. 3.184 tanımlanan alt ve üst olasılık değerlerinin hesaplanmasında kullanılan eşitlikte yer alan niceleyiciler aralıklı tip-2 BK ile modellenmiştir. Bu nedenle bu değerlerin hesaplanabilmesi için Mendel ve Wu tarafında önerilen dilsel ağırlıklı ortalama operatörü kullanılır [90-92]. $\tilde{X}_i^I$ aralıklı tip-2 BK’lar ve aralıklı tip-2 ağırlıklar $\tilde{W}_i^I$ olarak tanımlansın. Dilsel ağırlıklı ortalama operatörü (DAO) Eş. 3.187’de tanımı verilmiştir.

$$\tilde{Y}_{DAO}^I = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^I \times \tilde{X}_i^I}{\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^I} = [\underline{Y}_{DAO}, \bar{Y}_{DAO}] \quad (3.187)$$

Eş. 3.187’de tanımlanan $\underline{Y}_{DAO}$ ve $\bar{Y}_{DAO}$ Eş. 3.188-Eş. 3.189’da tanımlanmıştır.

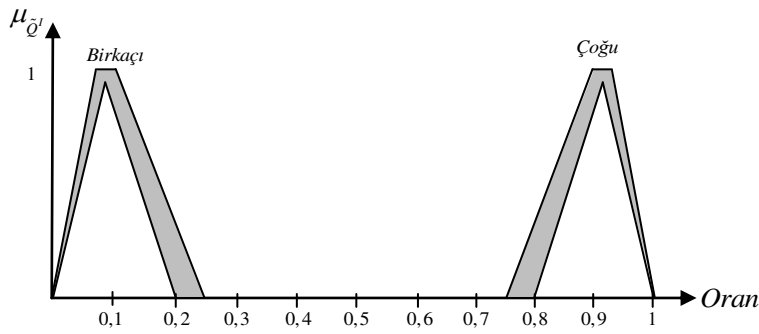
$$\underline{Y}_{DAO} = \min_{\forall W_i \in [\underline{W}_i, \bar{W}_i]} \frac{\sum_{i=1}^n W_i \times \underline{X}_i}{\sum_{i=1}^n W_i} \quad (3.188)$$

$$\bar{Y}_{DAO} = \min_{\forall W_i \in [\underline{W}_i, \bar{W}_i]} \frac{\sum_{i=1}^n W_i \times \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^n W_i} \quad (3.189)$$

Eş. 3.188-Eş. 3.189 kullanılarak Magnus'un sarışın olmasının olasılığının alt ve üst değerleri aralıklı tip-2 BK olarak bulunur. Bulunan değerlerde durulaştırma işlemi yapılarak alt ve üst tip-1 BK'ların merkezleri bulunur. Daha sonra bulunan değerlerin ortalaması alınır yada Magnus'un sarışın olmasının olasılığı dilsel olarak ifade edilir. Dilsel ifadelerin her biri aralıklı tip-2 BK ile modellenir. Magnusun sarışın olmasının alt ve üst olasılıklarıyla dilsel ifadelerin benzerlikleri ölçülerek "Magnus'un sarışın olması kuvvetle muhtemeldir" gibi sonuçlarda çıkarılabilir.

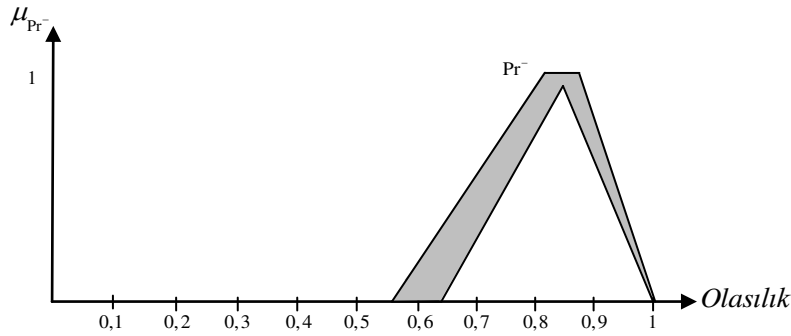
Örnek 3.17.

Magnus probleminde kullanılan birkaçı ve çoğu niceleyicileri aralıklı tip-2 BK olarak Şekil 3.15'deki gibi tanımlansın.

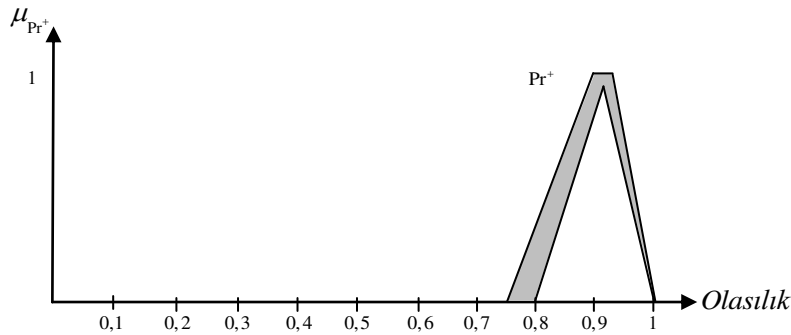


Şekil 3.15. Birkaçı ve çoğu niceleyicisi

Eş. 3.188-Eş. 3.189 alt ve üst olasılık değerleri aralıklı tip-2 BK olarak Şekil 3.16 ve Şekil 3.17'deki gibi bulunur. Alt olasılık değerinin alt ve üst BK'larının merkezleri $[0,79;0,81]$ olarak bulunur. Bu değerlerin ortalaması 0,80'dir. Üst olasılık değerinin alt ve üst BK'larının merkezleri $[0,88;0,90]$ olarak bulunur. Bu değerlerin ortalaması 0,89'dur. Elde edilen sonuçlara göre "Yaklaşık olarak %80 ve %89 olasılıkla Magnus sarışındır." gibi bir önerme elde edilir.



Şekil 3.16. Magnus'un sarışın olmasının alt olasılık değeri



Şekil 3.17. Magnus'un sarışın olmasının üst olasılık değeri

Aralıklı tip-2 BK'larla dilsel özetleme işleminde kullanılan doğruluk derecesi skalar kardinalite temellidir. Skalar kardinalite temelli doğruluk derecesinin kullanımı, değerlendirme işleminde bazı tutarsız sonuçların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Literatür incelendiğinde, aralıklı tip-2 BK'larla özetleme işleminde bulanık kardinalite temelli doğruluk derecesi ile ilgili bir çalışmaya rastlanmamıştır [89].

3.2. Eğer-İse Yapısındaki Kurallar

Dilsel özetleme işleminde kullanılan özet yapılarından bir tanesi de “eğer-ise” özet yapısıdır. “Eğer ise” yapısı bilgiyi ifade etmekte kullanılan uygun bir yöntemdir. “Eğer ise” yapısı değişik anlam ve kullanımları kapsayabilir. Bu nedenle “eğer ise” yapısı yorumlanmasına bağlı olarak farklı şekilde gösterilebilir. “Eğer ise” yapısı sıklıkla bulanık kurallarla çıkarım işleminde kullanılmaktadır. Fakat, “eğer ise” yapısı kullanılarak elde edilen bulanık kuralların anlamına yönelik yapılan çalışma

sayısı oldukça azdır. Bu nedenle Dubois ve Prade “eğer ise” yapısındaki bulanık kuralların farklı anlamlarını araştırmışlar ve bulanık kuralları bu anlamlara göre modellemişlerdir [39].

Bulanık kurallar "Eğer X_1 S_1 ise, X_2 S_2 'dir." yapısındaki kurallardır. Bu ifadede S_1 ve S_2 bulanık kümeler, X_1 , X_2 değişkenler ve V_1 , V_2 tanım kümeleri olup, $S_1 \times S_2$ kartezyen çarpımdır [93, 94]. “Eğer ise” yapısındaki kuralların öncüllerinin bulanık olması, çıkarım mekanizmasına temel sağlamaktadır. Bu nedenle, bulanık kurallar koşullu önerme operatörleri yerine kesişim operatörleriyle modellenmiştir. Yaklaşık çıkarsama temelli çalışmalarda ise, bulanık kurallar koşullu önerme operatörleriyle modellenmiştir [95-97].

S_1 ve S_2 kesin küme olduğu durumda, kural X_1 ve X_2 arasındaki kısmi ve belirsiz bir ilişkiyi göstermektedir. Bu ilişki Eş. 3.190’da gösterilmiştir.

$$\text{Eğer } \mu_{S_1}(X_1)=1 \text{ ise } \mu_{S_2}(X_2)=1 \text{ 'dir.} \quad (3.190)$$

(v_1, v_2) , (X_1, X_2) değişkenlerinin aldığı değerler olarak tanımlansın. $\mu_{S_1}(v_1)=1$ ve $\mu_{S_2}(v_2)=1$ şartını sağlayan (v_1, v_2) değerleri Eş. 3.190 ile uyumludur. $\mu_{S_1}(v_1)=1$ ve $\mu_{S_2}(v_2)=0$ şartını sağlayan (v_1, v_2) değerleri ise Eş. 3.190 ile uyumsuzdur. $\mu_{S_1}(v_1)=0$ olduğu takdirde, (v_1, v_2) değerleri için bir şey söylenemez. Bu durumda $\mu_{S_2}(v_2)$ Eş. 3.190’a göre sınırlandırılmamıştır. “Eğer çalışan yaşı genç ise aylık kazancı fazladır” kuralı örnek olarak incelensin. Bu kuralda çalışanın yaşı ve aylık kazancı değişkenler, bu değişkenlerin aldığı değer çifti ise (v_1, v_2) olsun. Eğer (v_1, v_2) , “genç” ve “kazancı fazla” kümelerinin tanım kümelerinde tanımlanan değerlere eşit ise $\mu_{S_1}(v_1)=1$ ve $\mu_{S_2}(v_2)=1$ olur. Bu durumu sözel olarak ifade etmek gerekirse genç çalışanların aylık kazançları fazladır. Bu şartı sağlayan (v_1, v_2) değer çiftleri pozitif örneklerdir. Eğer v_1 genç kümesinin tanım kümesindeki değere

eşit, v_2 ise fazla kümesinin tanım kümesindeki bir değere eşit değilse $\mu_{S_1}(v_1)=1$ ve $\mu_{S_2}(v_2)=0$ olur. Bu durumun sözel olarak ifadesi genç çalışanların aylık kazançları fazla değildir ve kuralla çelişmektedir. Çünkü kural genç çalışanların aylık kazançlarının fazla olması gerektiğini belirtmektedir. Bu şartı sağlayan (v_1, v_2) değer çiftleri negatif örneklerdir. Eğer v_1 genç kümesinin tanım kümesindeki değere eşit değil ise bu durumda $\mu_{S_1}(v_1)=0$ ve $\mu_{S_2}(v_2)$ sınırlandırılmamış olur. Bu durumun sözel olarak ifadesi eğer çalışan genç değilse aylık kazancının fazla olup olmaması kuralı etkilemezdir. Bu şartı sağlayan (v_1, v_2) değer çiftleri ilgisiz örneklerdir.

R kümesi denklem 3.190 ile uyumlu olan (v_1, v_2) , (X_1, X_2) değişkenlerinin aldığı değerlerin oluşturduğu küme olsun. Bu küme pozitif örnekleri kapsamakta, pozitif ve ilgisiz örneklerin birleşimi (yada negatif örneklerin tümleyeni) olan küme tarafından kapsanmaktadır. Diğer bir deyişle $S_1 \times S_2 \subseteq R \subseteq \bar{S}_1 + S_2$ ifadesine denktir. $S_1 \times S_2$ kartezyen çarpım olup pozitif örnekleri göstermektedir. $S_1 \times \bar{S}_2$ kartezyen çarpımı negatif örnekleri göstermektedir. $S_1 \times \bar{S}_2$ işleminin tümleyeni $\bar{S}_1 + S_2$ ’e eşittir (+ işlemi kartezyen çarpımın tersidir). Eş. 3.191’de bu durum üyelik fonksiyonlarıyla ifade edilmiştir.

$$\mu_{S_1}(v_1) \wedge \mu_{S_2}(v_2) \leq \mu_R(v_1, v_2) \leq Ng(\mu_{S_1}(v_1)) \vee \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.191)$$

$\wedge$ kesişim operatörü ($a \wedge b = 1$ ancak ve ancak $a = b = 1$, $a \wedge b = 0$ diğer durumlarda), Ng tümleyen ($Ng(a) = 1$ ancak ve ancak $a = 0$, $Ng(a) = 0$ ancak ve ancak $a = 1$) ve $\vee$ birleşim operatörüdür ($a \vee b = 0$ ancak ve ancak $a = b = 0$, $a \vee b = 1$ diğer durumlarda). Eş. 3.191’de görüldüğü gibi kuralın alt sınırı kesişim operatörüyle gösterilir (" $X_1 \in S_1$ ve $X_2 \in S_2$ "). Kuralın üst sınırı ise koşullu önerme operatörü yardımıyla gösterilir (" $X_1 \notin S_1$ ve $X_2 \in S_2$ "). Bu yaklaşım bulanık kuralların koşullu olaylarla modellenmesini sağlamıştır. Dubois ve Prade koşullu olabilirlik dağılımı

yardımla Eş. 3.191'deki eşitsizlikleri iki farklı şekilde incelemiştir [39]. Birinci eşitsizlik Eş. 3.192'de verilmiştir.

$$\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \geq \mu_{S_1}(v_1) \wedge \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.192)$$

Eş. 3.192'ye göre X_1 değişkeni S_1 kümesinin tanım kümesinde yer alan değerlere eşit olursa X_2 değişkeni S_2 kümesindeki tüm v_2 değerlerine eşit olabilir. Bu durumda $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) = 1$ 'dir. Eğer (v_1, v_2) çifti $v_1 \in S_1$ ve $v_2 \notin S_2$ (negatif örnek) ayrıca $v_1 \notin S_1$ şartlarını sağlıyor ise (ilgisiz örnek) Eş. 3.192 yardımıyla hiçbir bilgi elde edilemez; çünkü koşullu olabilirlik dağılımı tanımı gereği $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \geq 0$ şartını her zaman için sağlamaktadır. Eş. 3.192 ile sadece pozitif örnekler modellenabilmektedir. Eş. 3.192'yi yorumlamak gerekirse “Eğer $X_1 \in S_1$ ise X_2 için S_2 kümesindeki tüm değerler mümkündür” ifadesi ortaya çıkar.

Eş. 3.191'den elde edilen ikinci eşitsizlik, Eş. 3.193'de verilmiştir.

$$\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \leq Ng(\mu_{S_1}(v_1)) \vee \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.193)$$

Eş. 3.193'e göre v_1 'in S_1 kümesine ait olması ve v_2 'nin S_2 kümesine ait olmaması $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \leq 0$ eşitsizliğini ortaya çıkaracağı için olası bir durum değildir. Bu nedenle v_1 'in S_1 kümesine ait olması durumunda v_2 'nin S_2 kümesine ait olmaması imkansızdır. v_1 'in S_1 kümesine ait olmaması durumunda v_2 'nin alabileceği değerler kısıtlanmamaktadır $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \leq 1$. Eş. 3.193'ü yorumlamak gerekirse “Eğer $v_1 \in S_1$ ise X_2 değişkenin alacağı değer kesinlikle S_2 kümesinin tanım kümesinin içinde olması gerekir” ifadesi ortaya çıkar.

3.2.1. Bulanık kuralların modellenmesi

Bulanık kurallar taşıdıkları anlamlara göre farklı operatörlerle modellenmektedir. Bu bölümde, koşullu önerme operatörüyle modellenen kesin kural ve dereceli kural, kesişim operatörüyle modellenen olabirlikli ve dereceli olmayan kuralların gösterimleri incelenecektir. Kuralların modellenmesine geçilmeden önce konunun daha iyi anlaşılabilmesi için olabirlik teoremiyle ilgili kısa bir alt bölüm verilmiştir.

Olabilirlik Teorisi

$\mathcal{U}$, x değişkeninin alabileceği değerlerin kümesi olsun. x değişkeni ele alınan özelliğin alabileceği bilinmeyen değerleri göstermektedir. x değişkeni Ali adlı bir kişinin yaşını göstere. $\mathcal{U}$ kümesinde tanımlı olabilirlik dağılımı $\pi_x(\zeta)$, x değişkeninin $\mathcal{U}$ kümesinde yer alan ζ değerine eşit olmasının olabilirliğini göstermekte olup $[0,1]$ aralığında bir değere atayan fonksiyondur. $\pi_x(\zeta)$, var olan bilgiler ışığında x değişkeninin alabileceği mümkün değerleri kısıtlayan esnek bir kısıttır [98, 99].

$$\pi_x(\zeta) = 0, \quad x = \zeta \text{ mümkün değil} \quad (3.194)$$

$$\pi_x(\zeta) = 1, \quad x = \zeta \text{ eşit olmasına bir engel yoktur} \quad (3.195)$$

x değişkeninin alabileceği mümkün değerler ile ilgili kısıtlamadaki esneklik bazı ζ değerleri için $\pi_x(\zeta)$ 0 ile 1 arasında değer almasıyla modellenir. Ayrıca, $\zeta \neq \zeta'$ olduğu takdirde $\pi_x(\zeta) = 1$ ve $\pi_x(\zeta') = 1$ eşitliklerine izin verilmektedir. $\pi_x(\zeta)$, $x = \zeta$ olmasının olabilirlik düzeyini göstermektedir. Bazı ζ değerlerinin olabilirlik düzeyi diğerlerine göre daha fazladır. x değişkeni Ali adlı bir kişinin yaşını göstere. Ali'nin yaşıyla ilgili 2 farklı durum söz konusu olsun. İlk durumda Ali'nin yaşı 20, diğer durumda 35 olsun. $\zeta \propto \zeta'$ ($\propto$ tercih ilişkisini göstermekte olup ζ' , ζ 'ya tercih edilmektedir) olduğu takdirde $\pi_x(\zeta) \leq \pi_x(\zeta')$ şartı sağlanır. Bu eşitsizliğin anlamı,

var olan bilgilere göre x değişkeninin alacağı mümkün değer olarak ζ' , ζ 'ya tercih edilmektedir [99].

x değişkenin $\mathcal{U}$ 'nun alt kümesi A kümesine ait olmasının eğiliminin tahmin edilmesi için olabilirlik dağılımıyla ilgili fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlardan bir tanesi olabilirlik ölçümüdür [100].

$$\Pi(A) = \sup_{\zeta \in A} \pi_x(\zeta) \quad (3.196)$$

Bu ölçüm x 'in mümkün değerleri ile ilgili ne bilindiği ve $\zeta \in A$ ifadesinin tutarlılığını tahmin etmektedir. Bundan dolayı A kümesinin en büyük olabilirlik değerine sahip eleman(lar) aranmaktadır. Olabilirlik dağılımıyla ilgili diğer bir ölçüm ise gereklilik ölçümüdür.

$$Nec(A) = 1 - \Pi(\bar{A}) = \inf_{\zeta \notin A} \{1 - \pi_x(\zeta)\} \quad (3.197)$$

Bu ölçüm A kümesinin dışındaki değerlerin daha düşük bir olabilirlik derecesine sahip olduğunu belirtmektedir. Diğer bir deyişle bu ölçüm olabilirlik derecesi yüksek değerlerin A kümesinde yer alan elemanlar olduğunu belirtmektedir. Bu durum da x 'in A kümesine ait olmasını daha kesin yapmaktadır.

Olabilirlik ve gereklilik ölçümlerinin yanı sıra olabilirlik dağılımıyla ilgili iki fonksiyon daha tanımlanmıştır. Bunlar garantili olabilirlik ölçümü ve potansiyel kesinlik ölçümüdür. Garantili olabilirlik ölçümü Eş. 3.198'de tanımlanmıştır [98, 99].

$$\Delta(A) = \inf_{\zeta \in A} \pi_x(\zeta) \quad (3.198)$$

Bu ölçüm A kümesindeki tüm değerlerin x için mümkün olduğunu belirtmektedir. Diğer bir deyişle A kümesindeki herhangi bir değer x için en az mümkün olmasının

derecesi $\Delta(A)$ 'dır. Önerilen son ölçüm olan potansiyel kesinlik ölçümü Eş. 3.199'da tanımlanmıştır.

$$\nabla(A) = 1 - \Delta(A) = \sup_{\zeta \notin A} \{1 - \pi_x(\zeta)\} \quad (3.199)$$

Bu ölçümün A kümesinin tümleyeninde bulunan en az bir elemanın daha düşük olabilirlik derecesine sahip olduğunu belirtmektedir.

Kesinlik ve Olabilirlik

Olabilirlik dağılımı bazı durumlarda $\mathcal{U}$ 'nun alt kümelerinin nitelikleriyle elde edilir. A , $\mathcal{U}$ 'nun kesin bir alt kümesi olsun. Kesinlik ve olabilirlik ile ilgili iki farklı durum vardır.

i) x 'in alacağı değer A 'nın içindedir (A , x için kesindir). Bu ifadenin anlamı x 'in A 'nın dışında bir değer alması mümkün değildir. $\forall \zeta \notin A$, $\pi_x(\zeta) = 0$ olduğu takdirde π_x , A kümesinin tanımlı olduğu aralıkta belirtilmemiştir.

$$\forall \zeta \in \mathcal{U}, \pi_x(\zeta) \leq \mu_A(\zeta) \quad (3.200)$$

ii) x için A mümkün bir aralıktır (A , x için mümkündür). Bu ifadenin anlamı $\forall \zeta \in A$ $\pi_x(\zeta) = 1$ olduğu takdirde π_x A kümesinin tanımlı olduğu aralığın dışında belirtilmemiştir.

$$\forall \zeta \in \mathcal{U}, \mu_A(\zeta) \leq \pi_x(\zeta) \quad (3.201)$$

İlk durumda belirsizlik x 'in alacağı değerleri içeren A altkümesinin sınırlandırılmasıyla belirtilir. A altkümesi ne kadar büyük olursa x 'in alacağı değerler

o kadar belirsizdir, A altkümesi ne kadar küçük olursa x 'in alacağı değerler hakkında daha çok bilgi elde edilir.

Eğer olabilirlik yada kesinlik tam değilse α sıfırla bir arasında herhangi bir değer alır. Eş. 3.200 ve Eş. 3.201'in genelleştirilmiş hali aşağıda verilen maddelerde gösterilmiştir.

- i) “ x 'in alacağı değerin A 'nın içinde olması en az α derecesiyle kesindir” ifadesi x 'in A 'nın dışındaki bir değer alması en fazla $1-\alpha$ (tümleyen) derecesiyle mümkündür. $\forall \zeta \notin A, \pi_x(\zeta) \leq 1-\alpha$ olduğu takdirde Eş. 3.202 ile gösterilir.

$$\forall \zeta \in \mathcal{U}, \pi_x(\zeta) \leq \max(\mu_A(\zeta), 1-\alpha) \quad (3.202)$$

- ii) “En az α derecesiyle A, x için mümkün bir aralıktır” ifadesi $\forall \zeta \in A, \pi_x(\zeta) \geq \alpha$ olarak gösterilir. Bu durum Eş. 3.203'de belirtilmiştir.

$$\forall \zeta \in \mathcal{U}, \min(\mu_A(\zeta), \alpha) \leq \pi_x(\zeta) \quad (3.203)$$

Bulanık Kural Çeşitleri

Kurallarda dilsel etiketler bulanık kümelerle ifade edildiği takdirde üyelik dereceleri sıfırla bir arasında herhangi bir değere eşit olabilir. S_1 kümesi bulanık küme olduğunda, S_1 kümesinin elemanları özde yada destekte yer alabilir. Eğer X_1 değişkeninin aldığı değerler S_1 bulanık kümesinin özünde değil fakat öze çok yakın değerlere eşitse X_2 değişkenin alacağı mümkün değerler S_2 kümesinden çok farklı olmayan alt kümelerde yer alır. Bu durumda S_2 kümesini değiştirmenin yolları kurallı modellemeye kullanılan yöntemlere bağlıdır.

Kesin Kural: Koşullu önerme operatörüyle modellenen ilk kural olup “ X_1 ne kadar çok S_1 ise X_2 ’nin S_2 olması daha kesindir” yapısındadır. Bu kuralın yorumlanması $\forall v_1, X_1 = v_1, X_2$ değişkenin alacağı değerlerin S_2 kümesinin tanım kümesi içinde yer alması en az $\mu_{S_1}(v_1)$ kadar kesindir. $X_1 = v_1$ iken, X_2 değişkenin alacağı değerlerin S_2 kümesinin tanım kümesi içinde yer almamasının olabilirliği $1 - \mu_{S_1}(v_1)$ ’dir. Bundan dolayı X_1 ne kadar çok S_1 ise X_2 değişkenin alacağı değerin S_2 kümesinin tanım kümesinin dışında olması o kadar az mümkündür; yani, X_2 değişkenin alacağı değer S_2 kümesinin tanım kümesindedir. Bu ifadenin koşullu olabilirlik dağılımıyla ifade edilmesi Eş. 3.204’de verilmiştir.

$$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \leq \max(1 - \mu_{S_1}(v_1), \mu_{S_2}(v_2)) \quad (3.204)$$

Eş. 3.204’de belirtilen kısıtlayıcı ifade Kleene-Dienes koşullu önerme operatörüyle modellenir $(a \rightarrow b = \max(1 - a, b))$.

S_1 kümesinin kesin küme olması özel bir durumdur. Bu durumda Eş. 3.204, Eş. 3.205’e dönüşmektedir.

$$\begin{aligned} \forall v_1 \in S_1, \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) &\leq \mu_{S_2}(v_2) \\ \forall v_1 \notin S_1, \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) &\text{ kısıtlanmamış} \end{aligned} \quad (3.205)$$

Dereceli Kural: Koşullu önerme operatörüyle modellenen ikinci kural olup “ X_1 ne kadar çok S_1 ise X_2 de o kadar çok S_2 ’dir” yapısındadır. Bu kuralın anlamı “ X_1 değişkenin aldığı değerin S_1 bulanık kümesine aitlik derecesi ne kadar fazla ve X_2 değişkenin aldığı değerle, X_1 değişkenin aldığı değer o kadar çok ilişki halinde ise, X_2 değişkenin aldığı değerin S_2 bulanık kümesine aitlik derecesi o kadar fazladır.”

şeklindedir. Koşullu olabilirlik dağılımı yardımıyla bu ifade Eş. 3.206’da modellenmiştir.

$$\forall v_1 \in V_1, \mu_{S_1}(v_1) \otimes \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \leq \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.206)$$

Eş. 3.206’da belirtilen ifadede $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) = \mu_R(v_1, v_2)$ olup R (Residuated)- tip koşullu önerme operatörüyle modellenir.

$$\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) = \mu_R(v_1, v_2) = \sup \left\{ \delta \in [0, 1] \mid \mu_{S_1}(v_1) \otimes \delta \leq \mu_{S_2}(v_2) \right\} \quad (3.207)$$

t-norm olarak minimum alındığı takdirde Eş. 3.206 Gödel koşullu önermesiyle modellenir. $\min(a, t) \leq t \Leftrightarrow t \leq a \rightarrow b \quad (\rightarrow \text{ Gödel koşullu önermesini simgelemektedir) eşitliğini kullanarak Eş. 3.206, Eş. 3.208’deki gibi ifade edilebilir.}$

$$\forall v_1 \in V_1, \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \leq \mu_{S_1}(v_1) \rightarrow \mu_{S_2}(v_2) = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } \mu_{S_1}(v_1) \leq \mu_{S_2}(v_2) \\ \mu_{S_2}(v_2), & \text{Eğer } \mu_{S_1}(v_1) > \mu_{S_2}(v_2) \end{cases} \quad (3.208)$$

Eğer X_1 ve X_2 arasında kesin bir ilişki var ise kuralı modellemek için Rescher-Gaines koşullu önerme operatörü kullanılır.

$$\forall v_1 \in V_1, \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \leq \mu_{S_1}(v_1) \rightarrow \mu_{S_2}(v_2) = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } \mu_{S_1}(v_1) \leq \mu_{S_2}(v_2) \\ 0, & \text{Eğer } \mu_{S_1}(v_1) > \mu_{S_2}(v_2) \end{cases} \quad (3.209)$$

Olabilirlikli Kural: Kesişim operatörüyle modellenen ilk kural olup “ X_1 ne kadar çok S_1 ise X_2 ’nin S_2 olması daha çok mümkündür” şeklinde ifade edilir. Bu tip kurala “Hava ne kadar çok bulutlu ise, yağmur yağması daha çok mümkündür” örnek olarak verilebilir.

Bu kuralın yorumlanması “ $\forall v_1 \in V_1$, eğer $X_1 = v_1$ ise, en az $\mu_{S_1}(v_1)$ olabilirlikle S_2 , X_2 için bir aralıktır”. $X_1 = v_1$ olduğu takdirde, kural Eş. 3.210’da belirtilen kısıtla modellenir.

$$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, \min(\mu_{S_1}(v_1), \mu_{S_2}(v_2)) \leq \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \quad (3.210)$$

$\mu_{S_1}(v_1)$, S_2 kümesindeki değerlerin olabilirlik derecelerinin alt sınırıdır. S_2 kümesindeki değerler X_2 değişkeni için en az $\mu_{S_1}(v_1)$ derecesinde olabilir değerlerdir. Bulanık kontrolle ilgili yapılan çalışmalarda, Mamdani ve Assilian ve Mamdani çıkarımını kullananlar Eş. 3.210 verilen eşitsizliği, bulanık kuralın yorumlanmasını dikkate almadan eşitlik haline dönüştürüp çıkarım işlemini gerçekleştirmişlerdir.

Dereceli olmayan kural: Kesişim operatörüyle modellenen ikinci kuraldır. Eş. 3.206, $\mu_{S_2}(v_2)$ ve $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1)$ yer değiştirdiği takdirde Eş. 3.210’a benzemektedir. Eş. 3.206’ya eş değer olan Eş. 3.208 koşullu olabilirlik dağılımının $(\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1))$ koşullu önerme operatörü tarafından üstten sınırlanması nedeniyle Eş. 3.204’e benzemektedir. Eş. 3.204’de $\mu_{S_2}(v_2)$ ve $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1)$ yer değiştirdiği takdirde Eş. 3.211 elde edilir.

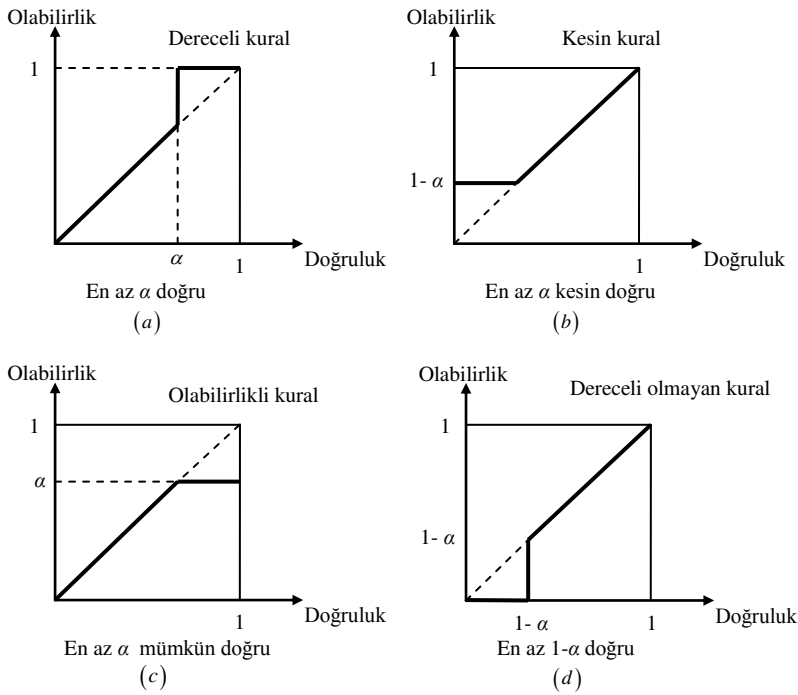
$$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, \max(\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1), 1 - \mu_{S_1}(v_1)) \geq \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.211)$$

Eş. 3.211’in tümleyeni alındığı takdirde Eş. 3.212 elde edilir.

$$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, \min(\mu_{S_1}(v_1), 1 - \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1)) \leq 1 - \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.212)$$

“ X_1 değişkenin aldığı değerin S_1 bulanık kümesine aitlik derecesi ne kadar fazla ve X_2 değişkenin aldığı değer ile, X_1 değişkenin aldığı değer daha az ilişki halinde ise, X_2 değişkenin aldığı değerin S_2 bulanık kümesine aitlik derecesi o kadar azdır.” şeklinde yorumlanmaktadır. $\min(a, 1-t) \leq 1-b \Leftrightarrow t \geq 1-(a \rightarrow (1-b))$ ($\rightarrow$ Gödel koşullu önerme operatörü) eşitliği kullanılarak Eş. 3.211, Eş. 3.213’deki ifadeyle de tanımlanabilir.

$$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, \pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) = \begin{cases} 0, & \text{Eğer } \mu_{S_1}(v_1) + \mu_{S_2}(v_2) \leq 1 \\ \mu_{S_2}(v_2), & \text{Eğer } \mu_{S_1}(v_1) + \mu_{S_2}(v_2) > 1 \end{cases} \quad (3.213)$$



Şekil 3.18. Dört temel $\mu_{\tau(v_1)}$ fonksiyonu

Tanımlanan dört bulanık kuralda da S_2 kümesi değiştirilmektedir. Bu kümeyi değiştirmek için $\mu_{\tau(v_1)}$ gibi bir fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyon bulanık doğruluk değeri olarak yorumlanabilir [101]. Eş. 3.204, Eş. 3.206 ve Eş. 3.208 için $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \leq \mu_{\tau(v_1)}(\mu_{S_2}(v_2))$ Eş. 3.210 ve Eş. 3.213 için $\pi_{X_2|X_1}(v_2, v_1) \geq$

$\mu_{\tau(v_1)}(\mu_{S_2}(v_2))$ olarak tanımlansın. Dört kural için $\mu_{\tau(v_1)}$ fonksiyonu $\mu_{S_1}(v_1) = \alpha$ olduğu durum Şekil 3.18’de verilmiştir.

3.2.2. Bulanık kuralların değerlendirilmesi

Bulanık kuralların değerlendirilmesi oldukça önemli bir konudur. Eğer değerlendirme işlemi düzgün bir şekilde gerçekleştirilmez ise veri tarafından desteklenmeyen kurallar ortaya çıkar. Bu nedenle değerlendirme işleminde kullanılan kalite ölçümünün seçimi oldukça önemlidir. Bulanık kuralların değerlendirilmesinde birliktelik kurallarında kullanılan güvenilirlik derecesinin bulanıklaştırılmış hali kullanılmaktadır. "Eğer $X_1 S_1$ ise $X_2 S_2$ 'dir." yapısındaki bulanık kuralın değerlendirilmesinde kullanılan güvenilirlik derecesi Eş. 3.214’de verilmiştir.

$$T_{güv} = \frac{\sum \mu_{S_1}(v_1) \otimes \mu_{S_2}(v_2)}{\sum \mu_{S_1}(v_1)} \quad (3.214)$$

Bulanık kuralların değerlendirilmesinde kullanılacak t-normun belirlenmesi oldukça önemlidir. Dubois ve ark. yapmış oldukları çalışmada veritabanında bulunan kayıtları kuralı destekleyip desteklemediğine göre üçe ayırmıştır. Eş. 3.215’de pozitif örnekler, negatif örnekler ve ilgisiz örneklerin toplamının bire eşit olması gerektiğini belirtmişlerdir [102].

$$S_+ + S_- + S_{\pm} = 1 \quad (3.215)$$

Eş. 3.215’de tanımlanan pozitif, negatif ve ilgisiz örneklerin bulanık olması durumu Eş. 3.216-Eş. 3.218’de tanımlanmıştır.

$$S_+ = \mu_{S_1}(v_1) \otimes \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.216)$$

$$S_- = 1 - (\mu_{S_1}(v_1) \rightarrow \mu_{S_2}(v_2)) \quad (3.217)$$

$$S_{\pm} = 1 - \mu_{S_1}(v_1) \quad (3.218)$$

Eş. 3.214 doğruluk derecesi Eş. 3.219'daki gibi de tanımlanabilir.

$$T_{güv} = \frac{\mathbb{S}_+}{\mathbb{S}_+ + \mathbb{S}_-} \quad (3.219)$$

Bulanık kurallar değerlendirilirken uygun t-normun bulunmasında iki durum söz konusudur. İlk durum kural öncül ve ardılının aynı olması durumudur. Bu durumda kuralın güvenilirlik derecesinin bire eşit olması düşünülebilir. Fakat Dubois ve ark. kuralın güvenilirlik derecesinin bire eşit olmasının zorunlu olmadığını belirtmişlerdir [102]. Genel olarak, Eş. 3.220'de belirtilen şartlar sağlandığı takdirde güvenilirlik derecesi bire eşit olmaktadır.

$$\mu_{S_1}(v_1) \leq \mu_{S_2}(v_2) \Rightarrow (T_{güv}(S_1 \rightarrow S_2) = 1) \quad (3.220)$$

Eş. 3.220'de verilen şartın sağlanması için $\mathbb{S}_- = 0$ olması gerekmektedir. Bu durumda Eş. 3.215'de verilen eşitlik kullanılarak $\mathbb{S}_+ = 1 - \mathbb{S}_+$ eşitliği elde edilir. Eş. 3.216 ve Eş. 3.218 kullanılarak $\mu_{S_1}(v_1) \otimes \mu_{S_2}(v_2) = \mu_{S_1}(v_1)$ eşitliği elde edilir. $\mu_{S_1}(v_1) \leq \mu_{S_2}(v_2)$ olması nedeniyle bu eşitliği sadece minimum operatörü t-norm olarak kullanıldığında sağlanmaktadır.

