

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

GÜLŞAH BAHAR

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ KATLILIĞININ
RF-MATRİSLERİ İLE İNCELENMESİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜLŞAH BAHAR
OCAK 2024

**ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ KATLILIĞININ
RF-MATRİSLERİYLE İNCELENMESİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Belgin ÖZER

Gülşah BAHAR

Ocak 2024

©2024[Gaziantep Üniversitesi]

ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ KATLILIĞININ

RF-MATRİSLERİ İLE İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, **Gülşah BAHAR** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölüm'ünde** Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Çiğdem AYKAÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Matematik Bölüm Başkanı

.....

Doç. Dr. Belgin ÖZER
Danışman, Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Sınav Tarihi: 05 Ocak 2024

Jüri Üyeleri:

Doç. Dr. Belgin ÖZER
Gaziantep Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Vakkas ULUÇAY
Kilis 7 Aralık Üniversitesi

.....

Dr. Öğr. Üyesi Sultan ERDUR
Gaziantep Üniversitesi

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Gülşah BAHAR

ABSTRACT

MULTIPLICITY OF ARF NUMERICAL SEMIGROUPS INVESTIGATION WITH RF-MATRICES

BAHAR, Gülşah
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. Belgin ÖZER
January 2024
50 pages

In this study, basic information about numerical semigroups and Arf numerical semigroups is given. It is examined how Arf numerical semigroups are obtained with the help of conductors. The necessary propositions for obtaining Arf numerical semigroups with multiplicity up to 10 with conductors are given. RF-matrices of the obtained Arf numerical semigroups are found. By decomposing these RF-matrices into row vectors, generator sets of ideals of Arf numerical semigroups were obtained. All these studies were supported by GAP program and codes.

Key Words: Numerical Semigroup, Arf Numerical Semigroup, Sözdé-Frobenius
Number, RF-Matrices.

ÖZET

ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ KATLILIĞININ RF-MATRİSLERİYLE İNCELENMESİ

BAHAR, Gülşah
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Doç.Dr. Belgin ÖZER
Ocak 2024
50 sayfa

Bu çalışmada sayısal yarıgruplar ve Arf sayısal yarıgruplar ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Arf sayısal yarıgruplarının iletkenler yardımıyla nasıl elde edildiği incelenmiştir. Katlılığı 10'a kadar olan Arf sayısal yarıgruplarını iletkenler ile elde edebilmek için gerekli önermeler verilmiştir. Elde edilen Arf sayısal yarıgrupların RF-matrisleri bulunmuştur. Bulunan bu RF-matrisleri satır vektörlerine ayrılarak Arf sayısal yarıgrupların ideallerinin üreteç kümeleri elde edilmiştir. Yapılan bütün bu çalışmalar GAP programı ve kodlarıyla desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sayısal Yarıgrup, Arf Sayısal Yarıgrup, Sözde-Frobenius Sayısı, RF-Matrisleri.



“Canum aileme”

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr. Belgin ÖZER'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, preparasyonunda ve teşhislerinde desteklerini benden esirgemeyen değerli arkadaşlarım Fatih ESER ve Damla ÇETİN'e çok teşekkür ederim.

Bu çalışmada maddi destek sağlayan Gaziantep Üniversitesi BAP Yönetim Birimine (3678076 no'lu proje) teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca daima beni destekleyip yanımda olan olan biricik annem Songül BAHAR ve babam Davut BAHAR'a aynı zamanda her zaman arkamda duran abim Serhat BAHAR ve kardeşim Mustafa BAHAR'a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen, sayın Prof. Dr. Pedro Garcia SANCHEZ 'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ABSTRACT	i
ÖZET.....	ii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
SEMBOLLER LİSTESİ.....	vi
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
BÖLÜM 3 ARF SAYISAL YARIGRUPLAR	14
3.1 ARF SAYISAL YARIGRUPLAR	14
3.2 ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ KATLILIĞI.....	16
BÖLÜM 4 ARF SAYISAL YARIGRUPLARIN RF-MATRİSLERİ	29
4.1 ARF SAYISAL YARIGRUPLARDA RF-MATRİSLERİ	29
BÖLÜM 5 ARF SAYISAL YARIGRUPLARIN İDEALLERİ	37
5.1 RF-MATRİSLERİ İLE İDEALLERİN HESAPLANMASI	37
5.2 RF-BAĞINTILAR.....	40
BÖLÜM 6 SONUÇLAR	47
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ.....	50

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi (Negatif olmayan tam sayılar kümesi)
G	Sayısal Yarıgrup
$\langle g_1, \dots, g_n \rangle$	$\{g_1, \dots, g_n\}$ tarafından üretilen bir sayısal yarıgrup
$m(G)$	G' nin katlılığı
$e(G)$	G' nin gömme boyutu
$g(G)$	G' nin cinsi (Boşluk kümesinin eleman sayısı)
$H(G)$	G' nin boşluk kümesi
$t(G)$	G' nin tipi (Sözde – Frobenius'un eleman sayısı)
$F(G)$	G' nin Frobenius sayısı
$PF(G)$	G' nin Sözde – Frobenius sayısı
$PF'(G)$	Sözde-Frobenius – Frobenius ($PF(G) - F(G)$)
$Ap(G, x)$	x sayısına göre Apery kümesi
$\#(G)$	Bir kümenin eleman sayısı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Sayısal yarıgrup fikri basit bir kavram olsa da, çözümü olmayan sorunları ortaya çıkarır. Bu durum 19. Yüzyıl matematikçileri Ferdinand Frobenius ve James Joseph Sylvester'in dikkatini çekmiştir. Tarihsel olarak "Frobenius madeni para problemi" olarak bilinen problem aslında "Ortak böleni olmayan madeni paralar kullanılarak elde edilemeyecek en büyük para miktarı nedir?" sorusuyla ifade ediliyordu. Kısaca, " a ve b doğal sayılar olmak üzere, p ve q 1'den büyük aralarında asal sayılar olsun; $ap + bq$ doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilemeyen en büyük tam sayı kaçtır? Bu soru Frobenius problemi olarak bilinmektedir. Bu problemin p ve q gibi iki sayı için çözümü; $pq - p - q$ olarak belirtilir. Bu sayı $F(G)$ ile gösterilir [10]. Böyle iki sayı için $[0, F(G)]$ aralığındaki sayılardan p ve q 'nın doğrusal kombinasyonu olarak kaç tam sayının yazılıp yazılamayacağı belirtilir ve Sylvester (1884) bu teoriyi kanıtlar.[12] Brauer (1942) [3] çalışmasında Frobenius problemine yer vermiş ve 1958-1978 yılları arasında birçok bilim insanı bu konuda çeşitli araştırmalar yapmıştır.

