

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

DAMLA ÇETİN

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARF SAYISAL YARIGRUBUNUN YAPIŞTIRMASININ
RF-MATRİSLERİ İLE İNCELENMESİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DAMLA ÇETİN
OCAK 2024

ARF SAYISAL YARI GRUBUNUN YAPIŞTIRMASININ
RF-MATRİSLERİ İLE İNCELENMESİ

Gaziantep Üniversitesi
Matematik
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Belgin ÖZER

Damla ÇETİN
Ocak 2024

©2024[Gaziantep Üniversitesi]

ARF SAYISAL YARIGRUBUNUN YAPIŖTIRMASININ

RF-MATRİSLERİ İLE İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, **Damla ÇETİN** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölüm'ünde** Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Çiğdem AYKAÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Matematik Bölüm Başkanı

.....

Doç. Dr. Belgin ÖZER
Danışman, Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Sınav Tarihi: 05 Ocak 2024

Jüri Üyeleri:

Doç. Dr. Belgin ÖZER
Gaziantep Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Vakkas ULUÇAY
Kilis 7 Aralık Üniversitesi

.....

Dr. Öğr. Üyesi Sultan ERDUR
Gaziantep Üniversitesi

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Damla ÇETİN

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE GLUING OF THE ARF NUMERICAL SEMIGROUP WITH RF-MATRICES

ÇETİN, Damla

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Belgin ÖZER

January 2024

49 pages

In this study, the concept of gluing of numerical semigroups is specialized and the gluing of Arf numerical semigroups is investigated. The structures of numerical semigroups formed by gluing Arf numerical semigroups are analyzed and presented via theorems. In addition, the RF-matrix of Arf numerical semigroups is calculated and the RF-matrix of two glued Arf numerical semigroups is found. Finally, the methods for finding the generator sets of the ideals obtained with RF-matrices are given and the studies are supported with numerical examples.

Keywords: Arf Numerical Semigroup, Gluing, RF-Matric, Ideal, RF-Relations.

ÖZET

ARF SAYISAL YARIGRUBUNUN YAPIŞTIRMASININ RF-MATRİSLERİ İLE İNCELENMESİ

ÇETİN, Damla
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Belgin ÖZER
Ocak 2024
49 sayfa

Bu çalışmada sayısal yarıgrupların yapıştırılması kavramı özelleştirilmiştir ve Arf sayısal yarıgrupların yapıştırılması olarak incelenmiştir. Arf sayısal yarıgrupların yapıştırılması ile oluşan sayısal yarıgrupların yapıları analiz edilerek teorem ve ispatlar şeklinde sunulmuştur. Ayrıca Arf sayısal yarıgruplarının RF-matrisleri hesaplanarak yapıştırılan iki Arf sayısal yarıgrupun da RF-matrisi bulunmuştur. Son olarak RF-matrisleri ile elde edilen ideallerin üreteç kümelerini bulmak için yöntemler verilmiş ve yapılan çalışmalar sayısal örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Arf Sayısal Yarıgrup, Yapıştırma, RF-Matris, İdeal, RF-Bağıntılar.

“Canım aileme”

“Sevgili yeğenlerim Bekir ve Ferdane Berra’ya”

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr. Belgin ÖZER'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, preparasyonunda ve teşhislerinde desteklerini benden esirgemeyen değerli arkadaşlarım Gülşah BAHAR ve Fatih ESER'e çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen, bana en çok güvenen, her zaman örnek aldığım ve gurur duyduğum çok sevdiğim ve çok sevildiğimi bildiğim biricik babam Bekir ÇETİN'e, ömrü yettiğince bana hep iyi ve doğru, çalışkan ve dürüst olmayı öğreten şu an sahip olduğum tüm erdemleri borçlu olduğum canım annem Ferdane ÇETİN'e ve her zaman varlıkları ile güçlü hissetmemi sağlayan tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ABSTRACT	i
ÖZET.....	ii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
SEMBOLLER LİSTESİ.....	vi
BÖLÜM I GİRİŞ	1
BÖLÜM II TEMEL TANIMLAR.....	4
BÖLÜM III ARF SAYISAL YARIGRUPLAR	16
BÖLÜM IV YAPIŞTIRMA KAVRAMI	20
4.1. Sayısal Yarıgrupların Yapıştırılması.....	20
4.2. Arf Sayısal Yarıgrupların Yapıştırılması	22
4.3 Sayısal Yarıgrup Tamamen Yapıştırılması	28
BÖLÜM V RF-MATRİSLER.....	31
5.1 Arf Sayısal Yarıgrupların Yapıştırmasının RF-Matrisleri ile İncelenmesi	33
5.2 Sayısal Yarıgruplar İçindeki İdealler	36
5.3. RF-Matrisler İle İdeallerin Bulunması.....	39
BÖLÜM VI SONUÇLAR.....	46
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi (Negatif olmayan tam sayılar kümesi)
D	Sayısal Yarıgrup
$\langle n_1, \dots, n_k \rangle$	$\{n, \dots, n_k\}$ tarafından üretilen bir sayısal yarıgrup
$m(D)$	D' 'nin katlılığı
$e(D)$	D' 'nin gömme boyutu
$g(D)$	D' 'nin cinsi (Boşluk kümesinin eleman sayısı)
$H(D)$	D' 'nin boşluk kümesi
$t(D)$	D' 'nin tipi (Sözde – Frobenius'un eleman sayısı)
$F(D)$	D' 'nin Frobenius sayısı
$PF(D)$	D' 'nin Sözde – Frobenius sayısı
$PF'(D)$	Sözde-Frobenius – Frobenius ($PF(D) - F(D)$)
$Ap(D, x)$	x sayısına göre Apery kümesi

BÖLÜM I

GİRİŞ

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $D \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere, D kümesi toplama işlemine göre kapalı, $0 \in D$ ve $\mathbb{N} \setminus D$ (sayısal yarıgrubun boşlukları) kümesi sonlu elemana sahip ise D kümesine bir sayısal yarıgrup denir. $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ kümesi D sayısal yarıgrubunun üreteç kümesi (üreteç kümesi kavramı temel tanımlar başlığı altında ayrıntılı olarak verilmiştir.) ise $ebob(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1$ olmalıdır. D sayısal yarıgrubu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$D = \langle n_1, n_2, \dots, n_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^p a_i n_i : a_i \in \mathbb{N} \right\}$$

$$"(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus D \text{ sonludur.}" [11]$$

Sayısal yarıgrupların yapıştırılması kavramından ilk olarak 1970 yılında Herzog [2] ve ardından doktora tezinde Rosales bahsetmiştir.[3]

Rosales 2001 yılında doktora tezinde sayısal yarıgrupların yapıştırılması kavramını “bir sayısal yarıgrubun tam kesişimli olması için gerek ve yeter koşul o sayısal yarıgrubun iki tam kesişimli sayısal yarıgrubun yapıştırılması olması gerekir.” Tezini kanıtlamak için tanımlamıştı. Doktora tezi öncesinde 1997 yılında afin yarıgrupların yapıştırılması üzerine çalışılmış ve yapıştırma tanımını affine yarıgruplar için genelleştirmiştir.[4]. Ayrıca J.C. Rosales, P.A.Garcia Sanchez 1995 yılında [5] de “tam kesişim sayısal yarıgruplarının karakterizasyonunu bir basit affine yarıgruba genelleştirmek için kullanmışlardır.

Yapıştırma kavramı ile ilgilenen matematikçiler arasında K.G. Fischer, W.maris, J. Shapiro’ nunda olduğunu görüyoruz. K.G. Fischer, W.maris, J. Shapiro yapıştırmayı [6]’da “bir affine yarıgrubun tam kesişim affine RF- olması için gerek ve yeter şart bu affine yarıgrubun ancak iki tam kesişim affine yarıgrubun yapıştırması olması ile mümkündür.” tezini kanıtlamak için kullanmışlardır.

RF-matrisler ise sayısal yarıgrupların sözde Frobenius kümelerindeki elemanlar kullanılarak ortaya çıkarılmış matrislerdir. RF-matrisler ile ilgili çalışmaları ilk olarak Alessio Moscariello 2016 yılında yapmıştır.[7]

Daha sonra ise Kazufumi Eto On Row-Factorization Matrices makalesinde [8] sayısal yarıgrupların yapıştırılmasını RF matrisleri ile incelemiştir.

Türkiye de ise Ayşe Çalışkan Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde 2020 yılında yüksek lisans tezinde [9] RF-matrisleri üzerine yaptığı çalışmaları sunmuştur.

Daha sonra Gaziantep Üniversitesi'nde Yılmaz Koç sayısal yarıgrupların RF-matrisleri ile yapıştırılmasını konu alan çalışmalar yapmış ve bu çalışmalarını 2021 yılında yüksek lisans tezinde [10] sunmuş, böylece bu alanda çalışmalar yapmak isteyen Türk araştırmacılara ışık olmuştur.

Bu tez çalışmasında Arf sayısal yarıgrupların yapıştırması çeşitli yönlerden incelenecek son olarak Arf sayısal yarıgrupların idealleri RF-matrisleri aracılığı ile oluşturulacaktır.

Bölüm 1'de sayısal yarıgrup, yapıştırma kavramı ve RF-matris ile ilgili bilgiler sunulmuştur.

Bölüm 2'de sayısal yarıgruplar için gerekli temel tanım ve teoremler verilecek, tanımlar sayısal örneklerle anlaşılır hale getirilecektir.