İkinci durumda ise Eş. 3.217'de kullanılan koşullu önerme operatörüne göre uygun t-norm seçilir. Koşullu önerme operatörünün klasik mantıktaki eşitliği $S_1 \rightarrow S_2 \equiv \neg S_1 \vee S_2$ şeklindedir. S_1 ve S_2 kümeleri BK, $Ng(\cdot)$ standart tümleyen olması durumunda Eş. 3.217, Eş. 3.221'deki gibi yazılabilir.

$$\mathbb{S}_- =$$

$$1 - (\mu_{S_1}(v_1) \rightarrow \mu_{S_2}(v_2)) = 1 - (Ng(\mu_{S_1}(v_1)) \oplus \mu_{S_2}(v_2)) = \mu_{S_1}(v_1) \otimes 1 - \mu_{S_2}(v_2) \quad (3.221)$$

Bu durumda, uygun t-norm operatörünü bulmak için Eş. 3.215 verilen eşitlik kullanılır. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa Eş. 3.222 elde edilir.

$$\mu_{S_1}(v_1) \otimes \mu_{S_2}(v_2) + \mu_{S_1}(v_1) \otimes (1 - \mu_{S_2}(v_2)) = \mu_{S_1}(v_1) \quad (3.222)$$

Eş. 3.222'deki eşitliği sağlayan t-norm Alsina tarafından yapılan çalışmada belirtildiği gibi çarpım normudur [102-105].

Bulanık kural eğer koşullu önerme operatörüyle modelleniyorsa, değerlendirme işleminde kullanılan güvenilirlik derecesi farklı bir şekilde ifade edilmektedir. Hüllermeier klasik mantıkta $S_1 \wedge S_2 \equiv S_1 \otimes (S_1 \rightarrow S_2)$ totolojisini kullanarak bulanık kuralları değerlendirmiştir [106]. Koşullu önerme operatörüyle modellenen kesin ve göreceli bulanık kuralların değerlendirilmesi için kullanılan kalite ölçümü Eş. 3.223'de verilmiştir.

$$T_{güv} = \frac{\sum \mu_{S_1}(v_1) \otimes (\mu_{S_1}(v_1) \rightarrow \mu_{S_2}(v_2))}{\sum \mu_{S_1}(v_1)} \quad (3.223)$$

$\otimes$ çarpım t-normudur. Bulanık kural eğer kesin kural ise Kleene-Dienes koşullu önerme operatörü, dereceli kural ise Gödel yada Gougen koşullu önerme operatörü kullanılmalıdır.

4. DİLSEL ÖZETLEME UYGULAMALARI: LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Veritabanlarını dilsel olarak özetleme işlemi Yager [36] tarafından önerilmesinden sonra bu konuyla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda değişkenler tip-1 BK'larla ve tip-2 BK'larla modellenen dilsel etiketlerle ifade edilmiştir. Dilsel özetleme işlemi başta zaman serilerinin özetlenmesi olmak üzere, karar vericilerin karar vermesine yardımcı karar destek sistemlerinde, doküman sınıflandırılmasında, karar vericilerin uzlaşması sürecinde, insan hareketlerin incelenmesinde, internet trafiğinde ve kullanıcı profilini dikkate alarak televizyon kanalı tavsiye eden sistem gibi birçok farklı alana uygulanmıştır.

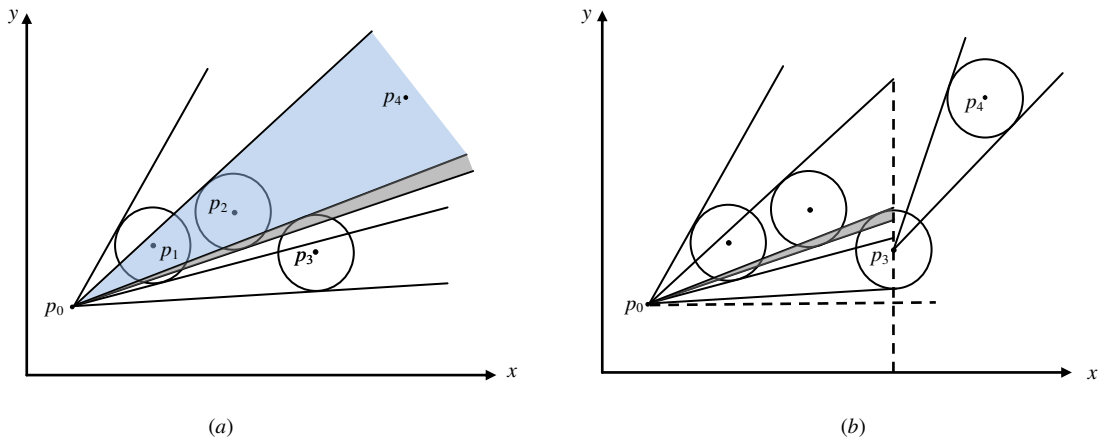
Veri tabanında yer alan verinin özelliklerinden bir tanesi de zamandır. Veri zaman içerisinde değişmekte olduğu için karar alma süreçlerinde verinin özetlenmesi oldukça önemlidir. Dilsel özetleme işlemiyle verinin ne şekilde ne sıklıkla değiştiğiyle ilgili bilgiler, insanlar tarafından anlaşılabilir şekilde özetlenmektedir.

Zaman serilerini özetlenmek için yerel trendlerin bilinmesi gerekmektedir. Literatürde yerel trendlerin çıkarılmasıyla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bir tanesi de Sklansky ve Gonzales tarafından önerilen yöntemdir [107]. Zaman serisinin değerleri (x_i, y_i) ile gösterilsin. f , zaman serisinin düzgün ε yaklaşım fonksiyonu olsun. $\varepsilon > 0$ olduğu takdirde, Eş. 4.1'de verilen şartın her bir yerel trend tarafından sağlanması gerekir.

$$\forall i \quad |f(x_i) - y_i| \leq \varepsilon \quad (4.1)$$

Eğer f doğrusal bir fonksiyon ise, yaklaşım doğrusal düzgün ε yaklaşımıdır. Sklansky ve Gonzales tarafından önerilen yöntem zaman serisinin oluşturduğu değer kümesi için düzgün ε yaklaşımını bulmaktadır. Bir zaman serisinde yerel trendlerin Sklansky ve Gonzales tarafından önerilen yöntemle nasıl bulunduğu Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Şekil 4.1a'da görüldüğü gibi, zaman serisinin p_0 noktasından sonra

gelen p_{0+j} $j=1,2,3$ noktaları merkez olacak şekilde ε yarıçapındaki çemberler çizilir. Daha sonra p_0 noktasından bu çemberlere iki tane teğet çizilerek koniler oluşturulur. Oluşturulan konilerin kesişimleri boş küme olana kadar bu işlem tekrar edilir. p_0 noktasından çizilen konilerin kesişimi boş küme olduğu zaman ilgili noktaları kapsayan yerel trend bulunmuştur. Şekil 4.1a'da ilk yerel trend p_0, p_1, p_2, p_3 noktalarını kapsamaktadır. Şekil 4.1b'de diğer yerel trendin bulunması gösterilmiştir. p_3 noktasından sonra gelen noktaların herbiri merkez olacak şekilde ε yarıçapında çemberler çizilir. Daha sonra p_3 noktasından bu çemberlere teğetler çizilerek yeni koniler oluşturulur [107]. Bu işlem tüm yerel trendler bulunana kadar devam eder. Yerel trendler, Şekil 4.1a'da konilerin kesişimi ile oluşturulan alan içinde bir doğrudur. Yapılan çalışmalarda bu alanı sınırlayan koninin açıortayı yerel trend olarak kabul edilmiştir [108, 109].

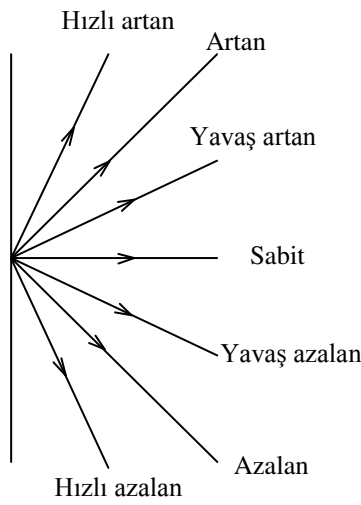


Şekil 4.1. Düzgün ε - yaklaşımı algoritmasının gösterimi : (a) Konilerin kesişimi (gri alan) (b) p_3 noktasından yeni koninin başlaması

Zaman serilerinde yerel trendler bulunduktan sonra, trendlerin üç özelliği dikkate alınarak özetleme işlemi yapılır. Bunlar değişimin

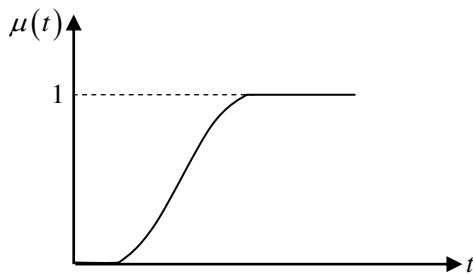
- Dinamikliği
- Süresi
- Değişkenliği

dir. Dinamiklik trendin değişim hızıyla ilgilidir. Trendi gösteren doğrunun x eksenine yaptığı açının eğimiyle ifade edilir. Açı değeri $\eta(-90^\circ, 90^\circ)$ arasında değişmektedir. Bu değerin dilsel özetleme işleminde doğrudan kullanımı oldukça zordur. Bu nedenle trendin değişimi dilsel olarak ifade edilir. Şekil 4.2’de trendin dinamikliği ifade etmede kullanılan dilsel etiketler verilmiştir. Dilsel etiketlerin her biri bir tip-1 BK ile modellenmektedir.



Şekil 4.2. Dinamikliğin görsel olarak gösterimi

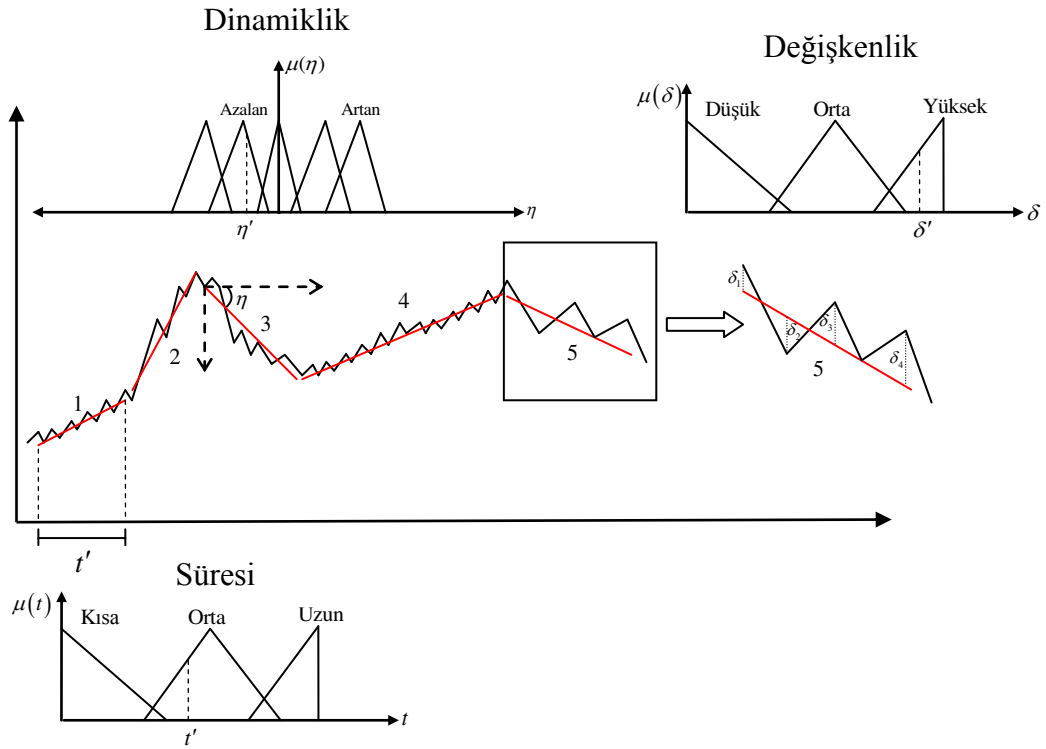
Değişim süresi yerel bir trend sırasında geçen zamandır. Bu süre dilsel değişken aracılığıyla tanımlanır. Dilsel değişkeni ifade etmede dilsel etiketler kullanılır. Dilsel etiketlerin her biri bir tip-1 BK ile modellenmektedir. Şekil 4.3’de trendin uzunluğu “uzun” tip-1 BK ile tanımlanmıştır.



Şekil 4.3. Değişimin süresi için “uzun” bulanık kümesinin gösterimi

Değişkenlik, veri grubunun nasıl yayıldığı hakkında bilgi verir. Diğer bir değiş ile zaman serisi verisinin trendden ne kadar derece saptığını ölçer. Bu ölçümü yapmak için beş temel istatistiksel ölçüm kullanılabilir. Bunlardan birisi genişliktir. Genişlik veri grubundaki en büyük değer ve en küçük değer arasındaki mutlak farkı göstermektedir. Bu ölçüm sadece iki değeri dikkate aldığı için iyi bir ölçüm değildir ve değişkenliği yansıtmada uç değerlere bağlıdır. Çeyreklikler verinin yayılmasının ölçümünde kullanılan diğer bir yöntemdir. İlk olarak üçüncü çeyrek (Q_3) ve birinci çeyrek (Q_1) bulunur. Daha sonra üçüncü çeyrek ve birinci çeyrek arasındaki fark bulunarak veri grubunun nasıl yayıldığı hakkında bilgi elde edilir. Bu yöntemin uç değerlere bağımlılığı daha azdır. Varyans, standart sapma ve ortalama mutlak sapma gibi merkezi yayılım ölçüleriyle de veri grubunun nasıl yayıldığı hakkında bilgi elde edilebilir. Değişkenlikle ilgili elde edilen sonuçların normalize edilmesi gerekmektedir. Aksi takdirde yanlış sonuçlar ortaya çıkabilir. Elde edilen değişkenliğin değeri dilsel değişken aracılığıyla açıklanır.

Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için trendlerin davranışını belirlemek için kullanılan dinamikliğinin, süresinin ve değişkenliğinin nasıl bulunduğu Şekil 4.4 üzerinde gösterilmiştir. Şekil 4.4'de birinci trendin süresi t' ile gösterilmiştir. Trendin süresi kısa, orta ve uzun tip-1 BK'larıyla ifade edilmiştir. t' değerinin ilgili tip-1 BK'lara aitlik derecesi elde edilerek dilsel özetleri değerlendirmede kullanılır. Trendin dinamikliğinin bulunması üçüncü trend üstünde Şekil 4.4'de gösterilmiştir. İlk olarak trendin x eksenini ile yaptığı açı (η) bulunur. Daha sonra trendlerin dinamikliği Şekil 4.4'de gösterilen tip-1 BK'larla dilsel olarak etiketlenir. Dinamikliği gösteren η açısının ilgili tip-1 BK'lara aitlik dereceleri elde edilerek dilsel özetleri değerlendirmede kullanılır. Değişkenlik Şekil 4.4'de beşinci yerel trendin üstünde gösterilmiştir. Yerel trendle zaman serisinin değerleri arasındaki farklılık ölçülerek δ' değerinin ortalaması bulunur. Yerel trendle zaman serisinin değerleri arasındaki fark düşük, orta ve yüksek tip-1 BK'larıyla etiketlenmiştir. δ' ilgili BK'lara aitlik dereceleri elde edilerek dilsel özetleri değerlendirmede kullanılır.



Şekil 4.4. Yerel trendlerin süresi, dinamikliği ve değişkenliği

Kacprzyk ve ark. zaman serilerinde trendlerin değişimini dilsel özetleme yöntemiyle incelemiştir. Sklansky ve Gonzales [107] tarafından önerilen yöntemi kullanarak zaman serisinin yerel trendlerini bulmuşlardır. Yerel trendlerin davranışlarını özetlemek için trendlerin dinamikliği, süresi ve değişkenliği gibi özellikleri dikkate almışlardır. “Çoğu trend kısadır” yada “çoğu uzun trendler artmaktadır” gibi basit yapıdaki özetleri oluşturmuşlar ve Zadeh tarafından önerilen dilsel niceleyicilerde kullanılan hesaplama yöntemiyle özetleri değerlendirmişlerdir [110]. Fakat, bu çalışmada sadece trendlerin sayısı dilsel niceleyicilerle modellenmektedir. Trendlerin süresi dilsel niceleyicilerle modellenmemiştir. Kacprzyk ve ark. önerilen özetleme yapısını genişleterek “zamanın çoğunu alan trendler artar” yada “zamanın çoğunu alan artan trendler az değişir” gibi genişletilmiş özet yapılarını geliştirmişlerdir. Zaman serisinin davranışını belirlemek için yerel trenlerin dinamikliğini, süresini ve değişkenliğini dikkate almışlar ve süreyi dilsel niceleyicilerle modellemişlerdir. Genişletilmiş yapıdaki özetleri kullanarak dilsel özetleme işlemini gerçekleştirmişlerdir [111-113]. Kacprzyk ve ark. minimum operatörünün yanında

çarpım, drastik ve Lukasiewicz operatörlerini t-norm olarak kullanarak göreceli kardinaliteyi hesaplamışlardır. Farklı t-normların kullanılmasının basit yapıdaki ve genişletilmiş yapıdaki özetlerin sıralanması üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, farklı t-normlar kullanılmasına rağmen, özetlerin doğruluk derecesine göre sıralanması hemen hemen aynı çıkmıştır [108, 114]. Kacprzyk ve ark. basit ve genişletilmiş formdaki özetleri değerlendirmede, Zadeh'in hesaplama yönteminin yerine, Sugeno integralini doğruluk derecesi olarak kullanarak özetleri değerlendirmişlerdir [115, 116]. Fakat bu çalışmalarda Sugeno integrali kullanıldığında bulanık ölçümün monotonluk özelliği nedeniyle doğruluk derecesinin hesaplanmasında bazı zorluklar ortaya çıkmıştır. Bu nedenle Kacprzyk ve ark. bulanık ölçümün monotonluk özelliği ile ilgili düzeltme yaparak düzeltilmiş Sugeno integralini tanımlamışlar ve basit yapıdaki özetlerin ve genişletilmiş yapıdaki özetlerin doğruluk derecesini hesaplamışlardır [117]. Kacprzyk ve ark. dilsel özetlerin değerlendirilmesinde Sugeno integralinin doğruluk derecesi olarak kullanılmasının yanında Choquet integralinin de kullanılabileceğini önermişlerdir. Trendlerin davranışlarını belirlemek için dinamiklik, süre ve değişkenliği dikkate alınarak, basit yapıdaki ve genişletilmiş yapıdaki özetler için doğruluk derecelerini hesaplamışlardır [118]. Kacprzyk ve ark. dilsel niceleyicileri modellemede OWA operatörünün kullanılabileceğini belirtmişler, trendlerin davranışlarını belirlemek için dinamiklik, süre ve değişkenliği dikkate alarak, basit yapıdaki ve genişletilmiş yapıdaki özetlerin doğruluk derecelerini hesaplamışlardır [119]. Bu çalışmalara ek olarak Kacprzyk ve ark. zaman serisinin davranışını belirlemek için yerel trendlerin dinamikliğini, süresini ve değişkenliğini dikkate almışlardır. Özetlerin değerlendirilmesinde Zadeh tarafından önerilen dilsel niceleyicilerde kullanılan hesaplama yönteminde göreceli kardinaliteyi farklı t-normlar kullanarak hesaplamışlardır. Ayrıca bulanık Sugeno ve Choquet integrallerini kullanarak basit yapıdaki ve genişletilmiş yapıdaki özetlerin değerlendirilebileceğini belirtmişlerdir [109]. Yapılan çalışmalarda sadece bir zaman serisi incelenmiştir. Birden çok zaman serisinin incelenmesi durumu, Kacprzyk ve Wilbik tarafından yapılan çalışmada ele alınmıştır. Farklı zaman serilerinde dilsel özetleme yöntemiyle trendlerin davranışlarını benzerliklerine göre değerlendirmişlerdir. İki farklı zaman serinin belli aralıktaki trendlerinin benzerliklerini ölçmek için zaman serisinin dinamikliğine,

süresine ve değişkenliğine eşit önem vermişlerdir. Daha sonra zaman serilerini benzerliklerine göre değerlendirmişlerdir [120, 121].

Chiang ve ark. tip-I ve tip-II niceleyici cümleleri kullanarak zaman serilerini özetlemişlerdir. Zamanı saat gün ve ay olarak bölmüşler ve bankadaki bilgisayarların işlemci kullanımlarının zaman içerisindeki değişimlerini dilsel özetleme yardımıyla incelemişlerdir [122]. Ortega ve ark. veri küplerinde zaman boyutunu dikkate alarak dilsel özetleme işlemini gerçekleştirmişlerdir. Özetleme işleminde özet yapısı olarak tip-II niceleyici cümleleri kullanmışlardır. Verinin sadece değişim özelliğini dikkate almışlardır. Zamanı üç farklı şekilde bölmüşler her bir bölünmüş parçayı BK'larla modellemişlerdir. Zaman serilerini dilsel olarak özetlerken verinin zamandan aldığı değerlerin büyüklüğüne göre özetleme işlemini yapmışlardır. Özetleri Delgado ve ark. tarafından önerilen olasılık temelli bulanık kardinalite yöntemiyle değerlendirmişlerdir. Uygulama olarak ham petrol fiyatının zamana karşı değişimini ve bir sağlık merkezine gelen hasta sayısının zamana karşı değişimini dilsel olarak özetlemişlerdir [123, 124]. Ortega ve ark. bir önceki çalışmalarını genişleterek iki zaman serisinin davranışlarını karşılaştırmışlardır. Zaman serilerinde meydana gelen değişimleri belirlemek için belli zaman aralıklarında meydana gelen trendleri dikkate almışlardır. Trendlerin davranışlarını, trendlerde meydana gelen değişimin büyüklüğünü ve yönünü dikkate alarak belirlemişlerdir. Trendlerin büyüklüğü ve yönündeki benzerliklere göre zaman serilerini dilsel olarak özetlemişlerdir. Özetleri değerlendirirken Delgado ve ark. tarafından önerilen olasılık temelli bulanık kardinalite yöntemini kullanmışlardır [38]. İki farklı sağlık merkezine gelen hastaların sayısının zamana karşı değişimini ve iki farklı petrol fiyat verisinin zamana karşı değişimini dilsel özetlerle değerlendirmişlerdir [125-127]. Batyrshin ve Sheremetov farklı zaman serilerini benzerliklerine, yapılarına ve özelliklerine göre dilsel olarak özetlemişlerdir. İlk olarak zaman serilerini yerel trendlere bölmüşler ve trendlerin değişimlerini incelemişlerdir. Farklı zaman serilerinin trendlerinde meydana gelen değişimler arasındaki ilişkileri, benzerlikleri ve şekilsel yapılarını birliktelik kurallarını kullanarak açıklamışlardır. Elde edilen dilsel yapılar zaman serilerinin davranışları hakkında özet bilgi vermektedir [128-130]. Van der Heide ve Trivio enerji tüketim verilerini tip-I ve tip-II niceleyici cümleleri kullanarak dilsel

olarak özetlemişlerdir. Dilsel özetleri değerlendirmek için uygunluk derecesi ve geçerlilik derecesini kullanmışlardır [131]. Zaman serileri ile ilgili çalışmalar Çizelge 4.1’de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Dilsel özetleme ile ilgili yapılan çalışmalar (zaman serileri)

Yazar	BK	Kalite Ölçümleri	Uygulama Alanı
Kacprzyk ve Wilbik [132]	Tip-1	Doğruluk derecesi, özgüllük derecesi	Fon yatırımı
Kacprzyk ve Wilbik [133]	Tip-1	Doğruluk derecesi, bulanıklık derecesi	
Wilbik ve Kacprzyk [134]	Tip-1	Doğruluk derecesi, özgüllük derecesi, odak derecesi	
Kacprzyk ve ark. [110] Kacprzyk ve ark. [111-113] Kacprzyk ve ark. [108, 114]	Tip-1	Doğruluk derecesi	
Kacprzyk ve ark. [115, 116]	Tip-1	Sugeno integrali	
Kacprzyk ve ark. [117]	Tip-1	Düzeltilmiş Sugeno integrali	
Kacprzyk ve ark. [118]	Tip-1	Choquet integrali	
Kacprzyk ve ark. [119]	Tip-1	OWA operatörü	
Kacprzyk ve ark. [109]	Tip-1	Sugeno ve Choquet integralleri	
Kacprzyk ve Wilbik [120, 121]	Tip-1	Doğruluk derecesi	Zaman serilerinin karşılaştırılması
Chiang ve ark. [122]	Tip-1	Doğruluk derecesi	Bilgisayar işlemci kullanımı
Ortega ve ark. [123, 124]	Tip-1	Doğruluk derecesi (GD_O)	Ham petrol fiyatı
Ortega ve ark. [125-127]	Tip-1	Doğruluk derecesi (GD_O)	Sağlık merkezine gelen hasta sayısı
Van der Heide ve Trivio [131]	Tip-1	Uygunluk derecesi Geçerlilik derecesi	Enerji tüketim verisi

Zaman serilerinin özetlenmesinin dışında, dilsel özetleme işlemi çeşitli alanlara başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bu çalışmalar kısaca aşağıda açıklanmıştır. Kacprzyk ve Zadrozny anlaşılması zor olan büyük ölçekli sayısal veriyi sözel olarak ifade etmesi nedeniyle dilsel özetlemenin karar destek sistemi olarak kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca dilsel özetlemenin doğal dil üretimde kullanılan bazı yöntemlerle olan ilişkisini ve benzerliğini göstermişlerdir [135, 136]. Kacprzyk ve Zadrozny dokümanların kategorize edilmesi işleminde karar vericiye yardımcı olmak üzere dilsel özetleme yönteminin kullanılabileceğini savunmuşlardır.

İlk olarak gruplanacak belgeler, kategoriler ve kategorize etmede kullanılacak önemli terimleri belirlemişlerdir. Daha sonra belgeleri bu terimler yardımıyla vektörel olarak göstermişlerdir. Dilsel özetleme işlemiyle belgeleri kategorize etmek için gerekli özetleri elde etmişlerdir [137]. Kacprzyk ve ark. karar verme problemlerinde karar vericilerin uzlaşısı sürecinde dilsel özetleme yöntemini kullanmışlardır. Karar verme problemlerinde yaygın olarak kullanılan tercih ilişkilerini kullanarak karar vericiler alternatifler hakkındaki düşüncelerini belirlemişlerdir. Daha sonra farklı özet yapıları tanımlayarak, karar verme probleminde karar vericilerin ortak görüşünün ne olduğu hakkında bilgi elde etmişlerdir [138]. Anderson ve ark. insan hareketlerini zamana bağlı dilsel özetleme yöntemiyle analiz etmişlerdir. İlk olarak insan hareketleri analiz edilmiştir. İnsanların yerde ve ayakta geçirdikleri zaman, hareketlerindeki hız ve hareketlilik gibi özelliklerini dikkate alarak insanların düşüp düşmediğiyle ilgili kural çıkaran bir sistem geliştirmişlerdir [139]. Pouzols ve ark. dilsel özetleme yöntemini kullanarak internet trafik akışının ne kadar büyüklükte, ne kadar sürede gerçekleştiğini insanlar tarafından kolay anlaşılacak şekilde özetlemişlerdir. Anlık gerçekleşen akışları özetlemek için basit yapıdaki özetleri kullanmışlardır. Ayrıca, akışlar gerçekleştikten sonra elde edilen internet trafik akışı veritabanını dilsel olarak özetlemişlerdir. Veri madenciliğinde kullanılan Apriori algoritmasını kullanarak değerlendirilecek özelliklerin sayısını büyük ölçüde azaltılmıştır [140]. Pigeau ve ark. televizyon izleyicilerinin geçmiş alışkanlıklarını dikkate alarak izleyiciye en uygun kanalı öneren sistemi dilsel özetleme yöntemiyle geliştirmişlerdir. Bu işlemi gerçekleştirmek için önermiş oldukları hiyerarşik yapıdaki SAINTETIQ modelini kullanarak hangi tip televizyon izleyicisinin hangi televizyon kanallarını izleyeceklerini belirlemişlerdir [141]. Eciolaza ve ark. ve Eciolaza ve Trivino sürüş simülatöründen elde ettikleri veriyi dilsel olarak özetleyerek sürüş davranışlarını incelemişlerdir. İki aşamalı hiyerarşik bir yapı oluşturmuşlardır. İlk aşamada araç hızı, iz genişliği, direksiyon açısı, yolun eğimi vb., özellikler girdi olarak direksiyon kontrolü, aracın yol tutuşu ve fren mesafesini ise çıktı olarak kabul etmişlerdir. Eğer -ise yapısını kullanarak bu özellikler arasındaki ilişkiyi özetlemişlerdir. İkinci aşamada ise ilk aşamadaki çıktılar girdi olarak alınıp, sürücülerin yaptıkları manevralar değerlendirmişlerdir [142-144]. Benzer hiyerarşik model kullanılarak, finansal raporlar, Mars yüzeyinin incelenmesi, karayollarındaki trafik akışı, enerji

tüketimi ve insan yürüyüşünün analizi gibi konularla ilgili dilsel özetler elde edilmiştir [145-153]. Yager sosyal ağları tip-1 BK ile göstererek, merkezlik, takım olma vb., ölçümleri bulanık niceleyicileri kullanarak hesaplamıştır. Sosyal ağlarda düğümler kişileri yada kuruluşları, arklarda kişiler yada kuruluşlar arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Yager düğümlerin özelliklerini vektörel olarak göstermiş ve düğümler arasındaki ilişkilerin dilsel özetleme yöntemiyle özetlenebileceğini belirtmiştir [154]. Carrasco ve Villar dilsel özetlemeyi kullanarak turizm web verilerini özetleyen bir karar destek sistemi geliştirmişlerdir. Geliştirmiş oldukları yöntem farklı tipteki verileri OWA operatörü yardımıyla birleştirerek dilsel özetler üretmektedir [155]. Martinez ve ark. niceleyici cümleleri bulanık dereceli sayıları kullanarak değerlendirmişler ve görüntü işleme problemine uygulamışlardır. Resimler incelenerek resimlerdeki renk oranları niceleyici cümleler yardımıyla özetlenmiştir [156]. Ros ve ark. ve Anderson ve ark. insan davranışlarının zaman içinde nasıl değiştiğini dilsel özetme yöntemini kullanarak incelemişlerdir. İlk olarak hangi tip aktivitelerin inceleneceği belirlenmiştir. Daha sonra bu aktiviteler gruplanmış ve insan davranışının zamana göre değişimi gözlemlenmiştir. Gözlemlerle elde edilen zaman serisi doğrusal regresyon yöntemiyle yerel trendlere ayrılmış ve bu trendlerin davranışları incelenmiştir. Trendlerin davranışlarını belirlemek için trendlerde meydana gelen dinamiklik ve değişkenlik özellikleri dikkate alınmıştır. Bu özellikler göz önünde tutularak insan davranışlarının gösterildiği zaman serisi özetlenmiştir [157, 158]. Wilbik ve Keller niceleyicileri, özetleyicileri, odak derecesini ve doğruluk derecesini dikkate alarak iki dilsel özetin benzerliklerini ölçmek için yeni bir ölçüm önermişlerdir. Önermiş oldukları ölçümün bir metrik olduğunu ispatlamıştır [159]. Wilbik ve ark. farklı dilsel özetlerin benzerliklerini birleştirmek için OWA operatörü, Choquet integrali, Sugeno integrali ve benzerlik derecesi yöntemlerini önermişlerdir [160]. Wilbik ve Keller farklı dilsel özetlerin benzerliklerini birleştirmek için bulanıklık ölçümü ve Sugeno integralini kullanmışlardır [161]. Wilbik ve ark. dilsel özetlerin oluşturmuş olduğu kümeleri kümelemek için dilsel özetlerin ikili karşılaştırılmasında uzaklık metriğini kullanan bir yöntem önermiştir [162].

Dilsel özetlemeler ilgili yapılan çalışmaların çoğu özetlerin değerlendirilmesiyle ilgilidir. Fakat veritabanında özelliklerin sayısı ve nesne sayısı arttığı takdirde özetlerin değerlendirilmesi oldukça zordur. Bu nedenle bazı sezgisel yöntemler yada veri madenciliğinde kullanılan en iyi k-kuralın bulunması ile ilgili yöntemlerden yararlanılmıştır. Kacprzyk ve Zadrozny dilsel özetlemenin veri madenciliğinde kullanılan birliktelik kurallarıyla eş değer olduğunu belirtmişlerdir. Birliktelik kurallarında en önemli k-kuralın bulunmasında kullanılan Apriori algoritmasının dilsel özetleme işleminde istenilen özetleri elde etmede kullanılabileceğini göstermişlerdir [163]. Pouzols ve ark. birliktelik kurallarında en önemli k nesnenin bulunmasında kullanılan Apriori algoritmasını kullanarak değerlendirilecek özelliklerin sayısını büyük ölçüde azaltmıştır [140]. Kacprzyk ve ark. zaman serilerinde trendlerin davranışlarının değişimini dilsel özetleme yöntemiyle incelemişlerdir. Genetik algoritma kullanılarak dilsel niceleyiciyi, özetleyiciler ve bulanık etiketler kromozom yapısında kodlanmıştır. Daha sonra ebeveynler seçilmiş ve çaprazlama operatörü kullanılarak yeni özetler, doğruluk derecesini en büyüklecek şekilde elde edilmiştir [164]. Pilarski niceleyici cümleleri kullanarak niceleyici cümlelerin oluşturulmasını ve değerlendirilmesini sağlayan bir sistem geliştirmiştir. Özetleri değerlendirmek için Zadeh tarafından önerilen doğruluk derecesini kullanmıştır. Özetleri Quantirus adını verdiği bir sistemle üretmiştir. Bu sistemde ilk olarak kullanıcı özetleyicileri, niceleyicileri, ilgili BK'ları ve özet yapılarını tanımlamaktadır. Daha sonra niceleyicilerin ve özetleyicilerin birbirlerini kapsamalarına göre bazı özetler elenmiştir. Elenen özetler değerlendirme işlemine alınmazken değerlendirmeye alınan özetlerin doğruluk derecesi hesaplanmıştır [165]. Mendel ve Korjani tip-1 bulanık nitel karşılaştırma analizini dilsel özetlemede kullanmışlardır. Önerilen yöntemde özelliklerin bazıları neden kümesinin elemanları bazıları da sonuç kümesinin elemanları olarak gruplandırılmış ve neden-sonuç kümeleri arasında mantıksal bir ilişki kurulmuştur. Tutarlılık derecesiyle aday neden sonuç ilişkilerinin veriler tarafından desteklenip desteklenmediği ölçülmüştür [166]. Wijayasekara ve Manic Kendini Örgütleyen Haritalar'ı dilsel özetlemede kullanarak sınıflandırma problemleri için "eğer-ise" yapısındaki dilsel özetleri elde etmişlerdir [167]. Zaman serisi dışındaki dilsel özetlemeyle ilgili uygulama çalışmaları Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.2. Dilsel özetleme ile ilgili yapılan çalışmalar (uygulamalar)

Yazar	BK	Kalite Ölçümleri	Uygulama Alanı
Kacprzyk ve Zadrozny [135, 136]	Tip-1	Doğruluk, belirsizlik, kapsama uygunluk derecesi, özet uzunluğu	Karar destek sistemleri/Doğal dil üretimi
Kacprzyk ve Zadrozny [137]	Tip-1	Doğruluk derecesi	Dokümanların kategorize edilmesi
Kacprzyk ve ark. [138]	Tip-1	Doğruluk derecesi	Karar verme
Anderson ve ark. [139]	Tip-1	Güven derecesi	İnsan hareketlerinin dilsel özetlenmesi
Pouzols ve ark. [140]	Tip-1	Doğruluk derecesi	İnternet trafik akışı
Pigeau ve ark. [141]	Tip-1	Doğruluk derecesi	Tv-kanalı öneren sistem
Eciolaza ve ark. [142-144]	Tip-1	Kardinalite temelli ölçüm	Sürüş davranışlarının incelenmesi
Alvarez ve ark., Mendez ve Trivino, Trivino ve ark. [145-153]	Tip-1	Kardinalite temelli ölçüm	Finansal raporlar, Mars yüzeyinin incelenmesi, karayolu trafik akışı, enerji tüketimi, insan yürüyüş analizi
Yager [154]	Tip-1	OWA operatörü	Sosyal ağlar
Carrasco ve Villar [155]	Tip-1	OWA operatörü	Turizm verilerinin özetlenmesi
Martinez ve ark. [151]	Tip-1	Dereceli sayılar	Görüntü işleme
Ros ve ark. [157] Anderson ve ark. [158]	Tip-1		İnsan davranışlarının incelenmesi
Wilbik ve Keller [159, 161] Wilbik ve ark. [160, 162]	Tip-1	Doğruluk derecesi, odak derecesi	Dilsel özetlerin benzerliklerinin karşılaştırılması
Kacprzyk ve Zadrozny [163]	Tip-1	Doğruluk derecesi	Veri madenciliği/Apiori algoritması
Kacprzyk ve ark. [164]	Tip-1	Doğruluk derecesi	Zaman serileri/Genetik algoritma
Pilarski [165]	Tip-1	Doğruluk derecesi	Dilsel özetlerin indirgenmesi
Mendel ve Korjani [166]	Tip-1	Tutarlılık derecesi	Demokrasi analizi
Wijayasekara ve Manic [167]	Tip-1	Doğruluk derecesi, yeterli kapsama derecesi	Sınıflandırma problemleri

Tip-1 BK'ların yanında son zamanlarda tip-2 BK'lar dilsel özetlemede kullanılmıştır. Niewiadomski, Kacprzyk ve Zadrozny; Kacprzyk ve Yager [45, 48] tarafından

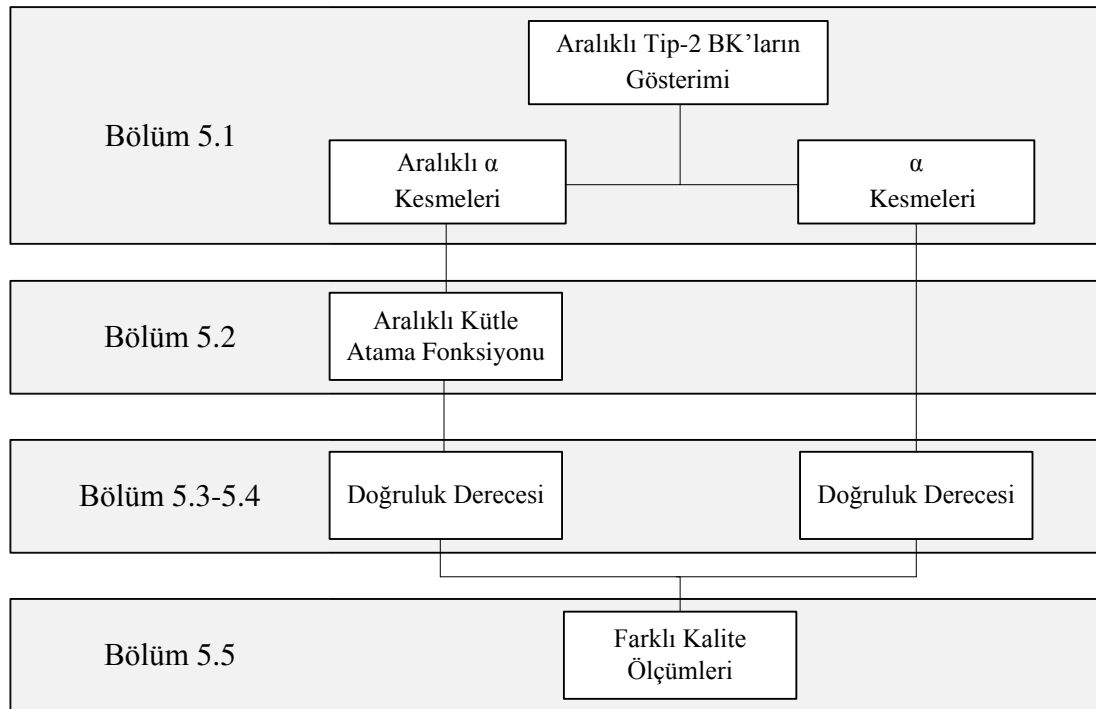
önerilen belirsizlik derecesi, kapsama derecesi, uygunluk derecesi ve özet uzunluğu gibi kalite ölçümlerini aralıklı tip-2 BK'lara genişletmiştir [5]. Niewiadowski, tip-2 BK'ların sonlu/sonsuz, sayılabilir/sayılamayan küme olduğu durumlarda belirsizlik ölçümlerini ve kardinalitelerini incelemiştir. Ayrıca dilsel özetleme işleminde “silindirik genişleme” prensibini kullanarak önermiş olduğu kardinalite ve belirsizlik ölçümlerini var olan kalite ölçümlerinde kullanarak özetleri değerlendirmiştir [168]. Wu ve Mendel “eğer ise” yapısını kullanarak aralıklı tip-2 BK'larla dilsel özetleme işlemini gerçekleştirmişlerdir. Belirsizlik derecesi, kapsama derecesi, uygunluk derecesi ve özet uzunluğu gibi kalite ölçümlerinin yanında aykırılık derecesini tanımlamışlardır [8]. Tip-2 BK ilgili dilsel özetleme çalışmaları Çizelge 4.3’de verilmiştir.