Sayısal yarıgruplar bir süre sonra cebirde yeniden önem kazanmış ve özellikle cebirsel geometride uygulama alanı bulmuştur.

Du Val [15] İstanbul Üniversitesi'nde Jacobian algoritması ve cebirsel bir dalın çokluk karesi üzerine makalesini sunarken yaptığı geometrik yaklaşımın cebirsel bir ifadesi olup olmadığını sordu. Du Val'in dersine katılan Arf, Du Val'in karakterlerinin cebirsel yollarla hesaplanabileceğini söyledi ve bir hafta sonra bunun nasıl yapılacağını gösterdi. Sonuçlar [2]'de yayınlandı ve daha sonra bu karakterler bir eğrinin Arf karakterleri olarak adlandırıldı. Arf'in fikri Lipman'ın daha sonra yayınladığı [9]'da verilen eğrilerin koordinat halkasının Arf halka kapanışı olarak adlandırdığı şeyi ve ardından onun değer yarıgrubunu (ki bu bir Arf sayısal

yarıgrubudur) hesaplamaktı. Bu yarıgrubun minimal üreteçlerine Arf karakterleri deniliyor.

Günümüz matematikçilerinin oldukça ilgisini çeken Arf sayısal yarıgrupları üzerine çalışmalar devam etmektedir.

Arf sayısal yarıgrupları her zaman maksimal gömme boyutuna sahiptir. Maksimal gömme boyutuna sahip olmak, üreteçteki en küçük eleman ile üreteçteki eleman sayısının eşit olduğu anlamına gelir. Üreteçteki en küçük eleman ise bizlere yarıgrubun katlılığını vermektedir.

Bu çalışmada yukarda verilen bilgilerin ışığında Arf sayısal yarıgrupları üzerinde çalışmalar yapılacaktır.

2. Bölüm’de, bir grubun sayısal yarıgrup olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilecektir. Bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısı, boşluk kümesi, Sözde-Frobenius kümesi gibi bazı önemli temel tanım ve teoremlerden bahsedilecektir.

3. Bölüm’de bir sayısal yarıgrubun Arf sayısal yarıgrup olabilmesi için gerekli olan tanım ve teoremler verilecektir. Arf sayısal yarıgruplarının yapısı, katlılığı ve nasıl elde edildiği açıklanacaktır. İletken ve Frobenius sayısı kullanılarak 10 katlılığa kadar olan Arf sayısal yarıgruplarının nasıl yazılabileceği gösterilecektir.

4. Bölüm’de herhangi bir Arf sayısal yarıgrubunun sözde-Frobenius kümesinin elemanları kullanılarak RF (Satır Faktörizasyon)-matrisinin nasıl elde edilebileceği açıklanacaktır.

5. Bölüm’de Arf sayısal yarıgrubunun ideallerinin bulunabilmesi için öncelikle ideal kavramının ne olduğundan bahsedilecektir. Bir Arf sayısal yarıgrubunun ideallerinin nasıl bulunabileceği açıklanacaktır. Daha sonra elde edilen RF-matrisi satır vektörlerine ayrılacak ve RF-bağıntılar kullanılarak Arf sayısal yarıgrubun idealleri hesaplanacaktır.

6. Bölüm’de Arf sayısal yarıgrupları üzerinde yapmış olduğumuz bütün çalışmalar özetlenerek verilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde gerekli olan temel tanım ve teoremler [1] [6] ve [11]'de yer almaktadır.

Tanım 2.1. $B \neq \emptyset$ bir küme olsun. $B \times B$ 'den B 'ye tanımlı bir

$$\odot : B \times B \rightarrow B$$

$$(x, y) \rightarrow x \odot y$$

fonksiyonuna, B üzerinde bir *ikili işlem* denir.

Örnek 2.2. $X = \mathbb{N}$ alalım.

$$\odot : X \times X \rightarrow X$$

$$x \odot y = 3 + xy + x + y$$

olarak tanımlanan işlem bir ikili işlemdir. $x, y \in X$ ise $x = 0$ ve $y = 0$ alalım.

$$x \odot y = 3 + xy + x + y \Rightarrow 0 \odot 0 = 3 + 0.0 + 0 + 0 = 3 \in X = \mathbb{N}$$

olup alınan en küçük elemanın işleme girmesiyle birlikte sonuç tekrar doğal sayılar kümesi üzerinde olduğundan dolayı verilen işlem bir ikili işlemdir.

Tanım 2.3. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ eşitliği sağlanıyorsa $\odot$ ikili işleminin *birleşme özelliği* vardır.

Tanım 2.4. Eğer $\forall x \in X$ için $x \odot g = g \odot x = x$ olacak şekilde bir $g \in B$ varsa g elemanı $\odot$ ikili işleminin birim elemanı olarak tanımlanır.

Tanım 2.5. $B \neq \emptyset$ bir küme ve " $\odot$ ", B üzerinde bir ikili işlem olsun. Üzerinde ikili işlem tanımlanan kümelere *cebirsel yapı* denir. Cebirsel yapılar $(B, \odot)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6. $B \neq \emptyset$ bir küme ve " $\otimes$ ", B üzerinde bir ikili işlem olsun. İkili işlemin birleşme özelliğini sağlayan cebirsel yapılara *yarıgrup* denir.

Tanım 2.7. B bir yarıgrup olsun. B yarıgrubu birim elemanlı bir yarıgrupsa eğer B 'ye *monoid* denir.

Tanım 2.8. B boştan farklı bir küme olsun. $G \subseteq A$ olacak şekilde A monoidi alalım. Eğer $0 \in G$ ve $a, b \in G$ için $a + b \in G$ olur ise G kümesine A kümesinin *alt monoidi* denir.

Tanım 2.9. Eğer G alt monoidi için;

- (i) $0 \in G$
- (ii) $\forall x, y \in G$ için $x + y \in G$
- (iii) $\mathbb{N} \setminus G$ sonlu

İfadeleri sağlanıyorsa G 'ye *sayısal yarıgrup* denir.