Bölüm 3'te Arf sayısal yarıgrup tanımı verilecektir. Arf sayısal yarıgrupun üreteç kümesi Apery kümesinden faydalanılarak bulunacaktır.

Bölüm 4'te sayısal yarıgrupların yapıştırılması kavramı Arf sayısal yarıgruplara uygulanacaktır, iki Arf sayısal yarıgrupun yapıştırılmasıyla oluşan sayısal yarıgrupun maksimal gömme boyutuna sahip olup olmadığını ve dolayısıyla bir Arf sayısal yarıgrup olup olmadığını belirlenecektir. Sayısal yarıgrupların tamamen yapıştırılması tanımı verilecek ve "Tamamen yapıştırılmış sayısal yarıgruplar hangi durumlarda Arf sayısal yarıgrup olur?" sorusu cevaplandırılacaktır.

Bölüm 5'te bir sayısal yarıgrupun sözde-Frobenius kümesindeki elemanların RF-matrisleri bulunacaktır. Arf sayısal yarıgrupların yapıştırılması RF-matrisleri ile

incelenecek, iki Arf sayısal yarıgrubun yapıştırılması sonucu oluşan yeni sayısal yarıgruba ait RF-matris bulunacaktır. Ardından yapıştırmada kullanılan Arf sayısal yarıgrupların RF-matrislerinden faydalananarak yapıştırma sonucu oluşan yeni sayısal yarıgrubun RF-matrisleri elde edilecektir ve son olarak RF-matrislerinden faydalananarak sayısal yarıgrupların idealleri elde edilecektir.

Bölüm 6’da tezde yapılan çalışmalar özetlenerek ulaşılan sonuçlara yer verilecektir.



BÖLÜM II

Bu bölümde sayısal yarıgrupları için temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu bölümde verilen tanımları yazmak için [11], [12], [13], [15] [16] numaralı kaynaklar kullanılmıştır.

TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1.

D boştan farklı bir küme olmak üzere; D kümesi üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlansın.

$$*: D \times D \rightarrow D$$

olmak üzere eğer

$$\forall a, b, c \in D \text{ için;}$$

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

şitliği sağlanıyorsa $(D, *)$ ikilisine bir *yarıgrup* denir.

Tanım 2.2

$(D, *)$ yarıgrubu eğer;

$$a * 1 = 1 * a = a$$

Koşulunu sağlarsa D ye *birimli yarıgrup* denir.

Birimli yarıgruba *monoid* adı verilir.

Tanım 2.3

D , $\mathbb{N}$ monoidinin boştan farklı bir alt kümesi olsun $0 \in D$ olmak üzere

$$\forall a, b \in D \text{ için, } a + b \in D \text{ (kapalılık)}$$

sağlanıyorsa D ye $\mathbb{N}$ nin *alt monoidi* denir.

Tanım 2.4

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere, $D \subseteq \mathbb{N}$ olsun. D alt monoidi aşağıdaki şartları sağlıyorsa,

- (i) $0 \in D$
- (ii) $x, y \in D \Rightarrow x + y \in D$
- (iii) $\mathbb{N} \setminus D$ sonlu elemana sahip;

D bir sayısal yarıgruptur.

Örnek 2.5

$$D = \langle 7, 11, 23, 24, 26, 27 \rangle = \{0, 7, 11, 14, 18, 21 \rightarrow\}$$

burada $D = \{7, 11, 23, 24, 26, 27\}$ tarafından üretilen bir sayısal yarıgrup olduğunu gösterelim.

NOT: Burada " $21 \rightarrow$ " kümenin 21'den sonra gelen diğer elemanları ardışık doğal sayılar olarak devam ediyor demektir.

- (i) $0 \in D$ olduğu açıkça görülür.
- (ii) D kümesinin bütün elemanlarını ikişerli olarak toplarsak sonuç tekrardan D kümesinin elemanı olur.
- (iii) $\mathbb{N} \setminus D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20\}$ (D kümesinin içinde olmayan elemanların kümesi) sonlu elemanlıdır.

D kümesi bu üç şartı sağladığı için bir sayısal yarıgruptur ve D kümesi $\{7, 11, 23, 24, 26, 27\}$ elemanları tarafından üretilir yani;

$$D = \langle 7, 11, 23, 24, 26, 27 \rangle$$

$$= \{7 \cdot k_1 + 11 \cdot k_2 + 23 \cdot k_3 + 24 \cdot k_4 + 26 \cdot k_5 + 27 \cdot k_6 :$$

$$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 \in \mathbb{N}\}$$

Tanım 2.6

D bir sayısal yarıgrup olmak üzere D kümesinde olmayan elemanların kümesine D nin boşluktaki elemanlarının kümesi denir ve $G(D)$ ile gösterilir. Boşluk kümesinin eleman sayısına *cins* $g(D)$ denir.

$$G(D) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin D\}$$

Örnek 2.7

$$D = \langle 3, 8, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \dots\}$$

D sayısal yarıgrupunun boşluk kümesi aşağıdaki gibidir.

$$G(D) = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 13\}$$

Tanım 2.8

D bir sayısal yarıgrup ve $A \subset D$. Her $d \in D$ yi $A = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ kümesinin elemanlarının lineer toplamı biçiminde ifade edebiliyorsak A kümesine D kümesinin bir *üreteç kümesi* denir. Ve $D = \langle A \rangle$ biçiminde gösterilir. Eğer D kümesini üreten A 'dan daha küçük bir küme yok ise A 'ya D nin *minimal üreteç kümesi* denir.

Not: D 'nin bir sayısal yarıgrup olabilmesi için üreteçlerinin aralarında asal olması gerekir çünkü, " $ebob(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus D$ sonludur." [11]

Örnek 2.9

$$D = \langle 2, 4 \rangle = \{2 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2\}$$

olmak üzere;

$ebob(2, 4) \neq 1$ olduğu için $\mathbb{N} \setminus D$ kümesi sonlu değildir. D bir sayısal yarıgrup değildir.

Tanım 2.10

$$D = \langle n_1, n_2 \dots \dots n_k \rangle$$

sayısal yarıgrubunun üreteç sisteminin eleman sayısına D 'nin *gömme boyutu* denir.

$$e(D) = k$$

ile gösterilir.

Örnek 2.11

$$D = \langle 4, 5, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 5, 7 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubunun üreteç sistemi 4 elemanlı olduğundan

$$e(D) = 4$$

olur.

Tanım 2.12

$$D = \langle n_1, n_2 \dots \dots n_k \rangle$$

sayısal yarıgrubunun üreteç sisteminin en küçük elemanına D 'nin *katlılığı* denir ve

$$m(D) = n_1$$

ile gösterilir.

Örnek 2.13

$$D = \langle 5, 9, 10, 11 \rangle = \{0, 5, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 18 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubunun üreteç sisteminin en küçük elemanı 5'tir.

$$m(D) = 5$$

olur.

Tanım 2.14

Eğer bir D sayısal yarıgrubunun gömme boyutu katlılığına eşit ise ($e(D) = m(D)$)

D sayısal yarıgrubu *maksimal gömme boyutludur* denir.

Örnek 2.15

$$D = \langle 2,3 \rangle$$

sayısal yarıgrubunun

$$e(D)=2 \text{ ve } m(D)=2$$

$e(D)=m(D)$ olduğundan maksimal gömme boyutludur.

Tanım 2.16

D bir sayısal yarıgrup olmak üzere D 'nin boşluk kümesinin bir x elemanının D 'nin sıfır hariç bütün elemanlarıyla toplamları D kümesinin içine düşüyorsa x elemanı *sözde Frobenius (Pseudo-Frobenius)* kümesinin bir elemanıdır denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$PF(D) = \{x \in N \setminus D : x + d \in D, \forall d \in D \setminus \{0\}\}$$

Not: Sözde Frobenius kümesinin eleman sayısına D 'nin *tipi* denir $t(D)$ ile gösterilir. [13]

Örnek 2.17

$$D = \langle 3,11,21 \rangle = \{0,3,6,9,11,12,14,15,17,18,20 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubunun boşluk kümesi,

$$G(D) = \{1,2,4,5,7,8,10,13,16,19\}$$

olmak üzere;

$$1 \text{ için, } 1 + 3 = 4, 4 \notin D$$

$$2 \text{ için, } 2 + 3 = 5, 5 \notin D$$

$$4 \text{ için, } 4 + 3 = 7, 7 \notin D$$

$$5 \text{ için, } 5 + 3 = 8, 8 \notin D$$

$$7 \text{ için, } 7 + 3 = 10, 10 \notin D$$

$$8 \text{ için, } 8 + 3 = 11, 11 \in D$$

$$8 \text{ için, } 8 + 6 = 14, 14 \in D$$

$$8 \text{ için, } 8 + 9 = 17, 17 \in D$$

$$8 \text{ için, } 8 + 11 = 19, 19 \notin D$$

$$10 \text{ için, } 10 + 3 = 13, 13 \notin D$$

$$13 \text{ için, } 13 + 3 = 16, 16 \notin D$$

$$16 \text{ için, } 16 + 3 = 19, 19 \notin D$$

$$19 \text{ için, } 19 + 3 = 22, 22 \in D$$

22 sayısından sonra gelen bütün doğal sayılar D sayısal yarıgrubunun elemanı olduğundan 19 sözde-Frobenius kümesinin elemanıdır denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$PF(D) = \{19\}$$

Tanım 2.18

D bir sayısal yarıgrup olmak üzere *Frobenius sayısı* D sayısal yarıgrubunda bulunmayan en büyük elemanı ifade eder (yani boşluk kümesinin en büyük elemanıdır.) ve şöyle gösterilebilir.

$$F(D) = \max G(D) \text{ ya da } F(D) = \max\{x \in \mathbb{Z}: x \notin D\}$$

Örnek 2.19

$D = \langle 4, 6, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 6 \rightarrow\}$ bir sayısal yarıgrup olsun. Bu sayısal yarıgrubun sözde-Frobenius sayılarının kümesini ve Frobenius sayısını bulalım.