Çizelge 4.3. Dilsel özetleme ile ilgili yapılan çalışmalar (Tip-2 BK)

Yazar	BK	Kalite Ölçümleri	Uygulama Alanı
Niewiadowski [5]	Tip-2	Doğruluk, belirsizlik, kapsama ve uygunluk derecesi, özet uzunluğu	İnsan kaynakları
Niewiadowski [168]	Tip-2	Doğruluk, belirsizlik, kapsama ve uygunluk derecesi, özet uzunluğu	İnsan kaynakları
Wu ve Mendel [8]	Tip-2	Doğruluk, belirsizlik, kapsama ve uygunluk derecesi, özet uzunluğu, aykırı değer	Diyabet veritabanı

5. ARALIKLI TIP-2 BULANIK DİLSEL ÖZETLERİN DEĞERLENDİRİLMESİNDE OLASILIK TEMELLİ YÖNTEMLER

Bu bölümde aralıklı tip-2 BK'larla etiketlenen özetleri değerlendirmek için yeni iki ayrı doğruluk derecesi önerilmiştir. Önerilen yöntemler aralıklı tip-2 BK'ların kesin kümelerle gösterimine dayandığı için ilk olarak aralıklı tip-2 BK'ların aralıklı α kesmeleri ve α kesmeleriyle gösterimi incelenmiştir. Daha sonra aralıklı tip-2 BK'ların aralıklı α kesmeleri gösteriminden yararlanılarak aralıklı tip-2 BK'dan aralıklı kütle atama fonksiyonu elde eden yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Önerilen ilk doğruluk derecesi, aralıklı tip-2 BK'lardan aralıklı kütle atama fonksiyonunun elde edilmesine dayanmaktadır. Önerilen ikinci doğruluk derecesi aralıklı tip-2 BK'ların α kesmeleriyle oluşturulan alt ve üst kümeler kullanılarak hesaplanmaktadır. Önerilen iki yöntem, literatürde önerilen yöntemlerle karşılaştırılmış ve yöntemlerin üstünlüklerine ve eksikliklerine değinilmiştir. Bu bölümün akış planı Şekil 5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. Bölüm 5 akış planı

5.1. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümelerin Gösterimi

Bu bölümde aralıklı tip-2 BK'ların aralıklı α kesmeleri ve α kesmeleriyle gösterimi incelenmiştir.

Tanım 5.1.

$\tilde{A}'(x_i)$, X evrensel kümesinde tanımlanmış aralıklı tip-2 BK olsun. $\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK'sı α kesmeleriyle oluşan alt $(\underline{\tilde{A}}_\alpha'(x_i))$ ve üst $(\bar{\tilde{A}}_\alpha'(x_i))$ kesin kümeler ile gösterilebilir.

$$(\tilde{A}_\alpha'(x_i)) = (\underline{\tilde{A}}_\alpha'(x_i), \bar{\tilde{A}}_\alpha'(x_i)) \quad (5.1)$$

$(\tilde{A}_\alpha^I)$ kesin kümesinin olası durumları Eş.5.2'de gösterilmiştir.

$$(\mu_{\underline{\tilde{A}}_\alpha^I}^L(x_i), \mu_{\bar{\tilde{A}}_\alpha^I}^U(x_i)) = \begin{cases} [0,0], & x_i \notin \underline{\tilde{A}}_\alpha^I \text{ ve } x_i \notin \bar{\tilde{A}}_\alpha^I \\ [0,1], & x_i \notin \underline{\tilde{A}}_\alpha^I \text{ ve } x_i \in \bar{\tilde{A}}_\alpha^I \\ [1,1], & x_i \in \underline{\tilde{A}}_\alpha^I \text{ ve } x_i \in \bar{\tilde{A}}_\alpha^I \end{cases} \quad (5.2)$$

Eş. 5.2'de $[1,0]$ olası bir durum değildir, çünkü x_i α kesmesiyle oluşturulan alt $(\underline{\tilde{A}}_\alpha^I(x_i))$ kesin kümesine ait iken üst $(\bar{\tilde{A}}_\alpha^I(x_i))$ kesin kümesine ait olması mümkün değildir. Ayrıca α kesmeleriyle oluşan alt kesin kümeler her zaman için üst kesin kümelerin alt kümesidir $\underline{\tilde{A}}_\alpha^I(x_i) \subseteq \bar{\tilde{A}}_\alpha^I(x_i)$. Bu nedenle $[1,0]$ durumunun gerçekleşmesi mümkün değildir [169].

Teorem 5.1.

$\tilde{A}'(x_i)$, X evrensel kümesinde tanımlanmış aralıklı tip-2 BK olsun. $\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK'sı $\tilde{A}'_\alpha(x_i)$ kesin kümelerinin birleşimiyle gösterilebilir [169].

$$\tilde{A}'(x_i) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i) \quad (5.3)$$

İspat.

$\tilde{A}'(x_i)$ kümesi alt üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}'}^L(x_i)$ ile ve üst üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}'}^U(x_i)$ ile gösterilsin.

$\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK, $\tilde{A}'(x_i) = \bigcup_{\alpha} \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i)$ ile ve $\tilde{\tilde{A}}'(x_i)$ tip-1 BK $\tilde{\tilde{A}}'(x_i) = \bigcup_{\alpha} \alpha \tilde{\tilde{A}}'_\alpha(x_i)$ ile gösterilebilir. Bu durumda $\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK'sı Eş. 5.4'deki ifadeyle gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \tilde{A}'(x_i) &= \left(\tilde{A}'(x_i), \tilde{\tilde{A}}'(x_i) \right) = \left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i), \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{\tilde{A}}'_\alpha(x_i) \right) \\ &= \left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i), \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{\tilde{A}}'_\alpha(x_i) \right) = \left(\sup_{\alpha \in [0,1]} \{ \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i) \}, \sup_{\alpha \in [0,1]} \{ \alpha \tilde{\tilde{A}}'_\alpha(x_i) \} \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Eş. 5.4'de $\alpha \in [0, \mu_{\tilde{A}'}^L(x_i)]$, $\alpha \in (\mu_{\tilde{A}'}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}'}^U(x_i)]$ yada $\alpha \in (\mu_{\tilde{A}'}^U(x_i), 1]$ değerlerini alır. Alt kümenin gösterimi

$$\begin{aligned} &\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i) \\ &= \max \left[\sup_{\alpha \in [0, \mu_{\tilde{A}'}^L(x_i)]} \{ \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i) \}, \sup_{\alpha \in (\mu_{\tilde{A}'}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}'}^U(x_i)]} \{ \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i) \}, \sup_{\alpha \in (\mu_{\tilde{A}'}^U(x_i), 1]} \{ \alpha \tilde{A}'_\alpha(x_i) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{maks} \left[\sup_{\alpha \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i)]} \{\alpha \wedge 1\}, \sup_{\alpha \in (\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)]} \{\alpha \wedge 0\}, \sup_{\alpha \in (\mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i), 1]} \{\alpha \wedge 0\} \right] \\
&= \text{maks} [\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), 0, 0] = \mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i)
\end{aligned}$$

olarak ispatlanır. Üst kümenin gösterimi

$$\begin{aligned}
\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{A}_{\alpha}^I(x_i) &= \text{maks} \left[\sup_{\alpha \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i)]} \{\alpha \tilde{A}_{\alpha}^I(x_i)\}, \sup_{\alpha \in (\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)]} \{\alpha \tilde{A}_{\alpha}^I(x_i)\}, \sup_{\alpha \in (\mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i), 1]} \{\alpha \tilde{A}_{\alpha}^I(x_i)\} \right] \\
&= \text{maks} \left[\sup_{\alpha \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i)]} \{\alpha \wedge 1\}, \sup_{\alpha \in (\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)]} \{\alpha \wedge 1\}, \sup_{\alpha \in (\mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i), 1]} \{\alpha \wedge 0\} \right] \\
&= \text{maks} [\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i), 0] = \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)
\end{aligned}$$

olarak ispatlanır. $\square$

Tanım 5.2.

X evrensel kümesinde $\tilde{A}^I(x_i)$ aralıklı tip-2 BK ve $\alpha_i \in [0,1]$ $\alpha_j \in [0,1]$, $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ olmak üzere aralıklı α kesmesi Eş. 5.5’de tanımlanmıştır.

$$\tilde{A}_{[\alpha_i, \alpha_j]}^I(x_i) = \{x_i \in X \mid \mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i) \geq \alpha_i \wedge \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i) \geq \alpha_j\} \quad (5.5)$$

$\tilde{A}^I(x_i)$ aralıklı tip-2 BK’sının α kesmeleriyle oluşan alt kesin kümeleri $\underline{\tilde{A}}_{\alpha_1}^I(x_i), \underline{\tilde{A}}_{\alpha_2}^I(x_i), \dots, \underline{\tilde{A}}_{\alpha_n}^I(x_i)$ ve üst kesin kümeleri $\bar{\tilde{A}}_{\alpha_1}^I(x_i), \bar{\tilde{A}}_{\alpha_2}^I(x_i), \dots, \bar{\tilde{A}}_{\alpha_n}^I(x_i)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\underline{\tilde{A}}_{\alpha_n}^I(x_i) \supseteq \underline{\tilde{A}}_{\alpha_{n-1}}^I(x_i) \supseteq \dots \supseteq \underline{\tilde{A}}_{\alpha_2}^I(x_i) \supseteq \underline{\tilde{A}}_{\alpha_1}^I(x_i)$ ve $\bar{\tilde{A}}_{\alpha_n}^I(x_i) \supseteq \bar{\tilde{A}}_{\alpha_{n-1}}^I(x_i) \supseteq \dots \supseteq \bar{\tilde{A}}_{\alpha_2}^I(x_i) \supseteq \bar{\tilde{A}}_{\alpha_1}^I(x_i)$ ve $\bar{\tilde{A}}_{\alpha_1}^I(x_i) \supseteq \tilde{A}_{\alpha_1}^I(x_i)$ şartları sağlan-

maktadır. Aralıklı α kesmeleriyle oluşan kesin kümeler Eş. 5.6'da tanımlanmıştır [170-174].

$$\tilde{A}_{[\alpha_i, \alpha_j]}^I(x_i) = \tilde{A}_{\alpha_i}^I(x_i) \cap \tilde{A}_{\alpha_j}^I(x_i) \quad (5.6)$$

Teorem 5.2.

$\tilde{A}^I(x_i)$, X evrensel kümesinde tanımlanmış aralıklı tip-2 BK olsun. $\tilde{A}^I(x_i)$ aralıklı tip-2 BK'sı $\tilde{A}_{[\alpha, \bar{\alpha}]}^I(x_i)$ kesin kümelerinin birleşimiyle gösterilebilir.

$$\tilde{A}^I(x_i) = \bigcup_{[\alpha_i, \alpha_j] \in [0,1]^2} [\alpha_i, \alpha_j] \tilde{A}_{[\alpha_i, \alpha_j]}^I(x_i) \quad (5.7)$$

İspat.

$\tilde{A}^I(x_i)$ aralıklı tip-2 BK'nın alt üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i)$ ile ve üst üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)$ ile gösterilsin. Bu durumda $\alpha_i \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i)]$ yada $\alpha_i \in (\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), 1]$ değerini alabilir. Aynı şekilde $\alpha_j \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)]$ yada $\alpha_j \in (\mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i), 1]$ değerini alabilir.

$$\begin{aligned} \tilde{A}^I(x_i) &= \bigcup_{[\alpha_i, \alpha_j] \in [0,1]^2} [\alpha_i, \alpha_j] \tilde{A}_{[\alpha_i, \alpha_j]}^I(x_i) = \sup_{[\alpha_i, \alpha_j] \in [0,1]^2} \left\{ [\alpha_i, \alpha_j] \tilde{A}_{[\alpha_i, \alpha_j]}^I(x_i) \right\} \\ &= \left\{ \text{maks} \left[\sup_{\alpha_i \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i)]} \left\{ \alpha_i \tilde{A}_{\alpha_i}^I(x_i) \right\}, \sup_{\alpha_i \in (\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), 1]} \left\{ \alpha_i \tilde{A}_{\alpha_i}^I(x_i) \right\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \text{maks} \left[\sup_{\alpha_j \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)]} \left\{ \alpha_j \tilde{A}_{\alpha_j}^I(x_i) \right\}, \sup_{\alpha_j \in (\mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i), 1]} \left\{ \alpha_j \tilde{A}_{\alpha_j}^I(x_i) \right\} \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \text{maks} \left[\sup_{\alpha_i \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i)]} \{\alpha_i \wedge 1\}, \sup_{\alpha_i \in (\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), 1]} \{\alpha_i \wedge 0\} \right], \right. \\
&\quad \left. \text{maks} \left[\sup_{\alpha_j \in [0, \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)]} \{\alpha_j \wedge 1\}, \sup_{\alpha_j \in (\mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i), 1]} \{\alpha_j \wedge 0\} \right] \right\} \\
&= \text{maks} [\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), 0], \text{maks} [\mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i), 0] = [\mu_{\tilde{A}^I}^L(x_i), \mu_{\tilde{A}^I}^U(x_i)] \quad \square
\end{aligned}$$

Tanım 5.3.

Aralıklı tip-2 BK'ya ait elemanların alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m$ ve $\tilde{A}^I$ aralıklı tip-2 BK'nın güç kümesi $\tilde{\mathcal{O}}^I$ olsun. Güç kümesinin herhangi bir elemanı G_l Eş. 5.8 ile elde edilir.

$$G_l = \tilde{A}_{\alpha_i}^I \cap \bar{\tilde{A}}_{\alpha_j}^I \quad j \geq i \quad (5.8)$$

Güç kümesinin elemanlarını oluşturan birden çok $\tilde{A}_{\alpha_i}^I \cap \bar{\tilde{A}}_{\alpha_j}^I$ kümesi bulunur. Diğer bir deyişle birden çok aralıklı α kesmesiyle G_l bulunabilir. Bu durumda belirgin aralıklı α kesmeleri Eş. 5.9 ile bulunur.

$$\alpha_l^I = \left\{ \left(\sup \alpha_i, \sup \alpha_j \right) \middle| G_l = \tilde{A}_{\alpha_i}^I \cap \bar{\tilde{A}}_{\alpha_j}^I \quad j \geq i \right\} \quad (5.9)$$

Belirgin aralıklı α kesmelerinin oluşturduğu aralıklı seviye kümesi Eş. 5.10'da tanımlanmıştır [172-174].

$$\Upsilon(\tilde{A}^I(x_i)) = \bigcup_{G_l \in \tilde{\mathcal{O}}^I} \left\{ \alpha_l^I \middle| \tilde{A}_{\alpha_l^I}^I(x_i) = G_l \right\} \quad (5.10)$$

Teorem 5.3.

$\tilde{A}'(x_i)$, X evrensel kümesinde tanımlanmış aralıklı tip-2 BK olsun. $\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK'sı $\tilde{A}'_{\alpha'_i}(x_i)$ kesin kümelerinin birleşimiyle gösterilebilir.

$$\tilde{A}'(x_i) = \bigcup_{\alpha'_i \in Y(\tilde{A}'(x_i))} \alpha'_i \tilde{A}'_{\alpha'_i}(x_i) \quad (5.11)$$

İspat.

Teorem 5.2'nin ispatına benzerdir. □

Örnek 5.1.

$\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK olsun.

$$\tilde{A}' = \left\{ \frac{(0;0,6)}{x_1}, \frac{(0,3;0,7)}{x_2}, \frac{(0,5;1)}{x_3}, \frac{(0,5;0,5)}{x_4} \right\}$$

$\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK'ya ait elemanların alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{1;0,7;0,6;0,5;0,3;0\}$ olarak bulunur. Alt ve üst kesin kümeler Çizelge 5.1'de gösterilmiştir.

Aralıklı α kesmelerinin oluşturduğu kesin kümeler Eş.5.6 kullanılarak bulunmuştur.

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_{[0,5;1]} &= \{x_3, x_4\} \cap \{x_3\} = \{x_3\} \\ \tilde{A}'_{[0,3;1]} &= \{x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_3\} = \{x_3\} \\ \tilde{A}'_{[0;1]} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_3\} = \{x_3\} \\ \tilde{A}'_{[0,5;0,7]} &= \{x_3, x_4\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}'_{[0,5;0,6]} &= \{x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_3\} \\
\tilde{A}'_{[0,3;0,7]} &= \{x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\} \\
\tilde{A}'_{[0,0,7]} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\} \\
\tilde{A}'_{[0,3;0,6]} &= \{x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\} \\
\tilde{A}'_{[0,5;0,5]} &= \{x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_3, x_4\} \\
\tilde{A}'_{[0,0,6]} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\} \\
\tilde{A}'_{[0,3;0,5]} &= \{x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\} \\
\tilde{A}'_{[0,3;0,3]} &= \{x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\} \\
\tilde{A}'_{[0,0,5]} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\
\tilde{A}'_{[0,0,3]} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\
\tilde{A}'_{[0,0]} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}
\end{aligned}$$

Çizelge 5.1. Alt ve üst kesin kümeler

α	$\tilde{A}'_{\alpha_i}(x_i)$	$\tilde{A}^I_{\alpha_j}(x_i)$
1	$\emptyset$	$\{x_3\}$
0,7	$\emptyset$	$\{x_2, x_3\}$
0,6	$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
0,5	$\{x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
0,3	$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
0	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Belirgin aralıklı α kesmeleri Eş. 5.9 kullanılarak bulunmuştur.

$$\alpha_1' = \{\sup(0; 0, 3; 0, 5), \sup(0, 6; 0, 7; 1)\} = (0, 5; 1)$$

$$\alpha_2' = \{\sup(0; 0, 3), \sup(0, 6; 0, 7)\} = (0, 3; 0, 7)$$

$$\alpha_3' = (0, 5; 0, 5)$$

$$\alpha_4^I = (0; 0, 6)$$

$$\alpha_5^I = \{\sup(0, 3; 0, 3), \sup(0, 3; 0, 5)\} = (0, 3; 0, 5)$$

$$\alpha_6^I = \{\sup(0; 0; 0), \sup(0; 0, 3; 0, 5)\} = (0; 0, 5)$$

Belirgin aralıklı α kesmelerinin oluşturduğu aralıklı seviye kümesi Eş. 5.10 yardımıyla bulunmuştur.

$$\Upsilon(\tilde{A}^I(x_i)) = \{(0, 5; 1), (0, 3; 0, 7), (0, 5; 0, 5), (0; 0, 6), (0, 3; 0, 5), (0; 0, 5)\}$$

Güç kümesinin elemanları ise

$$G_1 = \tilde{A}_{[0,5;1]}^I = \{x_3\}, \quad G_2 = \tilde{A}_{[0,3;0,7]}^I = \{x_2, x_3\}, \quad G_3 = \tilde{A}_{[0,5;0,5]}^I = \{x_3, x_4\},$$

$$G_4 = \tilde{A}_{[0;0,6]}^I = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad G_5 = \tilde{A}_{[0,3;0,5]}^I = \{x_2, x_3, x_4\}, \quad G_6 = \tilde{A}_{[0;0,5]}^I = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

olarak elde edilir. Elde edilen sonuçlar Yager tarafından önerilen yöntemle elde edilen sonuçlarla aynıdır. Fakat Yager tarafından önerilen yöntemde $\tilde{A}^I(x_i)$ aralıklı tip-2 BK'sının elemanlarına ait tüm alt kümeler oluşturularak belirgin α kesmeleri elde edilmektedir. Buda 2^m tane alt kümenin oluşturulması demektir [171]. Önerilen yöntemde ise en fazla $m(m+1)$ tane durumdan belirgin α kesmeleri elde edilmektedir.

5.2. Aralıklı Kütle Atama Fonksiyonu

Kütle atama fonksiyonu Demspter-Shafer teorisinde ve bulanık küme teorisinde oldukça yaygın kullanılan önemli fonksiyonlardan bir tanesidir. Yapılan çoğu çalışmada kütle atama fonksiyonu kesin bir değere eşittir. Fakat kütle atama fonksiyonu değerinin kesin değer aldığı bazı durumlarda belirsizlik etkin bir şekilde ele alınamamaktadır. Bu nedenle literatürde kütle atama fonksiyonu değerinin aralıklı [175-180] ve BK'larla [181] ifade edildiği çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Bu bölümde aralıklı kütle atama fonksiyonu ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. Aralıklı tip-2 BK'lardan aralıklı kütle atama değeri elde eden yeni bir yaklaşım geliştirilmiş ve geliştirilen yaklaşımın literatürde verilen tanımları sağladığı gösterilmiştir.

Tanım 5.4.

Ω evrensel uzayında tanımlı tüm inanç yapılarının oluşturduğu küme $\mathfrak{T}_\Omega$ olarak tanımlansın. $\mathfrak{T}_\Omega$, $G_1, G_2, \dots, G_n$ gibi n tane durumdan oluşsun ve n tane aralık $[a_l, b_l]$ $1 \leq l \leq n$, $b_l > 0$ şartını sağlasın. Aralıklı kütle atama fonksiyonu $\mathbf{m}$, Eş. 5.12'de tanımlanmıştır [175].

$$\mathbf{m} = \left\{ \mathbf{m} \in \mathfrak{T}_\Omega \mid a_l \leq \mathbf{m}(G_l) \leq b_l, 1 \leq l \leq n, \mathbf{m}(A) = 0, A \notin \{G_1, G_2, \dots, G_n\} \right\} \quad (5.12)$$

Önerme 5.1.

$\mathbf{m}$ 'in bir aralıklı kütle atama fonksiyonu olabilmesi için aşağıda belirtilen şartların sağlanması gerekir [175, 179].

(1) $\mathbf{m}$ aralıklı kütle atama fonksiyonu, aralıklı bir değere eşit olup $0 \leq a_l \leq \mathbf{m}(G_l) \leq b_l \leq 1$ şartını sağlar.

(2) $\mathbf{m}$ aralıklı kütle atama fonksiyonu için $\sum_{l=1}^n a_l \leq 1$ ve $\sum_{l=1}^n b_l \geq 1$ şartlarının sağlanması gerekir.

(3) Eğer $\sum_{l=1}^n a_l > 1$ ve $\sum_{l=1}^n b_l < 1$ olduğu takdirde $\mathbf{m}$ aralıklı kütle atama fonksiyonu tutarsızdır. Önerme 5.1'de verilen 2. madde sağlandı takdirde, en az bir tane kütle atama fonksiyonu $\mathbf{m} \in \mathbf{m}$, $\sum_{l=1}^n \mathbf{m}(G_l) = 1$ şartını sağlar .

Önerme 5.2.

$\mathbf{m}$ aralıklı tutarlı kütle atama fonksiyonu olsun. Eğer a_l ve b_l Eş. 5.13 ve Eş. 5.14 verilen şartları sağlarsa $\mathbf{m}$ aralıklı tutarlı normalize kütle atama fonksiyonudur [179].

$$\sum_{i=1}^n b_i - (b_l - a_l) \geq 1 \quad (5.13)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i + (b_l - a_l) \leq 1 \quad (5.14)$$

Tanım 5.5.

$\tilde{A}'(x_i)$ $\mathcal{L}'$ 'de tanımlı $[1,1]$ elemanına sahip aralıklı tip-2 BK ve α_l' belirgin aralıklı α kesmesi olsun. Bu durumda güç kümesinin iç içe geçmiş alt kümelerine ait aralıklı kütle atama fonksiyonu Eş. 5.15 kullanılarak elde edilir.

$$\mathbf{m}(G_l) = [a_l, b_l] = [\mathbf{m}^-(G_l), \mathbf{m}^+(G_l)] = [\max\{0, \alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U\}, \alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L] \quad (5.15)$$

Teorem 5.4.

Eş. 5.15'de tanımlanan $\mathbf{m}$ Önerme 5.1'i sağladığı için aralıklı tutarlı kütle atama fonksiyonudur.

İspat.

$$\alpha_1^L = 1 \geq \alpha_2^L \geq \dots \geq \alpha_{l-1}^L \geq \alpha_l^L \geq \alpha_{l+1}^L \geq \dots \geq \alpha_n^L \geq \alpha_{n+1}^L = 0, \alpha_1^U = 1 \geq \alpha_2^U \geq \dots \geq \alpha_{l-1}^U \geq \alpha_l^U \geq \alpha_{l+1}^U \geq \dots \geq \alpha_n^U \geq \alpha_{n+1}^U = 0 \text{ ve } \alpha_l^U \geq \alpha_l^L \text{ şartı tüm } l \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ için sağlanır.}$$

$$(1) 0 \leq a_l \leq \mathbf{m}(G_l) \leq b_l \leq 1 \text{ şartı sağlanır.}$$

$a_l = \max\{0, \alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U\}$ ifadesi her zaman için 0'a eşit yada büyüktür. $\alpha_l^U \geq \alpha_{l+1}^L$ olduğu için, $b_l = \alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L$ ifadesi de her zaman için 0'a eşit yada büyüktür. $\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L \geq \max\{0, \alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U\}$ ifadesinde $\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L \geq 0$ her zaman için sağlanır. $\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L \geq \alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U$ ifadesi $\alpha_l^U + \alpha_{l+1}^U \geq \alpha_l^L + \alpha_{l+1}^L$ olarak yazılabilir. $\alpha_l^U \geq \alpha_l^L$ ve $\alpha_{l+1}^U \geq \alpha_{l+1}^L$ olduğu için $\alpha_l^U + \alpha_{l+1}^U \geq \alpha_l^L + \alpha_{l+1}^L$ eşitsizliği de her zaman için sağlanmaktadır. $\square$

(2) $\sum_{l=1}^n a_l$ ifadesi Eş. 5.15 kullanılarak açık bir şekilde yazılırsa Eş. 5.16 elde edilir.

$$\max\{0, (\alpha_1^L - \alpha_2^U)\} + \max\{0, (\alpha_2^L - \alpha_3^U)\} + \dots + \max\{0, (\alpha_n^L - \alpha_{n+1}^U)\} \quad (5.16)$$

Bu ifade 0'a eşit yada büyüktür. Her bir durumda $(\alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U) > 0$ olduğu takdirde Eş. 5.16, Eş.5.17'ye dönüşür.

$$(\alpha_1^L - \alpha_2^U) + (\alpha_2^L - \alpha_3^U) + \dots + (\alpha_n^L - \alpha_{n+1}^U) \quad (5.17)$$

Eş. 5.17, bazı düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\alpha_1^L - \{(\alpha_2^U - \alpha_2^L) + (\alpha_3^U - \alpha_3^L) + \dots + (\alpha_n^U - \alpha_n^L) + \alpha_{n+1}^U\} = \alpha_1^L - \sum_{l=2}^n (\alpha_l^U - \alpha_l^L)$$

olarak yazılır. $\alpha_l^U \geq \alpha_l^L$ olduğu için $\sum_{l=2}^n (\alpha_l^U - \alpha_l^L) \geq 0$ 'dır. Bu durumda

$\alpha_1^L - \sum_{l=2}^n (\alpha_l^U - \alpha_l^L) \leq \alpha_1^L$ ifadesi her zaman için doğrudur. α_1^L 'nin alabileceği

maksimum değerde 1 olduğu için $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$ her zaman için sağlanır.

$\sum_{i=1}^n b_i$ ifadesi, Eş.5.15 kullanılarak açık bir şekilde yazılırsa Eş. 5.18 elde edilir.

$$(\alpha_1^U - \alpha_2^L) + (\alpha_2^U - \alpha_3^L) + \dots + (\alpha_n^U - \alpha_{n+1}^L) \quad (5.18)$$

Eş. 5.18, bazı düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\alpha_1^U + \{(\alpha_2^U - \alpha_2^L) + (\alpha_3^U - \alpha_3^L) \dots + (\alpha_n^U - \alpha_n^L) - \alpha_{n+1}^L\} = \alpha_1^U + \sum_{l=2}^b (\alpha_l^U - \alpha_l^L)$$

olarak yazılır. $\alpha_l^U \geq \alpha_l^L$ olduğu için $\sum_{l=2}^n (\alpha_l^U - \alpha_l^L) \geq 0$ 'dır. Bu durumda

$\alpha_1^U + \sum_{l=2}^b (\alpha_l^U - \alpha_l^L) \geq \alpha_1^U$ ifadesi her zaman için doğrudur. α_1^U 'in alabileceği

maksimum değerde 1 olduğu için $\sum_{l=1}^n b_l \geq 1$ eşitsizliği her zaman için sağlanır. $\square$

(3) özelliğin ispatı daha önce Denoeux [175] tarafından yapılmıştır. $\sum_{l=1}^n a_l = h$,

$\sum_{l=1}^n b_l = H$ ve $\lambda = \frac{H-1}{H-h}$ olsun. $m(G_l) = a_l \lambda + (1-\lambda) b_l$ olarak ifade edilsin.

$\sum_{l=1}^n a_l \leq \sum_{l=1}^n m(G_l) \leq \sum_{l=1}^n b_l$ ifadesi kullanılarak

$$\sum_{l=1}^n m(G_l) = \sum_{l=1}^n a_l \lambda + (1-\lambda) \sum_{l=1}^n b_l \quad (5.19)$$

şeklinde yazılabilir. $\lambda = \frac{H-1}{H-h}$, Eş. 5.19'da açık şekilde yazılırsa Eş. 5.20 elde edilir.

$$\sum_{l=1}^n m(G_l) = h \left(\frac{H-1}{H-h} \right) + \left(1 - \frac{H-1}{H-h} \right) H = \frac{Hh - h + H - Hh}{H-h} = 1 \quad (5.20)$$

Eş. 5.20, en az bir tane kütle atama fonksiyonun $\sum_{l=1}^n m(G_l) = 1$ şartını sağladığını ispat etmektedir. $\square$

Teorem 5.5.

Eş. 5.15’de tanımlanan **m**, Önerme 5.2’yi sağladığı için aralıklı tutarlı normalize kütle atama fonksiyonudur.

İspat.

$\sum_{i=1}^n b_i - (b_l - a_l) \geq 1$ ifadesi $a_l \geq 1 - \sum_{i=1}^n b_i + b_l$ olarak yazılabilir. Bu eşitsizlik açık bir şekilde

$$\max\{0, \alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U\} \geq 1 - \{(\alpha_1^U - \alpha_2^L) + (\alpha_2^U - \alpha_3^L) + \dots + (\alpha_n^U - \alpha_{n+1}^L)\} + (\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L)$$

olarak ifade edilebilir. $\alpha_1^U = 1$ ve $\alpha_{n+1}^L = 0$ olduğu için bu eşitsizlik

$$\max\{0, \alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U\} \geq 1 - 1 + \{(\alpha_2^L - \alpha_2^U) + (\alpha_3^L - \alpha_3^U) + \dots + (\alpha_n^L - \alpha_n^U)\} + (\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L)$$

şeklinde gösterilebilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde Eş. 5.21 elde edilir.

$$\max\{-(\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L), \alpha_l^L - \alpha_l^U + \alpha_{l+1}^L - \alpha_{l+1}^U\} \geq \sum_{i=2}^n (\alpha_i^L - \alpha_i^U) \quad (5.21)$$

$\alpha_l^L - \alpha_l^U + \alpha_{l+1}^L - \alpha_{l+1}^U$ ifadesi her zaman için $\sum_{i=2}^n (\alpha_i^L - \alpha_i^U)$ ifadesinden büyüktür.

Eğer $\alpha_l^L - \alpha_l^U + \alpha_{l+1}^L - \alpha_{l+1}^U$ ifadesi $-(\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L)$ ifadesinden büyükse Eş. 5.21 her zaman için sağlanır. $-(\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L)$ ifadesi $\alpha_l^L - \alpha_l^U + \alpha_{l+1}^L - \alpha_{l+1}^U$ ifadesinden büyükse,

$\sum_{i=2}^n (\alpha_i^L - \alpha_i^U)$ ifadesinden de her zaman için büyüktür. Buradan Eş. 5.13'ün her zaman için sağlandığı gözükmemektedir.

$\sum_{i=1}^n a_i + (b_l - a_l) \leq 1$ ifadesi $b_l \leq 1 - \sum_{i=1}^n a_i + a_l$ olarak yazılabilir. Bu eşitsizlik açık bir şekilde

$$(\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L) \leq 1 - \left\{ \max\{0, (\alpha_1^L - \alpha_2^U)\} + \dots + \max\{0, (\alpha_n^L - \alpha_{n+1}^U)\} \right\} + \max\{0, (\alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U)\}$$

olarak ifade edilebilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde Eş. 5.22 elde edilir.

$$(\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L) - \max\{0, (\alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U)\} \leq 1 - \left\{ \sum_{i=1}^n \max\{0, (\alpha_i^L - \alpha_{i+1}^U)\} \right\} \quad (5.22)$$

Eş. 5.22'de $\alpha_1^U = 1$ ifadesi yerine konulursa, Eş. 5.23'deki eşitsizlik elde edilir.

$$(\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L) - \max\{0, (\alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U)\} \leq \alpha_1^U - \left\{ \sum_{i=1}^n \max\{0, (\alpha_i^L - \alpha_{i+1}^U)\} \right\} \quad (5.23)$$

Eş. 5.23'deki eşitsizliğin sağlandığının gösterilmesi için iki durumun incelenmesi gerekir. İlk durumda $(\alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U) < 0$ ve diğer tüm $i \in \{1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n\}$ için $(\alpha_i^L - \alpha_{i+1}^U) > 0$ eşitsizliği ele alınsın. Bu durumda Eş. 5.23, Eş. 5.24'e denktir.

$$(\alpha_l^U - \alpha_{l+1}^L) \leq \alpha_1^U - \left\{ (\alpha_1^L - \alpha_2^U) + \dots + (\alpha_n^L - \alpha_{n+1}^U) \right\} + (\alpha_l^L - \alpha_{l+1}^U) \quad (5.24)$$

İkinci durumda ise tüm $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $(\alpha_i^L - \alpha_{i+1}^U) > 0$ eşitsizliği ele alınsın. Bu durumda da Eş. 5.23, Eş. 5.24'e denktir. Gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde Eş. 5.24, Eş. 5.25'de verilen ifade ile gösterilir.

$$(\alpha_l^U - \alpha_l^L) + (\alpha_{l+1}^U - \alpha_{l+1}^L) \leq \sum_{i=1}^n (\alpha_i^U - \alpha_i^L) + \underbrace{\alpha_{n+1}^U}_0 \quad (5.25)$$

Eş. 5.25’de $\sum_{i=1}^n (\alpha_i^U - \alpha_i^L)$ değeri her zaman için $(\alpha_l^U - \alpha_l^L) + (\alpha_{l+1}^U - \alpha_{l+1}^L)$ değerinden büyüktür. Buradan Eş. 5.14’ün her zaman için sağlandığı gösterilmiş olur. $\square$

Tanım 5.6.

m aralıklı tutarlı normalize kütle atama fonksiyonu olsun. *A* kümesinin aralıklı inanç ve mümkünlük ölçümleri Eş. 5.26 – Eş. 5.29’da tanımlanmıştır [175].

$$\text{Bel}_m^-(A) = \max \left[\sum_{G_l \subseteq A} m^-(G_l), \left(1 - \sum_{G_l \not\subseteq A} m^+(G_l) \right) \right] \quad (5.26)$$

$$\text{Bel}_m^+(A) = \min \left[\sum_{G_l \subseteq A} m^+(G_l), \left(1 - \sum_{G_l \not\subseteq A} m^-(G_l) \right) \right] \quad (5.27)$$

$$\text{Pl}_m^-(A) = \max \left[\sum_{G_l \cap A \neq \emptyset} m^-(G_l), \left(1 - \sum_{G_l \cap A = \emptyset} m^+(G_l) \right) \right] \quad (5.28)$$

$$\text{Pl}_m^+(A) = \min \left[\sum_{G_l \cap A \neq \emptyset} m^+(G_l), \left(1 - \sum_{G_l \cap A = \emptyset} m^-(G_l) \right) \right] \quad (5.29)$$

Aralıklı inanç ve mümkünlük fonksiyonları arasındaki ilişki Eş. 5.30 ve Eş. 5.31 ile gösterilmiştir.

$$\text{Pl}_m^-(A) = 1 - \text{Bel}_m^+(\bar{A}) \quad (5.30)$$

$$\text{Pl}_m^+(A) = 1 - \text{Bel}_m^-(\bar{A}) \quad (5.31)$$

Örnek 5.2.