G bir sayısal yarıgrup olmak üzere; $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_k \in G$ için,

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle = \sum_{m=1}^k x_m p_m : p_m \in \mathbb{N}$$

olarak yazılır.

Tanım 2.10. G bir yarıgrup olsun. S' de G 'nin boştan farklı bir alt kümesi ise G 'nin S' yi kapsayan en küçük alt yarıgrubuna S' nin *ürettiği yarıgrup* denir. O halde S kümesine G kümesinin üreteç kümesi denir. $G = \langle S \rangle$ ile gösterilir. Eğer S üreteç kümesinden daha küçük bir üreteç kümesi bulunamıyorsa o zaman S kümesi G 'nin *minimal üreteç* kümesi olur.

Lemma 2.11. G , $\mathbb{N}$ 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\langle G \rangle$ 'nin bir sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul $ebob(\langle G \rangle) = 1$ olmasıdır.

İspat. $d = ebob(\langle G \rangle)$ olsun. Açıktır ki, eğer g , $\langle G \rangle$ 'ye aitse, o zaman $d|g$. $\langle G \rangle$ sayısal bir yarıgrubu, $\mathbb{N} \setminus \langle G \rangle$ sonludur ve dolayısıyla $d|g$ olacak şekilde pozitif bir x tam sayısı vardır ve $d|x + 1$. Bu da d 'yi bir olmaya zorlar.

Tersi için $\mathbb{N} \setminus \langle G \rangle$ 'nin sonlu olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $ebob(\langle G \rangle) = 1$ olduğundan, $z_1, \dots, z_n$ ve $a_1, \dots, a_n \in G$ tam sayılarının kümede olduğunu varsayalım öyle ki $z_1 a_1 + \dots + z_n a_n = 1$ olsun. Burada z_i negatif terimlerini sağ tarafa alırsak, $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere,

$$z_{i_1} a_{i_1} + \dots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \dots - z_{j_l} a_{j_l}$$

eşitliği elde edilir.

Dolayısıyla şöyle bir durum vardır ki $g \in \langle G \rangle$ öyle ki $g + 1 \in \langle G \rangle$ olsun. $n \in \langle G \rangle$ olduğunda $n \geq (g - 1)g + (g - 1)$ olduğunu ispatlayacağız. $q, r \in \mathbb{Z}$ olsun öyle ki $0 \leq r < g$ iken $n = q \cdot g + r$ olsun. Bu durumda, $q \geq g - 1 \geq r$ olduğunda $n \geq (g - 1)g + (g - 1)$ olduğu sonucuna varırız.

Buradan

$$n = (rg + r) + (q - r) = r(g + 1) + (q - r)g \in \langle G \rangle$$

elde edilir.

Örnek 2.12.

$$G = \langle 2, 5, 7 \rangle$$

tarafından üretilen küme bir sayısal yarıgruptur.

Tanım 2.9.'dan $G = \langle 2, 5, 7 \rangle = \{2p_1 + 5p_2 + 13p_3; p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}\}$ olarak yazılabilir. Buradan

$$p_1, p_2, p_3 = 0 \text{ için } 0 \in G$$

$$p_1 = 1, p_2 = 0 \text{ ve } p_3 = 0 \text{ için } 2 \in G$$

$$p_1 = 2, p_2 = 0 \text{ ve } p_3 = 0 \text{ için } 4 \in G$$

$$p_1 = 0, p_2 = 1 \text{ ve } p_3 = 0 \text{ için } 5 \in G$$

$$p_1 = 3, p_2 = 0 \text{ ve } p_3 = 0 \text{ için } 6 \in G$$

Benzer şekilde doğal sayıların elemanları işleme girdiğinde $G = \langle 2, 5, 7 \rangle = \{0, 2, 4, \dots\}$ kümesi elde edilir. Bu elde edilen küme sayısal yarıgrup mudur?

$0 \in G$ olduğu açıkça görülmektedir. Kümeden alınan herhangi iki elemanın toplamı yine küme içerisinde. Yani $\forall x, y \in G$ için $x + y \in G$ olduğu açıktır.

$\mathbb{N} \setminus G = \{0,1,2,3,\dots\} \setminus \{0,2,4,\dots\} = \{1,3\}$ olup sonlu olduğu açıktır. Bu durumda sayısal yarıgrup olabilmesi için verilen üç şart sağlandığından elde ettiğimiz G kümesi sayısal yarıgruptur.

Aynı zamanda G 'nin sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşulu sağlaması gerekmektedir. Bu durumda G 'nin minimal üreteç sistemindeki elemanların en büyük ortak böleninin bir olup olmadığına bakılması gerekmektedir.

$$G = \langle 2,5,7 \rangle \Rightarrow \text{ebob}\{2,5,7\} = 1$$

olup G bir sayısal gruptur.

Bir kümenin sayısal yarıgrup olduğunu doğrulayan GAP program kodları aşağıda verilmiştir.

<code>gap > LoadPackage("num");</code>
<code>true</code>
<code>gap > S := NumericalSemigroup(2,5,7);;</code>
<code>gap > IsNumericalSemigroup(S);</code>
<code>true</code>

Not 2.13. Örnek 2.12.de verilen $G = \langle 2,5,7 \rangle = \{0,2,4, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubundaki " $\rightarrow$ " notasyonu küme içerisinde 4 rakamından sonra tüm tam sayıların G sayısal yarıgrubunun elemanı olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.14. $G = \langle 2,4,8 \rangle = \{0,2,4,6,8,\dots\}$ olsun. $\text{Ebob}(2,4,8) \neq 1$ olduğundan dolayı $\mathbb{N} \setminus G$ kümesi sonlu bir küme değildir. O halde $G = \langle 2,4,8 \rangle$ kümesi bir sayısal yarıgrup değildir.

Tanım 2.15. G bir sayısal yarıgrup olsun. Tanım 2.9. (iii) seçeneğinde belirttiğimiz $\mathbb{N} \setminus G$ kümesine G sayısal yarıgrubunun *boşlukları* olarak adlandırılır ve $S(G)$ ile

gösterilir. Boşluk kümesinin eleman sayısına da G 'nin *cinsi* denir ve $g(G)$ ile gösterilir.