Yukarıda verilen D sayısal yarıgrubunun boşluklarının kümesi,

$$G(D) = \{1, 2, 3, 5\}$$

şeklinde yazılır şimdi bu elemanlardan hangileri sözde-Frobenius sayıları olacak bunu belirleyelim.

$$1 \text{ için, } 1 + 4 = 5, 5 \notin D$$

$$2 \text{ için, } 2 + 4 = 6, 6 \in D$$

6 sayısından sonra gelen bütün doğal sayılar D sayısal yarıgrubunun içinde olacağından

$2 \in PF(D)$ olur.

$$3 \text{ için, } 3 + 4 = 7, 7 \in D$$

Aynı şekilde 7 ve 7'den sonra gelen bütün doğal sayılar D sayısal yarıgrubu içinde olacağından

$3 \in PF(D)$ olur.

$$5 \text{ için, } 5 + 4 = 9, 9 \in D$$

olduğundan

$9 \in PF(D)$ olur.

$$PF(D) = \{2, 3, 5\}$$

Frobenius sayısını ise D kümesinde bulunmayan en büyük eleman olarak tanımlamıştık

$$F(D) = 5$$

Önerme 2.20

a ve b pozitif tam sayılar kümesinin bir elemanı ve aralarında asal sayılar olmak üzere,

$$1) F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b$$

$$2) \ g(\langle a, b \rangle) = \frac{ab - a - b + 1}{2} = \frac{F(\langle a, b \rangle) + 1}{2}$$

ifadeleri elde edilir. [11]

Örnek 2.21

$$D = \langle 5, 8 \rangle$$

sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısını ve cinsini yukarıdaki önermeden faydalanarak bulalım.

$$1. \ F(\langle 5, 8 \rangle) = 5.8 - 5 - 8 = 27, F(D) = 27$$

$$2. \ g(D) = \frac{5.8 - 5 - 8 + 1}{2} = 14,$$

D sayısal yarıgrubunun boşluk kümesinin eleman sayısı 14 tür.

Tanım 2.22

D sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı $F(D)$ olsun. Bu durumda Frobenius sayısından büyük olan her tam sayının D sayısal yarıgrubunun elemanı olacağı açıktır. $F(D) + 1$ sayısına D sayısal yarıgrubunun *ileticisi* denir. Biz ileticiyi c ile göstereceğiz.[1]

Örnek 2.23

$$D = \langle 8, 9, 11, 15 \rangle = \{0, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu için

$$F(D) = 21 \text{ dir.}$$

O halde bu sayısal yarıgrubun ileticisi 22 dir.

Tanım 2.24

D bir sayısal yarıgrup ve $y \in D \setminus \{0\}$ olmak üzere D sayısal yarıgrubunda y 'nin Apery kümesi;

$$Ap(D, y) = \{\forall x \in D: x - y \notin D\}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 2.25

$$D = \langle 5, 8 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28 \rightarrow\}$$

$5 \in D$ için Apery kümesini bulalım

$$8 - 5 = 3 \notin D$$

$$16 - 5 = 11 \notin D$$

$$24 - 5 = 19 \notin D$$

$$32 - 5 = 27 \notin D$$

$Ap(D, 5) = \{0, 16, 32, 8, 24\}$ olarak elde edilir.

Teorem 2.26

$y \in D \setminus \{0\}$ için $Ap(D, y)$ kümesinin eleman sayısı y tane dir.

Yukarıdaki örneğimizde görüldüğü üzere $s(Ap(D, 5)) = 5$ tir.

İspat. [11]

Önerme 2.27

D bir sayısal yarıgrup ve $\alpha \in D$ olsun,

$$Ap(D, \alpha) = \{x_0, < x_1 < x_2 \dots < x_{\alpha-1}\}$$

olsun.

D sayısal yarıgrupunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul,

$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ için ,

$$x_i + x_{\alpha-1-i} = x_{\alpha-1}$$

olmasıdır. [11]

İspat. Bknz.[11]

Örnek 2.28

$$D = \langle 5,8 \rangle = \{0,5,8,10,13,15,16,18,20,21,23,24,25,26,28 \rightarrow\}$$

sayısal yarigrubunun simetrik olup olmadığını Önerme 2.27 yardımı ile gösterelim.

$8 \in D$ için Apery kümesini bulalım

$$0 - 8 = -8 \notin D$$

$$5 - 8 = -3 \notin D$$

$$10 - 8 = 2 \notin D$$

$$15 - 8 = 7 \notin D$$

$$20 - 8 = 12 \notin D$$

$$25 - 8 = 17 \notin D$$

$$30 - 8 = 22 \notin D$$

$$35 - 8 = 27 \notin D$$

$$Ap(D, 8) = \{0,5,10,15,20,25,30,35\}, \quad s(Ap(D, 8)) = 8$$

$$x_0 = 0, x_1 = 5, x_2 = 10, x_3 = 15, x_4 = 20, x_5 = 25, x_6 = 30, x_7 = 35$$

$$i = 0 \text{ için, } x_0 + x_{8-1-0} = x_{8-1}$$

$$0 + 35 = 35$$

$$i = 1 \text{ için, } x_1 + x_{8-1-1} = x_{8-1}$$

$$5 + 30 = 35$$

$$i = 2 \text{ için, } x_2 + x_{8-1-2} = x_{8-1}$$

$$10 + 25 = 35$$

$$i = 3 \text{ için, } x_3 + x_{8-1-3} = x_{8-1}$$

$$15 + 20 = 35$$

$$i = 4 \text{ için, } x_4 + x_{8-1-4} = x_{8-1}$$

$$20 + 15 = 35$$

$$i = 5 \text{ için, } x_5 + x_{8-1-5} = x_{8-1}$$

$$25 + 10 = 35$$

$$i = 6 \text{ için, } x_6 + x_{8-1-6} = x_{8-1}$$

$$30 + 5 = 35$$

$$i = 7 \text{ için, } x_7 + x_{8-1-7} = x_{8-1}$$

$$35 + 0 = 35$$

Bütün i ler için şartımız sağlandığından D simetrik sayısal yarıgruptur.

Örnek 2.29

$$D = \langle 4, 9, 10, 11 \rangle = \{0, 4, 8 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubunun simetrik olmadığını göstermek için öncelikle herhangi bir eleman için Apery kümesini bulalım. Şimdi $8 \in D$ için Apery kümesini bulalım.

$$0 - 8 = -8 \notin D$$

$$4 - 8 = -4 \notin D$$

$$9 - 8 = 1 \notin D$$

$$10 - 8 = 2 \notin D$$

$$11 - 8 = 3 \notin D$$

$$13 - 8 = 5 \notin D$$

$$14 - 8 = 6 \notin D$$

$$15 - 8 = 7 \notin D$$

$$Ap(D, 8) = \{0, 4, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}, 0 + 15 \neq 4 + 14$$

Olduğu için D sayısal yarıgrubu simetrik değildir.



BÖLÜM III

Bu bölümde Arf sayısal yarıgrup tanımı verilecektir. Arf sayısal yarıgrupun üreteç kümesi Apery kümesinden faydalanılarak bulunacaktır.

ARF SAYISAL YARIGRUPLAR

Tanım 3.1

D bir sayısal yarıgrup olsun aşağıdaki şart sağlanıyorsa D ye bir Arf sayısal yarıgrup denir. [14]

$$\forall x, y, z \in D : x \geq y \geq z \Rightarrow x + y - z \in D$$

D sayısal yarıgrupunun ileticisini c ile gösterelim.

Not: Arf sayısal yarıgruplar sayısal yarıgrupların alt grupları olduğu için sayısal yarıgruplarda yapılan bütün işlemleri Arf sayısal yarıgruplarda da yapabiliriz.

Örnek 3.2

$$D = \langle 3, 17, 19 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 17 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrupunun Arf sayısal yarıgrup olup olmadığını belirleyelim.

$$3, 6, 9 \text{ için, } 9 + 6 - 3 = 12 \in D$$

$$3, 6, 12 \text{ için, } 12 + 6 - 3 = 15 \in D$$

$$3, 9, 12 \text{ için, } 12 + 9 - 3 = 18 \in D$$

$$3, 6, 15 \text{ için, } 15 + 6 - 3 = 18 \in D$$

15 sayısından daha büyük bütün elemanlar için bu eşitlik sağlanacaktır. Dolayısıyla $D = \langle 3, 17, 19 \rangle$ bir Arf sayısal yarıgruptur.

Lemma 3.3

D bir sayısal yarıgrup olsun.

$$\forall x, y \in D : x \geq y \Rightarrow 2x - y \in D$$

Eğer D sayısal yarıgrup yukarıdaki özelliği sağlıyorsa D ye Arf sayısal yarıgrup denir.