$\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK

$$\tilde{A}' = \left\{ \frac{(0,2;0,6)}{x_1}, \frac{(0,3;0,7)}{x_2}, \frac{(1;1)}{x_3} \right\}$$

olarak tanımlansın. Belirgin aralıklı α kesmeleri $\alpha_1' = (1;1) = \{x_3\}$, $\alpha_2' = (0,3;0,7) = \{x_2, x_3\}$ ve $\alpha_3' = (0,2;0,6) = \{x_1, x_2, x_3\}$ olarak bulunur. Aralıklı tutarlı normalize edilmiş kütle atama fonksiyonları

$$\mathbf{m}(G_1 = \{x_3\}) = [0,3;0,7] \quad \mathbf{m}(G_2 = \{x_2, x_3\}) = [0;0,5] \quad \mathbf{m}(G_3 = \{x_1, x_2, x_3\}) = [0,2;0,6]$$

olarak elde edilir. Eş. 5.26 - Eş. 5.29 kullanılarak aralıklı inanç ve mümkünlik fonksiyonları hesaplanmış ve Çizelge 5.2'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{Bel}_m^-(\{x_3\}) &= \text{maks}[0,3;-0,1] = 0,3, & \text{Bel}_m^+(\{x_3\}) &= \min[0,7;0,8] = 0,7 \\ \text{Pl}_m^-(\{x_3\}) &= \text{maks}[0,5;1] = 1, & \text{Pl}_m^+(\{x_3\}) &= \min[1,8;1] = 1 \\ \text{Bel}_m^-(\{x_2, x_3\}) &= \text{maks}[0,3;0,4] = 0,4, & \text{Bel}_m^+(\{x_2, x_3\}) &= \min[1,2;0,8] = 0,8 \\ \text{Pl}_m^-(\{x_2, x_3\}) &= \text{maks}[0,5;1] = 1, & \text{Pl}_m^+(\{x_2, x_3\}) &= \min[1,8;1] = 1 \\ \text{Bel}_m^-(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \text{maks}[0,5;1] = 1, & \text{Bel}_m^+(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \min[1,8;1] = 1 \\ \text{Pl}_m^-(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \text{maks}[0,5;1] = 1, & \text{Pl}_m^+(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \min[1,8;1] = 1 \end{aligned}$$

Çizelge 5.2. Aralıklı inanç ve mümkünlik fonksiyonları

G_l	$\mathbf{m}(G_l)$	$[\text{Bel}_m^-, \text{Bel}_m^+]$	$[\text{Pl}_m^-, \text{Pl}_m^+]$
$\{x_3\}$	$[0,30;0,70]$	$[0,30;0,70]$	$[1,00;1,00]$
$\{x_2, x_3\}$	$[0,00;0,50]$	$[0,40;0,80]$	$[1,00;1,00]$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$[0,20;0,60]$	$[1,00;1,00]$	$[1,00;1,00]$

Örnek 5.3.

$\tilde{A}'(x_i)$ aralıklı tip-2 BK

$$\tilde{A}' = \left\{ \frac{(1;1)}{x_1}, \frac{(0,8;0,9)}{x_2}, \frac{(0,6;0,85)}{x_3}, \frac{(0,4;0,5)}{x_4} \right\}$$

olarak tanımlansın. Belirgin aralıklı α kesmeleri $\alpha_1' = (1;1) = \{x_1\}$ $\alpha_2' = (0,8;0,9) = \{x_1, x_2\}$ $\alpha_3' = (0,6;0,85) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $\alpha_4' = (0,4;0,5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olarak bulunur. Aralıklı tutarlı normalize edilmiş kütle atama fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(G_1 = \{x_1\}) &= [0,1;0,2], \quad \mathbf{m}(G_2 = \{x_1, x_2\}) = [0;0,3], \\ \mathbf{m}(G_3 = \{x_1, x_2, x_3\}) &= [0,1;0,45], \quad \mathbf{m}(G_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = [0,4;0,5] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eş.5.26-Eş.5.29 kullanılarak aralıklı inanç ve mümkünlük fonksiyonları hesaplanmış ve Çizelge 5.3'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{Bel}_m^-(\{x_1\}) &= \text{maks}[0,1;-0,25] = 0,1, & \text{Bel}_m^+(\{x_1\}) &= \min[0,2;0,5] = 0,2 \\ \text{Pl}_m^-(\{x_1\}) &= \text{maks}[0,6;1] = 1, & \text{Pl}_m^+(\{x_1\}) &= \min[1,45;1] = 1 \\ \text{Bel}_m^-(\{x_1, x_2\}) &= \text{maks}[0,1;0,05] = 0,1, & \text{Bel}_m^+(\{x_1, x_2\}) &= \min[0,5;0,5] = 0,5 \\ \text{Pl}_m^-(\{x_1, x_2\}) &= \text{maks}[0,6;1] = 1, & \text{Pl}_m^+(\{x_1, x_2\}) &= \min[1,45;1] = 1 \\ \text{Bel}_m^-(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \text{maks}[0,2;0,5] = 0,5, & \text{Bel}_m^+(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \min[0,95;0,6] = 0,6 \\ \text{Pl}_m^-(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \text{maks}[0,6;1] = 1, & \text{Pl}_m^+(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \min[1,45;1] = 1 \\ \text{Bel}_m^-(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) &= \text{maks}[0,6;1] = 1, & \text{Bel}_m^+(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) &= \min[1,45;1] = 1 \end{aligned}$$

Çizelge 5.3. Aralıklı inanç ve mümkünlik fonksiyonları

G_l	$\mathbf{m}(G_l)$	$[\text{Bel}_m^-, \text{Bel}_m^+]$	$[\text{Pl}_m^-, \text{Pl}_m^+]$
$\{x_1\}$	$[0,10;0,20]$	$[0,10;0,20]$	$[1,00;1,00]$
$\{x_1, x_2\}$	$[0,00;0,30]$	$[0,10;0,50]$	$[1,00;1,00]$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$[0,10;0,45]$	$[0,40;0,50]$	$[1,00;1,00]$
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$[0,40;0,50]$	$[1,00;1,00]$	$[1,00;1,00]$

$\{x_1, x_2\}$ kümesinin aralıklı inanç fonksiyonu $[0,1;0,5]$ olarak bulunmuştur. Eş. 5.30 ve Eş. 5.31 kullanıldığında, $\{x_1, x_2\}$ kümesinin tümleyeni olan $\{x_3, x_4\}$ kümesinin aralıklı mümkünlik fonksiyonu $[0,5;0,9]$ 'a eşittir. Fakat $\{x_3, x_4\}$ kümesinin aralıklı mümkünlik fonksiyonu $[0,4;0,5]$ olarak hesaplanmıştır. Bu değer farklı çıkmasının nedeni $\mathbf{m} \in \mathbf{m}$ ve $\sum_{l=1}^n \mathbf{m}(G_l) = 1$ şartını sağlayan kütle atama fonksiyonu kullanılarak elde edilen gömülü tip-1 BK'nın $\tilde{A}^l$ aralıklı tip-2 BK'sı tarafından kapsanmamasıdır. Örnekte $\mathbf{m} \in \mathbf{m}$ ve $\sum_{l=1}^4 \mathbf{m}(G_l) = 1$ şartını sağlayan herhangi bir kütle atama fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(G_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) &= 0,4, \quad \mathbf{m}(G_3 = \{x_1, x_2, x_3\}) = 0,1 \\ \mathbf{m}(G_2 = \{x_1, x_2\}) &= 0,3, \quad \mathbf{m}(G_1 = \{x_1\}) = 0,2 \end{aligned}$$

olarak bulunsun. $G_4 \supseteq G_3 \supseteq G_2 \supseteq G_1$ olduğu için $A^e = \{1/x_1, 0.8/x_2, 0.5/x_3, 0.4/x_4\}$ olarak bulunur. Gömülü tip-1 BK'da x_3 elemanın üyelik derecesi 0,5'dir. Fakat aralıklı tip-2 BK'da x_3 elemanın üyelik derecesinin 0,6 ile 0,85 arasında bir değere eşit olması gerekmektedir. Bu örnekten görüldüğü gibi aralıklı kütle atama fonksiyonu ile aralıklı tip-2 BK'dan elde edilen aralıklı inanç ve mümkünlik fonksiyonları arasındaki dönüşüm tam anlamıyla sağlanamamaktadır. Dönüşümle ilgili benzer bir sorun daha önce Denoeux [175] tarafından yapılan çalışmada da belirtilmiştir.

5.3. Tip-II Niceleyici Cümle Yapısındaki Aralıklı Tip-2 Bulanık Özetlerin Değerlendirilmesi: Aralıklı Kütle Atama Fonksiyonu Temelli Yöntem

Aralıklı tip-2 BK'larla dilsel özetleme ilk olarak Niewiadomski tarafından önerilmiştir [5, 85-88]. Daha sonra Wu ve Mendel aralıklı tip-2 BK'larla dilsel özetleme de "eğer-ise" özet yapısını kullanmıştır [8]. Yapılan çalışmalarda Zadeh [40] tarafından önerilen doğruluk derecesi aralıklı tip-2 BK'lara genişletilmiştir. Bu bölümde aralıklı kütle atama fonksiyonu kullanılarak dilsel özetlemede doğruluk derecesini hesaplamak için yeni bir yöntem önerilmiştir.

Bu bölümde, " $Q \tilde{S}_g^I Y$ (*nesneler*), $\tilde{S}^I$ *dir.*" yapısı dilsel özet olarak kullanılmıştır. Bu özet yapısında $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'lar ile etiketlenmiştir. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'lar

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{[\mu_{\tilde{S}_g^I}^L(v_g^1), \mu_{\tilde{S}_g^I}^U(v_g^1)]}{y_1}, \frac{[\mu_{\tilde{S}_g^I}^L(v_g^2), \mu_{\tilde{S}_g^I}^U(v_g^2)]}{y_2}, \dots, \frac{[\mu_{\tilde{S}_g^I}^L(v_g^M), \mu_{\tilde{S}_g^I}^U(v_g^M)]}{y_M} \right\}$$

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^1), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^1)]}{y_1}, \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^2), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^2)]}{y_2}, \dots, \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^M), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^M)]}{y_M} \right\}$$

olsun. Önerilen yöntem aşağıda verilen adımlardan oluşur.

Adım 1. Aralıklı α kesmeleri ve kesin kümelerin bulunması

$\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK'sının belirgin aralıklı α kesmeleri Eş.5.9 kullanılarak $\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_1}^I =$

$$\left[\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_1}^L, \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_1}^U \right], \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_2}^I = \left[\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_2}^L, \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_2}^U \right], \dots, \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_i}^I = \left[\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_i}^L, \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_i}^U \right] \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

$(\tilde{S}_g^I)_i$ i. belirgin aralıklı α kesmesiyle elde edilen kesin kümeyi göstermektedir. $\tilde{S}^I$

aralıklı tip-2 BK'sının belirgin aralıklı α kesmeleri Eş.5.9 kullanılarak $\alpha_{(\tilde{S}^I)_1}^I =$

$\left[\alpha_{(\tilde{S}^I)_1}^L, \alpha_{(\tilde{S}^I)_1}^U \right], \alpha_{(\tilde{S}^I)_2}^I = \left[\alpha_{(\tilde{S}^I)_2}^L, \alpha_{(\tilde{S}^I)_2}^U \right], \dots, \alpha_{(\tilde{S}^I)_J}^I = \left[\alpha_{(\tilde{S}^I)_J}^L, \alpha_{(\tilde{S}^I)_J}^U \right]$ şeklinde tanımlansın.
 $(\tilde{S}^I)_j$ j . belirgin aralıklı α kesmesiyle elde edilen kesin kümeyi göstermektedir.

Adım 2. Aralıklı tutarlı normalize kütle atama fonksiyonlarının bulunması

$(\tilde{S}_g^I)_i$ kesin kümesine ait aralıklı tutarlı normalize kütle atama fonksiyonu Eş.5.32’de tanımlanmıştır.

$$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}((\tilde{S}_g^I)_i) = \left[\mathbf{m}^-(\tilde{S}_g^I)_i, \mathbf{m}^+(\tilde{S}_g^I)_i \right] = \left[\max \left\{ 0, \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_i}^L - \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_{i+1}}^U \right\}, \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_i}^U - \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_{i+1}}^L \right] \quad (5.32)$$

$(\tilde{S}^I)_j$ kesin kümesine ait aralıklı tutarlı normalize kütle atama fonksiyonu Eş.5.33’de tanımlanmıştır.

$$\mathbf{m}_{\tilde{S}^I}((\tilde{S}^I)_j) = \left[\mathbf{m}^-(\tilde{S}^I)_j, \mathbf{m}^+(\tilde{S}^I)_j \right] = \left[\max \left\{ 0, \alpha_{(\tilde{S}^I)_j}^L - \alpha_{(\tilde{S}^I)_{j+1}}^U \right\}, \alpha_{(\tilde{S}^I)_j}^U - \alpha_{(\tilde{S}^I)_{j+1}}^L \right] \quad (5.33)$$

Adım 3. Aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK’nın aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarına ait kütle atamaları Eş. 5.34 ve Eş. 5.35’de tanımlanmıştır.

$$\mathfrak{M}_{\tilde{S}_g^I} = \left\{ \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_i \mid \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_i \in \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}((\tilde{S}_g^I)_i) \right\} \quad (5.34)$$

$$\mathfrak{M}_{\tilde{S}^I} = \left\{ \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_j \mid \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_j \in \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}((\tilde{S}^I)_j) \right\} \quad (5.35)$$

Çizelge 5.4’de $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK’lara ait kütle atamaları ve birleşik kütle atamaları gösterilmiştir. $(\tilde{S}_g^I)_1 \left| m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \right.$, $\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK’nın 1. belirgin aralıklı α kesmesiyle elde edilen kesin kümeyi, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1$, $(\tilde{S}_g^I)_1$ kümesinin kütle atama fonksiyonunu göstermektedir. m_{ij} i . satır j sütuna ((i,j) hücresi) atanan kütle atama büyüklüğünü göstermektedir. En az yargılı olasılık dağılımı kullanıldığında, m_{ij} değeri $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_i$ ve $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_j$ değerlerinin çarpımına eşittir.

Çizelge 5.4. Aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı

	$(\tilde{S}^I)_1 \left m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}^I)_1 \right.$	$(\tilde{S}^I)_2 \left m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}^I)_2 \right.$	...	$(\tilde{S}^I)_j \left m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}^I)_j \right.$	...	$(\tilde{S}^I)_m \left m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}^I)_m \right.$
$(\tilde{S}_g^I)_1 \left m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \right.$	m_{11}	m_{12}	...	m_{1j}	...	m_{1J}
$(\tilde{S}_g^I)_2 \left m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \right.$	m_{21}	m_{22}	...	m_{2j}	...	m_{2J}
...	...	...	...	...	...	...
$(\tilde{S}_g^I)_i \left m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_i \right.$	m_{i1}	m_{i2}	...	m_{ij}	...	m_{iJ}
...	...	...	...	...	...	...
$(\tilde{S}_g^I)_m \left m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_m \right.$	m_{m1}	m_{m2}	...	m_{mj}	...	m_{mJ}

Adım 4. Doğruluk derecesinin hesaplanması

Kütle atamasına dayalı doğruluk derecesi $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK’larına ait kütle atamalarına göre Eş. 5.36’da tanımlanmıştır. Kütle atamalarının alabileceği sonsuz sayıda değer vardır. Bu değerlerden bazıları doğruluk derecesini en küçüklemede, bazıları ise en büyüklemede. Bu değerleri bulmak için doğrusal olmayan kısıtlı optimizasyon modeli Eş. 5.36 - Eş. 5.42’de kurulmuştur. Bu modelde Eş. 5.36’da amaç fonksiyonun yani doğruluk derecesinin en büyüklenmesi ve en küçüklenmesi hedeflenmektedir. Eş. 5.37 ve Eş. 5.38 kütle atama değerlerinin alt ve üst sınırlarını göstermektedir. Eş. 5.39 ve Eş. 5.40 aralıklı tip-2 BK’lar tarafından kapsanmayan gömülü tip-1 BK’lardan elde edilen kütle atama değerlerinin doğruluk derecesinin hesaplanmasında kullanılmasını engellemektedir. Eş. 5.41 ve Eş. 5.42 kütle atama değerlerinin toplamının 1’e eşit olmasını sağlamaktadır.

$$\text{maks / min } \tilde{T}_E = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_i \times m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_j \times Q \left(\frac{|\left(\tilde{S}_g^I\right)_i \cap \left(\tilde{S}^I\right)_j|}{\left|\left(\tilde{S}_g^I\right)_i\right|} \right) \quad (5.36)$$

Kısıtlar

$$m^-(\tilde{S}_g^I)_i \leq m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_i \leq m^+(\tilde{S}_g^I)_i \quad (5.37)$$

$$m^-(\tilde{S}^I)_j \leq m(\tilde{S}^I)_j \leq m^+(\tilde{S}^I)_j \quad (5.38)$$

$$\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_k}^L \leq \sum_{i=k}^I m(\tilde{S}_g^I)_i \leq \alpha_{(\tilde{S}_g^I)_k}^U \quad k = 2, 3, \dots, I \quad (5.39)$$

$$\alpha_{(\tilde{S}^I)_k}^L \leq \sum_{j=k}^J m(\tilde{S}^I)_j \leq \alpha_{(\tilde{S}^I)_k}^U \quad k = 2, 3, \dots, J \quad (5.40)$$

$$\sum_{j=1}^J m(\tilde{S}^I)_j = 1 \quad (5.41)$$

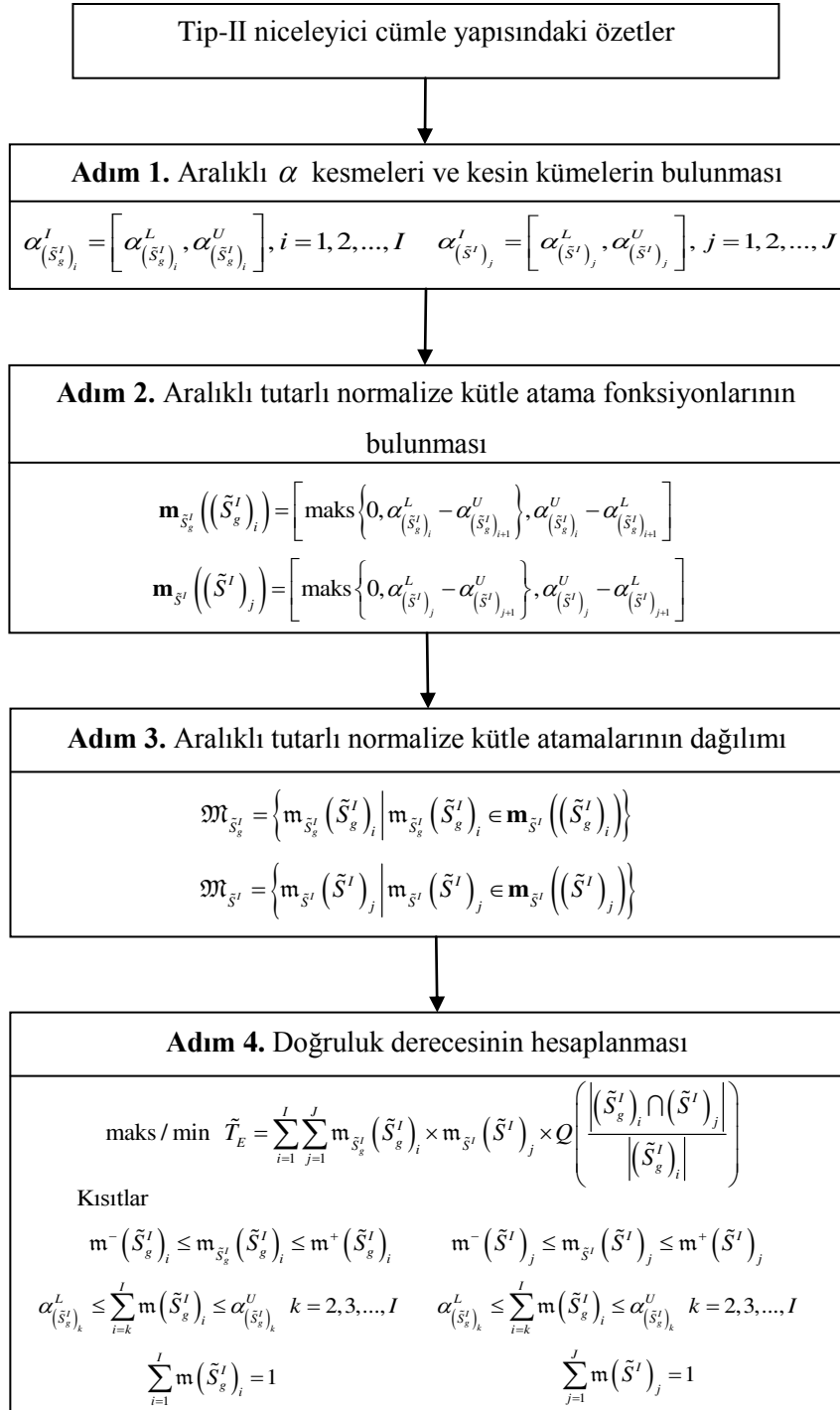
$$\sum_{i=1}^I m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_i = 1 \quad (5.42)$$

Tip-II niceleyici cümle yapısındaki özetleri değerlendirmek için önerilen yöntem Şekil 5.2’de verilmiştir.

Birden çok öncülün ve ardılın olduğu tip-II niceleyici cümle yapısındaki özet aşağıda tanımlanmıştır.

$Q Y$ (nesneler), $\tilde{S}_1^I$ ve...ve $\tilde{S}_A^I$, $\tilde{S}_{A+1}^I$ ve...ve $\tilde{S}_C^I$ 'dir.

Bu özet yapısını değerlendirmek için önerilen doğruluk derecesi aşağıda verilen adımlar kullanılarak hesaplanır.



Şekil 5.2. Tip-II niceleyici cümle yapısındaki özetleri değerlendirmesi için önerilen yöntem

Adım 1. Aralıklı α kesmeleri ve kesin kümelerin bulunması

$\tilde{S}_c^I$ $c = 1, 2, \dots, A-1, A, A+1, \dots, C$ aralıklı tip-2 BK'ları için belirgin aralıklı α kesmeleri Eş. 5.9 kullanılarak $\alpha_{(\tilde{S}_c^I)_{i_c}}^I = \left[\alpha_{(\tilde{S}_c^I)_{i_c}}^L, \alpha_{(\tilde{S}_c^I)_{i_c}}^U \right]$, $i_c = 1, 2, \dots, I_c$ şeklinde bulunur. $(\tilde{S}_c^I)_{i_c}$ c. aralıklı tip-2 BK'sının i_c belirgin aralıklı α kesmesiyle elde edilen kesin kümeyi göstermektedir.

Adım 2. Aralıklı tutarlı normalize kütle atama fonksiyonlarının bulunması

$(\tilde{S}_c^I)_{i_c}$ kesin kümesine ait aralıklı tutarlı normalize kütle atama fonksiyonu Eş. 5.43'de tanımlanmıştır.

$$\mathbf{m}_{\tilde{S}_c^I} \left((\tilde{S}_c^I)_{i_c} \right) = \left[\mathbf{m}^- \left((\tilde{S}_c^I)_{i_c} \right), \mathbf{m}^+ \left((\tilde{S}_c^I)_{i_c} \right) \right] = \left[\max \left\{ 0, \alpha_{(\tilde{S}_c^I)_{i_c}}^L - \alpha_{(\tilde{S}_c^I)_{i_c+1}}^U \right\}, \alpha_{(\tilde{S}_c^I)_{i_c}}^U - \alpha_{(\tilde{S}_c^I)_{i_c+1}}^L \right] \quad (5.43)$$

Adım 3. Aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı

$\tilde{S}_c^I$ $c = 1, 2, \dots, A-1, A, A+1, \dots, C$ aralıklı tip-2 BK'ların aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarına ait kütle atamaları Eş. 5.44'de tanımlanmıştır.

$$\mathfrak{M}_{\tilde{S}_c^I} = \left\{ \mathbf{m}_{\tilde{S}_c^I} \left(\tilde{S}_c^I \right)_{i_c} \mid \mathbf{m}_{\tilde{S}_c^I} \left(\tilde{S}_c^I \right)_{i_c} \in \mathbf{m}_{\tilde{S}_c^I} \left((\tilde{S}_c^I)_{i_c} \right) \right\} \quad (5.44)$$

En az yargılı olasılık dağılımı kullanılarak birleşik olasılık atama değeri elde edilir. Bu değer tüm kütle atama değerlerinin çarpımına eşittir.

Adım 4. Doğruluk derecesinin hesaplanması

Kütle atamalarının alabileceği sonsuz sayıda değer vardır. Bu değerlerden bazıları doğruluk derecesini en küçükmekte, bazıları ise en büyükmektedir. Bu değerleri

bulmak için doğrusal olmayan kısıtlı optimizasyon modeli Eş. 5.45 - Eş. 5.48'de kurulmuştur. Bu modelde Eş. 5.45'de amaç fonksiyonun yani doğruluk derecesinin en büyüklmesi ve en küçüklenmesi hedeflenmektedir. Eş. 5.46 kütle atama değerlerinin alt ve üst sınırlarını göstermektedir. Eş. 5.47 aralıklı tip-2 BK'lar tarafından kapsanmayan gömülü tip-1 BK'lardan elde edilen kütle atama değerlerinin doğruluk derecesinin hesaplanmasında kullanılmasını engellemektedir. Eş. 5.48 kütle atama değerlerinin toplamının 1'e eşit olmasını sağlamaktadır.

$$\text{maks / min } \tilde{T}_E = \sum_{i_1=1}^{I_1} \dots \sum_{i_c=1}^{I_c} m_{\tilde{S}_1^I}(\tilde{S}_1^I)_{i_1} \times \dots \times m_{\tilde{S}_c^I}(\tilde{S}_c^I)_{i_c} \times Q \left(\frac{\left| \left(\tilde{S}_1^I \right)_{i_1} \cap \dots \cap \left(\tilde{S}_A^I \right)_{i_A} \right|}{\left| \left(\tilde{S}_1^I \right)_{i_1} \cap \dots \cap \left(\tilde{S}_C^I \right)_{i_C} \right|} \right) \quad (5.45)$$

Kısıtlar

$$m^-(\tilde{S}_c^I)_{i_c} \leq m_{\tilde{S}_c^I}(\tilde{S}_c^I)_{i_c} \leq m^+(\tilde{S}_c^I)_{i_c} \quad c = 1, 2, \dots, A-1, A, A+1, \dots, C \quad (5.46)$$

$$\alpha_{(\tilde{S}_c^I)_{i_c}}^L \leq \sum_{i_k=k}^{I_c} m(\tilde{S}_c^I)_{i_c} \leq \alpha_{(\tilde{S}_k^I)_{i_k}}^U \quad c = 1, 2, \dots, A-1, A, A+1, \dots, C; k = 2, 3, \dots, I_c \quad (5.47)$$

$$\sum_{i_c=1}^{I_c} m(\tilde{S}_c^I)_{i_c} = 1 \quad c = 1, 2, \dots, A-1, A, A+1, \dots, C \quad (5.48)$$

Örnek 5.4.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun.

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0,8;0,9)}{y_2}, \frac{(0,6;0,7)}{y_3}, \frac{(0,4;0,5)}{y_4} \right\}$$

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0,6;0,8)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2}, \frac{(0,7;0,9)}{y_3}, \frac{(0,2;0,4)}{y_4} \right\}$$

$\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK'sı uzun boylu insanları, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı ise sarışın insanları gösterebilir ve niceleyici $Q(c) = c$ olsun. $\tilde{S}_g^I$ kümesinin belirgin aralıklı α

kesmeleri Eş. 5.9 kullanılarak $\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_1}^I = (1;1)$ $\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_2}^I = (0,8;0,9)$ $\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_3}^I = (0,6;0,7)$ $\alpha_{(\tilde{S}_g^I)_4}^I = (0,4;0,5)$ olarak bulunur. Kesin kümeleri ise $(\tilde{S}_g^I)_1 = \{y_1\}$, $(\tilde{S}_g^I)_2 = \{y_1, y_2\}$, $(\tilde{S}_g^I)_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$ ve $(\tilde{S}_g^I)_4 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 'dır. $\tilde{S}^I$ kümesinin belirgin aralıklı α kesmeleri $\alpha_{(\tilde{S}^I)_1}^I = (1;1)$ $\alpha_{(\tilde{S}^I)_2}^I = (0,7;0,9)$ $\alpha_{(\tilde{S}^I)_3}^I = (0,6;0,8)$ $\alpha_{(\tilde{S}^I)_4}^I = (0,2;0,4)$ olarak bulunur. Kesin kümeleri ise $(\tilde{S}^I)_1 = \{y_2\}$, $(\tilde{S}^I)_2 = \{y_2, y_3\}$, $(\tilde{S}^I)_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$, $(\tilde{S}^I)_4 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 'dır.

Aralıklı tutarlı normalize edilmiş kütle atama fonksiyonları

$$\begin{array}{ll} \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = [0,1;0,2] & \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 = [0,1;0,3] \\ \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = [0,1;0,3] & \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 = [0,0;0,3] \\ \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 = [0,1;0,3] & \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 = [0,2;0,6] \\ \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 = [0,4;0,5] & \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 = [0,2;0,4] \end{array}$$

olarak elde edilir. Çizelge 5.5'de oluşan kesin kümelerin niceleyiciden almış olduğu değerler verilmiştir.

Çizelge 5.5. Örnek 5.4 için niceleyicinin almış olduğu değerler

	$\mathbf{m}(\tilde{S}^I)_1$	$\mathbf{m}(\tilde{S}^I)_2$	$\mathbf{m}(\tilde{S}^I)_3$	$\mathbf{m}(\tilde{S}^I)_4$
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1$	$Q(c) = 0$	$Q(c) = 0$	$Q(c) = 1$	$Q(c) = 1$
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2$	$Q(c) = 0,5$	$Q(c) = 0,5$	$Q(c) = 1$	$Q(c) = 1$
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3$	$Q(c) = 0,33$	$Q(c) = 0,66$	$Q(c) = 1$	$Q(c) = 1$
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4$	$Q(c) = 0,25$	$Q(c) = 0,5$	$Q(c) = 0,75$	$Q(c) = 1$

Eş. 5.36'da tanımlanan doğrusal olmayan model örneğe uyarlandığı takdirde

maks / min $\tilde{T}_E =$

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 + 0,5 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 + \\ & 0,5 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 + \\ & 0,33 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 + 0,66 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 + \\ & \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 + 0,25 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 + \\ & 0,5 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 + 0,75 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 \end{aligned} \right\}$$

Kısıtlar

$$0,1 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \leq 0,2$$

$$0,1 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \leq 0,3$$

$$0,1 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 \leq 0,3$$

$$0,4 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 \leq 0,5$$

$$0,1 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 \leq 0,3$$

$$0,0 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 \leq 0,3$$

$$0,2 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 \leq 0,6$$

$$0,2 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 \leq 0,4$$

$$0,6 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 \leq 0,7$$

$$0,8 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 \leq 0,9$$

$$0,6 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 \leq 0,8$$

$$0,7 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 + \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 \leq 0,9$$

$$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 = 1$$

$$\mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 + \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 + \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 + \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 = 1$$

modeli elde edilir. Doğrusal olmayan model GAMS (The General Algebraic Modeling System) programı kullanılarak çözülmüştür. Doğruluk derecesinin en

küçüklendiği modelde, $T_E^L = 0,665$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = 0,2$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 0,1$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 = 0,2$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 = 0,5$, $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 = 0,3$, $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 = 0,1$, $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 = 0,4$ ve $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 = 0,2$ olarak bulunmuştur. Doğruluk derecesinin en büyüklendiği modelde $T_E^U = 0,84$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = 0,1$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 0,3$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_3 = 0,2$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_4 = 0,4$, $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 = 0,1$, $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 = 0,1$, $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_3 = 0,4$ ve $m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_4 = 0,4$ olarak bulunmuştur. Doğruluk derecesi $\tilde{T}_E = [0,665; 0,84]$ aralıklı değere eşittir.

Örnek 5.5.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun.

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0,6;0,8)}{y_2} \right\} \quad \tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0,4;0,7)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2} \right\}$$

$\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK'sı uzun boylu insanları, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı ise sarışın insanları gösterebilir. $Q = \forall$ olup Eş. 5.49'da tanımlanmıştır.

$$Q(c) = \begin{cases} 1, & c=1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (5.49)$$

şeklinde tanımlanmıştır. “Tüm uzun boylu insanlar sarışındır” ifadesinin doğruluk derecesi Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen yöntemle hesaplandığı takdirde

$$T = \mu_Q \left(\frac{OK(\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I)}{OK(\tilde{S}_g^I)} \right) = \mu_Q \left(\frac{0,55+0,7}{1+0,7} \right) = \mu_Q(0,735) = 0$$

olarak bulunur. Aynı problem Eş. 5.36'da tanımlanan doğrusal olmayan model ile çözülmüştür. Çizelge 5.6'da aralıklı tutarlı normalize edilmiş kütle atama fonksiyonları ve oluşan kesin kümeler verilmiştir.

Çizelge 5.6. Örnek 5.5 için aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı

	$\mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 = [0, 3; 0, 6]$ $(\tilde{S}^I)_1 = \{y_2\}$	$\mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 = [0, 4; 0, 7]$ $(\tilde{S}^I)_2 = \{y_1, y_2\}$
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = [0, 2; 0, 4]$ $(\tilde{S}_g^I)_1 = \{y_1\}$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_1 \cap (\tilde{S}^I)_1 }{ (\tilde{S}_g^I)_1 }\right) = 0$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_1 \cap (\tilde{S}^I)_2 }{ (\tilde{S}_g^I)_1 }\right) = 1$
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = [0, 6; 0, 8]$ $(\tilde{S}_g^I)_2 = \{y_1, y_2\}$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_2 \cap (\tilde{S}^I)_1 }{ (\tilde{S}_g^I)_2 }\right) = 0$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_2 \cap (\tilde{S}^I)_2 }{ (\tilde{S}_g^I)_2 }\right) = 1$

Eş. 5.36'da tanımlanan doğrusal olmayan model örneğe uyarlandığı takdirde

$$\text{maks / min } \tilde{T}_E = \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1$$

Kısıtlar

$$0,2 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \leq 0,4$$

$$0,6 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \leq 0,8$$

$$0,3 \leq \mathbf{m}(\tilde{S}^I)_1 \leq 0,6$$

$$0,4 \leq \mathbf{m}(\tilde{S}^I)_2 \leq 0,7$$

$$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 1$$

$$\mathbf{m}(\tilde{S}^I)_1 + \mathbf{m}(\tilde{S}^I)_2 = 1$$

modeli elde edilir. Doğrusal olmayan model GAMS programı kullanılarak çözülmüştür. Doğruluk derecesinin en küçüklendiği modelde $T_E^L = 0,4$,

$m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = 0,2$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 0,8$ ve $(\tilde{S}^I)_1 = 0,6$, $(\tilde{S}^I)_2 = 0,4$ olarak bulunmuştur.

Doğruluk derecesinin en büyüklendiği modelde, $T_E^U = 0,7$ $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = 0,2$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 0,8$, $(\tilde{S}^I)_1 = 0,3$ ve $(\tilde{S}^I)_2 = 0,7$ olarak bulunmuştur. Doğruluk derecesi $\tilde{T}_E = [0,4; 0,7]$ aralıklı değere eşittir.