Örnek 2.16.

$$G = \langle 2,5,7 \rangle = \{0,2,4, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrup olsun.

$\mathbb{N} \setminus G = \{0,1,2,3,\dots\} \setminus \{0,2,4,\dots\} = \{1,3\}$ olarak bulunur. O halde G 'nin boşluklarının kümesi $S(G) = \{1,3\}$ olup 2 elemanlı olduğundan sayısal yarıgrupunun cinsinin $g(G) = 2$ olduğu açıktır.

Sayısal yarıgrupun boşluklarını bulabilmek için kullanılan kodlar;

<i>gap</i> > <i>LoadPackage</i> ("num");
<i>true</i>
<i>gap</i> > <i>S</i> := <i>NumericalSemigroup</i> (2,5,7);;
<i>gap</i> > <i>Gaps</i> (<i>NumericalSemigroup</i> (2,5,7));
[1, 3]

Tanım 2.17. Tanım 2.10.'da ifade ettiğimiz sayısal yarıgrupun *katlılığı*, bir üreteç kümesinin en küçük elemanı olarak tanımlanır ve $m(G)$ ile gösterilir. Aynı zamanda sayısal yarıgrubu üreten minimal üreteç kümesinin eleman sayısına, sayısal yarıgrupun *gömme boyutu* denir ve $e(G)$ ile gösterilir.

Örnek 2.18. $G = \{0,4,5,8,9,10,12, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrupunun minimal üreteç sistemi $G = \{4,5,10\} = \langle 4,5,10 \rangle$ 'dir. Minimal üreteç sisteminin eleman sayısı 3 olduğundan $e(G) = 3$ olur. Aynı zamanda G 'nin en küçük elemanı 4 olduğundan dolayı G sayısal yarıgrupunun katlılığı $m(G) = 4$ olur.

GAP program kodları ile katlılık bulma;

<i>gap</i> > <i>LoadPackage</i> ("num");
--

<i>true</i>
<i>gap > S := NumericalSemigroup(4,5,10);;</i>
<i>gap > Multiplicity(S);</i>
4

Tanım 2.19. G sayısal yarıgrubunun katlılığı ve gömme boyutu birbirine eşit ise yani $m(G) = e(G)$ oluyorsa, G sayısal yarıgrubuna *maksimal gömme boyutlu* sayısal yarıgrup (*MGB-sayısal yarıgrup*) denir.[16]

Örnek 2.20. $G = \langle 3,8,10 \rangle = \{0,3,6,8, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun katlılığı $m(G) = 3$ ve gömme boyutu $e(G) = 3$ olduğundan dolayı *maksimal gömme boyutlu* sayısal yarıgruptur.

GAP kodları yardımıyla gömme boyutunu belirlemek için;

<i>gap > LoadPackage("num");</i>
<i>true</i>
<i>gap > S := NumericalSemigroup(3,8,10);;</i>
<i>gap > EmbeddingDimension(S);</i>
3

Tanım 2.21. G sayısal yarıgrup ve $m \neq 0 \in G$ olmak üzere,

$$Ap(G, m) = \{g \in G : g - m \notin G\}$$

şeklinde ifade edilen kümeye m 'nin *Apery kümesi* denir ve $Ap(G, m)$ ile gösterilir.

Örnek 2.22.

$$G = \langle 3,4,7 \rangle = \{0,3,4,6, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrup olsun,

- $g = 3 \in G$ için

$Ap(G, 3) = \{g \in G : g - 3 \notin G\}$ kümesini bulalım:

$$0 - 3 \notin G \Rightarrow 0 \in Ap(G, 3)$$

$$3 - 3 \in G \Rightarrow 3 \notin Ap(G, 3)$$

$$4 - 3 \notin G \Rightarrow 4 \in Ap(G, 3)$$

$$6 - 3 \in G \Rightarrow 6 \notin Ap(G, 3)$$

$$7 - 3 \in G \Rightarrow 7 \notin Ap(G, 3)$$

$$8 - 3 \notin G \Rightarrow 8 \in Ap(G, 3)$$

8'den büyük olan tüm tam sayılar G sayısal yarıgrubunun elemanı olacaktır. O halde,

$$Ap(G, 3) = \{0, 4, 8\}$$

olur.

G sayısal yarıgrubunun diğer tüm elemanları için aynı işlemler yapılarak Apery kümeleri yazılabilir.

GAP programı kullanılarak bütün elemanların Apery kümeleri yazılabilir;

<i>gap > LoadPackage("num");</i>
<i>true</i>
<i>gap > S := NumericalSemigroup(3,4,7);;</i>
<i>gap > AperyList(S, 3);</i>
[0, 4, 8]
<i>gap > AperyList(S, 4);</i>
[0, 9, 6, 3]
<i>gap > AperyList(S, 6);</i>
[0, 7, 8, 3, 4, 11]

Tanım 2.23. G sayısal yarıgrup olsun. $\mathbb{N} \setminus G$ olarak ifade ettiğimiz boşluk kümesindeki en büyük elemana *Frobenius sayısı* denir ve $F(G)$ ile gösterilir.

$$F(G) = \max(\mathbb{N} \setminus G)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.24. $G = \langle 3,8,10 \rangle = \{0,3,6,8, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için Frobenius sayısı;
 $\mathbb{N} \setminus G = \{1,2,4,5,7\}$ kümesi G kümesinin boşluklarının elemanlarından oluşmaktadır.
Elde edilen bu kümenin en büyük elemanı olan 7 verilen sayısal yarıgrubun Frobenius sayısıdır yani $F(G) = 7$ 'dir.

GAP program kodları;

<i>gap > LoadPackage("num");</i>
<i>true</i>
<i>gap > S:= NumericalSemigroup(3,8,10);;</i>
<i>gap > FrobeniusNumber(S);</i>
7

Önerme 2.25. $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$ ve a, b sayıları aralarında asal sayılar yani $\text{ebob}(a, b) = 1$ olsun. Bu durumda,

- 1) $F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b$
- 2) $g(\langle a, b \rangle) = \frac{ab-a-b+1}{2} = \frac{F(\langle a, b \rangle)+1}{2}$

ifadeleri elde edilir.[11]

Örnek 2.26. $G = \langle 2,41 \rangle$ üreteç kümesine sahip sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısını ve cinsini belirleyebilmek için kümenin elemanlarını tek tek yazmak gerekmektedir. Fakat bu küme uzun bir küme olduğundan elemanları yazmak yerine Önerme 2.25'ten yararlanırsak, $a = 2$ ve $b = 41$ olmak üzere,

$$F(\langle a, b \rangle) = 2.41 - 2 - 41 = 39$$

olarak bulunur. Benzer şekilde değerler yerine yazılarak sayısal yarıgrubun cinsi,

$$g(\langle a, b \rangle) = \frac{39 + 1}{2} = 20$$

olarak hesaplanabilir.