Not: Tanım 3.1 ve Lemma 3.3'ü beraber düşünüldüğünde D ancak ve ancak aşağıdaki durumda Arf sayısal yarıgrup olur.

$$c > x > y \text{ ve } \forall x, y \in D$$

olmak üzere

$$2x - y \in D$$

şartını sağlayan D sayısal yarıgrubu Arf sayısal yarıgruptur denir.[15]

Örnek 3.4

$$D = \langle 4, 9, 10, 11 \rangle = \{0, 4, 8 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubunun iletici

$$c = 8$$

O zaman

$$y = 0, x = 4 \text{ için, } 8 - 0 = 8 \in D$$

olduğunda D sayısal yarıgrubu Arf sayısal yarıgruptur.

Lemma 3.5

Her Arf sayısal yarıgrup maksimal gömme boyutludur. [11]

Not: Lemma 3.5'in tersi doğru değildir, yani maksimal gömme boyutlu her sayısal yarıgrup Arf sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 3.6

$$D = \langle 4,5,7,11 \rangle = \{0,4,5,7 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu maksimal gömme boyutludur.

Fakat $7 + 5 - 4 = 8 \notin D$ olduğu için Arf sayısal yarıgrup değildir.

Not: Yukarıdaki lemma $p \Rightarrow q$ önermesi olduğundan buna denk olarak $q' \Rightarrow p'$ yazılabilir yani bir sayısal yarıgrup maksimal gömme boyutlu değil ise Arf sayısal yarıgrup değildir diyebiliriz. Bu özelliği yapıştırılmış sayısal yarıgrupların Arf sayısal yarıgrup olup olmaması konusunu araştırırken sıkça kullanacağız.

Önerme 3.7

D katlılığı m olan bir Arf sayısal yarıgrup olsun o zaman D Arf sayısal yarıgrubunun minimal üreteç sistemi $(Ap(D, m) \setminus \{0\}) \cup \{m\}$ kümesi olur. Ayrıca $Ap(D, m)$ kümesinin en büyük elemanı da $c + m - 1$ olur. [11]

Örnek 3.8

$$D = \langle 4,9,10,11 \rangle = \{0,4,8 \rightarrow\}$$

Arf sayısal yarıgrubunun üreteç sistemini Apery kümesi yardımıyla bulalım. D Arf sayısal yarıgrubunun Apery kümesini 4 elemanı için bulalım.

$$0 - 4 = -4 \notin D$$

$$8 - 4 = 4 \in D$$

$$9 - 4 = 5 \notin D$$

$$10 - 4 = 6 \notin D$$

$$11 - 4 = 7 \notin D$$

$$12 - 4 = 8 \in D$$

$12 \in D$ 'den sonra gelen bütün elemanlar için çıkarma işlemini sonucu D Arf sayısal yarıgrubunun içine düşecektir.

$$Ap(D, 4) = \{0, 9, 10, 11\}$$

olarak bulunur. O zaman üreteç sistemi

$$\{0, 9, 10, 11\} \setminus \{0\} \cup \{4\} = \{4, 9, 10, 11\}$$

olarak bulunur.

Ayrıca $Ap(D, 4)$ kümesinin en büyük elemanı da $8 + 4 - 1 = 11$ olur.



BÖLÜM IV

Bu bölümde, sayısal yarıgrupların yapıştırılması Arf sayısal yarıgruplara uygulanacaktır, iki Arf sayısal yarı grubun yapıştırılmasıyla oluşan sayısal yarı grubun maksimal gömme boyutuna sahip olup olmadığını ve dolayısıyla bir Arf sayısal yarı grup olup olmadığını belirlenecektir.

YAPIŞTIRMA KAVRAMI

4.1. Sayısal Yarıgrupların Yapıştırılması

D_1 ve D_2 iki sayısal yarı grup olsun.

$$D_1 = \langle n_1, n_2, \dots, n_k \rangle$$

$$D_2 = \langle m_1, m_2, \dots, m_p \rangle$$

$q \in D_1 \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_k\}, r \in D_2 \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ ve $ebob(q, r) = 1$ olmak üzere q ve r sayıları belirleyelim.

$$D = \langle rn_1, rn_2, \dots, rn_k, qm_1, qm_2, \dots, qm_p \rangle$$

D_1 ve D_2 sayısal yarı gruplarının yapıştırılması ile D sayısal yarı grubu oluşur. [8]

NOT: Burada q ve r sayılarının farklı seçimleri ile aynı gruplardan farklı yapıştırmalar elde edilebileceğine dikkat edilmelidir. Yani yapıştırma işlemi tek türlü olmak zorunda değildir.

Lemma 4.1.1

- 1) $D, \{rn_1, rn_2, \dots, rn_k, qm_1, qm_2, \dots, qm_p\}$ doğuraylarının minimal sistemli bir sayısal yarı grubudur.
- 2) $\{rn_1, rn_2, \dots, rn_k, qm_1, qm_2, \dots, qm_p\}, \{rn_1, rn_2, \dots, rn_k\}$ ve $\{qm_1, qm_2, \dots, qm_p\}$ 'nin bir yapıştırmasıdır.

İspat. Bknz.[10]

Teorem 4.1.2

$$D_1 = \langle n_1, n_2, \dots, n_k \rangle$$

$$D_2 = \langle m_1, m_2, \dots, m_p \rangle$$

D_1 ve D_2 iki sayısal yarıgrup, $q \in D_1 \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, $r \in D_2 \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ ve $ebob(q, r) = 1$ olmak üzere q ve r sayıları belirleyelim. D , D_1 ve D_2 'nin yapıştırılması ile oluşan sayısal yarıgrup olmak üzere

$$F(D) = r.F(D_1) + q.F(D_2) + q.r$$

formülü ile bulunabilir. [8]

İspat. Bknz. [8]

Teorem 4.1.3

H pozitif tam sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. $\{H_1, H_2\}$ H 'nin bir parçalanışı olsun.

Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

1) H , H_1 ve H_2 nin yapıştırmasıdır.

2) $g: Ap(H_1, c) \times Ap(H_2, c) \rightarrow Ap(H, c)$

$$g(s_1, s_2) = s_1 + s_2$$

İspat. Bknz.[10]

Önerme 4.1.4

Simetrik sayısal yarıgrupların yapıştırması simetriktir.

İspat.

$$D_1 = \langle n_1, n_2, \dots, n_k \rangle$$

$$D_2 = \langle m_1, m_2, \dots, m_p \rangle$$

D_1 ve D_2 iki sayısal yarıgrup olsun.

$q \in D_1 \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_k\}, r \in D_2 \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ ve $ebob(q, r) = 1$ olmak üzere q ve r sayıları belirleyelim. Yapıştırma tanımına göre

$$D = \langle rn_1, rn_2, \dots, rn_k, qm_1, qm_2, \dots, qm_p \rangle$$

Sayısal yarıgrubu D_1 ve D_2 sayısal yarıgruplarının yapıştırmasıdır ve $\{rn_1, rn_2, \dots, rn_k, qm_1, qm_2, \dots, qm_p\}$ kümesi de D sayısal yarı grubunun minimal üreteç sistemidir. Teorem 4.1.2 den

$$Ap(H, qr) = \{s_1 + s_2 : s_1 \in Ap(H_1, qr), s_2 \in Ap(H_2, qr)\}$$

olacağı açıktır. Buradan,

$$Ap(D, qr) = \{qv_1 + rv_2 : v_1 \in Ap(D_1, q), v_2 \in Ap(D_2, r)\}$$

olur ki bu da Önerme 2.27'ye göre yapıştırmanın simetrik olduğu anlamına gelir. [10]

4.2. Arf Sayısal Yarıgrupların Yapıştırılması

Sayısal yarıgruplarda yaptığımız yapıştırma işlemini Arf sayısal yarıgruplarına uygulayabiliriz. Bu işlemten sonra oluşan yeni sayısal yarıgrupların özelliklerini aşağıda inceleyeceğiz.

Önerme 4.2.1

İki Arf sayısal yarı grubun yapıştırılması sonucu oluşan sayısal yarıgrup Arf sayısal yarıgrup olmak zorunda değildir.

Aşağıdaki örnekte hem iki Arf sayısal yarı grubun yapıştırılmasını hem de yapıştırma sonucu oluşan sayısal yarı grubun Arf sayısal yarıgrup olmadığını göreceğiz.

Örnek 4.2.2.

$$D_1 = \langle 2, 31 \rangle = \{0, 2 \rightarrow\}$$

$$D_2 = \langle 3, 11, 13 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 11 \rightarrow\}$$

D_1 ve D_2 iki Arf sayısal yarıgruptur.

$5 \in D_1 \setminus \{2,3\}$, $6 \in D_2 \setminus \{3,11,13\}$ ve $ebob(5,6) = 1$ olmak üzere,.

D_1 ve D_2 Arf sayısal yarıgruplarının yapıştırılması aşağıda verilmiştir.

$$D = \langle 6.2, 6.3, 5.3, 5.11, 5.13 \rangle = \langle 12, 15, 18, 55, 80 \rangle$$

D sayısal yarıgrubu maksimal gömme boyutlu olmadığı için Arf sayısal yarıgrup değildir.[11]

Teorem 4.2.3

$$D_1 \neq \mathbb{N}$$

$$D_2 \neq \mathbb{N}$$

olan iki Arf sayısal yarıgrup ise D_1 ve D_2 nin yapıştırması bir Arf sayısal yarıgrup değildir.