Örnek 5.6a.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun. İlk durumda $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ kümeleri

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0;0)}{y_2}, \frac{(0;0)}{y_2}, \dots, \frac{(0;0)}{y_{1000}} \right\}$$

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0;0)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2}, \frac{(0;0)}{y_3}, \dots, \frac{(0;0)}{y_{1000}} \right\}$$

ve niceleyici $Q(c) = c$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I)(y_m)$ aralıklı tip-2 BK

$$(\tilde{S}_g^I(y_i) \cap \tilde{S}^I)(y_m) = \left\{ \frac{(0;0)}{y_1}, \frac{(0;0)}{y_2}, \frac{(0;0)}{y_3}, \dots, \frac{(0;0)}{y_{1000}} \right\}$$

olarak bulunur. Eş. 3.161'de tanımlanan ortalama kardinalite kullanılarak Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi Eş.5.50'de hesaplanmıştır.

$$T = \mu_Q \left(\frac{OK(\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I)}{OK(\tilde{S}_g^I)} \right) = \mu_Q \left(\frac{0}{1} \right) = \mu_Q(0) = 0 \quad (5.50)$$

Örnek 5.6b.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0,08;0,12)}{y_2}, \frac{(0,08;0,12)}{y_3}, \dots, \frac{(0,08;0,12)}{y_{1000}} \right\}$$

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0,08;0,12)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2}, \frac{(0,08;0,12)}{y_3}, \dots, \frac{(0,08;0,12)}{y_{1000}} \right\}$$

ve niceleyici $Q(c) = c$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$(\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I)(y_m) = \left\{ \frac{(0,08;0,12)}{y_1}, \frac{(0,08;0,12)}{y_2}, \frac{(0,08;0,12)}{y_3}, \dots, \frac{(0,08;0,12)}{y_{1000}} \right\}$$

Eş. 5.51’de doğruluk derecesi Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen yöntemle hesaplanmıştır.

$$T = \mu_Q \left(\frac{OK(\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I)}{OK(\tilde{S}_g^I)} \right) = \mu_Q \left(\frac{100}{100,9} \right) = \mu_Q(0,99) = 0,99 \quad (5.51)$$

Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen yöntem üyelik derecelerinde küçük bir değişiklikten oldukça fazla etkilenmektedir.

Aynı problem Eş. 5.36’da tanımlanan doğrusal olmayan model ile çözülmüştür. Çizelge 5.7’de Örnek 5.6a için aralıklı tutarlı normalize edilmiş kütle atama fonksiyonları ve oluşan kesin kümeler verilmiştir. Eş. 5.36’da tanımlanan doğrusal olmayan model örneğe uyarlandığı takdirde

Çizelge 5.7. Örnek 5.6a için aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı

	$\mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 = [1,1]$ $(\tilde{S}^I)_1 = \{y_2\}$	$\mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 = [0,0]$ $(\tilde{S}^I)_2 = \{y_1, \dots, y_{1000}\}$
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = [1,1]$ $(\tilde{S}_g^I)_1 = \{y_1\}$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_1 \cap (\tilde{S}^I)_1 }{ (\tilde{S}_g^I)_1 }\right) = 0$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_1 \cap (\tilde{S}^I)_2 }{ (\tilde{S}_g^I)_1 }\right) = 1$
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = [0,0]$ $(\tilde{S}_g^I)_2 = \{y_1, \dots, y_{1000}\}$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_2 \cap (\tilde{S}^I)_1 }{ (\tilde{S}_g^I)_2 }\right) = 0,001$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_2 \cap (\tilde{S}^I)_2 }{ (\tilde{S}_g^I)_2 }\right) = 1$

maks / min $\tilde{T}_E =$

$$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 + 0,001 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times \mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2$$

Kısıtlar

$$1 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \leq 1$$

$$0 \leq \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \leq 0$$

$$1 \leq \mathbf{m}(\tilde{S}^I)_1 \leq 1$$

$$0 \leq \mathbf{m}(\tilde{S}^I)_2 \leq 0$$

$$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 + \mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 1$$

$$\mathbf{m}(\tilde{S}^I)_1 + \mathbf{m}(\tilde{S}^I)_2 = 1$$

modeli elde edilir. Doğrusal olmayan model GAMS programı kullanılarak çözülmüştür. Doğruluk derecesinin en küçüklendiği modelde $T_E^L = 0$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = 1$,

$m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 0$ ve $(\tilde{S}^I)_1 = 1, (\tilde{S}^I)_2 = 0$ olarak bulunmuştur. Doğruluk derecesinin en

büyüklendiği modelde $T_E^U = 0$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = 1$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 0$ ve $(\tilde{S}^I)_1 = 1, (\tilde{S}^I)_2 = 0$ olarak bulunmuştur. Doğruluk derecesi $\tilde{T}_E = 0$ 'dır.

Çizelge 5.8. Örnek 5.6b için aralıklı tutarlı normalize kütle atamalarının dağılımı

$\mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 = [0,88;0,92]$ $(\tilde{S}^I)_1 = \{y_2\}$		$\mathbf{m}_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 = [0,08;0,12]$ $(\tilde{S}^I)_2 = \{y_1, \dots, y_{1000}\}$	
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = [0,88;0,92]$ $(\tilde{S}_g^I)_1 = \{y_1\}$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_1 \cap (\tilde{S}^I)_1 }{ (\tilde{S}_g^I)_1 }\right) = 0$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_1 \cap (\tilde{S}^I)_2 }{ (\tilde{S}_g^I)_1 }\right) = 1$	
$\mathbf{m}_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = [0,08;0,12]$ $(\tilde{S}_g^I)_2 = \{y_1, \dots, y_{1000}\}$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_2 \cap (\tilde{S}^I)_1 }{ (\tilde{S}_g^I)_2 }\right) = 0,001$	$Q\left(\frac{ (\tilde{S}_g^I)_2 \cap (\tilde{S}^I)_2 }{ (\tilde{S}_g^I)_2 }\right) = 1$	

Örnek 5.6b Eş. 5.36'da tanımlanan doğrusal olmayan model ile çözülmüştür. Çizelge 5.8'de aralıklı tutarlı normalize edilmiş kütle atama fonksiyonları ve oluşan kesin kümeler verilmiştir. Eş. 5.36'da tanımlanan doğrusal olmayan model örneğe uyarlandığı takdirde

$$\begin{aligned} & \text{maks / min } \tilde{T}_E \\ & = m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \times m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 + 0,001 \times m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_1 + m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \times m_{\tilde{S}^I}(\tilde{S}^I)_2 \end{aligned}$$

Kısıtlar

$$0,88 \leq m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 \leq 0,92$$

$$0,08 \leq m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 \leq 0,12$$

$$0,88 \leq m(\tilde{S}^I)_1 \leq 0,92$$

$$0,08 \leq m(\tilde{S}^I)_2 \leq 0,12$$

$$m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 + m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 1$$

$$m(\tilde{S}^I)_1 + m(\tilde{S}^I)_2 = 1$$

modeli elde edilir. Doğrusal olmayan model GAMS programı kullanılarak çözülmüştür. Doğruluk derecesinin en küçüklendiği modelde $T_E^L = 0,08$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = 0,92$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 0,08$, $(\tilde{S}^I)_1 = 0,92$ ve $(\tilde{S}^I)_2 = 0,08$ olarak bulunmuştur. Doğruluk derecesinin en büyüklendiği modelde $T_E^U = 0,12$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_1 = 0,88$, $m_{\tilde{S}_g^I}(\tilde{S}_g^I)_2 = 0,12$, $(\tilde{S}^I)_1 = 0,88$ ve $(\tilde{S}^I)_2 = 0,12$ olarak bulunmuştur. Doğruluk derecesi $\tilde{T}_E = [0,08;0,12]$ aralıklı değere eşittir.

Örnek 5.5, Örnek 5.6a ve Örnek 5.6b dikkate alındığında, Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen yöntemin dezavantajlara sahip olduğu görülmektedir. Örnek 5.5’de, Wu ve Mendel tarafından önerilen yöntem kullanıldığında doğruluk derecesi $T=0$ olarak bulunmuştur. Bu durum Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen yöntemin katı sonuçlar ürettiğini göstermektedir. Örnek 5.6a’da ve Örnek 5.6b’de iki durum incelenmiştir. Örnek 5.6a’da ayrık iki kümenin doğruluk derecesi doğal olarak $T=0$ olarak bulunmuştur. Örnek 5.6b’de ise üyelik dereceleri (0,0) olan elemanların üyelik dereceleri küçük bir değişiklik ile (0,08;0,12) yapılmıştır. Bu durumda Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi $T=0,99$ olarak bulunmuştur. Bunun nedeni küçük üyelik dereceleriyle büyük üyelik dereceleri arasındaki farkın ayırt edilememesidir. Ayrıca küçük üyelik dereceleri hesaplamada etkin rol oynamaktadır. Örnek 5.5, Örnek 5.6a ve Örnek 5.6b önerilen yöntemle de çözülmüştür. Örnek 5.5’de doğruluk derecesi $\tilde{T}_E = [0,4;0,7]$ aralığındadır. Bu durum önerilen modelin katı sonuç üretmediğini göstermektedir. Örnek 5.6a’da önerilen model ile çözüldüğünde doğruluk derecesi $\tilde{T}_E = 0$ olarak bulunmuştur. Örnek 5.6b’de ise doğruluk derecesi $\tilde{T}_E = [0,08;0,12]$ eşittir. Önerilen model üyelik derecelerinde meydana gelen küçük bir değişikliğin doğruluk derecesi üzerinde büyük bir değişim yapmasına izin vermemektedir. Önerilen model, Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen yöntemle karşılaştırıldığında bazı olumsuzlukları vardır. Wu

ve Mendel [8] tarafından önerilen yöntemin hesaplama karmaşıklığı $O(M)$ 'e, önerilen doğruluk derecesinin hesaplama karmaşıklığı ise $O(M^3 \log M)$ 'e eşittir. Fakat bu durumun nedeni $\tilde{T}_E$ BAI'yi tam olarak ele alırken, Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen yöntem BAI'yi tam olarak modelleyememesidir. Ayrıca tanımlanan aralıklı tip-2 BK'ların $\mathcal{L}'$ 'de tanımlanmış olması gerekmektedir. Bu nedenle bazı aralıklı tip-2 BK'ların kullanımı kısıtlanmaktadır.

5.4. Tip-I ve Tip-II Niceleyici Cümle Yapısındaki Aralıklı Tip-2 Bulanık Özetlerin Değerlendirilmesi: Olasılık Temelli Doğruluk Derecesi

Bu bölümde özetleyicileri aralıklı tip-2 BK'larla etiketlenen tip-I ve tip-II niceleyici cümle yapısındaki özetlerin değerlendirilmesi için α kesmelerine dayanan yeni bir doğruluk derecesi önerilmiştir.

5.4.1. Tip-I Niceleyici Cümleler

Delgado ve ark. tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin bazı özellikleri sağlaması gerektiğini belirtmişlerdir [38]. Özetleyicileri aralıklı tip-2 BK ile etiketlenen tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin bu özelliklerden bazılarını sağlaması gerekir.

$\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^1), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^1)]}{y_1}, \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^2), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^2)]}{y_2}, \dots, \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^M), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^M)]}{y_M} \right\}$$

olsun.

Özellik 5.1.

(Kesin durum) $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı kesin küme ve Q göreceli niceleyici ise, doğruluk derecesi Eş. 5.52'de verilen ifadeye eşit olmalıdır.

$$Q\left(\frac{|\tilde{S}^I|}{|Y|}\right) \quad (5.52)$$

Q mutlak niceleyici ise doğruluk derecesi Eş. 5.53'de verilen ifadeye eşit olmalıdır.

$$Q(|\tilde{S}^I|) \quad (5.53)$$

Özellik 5.2.

Niceleyicinin “tümü” ($\forall$) ve “var” ($\exists$) olduğu durumlarda, değerlendirme işlemi bulanık mantıkla tutarlı olmalıdır. Niceleyicinin $Q = \exists$ olduğu " $QY, \tilde{S}^I$ dir." ifadesi Eş. 5.54 ile gösterilebilmeli ve değerlendirilebilmelidir.

$$\left[\bigoplus_{m=1}^M \mu_{\tilde{S}^I}^L(v^m), \bigoplus_{m=1}^M \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^m) \right] \quad (5.54)$$

BK'larda birleşim işlemi için t-konorm operatörleri kullanılmaktadır.

Niceleyici $Q = \forall$ olduğu " $QY, \tilde{S}^I$ dir." ifadesi Eş. 5.55 ile gösterilebilmeli ve değerlendirilebilmelidir.

$$\left[\bigotimes_{m=1}^M \mu_{\tilde{S}^I}^L(v^m), \bigotimes_{m=1}^M \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^m) \right] \quad (5.55)$$

Kesişim işlemi için t-norm operatörleri kullanılır.

Özellik 5.3.

Değerlendirme işlemi, niceleyicilerin kapsama durumuna göre tutarlı olmalıdır. $Q \subseteq Q'$ olduğu durumda, $\tilde{T}("Q \ Y, \tilde{S}' \ 'dir.") \leq \tilde{T}("Q' \ Y, \tilde{S}' \ 'dir.")$ olmalıdır.

Özellik 5.4.

Değerlendirme işleminde herhangi bir niceleyici kullanılabilmelidir. Negatif olmayan tamsayılar yada $[0,1]$ aralığı üzerinde herhangi bir olasılık dağılımı bu duruma örnektir.

Tip-I Niceleyici Cümleler için Doğruluk Derecesi

Bu bölümde özetleyicileri aralıklı tip-2 BK ile etiketlenen tip-I niceleyici cümleleri değerlendirmek için yeni bir doğruluk derecesi önerilmiştir. Önerilen doğruluk derecesi aşağıda verilen adımlar izlenerek tanımlanmıştır.

Adım 1. $\tilde{S}'$ aralıklı tip-2 BK'sının elemanlarının alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > \alpha_{m+1} = 0$ tanımlanır.

Adım 2. $\tilde{S}'$ aralıklı tip-2 BK'ya ait α kesmeleriyle oluşturulan alt ve üst kesin kümeler bulunur. Alt ve üst kesin kümeler Çizelge 5.9'da gösterilmiştir.

Göreceli niceleyici kullanıldığı takdirde her bir α kesmesinde $|\tilde{S}'|/|Y|$ değerlerinin alabileceği muhtemel değerler vardır. Bu değerlerin oluşturmuş olduğu küme $C_{\alpha_i} = \{q_i/M, q_i + 1/M, \dots, \bar{q}_i/M\}$ olarak tanımlanır. Eğer, mutlak niceleyici kullanılmış ise $|\tilde{S}'|$ değerlerinin alabileceği muhtemel değerlerin oluşturmuş olduğu küme $C_{\alpha_i} = \{q_i, q_i + 1, \dots, \bar{q}_i\}$ olarak tanımlanır. Daha sonra bu değerlerin

niceleyiciden almış olduğu en küçük ve en büyük değerler bulunur. Bu değerlerden en küçüğü $\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond)$ ve en büyüğü $\max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond)$ seçilir.

Çizelge 5.9. $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK için alt ve üst kesin kümeler

α	$\underline{\tilde{S}}^I(y_m)$	$\overline{\tilde{S}}^I(y_m)$
α_1	$(\underline{\tilde{S}}^I(y_m))_{\alpha_1}$	$(\overline{\tilde{S}}^I(y_m))_{\alpha_1}$
α_2	$(\underline{\tilde{S}}^I(y_m))_{\alpha_2}$	$(\overline{\tilde{S}}^I(y_m))_{\alpha_2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
α_{m-1}	$(\underline{\tilde{S}}^I(y_m))_{\alpha_{m-1}}$	$(\overline{\tilde{S}}^I(y_m))_{\alpha_{m-1}}$
α_m	$(\underline{\tilde{S}}^I(y_m))_{\alpha_m}$	$(\overline{\tilde{S}}^I(y_m))_{\alpha_m}$

Adım 3. Alt ve üst kesin kümeler elde edildikten sonra ilgili olasılık dağılımı φ , Eş. 5.56 kullanılarak bulunur.

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_i - \alpha_{i+1} \quad (5.56)$$

$\varphi(\alpha_i)$, α_i seviyesine atanan kanıtı göstermektedir.

Adım 4. " $Q Y, \tilde{S}^I$ dir." özet yapısı kullanıldığında, özetleri değerlendirmek için önerilen doğruluk derecesi Eş. 5.57'de tanımlanmıştır.

$$\tilde{T}_F = \sum_{\alpha_i \in \Gamma} \varphi(\alpha_i) \times \left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond) \right) \quad (5.57)$$

Önerme 5.3.

Eş. 5.57'de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.1'i sağlamaktadır.

İspat.

$\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı kesin küme olduğunda, $\Gamma = \{1, 0\}$ ve $\varphi(\alpha_i) = 1$ olmaktadır. C_{α_i} kümesinde tek bir eleman olup, bu değer göreceli niceleyici kullanılıyor ise $|\tilde{S}^I|/|Y|$, mutlak niceleyici kullanılıyor ise $|\tilde{S}^I|$ 'ye eşittir. Gerekli değerler Eş. 5.57'de yerine konulur ise doğruluk derecesi göreceli niceleyiciler için $Q(|\tilde{S}^I|/|Y|)$ 'a, mutlak niceleyiciler için $Q(|\tilde{S}^I|)$ 'e eşittir. $\square$

Önerme 5.4.

Eş. 5.57'de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.2'yi sağlamaktadır.

İspat.

Eğer “var” ($\exists$) niceleyicisi kullanılıyor ve α_i kesmesiyle elde edilen C_{α_i} kümesine ait tüm elemanlar $c_\diamond \neq 0$ koşulunu sağlıyor ise $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond) \right) = (1, 1)$ 'dir. α_j kesmesiyle elde edilen C_{α_j} kümesinin en küçük elemanı sıfıra eşit diğer elemanları sıfırdan farklı bir sayıya eşit ise $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_j}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_j}} Q(c_\diamond) \right) = (0, 1)$ 'dir. α_k kesmesiyle elde edilen C_{α_k} kümesinin tüm elemanları sıfıra eşit ise bu durumda $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_k}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_k}} Q(c_\diamond) \right) = (0, 0)$ olmaktadır. Bu üç durum $\alpha_i < \alpha_j < \alpha_k$ olduğu durumda sağlanır. Gerekli değerler Eş. 5.57'de yerine konulur ise doğruluk derecesi $\tilde{T}_F = (\alpha_i, \alpha_j)$ 'ye eşit olmaktadır. $\alpha_i = \sup \left\{ \alpha_M \mid \left| \underline{\tilde{S}^I} \right|_{\alpha_M} \neq 0 \right\}$, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının en büyük alt üyelik derecesine eşittir. $\alpha_j = \sup \left\{ \alpha_M \mid \left| \bar{\tilde{S}^I} \right|_{\alpha_M} \neq 0 \right\}$, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının en büyük üst üyelik derecesine eşittir. Eş. 5.54'de birleştirme için

maksimum operatörü kullanılır ise doğruluk derecesi en büyük alt üyelik derecesi ile en büyük üst üyelik derecesi arasında değer alır.

Eğer “tümü” niceleyicisi kullanılıyor ve α_i kesmesiyle elde edilen C_{α_i} kümesine ait tüm elemanlar $c_\diamond = 1$ koşulunu sağlıyor ise (bu durumun sağlanması için $q_i = \bar{q}_i = |Y|$ olması gerekir) $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond) \right) = (1, 1)$ ’dir. α_j kesmesiyle elde edilen C_{α_j} kümesinin en büyük elemanı 1’e eşit ise (bu durumun sağlanması için $\bar{q}_i = |Y|$ olması gerekir) $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_j}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_j}} Q(c_\diamond) \right) = (0, 1)$ ’dir. Gerekli değerler Eş. 5.57’de yerine konulur ise doğruluk $\tilde{T}_F = (\alpha_i, \alpha_j)$ ’ye eşit olmaktadır. $\alpha_i = \inf \left\{ \alpha_M \mid \left| \tilde{S}^I \right|_{\alpha_M} = |Y| \right\}$, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK’sının en küçük alt üyelik derecesine eşittir. $\alpha_j = \inf \left\{ \alpha_M \mid \left| \tilde{\bar{S}}^I \right|_{\alpha_M} = |Y| \right\}$, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK’sının en küçük üst üyelik derecesine eşittir. Eş. 5.55’de kesişim işlemi için minimum operatörü kullanılır ise doğruluk derecesi en küçük alt üyelik derecesi ile en küçük üst üyelik derecesi arasındadır. $\square$

Önerme 5.5.

Eş. 5.57’de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.3’ü sağlamaktadır.

İspat.

" $QY, \tilde{S}^I$ dir." özetinin ilgili olasılık dağılımı sabittir. Eğer $Q \subseteq Q'$ ise tüm α_i ’ler için $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond) \right) \leq \left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q'(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q'(c_\diamond) \right)$ ’dir. Bu nedenle $\tilde{T}("QY, \tilde{S}^I$ ' dir.") $\leq \tilde{T}("Q'Y, \tilde{S}^I$ ' dir.") şartı her zaman için sağlanır. $\square$

Önerme 5.6.

Eş. 5.57'de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.4'ü sağlamaktadır.

İspat.

Önerilen yöntemde tüm olası oranlar hesaplanmakta ve bu oranların niceleyiciden almış olduğu en küçük ve en büyük değerler bulunmaktadır. Bu nedenle önerilen yöntem hem tutarlı hem de tutarsız niceleyicileri modelleyebilmektedir. $\square$

Teorem 5.6.

" $Q Y, \tilde{S}^I$ dir." tip-I niceleyici cümle, $S^{e_j}, \tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının gömülü tip-1 BK'sı ve " $Q Y, S^{e_j}$ dir." $T_F^{e_j}$ doğruluk derecesine sahip tip-I niceleyici cümle olsun. Bu durumda $T_F^{e_j}$ doğruluk derecelerinin birleşimi $\tilde{T}_F$ 'ye eşittir.

$$\tilde{T}_F = [T_F^L, T_F^U] = \bigcup_{j=1}^{\infty} T_F^{e_j} \quad (5.58)$$

İspat.

S^{e_j} gömülü tip-1 BK, $\Gamma_j = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_j}\}$ kümesi $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının alt ve üst üyelik dereceleri ve S^{e_j} gömülü tip-1 BK'sının üyelik derecelerinin birleşiminden oluşsun ve $\alpha_{n_j} < \alpha_{n_j-1} < \dots < \alpha_2 < \alpha_1$ şartı sağlansın. Γ_j kümesi S^{e_j} gömülü tip-1 BK'sına göre değişmektedir. $\underline{\tilde{S}}_{\alpha_i}^I \subseteq S_{\alpha_i}^{e_j} \subseteq \bar{\tilde{S}}_{\alpha_i}^I$ şartının tüm α_i 'ler için sağlandığı açıkça görülmektedir. Bu nedenle $\min_{c_{\diamond} \in C_{a_i}} Q(c_{\diamond}) \leq Q(c_j) \leq \max_{c_{\diamond} \in C_{a_i}} Q(c_{\diamond})$ şartı $c_j = |S_{\alpha_i}^{e_j}|$ kesin niceleyiciler ve $c_j = |S_{\alpha_i}^{e_j}|/|Y|$ göreceli niceleyiciler için her zaman

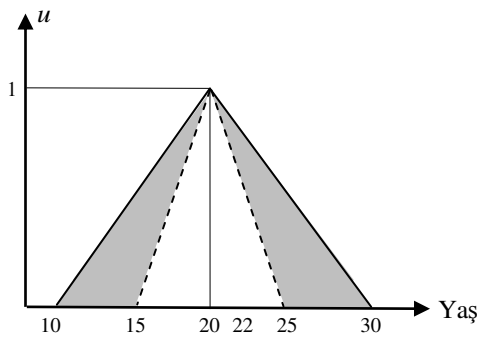
sağlanır. T_F^L ve T_F^U değerleri Γ_j kümesine bağlı olasılık dağılımı değişse bile sabit olup, $T_F^{e_j}$ değeri bu değerlerin arasında değişmektedir. $T_F^{e_j}$ değerinin alabileceği en küçük değer T_F^L 'e eşit, en büyük değer ise T_F^U değerine eşittir. Diğer bir değişle $T_F^L \leq T_F^{e_j} \leq T_F^U$, $j=1,2,\dots,\infty$ şartı sağlanmaktadır. Sonsuz sayıda S^{e_j} gömülü tip-1 BK var olduğu için $[T_F^L, T_F^U]$ aralığında değişen sonsuz sayıda da $T_F^{e_j}$ vardır. Bu nedenle $T_F^{e_j}$ değerlerinin birleşimi $\tilde{T}_F$ 'ye eşittir. $\square$

Örnek 5.7.

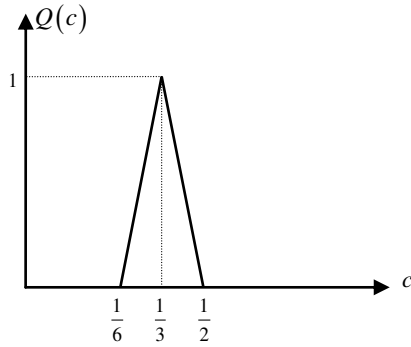
ADL şirketinde çalışanların yaşları $y_1 = 22$, $y_2 = 20$, $y_3 = 32$, $y_4 = 38$, $y_5 = 42$, $y_6 = 26$ 'dir. Şekil 5.3'de genç aralıklı tip-2 BK'sı ve y_1, y_2 elemanlarına ait üyelik dereceleri gösterilmiştir. Bu örnekte "Çalışanların yaklaşık üçte biri gençtir." özetinin doğruluk derecesi hesaplanmıştır. Tüm elemanların genç aralıklı tip-2 BK'sına ait olma dereceleri

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0,6;0,8)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2}, \frac{(0;0)}{y_3}, \frac{(0;0)}{y_4}, \frac{(0;0)}{y_5}, \frac{(0;0)}{y_6} \right\}$$

olarak bulunur. "yaklaşık üçte biri" dilsel niceleyicisi Şekil 5.4'de tanımlanmıştır.



Şekil 5.3. Genç dilsel etiketine ait aralıklı tip-2 BK



Şekil 5.4. Yaklaşık üçte biri niceleyicisi

Adım 1. $\tilde{S}^I$ tip-2 BK'sının elemanlarının alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{1; 0, 6; 0, 8; 0\}$ olarak tanımlanır.

Adım 2. $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'ya ait α kesmeleriyle oluşturulan alt ve üst kesin kümeler bulunur. Alt ve üst kesin kümeler Çizelge 5.10'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.10. Genç aralıklı tip-2 BK için alt ve üst kesin kümeler

α	$\underline{\tilde{S}^I}(y_i)$	$\overline{\tilde{S}^I}(y_i)$
1	$\{y_2\}$	$\{y_2\}$
0,8	$\{y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$
0,6	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$
0	Y	Y

Alt ve üst kümeler bulunduktan sonra her bir α kesmesi için C_{α_i} kümesi bulunur.

$|Y|=6$ olup, $C_1 = \{1/6\}$, $C_{0,8} = \{1/6, 2/6\}$ $C_{0,6} = \{2/6\}$ ve $C_0 = \{1\}$ olarak bulunur.

$\alpha=1$ kesmesi için $c_0 = 1/6$ olup $Q(1/6) = 0$ 'dır. Bu durumda $\min\{Q(1/6)\} = 0$ ve

$\max\{Q(1/6)\} = 0$ 'dır. $\alpha=0,8$ kesmesi için $Q(1/6) = 0$ ve $Q(2/6) = 1$ olarak

bulunur. Bu durumda $\min\{Q(1/6), Q(2/6)\} = 0$ ve $\max\{Q(1/6), Q(2/6)\} = 1$ 'dir.

$\alpha = 0,6$ kesmesi için $Q(2/6) = 1$ değeri elde edilir. Bu durumda $\min\{Q(2/6)\} = 1$ ve $\max\{Q(2/6)\} = 1$ 'dir.

Adım 3. Alt ve üst kesin kümeler elde edildikten sonra ilgili olasılık dağılımı φ , Eş. 5.56 kullanılarak bulunur.

$$\varphi(\alpha_1) = (1 - 0,8) = 0,2 \quad \varphi(\alpha_2) = (0,8 - 0,6) = 0,2 \quad \varphi(\alpha_3) = (0,6 - 0) = 0,6$$

Adım 4. “Çalışanların yaklaşık üçte bir gençtir.” özetinin doğruluk derecesi Eş. 5.57 kullanılarak hesaplanır. Doğruluk derecesi $\tilde{T}_F$ 'nin alabileceği en küçük değer 0,6, en büyük değer ise 0,8'e eşittir.

$$\tilde{T}_F = (1 - 0,8) \times (0;0) + (0,8 - 0,6) \times (0;1) + (0,6 - 0) \times (1;1) = (0,6;0,8)$$

5.4.2. Tip-II Niceleyici Cümleler

Delgado ve ark. tip-I ve tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin bazı özellikleri sağlaması gerektiğini belirtmişlerdir [38]. Özetleyicileri aralıklı tip-2 BK ile etiketlenen tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin bu özelliklerden bazılarını sağlaması gerekir.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'lar aşağıda tanımlanmıştır.

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{[\mu_{\tilde{S}_g^I}^L(v_g^1), \mu_{\tilde{S}_g^I}^U(v_g^1)]}{y_1}, \frac{[\mu_{\tilde{S}_g^I}^L(v_g^2), \mu_{\tilde{S}_g^I}^U(v_g^2)]}{y_2}, \dots, \frac{[\mu_{\tilde{S}_g^I}^L(v_g^M), \mu_{\tilde{S}_g^I}^U(v_g^M)]}{y_M} \right\}$$

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^1), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^1)]}{y_1}, \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^2), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^2)]}{y_2}, \dots, \frac{[\mu_{\tilde{S}^I}^L(v^M), \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^M)]}{y_M} \right\}$$

Özellik 5.5.

(Kesin durum) Eğer $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ kesin kümeler ve Q göreceli niceleyici ise, doğruluk derecesi denklem Eş. 5.59’da tanımlanmıştır.

$$Q\left(\frac{|\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I|}{|\tilde{S}_g^I|}\right) \quad (5.59)$$

Özellik 5.6.

Göreceli niceleyiciler kullanıldığında ve $\tilde{S}_g^I = Y$ olduğu durumda değerlendirme işleminde kullanılan doğruluk derecesi tip-I cümlelerin değerlendirmesinde kullanılan doğruluk derecesine dönüşmektedir. Bu durumda tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesi tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin özel bir halidir.

Özellik 5.7.

Eğer $\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I = \emptyset$ ve $\tilde{S}_g^I$ normal aralıklı tip-2 BK ise doğruluk derecesi $Q(0)$ ’a eşit olur.

Özellik 5.8.

Niceleyicinin “tümü” ve “var” olduğu durumlarda, değerlendirme işlemi bulanık mantıkla tutarlı olmalıdır. Niceleyici $Q = \exists$ olduğu takdirde

$$\left[\bigoplus_{m=1}^M \left(\mu_{\tilde{S}_g^I}^L(v_g^m) \otimes \mu_{\tilde{S}^I}^L(v^m) \right), \bigoplus_{m=1}^M \left(\mu_{\tilde{S}_g^I}^U(v_g^m) \otimes \mu_{\tilde{S}^I}^U(v^m) \right) \right] \quad (5.60)$$

ile gösterilir. BK’larda birleşim işlemi için t-konorm operatörleri kullanılır.

Özellik 5.9.

Değerlendirme işleminde herhangi bir niceleyici kullanılabilmelidir. $[0,1]$ aralığı üzerinde herhangi bir olasılık dağılımı bu duruma örnektir.

Tip-II Niceleyici Cümleler için Doğruluk Derecesi

Bu bölümde özetleyicileri aralıklı tip-2 BK ile etiketlenen tip-II niceleyici cümleleri değerlendirmek için yeni bir doğruluk derecesi önerilmiştir. Önerilen doğruluk derecesi aşağıda verilen adımlar izlenerek tanımlanmıştır.

Adım 1. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ BK'sının elemanlarının alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > \alpha_{m+1} = 0$ tanımlanır.

Adım 2. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait α kesmeleriyle oluşturulan alt ve üst kesin kümeler bulunur. Alt ve üst kesin kümeler Çizelge 5.11'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.11. Alt ve üst kesin kümeler

α	$\underline{\tilde{S}_g^I}(y_m)$	$\overline{\tilde{S}_g^I}(y_m)$	$\underline{\tilde{S}^I}(y_m)$	$\overline{\tilde{S}^I}(y_m)$
α_1	$(\underline{\tilde{S}_g^I}(y_m))_{\alpha_1}$	$(\overline{\tilde{S}_g^I}(y_m))_{\alpha_1}$	$(\underline{\tilde{S}^I}(y_m))_{\alpha_1}$	$(\overline{\tilde{S}^I}(y_m))_{\alpha_1}$
α_2	$(\underline{\tilde{S}_g^I}(y_m))_{\alpha_2}$	$(\overline{\tilde{S}_g^I}(y_m))_{\alpha_2}$	$(\underline{\tilde{S}^I}(y_m))_{\alpha_2}$	$(\overline{\tilde{S}^I}(y_m))_{\alpha_2}$
...	...	...	...	...
α_{m-1}	$(\underline{\tilde{S}_g^I}(y_m))_{\alpha_{m-1}}$	$(\overline{\tilde{S}_g^I}(y_m))_{\alpha_{m-1}}$	$(\underline{\tilde{S}^I}(y_m))_{\alpha_{m-1}}$	$(\overline{\tilde{S}^I}(y_m))_{\alpha_{m-1}}$
α_m	$(\underline{\tilde{S}_g^I}(y_m))_{\alpha_m}$	$(\overline{\tilde{S}_g^I}(y_m))_{\alpha_m}$	$(\underline{\tilde{S}^I}(y_m))_{\alpha_m}$	$(\overline{\tilde{S}^I}(y_m))_{\alpha_m}$

Alt ve üst kesin kümeler elde edildikten sonra $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ kümelerin eleman sayılarının bulunması gerekir. Fakat bu kümelerin eleman sayıları değişkenlik göstermektedir.

$\tilde{S}_g^I(y_m)$ aralıklı tip-2 BK'nın sonsuz sayıda gömülü tip-1 BK'yı kapsamasıdır. Herhangi bir gömülü tip-1 BK'nın α_i kesmesiyle oluşan $S^{e_j}(y_m)_{\alpha_i}$ kesin kümesi, $\left(\tilde{S}_g^I(y_m)\right)_{\alpha_i}$ kesin kümesinin $\left(\tilde{S}_g^I(y_m)\right)_{\alpha_i}$ kesin kümesini kapsayan herhangi bir alt kümesidir. Aynı durum $\tilde{S}^I(y_m)$ aralıklı tip-2 BK'sı için de geçerlidir. $\tilde{S}^I(y_m)$ aralıklı tip-2 BK'sı sonsuz sayıda gömülü tip-1 BK'yı kapsar. Herhangi bir gömülü tip-1 BK'nın α_i kesmesiyle oluşan $(S^{e_t}(y_m))_{\alpha_i}$ kesin kümesi $\left(\tilde{S}^I(y_m)\right)_{\alpha_i}$ kesin kümesinin $\left(\tilde{S}^I(y_m)\right)_{\alpha_i}$ kesin kümesini kapsayan bir alt kümesidir. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait gömülü tip-1 BK'ların α_i kesmesiyle oluşan kesin kümeleri değişkenlik gösterdiği için $c_{\diamond} = \left| \left(\tilde{S}_g^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(\tilde{S}^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \right| / \left| \left(\tilde{S}_g^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|$ değeri birden çok rasyonel sayıya eşit olabilir. Bu değerler olası oranlar olarak adlandırılıp oluşturmuş olduğu küme

$$C_{\alpha_i} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left| \left(S_g^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}, \frac{\left| \left(S_g^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}, \dots, \frac{\left| \left(S_g^{e_{\mathcal{J}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_{\mathcal{J}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}, \\ \frac{\left| \left(S_g^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}, \frac{\left| \left(S_g^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}, \dots, \frac{\left| \left(S_g^{e_{\mathcal{J}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_{\mathcal{J}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}, \\ \dots, \\ \frac{\left| \left(S_g^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_{\mathcal{T}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_1}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}, \frac{\left| \left(S_g^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_{\mathcal{T}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_2}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}, \dots, \frac{\left| \left(S_g^{e_{\mathcal{J}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_{\mathcal{T}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|}{\left| \left(S_g^{e_{\mathcal{J}}}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right|} \end{array} \right\}$$

$$\left(S_g^{e_j}(y_m) \right)_{\alpha_i} \in \wp \left(\left(\tilde{S}_g^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \right) \wedge \left(S_g^{e_j}(y_m) \right)_{\alpha_i} \supseteq \left(\tilde{S}_g^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \quad j=1,2,\dots,\mathcal{J}$$

$$\left(S^{e_t}(y_m) \right)_{\alpha_i} \in \wp \left(\left(\tilde{S}^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \right) \wedge \left(S^{e_t}(y_m) \right)_{\alpha_i} \supseteq \left(\tilde{S}^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \quad t=1,2,\dots,\mathcal{T}$$

olarak tanımlanır. Olası oranların niceleyiciden almış olduğu değerler bulunur. Bu değerlerin en küçüğü $\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond)$, en büyüğü $\max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond)$ seçilir.

Adım 3. Alt ve üst kesin kümeler elde edildikten sonra ilgili olasılık dağılımı φ , Eş. 5.61 kullanılarak bulunur.

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_i - \alpha_{i+1} \quad (5.61)$$

$\varphi(\alpha)$ α_i seviyesine atanan kanıtı göstermektedir.