Gömme boyutu 2 olan sayısal yarıgruplar için sayısal yarıgrupun cinsi

genellikle $g(G) = \frac{F(G)+1}{2}$ olarak ifade edilebilir (burada $F(G)$ 'nin her zaman bir tek sayı olduğu görülmektedir). Bu durum daha yüksek gömme boyutuna sahip sayısal yarıgruplar için genellikle geçerli değildir.

Eğer $g \in G$ ise o zaman $(F(G) - g) \notin G$ olur. Bu da bize $g(G) = \frac{F(G)+1}{2}$

eşitliğinin aslında bir eşitsizlik olduğunu gösterir.

Önerme 2.26. G bir sayısal yarıgrup olmak üzere,

$$g(G) \geq \frac{F(G) + 1}{2}$$

olarak gösterilir.[11]

Eşitliğin sağlandığı sayısal yarıgruplar 'en az' boşluğa sahip olan sayısal yarıgruplardır.

Tanım 2.27. Bir sayısal yarıgrup olan G ve bu yarıgrupun Frobenius sayısı $F(G)$ olsun. O zaman

$$n(G) = \#(\{0, 1, 2, \dots, F(G)\} \cap G)$$

sayısı G 'nin *belirteç sayısı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.28. $F(G)$ ve $n(G)$ sırasıyla, G 'nin Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $G = \{0 = g_0, g_1, \dots, g_{r-1}, g_r, \dots, g_{n(g)} = F(G) + 1, \rightarrow \dots\}$ şeklinde verilsin. Burada $g_i < g_{i+1}$ olup " $\rightarrow$ " $F(G) + 1$ sayısından büyük olan her tam sayının G 'ye ait olduğunu gösterir. $F(G) + 1$ tam sayısına G 'nin *iletkeni* denir

Örnek 2.29. $G = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6, 8, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrupunun, Frobenius sayısının $F(G) = 7$ olduğunu Örnek 2.24'te belirttik. O halde

$$n(G) = \#(\{0, 1, 2, \dots, F(G)\} \cap G) \Rightarrow n(G) = \#(\{0, 1, 2, \dots, 7\} \cap \{0, 3, 6, 8, \rightarrow\})$$

olup $n(G) = \#(0, 3, 6) = 3$ olarak bulunur.

Aynı zamanda Frobenius sayısının bir fazlası bize sayısal yarıgrupun iletkenini verir.

$$F(G) + 1 = 7 + 1 = 8$$

O halde 8, G sayısal yarıgrubunun iletkenidir.

İletkenin GAP programı ile bulunması;

<i>gap > LoadPackage("num");</i>
<i>true</i>
<i>gap > S := NumericalSemigroup(3,8,10);;</i>
<i>gap > Conductor(S);</i>
8

Tanım 2.30. G bir sayısal yarıgrup olsun ve $x \notin G$ olacak şekilde bir x tam sayısı alalım. Bu durumda $g \in G \setminus \{0\}$ ve $x + g \in G$ oluyorsa x tam sayısına G 'nin bir *sözde-Frobenius* sayısı denir. G 'nin tüm sözde-Frobenius sayılarının kümesi $PF(G)$ ile gösterilir. $PF(G)$ 'nin eleman sayısına G 'nin *tipi* denir ve $t(G)$ ile gösterilir. Bu sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı, Sözde-Frobenius sayılarının kümesinin en büyük elemanıdır.

Örnek 2.31. $G = \langle 3,8,10 \rangle = \{0,3,6,8, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun Sözde-Frobenius sayılarını bulmak için boşluk kümesindeki elemanlar ile sayısal yarıgrubun üreteç kümesindeki bütün elemanları sırasıyla topladığımızda kümenin içerisine düşüyorsa boşluk kümesinden aldığımız eleman sözde-Frobenius sayısı olacaktır.

O halde boşluk kümesi ve üreteç kümesi sırasıyla

$$S(G) = \{1,2,4,5,7\} \text{ ve } G = \langle 3,8,10 \rangle$$

olur. Buradan,

$1 \in S(G)$ için,

$1 + 3 = 4 \notin G$ olup sözde-Frobenius sayısı olamaz.

$2 \in S(G)$ için,

$2 + 3 = 5 \notin G$ olup sözde-Frobenius sayısı olamaz.

$4 \in S(G)$ için,

$4 + 3 = 7 \notin G$ olup Sözde-Frobenius sayısı olamaz.

$5 \in S(G)$ için,

$5 + 3 = 8 \in G$, $5 + 8 = 13 \in G$ ve $5 + 10 = 15 \in G$ olup $5 \in PF(G)$ 'dir.

$7 \in S(G)$ için,

$7 + 3 = 10 \in G$, $7 + 8 = 15 \in G$ ve $7 + 10 = 17 \in G$ olup $7 \in PF(G)$ 'dir.

Bu durumda $PF(G) = \{5,7\}$ olur. Sözde-Frobenius kümesinin en büyük elemanı sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısıdır yani $F(G) = 7$ 'dir. Sözde-Frobenius kümesinin eleman sayısı sayısal yarıgrubun tipini belirler bu durumda $t(G) = 2$ olur.

Sözde-Frobenius kümesini bulabilmek için GAP programı kodları;

<i>gap > LoadPackage("num");</i>
<i>true</i>
<i>gap > S:= NumericalSemigroup(3,8,10);;</i>
<i>gap > PseudoFrobenius(S);</i>
[5, 7]

BÖLÜM 3

3.1 ARF SAYISAL YARIGRUPLAR

Bu bölümde Arf sayısal yarıgrupları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. Herhangi bir sayısal yarıgrubun Arf sayısal yarıgrup olup olmadığı incelenecektir.