İspat.

$$D_1 = \langle n_1, n_2, \dots, n_k \rangle$$

$$D_2 = \langle m_1, m_2, \dots, m_p \rangle$$

$D_1 \neq \mathbb{N}$ ve $D_2 \neq \mathbb{N}$ olacak şekilde iki Arf sayısal yarıgrup olsun.

$$q \in D_1 \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

$$r \in D_2 \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$$

ve

$$ebob(q, r) = 1$$

olacak şekilde birer q ve r elemanları alalım.

$$D = \langle rn_1, rn_2, \dots, rn_k, qm_1, qm_2, \dots, qm_p \rangle$$

D , $D_1 \neq \mathbb{N}$ ve $D_2 \neq \mathbb{N}$ Arf sayısal yarıgruplarının bir yapıştırması olmak üzere

D 'nin maksimal gömme boyutlu bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim.

D 'nin minimal üreteç sisteminin eleman sayısı (katlılığı) $p + k$ olacağı ve D 'nin katlılığının ya $r \cdot n_1$ ya da $q \cdot m_1$ olacağı açıktır.

Ayrıca D_1 ve D_2 nin Arf sayısal yarıgrup olduklarından dolayı $n_1 = k$ ve $m_1 = p$ olduğunu unutmayalım.

Bu durumda;

$$r \cdot n_1 = p + k$$

$$q \cdot m_1 = p + k$$

olmalıdır. Eğer

$$r \cdot n_1 = p + k$$

alırsak,

$$n_1 (r - 1) = p$$

buradan

$$p / (r - 1) = n_1$$

olmalıdır.

$n_1, k = n_1, D_1$ 'in elemanı olduğundan bir doğal sayı olmalıdır.

$P = m_1 D_2$ 'nin katlılığı ve $r \in D_2$ olduğundan $r > m_1$ olmalıdır.

Bu durumda $k = \frac{m_1}{(r-1)}$ eşitliğinin sağlanabilmesi için $r = m_1 + 1$ olmalıdır ki bu durumda $k = 1$ olur. Bu da

$$D_1 = \langle 1 \rangle$$

olması demektir.

Diğer taraftan $q \cdot m_1 = p + k$ ise benzer şekilde $m_1 = p = 1$ olması gerekir. Bu da

$$D_2 = \langle 1 \rangle$$

olması demektir.

Bu iki durum da baştaki $D_1 \neq \mathbb{N}$ ve $D_2 \neq \mathbb{N}$ iki şartımız ile çelişeceği için D maksimal gömme boyutlu değildir. Teoremden biliyoruz ki maksimal gömme boyutlu değil ise Arf sayısal yarıgrubu değildir.

Lemma 4.2.4

$$D_1 = \langle 1 \rangle$$

$$D_2 = \langle m_1, m_2, \dots, m_p \rangle, D_2 \neq \mathbb{N}$$

olacak şekilde Arf sayısal yarıgrup olsunlar.

$$q \in D_1 \setminus \{1\}, r \in D_2 \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_p\} \text{ ve } \text{ebob}(q, r) = 1$$

olacak şekilde birer q ve r elemanları alalım. D_1 ve D_2 'nin birleşimi D aşağıdaki gibi yazılır.

$$D = \langle r, qm_1, qm_2, \dots, qm_p \rangle$$

Bu birleşiminin maksimal gömme boyutlu olması için,

$$r = p + 1 \text{ ya da } qm_1 = p + 1$$

olması gerekir.

Eğer $r = p + 1$ ise $r = m_1 + 1$ olmalıdır ki buda D_2 'nin tek m_1 üreticine sahip olması demektir. Yani doğal sayılar kümesi olması gerektiğini gösterir.

$qm_1 = p + 1$ ise $qm_1 = m_1 + 1$ olacağından, $m_1 = \frac{1}{q-1}$ olması gerekir m_1 tam sayı olduğundan $q = 2$ olmalıdır ki buda D_2 'nin doğal sayı kümesi olması gerektiğini gösterir.

Özetlersek yukarıdaki şartlarda bir birleşmenin Arf sayısal yarıgrup olması mümkün değildir.

Sonuç 4.2.5

Önerme 4.2.1, Lemma 4.2.4 ve Teorem 4.2.3'ün birleşiminden şunu görüyoruz;

İki Arf sayısal yarıgrubun birleşiminin bir Arf sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul,

$$D_1 = \langle 1 \rangle, D_2 = \langle 1 \rangle, 2 \in D_1, q \in D_2, \text{ebob}(2, q) = 1$$

olmasıdır.

$\text{ebob}(2, q) = 1$ olduğundan q tek sayı olmalıdır. $c \in D$ sayısal yarıgrubunun bir iletkeni olmak üzere, bu koşullar altında oluşan sayısal yarıgrup $\langle 2, c + 1 \rangle$ biçimindedir ve çokluğu 2 olan sayısal yarıgruptur.

Katlılığı 2 olan bir sayısal yarıgrup her zaman Arf sayısal yarıgruptur. [9].

Aşağıda bazı Arf sayısal yarıgruplar için yapıştırma örnekleri verilmiştir .

Örnek 4.2.6

$$D_1 = \langle 1 \rangle = \{0, 1 \rightarrow\}$$

$$D_2 = \langle 1 \rangle = \{0, 1 \rightarrow\}$$

D_1 ve D_2 Arf sayısal yarıgruplarının bir yapıştırmasını oluşturalım.

$$2 \in D_1 \setminus \{1\},$$

$$3 \in D_2 \setminus \{1\},$$

olmak üzere,

$$\text{ebob}(2, 3) = 1$$

olur. Böylece aşağıdaki sayısal yarıgrup elde edilir.

$$D = \langle 2, 3 \rangle = \{0, 2 \rightarrow\}$$

görüldüğü gibi D sayısal yarıgrubu oluşturulurken gerekli koşullara uyulduğu için D bir Arf sayısal yarıgrup oldu.

Örnek 4.2.7

$$D_1 = \langle 1 \rangle = \{0, 1 \rightarrow\}$$

$$D_2 = \langle 2, 3 \rangle = \{0, 2 \rightarrow\}$$

D_1 ve D_2 Arf sayısal yarıgruplarının bir yapıştırmasını oluşturalım.

$$3 \in D_1 \setminus \{1\},$$

$$5 \in D_2 \setminus \{2, 3\}$$

olmak üzere,

$$\text{ebob}(3, 5) = 1$$

olur. Böylece aşağıdaki sayısal yarıgrup elde edilir.

$$D = \langle 5, 6, 9 \rangle = \{0, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14 \rightarrow\}$$

Bu durumda D_1 ve D_2 'nin yapıştırılması ile elde edilen sayısal yarıgrup Arf sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 4.2.8

$$D_1 = \langle 2, 5 \rangle = \{0, 2, 4 \rightarrow\}$$

$$D_2 = \langle 3, 4, 5 \rangle = \{0, 3 \rightarrow\}$$

D_1 ve D_2 Arf sayısal yarıgruplarının bir yapıştırmasını oluşturalım.

$$7 \in D_1 \setminus \{2, 5\},$$

$$6 \in D_2 \setminus \{3, 4, 5\},$$

olmak üzere

$$\text{ebob}(7, 6) = 1$$

olur. Böylece aşağıdaki sayısal yarıgrup elde edilir.

$$D = \langle 14, 18, 24, 30, 35 \rangle = \{0, 14, 18, 24, 28, 30, 32, 35, 36, 38, 42, 44, 46, 48, 49, 50,$$

$$52,53,54, 56,58,59,60,62,63,64,65,66,67,68,70,71,72,73,74,76 \rightarrow\}$$

Bu durumda D_1 ve D_2 'nin yapıştırılması ile elde edilen sayısal yarıgrup Arf sayısal yarıgrup değildir.

4.3 Sayısal Yarıgrup Tamamen Yapıştırılması

Tanım 4.3.1

D sayısal yarıgrubunun tamamen yapıştırılmış olması için aşağıdaki şartlardan birini sağlaması gerekir.

- 1) $D = \langle 1 \rangle$
- 2) D tamamen yapıştırılmış yarıgrupların yapıştırılması ile oluşturulmuş bir yarıgrup ise tamamen yapıştırılmıştır.

D D_1 ve D_2 'nin yapıştırılması ile oluşturulmuş bir sayısal yarıgrup olsun,

$$q \in D_1 \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

$$r \in D_2 \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$$

ve

$$ebob(q, r) = 1$$

olmak üzere;

$$F(D) = rF(D_1) + qF(D_2) + d_1 \cdot d_2$$

olur. Böylece tamamen yapıştırılmış sayısal yarıgruplar simetrik olurlar.[11]

Sonuç 4.3.2

Bu iki maddeden şu sonuçları çıkarabiliriz iki tane doğal sayı kümesinin yapıştırılması ile tamamen yapıştırılmış yarıgrup oluşur. Eğer D 'nin gömme boyutu iki ise D tamamen yapıştırılmıştır. Çünkü doğal sayıların yapıştırılması ile gömme boyutu iki olan sayısal yarıgruplar elde edilir.