Adım 4. " $Q \tilde{S}_g^I Y$ (nesneler), $\tilde{S}^I$ dir." özet yapısı kullanıldığında, özetleri değerlendirmek için önerilen doğruluk derecesi Eş. 5.62'de tanımlanmıştır.

$$\tilde{T}_F = \sum_{\alpha_i \in \Gamma} \varphi(\alpha_i) \times \left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond) \right) \quad (5.62)$$

$\tilde{T}_F$ 'nin hesaplanabilmesi için tüm olası değerlerin hesaplanması gerekir. Bu nedenle $\tilde{T}_F$ 'nin hesaplama karmaşıklığı $O(2^M)$ 'dir. $\tilde{T}_F$ 'nin çok büyük boyutlu problemlere uygulanması oldukça zordur. M değeri büyük olduğu takdirde Eş. 5.62'de tanımlanan doğruluk derecesi Eş. 5.63'deki gibi tanımlanabilir.

$$\tilde{T}_F = \sum_{\alpha_i \in \Gamma} \varphi(\alpha_i) \times \left(\min_{r \in [\underline{r}_{\alpha_i}, \bar{r}_{\alpha_i}]} Q(r), \max_{r \in [\underline{r}_{\alpha_i}, \bar{r}_{\alpha_i}]} Q(r) \right) \quad (5.63)$$

Eş. 5.63'de belirtilen $\underline{r}_{\alpha_i}$ ve $\bar{r}_{\alpha_i}$ değerleri Eş. 5.64 ve Eş. 5.65'de tanımlanmıştır.

$$\underline{r}_{\alpha_i} = \min \left\{ \frac{\left| \tilde{S}_g^I(y_m)_{\alpha_i} \cap \underline{\tilde{S}}^I(y_m)_{\alpha_i} \right|}{\left| \tilde{S}_g^I(y_m)_{\alpha_i} \right|}, \frac{\left| \underline{\tilde{S}}_g^I(y_m)_{\alpha_i} \cap \tilde{S}^I(y_m)_{\alpha_i} \right|}{\left| \underline{\tilde{S}}_g^I(y_m)_{\alpha_i} \right|} \right\} \quad (5.64)$$

$$\bar{r}_{\alpha_i} = \max \left\{ \frac{\left| \tilde{S}_g^I(y_m)_{\alpha_i} \cap \tilde{S}^I(y_m)_{\alpha_i} \right|}{\left| \tilde{S}_g^I(y_m)_{\alpha_i} \right|}, \frac{\left| \tilde{S}_g^I(y_m)_{\alpha_i} \cap \tilde{S}^I(y_m)_{\alpha_i} \right|}{\left| \tilde{S}^I(y_m)_{\alpha_i} \right|} \right\} \quad (5.65)$$

Önerme 5.7.

Eş. 5.62’de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.5’i sağlamaktadır.

İspat.

Eğer $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ kesin kümeler olduğu takdirde $\Gamma = \{1, 0\}$ olur. Bu durumda $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond) \right) = Q\left(\left| \tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I \right| / \left| \tilde{S}_g^I \right|\right)$ olur. İlgili olasılık dağılımı $\varphi(1) = 1 - 0 = 1$ ’e eşittir. Gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde Eş. 5.62’de tanımlanan doğruluk derecesi $\tilde{T}_F = Q\left(\left| \tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I \right| / \left| \tilde{S}_g^I \right|\right)$ olur. $\square$

Önerme 5.8.

Eş. 5.62’de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.6’i sağlamaktadır.

İspat.

$\tilde{S}_g^I = Y \quad \left| \left(\tilde{S}^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \right| = q_i \quad \text{ve} \quad \left| \left(\tilde{S}^I(y_m) \right)_{\alpha_i} \right| = \bar{q}_i$ olsun. Eğer göreceli niceleyici kullanılırsa $C_{\alpha_i} = \{q_i/M, q_i+1/M, \dots, \bar{q}_i/M\}$ olarak bulunur. Bu değerler Eş. 5.62’de yerine konulduğu takdirde Eş. 5.57 elde edilir. Bu durum da, tip-I niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin tip-II niceleyici cümlelerin değerlendirilmesinde kullanılan doğruluk derecesinin özel bir hali olduğunu gösterir. $\square$

Önerme 5.9.

Eş. 5.62’de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.7’i sağlamaktadır.

İspat.

$\tilde{S}_g^I$ normal aralıklı tip-2 BK ve $\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I = \emptyset$ olduğu takdirde $\left| \left(S_g^{e_j}(y_m) \right)_{\alpha_i} \cap \left(S^{e_i}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right| / \left| \left(S_g^{e_j}(y_m) \right)_{\alpha_i} \right| = 0$ olup $c_\diamond = 0$ ve $C_{\alpha_i} = \{0\}$ ’ dir. Bu durumda $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond) \right) = Q(0)$ olur. İlgili olasılık dağılımı toplamı da $\tilde{S}_g^I$ normal aralıklı tip-2 BK normal küme olduğu için 1’e eşittir. Bu değer Eş. 5.62’de yerine koyulursa $\tilde{T}_F = Q(0)$ elde edilir. $\square$

Önerme 5.10.

Eş. 5.62’de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.8’i sağlamaktadır.

İspat.

Eğer “tümü” ($\forall$) niceleyicisi kullanılıyor ve α_i kesmesiyle elde edilen C_{α_i} kümesine ait tüm elemanlar $c_\diamond \neq 0$ koşulunu sağlıyor ise $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond) \right) = (1,1)$ ’ dir. α_j kesmesiyle elde edilen C_{α_j} kümesinin en küçük elemanı sıfıra eşit diğer elemanları sıfırdan farklı bir sayıya eşit ise $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_j}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_j}} Q(c_\diamond) \right) = (0,1)$ ’ dir. α_k kesmesiyle elde edilen C_{α_k} kümesinin tüm elemanları sıfıra eşit ise bu durumda $\left(\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_k}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{\alpha_k}} Q(c_\diamond) \right) = (0,0)$ olmaktadır. Bu üç durum $\alpha_i < \alpha_j < \alpha_k$ olduğu durumda sağlanmaktadır. Gerekli değerler Eş.5.57’de yerine konulur ise doğruluk

derecesi $\tilde{T}_F = (\alpha_i, \alpha_j)$ 'ye eşit olur. $\alpha_i = \sup \{ \alpha_M \mid \min \{ c_\diamond \} \neq 0, c_\diamond \in C_{\alpha_M} \}$ $\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının en büyük alt üyelik derecesine eşittir. $\alpha_j = \sup \{ \alpha_M \mid c_\diamond \neq 0, c_\diamond \in C_{\alpha_M} \}$, $\tilde{S}_g^I \cap \tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının en büyük üst üyelik derecesine eşittir. Eş. 5.60'da $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ kümelerinin kesişimi için minimum, birleşimi için maksimum operatörü kullanılır ise doğruluk derecesi Eş. 5.60 ile gösterilir. $\square$

Önerme 5.11.

Eş. 5.62'de tanımlanan doğruluk derecesi özellik 5.9'u sağlamaktadır.

İspat.

Önerilen yöntemde tüm olası oranlar hesaplanmakta ve bu oranların niceleyiciden almış olduğu en küçük ve en büyük değerler bulunmaktadır. Bu nedenle önerilen yöntem hem tutarlı hem de tutarsız niceleyicileri modelleyebilmektedir. $\square$

Teorem 5.7.

" $Q \tilde{S}_g^I Y$ (nesneler), $\tilde{S}^I$ dir." tip-II niceleyici cümle, S^{e_i} , $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının gömülü tip-1 BK'sı, $S_g^{e_j}$, $\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK'sının gömülü tip-1 BK'sı ve " $Q S_g^{e_j} Y$ (nesneler), S^{e_i} dir.", $T_F^{e_{ji}}$ doğruluk derecesine sahip tip-II niceleyici cümle olsun. Bu durumda $T_F^{e_{ji}}$ doğruluk derecelerinin birleşimi $\tilde{T}_F$ 'ye eşittir.

$$\tilde{T}_F = [T_F^L, T_F^U] = \bigcup_{j,i=1}^{\infty} T_F^{e_{ji}} \quad (5.66)$$

İspat.

$S_g^{e_j}$ ve S^{e_t} gömülü tip-1 BK'lar ve $\Gamma_{jt} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_{jt}}\}$ kümesi $\tilde{S}_g^I, \tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının alt ve üst üyelik dereceleri ve $S_g^{e_j}, S^{e_t}$ gömülü tip-1 BK'larının üyelik derecelerinin birleşiminden oluşsun ve $\alpha_{n_{jt}} < \alpha_{n_{jt}-1} < \dots < \alpha_2 < \alpha_1$ şartı sağlansın.

Γ_{jt} kümesi $S_g^{e_j}$ ve S^{e_t} gömülü tip-1 BK'sına göre değişmektedir.

$(\tilde{S}_g^I)_{\alpha_i} \subseteq (S_g^{e_j})_{\alpha_i} \subseteq (\tilde{S}^I)_{\alpha_i}$ ve $\tilde{S}_{\alpha_i}^I \subseteq S_{\alpha_i}^{e_t} \subseteq \tilde{S}_{\alpha_i}^I$ şartları tüm α_i 'ler için sağlandığı

açıkça görülmektedir. Bu nedenle $\min_{c_\diamond \in C_{a_i}} Q(c_\diamond) \leq Q(c_j) \leq \max_{c_\diamond \in C_{a_i}} Q(c_\diamond)$ şartı

$c_j = \left| (S_g^{e_j})_{\alpha_i} \cap (S^{e_t})_{\alpha_i} \right| / \left| (S_g^{e_j})_{\alpha_i} \right|$ için her zaman sağlanır. T_F^L ve T_F^U değerleri Γ_{jt}

kümesine bağlı olasılık dağılımı değişse bile sabit olup, $T^{e_{jt}}$ değeri bu değerlerin

arasında değişmektedir. $T_F^{e_{jt}}$ değerinin alabileceği en küçük değer T_F^L 'e eşit, en

büyük değer ise T_F^U değerine eşittir. Diğer bir değişle $T_F^L \leq T_F^{e_{jt}} \leq T_F^U$, $j=1,2,\dots,\infty$

şartı sağlanmaktadır. Sonsuz sayıda $S_g^{e_j}$ ve S^{e_t} gömülü tip-1 BK'lar var olduğu için

$[T_F^L, T_F^U]$ aralığında değişen sonsuz sayıda da $T_F^{e_{jt}}$ vardır. Bu nedenle $T_F^{e_{jt}}$

değerlerinin birleşimi $\tilde{T}_F$ 'ye eşittir. $\square$

Örnek 5.8.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun.

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0,6;0,8)}{y_2} \right\} \quad \tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0,4;0,7)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2} \right\}$$

$\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK'sı uzun boylu insanları, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı ise sarışın insanları gösterebilir. $Q = \forall$ olup Eş. 5.67'de tanımlanmıştır.

$$Q(c) = \begin{cases} 1, & c = 1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (5.67)$$

“Tüm uzun boylu insanlar sarışındır” özetinin doğruluk derecesi aşağıda verilen adımlarla hesaplanmıştır.

Adım 1. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ BK'sının elemanlarının alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{1; 0,8; 0,7; 0,6; 0,4\}$ olarak bulunur.

Adım 2. $\tilde{S}_g^I$, $\tilde{S}^I$ ve aralıklı tip-2 BK'larına ait α kesmeleriyle oluşturulan alt ve üst kesin kümeler Çizelge 5.12'de verilmiştir.

$\alpha = 0,8$ olduğu takdirde, $\tilde{S}_g^I(y_m)$ aralıklı tip-2 kümesine ait tüm gömülü tip-1 BK'lardan edilen kesin kümeler $(\tilde{S}_g^I(y_m))_{0,8}$ 'i kapsayan $(\tilde{S}_g^I(y_m))_{0,8}$ kümesinin alt kümeleridir. Bu kümeler de $\{y_1\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ 'dir. $\tilde{S}^I(y_m)$ aralıklı tip-2 kümesine ait tüm gömülü tip-1 BK'lardan $\alpha = 0,8$ kesmesiyle elde edilen kesin kümeler $(\tilde{S}_g^I(y_m))_{0,8}$ 'i kapsayan $(\tilde{S}_g^I(y_m))_{0,8}$ kümesinin alt kümeleridir. Bu küme de $\{y_2\}$ 'dir. Bu durumda 2 olası durum vardır. İlk durumda $(\tilde{S}_g^I(y_m))_{0,8} = S_g^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_1\}$, $(\tilde{S}_g^I(y_m))_{0,8} = S_g^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_2\}$ 'dir. İkinci durum ise $S_g^{e_2}(y_m)_{0,8} = \{y_1, y_2\}$, $S_g^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_2\}$ 'dir. İlk durumda $S_g^{e_1}(y_m)_{0,8} \cap S_g^{e_1}(y_m)_{0,8} = \emptyset$ 'dir. Bu nedenle $c_\diamond = 0$ 'dır. İkinci durumda ise $S_g^{e_2}(y_m)_{0,8} \cap S_g^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_2\}$ 'dir. Olası değerler

kümesi $C_{0,8} = \{0, 1/2\}$ 'dir. Her bir α_i için C_{α_i} kümesi ve niceleyicilerden almış oldukları en büyük ve en küçük değerler Çizelge 5.13'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.12. Uzun ve sarışın aralıklı tip- 2 BK'larına ait alt ve üst kesin kümeler

α	$\underline{\tilde{S}}_g^I(y_m)$	$\bar{\tilde{S}}_g^I(y_m)$	$\underline{\tilde{S}}^I(y_m)$	$\bar{\tilde{S}}^I(y_m)$
1	$\{y_1\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2\}$	$\{y_2\}$
0,8	$\{y_1\}$	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_2\}$	$\{y_2\}$
0,7	$\{y_1\}$	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$
0,6	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$
0,4	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2\}$

Çizelge 5.13. Olası oran değerleri ve niceleyiciden almış oldukları en büyük ve en küçük değerler

α	C_{α_i}	$\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond)$	$\max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond)$
1	$\{0\}$	0	0
0,8	$\{0, 1/2\}$	0	0
0,7	$\{0, 1/2, 1\}$	0	1
0,6	$\{0, 1/2, 1\}$	0	1
0,4	1	1	1

Adım 3. Alt ve üst kesin kümeler elde edildikten sonra ilgili olasılık dağılımı φ , bulunur.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1) &= (1 - 0,8) = 0,2, \quad \varphi(\alpha_2) = (0,8 - 0,7) = 0,1, \quad \varphi(\alpha_3) = (0,7 - 0,6) = 0,1, \\ \varphi(\alpha_4) &= (0,6 - 0,4) = 0,2, \quad \varphi(\alpha_5) = (0,4 - 0) = 0,4 \end{aligned}$$

Adım 4. Doğruluk derecesi hesaplanır.

$$\tilde{T}_F = 0,2 \times (0;0) + 0,1 \times (0;0) + 0,1 \times (0;1) + 0,2 \times (0;1) + 0,4 \times (1;1) = (0,4;0,7)$$

Örnek 5.9a.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'lar

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0;0)}{y_2}, \dots, \frac{(0;0)}{y_{1000}} \right\}$$

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0;0)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2}, \frac{(0;0)}{y_3}, \dots, \frac{(0;0)}{y_{1000}} \right\}$$

olup, $\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK'sı uzun boylu insanları, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı ise sarışın insanları gösterebilir ve $Q(c) = c$ olsun.

Adım 1. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sının elemanlarının alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{1;0\}$ olarak bulunur.

Adım 2. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait α kesmeleriyle oluşturulan alt ve üst kümeler Çizelge 5.14'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.14. Durum-I için $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait alt ve üst kümeler

α	$\tilde{S}_g^I(y_m)$	$\tilde{S}_g^I(y_m)$	$\tilde{S}^I(y_m)$	$\tilde{S}^I(y_m)$
1	$\{y_1\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2\}$	$\{y_2\}$
0	Y	Y	Y	Y

Adım 3. Alt ve üst kesin kümeler elde edildikten sonra ilgili olasılık dağılımı φ bulunur.

$$\varphi(\alpha_1) = (1-0) = 1, \quad \varphi(\alpha_2) = (0-0) = 0$$

Adım 4. Doğruluk derecesi $\tilde{T}_F = 1 \times (0;0) + 0 \times (1;1) = 0$ olarak hesaplanır.

Örnek 5.9b.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0,08;0,12)}{y_2}, \frac{(0,08;0,12)}{y_3}, \dots, \frac{(0,08;0,12)}{y_{1000}} \right\}$$

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0,08;0,12)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2}, \frac{(0,08;0,12)}{y_3}, \dots, \frac{(0,08;0,12)}{y_{1000}} \right\}$$

olup, $\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK'sı uzun boylu insanları, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı ise sarışın insanları gösterebilir. $Q(c) = c$ olsun.

Adım 1. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ BK'sının elemanlarının alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{1;0,12;0,08\}$ olarak bulunur.

Adım 2. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait α kesmeleriyle oluşturulan alt ve üst kümeler Çizelge 5.15'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.15. Durum-II için $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait alt ve üst kümeler

α	$\tilde{S}_g^I(y_m)$	$\tilde{S}^I(y_m)$	$\underline{\tilde{S}}^I(y_m)$	$\overline{\tilde{S}}^I(y_m)$
1	$\{y_1\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2\}$	$\{y_2\}$
0,12	$\{y_1\}$	$\{y_1, \dots, y_{1000}\}$	$\{y_2\}$	$\{y_1, \dots, y_{1000}\}$
0,08	$\{y_1, \dots, y_{1000}\}$	$\{y_1, \dots, y_{1000}\}$	$\{y_1, \dots, y_{1000}\}$	$\{y_1, \dots, y_{1000}\}$

$\alpha = 1$, tek bir durum söz konusudur; $(S_g^{e_1}(y_m))_1 = \{y_1\}$ ve $(S^{e_1}(y_m))_1 = \{y_2\}$. Bu durumda olası oran değerlerinin oluşturduğu küme $C_1 = \{0\}$ 'dir. $\alpha = 0,12$ olduğunda $\left(\min_{c_\diamond \in C_{0,12}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{0,12}} Q(c_\diamond) \right) = (0,1)$ eşittir. $\alpha = 0,08$ olduğunda takdirde $\left(\min_{c_\diamond \in C_{0,08}} Q(c_\diamond), \max_{c_\diamond \in C_{0,08}} Q(c_\diamond) \right) = (1,1)$ 'dir.

Adım 3. Alt ve üst kesin kümeler elde edildikten sonra ilgili olasılık dağılımı φ bulunmuştur.

$$\varphi(\alpha_1) = (1 - 0,12) = 0,88, \quad \varphi(\alpha_2) = (0,12 - 0,08) = 0,04, \quad \varphi(\alpha_3) = (0,08 - 0) = 0,08$$

Adım 4. Doğruluk derecesi $\tilde{T}_F = 0,88 \times (0;0) + 0,04 \times (0;1) + 0,08 \times (1;1) = (0,08;0,12)$ olarak hesaplanır.

Örnek 5.10.

$\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun.

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0,6;0,8)}{y_2}, \frac{(0,3;0,8)}{y_3} \right\} \quad \tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0,4;0,7)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2}, \frac{(0,5;0,7)}{y_3} \right\}$$

$\tilde{S}_g^I$ aralıklı tip-2 BK'sı uzun boylu insanları, $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'sı ise sarışın insanları gösterebilir. "yaklaşık üçte biri" niceleyicisi olup Şekil 5.4'de tanımlanmıştır.

Adım 1. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ BK'sının elemanlarının alt ve üst üyelik derecelerinin oluşturmuş olduğu küme $\Gamma = \{1;0,8;0,7;0,6;0,5;0,4;0,3\}$ 'dır.

Adım 2. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait α kesmeleriyle oluşturulan alt ve üst kümeler Çizelge 5.16'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.16. $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK'larına ait alt ve üst kümeler

α	$\underline{\tilde{S}}_g^I(y_m)$	$\overline{\tilde{S}}_g^I(y_m)$	$\underline{\tilde{S}}^I(y_m)$	$\overline{\tilde{S}}^I(y_m)$
1	$\{y_1\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2\}$	$\{y_2\}$
0,8	$\{y_1\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_2\}$	$\{y_2\}$
0,7	$\{y_1\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_2\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$
0,6	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_2\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$
0,5	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$
0,4	$\{y_1, y_2\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$
0,3	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$

Alt ve üst kesin kümeler bulunduktan sonra, her bir α_i için C_{α_i} kümesi ve bu kümenin elemanlarının niceleyiciden almış olduğu en büyük ve en küçük değerler Çizelge 5.17'de gösterilmiştir. $\alpha=0,8$ olduğu takdirde, $\tilde{S}_g^I(y_m)$ aralıklı tip-2 BK'sına ait tüm gömülü tip-1 BK'lardan elde edilen kesin kümeler $(\tilde{S}_g^I(y_m))_{0,8}$ 'i kapsayan $(\overline{\tilde{S}}_g^I(y_m))_{0,8}$ kümesinin alt kümeleridir. Bu kümeler de $S_g^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_1\}$, $S_g^{e_2}(y_m)_{0,8} = \{y_1, y_2\}$, $S_g^{e_3}(y_m)_{0,8} = \{y_1, y_3\}$ ve $S_g^{e_4}(y_m)_{0,8} = \{y_1, y_2, y_3\}$ 'dir. $\tilde{S}^I(y_m)$ aralıklı tip-2 BK'sına ait tüm gömülü tip-1 BK'lardan $\alpha=0,8$ kesmesiyle elde edilen kesin kümeler $(\tilde{S}_g^I(y_m))_{0,8}$ 'i kapsayan $(\overline{\tilde{S}}^I(y_m))_{0,8}$ kümesinin alt kümeleridir. Bu küme de $S^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_2\}$ 'dir. Bu durumda 4 olası durum vardır. İlk durumda $S_g^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_1\}$, $S^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_2\}$ 'dir. İkinci durumda ise $S_g^{e_2}(y_m)_{0,8} = \{y_1, y_2\}$, $S^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_2\}$ 'dir. Üçüncü durumda $S_g^{e_3}(y_m)_{0,8} = \{y_1, y_3\}$, $S^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_2\}$ 'dir. Son durumda ise $S_g^{e_4}(y_m)_{0,8} = \{y_1, y_2, y_3\}$, $S^{e_1}(y_m)_{0,8} = \{y_2\}$ 'dir. Olası değerlerin

oluşturduğu küme $C_{0,8} = \{0, 1/2, 1/3\}$. Her bir α_i için C_{α_i} ve bu değerlerin niceleyiciden almış oldukları en büyük ve en küçük değerler Çizelge 5.17’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.17. Olası oran değerleri ve niceleyiciden almış oldukları en büyük ve en küçük değer

α	C_{α_i}	$\min_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond)$	$\max_{c_\diamond \in C_{\alpha_i}} Q(c_\diamond)$
1	$\{0\}$	0	0
0,8	$\{0, 1/2, 1/3\}$	0	1
0,7	$\{0, 1/2, 1/3, 2/3, 1\}$	0	1
0,6	$\{1/2, 1/3, 2/3, 1\}$	0	1
0,5	$\{1/2, 2/3, 1\}$	0	0
0,4	1	0	0
0,3	1	0	0

Adım 3. Alt ve üst kesin kümeler elde edildikten sonra ilgili olasılık dağılımı φ bulunur.

$$\varphi(\alpha_1) = (1 - 0,8) = 0,2$$

$$\varphi(\alpha_2) = (0,8 - 0,7) = 0,1$$

$$\varphi(\alpha_3) = (0,7 - 0,6) = 0,1$$

$$\varphi(\alpha_4) = (0,6 - 0,5) = 0,1$$

$$\varphi(\alpha_5) = (0,5 - 0,4) = 0,1$$

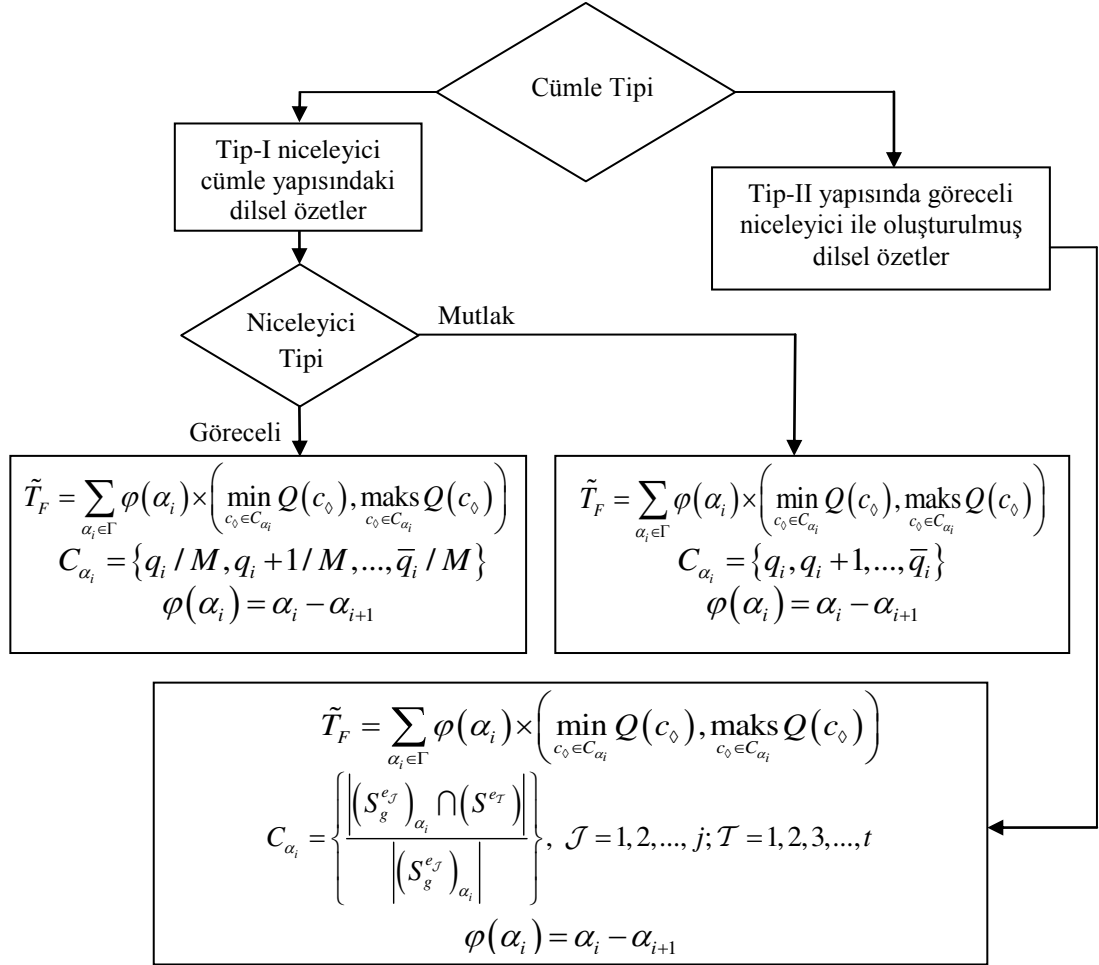
$$\varphi(\alpha_6) = (0,4 - 0,3) = 0,1$$

$$\varphi(\alpha_7) = (0,3 - 0) = 0,3$$

Adım 4. “Uzun boylu insanların yaklaşık üçte biri sarışındır” özetinin doğruluk derecesi aşağıda hesaplanmıştır.

$$\tilde{T}_F = 0,2 \times (0;0) + 0,1 \times (0;1) + 0,1 \times (0;1) + 0,1 \times (0;1) + 0,1 \times (0;0) + 0,4 \times (0;0) = (0;0,3)$$

Tip-I ve tip-II niceleyici cümle yapısındaki dilsel özetleri değerlendirmek için önerilen yöntemler Şekil 5.5’de gösterilmiştir.



Şekil 5.5. Niceleyici cümle yapısındaki özetlerin değerlendirilmesi için olasılık temelli doğruluk derecesi

5.5. Farklı Kalite Ölçümleri

Bu bölümde aralıklı doğruluk derecesinin yanında özetlerin yararlı olup olmadığı yada yeni bir bilgi içerip içermediğini ölçen aralıklı değer alan kalite ölçümleri önerilmiştir. Önerilen kalite ölçümleri Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen kalite ölçümlerinin genelleştirilmiş halleridir. Bu ölçümlerden ilki aralıklı kapsama

derecesidir. Aralıklı kapsama derecesi özeti yeterli veri tarafından desteklenip desteklenmediğini ölçmektedir. Aralıklı kapsama derecesini hesaplamak için ilk olarak aralıklı kapsama oranının hesaplanması gerekir.

$$r^I = \left(\frac{\sum_{m=1}^M t_m^L}{M}, \frac{\sum_{m=1}^M t_m^U}{M} \right) \quad (5.68)$$

$$t_m^L = \begin{cases} 1, & \mu_{\tilde{S}_g^L}(v_g^m) > 0 \text{ ve } \mu_{\tilde{S}^L}(v^m) > 0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

$$t_m^U = \begin{cases} 1, & \mu_{\tilde{S}_g^U}(v_g^m) > 0 \text{ ve } \mu_{\tilde{S}^U}(v^m) > 0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

Eş. 5.68’de tanımlanan r^I özet “eğer-ise” yapısında ise öncül ve ardılını sağlayan nesnelerin oranını, eğer özet tip-II niceleyici yapısında ise niteleyici ve özetleyicileri sağlayan nesnelerin oranını göstermektedir. Aralıklı kapsama oranı çok küçük bir değer olduğu için doğrudan kullanılamamaktadır. Bu nedenle Eş. 5.69 ve Eş. 5.70 tanımlanan fonksiyonlar kullanılarak aralıklı kapsama derecesi $\tilde{T}_c = (T_c^L, T_c^U)$ elde edilir.

$$T_c^L = f(r^L) = \begin{cases} 0, & r^L \leq r_1 \\ \frac{2(r^L - r_1)}{(r_2 - r_1)^2}, & r_1 < r^L < \frac{r_1 + r_2}{2} \\ 1 - \frac{2(r - r_1)}{(r_2 - r_1)^2}, & \frac{r_1 + r_2}{2} \leq r^L < r_2 \\ 1, & r^L \geq r_2 \end{cases} \quad (5.69)$$

$$T_c^U = f(r^U) = \begin{cases} 0, & r^U \leq r_1 \\ \frac{2(r^U - r_1)}{(r_2 - r_1)^2}, & r_1 < r^U < \frac{r_1 + r_2}{2} \\ 1 - \frac{2(r^U - r_1)}{(r_2 - r_1)^2}, & \frac{r_1 + r_2}{2} \leq r^U < r_2 \\ 1, & r^U \geq r_2 \end{cases} \quad (5.70)$$

Wu ve Mendel [8] tarafından yapılan çalışmada $r_1 = 0,02$ ve $r_2 = 0,15$ olarak alınmıştır.

Aralıklı fayda derecesi, özetin ne derece faydalı olduğunu belirtmektedir. Bir özetin faydalı olabilmesi için ele alınan özetin “doğruluk derecesi yüksek” ve “yeterli kapsama derecesine sahip olmalı” şartlarını sağlaması gerekir. Eş. 5.71’de aralıklı fayda derecesi $\tilde{T}_u = (T_u^L, T_u^U)$ tanımlanmıştır (Eş. 5.71’de tanımlanan T^L herhangi bir aralıklı doğruluk derecesinin alt değeri, T^U herhangi bir aralıklı doğruluk derecesinin üst değeridir).

$$\tilde{T}_u = (T_u^L, T_u^U) = (\min(T^L, T_c^L), \min(T^U, T_c^U)) \quad (5.71)$$

Fayda derecesinin yüksek olması bazı durumlarda herkes tarafından bilinen “hemen hemen tüm kış günleri soğuktur” gibi özetin ön plana çıkmasına neden olur. Bu durum çok önemli olan fakat bilinmeyen bazı bilgilerin elde edilmesini güçleştirir. Bu nedenle Wu ve Mendel [8] aykırılık derecesini önermiştir. Aykırılık derecesi kapsama derecesi ve doğruluk derecesi düşük yada doğruluk derecesi yüksek kapsama derecesi düşük özetleri elde etmektedir. Aralıklı aykırılık derecesi $\tilde{T}_o = (T_o^L, T_o^U)$, Eş. 5.72 ve Eş. 5.73’de tanımlanmıştır.

$$T_o^L = \min(\max(T^L, 1 - T^L), 1 - T_c^L) \quad (5.72)$$

$$T_o^U = \min\left(\max(T^U, 1 - T^U), 1 - T_C^U\right) \quad (5.73)$$

Wu ve Mendel [8] tarafından tanımlanan basitlik derecesi özetin uzunluğunu ölçmektedir. Eş. 3.47’de tanımlanan basitlik derecesinde l özetteki öncül ve ardıl özetleyicilerin sayısıdır. Bu nedenle bu bölümde özetlerin basitlik derecesini ölçmek için Eş. 3.47’de tanımlanan eşitlik kullanılacaktır.

Örnek 5.11.

$|Y| = M = 5000$, $\tilde{S}_g^I$ ve $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK

$$\tilde{S}_g^I(y_m) = \left\{ \frac{(1;1)}{y_1}, \frac{(0,08;0,12)}{y_2}, \frac{(0,08;0,12)}{y_3}, \dots, \frac{(0,08;0,12)}{y_{1000}} \right\}$$

$$\tilde{S}^I(y_m) = \left\{ \frac{(0,08;0,12)}{y_1}, \frac{(1;1)}{y_2}, \frac{(0,08;0,12)}{y_3}, \dots, \frac{(0,08;0,12)}{y_{1000}} \right\}$$

olsun. Eş. 5.62 kullanıldığında doğruluk derecesi $\tilde{T}_F = (T_F^L, T_F^U) = (0,08;0,12)$ olarak bulunmuştur. Eş. 5.68 kullanılarak aralıklı kapsama oranı $r^I = (0,2;0,2)$ olarak elde edilir. Eş. 5.69 ve Eş. 5.70 tanımlanan fonksiyonlarda $r_1 = 0,02$ ve $r_2 = 0,15$ olduğu takdirde aralıklı kapsama derecesi $\tilde{T}_c = (1;1)$ ’dir. Eş. 5.71 yardımıyla aralıklı fayda derecesi $\tilde{T}_u = (0,08;0,12)$ olarak hesaplanır. Eş. 5.72 ve Eş. 5.73’de önerilen aralıklı aykırılık derecesi $\tilde{T}_o = (0;0)$ olarak bulunur.

6. ARALIKLI TİP-2 BULANIK DİLSEL ÖZETLER ARASINDAKİ BENZERLİĞİN ÖLÇÜLMESİ

Bu bölümde tip-II niceleyici cümle yapısındaki iki dilsel özetin benzerliğinin ölçülmesi için yeni bir metrik önerilmiştir. Önerilen metrik iki dilsel özet arasındaki niceleyici, niteleyici, özetleyici ve doğruluk derecesi arasındaki benzerliğe dayanmaktadır. Niteleyici ve özetleyiciler aralıklı tip-2 BK'lar ile etiketlendiği için bu bölümde aralıklı tip-2 BK'lar için yeni bir benzerlik ölçüsü geliştirilmiştir.

6.1. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümeler için Yeni Bir Uzaklık ve Benzerlik Ölçüsü

Bu bölümde aralıklı tip-2 BK'lar için yeni bir uzaklık ve benzerlik ölçüsü geliştirilmiştir. Önerilen uzaklık ve benzerlik ölçüsünün Tanım 6.1-Tanım 6.3'de verilen aksiyomları sağladı ispat edilmiştir.

Tanım 6.1.

$\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun. $Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ aralıklı tip-2 BK'larda bir uzaklık ölçüsü olabilmesi için aşağıda tanımlanan aksiyomları sağlaması gerekir.

$$(A1(Uzk)) \quad 0 \leq Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) \leq 1$$

$$(A2(Uzk)) \quad Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) = 0 \text{ ancak ve ancak } \tilde{A}^I = \tilde{B}^I$$

$$(A3(Uzk)) \quad Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) = Uzk(\tilde{B}^I, \tilde{A}^I)$$

$$(A4(Uzk)) \quad \text{Eğer } \tilde{A}^I \subseteq \tilde{B}^I \subseteq \tilde{C}^I \text{ ise } Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{C}^I) \geq Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$$

Tanım 6.2.

$\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun. $Benz(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ aralıklı tip-2 BK'larda bir

benzerlik ölçüsü olabilmesi için aşağıda tanımlanan aksiyomları sağlaması gerekir.

$$(A1(\text{Benz})) \quad 0 \leq \text{Benz}(\tilde{A}', \tilde{B}') \leq 1$$

$$(A2(\text{Benz})) \quad \text{Benz}(\tilde{A}', \tilde{B}') = 1 \text{ ancak ve ancak } \tilde{A}' = \tilde{B}'$$

$$(A3(\text{Benz})) \quad \text{Benz}(\tilde{A}', \tilde{B}') = \text{Benz}(\tilde{B}', \tilde{A}')$$

$$(A4(\text{Benz})) \quad \text{Eğer } \tilde{A}' \subseteq \tilde{B}' \subseteq \tilde{C}' \text{ ise } \text{Benz}(\tilde{A}', \tilde{C}') \leq \text{Benz}(\tilde{A}', \tilde{B}')$$

Tanım 6.3.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kesikli evrensel uzayında $\tilde{A}'$, $\tilde{B}'$ ve $\tilde{C}'$ aralıklı tip-2 BK olsun.

$\tilde{A}'$, $\tilde{B}'$ ve $\tilde{C}'$ kümelerinin alt üyelik dereceleri $\mu_{\tilde{A}'}^L(x_i) = \mu_A(x_i)$, $\mu_{\tilde{B}'}^L(x_i) = \mu_B(x_i)$

ve $\mu_{\tilde{C}'}^L(x_i) = \mu_C(x_i)$, üst üyelik derecesinin 1'den farkı $1 - \mu_{\tilde{A}'}^U(x_i) = v_A(x_i)$,

$1 - \mu_{\tilde{B}'}^U(x_i) = v_B(x_i)$ ve $1 - \mu_{\tilde{C}'}^U(x_i) = v_C(x_i)$ olarak gösterilsin. $\tilde{A}'$ ve $\tilde{B}'$ aralıklı tip-

2 BK arasındaki uzaklık ölçüsü Eş. 6.1'de tanımlanmıştır.

$$Uzk(\tilde{A}', \tilde{B}') = \sqrt[p]{\frac{1}{2(t+1)^p n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p + \left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p \right\}} \quad (6.1)$$

$$t = 2, 3, 4, \dots \text{ ve } p = 1, 2, 3, \dots$$

Teorem 6.1.

$\tilde{A}'$ ve $\tilde{B}'$ aralıklı tip-2 BK olsun. $Uzk(\tilde{A}', \tilde{B}')$ aralıklı tip-2 BK'larda bir uzaklık ölçüsüdür.

İspat.