Tanım 3.1.1. G bir sayısal yarıgrup olsun.

$$\forall x, y, z \in G \text{ için } x \geq y \geq z \Rightarrow x + y - z \in G$$

şartını sağlayan G sayısal yarıgrubuna *Arf sayısal yarıgrup* denir.[1]

Önerme 3.1.2. G bir sayısal yarıgrup olsun.

$$\forall x, y \in G: x \geq y \Rightarrow 2x + y \in G$$

eğer G sayısal yarıgrubu yukardaki özelliği sağlıyorsa, o zaman G Arf sayısal yarıgrup olarak adlandırılır.[14]

Örnek 3.1.3. $G = \langle 3, 10, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 9, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrup Arf sayısal yarıgruptur. Gerçekten,

$$x = 3, y = 3 \Rightarrow 2.3 - 3 = 3 \in G$$

$$x = 6, y = 3 \Rightarrow 2.6 - 3 = 9 \in G$$

$$x = 6, y = 6 \Rightarrow 2.6 - 6 = 6 \in G$$

$$x = 9, y = 3 \Rightarrow 2.9 - 3 = 15 \in G$$

$$x = 9, y = 6 \Rightarrow 2.9 - 6 = 12 \in G$$

$$x = 9, y = 9 \Rightarrow 2.9 - 9 = 9 \in G$$

$x \geq 9$ olduğunda, $x - y \geq 8$ olur bu yüzden $2x - y$ her zaman G 'nin elemanı olacaktır. Bu durumda G Arf sayısal yarıgruptur.

Herhangi bir sayısal yarigrubun Arf sayısal yarigrup olup olmadığını kontrol edebilmek için GAP programı kodları;

<i>gap > LoadPackage("num");</i>
<i>true</i>
<i>gap > S := NumericalSemigroup(3,10,11);</i> <i>< Numerical semigroup with 3 generators ></i>
<i>gap > IsArf(NumericalSemigroup(3,10,11));</i>
<i>true</i>

Önerme 3.1.4. Her Arf sayısal yarigrup maksimal gömme boyutludur (MGD). Ancak bunun tersi mevcut değildir. [11]

Örnek 3.1.5. $G = \langle 3, 4, 8 \rangle = \{0, 3, 4, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ sayısal yarigrubu $m(G) = e(G) = 3$ olup maksimal gömme boyutludur ancak Arf sayısal yarigrup değildir.

$$x = 3, y = 3 \Rightarrow 2.3 - 3 = 3 \in G$$

$$x = 4, y = 3 \Rightarrow 2.4 - 3 = 5 \notin G$$

G sayısal yarigrubu Arf değildir çünkü $x = 4, y = 3$ için $5 \notin G$ olduğundan Arf değildir

Bir sayısal yarigrubun Arf olup olmadığını kontrol edebilmek için gerekli olan kodlar;

<i>gap > LoadPackage("num");</i>
<i>true</i>
<i>gap > S := NumericalSemigroup(3,4,8);</i> <i>< Numerical semigroup with 3 generators ></i>

$gap > IsArf(NumericalSemigroup(3,4,8));$
$false$

Önerme 3.1.6. Arf sayısal yarıgrupları maksimum gömme boyutuna sahiptir. Bu durumda, katlılığı m olan bir Arf sayısal yarıgrup G 'nin minimal üreteç sistemi $(Ap(G, m) \setminus \{0\} \cup \{m\})$ kümesi verir. [18]

Not 3.1.7. $a, b \in \mathbb{Z}$ için $b - a \in G$ oluyorsa eğer $a \leq_G w$ bağıntısına kısmi sıralı bağıntı denir. Bu kısmi sıralı bağıntı kullanılarak $PF(G)$ 'nin bir karakterizasyonunu elde edebiliriz.

Yardımcı Teorem 3.1.8. Eğer G bir Arf sayısal yarıgrup ve katlılığı $m > 1$ ise, o zaman,

- (i) $Maximals \leq_G Ap(G, m) \setminus \{0\}$,
- (ii) $PF(G) = \{\omega - m : \omega \in Ap(G, m) \setminus \{0\}\}$

şeklindedir. [11].

Tanım 3.1.9. G katlılığı $m(G) = m$ olan bir Arf sayısal yarıgrup olsun.

$(Ap(G, m) \cup \{m\}) \setminus \{0\} = \{m, \omega(0) = 0, \omega(1), \dots, \omega(m-1)\}$ kümesi G Arf sayısal yarıgrubu için minimal üreteç kümesini oluşturmaktadır. Ayrıca eğer G minimum olarak $\{n_1 < n_2 < \dots < n_e\}$ tarafından üretiliyorsa, o zaman

$$PF(G) = \{n_2 - n_1, n_3 - n_1, \dots, n_e - n_1\}$$

sözde-Frobenius kümesini yukarıdaki gibi yazabiliriz.

3.2 ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ KATLILIĞI

Bu bölümde Arf sayısal yarıgrupların iletkenler yardımıyla katlılığa bağlı olarak nasıl elde edilebileceği ile ilgili önermeler verilmiştir. Katlılığı bilinen Arf sayısal yarıgrup örnekleri yapılmıştır.

Önerme 3.2.1. Katlılığı 1 olan sayısal yarıgruplar sadece $\mathbb{N}$ (Doğal sayılar) kümesidir. 1 tarafından üretilen sayısal yarıgruplar aynı zamanda Arf sayısal yarıgruptur. [14]

Önerme 3.2.2. 2 katlılığa sahip herhangi bir sayısal yarıgrup aynı zamanda bir Arf sayısal yarıgruptur. G sayısal yarıgrubunun iletkeni $I(G) = I$ alınırsa,

$$G = \langle 2, I + 1 \rangle$$

ile üretilen bütün sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgruptur.[14]

Örnek 3.2.3. Katlılığı 2 olan Arf sayısal yarıgrubu,

$$G = \langle 2, 7 \rangle = \{0, 2, 4, 6, \rightarrow\}$$

Not 3.2.4. Katlılığı 3 ve 3'ten büyük Arf sayısal yarıgrupları iletken tarafından tek başına açıkça üretilmemektedir. Bu Arf sayısal yarıgruplarını belirleyebilmek için sayısal yarıgrubun cinsine ihtiyaç vardır. Eğer Arf özelliği kabul edilirse, Arf sayısal yarıgrupları katlılık ve iletken tarafından tam olarak belirlenebilir.