Örnek 4.3.3

$$D_1 = \langle 2,3 \rangle = \{0,2,3 \rightarrow\}$$

$$D_2 = \langle 4,5 \rangle = \{0,4,5,8,9,10,12, \rightarrow\}$$

Tamamen yapıştırılmış iki sayısal yarıgrubun yapıştırmasını bulalım.

$$4 \in D_1 \setminus \{2,3\},$$

$$9 \in D_2 \setminus \{4,5\},$$

olmak üzere,

$$D = \langle 16,18,20,27 \rangle$$

sayısal yarıgrubu tamamen yapıştırılmıştır.

$$F(D_1) = 1$$

$$F(D_2) = 11$$

olmak üzere Teorem 4.1.2'den,

$$F(D) = 4.1 + 9.11 + 4.9 = 139$$

Sonuç 4.3.4

Yukarıda verilen tamamen yapıştırma tanımını kullanarak “tamamen yapıştırılmış yarıgruplar hangi durumlarda Arf sayısal yarıgrup olur?” sorusunu yanıtlayalım.

- 1) $D = \langle 1 \rangle$ sayısal yarıgrubunun hem Arf sayısal yarıgrup hem de tamamen yapıştırılmış olduğu açıktır.
- 2) $D = \langle 2, n \rangle, n \in \mathbb{N}^+$ ebeb(2, n) = 1 olmak üzere gömme boyutu 2 olan yarıgruplar tamamen yapıştırılmıştır.

"Kathılığı 2 olan sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgrup olur [15]"

teoreminden yola çıkarak 2. maddenin gerçekleştiği durumlarda da D sayısal yarıgrubu tamamen yapıştırılmış ve Arf sayısal yarıgrup olur.

Örnek 4.3.5

$$D = \langle 2, 3 \rangle = \{0, 2, 3 \rightarrow\}$$

biçimindeki bir tamamen yapıştırılmış yarıgrup aynı zamanda Arf sayısal yarıgruptur.



BÖLÜM V

Bu bölümde RF-matris kavramı verilecektir. İki Arf sayısal yarıgrubun yapıştırılması sonucu oluşan yeni sayısal yarıgruba ait RF-matrisleri bulunacaktır. Ardından yapıştırmada kullanılan Arf sayısal yarıgrupların RF-matrislerinden faydalanarak yapıştırma sonucu oluşan yeni sayısal yarıgrubun RF-matrisleri elde edilecektir. Son olarak RF-matrislerinden faydalanarak sayısal yarıgrupların idealleri elde edilecektir.

RF-MATRİSLER

$G(D)$ 'nin D sayısal yarıgrubunun boşluktaki elemanlarının kümesi olduğunu söylemiştik. $f \in G(D)$ ise f 'nin RF-matrisini yazabiliriz ve $RF(f)$ şeklinde gösteririz.

Tanım 5.1

$PF(D)$ 'nin D sayısal yarıgrubunun sözde-Frobenius sayıları kümesi olduğunu söylemiştik.

Eğer $f \in PF(D)$ ise f 'nin RF-matrislerini yazabiliriz ve $RF(f)$ ile gösterebiliriz. f 'nin RF-matrisleri $i, j = 1, 2, \dots, e$, her i için: $a_{ii} = -1$ ve her $i \neq j$ için $a_{ij} \in \mathbb{N}$ olmak üzere şu şekilde yazılır

$$\sum_{j=1}^e a_{ij} n_j = f$$

$A = (a_{ij})$ matrisi $e \times e$ boyutlu f nin bir RF-matrisidir. [9]. Şimdi RF-matris tanımını bir Arf sayısal yarıgrup üzerinde uygulayalım.

Örnek 5.2

$$D = \langle 3, 4, 5 \rangle = \{0, 3 \rightarrow\}$$

bir Arf sayısal yarıgrup olmak üzere boşluktaki elemanlarının kümesi;

$$G(D) = \{1,2\} \text{ dir.}$$

ve sözde-Frobenius sayılarının kümesi de;

$$PF(D) = \{1,2\} \text{ dir.}$$

$f = 1$ için RF-matrisini yazalım minimal üreteç sistemi 3 elemanlı olduğu için yazacağımız bu matris 3×3 boyutunda olacaktır.

$a_{11} = -1$ olmak üzere;

$$1 = a_{11} \cdot 3 + a_{12} \cdot 4 + a_{13} \cdot 5$$

$$1 = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5$$

$a_{22} = -1$ olmak üzere;

$$1 = a_{21} \cdot 3 + a_{22} \cdot 4 + a_{23} \cdot 5$$

$$1 = 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 5$$

$a_{33} = -1$ olmak üzere;

$$1 = a_{31} \cdot 3 + a_{32} \cdot 4 + a_{33} \cdot 5$$

$$1 = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 5$$

$1 \in PF(D)$ için RF-matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$RF(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

determinantı 1 rankı 3 olan RF-matrisi elde edilir.

Aşağıdaki örnekte verilen Arf sayısal yarıgrupların yapıştırılması ile oluşan sayısal yarıgrupların RF-matrislerini bularak inceleyelim.

5.1 Arf Sayısal Yarıgrupların Yapıştırmasının RF-Matrisleri ile İncelenmesi

Örnek 5.1.1

$$D_1 = \langle 2,5 \rangle = \{0,2,4 \rightarrow\}$$

$$D_2 = \langle 3,4,5 \rangle = \{0,3 \rightarrow\}$$

D_1 ve D_2 Arf sayısal yarıgruplarının bir yapıştırmasını oluşturalım.

$$6 \in D_1 \setminus \{2,5\} , \quad 7 \in D_2 \setminus \{3,4,5\} , \text{ ebob } (6,7) = 1$$

olmak üzere;

$$D = \langle 14,18,24,30,35 \rangle = \{0,14,18,24,28,30,32,35,36,38,42,44, \\ 46,48,49,50,52,53,54,56,58,59,60,62,63,64,65,66,67,68,70,71,72,73,74,76, \rightarrow\}$$

D_1, D_2 Arf sayısal yarıgruplarının bir yapıştırmasıdır. Şimdi sırasıyla D_1, D_2 ve D sayısal yarıgruplarının RF-matrislerini bulalım.

$D_1 = \langle 2,5 \rangle$ sayısal yarıgrubu için;

$$PF(D_1) = \{1,3\}$$

$3 \in PF(D)$ için RF – matrisi,

$$RF(3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$D_2 = \langle 3,4,5 \rangle$ sayısal yarıgrubu için;

$$PF(D_2) = \{1,2\}$$

$1 \in PF(D)$ için RF – matrisi,

$$RF(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$2 \in PF(D)$ için RF – matrisi,

$$RF(2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$D = \langle 14, 18, 24, 30, 35 \rangle$ sayısal yarıgrubu için;

$$PF(D) = \{79, 86\}$$

$79 \in PF(D)$ için RF matrisleri,

$$RF(79) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$RF(79) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$RF(79) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$86 \in PF(D)$ için RF matrisleri,

$$RF(86) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$RF(86) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$RF(86) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Teorem 5.1.2

$$D_1 = \langle n_1, n_2, \dots, n_k \rangle$$

$$D_2 = \langle m_1, m_2, \dots, m_p \rangle$$

$q \in D_1 \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_k\}, r \in D_2 \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ ve $\text{ebob}(q, r) = 1$ olmak üzere q ve r sayıları belirleyelim.

$$D = \langle rn_1, rn_2, \dots, rn_k, qm_1, qm_2, \dots, qm_p \rangle$$

D, D_1 ve D_2 Arf sayısal yarıgruplarının yapıştırılması ile oluşan sayısal yarıgrup olsun. Ve $h_1 \notin D_1, h_2 \notin D_2$ alalım bu durumda $h_1 + q \in D_1, h_2 + r \in D_2$ olsun o halde;

$$h = r.h_1 + qh_2 + qr \notin D$$

olur. Eğer,

$$h_1 + q = \sum_i a_i n_i \text{ ve } h_2 + r = \sum_i a'_i m_i$$

şeklinde yazılır. Buradan da

$$RF(h) = \begin{bmatrix} RF(h_1) & M_2 \\ M_1 & RF(h_2) \end{bmatrix}$$

olur.

Burada her bir i, j için $M_1, m_p \times n_k$ ve $M_2, n_k \times m_p$ tipinde birer matristir. Aynı zamanda ij -ıncı elemanları sırasıyla a_i ve a'_i olan matrislerdir.

İspat. Bknz. [8]

Örnek 5.1.3

$$D_1 = \langle 2, 5 \rangle = \{0, 2, 4 \rightarrow\}$$

$$D_2 = \langle 3, 4, 5 \rangle = \{0, 3 \rightarrow\}$$

$4 \in D_1 \setminus \{2, 5\}, 7 \in D_2 \setminus \{3, 4, 5\}, \text{ebob}(4, 7) = 1$ olmak üzere;

$$D = \langle 12, 16, 20, 14, 35 \rangle$$

D_1 ve D_2 Arf sayısal yarıgruplarının bir yapıştırmasıdır.

$$h = r.h_1 + q.h_2 + qr \notin D$$

$$3 \notin D_1, 2 \notin D_2, 3 + 4 \in D_1, 2 + 7 \in D_2$$

olacak şekilde q, r, h_1, h_2 sayılarını belirleyelim. O halde

$$h = 7.3 + 4.2 + 4.7 = 57 \notin D$$

olur.

$$RF(3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ve,

$$RF(2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğunu bir önceki örneğimizde bulmuştuk o halde,

$$RF(h) = \begin{bmatrix} RF(h_1) & M_2 \\ M_1 & RF(h_2) \end{bmatrix}$$

$$RF(57) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olur.