(A1(Uzk)) $\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun. Eş. 6.1’de verilen ifadeler

$$\left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right| = \left| (t\mu_A(x_i) - v_A(x_i)) - (t\mu_B(x_i) - v_B(x_i)) \right|$$

$$\left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right| = \left| (tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) - (tv_B(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|$$

olarak yazılabilir. Aralıklı tip-2 BK’ların tanımı gereği, aşağıda verilen eşitsizlikler yazılabilir.

$$0 \leq \mu_A(x_i) \leq 1, \quad 0 \leq \mu_B(x_i) \leq 1, \quad 0 \leq v_A(x_i) \leq 1, \quad 0 \leq v_B(x_i) \leq 1$$

Bu eşitsizlikler dikkate alınarak Eş. 6.2 ve Eş. 6.3 elde edilir.

$$-1 \leq (t\mu_A(x_i) - v_A(x_i)) \leq t \quad (6.2)$$

$$-t \leq -(t\mu_B(x_i) - v_B(x_i)) \leq 1 \quad (6.3)$$

Eş. 6.2 ve Eş. 6.3 taraf tarafa toplandığı takdirde Eş.6.4 elde edilir.

$$-(t+1) \leq (t\mu_A(x_i) - v_A(x_i)) - (t\mu_B(x_i) - v_B(x_i)) \leq (t+1) \quad (6.4)$$

Eş. 6.4’de tanımlanan ifadenin mutlak değerinin p.dereceden kuvveti Eş. 6.5’de tanımlanmıştır.

$$0 \leq \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p \leq (t+1)^p \quad (6.5)$$

Benzer şekilde, aralıklı tip-2 BK’ların tanımı gereği Eş. 6.6 ve Eş. 6.7 elde edilir.

$$-1 \leq (tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) \leq t \quad (6.6)$$

$$-t \leq -(tv_B(x_i) - \mu_B(x_i)) \leq 1 \quad (6.7)$$

Eş. 6.6 ve Eş. 6.7 taraf tarafa toplandığı takdirde Eş.6.8 elde edilir.

$$-(t+1) \leq (tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) - (tv_B(x_i) - \mu_B(x_i)) \leq (t+1) \quad (6.8)$$

Eş. 6.8’de tanımlanan ifadenin mutlak değerinin p.dereceden kuvveti Eş. 6.9’da tanımlanmıştır.

$$0 \leq \left| (tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) - (tv_B(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p \leq (t+1)^p \quad (6.9)$$

Eş. 6.5 ve Eş. 6.9 taraf tarafa toplanıp gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde Eş. 6.10 elde edilir.

$$0 \leq \sqrt[p]{\frac{1}{2(t+1)^p n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p + \left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p \right\}} \leq 1 \quad (6.10)$$

Buradan $0 \leq Uz k(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) \leq 1$ ifadesinin sağlandığı gösterilmiştir. $\square$

(A2(Uzk)) $\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun. Eğer $\tilde{A}^I = \tilde{B}^I$ ise $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$, $v_A(x_i) = v_B(x_i)$ $\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) = 0$ ve $v_A(x_i) - v_B(x_i) = 0$ ’dir. Bu nedenle $Uz k(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) = 0$ ’dır. $\square$

(A3(Uzk)) $\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun. Aralıklı tip-2 BK’ların tanımı gereği, aşağıda verilen eşitlikler yazılabilir.

$$\left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p = \left| - \left\{ t(\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)) - (v_B(x_i) - v_A(x_i)) \right\} \right|^p$$

$$\left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p = \left| - \left\{ t(v_B(x_i) - v_A(x_i)) - (\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)) \right\} \right|^p$$

$$\left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p = \left| t(\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)) - (v_B(x_i) - v_A(x_i)) \right|^p$$

$$\left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p = \left| t(v_B(x_i) - v_A(x_i)) - (\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)) \right|^p$$

Buradan $Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) = Uzk(\tilde{B}^I, \tilde{A}^I)$ ifadesinin sağlandığı gösterilmiştir. $\square$

(A4(Uzk)) $\tilde{A}^I$, $\tilde{B}^I$ ve $\tilde{C}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun. $\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$, $\tilde{A}^I$ ve $\tilde{C}^I$ aralıklı tip-2 BK'lar arasındaki uzaklık ölçüsü Eş. 6.11 ve Eş. 6.12'de tanımlanmıştır.

$$Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) = \sqrt[p]{\frac{1}{2(t+1)^p n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p + \left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p \right\}} \quad (6.11)$$

$$Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{C}^I) = \sqrt[p]{\frac{1}{2(t+1)^p n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)) - (v_A(x_i) - v_C(x_i)) \right|^p + \left| t(v_A(x_i) - v_C(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)) \right|^p \right\}} \quad (6.12)$$

Bazı düzenlemeler yapıldıktan sonra aşağıda verilen eşitlikler yazılabilir.

$$\left| t(\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)) - (v_A(x_i) - v_C(x_i)) \right| = \left| (t\mu_A(x_i) - v_A(x_i)) - (t\mu_C(x_i) - v_C(x_i)) \right|$$

$$\left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right| = \left| (t\mu_A(x_i) - v_A(x_i)) - (t\mu_B(x_i) - v_B(x_i)) \right|$$

$$\left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right| = \left| (tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) - (tv_B(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|$$

$$\left| t(v_A(x_i) - v_C(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)) \right| = \left| (tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) - (tv_C(x_i) - \mu_C(x_i)) \right|$$

Eğer $\tilde{A}^I \subseteq \tilde{B}^I \subseteq \tilde{C}^I$ ise $\mu_C(x_i) \geq \mu_B(x_i) \geq \mu_A(x_i)$ ve $v_A(x_i) \geq v_B(x_i) \geq v_C(x_i)$ 'dir. Aralıklı tip-2 BK'ların tanımı gereği $0 \leq \mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) \leq \mu_C(x_i) \leq 1$ ve $0 \leq v_C(x_i) \leq v_B(x_i) \leq v_A(x_i) \leq 1$ 'dır.

Bu tanımlardan yola çıkarak Eş. 6.13 ve Eş. 6.14'deki eşitsizlikler yazılabilir.

$$(t\mu_C(x_i) - v_C(x_i)) \geq (t\mu_B(x_i) - v_B(x_i)) \geq (t\mu_A(x_i) - v_A(x_i)) \quad (6.13)$$

$$(tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) \geq (tv_B(x_i) - \mu_B(x_i)) \geq (tv_C(x_i) - \mu_C(x_i)) \quad (6.14)$$

Eş. 6.13 ve Eş. 6.14 kullanılarak aşağıda verilen eşitsizlikler elde edilir.

$$\left| (t\mu_A(x_i) - v_A(x_i)) - (t\mu_C(x_i) - v_C(x_i)) \right|^p \geq \left| (t\mu_A(x_i) - v_A(x_i)) - (t\mu_B(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p$$

$$\left| (tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) - (tv_C(x_i) - \mu_C(x_i)) \right|^p \geq \left| (tv_A(x_i) - \mu_A(x_i)) - (tv_B(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p$$

Buradan $Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{C}^I) \geq Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ olduğu gösterilir. Benzer şekilde $Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{C}^I) \geq Uzk(\tilde{B}^I, \tilde{C}^I)$ olduğu da gösterilir. $\square$

$Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ 'nin (A1(Uzk))-(A4(Uzk)) aksiyomlarını sağladığı gösterilmiş olup $Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ aralıklı tip-2 BK için bir uzaklık ölçüsüdür.

Teorem 6.2.

$\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$ aralıklı tip-2 BK olsun. $Uzk_w(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ aralıklı tip-2 BK'lar için bir ağırlıklı uzaklık ölçüsüdür.

$$Uzk_w(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) = \sqrt[p]{\frac{1}{2(t+1)^p n} \sum_{i=1}^n w_i \left\{ \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p + \left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p \right\}} \quad (6.15)$$

w_i ağırlıklar olup $w_i \in [0,1]$ ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ şartlarını sağlar.

İspat.

Teorem 6.2'nin ispatı Teorem 6.1 ile aynıdır. Özellikle $w_i = 1/n$ olduğu takdirde $Uzk_w(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$, $Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ 'ye eşittir. $\square$

Teorem 6.3.

$Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ $\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$ aralıklı tip-2 BK'lar arasında uzaklık ölçüsü olsun.

$Benz(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I) = 1 - Uzk(\tilde{A}^I, \tilde{B}^I)$ $\tilde{A}^I$ ve $\tilde{B}^I$ aralıklı tip-2 BK'lar arasında benzerlik ölçüsüdür.

$$Benz(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2(t+1)^p n} \left\{ \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (v_A(x_i) - v_B(x_i)) \right|^p + \left| t(v_A(x_i) - v_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p \right\}} \quad (6.16)$$

İspat.

Uzaklık ölçüsü ve benzerlik ölçüsüyle ilgili aksiyomlar dikkate alındığında Teorem 6.3'ün ispatı Teorem 6.1 ile aynıdır. $\square$

6.2. Dilsel Özetlerin Benzerliğinin Ölçülmesi

İki farklı dilsel özetin benzerliğinin ölçülmesi ilk olarak Wilbik ve Keller tarafından önerilmiştir [159]. Önerilen yöntemde, iki farklı dilsel özetin tip-1 BK ile etiketlenen niceleyiciler, niteleyiciler ve özetleyiciler arasındaki benzerliğin ölçülmesi dikkate alınmıştır. Benzerlik ölçütü olarak Jaccard benzerlik ölçümü kullanılmıştır. Wilbik ve ark. ameliyata giren hastaların ameliyat sonrası durumunun zamana bağlı verilerini kaydetmişlerdir. Zamanı 15 dakikalık periyotlara bölmüşler ve bu periyotlar içerisinde hastaların hareketlerini ve dinlenmelerini kaydetmişlerdir. Hastaların durumlarının stabil olduğu gün içindeki hareketlerinin ve dinlenmelerinin sıklıklarını özetlemişlerdir. Hastalardan gün içindeki elde edilen özetlerle stabil olduğu durumdaki özetlerin benzerlikleri ölçülmüştür. Benzerlik ölçümü küçükse hastanın durumu stabil değildir. Eğer benzerlik ölçümü büyükse hastanın durumu normaldir [160].

Jaccard benzerlik ölçümünün tip-1 BK'ların benzerliğinin ölçülmesinde kullanıldığında üçgen eşitsizliği aksiyomunu sağlamaktadır; fakat, bazı durumlarda aralıklı tip-2 BK'ların benzerliğinin ölçülmesinde kullanıldığında üçgen eşitsizliği aksiyomunu sağlamamaktadır. Bu nedenle Eş. 6.16'da tanımlanan benzerlik ölçütü kullanılarak iki farklı dilsel özetin benzerliği ölçülebilir.

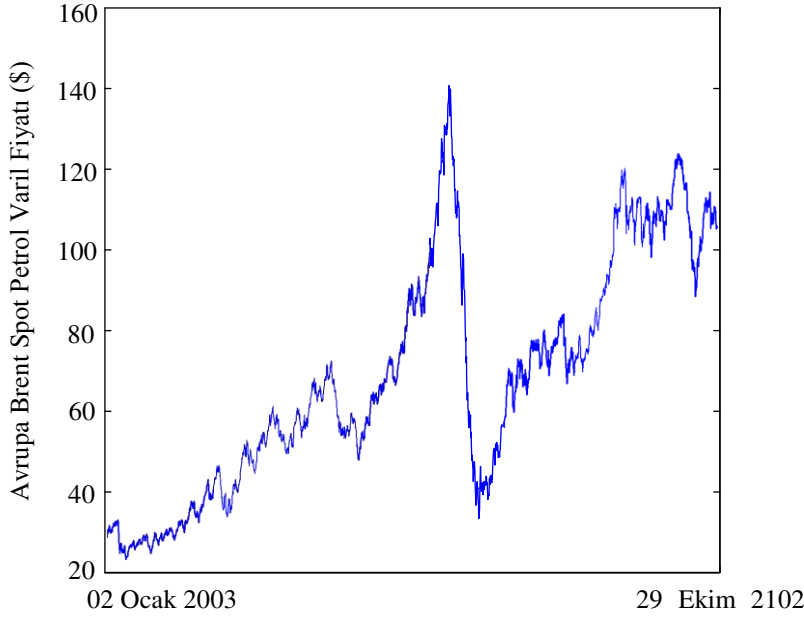
" $Q_1 \tilde{S}_{g_1}^I Y (nesneler), \tilde{S}_1^I dir.$ " ve " $Q_2 \tilde{S}_{g_2}^I Y (nesneler), \tilde{S}_2^I dir.$ " iki farklı dilsel özet olarak verilsin. İki özette, Q_1 ve Q_2 tip-1 BK'larla etiketlenen niceleyiciler, $\tilde{S}_{g_1}^I$ ve $\tilde{S}_{g_2}^I$ aralıklı tip-2 BK'larla etiketlenen niteleyiciler, $\tilde{S}_1^I$ ve $\tilde{S}_2^I$ aralıklı tip-2 BK'larla etiketlenen özetleyicilerdir. İki özet arasındaki benzerlik Eş. 6.17'de tanımlanmıştır.

$$Benz\left("Q_1 \tilde{S}_1^I Y, \tilde{S}_1^I \text{ dir.}", "Q_2 \tilde{S}_2^I Y, \tilde{S}_2^I \text{ dir.}"\right) = \\ \min\left(Benz\left(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I\right), Benz\left(\tilde{S}_1^I, \tilde{S}_2^I\right), Benz\left(Q_1, Q_2\right), Benz\left(T_1, T_2\right)\right) \quad (6.17)$$

Eş. 6.17’de $Benz(T_1, T_2) = 1 - |T_1 - T_2|$ ’ye eşittir. Eğer doğruluk derecesi aralıklı olursa alt ve üst doğruluk derecelerinin ortalamaları alınır. Eş. 6.17 kullanılarak aralıklı tip-2 bulanık dilsel özetler benzerliklerine göre kümelenebilir. Özellikle özet sayısının çok olduğu zamana bağlı verilerde birbirlerine bezer olan çok sayıda özetle karşılaşılabilir. Bu durumda benzer özetler kümelenecek daha öz bilginin çıkarımı yapılabilir. Ayrıca zamana bağlı verilerden elde edilen özetler karşılaştırılarak belirli olayların zaman içerisinde nasıl değiştiği hakkında bilgi elde edilebilir. Bu nedenle özetler arasındaki benzerliği ölçülmesi oldukça önemlidir. Önerilen yöntem aralıklı tip-2 bulanık dilsel özetler arasındaki benzerliğin ölçülmesinde kullanıldığı için hastaların takibi gibi zaman içerisinde sürekli olarak değişen olayların takibinde kullanılabilir.

7. UYGULAMA

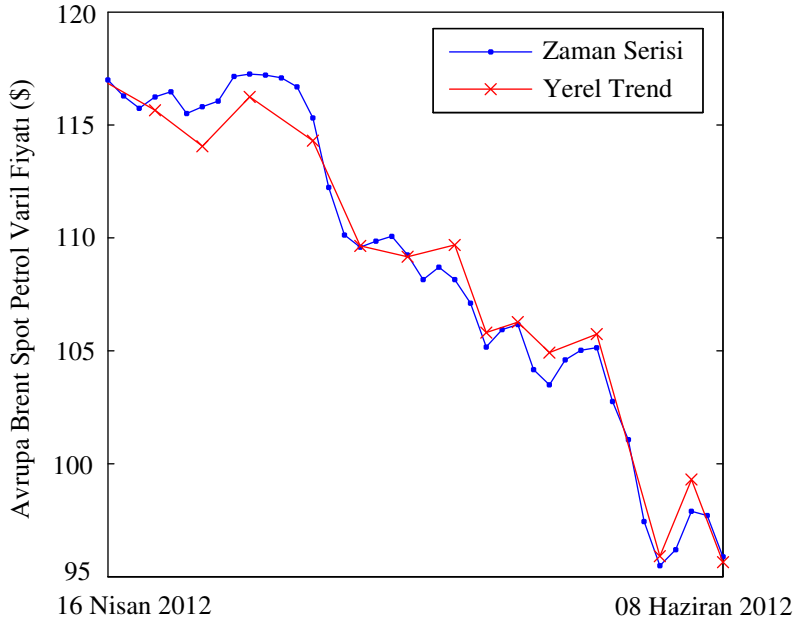
Bu bölümde, Bölüm 5.3’de önerilen kütle atama fonksiyonu temelli doğruluk derecesi ($\tilde{T}_E$) ve Bölüm 5.4’de önerilen olasılık temelli doğruluk derecesi ($\tilde{T}_F$) kullanılarak Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatları zaman serisi dilsel olarak özetlenmiştir. Petrol varil fiyatları zaman serisi, 2 Ocak 2003 - 29 Ekim 2012 tarihleri arasında yer alan 2537 iş gününü kapsamakta olup zaman serisinin en küçük değeri 23,27 \$, en büyük değeri 140,73 \$’dır. Zaman serisinin grafiği Şekil 7.1’de gösterilmiştir.



Şekil 7.1. 02 Ocak 2003-29 Ekim 2012 tarihleri arasındaki Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatı

Zaman serilerinin özetlenebilmesi için ilk olarak zaman serisine ait yerel trendlerin belirlenmesi gerekmektedir (Zaman serilerinin dilsel özetlenmesi ile ilgili yapılan çalışmalar Bölüm 4’de detaylı bir şekilde incelenmiştir) [108, 109]. Yerel trendlerin belirlenmesi için Sklansky ve Gonzales tarafından önerilen düzgün ε - yaklaşım fonksiyonu kullanılmıştır [107]. Önerilen algoritma MATLAB yazılımında kodlanarak petrol varil fiyatları zaman serisine ait yerel trendler elde edilmiş, elde

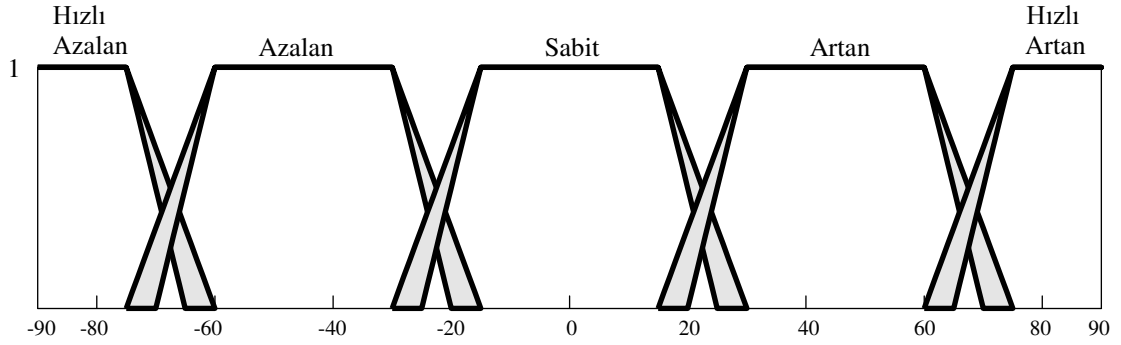
edilen yerel trendlerin süresi, dinamikliği ve değişkenliğiyle ilgili değerler hesaplanmıştır. $\varepsilon = 0.4275$ değeri kullanılarak 644 tane yerel trend çıkarılmıştır. 16 Nisan 2012-8 Haziran 2012 tarihleri arasındaki zaman serisi değerleri ve elde edilen yerel trendler Şekil 7.2’de gösterilmiştir.



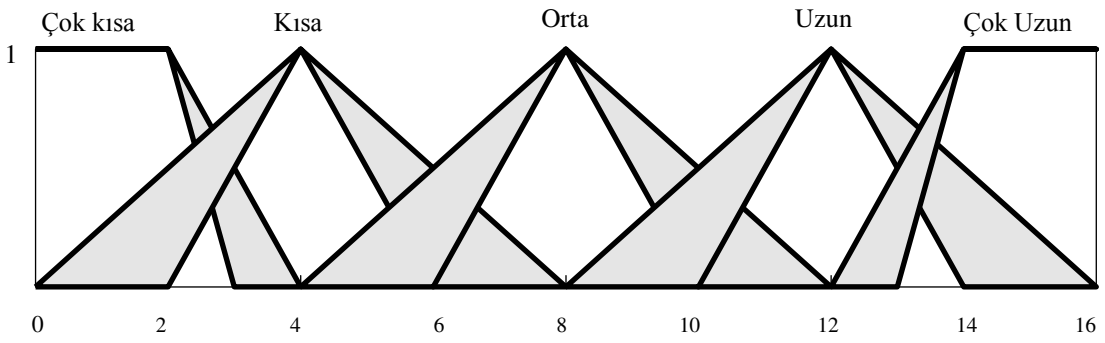
Şekil 7.2. 16 Nisan 2012-08 Haziran 2012 tarihleri arasındaki Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatı ve yerel trendler

Elde edilen en kısa trendin süresi 2 gün, en uzun trendin süresi 16 gündür. Trendlerin x eksenine yaptığı açının en küçük değeri -83^0 , en büyük değeri ise 80^0 olarak bulunmuştur. Trendlerin değişkenliği yerel trendlerle zaman serisi değerleri arasındaki uzaklık bulunarak hesaplanmıştır. En küçük değer % 0, en büyük değer % 10 olarak bulunmuştur. Trendlerin süresi, dinamikliği ve değişkenliği dilsel değişkenlerle tanımlanmıştır. Her bir dilsel değişken 5 farklı aralıklı tip-2 BK ile etiketlenmiştir. Aralıklı tip-2 BK’lar Liu ve Mendel [182] ve Wu ve ark. [183] tarafından önerilen yöntem kullanılarak elde edilmiştir. Trendlerin süresi, dinamikliği ve değişkenliği ile ilgili aralıklı tip-2 BK’lar Şekil 7.3 – Şekil 7.5’de gösterilmiştir.

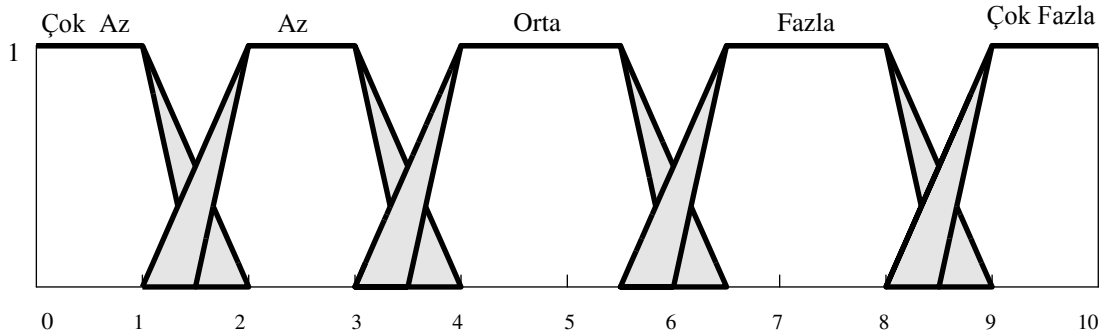
Dilsel özetleme işleminde “tümü”, “yaklaşık yarısı” ve “çoğu” niceleyicileri kullanılmıştır. Bu niceleyiciler Şekil 7.6’da gösterilmiştir.



Şekil 7.3. Trendlerin değişimi için aralıklı tip-2 BK'lar



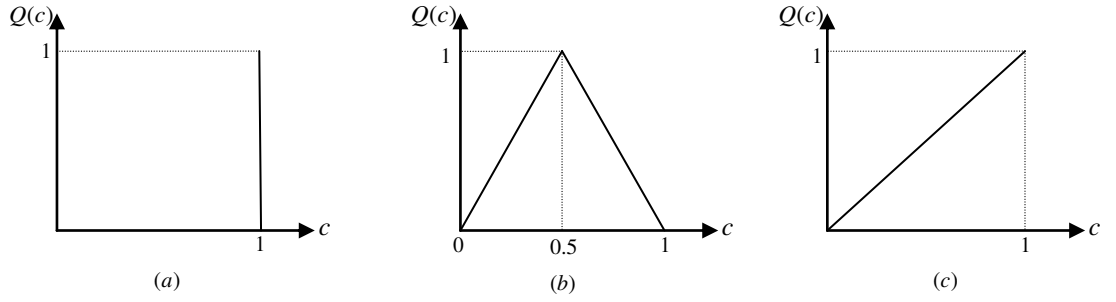
Şekil 7.4. Trendlerin süresi için aralıklı tip-2 BK'lar



Şekil 7.5. Trendlerin değişimi için aralıklı tip-2 BK'lar

Dilsel özetleme işleminde tip-II niceleyici cümle özet yapısı olarak kullanılmıştır. Özet yapısında, niteleyici sayısının bir, özetleyici sayısının bir olduğu tüm durumlar

ele alınmıştır. Özellik sayısının üç olması nedeniyle toplamda 450 adet özet ($3 \binom{3}{2} 5 \times 5 = 450$) oluşturulmuş ve doğruluk dereceleri hesaplanmıştır. Özetlerin üretilmesi ve doğruluk derecelerinin hesaplanmasında MATLAB kullanılmıştır. $\tilde{T}_E$ ve $\tilde{T}_F$ kullanılarak elde edilen özetlerle Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanılarak elde edilen özetler ile karşılaştırılmıştır.



Şekil 7.6. Niceleyiciler : (a) “Tümü” niceleyicisi (b) “Yaklaşık yarısı” niceleyicisi (c) “Çoğu” niceleyicisi

Önerilen $\tilde{T}_E$ ve $\tilde{T}_F$ doğruluk dereceleri kullanılarak elde edilen özetlerin sıralanması için Sengupta ve ark. [184] tarafından önerilen ve Eş. 7.1 tanımlanan yöntem kullanılmıştır. $\tilde{T}_1 = [\tilde{T}_1^L, \tilde{T}_1^U]$ ve $\tilde{T}_2 = [\tilde{T}_2^L, \tilde{T}_2^U]$ aralıklı iki doğruluk derecesi olsun. Eğer Eş. 7.1 verilen şartlar sağlanırsa $\tilde{T}_1 \leq \tilde{T}_2$ 'dir.

$$\tilde{T}_1 \leq \tilde{T}_2 \leftrightarrow \frac{\tilde{T}_1^L + \tilde{T}_1^U}{2} \leq \frac{\tilde{T}_2^L + \tilde{T}_2^U}{2} \wedge \frac{\tilde{T}_1^U - \tilde{T}_1^L}{2} \geq \frac{\tilde{T}_2^U - \tilde{T}_2^L}{2} \quad (7.1)$$

Eğer doğruluk dereceleri Eş. 7.1 karşılaştırılmazlar ise Eş. 7.2 kullanılır.

$$\mu_{(\leq)}(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) = \frac{((\tilde{T}_2^L + \tilde{T}_2^U) - (\tilde{T}_1^L + \tilde{T}_1^U))}{((\tilde{T}_1^U - \tilde{T}_1^L) + (\tilde{T}_2^U - \tilde{T}_2^L))} \quad (7.2)$$

Her bir niceleyici için doğruluk derecesi en büyük olan beş özet dikkate alınmıştır. $\tilde{T}_E$ doğruluk derecesi kullanıldığında elde edilen özetler aşağıda verilmiştir.

Çoğu niceleyicisi için :

- Çoğu çok uzun süreli trendlerin değişimi sabittir. $\tilde{T}_E = [1;1]$
- Çoğu uzun süreli trendlerin değişkenliği azdır. $\tilde{T}_E = [0,806;0,933]$
- Çoğu uzun süreli trendlerin değişimi sabittir. $\tilde{T}_E = [0,731;0,900]$
- Çoğu çok fazla değişkenliğe sahip trendlerin değişimi sabittir. $\tilde{T}_E = [0,656;0,807]$
- Çoğu çok uzun süreli trendlerin değişkenliği çok azdır. $\tilde{T}_E = [0,600;0,850]$

Yaklaşık yarısı niceleyicisi için

- Az değişkenliğe sahip trendlerin yaklaşık yarısının değişimi sabittir. $\tilde{T}_E = [0,789;0,883]$
- Orta uzunluktaki trendlerin yaklaşık yarısının değişimi sabittir. $\tilde{T}_E = [0,745;0,877]$
- Orta uzunluktaki trendlerin yaklaşık yarısının değişkenliği çok azdır. $\tilde{T}_E = [0,693;0,859]$
- Çok azalan trendlerin yaklaşık yarısının değişkenliği ortadır. $\tilde{T}_E = [0,656;0,844]$
- Çok fazla değişkenliğe sahip trendlerin yaklaşık yarısının değişimi sabittir. $\tilde{T}_E = [0,659;0,768]$

Tümü niceleyicisi için:

- Çok uzun süreli tüm trendlerin değişkenliği sabittir. $\tilde{T}_E = [1;1]$
- Çok uzun süreli tüm trendlerin değişimi çok azdır. $\tilde{T}_E = [0,600;0,800]$

- Uzun süreli tüm trendlerin değişimi çok azdır. $\tilde{T}_E = [0, 250; 0, 600]$
- Çok fazla değişkenliğe sahip tüm trendlerin süresi kısadır. $\tilde{T}_E = [0, 050; 0, 550]$
- Uzun süreli tüm trendlerin değişimi sabittir. $\tilde{T}_E = [0, 100; 0, 467]$

$\tilde{T}_F$ doğruluk derecesi kullanıldığında elde edilen özetler aşağıda verilmiştir.

Çoğu niceleyicisi için :

- Çoğu çok uzun süreli trendlerin değişimi sabittir. $\tilde{T}_F = [1; 1]$
- Çoğu uzun süreli trendlerin değişkenliği azdır. $\tilde{T}_F = [0, 813; 0, 950]$
- Çoğu uzun süreli trendlerin değişimi sabittir. $\tilde{T}_F = [0, 755; 0, 869]$
- Çoğu çok fazla değişkenliğe sahip trendlerin değişimi sabittir. $\tilde{T}_F = [0, 684; 0, 788]$
- Çoğu çok uzun süreli trendlerin değişkenliği çok azdır. $\tilde{T}_F = [0, 600; 0, 800]$

Yaklaşık yarısı niceleyicisi için

- Az değişkenliğe sahip trendlerin yaklaşık yarısının değişimi sabittir. $\tilde{T}_F = [0, 793; 0, 908]$
- Orta uzunluktaki trendlerin yaklaşık yarısının değişimi sabittir. $\tilde{T}_F = [0, 733; 0, 939]$
- Orta uzunluktaki trendlerin yaklaşık yarısının değişkenliği çok azdır. $\tilde{T}_F = [0, 717; 0, 889]$
- Çok azalan trendlerin yaklaşık yarısının değişkenliği ortadır. $\tilde{T}_F = [0, 667; 0, 855]$
- Kısa süreli trendlerin yaklaşık yarısının değişkenliği ortadır. $\tilde{T}_F = [0, 638; 0, 766]$

Tümü niceleyicisi için:

- Çok uzun süreli tüm trendlerin değişkenliği sabittir. $\tilde{T}_F = [1;1]$
- Çok uzun süreli tüm trendlerin değişimi çok azdır. $\tilde{T}_F = [0,600;0,800]$
- Uzun süreli tüm trendlerin değişimi çok azdır. $\tilde{T}_F = [0,250;0,700]$
- Çok fazla değişkenliğe sahip tüm trendlerin süresi kısadır. $\tilde{T}_F = [0,100;0,467]$
- Uzun süreli tüm trendlerin değişimi sabittir. $\tilde{T}_F = [0,050;0,500]$

Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanıldığında elde edilen özetler aşağıda verilmiştir.

Çoğu niceleyicisi için :

- Çoğu çok uzun süreli trendlerin değişimi sabittir. $T = 1$
- Çoğu uzun süreli trendlerin değişimi sabittir. $T = 0,858$
- Çoğu uzun süreli trendlerin değişkenliği azdır. $T = 0,842$
- Çoğu çok uzun süreli trendlerin değişkenliği çok azdır. $T = 0,760$
- Çoğu çok fazla değişkenliğe sahip trendlerin değişimi sabittir. $T = 0,730$

Yaklaşık yarısı niceleyicisi için

- Çok fazla değişkenliğe sahip trendlerin yaklaşık yarısını çok kısadır. $T = 0,968$
- Orta uzunluktaki trendlerin yaklaşık yarısının değişkenliği çok azdır. $T = 0,967$
- Az değişkenliğe sahip trendlerin yaklaşık yarısının değişimi sabittir. $T = 0,896$
- Çok azalan trendlerin yaklaşık yarısının değişkenliği ortadır. $T = 0,891$
- Değişimi sabit trendlerin yaklaşık yarısı kısa sürelidir. $T = 0,853$

Tümü niceleyicisi için:

- Çok uzun süreli tüm trendlerin değişkenliği sabittir. $T = 1$

Önerilen $\tilde{T}_E$ ve $\tilde{T}_F$ doğruluk dereceleri kullanılarak elde edilen özetler karşılaştırıldığında, elde edilen 15 özetin 14'ü sıralamalarıyla birlikte aynıdır. Yalnızca “yaklaşık yarısı” niceleyicisi kullanıldığında elde edilen son özetin farklı olduğu görülmektedir. Bu durum önerilen doğruluk derecelerinin tutarlı sonuç ürettiğini göstermektedir. $\tilde{T}_E$ ve $\tilde{T}_F$ ile edilen özetler ile Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanılarak elde edilen özetler karşılaştırıldığında, elde edilen özetlerin ve bu özetlerin sıralamalarının farklı olduğu görülmektedir. “Çoğu” niceleyicisi kullanıldığında önerilen doğruluk dereceleri ile elde edilen özetlerle Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanılarak elde edilen özetler aynıdır; fakat, sıralamaları farklıdır. Özetlerin aynı olmasının sebebi “Çoğu” niceleyicisinin tutarlı niceleyici olması ve verinin dağılımının Örnek 5.6b’de belirtilen tutarsızlığa sebep olmamasıdır.

“Yaklaşık yarısı” niceleyicisi kullanıldığında $\tilde{T}_E$ ve $\tilde{T}_F$ ile elde edilen özetlerle Wu ve Mendel tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanılarak elde edilen özetler arasında farklılıklar bulunmaktadır. Bu farklılığın temel sebebi Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesinin skalar kardinalite temelli olmasıdır. Bu durum Delgado ve ark. [58] tarafından verilen örneğe benzer bir örnekle açıklanabilir. $\tilde{S}^I$ aralıklı tip-2 BK’sı sarışın insanları gösterebilir. Ali, Ahmet ve Ayşe bu kümenin elemanları olup üyelik dereceleri $\tilde{S}^I = \{[1;1]/\text{Ali}, [0,45;0,55]/\text{Ahmet}, [0,45;0,55]/\text{Ayşe}\}$ şeklinde verilmiştir. Bu kümeye ait olan insanlara güneş gözlüğü alınacaktır. Eğer Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen skalar kardinalite kullanılırsa 2 tane güneş gözlüğü alınmalıdır. Ali, Ahmet ve Ayşe’ye göre daha sarışın olduğu için 1 tane güneş gözlüğü Ali’ye verilecektir. Ahmet ve Ayşe eşit derecede sarışın olduğu için kalan diğer güneş gözlüğünün kime verilmesi gerektiği cevaplanması gereken önemli bir sorudur. Ele alınan problem sarışın insanlara kaç tane güneş gözlüğü alınmasıyla ilgilidir. Bu problem kapsamında “İki tane güneş gözlüğü alınmalıdır.” önermesi Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanıldığında, $Q = 2/3$ olduğu için $T=1$ eşittir. Önerilen doğruluk dereceleri kullanılırsa $\tilde{T}_E = 0$ ve $\tilde{T}_F = 0$ eşittir. Fakat örnekte belirtildiği gibi 2 tane güneş

gözlüğü almak çözüm değildir. Bu nedenle “Üç tane güneş gözlüğü alınmalıdır.” ve “Bir tane güneş gözlüğü alınmalıdır.” önermelerinin incelenmesi gerekir. “Üç tane güneş gözlüğü alınmalıdır.” önermesi Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanıldığında, $Q=1$ olduğu için $T=0$ eşittir. Önerilen doğruluk dereceleri kullanılırsa $\tilde{T}_E=[0,45;0,55]$ ve $\tilde{T}_F=[0,45;0,55]$ eşittir. “Bir tane güneş gözlüğü alınmalıdır.” önermesi Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanıldığında, $Q=2/3$ olduğu için $T=0$ eşittir. Önerilen doğruluk dereceleri kullanılırsa $\tilde{T}_E=[0,45;0,55]$ ve $\tilde{T}_F=[0,45;0,55]$ eşittir. Eğer bir tane güneş gözlüğü alınırsa, güneş gözlüğü Ali’ye verilecektir. Eğer 3 tane güneş gözlüğü alınırsa, güneş gözlükleri herkese verilecektir.

“Tüm” niceleyicisi için Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi kullanıldığında sadece bir tane özet elde edilmektedir. Bu durumun nedeni Wu ve Mendel tarafından önerilen doğruluk derecesinin Örnek 5.5’de belirtildiği gibi katı sonuçlar üretmesidir. $\tilde{T}_E$ ve $\tilde{T}_F$ ile edilen özetler incelendiğinde elde edilen özetlerin aynı olduğu fakat son ikisinin sıralamasının farklı olduğu görülmektedir.

8. SONUÇLAR

Veri madenciliğinde önemli tanımlayıcı modellerden bir tanesi kuşkusuz özetleme işlemidir. Veri tabanında yer alan özelliklerin ve kayıt sayısının çok olması durumunda istatistiksel özetleme işlemi güçleşmekte ve insanlar tarafından zor anlaşılmaktadır. Dilsel özetleme, veritabanında yer alan özellikleri kelimelerle ifade ederek veriden açık, özlü ve kolay anlaşılır bilginin üretilmesini amaçlamaktadır. Dilsel özetleme dilsel terimlerle gerçekleştirildiği için BK'ya ve yüksek dereceli BK'lara dayanan çalışmalar literatürde yaygındır. Bu çalışmalar bulanık kurallar, niceleyici, yarı bulanık niceleyiciler ve birliktelik kuralları gibi farklı adlarla adlandırılan yöntemleri kapsamaktadır.