Önerme 3.2.5. I bir tam sayı olmak üzere, $I \geq 3$ ve $I \not\equiv 1 \pmod{3}$ alalım. Katlılığı 3 olan G Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biri olarak yazılabilir.[14]

$$I \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{3} \text{ olmak üzere,}$$

- (i) $I \equiv 0 \pmod{3}$ ise $G = \langle 3, I + 1, I + 2 \rangle$.
- (ii) $I \equiv 2 \pmod{3}$ ise $G = \langle 3, I, I + 2 \rangle$.

Örnek 3.2.6. Katlılığı 3 olan Arf sayısal yarıgrup örnekleri,

$$G = \langle 3, 4, 5 \rangle = \{0, 3 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6, 8 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 3, 10, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 9 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 3, 11, 13 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 11, \rightarrow\}$$

$$G = \langle 3, 13, 14 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12, \rightarrow\}$$

$$G = \langle 3, 17, 19 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 17 \rightarrow\}$$

Önerme 3.2.7. Katlılığı 4 ve iletkeni I olan bir G Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biri olarak yazılabilir. [14]

$$I \equiv 0, 2 \text{ ya da } 3 \pmod{4} \text{ olmak üzere,}$$

- (i) $I \equiv 0 \pmod{4}$ ise $G = \langle 4, 4k + 2, I + 1, I + 3 \rangle$ için $\left(k \in \left\{1, \dots, \frac{I}{4}\right\}\right)$

(ii) $I \equiv 2(mod4)$ ise $G = \langle 4, 4k + 2, I + 1, I + 3 \rangle$ için $\left(k \in \left\{1, \dots, \frac{I-2}{4}\right\}\right)$

(iii) $I \equiv 3(mod4)$ ise $G = \langle 4, I, I + 2, I + 3 \rangle$

Örnek 3.2.8. Katlılığı 4 olan Arf sayısal yarıgrup örnekleri,

$$G = \langle 4, 5, 6, 7 \rangle = \{0, 4, \rightarrow\}$$

$$G = \langle 4, 5, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 5, 7 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 4, 9, 10, 11 \rangle = \{0, 4, 8 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 4, 6, 9, 11 \rangle = \{0, 4, 6, 8 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 4, 23, 25, 26 \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 23 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 4, 6, 23, 25 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 \rightarrow\}$$

Önerme 3.2.9. I iletkenli ve 5 katlılıklı Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biri olarak yazılabilir.[14]

$I \equiv 0, 2, 3$ ya da $4(mod5)$ olmak üzere,

(i) Eğer $I \equiv 0(mod5)$

a) $G = \langle 5, I - 2, I + 1, I + 2, I + 4 \rangle$

b) $G = \langle 5, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4 \rangle$

(ii) $I \equiv 2(mod5)$ ise $G = \langle 5, I, I + 1, I + 2, I + 4 \rangle$

(iii) $I \equiv 3(mod5)$ ise $G = \langle 5, I, I + 1, I + 3, I + 4 \rangle$

(iv) Eğer $I \equiv 4(mod5)$

a) $G = \langle 5, I - 2, I, I + 2, I + 4 \rangle$

b) $G = \langle 5, I, I + 2, I + 3, I + 4 \rangle$.

Örnek 3.2.10. Katlılığı 5 olan Arf sayısal yarıgrup örnekleri,

$$G = \langle 5, 28, 31, 32, 34 \rangle = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 28, 30 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 5, 32, 33, 34, 36 \rangle = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 32 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 5, 33, 34, 36, 37 \rangle = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 33 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 5, 32, 34, 36, 38 \rangle = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 32, 34 \rightarrow\}$$

Önerme 3.2.11. Katlılığı 6 ve iletkeni I olan Arf sayısal yarıgrupları aşağıdakilerden biri olarak yazılabilir. [14]

$I \equiv 0, 2, 3, 4$ ya da $5(mod6)$

(i) $I \equiv 0(mod6)$

a) $G = \langle 6, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5 \rangle$

b) $G = \langle 6, 6k + 2, 6k + 4, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle$

c) $G = \langle 6, 6k + 3, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5 \rangle$

d) $G = \langle 6, 6k + 4, 6k + 8, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle$ için $(m = 1, 2, \dots, \frac{I}{6} - 1)$

(ii) $I \equiv 2(mod6)$

a) $G = \langle 6, 6l + 2, 6l + 4, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle$

b) $G = \langle 6, 6k + 3, I, I + 2, I + 3, I + 5 \rangle$

c) $G = \langle 6, 6k + 4, 6k + 8, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle$

için $(l = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6}, k = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6} - 1)$

(iii) $I \equiv 3(mod6)$

$G = \langle 6, 6k + 3, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5 \rangle$ için $(k = 1, 2, \dots, \frac{I-3}{6})$

(iv) $I \equiv 4(mod6)$

a) $G = \langle 6, 6l + 2, 6l + 4, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle$

b) $G = \langle 6, 6l + 4, 6l + 8, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle$ için $(l = 1, 2, \dots, \frac{I-4}{6})$

(v) $I \equiv 5(mod6)$

a) $G = \langle 6, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5 \rangle$

b) $G = \langle 6, 6l + 3, I, I + 2, I + 3, I + 5 \rangle$ için $(l = 1, 2, \dots, \frac{I-5}{6})$.

Örnek 3.2.12. Katlılığı 6 olan Arf sayısal yarıgrup örnekleri,

$$G = \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle = \{0, 6, 8 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle = \{0, 6, 9 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 6, 31, 32, 33, 34, 35 \rangle = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \rightarrow\}$$

$$G = \langle 6, 20, 22, 31, 33, 35 \rangle = \{0, 6, 12, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, \rightarrow\}$$

$$G = \langle 6, 14, 16, 31, 33, 35 \rangle = \{0, 6, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, \rightarrow\}$$

$$G = \langle 6, 8, 10, 31, 33, 35 \rangle = \{0, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, \rightarrow\}$$

Önerme 3.2.13. I tam sayı olmak üzere, $I \geq 8$ ve $I \not\equiv 1(mod8)$ olarak alalım. Katlılığı 8 ve iletkeni I olan G Arf sayısal yarıgrupunu aşağıdakilerden biri olarak yazılabilir.[17]

$$I \equiv 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7(mod8) \text{ olmak üzere,}$$