5.2 Sayısal Yarıgruplar İçindeki İdealler

Tanım 5.2.1.

Bir k sonsuz cismi üzerindeki A vektör uzayı, $\forall x, y, z \in A$ ve $\alpha, \beta \in k$ için,

$$(i) \quad xy = yx$$

$$(ii) \quad x(yz) = (xy)z$$

$$\begin{aligned}
& \text{(iii)} x(y + z) = xy + xz \\
& \text{(iv)} \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \\
& \text{(v)} \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x
\end{aligned}$$

özelliklerini sağlıyorsa, A 'ya değişmeli k – cebiri denir.[18]

Tanım 5.2.2

A ve B , bir k cismi üzerinde k – cebirleri ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun.
 $\forall x, y \in A$ ve $c \in k$ için,

$$\begin{aligned}
& \text{(i)} f(x + y) = f(x) + f(y) \\
& \text{(ii)} f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \\
& \text{(iii)} f(c \cdot x) = c \cdot f(x)
\end{aligned}$$

özelliklerini sağlayan f fonksiyonuna k – cebir homomorfizması denir.[18]

t , k cismi üzerinde bir bilinmeyen olsun. $D = \langle n_1, \dots, n_e \rangle$ sayısal yarıgrubunun $k[D]$ yarıgrup halkası,

$$k[D] := k[t^{n_1}, \dots, t^{n_e}] \subset k[t]$$

olarak tanımlanır.

$k[x_1, \dots, x_e]$, k cismi üzerinde $x_1, \dots, x_e$ bilinmeyenli polinom halkası olsun.

$$\tau: k[x_1, x_2, \dots, x_e] \rightarrow k[D]$$

$$x_i \rightarrow t^{n_i}, i = 1, 2, \dots, e$$

bir örten k – cebiri homomorfizmasıdır.

$$\text{çek}\tau = \{f \in k[x_1, \dots, x_e] \mid \tau(f) = 0\}$$

ideali, $\text{çek}\tau = I_D$ olarak gösterilir.

Tanım 5.2.3. I_D ideale $F[D]$ halkasının tamamlayıcı ideali denir. I_D homojen bir idealdir ve binomlar tarafından üretilir.[9]

Not: $\phi = \prod_{i=1}^e x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^e x_i^{\beta_i}$ binomunu alalım.

$$\phi \in I_D \Leftrightarrow \phi \in \text{çek}\tau$$

$$\Leftrightarrow \tau(\phi) = 0_{k[D]}$$

$$\Leftrightarrow \tau(x_1^{\alpha_1} \dots x_e^{\alpha_e} - x_1^{\beta_1} x_e^{\beta_e}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^{n_1})^{\alpha_1} \dots (t^{n_e})^{\alpha_e} - (t^{n_1})^{\beta_1} \dots (t^{n_e})^{\beta_e} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^{n_1\alpha_1+\dots+n_e\alpha_e} = t^{n_1\beta_1+\dots+n_e\beta_e}$$

$$\Leftrightarrow \sum_i^e n_i \alpha_i = \sum_1^e n_i \beta_i$$

burada, ϕ 'nin derecesi,

$$\text{der}(\phi) = \sum_i^e n_i \alpha_i$$

olur.

Örnek 5.2.4

$D = \langle 4, 10, 11, 13 \rangle$ Arf sayısal yarıgrubunu alalım. Burada,

$n_1 = 4, n_2 = 10, n_3 = 11, n_4 = 13$ olur.

I_D idealinin elemanları

$$\phi \in I_D \Leftrightarrow \sum_i^4 n_i \alpha_i = \sum_1^4 n_i \beta_i$$

şeklinde bulunur.

$$1.4 + 2.11 = 0.10 + 2.13$$

eşitliğinden,

$$n_1\alpha_1 + n_3\alpha_3 = n_2\beta_2 + n_4\beta_4$$

elde edilir. Bu,

$$\phi = x_1^{\alpha_1} x_3^{\alpha_3} - x_2^{\beta_2} x_4^{\beta_4}$$

$$\phi = x_1^1 x_3^2 - x_2^0 x_4^2$$

demektir. Böylece,

$$\phi = x_1^1 x_3^2 - x_4^2 \in I_D$$

bulunur. Aynı şekilde diğer polinomlar da elde edilebilir. Elde edilen bu polinomlar verilen Arf sayısal yarıgrubun ideal kümesinin üreteçlerini oluşturur.

5.3. RF-Matrisler İle İdeallerin Bulunması

Bu bölümde, ideallerin minimal üreteç sistemlerini, ideallerin RF-matrislerini kullanarak elde edeceğiz.

Tanım 5.3.1

$\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{Z}^n$ vektörü olmak üzere, ϑ^+ vektörü $0 \leq i \leq n$ i indis olmak üzere $\vartheta_i \geq 0$ için, ϑ^+ vektörü;

$$\vartheta^+ = (0, \dots, 0, \vartheta_i, 0, \dots, 0)$$

olarak ve ϑ^- vektörü;

$$\vartheta^- = \vartheta^+ - \vartheta$$

olarak tanımlansın. O zaman,

$$\vartheta = \vartheta^+ - \vartheta^-$$

olacağı açıktır.[9]

I_D idealine D sayısal yarıgrubunun idealinin üreteç kümesi diyeceğiz. Aşağıda bir sayısal yarıgrubun idealinin RF-matrisleri ile üreteç kümesini elde etmek için gerekli tanım ve lemmalar verilmiştir.

Lemma 5.3.2

$\vartheta, \vartheta, \dots, \vartheta_e$ vektörleri RF-matrisinin satır vektörleri olsun. Sayısal yarıgrubun üreteç kümesinin idealinin her elemanı aşağıdaki gibi sırasıyla bulunabilir.

$\forall i, j \ 1 \leq i < j \leq e$ için,

$$\vartheta_{ij} = \vartheta_i - \vartheta_j,$$

$$\phi = X^{\vartheta_{ij}^+} - X^{\vartheta_{ij}^-} \in I_D$$

olur.

İspat. Bknz. [9]

Not: $PF'(D) = PF(D) - F(D)$

Tanım: 5.3.3

$D = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ bir Arf sayısal yarıgrup ve $f \in PF'(D)$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ vektörleri $RF(f)$ 'nin satır vektörleri ve $1 \leq i < j \leq k$ için

$a_{ij} = a_i - a_j$ iken $\phi = X^{a_{ij}^+} - X^{a_{ij}^-} \in I_D$ formundaki binom bağıntısına $RF(f) -$ bağıntı veya $RF -$ bağıntı denir.[9]

Örnek 5.3.4

$$D = \langle 3, 16, 17 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12, 15 \rightarrow\}$$

$$PF(D) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$$

$$F(D) = 14$$

$$PF'(D) = PF(D) - F(D) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13\}$$

$$2 \in PF'(D)$$

için $RF(f) -$ bağıntısını bulalım.

Öncelikle $f = 13$ için RF-matrisini yazalım minimal üreteç sistemi 3 elemanlı olduğu için yazacağımız bu matris 3×3 boyutunda olacaktır.

$a_{11} = -1$ olmak üzere;

$$13 = a_{11} \cdot 3 + a_{12} \cdot 16 + a_{13} \cdot 17$$

$$13 = -1.3 + 1.16 + 0.17$$

$a_{22} = -1$ olmak üzere;

$$13 = a_{21}.3 + a_{22}.16 + a_{23}.17$$

$$13 = 4.3 + (-1).16 + 1.17$$

$a_{33} = -1$ olmak üzere;

$$13 = a_{31}.3 + a_{32}.16 + a_{33}.17$$

$$13 = 10.3 + 0.16 + (-1).17$$

$13 \in PF(D)$ için RF-matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$RF(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ vektörleri $RF(f)$ 'nin satır vektörleri ve $1 \leq i < j \leq k$ için,

$$a_{ij} = a_i - a_j \text{ iken } \phi = X^{a_{ij}^+} - X^{a_{ij}^-} \in I_D$$

$$a_{12} = a_1 - a_2$$

$$a_1 = \{-1, 1, 0\}$$

$$a_2 = \{4, -1, 1\}$$

$$a_{12} = \{-1, 1, 0\} - \{4, -1, 1\} = \{-5, 2, -1\}$$

$$a_{12}^+ = \{0, 2, 0\}$$

$$a_{12}^- = \{5, 0, 1\}$$

$$\phi = x_1^0 x_2^2 x_3^0 - x_1^5 x_2^0 x_3^1 \in I_D$$

bağıntısına RF – *bağıntı* denir.

Lemma 5.3.5

$\phi_1, \dots, \phi_s \in I_D$ ve her k için, u ve v monomları x_i/u ve x_j/v olacak şekilde $\phi_k = u - v$ ve $\text{der}(\phi_k) = f + n_i + n_j$ olacak şekilde $f \in PF'(D)$ ve $i < j$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, I_D , RF-bağıntılar tarafından üretilir.

İspat.

$\phi_k = u - v$ binomu, her k için u ve v monomları $i < j$ için $x_i/u, x_j/v$ ve $f \in PF'(D)$ için $\text{der}(\phi_k) = f + n_i + n_j$ olacak şekilde tanımlansın. $u' = \frac{u}{x_j}$ olsun.