Dilsel özetleme işleminin en önemli adımı kuşkusuz dilsel özetlerin değerlendirilmesidir. Eğer değerlendirme işleminde kullanılan doğruluk derecesi tutarsız sonuç üretirse veri tarafından desteklenmeyen dilsel özetler elde edilir. Literatürde yer alan çalışmalar detaylı bir şekilde incelendiğinde doğruluk derecesi skalar kardinalite temelli, bulanık kardinalite temelli yada kütle atama fonksiyonu temellidir. Skalar kardinalite temelli yöntemler, daha az işlem yükü gerektirdiğinden uygulama temelli çalışmalarda kullanılmıştır. Fakat, skalar kardinalite temelli yöntemlerin bazı durumlarda tutarsız sonuçlar ürettiği görülmüştür. Değerlendirme işleminde kütle atama fonksiyonu ve bulanık kardinalite temelli yöntemler skalar kardinalite temelli yöntemlerin genelleştirilmiş hali olup değerlendirme işleminde tutarlı sonuçlar üretmektedir; fakat, skalar kardinalite temelli yöntemlerle karşılaştırıldıklarında daha çok işlem yükü getirmektedir. Ayrıca, tip-I ve tip-II niceleyici cümle yapısındaki özetler kullanıldığında, bulanık kardinalite ve kütle atama fonksiyonu temelli yöntemler herhangi bir tipteki niceleyicinin kullanılmasına izin vermektedir.

Kelimelerden kaynaklanan belirsizliği ele almada tip-1 BK yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle son zamanlarda dilsel özetlemeyle ilgili yapılan çalışmalarda kelimeler aralıklı tip-2 BK ile modellenmektedir. Aralıklı tip-2 BK ile dilsel özetlemeyle ilgili çalışmalar incelendiğinde skalar kardinalite temelli doğruluk derecelerinin aralıklı

tip-2 bulanık ortama genişletildiği görülmüştür. Fakat, önerilen bu yöntemler kullanıldığında aralıklı tip-2 BK ile elde edilen dilsel özetleme sonuçlarının bazı durumlarda tutarsız olduğu görülmüştür.

Bu tez çalışmasında aralıklı tip-2 BK'larla dilsel özetleme işleminde dilsel özetlerin değerlendirilmesi için iki yeni doğruluk derecesi önerilmiştir. Önerilen ilk doğruluk derecesi kütle atama fonksiyonu temellidir. İlk olarak aralıklı tip-2 BK'ların aralıklı α kesmelerinin birleşimiyle gösterilebileceği kanıtlanmıştır. Daha sonra aralıklı tip-2 BK'lardan aralıklı kütle atama değeri öneren yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Önerilen yöntem aralıklı tip-2 BK'nın gömülü tip-1 BK'sından elde edilen kütle atama değerleri için sınır değeridir. Fakat bu sınır değerleri arasında yer alan bir kütle ataması kullanılarak oluşturulan tip-1 BK, aralıklı tip-2 BK'nın gömülü bir tip-1 BK'sı olmayabilir. Bu nedenle bazı kısıtlar eklenerek doğruluk derecesini en küçükleyen ve en büyükleyen gömülü tip-1 BK'ların bulunması için doğrusal olmayan matematiksel programlama modeli kurulmuştur. Önerilen doğruluk dereceleri, Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi ile karşılaştırılmış ve önerilen doğruluk derecelerinin daha tutarlı sonuçlar ürettiği görülmüştür. Önerilen ikinci doğruluk derecesi aralıklı tip-2 BK'ların α kesmelerine dayanmaktadır. İlk olarak aralıklı tip-2 BK'nın α kesmesiyle alt ve üst kesin kümeleri belirlenmiştir. Alt ve üst kesin kümeler kullanılarak ilgili niceleyicinin alabileceği en büyük ve en küçük değer bulunmuştur. Daha sonra ilgili olasılık dağılımı bulunarak doğruluk derecesi hesaplanmıştır. Önerilen ikinci yöntemin de literatürdeki mevcut yöntemlerden daha tutarlı sonuçlar verdiği örnekler üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca, doğruluk dereceleri dışında dilsel özetlerin yeterli veri tarafından kapsanıp kapsanmadığını, yararlı olup olmadığını ve aykırı bir özet olup olmadığını ölçen aralıklı kapsama derecesi, aralıklı fayda derecesi ve aralıklı aykırılık derecesi gibi yeni kalite ölçümleri önerilmiştir. Önerilen doğruluk dereceleri ve Wu ve Mendel [8] tarafından önerilen doğruluk derecesi Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatlarının özetlenmesinde karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde önerilen iki doğruluk derecesinde birbirine çok yakın sonuçlar ürettiği görülmüştür. Bu durum önerilen iki doğruluk derecesinde tutarlı sonuçlar ürettiğini gösterir. Önerilen doğruluk dereceleri her tipdeki niceleyiciyi

modellemektedir. Avrupa Brent Spot petrol varil fiyatlarının özetlenmesinde Wu ve Mendel tarafından önerilen doğruluk derecesi “Tüm” niceleyicisi için katı sonuç üretmiş ve sadece bir tane dilsel özet elde edilmiştir. Önerilen yöntemler “Tüm” niceleyicisi için katı sonuçlar üretmemiş ve önemli bazı dilsel özetlerin üretilmesini sağlamıştır. Önerilen doğruluk derecelerinin zamana bağlı olayların dilsel özetlenmesinde doğrudan kullanımı oldukça zordur; çünkü çok sayıda dilsel özet üretilmektedir. Üretilen özetlerden daha öz bilginin çıkarımı ve dilsel özetlerin karşılaştırılarak zamana bağlı olayların karşılaştırılması sonucu aykırı olayların bulunması için yeni bir benzerlik ölçümü önerilmiştir. Önerilen benzerlik ölçümü iki dilsel özet arasındaki niceleyici, niteleyici, özetleyici ve doğruluk derecesi arasındaki benzerliğe dayanmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Sumathi, S., Sivanandam, S., "Introduction to data mining and its applications", **Springer-Verlag**, New York, 5-6 (2006).
2. Han, J., Kamber, M., "Data mining: concepts and techniques", **Morgan Kaufmann**, San Francisco, 4-6 (2006).
3. Vercellis, C., Corporation, E., "Business intelligence: data mining and optimization for decision making", **Wiley Online Library**, 3-4 (2009).
4. Tan, P.N., Steinbach, M., Kumar, V., "Introduction to data mining", **Pearson Addison Wesley Boston**, 2-3 (2006).
5. Niewiadomski, A., "A Type-2 Fuzzy Approach to Linguistic Summarization of Data", **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 16(1): 198-212 (2008).
6. Zadeh, L.A., "Fuzzy sets", **Information and Control**, 8(3): 338-353 (1965).
7. Niewiadomski, A., Ochelska, J., Szczepaniak, P.S., "Interval-valued linguistic summaries of databases", **Control and Cybernetics**, 35(2): 415-443 (2006).
8. Wu, D., Mendel, J., "Linguistic summarization using IF-THEN rules and interval type-2 fuzzy sets", **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 19(1): 136-151 (2011).
9. Zadeh, L.A., "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning -I", **Information Sciences**, 8(3): 199-249 (1975).
10. Ross, T.J., "Fuzzy logic with engineering applications 3 ed." **John Wiley & Sons**, 1-25 (2010).
11. Klir, G.J., Yuan, B., "Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications", **Prentice Hall** River, NJ, USA, 1-55 (1995).
12. Mas, M., Monserrat, M., Torrens, J., Trillas, E., "A survey on fuzzy implication functions", **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 15(6): 1107-1121 (2007).
13. Fodor, J., "Left-continuous t-norms in Fuzzy Logic: an Overview", **Journal of Applied Sciences at Budapest Tech Hungary**, 1(2): 141-156 (2004).
14. Baczyński, M., Jayaram, B., Baczyński, M., "An Introduction to Fuzzy Implications", Fuzzy Implication, **Springer Berlin / Heidelberg**, 1-35 (2008).

15. Wygralak, M., "Fuzzy sets with triangular norms and their cardinality theory", *Fuzzy Sets and Systems*, 124(1): 1-24 (2001).
16. Casasnovas, J., Torrens, J., "An axiomatic approach to fuzzy cardinalities of finite fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 133(2): 193-209 (2003).
17. Mendel, J.M., John, R.I.B., "Type-2 fuzzy sets made simple", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(2): 117-127 (2002).
18. Mendel, J.M., "Type-2 fuzzy sets and systems: An overview", *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2(1): 20-29 (2007).
19. Mendel, J.M., "Uncertain rule-based fuzzy logic system: introduction and new directions ", *Prentice-Hall*, 5-35 (2001).
20. Dubois, D., Prade, H., "Interval-valued fuzzy sets, possibility theory and imprecise probability", *Proceedings of International Conference in Fuzzy Logic and Technology*, 314-319 (2005).
21. Gehrke, M., Walker, C., Walker, E., "Some comments on interval valued fuzzy sets", *International Journal of Intelligent Systems*, 11 (10): 751-759 (1996).
22. Walker, C.L., Walker, E.A., "The algebra of fuzzy truth values", *Fuzzy Sets and Systems*, 149(2): 309-347 (2005).
23. Mendel, J.M., John, R.I., Liu, F., "Interval type-2 fuzzy logic systems made simple", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14 (6): 808-821 (2006).
24. Wu, D., Mendel, J.M., "A vector similarity measure for linguistic approximation: Interval type-2 and type-1 fuzzy sets", *Information Sciences*, 178(2): 381-402 (2008).
25. Deschrijver, G., "The Archimedean property for t-norms in interval-valued fuzzy set theory", *Fuzzy Sets and Systems*, 157(17): 2311-2327 (2006).
26. Deschrijver, G., "Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory", *Information Sciences*, 177(14): 2906-2924 (2007).
27. Deschrijver, G., Kerre, E.E., "On the relationship between some extensions of fuzzy set theory", *Fuzzy Sets and Systems*, 133(2): 227-235 (2003).
28. Deschrijver, G., Vroman, A., "Generalized arithmetic operations in interval-valued fuzzy set theory", *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems-Application in Engineering and Technology*, 16(4): 265-272 (2005).

29. Bedregal, B.C., Dimuro, G.P., Santiago, R.H.N., Reiser, R.H.S., "On interval fuzzy S-implications", *Information Sciences*, 180(8): 1373-1389 (2010).
30. Bedregal, B.R.C., Takahashi, A., "The best interval representations of t-norms and automorphisms", *Fuzzy Sets and Systems*, 157(24): 3220-3230 (2006).
31. Deschrijver, G., "Generalized arithmetic operators and their relationship to t-norms in interval-valued fuzzy set theory", *Fuzzy Sets and Systems*, 160(21): 3080-3102 (2009).
32. Dimuro, G.P., Bedregal, B.C., Santiago, R.H.N., Reiser, R.H.S., "Interval additive generators of interval t-norms and interval t-conorms", *Information Sciences*, 181(18): 3898-3916 (2011).
33. Dempster, A., "Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping", *The Annals of Mathematical Statistics*, 38(2): 325-339 (1967).
34. Shafer, G., "A mathematical theory of evidence", *Princeton University Press*, 1-25 (1976).
35. Dempster, A.P., "A generalization of Bayesian inference", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 205-247 (1968).
36. Yager, R.R., "A New Approach to the Summarization of Data", *Information Sciences*, 28(1): 69-86 (1982).
37. George, R., Srikanth, R., "Data summarization using genetic algorithms and fuzzy logic", Genetic Algorithms and Soft Computing, *Physica-Verlag*, 599-611 (1996).
38. Delgado, M., Sanchez, D., Vila, M.A., "Fuzzy cardinality based evaluation of quantified sentences", *International Journal of Approximate Reasoning*, 23(1): 23-66 (2000).
39. Dubois, D., Prade, H., "What are fuzzy rules and how to use them", *Fuzzy Sets and Systems*, 84(2): 169-185 (1996).
40. Zadeh, L.A., "A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages", *Computers & Mathematics with Applications*, 9(1): 149-184 (1983).
41. Yager, R.R., "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision-Making", *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 18(1): 183-190 (1988).

42. Bosc, P., Lietard, L., "Monotonic quantified statements and fuzzy integrals", *Proceedings of NAFIPS/IFIS/NASA Conference*, 8-12 (1994).
43. Bosc, P., Lietard, L., "On the comparison of the Sugeno and the Choquet fuzzy integrals for the evaluation of quantified statements", *Proceedings of EUFIT'95*, 709-716 (1995).
44. Yager, R.R., "Fuzzy quotient operators for fuzzy relational databases", *Proceedings of IFES'91*, 289-296 (1991).
45. Kacprzyk, J., Yager, R.R., "Linguistic summaries of data using fuzzy logic", *International Journal of General Systems*, 30(2): 133-154 (2001).
46. Kacprzyk, J., "An interactive fuzzy logic approach to linguistic data summaries", *18th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society - Nafips*, 595-599 (1999).
47. Kacprzyk, J., Strykowski, P., "Linguistic summaries of sales data at a computer retailer via fuzzy logic and a genetic algorithm", *Evolutionary Computation, 1999. CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on*, (1999).
48. Kacprzyk, J., Zadrozny, S., "Linguistic database summaries and their protoforms: towards natural language based knowledge discovery tools", *Information Sciences*, 173(4): 281-304 (2005).
49. Kosko, B., "Fuzziness Vs Probability", *International Journal of General Systems*, 17(2-3): 211-240 (1990).
50. van den Berg, J., Kaymak, U., van den Bergh, W.M., "Fuzzy classification using probability-based rule weighting", *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 991-996 (2002).
51. Freitas, A.A., "On rule interestingness measures", *Knowledge-Based Systems*, 12(5-6): 309-315 (1999).
52. Hong, T.P., Kuo, C.S., Chi, S.C., "Trade-off between computation time and number of rules for fuzzy mining from quantitative data", *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(5): 587-604 (2001).
53. Ishibuchi, H., Nakashima, T., Murata, T., "Three-objective genetics-based machine learning for linguistic rule extraction", *Information Sciences*, 136 (1-4): 109-133 (2001).
54. Ishibuchi, H., Yamamoto, T., "Rule weight specification in fuzzy rule-based classification systems", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(4): 428-435 (2005).

55. Martin, T., Yun, S., "Fuzzy association rules in soft conceptual hierarchies", *Fuzzy Information Processing Society, 2009. NAFIPS 2009. Annual Meeting of the North American*, 1-6 (2009).
56. Martin, T., Shen, Y., Majidian, A., "Discovery of time-varying relations using fuzzy formal concept analysis and associations", *International Journal of Intelligent Systems*, 25(12): 1217-1248 (2010).
57. Knoll, A., Glockner, I., "Fuzzy quantifiers: A linguistic technique for data fusion", *Data Fusion and Perception*, **Springer**, 209-236 (2000).
58. Delgado, M., Sánchez, D., Martín-Bautista, M.J., Vila, M.A., "A probabilistic definition of a nonconvex fuzzy cardinality", *Fuzzy Sets and Systems*, 126 (2): 177-190 (2002).
59. Delgado, M., Sánchez, D., Vila, M.A., "A survey of methods for evaluating quantified sentences", *First European Society for Fuzzy Logic and Technologies Conf. (EUSFLAT'99)*, 279-282 (1999).
60. Sanchez, D., Delgado, M., Vila, M.A., "RL-numbers: An alternative to fuzzy numbers for the representation of imprecise quantities", *Fuzzy Systems, 2008. FUZZ-IEEE 2008. (IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE International Conference on*, 2058-2065 (2008).
61. Sánchez, D., Delgado, M., Vila, M.A., Chamorro-Martínez, J., "On a non-nested level-based representation of fuzziness", *Fuzzy Sets and Systems*, 192 (1): 159-175 (2012).
62. Sánchez, D., Delgado, M., Vila, M.-A., "Fuzzy Quantification Using Restriction Levels", *Fuzzy Logic and Applications*, **Springer Berlin / Heidelberg**, 28-35 (2009).
63. Delgado, M., Ruiz, M.D., Sánchez, D., Serrano, J.M., "A formal model for mining fuzzy rules using the RL representation theory", *Information Sciences*, 181(23): 5194-5213 (2011).
64. Rocacher, D., "On fuzzy bags and their application to flexible querying", *Fuzzy Sets and Systems*, 140(1): 93-110 (2003).
65. Rocacher, D., Bosc, P., "The set of fuzzy rational numbers and flexible querying", *Fuzzy Sets and Systems*, 155(3): 317-339 (2005).
66. Lietard, L., Rocacher, D., "Evaluation of quantified statements using gradual numbers", *Handbook of Research on Fuzzy Information Processing in Databases*, **Hershey, PA, USA**, 246-269 (2008).

67. Dubois, D., Prade, H., "Fuzzy elements in a fuzzy set", *10th Int. Fuzzy Syst. Assoc.(IFSA) Congress*, 55-60 (2005).
68. Diaz-Hermida, F., Bugarin, A., Barro, S., "Definition and classification of semi-fuzzy quantifiers for the evaluation of fuzzy quantified sentences", *International Journal of Approximate Reasoning*, 34(1): 49-88 (2003).
69. Keenan, E.L., Stavi, J., "A semantic characterization of natural language determiners", *Linguistics and Philosophy*, 9(3): 253-326 (1986).
70. Keenan, E.L., "The semantics of determiners", *The Handbook of Contemporary Semantic Theory*, **Blackwell**, 41-63 (1997).
71. Keenan, E., Westerstahl, D., "Generalized quantifiers in linguistics and logic", *Handbook of logic and language*, **Elsevier**, 837-894 (1997).
72. Barwise, J., Cooper, R., "Generalized Quantifiers and Natural-Language", *Linguistics and Philosophy*, 4(2): 159-219 (1981).
73. Smessaert, H., "Monotonicity Properties of Comparative Determiners", *Linguistics and Philosophy*, 19(3): 295-336 (1996).
74. Barro, S., Bugarin, A.J., Carinena, P., Diaz-Hermida, F., "A framework for fuzzy quantification models analysis", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(1): 89-99 (2003).
75. Diaz-Hermida, F., Bugarin, A., "Semi-fuzzy quantifiers as a tool for building linguistic summaries of data patterns", *Foundations of Computational Intelligence (FOCI), 2011 IEEE Symposium on*, 45-52 (2011).
76. Díaz-Hermida, F., Bugarín, A., Cariñena, P., Barro, S., "Voting-model based evaluation of fuzzy quantified sentences: a general framework", *Fuzzy Sets and Systems*, 146(1): 97-120 (2004).
77. Diaz-Hermida, F., Losada, D.E., Bugarin, A., Barro, S., "A probabilistic quantifier fuzzification mechanism: The model and its evaluation for information retrieval", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(5): 688-700 (2005).
78. Glockner, I., Knoll, A., "A formal theory of fuzzy natural language quantification and its role in granular computing", *Granular Computing: An Emerging Paradigm, Studies in Fuzziness and Soft Computing*, **Physica-Verlag**, 215-256 (2001).
79. Glöckner, I., "Generalized fuzzy quantifiers and the modeling of fuzzy branching quantification", *International Journal of Intelligent Systems*, 24 (6): 624-648 (2009).

80. Yager, R.R., "General Multiple-Objective Decision Functions and Linguistically Quantified Statements", *International Journal of Man-Machine Studies*, 21(5): 389-400 (1984).
81. Vila, M.A., Cubero, J.C., Medina, J.M., Pons, O., "Using OWA operator in flexible query processing", *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory, Methodology and Applications*, *Kluwer Academic Publishers*, 258-274 (1997).
82. Lawry, J., "A framework for linguistic modelling", *Artificial Intelligence*, 155(1-2): 1-39 (2004).
83. Lawry, J., "A methodology for computing with words", *International Journal of Approximate Reasoning*, 28(2-3): 51-89 (2001).
84. Lietard, L., "A functional interpretation of linguistic summaries of data", *Information Sciences*, 188: 1-16 (2012).
85. Niewiadomski, A., "On two possible roles of type-2 fuzzy sets in linguistic summaries", *Advances in Web Intelligence, Proceedings*, 341-347 (2005).
86. Niewiadomski, A., "News generating via fuzzy summarization of databases", *Sofsem 2006: Theory and Practice of Computer Science, Proceedings*, 419-429 (2006).
87. Niewiadomski, A., "Type-2 fuzzy summarization of data: An improved news generating", *Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms, Proceedings*, 241-250 (2007).
88. Niewiadomski, A., Bartyzel, M., "Elements of the type-2 semantics in summarizing databases", *Artificial Intelligence and Soft Computing - Icaisc 2006, Proceedings*, 278-287 (2006).
89. Rajati, M.R., Mendel, J.M., Dongrui, W., "Solving Zadeh's Magnus challenge problem on linguistic probabilities via Linguistic Weighted Averages", *Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on*, 2177-2184 (2011).
90. Wu, D., Mendel, J.M., "Aggregation Using the Linguistic Weighted Average and Interval Type-2 Fuzzy Sets", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15 (6): 1145-1161 (2007).
91. Wu, D., Mendel, J.M., "Corrections to "Aggregation Using the Linguistic Weighted Average and Interval Type-2 Fuzzy Sets"", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(6): 1664-1666 (2008).

92. Mendel, J.M., Wu, D., "Perceptual computing: Aiding people in making subjective judgments ", *John Wiley & Sons*, Hoboken, NJ, 15-35 (2010).
93. Zadeh, L.A., "Fuzzy-Logic and the Calculus of Fuzzy If-Then Rules", *Artificial Intelligence in Materials Processing*: 65-75 (1992).
94. Zadeh, L.A., "Soft Computing and Fuzzy-Logic", *IEEE Software*, 11(6): 48-56 (1994).
95. Baldwin, J., Guild, N., "Modelling controllers using fuzzy relations", *Kybernetes*, 9(3): 223-229 (1980).
96. Mizumoto, M., Zimmermann, H.J., "Comparison of Fuzzy-Reasoning Methods", *Fuzzy Sets and Systems*, 8(3): 253-283 (1982).
97. Trillas, E., Valverde, L., "On mode and implication in approximate reasoning", Approximate Reasoning in expert systems, *North-Holland*, Amsterdam,, 157-166 (1985).
98. Bouchon-Meunier, B., Dubois, D., Godo, L., Prade, H., "Fuzzy sets and possibility theory in approximate and plausible reasoning", *Fuzzy Sets in Approximate Reasoning and Information Systems*, 15-190 (1999).
99. Dubois, D., Prade, H., "Possibility theory as a basis for preference propagation in automated reasoning", *Fuzzy Systems, 1992., IEEE International Conference on*, 821-832 (1992).
100. Zadeh, L.A., "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1): 3-28 (1978).
101. Zadeh, L.A., "PRUF—a meaning representation language for natural languages", *International Journal of Man-Machine Studies*, 10(4): 395-460 (1978).
102. Dubois, D., Hullermeier, E., Prade, H., "A systematic approach to the assessment of fuzzy association rules", *Data Mining and Knowledge Discovery*, 13(2): 167-192 (2006).
103. Alsina, C., "On a family of connectives for fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 16(3): 231-235 (1985).
104. Sudkamp, T., "Examples, counterexamples, and measuring fuzzy associations", *Fuzzy Sets and Systems*, 149(1): 57-71 (2005).
105. Glass, D.H., "Fuzzy confirmation measures", *Fuzzy Sets and Systems*, 159 (4): 475-490 (2008).

106. Hüllermeier, E., "Fuzzy Association Rules: Semantic Issues and Quality Measures", Computational Intelligence. Theory and Applications, **Springer Berlin / Heidelberg**, 380-391 (2001).
107. Sklansky, J., Gonzalez, V., "Fast Polygonal-Approximation of Digitized-Curves", **Pattern Recognition**, 12(5): 327-331 (1980).
108. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Linguistic summarization of time series using a fuzzy quantifier driven aggregation", **Fuzzy Sets and Systems**, 159(12): 1485-1499 (2008).
109. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "An Approach to the Linguistic Summarization of Time Series Using a Fuzzy Quantifier Driven Aggregation", **International Journal of Intelligent Systems**, 25(5): 411-439 (2010).
110. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Linguistic summarization of trends: a fuzzy logic based approach", **Proc 11th Int Conf on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems**, 2166-2172 (2006).
111. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Capturing the essence of a dynamic behavior of sequences of numerical data using elements of a quasi-natural language", **2006 IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics**, 3365–3370 (2006).
112. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "A linguistic quantifier based aggregation for a human consistent summarization of time series", **Soft Methods for Integrated Uncertainty Modelling**, **Springer-Verlag**, 186-190 (2006).
113. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "On some types of linguistic summaries of time series", **Int. IEEE Conf. Intelligent Systems**, 373–378 (2006).
114. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Linguistic summarization of time series under different granulation of describing features", **Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms, Proceedings**, 230-240 (2007).
115. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Analysis of time series via their linguistic summarization: the use of the Sugeno integral", **Proceedings of the 7th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications**, 262-267 (2007).
116. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Linguistic summaries of time series via a quantifier based aggregation using the Sugeno integral", **Proceedings of**

- 2006 IEEE World Congress on Computational Intelligence**, 3610–3616 (2006).
117. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Mining time series data via linguistic summaries of trends by using a modified Sugeno integral based aggregation", **2007 IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining**, 742-749 (2007).
 118. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Linguistic summarization of time series by using the Choquet integral", **Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing, Proceedings**, 284-294 (2007).
 119. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Linguistic summaries of time series via an OWA operator based aggregation of partial trends", **2007 IEEE International Conference on Fuzzy Systems**, 466-471 (2007).
 120. Kacprzyk, J., Wilbik, A., "Using fuzzy linguistic summaries for the comparison of time series: an application to the analysis of investment fund quotations", **Proceedings of the Joint 2009 International Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference**, 1321-1326 (2009).
 121. Wilbik, A., Kacprzyk, J., "On a benchmark related assessment of the performance of mutual (investment) funds", **Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on**, 2934-2939 (2011).
 122. Chiang, D.A., Chow, L.R., Wang, Y.F., "Mining time series data by a fuzzy linguistic summary system", **Fuzzy Sets and Systems**, 112(3): 419-432 (2000).
 123. Castillo-Ortega, R., Marín, N., Sánchez, D., "Linguistic Summary-Based Query Answering on Data Cubes with Time Dimension", **Flexible Query Answering Systems, Springer Berlin / Heidelberg**, 560-571 (2009).
 124. Castillo-Ortega, R., Marín, N., Sánchez, D., "Fuzzy Quantification-Based Linguistic Summaries in Data Cubes with Hierarchical Fuzzy Partition of Time Dimension", **Intelligent Data Engineering and Automated Learning, Springer Berlin / Heidelberg**, 578-585 (2009).
 125. Castillo-Ortega, R., Marín, N., Sánchez, D., "Linguistic local change comparison of time series", **Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on**, 2909-2915 (2011).
 126. Castillo-Ortega, R., Marín, N., Sánchez, D., "Time Series Comparison Using Linguistic Fuzzy Techniques", **Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design, Springer Berlin / Heidelberg**, 330-339 (2010).

127. Castillo-Ortega, R., Marín, N., Sánchez, D., "Linguistic query answering on data cubes with time dimension", *International Journal of Intelligent Systems*, 26(10): 1002-1021 (2011).
128. Batyrshin, I.Z., Sheremetov, L.B., "Perception-based approach to time series data mining", *Applied Soft Computing*, 8(3): 1211-1221 (2008).
129. Batyrshin, I., Sheremetov, L., "Time Series Pattern Recognition Based on MAP Transform and Local Trend Associations", Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications, *Springer Berlin / Heidelberg*, 910-919 (2006).
130. Batyrshin, I., Sheremetov, L., "Perception Based Time Series Data Mining with MAP Transform", *Springer Berlin / Heidelberg*, 514-523 (2005).
131. van der Heide, A., Trivio, G., "Automatically Generated Linguistic Summaries of Energy Consumption Data", *Intelligent Systems Design and Applications, 2009. ISDA '09. Ninth International Conference on*, 553-559 (2009).
132. Kacprzyk, J., Wilbik, A., "Linguistic summarization of time series using fuzzy logic with linguistic quantifiers: A truth and specificity based approach", *Artificial Intelligence and Soft Computing - Icaisc 2008, Proceedings*, 241-252 (2008).
133. Kacprzyk, J., Wilbik, A., "Linguistic summarization of time series using linguistic quantifiers: augmenting the analysis by a degree of fuzziness", *2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1148-1155 (2008).
134. Wilbik, A., Kacprzyk, J., "A Multi-criteria Evaluation of Linguistic Summaries of Time Series via a Measure of Informativeness", *Artificial Intelligence and Soft Computing, Pt I*, 6113: 105-113 (2010).
135. Kacprzyk, J., Zadrozny, S., "Supporting Decision Making via Verbalization of Data Analysis Results Using Linguistic Data Summaries", Recent Advances in Decision Making, *Springer*, 121-143 (2009).
136. Kacprzyk, J., Zadrozny, S., "Modern data-driven decision support systems: the role of computing with words and computational linguistics", *International Journal of General Systems*, 39(4): 379-393 (2010).
137. Kacprzyk, J., Zadrozny, S., "Fuzzy linguistic summaries in text categorization for human-consistent document-driven decision support systems", *Computational Intelligence, Theory and Applications*, 271-279 (2005).

138. Kacprzyk, J., Zadrozny, S., Wilbik, A., "Linguistic summarization of some static and dynamic features of consensus reaching", *Computational Intelligence, Theory and Applications*, 19-28 (2006).
139. Anderson, D., Luke, R.B., Keller, J.M., Skubic, M., Rantz, M., Aud, M., "Linguistic summarization of video for fall detection using voxel person and fuzzy logic", *Computer Vision and Image Understanding*, 113: 80–89 (2009).
140. Pouzols, F.M., Barriga, A., Lopez, D.R., Sanchez-Solano, S., "Linguistic Summarization of Network Traffic Flows", *2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 619-629 (2008).
141. Pigeau, A., Raschia, G., Gelgon, M., Mouaddib, N., Saint-Paul, R., "A Fuzzy Linguistic Summarization Technique for TV Recommender Systems", *2003 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 743-749 (2003).
142. Eciolaza, L., Trivino, G., Delgado, B., Rojas, J., Sevillano, M., "Fuzzy linguistic reporting in driving simulators", *Computational Intelligence in Vehicles and Transportation Systems (CIVTS), 2011 IEEE Symposium on*, 30-37 (2011).
143. Eciolaza, L., Pereira, F.M., Trivino, G., "Automatic linguistic reporting in driving simulation environments", *Applied Soft Computing*, (2012).
144. Eciolaza, L., Trivino, G., "Linguistic reporting of driver behavior: Summary and event description", *Intelligent Systems Design and Applications (ISDA), 2011 11th International Conference on*, 148-153 (2011).
145. Alvarez-Alvarez, A., Sanchez-Valdes, D., Trivino, G., "Automatic linguistic description about relevant features of the Mars' surface", *Intelligent Systems Design and Applications (ISDA), 2011 11th International Conference on*, 154-159 (2011).
146. Alvarez-Alvarez, A., Sanchez-Valdes, D., Trivino, G., Sánchez, Á., Suárez, P.D., "Automatic linguistic report of traffic evolution in roads", *Expert Systems with Applications*, 39(12): 11293-11302 (2012).
147. Alvarez-Alvarez, A., Trivino, G., "Linguistic description of the human gait quality", *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(1): 13-23 (2013).
148. Mendez-Nunez, S., Trivino, G., "Combining Semantic Web technologies and Computational Theory of Perceptions for text generation in financial analysis", *Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference on*, 1-8 (2010).

149. Trivino, G., Sanchez, A., Montemayor, A.S., Pantrigo, J.J., Cabido, R., Pardo, E.G., "Linguistic description of traffic in a roundabout", *Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference on*, 1-8 (2010).
150. Menendez, C., Trivino, G., "Selection of the Best Suitable Sentences in Linguistic Descriptions of Data", *Advances in Computational Intelligence, Springer*, Berlin Heidelberg, 295-304 (2012).
151. González-Villanueva, L., Alvarez-Alvarez, A., Ascari, L., Trivino, G., "A tool for linguistic assessment of rehabilitation exercises", *Applied Soft Computing*, (2013).
152. Alvarez-Alvarez, A., Alonso, J.M., Trivino, G., "Human activity recognition in indoor environments by means of fusing information extracted from intensity of WiFi signal and accelerations", *Information Sciences*, 233: 162-182 (2013).
153. Trivino, G., Sugeno, M., "Towards linguistic descriptions of phenomena", *International Journal of Approximate Reasoning*, 54(1): 22-34 (2013).
154. Yager, R.R., "Concept Representation and Database Structures in Fuzzy Social Relational Networks", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 40(2): 413-419 (2010).
155. Carrasco, R.A., Villar, P., "A new model for linguistic summarization of heterogeneous data: an application to tourism web data sources", *Soft Computing*, 16(1): 135-151 (2012).
156. Chamorro-Martinez, J., Sanchez, D., Soto-Hidalgo, J.M., Martinez-Jimenez, P.M., "A discussion on fuzzy cardinality and quantification. Some applications in image processing", *Fuzzy Sets and Systems*, (2013).
157. Ros, M., Pegalajar, M., Delgado, M., Vila, A., Anderson, D.T., Keller, J.M., Popescu, M., "Linguistic summarization of long-term trends for understanding change in human behavior", *Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on*, 2080-2087 (2011).
158. Anderson, D.T., Ros, M., Keller, J.M., Cuellar, M.P., Popescu, M., Delgado, M., Vila, A., "Similarity measure for anomaly detection and comparing human behaviors", *International Journal of Intelligent Systems*, 27(8): 733-756 (2012).
159. Wilbik, A., Keller, J.M., "A distance metric for a space of linguistic summaries", *Fuzzy Sets and Systems*, 208: 79-94 (2012).

160. Wilbik, A., Keller, J.M., Alexander, G.L., "Similarity evaluation of sets of linguistic summaries", *International Journal of Intelligent Systems*, 27(10): 926-938 (2012).
161. Wilbik, A., Keller, J., "A fuzzy measure similarity between sets of linguistic summaries", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(1): 183-189 (2013).
162. Wilbik, A., Keller, J.M., Bezdek, J.C., "Generation of prototypes from sets of linguistic summaries", *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2012 IEEE International Conference on*, 1-8 (2012).
163. Kacprzyk, J., Zadrozny, S., "Linguistic summarization of data sets using association rules", *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 702-707 (2003).
164. Kacprzyk, J., Wilbik, A., Zadrozny, S., "Using a genetic algorithm to derive a linguistic summary of trends in numerical time series", *2006 International Symposium on Evolving Fuzzy Systems, Proceedings*, 137-142 (2006).
165. Pilarski, D., "Linguistic Summarization of Databases with Quantirius: A Reduction Algorithm for Generated Summaries", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 18(03): 305 (2010).
166. Mendel, J.M., Korjani, M.M., "Charles Ragin's Fuzzy Set Qualitative Comparative Analysis (fsQCA) used for linguistic summarizations", *Information Sciences*, 202(20): 1-23 (2012).
167. Wijayasekara, D., Manic, M., "Visual, linguistic data mining using Self-Organizing Maps", *Neural Networks (IJCNN), The 2012 International Joint Conference on*, 1-8 (2012).
168. Niewiadomski, A., "On Finitary, Countability, Cardinalities, and Cylindric Extensions of Type-2 Fuzzy Sets in Linguistic Summarization of Databases", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(3): 532-545 (2010).
169. Hamrawi, H., "Type-2 Fuzzy Alpha-cuts", Doktora Tezi, *De Montfort University Leicester*, (2012).
170. Walker, C.L., Walker, E.A., Yager, R.R., "Some comments on level sets of fuzzy sets", *Fuzzy Systems, 2008. FUZZ-IEEE 2008.(IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE International Conference on*, 1227-1230 (2008).
171. Yager, R.R., "Level sets and the extension principle for interval valued fuzzy sets and its application to uncertainty measures", *Information Sciences*, 178 (18): 3565-3576 (2008).

172. Zeng, W., Li, H., Zhao, Y., Yu, X., "Extension Principle of Lattice-Valued Fuzzy Set", *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, 2007. FSKD 2007. Fourth International Conference on*, 140-144 (2007).
173. Zeng, W., Shi, Y., "Note on Interval-Valued Fuzzy Set", *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, Springer Berlin Heidelberg*, 20-25 (2005).
174. Zeng, W., Shi, Y., Li, H., "Representation theorem of interval-valued fuzzy set", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14(3): 259-269 (2006).
175. Denoeux, T., "Reasoning with imprecise belief structures", *International Journal of Approximate Reasoning*, 20(1): 79-111 (1999).
176. Fu, C., Yang, S.L., "Analyzing the applicability of Dempster's rule to the combination of interval-valued belief structures", *Expert Systems with Applications*, 38(4): 4291-4301 (2011).
177. Fu, C., Yang, S.L., "The conjunctive combination of interval-valued belief structures from dependent sources", *International Journal of Approximate Reasoning*, 53(5): 769-785 (2012).
178. Tanaka, H., Sugihara, K., Maeda, Y., "Non-additive measures by interval probability functions", *Information Sciences*, 164(1-4): 209-227 (2004).
179. Wang, Y.M., Yang, J.B., Xu, D.L., Chin, K.S., "On the combination and normalization of interval-valued belief structures", *Information Sciences*, 177(5): 1230-1247 (2007).
180. Yager, R.R., "Dempster-Shafer belief structures with interval valued focal weights", *International Journal of Intelligent Systems*, 16(4): 497-512 (2001).
181. Denoeux, T., "Modeling vague beliefs using fuzzy-valued belief structures", *Fuzzy Sets and Systems*, 116(2): 167-199 (2000).
182. Feilong, L., Mendel, J.M., "Encoding Words Into Interval Type-2 Fuzzy Sets Using an Interval Approach", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(6): 1503-1521 (2008).
183. Wu, D., Mendel, J.M., Coupland, S., "Enhanced Interval Approach for Encoding Words Into Interval Type-2 Fuzzy Sets and Its Convergence Analysis", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(3): 499-513 (2012).
184. Sengupta, A., Pal, T.K., Chakraborty, D., "Interpretation of inequality constraints involving interval coefficients and a solution to interval linear programming", *Fuzzy Sets and Systems*, 119(1): 129-138 (2001).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BORAN, Fatih Emre
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 10.03.1984 Almanya
Medeni hali : Bekar
e-mail : emreboran@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi / End. Müh. Bölümü	2009
Lisans	Gazi Üniversitesi / End. Müh. Bölümü	2007
Lise	Yüce Fen Lisesi/ Ankara	2001

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, Sinema izlemek