Bu durumda,

$$\text{der}(u') = \text{der}\left(\frac{u}{x_j}\right) = \text{der}(u) - \text{der}(x_j)$$

olmasından $\text{der}(u) = (f + n_j) + n_i$ ve $\text{der}(u') = f + n_j$ olur. $\text{der}(v') = f + n_i$ olan bir v' monomu alalım.

$$\text{der}(x_j \cdot v') = \text{der}(x_j) + \text{der}(v') = n_j + (f + n_i)$$

$\psi_k = u - x_j \cdot v'$ binomu için $\text{der}(\psi_k) = (f + n_i) + n_j$ ve ψ_k 'nin yapısı Lemma 5.3.3'deki binomların formunda olduğundan $\psi_k = u - x_j \cdot v'$ bir RF-bağıntıdır.

$$\text{der}\left(\frac{v}{x_j}\right) = f + n_i = \text{der}(v')$$

olmasından dolayı,

$$\frac{v}{x_j} - v' \in I_D$$

elde edilir.

$$\psi_k + x_j \left(\frac{v}{x_j} - v'\right) = u - x_j v' + x_j \left(\frac{v}{x_j} - v'\right) = u - v = \phi_k$$

bulunur Böylece, $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_e)$ maksimal ideal olmak üzere

$$\phi_k = \psi_k + x_j \left(\frac{v}{x_j} - v'\right) \in \psi_k + \mathfrak{m}I_D$$

bulunur. Buradan,

$$(\phi_1, \dots, \phi_m) + mI_D = (\psi_1, \dots, \psi_m) + mI_D$$

yazabiliriz. Nakayama Yardımcı Teoreminden [6]

$$I_D = (\psi_1, \dots, \psi_m)$$

elde edilir.

Örnek 5.3.6

$$D_1 = \langle 2, 5 \rangle$$

$$D_2 = \langle 3, 4, 5 \rangle$$

Arf sayısal yarıgruplarının ve bunların yapıştırılması ile oluşmuş

$$D = \langle 14, 18, 24, 30, 35 \rangle$$

sayısal yarıgruplarının ideallerini bulalım.

$D_1 = \langle 2, 5 \rangle$ için sözde-Frobenius kümesi,

$$PF(D_1) = \{3\}$$

$3 \in PF(D_1)$ için RF-matrisinin

$$RF(3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğunu önceki örneğimizde göstermiştik.

$\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ RF-matrisinin satır vektörleri olmak üzere;

$$\vartheta_1 = (-1, 1)$$

$$\vartheta_2 = (4, -1)$$

$$\vartheta_{12} = (-1, 1) - (4, -1) = (-5, 2),$$

$$\vartheta_{12}^+ = (0, 2)$$

$$\vartheta_{12}^- = \vartheta_{12}^+ - \vartheta_{12} = (5, 0)$$

Burada RF-matris 2×2 boyutunda olduğu için idealin yalnız bir elemanı olacaktır. Şimdi idealimizin elemanını bulalım.

$$\phi^{\vartheta_{12}^+} = x^0 y^2$$

$$\phi^{\vartheta_{12}^-} = x^5 y^0$$

$$\phi_{12} = \phi^{\vartheta_{12}^+} - \phi^{\vartheta_{12}^-} = y^2 - x^5 \in I_{D_1}$$

olarak bulunur.

$D_2 = \langle 3, 4, 5 \rangle$ için sözde-Frobenius kümesi,

$$PF(D) = \{1, 2\}$$

$2 \in PF(D_2)$ için RF-matrisi,

$$RF(2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ RF-matrisin satır vektörleri olmak üzere;

D_2 sayısal yarıgrubunun RF(2) için ideallerini bulalım:

$$\vartheta_1 = (-1, 0, 1)$$

$$\vartheta_2 = (2, -1, 0)$$

$$\vartheta_3 = (1, 1, -1)$$

satır vektörleri olmak üzere;

$$\vartheta_{12} = (-1, 0, 1) - (2, -1, 0) = (-3, 1, 1)$$

elde edilir.

$$\vartheta_{12}^+ = (0, 1, 1)$$

$$\vartheta_{12}^- = \vartheta_{12}^+ - \vartheta_{12}$$

$$\vartheta_{12}^- = (3, 0, 0) \text{ elde edilir.}$$

Buradan,

$$\phi^{\vartheta_{12}^+} = yz$$

$$\phi^{\vartheta_{12}^-} = x^3$$

$$\phi_{12} = \phi^{\vartheta_{12}^+} - \phi^{\vartheta_{12}^-} = yz - x^3 \in I_{D_2}$$

olarak bulunur.

İşlemleri sırası ile devam ettirirsek D_2 sayısal yarigrubuna ait diğer idealleri de aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\phi_{13} = \phi^{\vartheta_{13}^+} - \phi^{\vartheta_{13}^-} = z^2 - y \in I_{D_2}$$

$$\phi_{23} = \phi^{\vartheta_{23}^+} - \phi^{\vartheta_{23}^-} = x^3z - y^2 \in I_{D_2}$$

olarak bulunur.

Bulduğumuz bu ideal elemanları aynı zamanda bu ideallerin üreteç kümesini oluşturur ve şöyle yazılır;

$D_1 = \langle 2,5 \rangle$ için,

$$I_{D_1} = \langle y^2 - x^5 \rangle$$

$D_2 = \langle 3,4,5 \rangle$ için,

$$I_{D_2} = \langle yz - x^3, z^2 - y, x^3z - y^2 \rangle \text{ ve}$$

$D = \langle 14,18,24,30,35 \rangle$ için,

$$I_D = \langle y^3z^2 - x^5, z^3 - x^5, yzw - x^5, zw - y^3, 1 - y^2z, yw - z^2 \rangle .$$

BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Bu çalışmada genel olarak sayısal yarıgrupların bazı özellikleri Arf sayısal yarıgruplar için uygulanmış ve elde edilen sonuçlar yazılmıştır. Sayısal yarıgruplarda yapıştırma kavramını Arf sayısal yarıgruplara uyarlayarak örneklendirilmiş ve “Yapıştırmanın sonucu hangi durumlarda Arf sayısal yarıgrup olur?” sorusuna cevaplar bulunmuş teoremler halinde sunulmuştur. Arf sayısal yarıgrupların RF-matrisleri elde edilmiştir İki Arf sayısal yarıgrupun yapıştırılması sonucu oluşan yeni sayısal yarıgruba ait RF-matrisler bulunmuştur. Ardından yapıştırmada kullanılan Arf sayısal yarıgrupların RF-matrislerinden faydalananarak yapıştırma sonucu oluşan yeni sayısal yarıgrupun RF-matrisleri elde edilmiştir ve son olarak RF-matrislerinden faydalananarak sayısal yarıgrupların idealleri elde edilerek çalışmamız bitirilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] M Barucci, V., Dobbs, D. E., Fontana, M. 1997. Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domain. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 598:13-25.
- [2] Herzog, J. (1970). Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings. *Manuscripta mathematica*, 3(2), 175-193.
- [3] Rosales, J. C. 2001. *Semigrupos numericos*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Spain.
- [4] Rosales, J. C. (1997, September). On Presentations of Subsemigroups of n . In *Semigroup Forum* 55(2), 152-159. Springer-Verlag.
- [5] Rosales, J. C., García-Sánchez, P. A. (1995). On complete intersection affine semigroups. *Communications in Algebra*, 23(14), 5395-5412.
- [6] K. G. Fischer, W. Morris, J. Shapiro, Affine semigroup rings that are complete intersections, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997), 3137–3145.
- [7] RF-matrices were first developed by Alessio Moscariello in 2016
- [8] Eto, Kazufumi, 2017. on Row-Factorization matrices, *Journal of Algebra, Number Theory: Advances and applications*, 17(2).
- [9] Ayşe Çalışkan in master's thesis mentioned about RF-matrices in 2020
- [10] Yılmaz, K., The Gluing Of a Numerical Semigroup Investigation with RF-matrices, Master's Thesis, Gaziantep Institute of Science, Gaziantep, Turkey, (2021).
- [11] Rosales, J. C., García-Sánchez, P. A. (2009). *Numerical semigroups* (20). Springer Science & Business Media.
- [12] Rosales, J. C., Branco, M. B. (2011, December). The Frobenius problem for numerical semigroups with multiplicity four. In *Semigroup Forum* 83(3), 468-478. Springer-Verlag.
- [13] Rosales J. C., Branco M. B. 2002. Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups. *J. Pure Appl. Algebra*, 171 (2–3): 303–314
- [14] C. Arf, Une interpretation algebrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algebrique, *Proc. London Math. Soc., Series 2*, 50 (1949), 256-287.

- [15] H.İ.Karakaş, Arf Numerical Semigroup with Multiplicity 9 and 10. Springer INdAM Series, 2020, Cilt 40.
- [16] Süer, M., A Class of Arf Numerical Semigroups, PhD THESIS (2013), Dicle University Faculty of Science, Diyarbakır.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Damla ÇETİN

ÖĞRENİM DURUMU

Derece Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Gaziantep Üniversitesi	2024
Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi Ahmet	2016
Lise	Şehit Latif Keçeci Anadolu Öğretmen Lisesi	2011

YAYINLAR VE BİLDİRİLER

1. Bilsel International World Science and Reserch Congress. Gluing of Arf Numerical Semigroups and Ideals.