Eğer $I \equiv 0(mod 8)$

- (i) $G = \langle 8, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7 \rangle$
- (ii) $G = \langle 8, 8k + 2, 8k + 4, 8k + 6, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, (1 \leq k \leq \frac{I-8}{8})$
- (iii) $G = \langle 8, 8k + 4, 8l + 2, 8l + 6, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k < l \leq \frac{I}{8}$
- (iv) $G = \langle 8, 8k + 4, 8l - 2, 8l + 2, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k < l \leq \frac{I}{8}$
- (v) $G = \langle 8, I - 3, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7 \rangle$
- (vi) $G = \langle 8, 8k + 6, 8k + 10, 8k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{8}$
- (vii) $G = \langle 8, I - 5, I - 2, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 7 \rangle$

Eğer $I \equiv 2(mod 8)$

- i. $G = \langle 8, 8k + 2, 8k + 4, 8k + 6, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-2}{8}$
- ii. $G = \langle 8, 8k + 4, 8l + 2, 8l + 6, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k < l \leq \frac{I-2}{8}$
- iii. $G = \langle 8, 8k + 4, 8l - 2, 8l + 2, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k < l \leq \frac{I-2}{8}$
- iv. $G = \langle 8, I - 5, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 7 \rangle$
- v. $G = \langle 8, 8k + 6, 8k + 10, 8k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{8}$

Eğer $I \equiv 3(mod 8)$

- i. $G = \langle 8, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7 \rangle$
- ii. $G = \langle 8, 8k + 4, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-11}{8}$

Eğer $I \equiv 4(mod 8)$

- i. $G = \langle 8, 8k + 2, 8k + 4, 8k + 6, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-4}{8}$
- ii. $G = \langle 8, 8k + 4, 8l - 2, 8l + 6, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k < l \leq \frac{I-4}{8}$
- iii. $G = \langle 8, 8k + 4, 8l - 2, 8l + 2, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k < l \leq \frac{I+4}{8}$
- iv. $G = \langle 8, 8k + 6, 8k + 10, 8k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{8}$

Eğer $I \equiv 5(mod 8)$

i. $G = \langle 8, I - 2, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 7 \rangle$

ii. $G = \langle 8, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7 \rangle$

Eğer $I \equiv 6(mod 8)$

i. $G = \langle 8, 8k + 2, 8k + 4, 8k + 6, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-6}{8}$

ii. $G = \langle 8, I - 3, I, I + 1, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7 \rangle$

iii. $G = \langle 8, 8k + 4, 8l + 2, 8l + 6, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k < l \leq \frac{I-6}{8}$

iv. $G = \langle 8, 8k + 4, 8l - 2, 8l + 2, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k < l \leq \frac{I+2}{8}$

v. $G = \langle 8, 8k + 6, 8k + 10, 8k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-6}{8}$

Eğer $I \equiv 7(mod 8)$

i. $G = \langle 8, 8k + 4, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-7}{8}$

ii. $G = \langle 8, I - 2, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 7 \rangle$

iii. $G = \langle 8, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7 \rangle$

Örnek 3.2.14. Katlılığı 8 olan Arf sayısal yarıgrup örnekleri,

$$G = \langle 8, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 \rangle = \{0, 8, 16 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 8, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 \rangle = \{0, 8, 16, 24, \rightarrow\}$$

$$G = \langle 8, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26 \rangle = \{0, 8, 16, 19 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 8, 13, 18, 19, 20, 22, 23, 25 \rangle = \{0, 8, 13, 16, 18 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 8, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28 \rangle = \{0, 8, 16, 21 \rightarrow\}$$

Önerme 3.2.15. $I \geq 9$ ve $I \not\equiv 1(mod 9)$ olacak şekilde bir I tam sayısı alalım. Bu durumda katlılığı 9 ve iletkeni I olan Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biri olarak yazılabilir.[13]

$$I \equiv 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8(mod 9)$$

Eğer $I \equiv 0(\text{mod}9)$

- i. $G = \langle 9, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 8 \rangle$
- ii. $G = \langle 9, 9k + 3, 9k + 6, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 7, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-9}{9}$
- iii. $G = \langle 9, I - 4, I - 2, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 8 \rangle$
- iv. $G = \langle 9, I - 4, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 8 \rangle$
- v. $G = \langle 9, 9k + 6, 9k + 12, I + 1, I + 2, I + 4, I + 4, I + 7, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-9}{9}$
- vi. $G = \langle 9, I - 2, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle$

$I \equiv 2(\text{mod}9)$

- i. $G = \langle 9, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle$
- ii. $G = \langle 9, 9k + 3, 9k + 6, I, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-11}{9}$
- iii. $G = \langle 9, 9k + 6, 9k + 12, I, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-11}{9}$
- iv. $GG = \langle 9, I - 4, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 8 \rangle$

$I \equiv 3(\text{mod}9)$

- i. $G = \langle 9, 9k + 3, 9k + 6, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 7, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-3}{9}$
- ii. $G = \langle 9, 9k + 6, 9k + 12, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 7, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{9}$

$I \equiv 4(\text{mod}9)$

- i. $G = \langle 9, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 8 \rangle$
- ii. $G = \langle 9, I - 2, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 8 \rangle$
- iii. $G = \langle 9, I - 6, I - 2, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 6, I + 8 \rangle$

$I \equiv 5(\text{mod}9)$

- i. $G = \langle 9, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 7, I + 8 \rangle$
- ii. $G = \langle 9, 9k + 3, 9k + 6, I, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-5}{9}$

$$iii. \quad G = \langle 9, 9k + 6, 9k + 12, I, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-14}{9}$$

$$I \equiv 6(mod 9)$$

$$i. \quad G = \langle 9, I - 4, I - 2, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 6, I + 8 \rangle$$

$$ii. \quad G = \langle 9, 9k + 3, 9k + 6, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 7, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-15}{9}$$

$$iii. \quad G = \langle 9, 9k + 6, 9k + 12, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 7, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-6}{9}$$

$$iv. \quad G = \langle 9, I - 2, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle$$

$$I \equiv 7(mod 9)$$

$$i. \quad G = \langle 9, I - 3, I, I + 1, I + 3, I + 4, I + 5, I + 7, I + 8 \rangle$$

$$ii. \quad G = \langle 9, I - 2, I, I + 1, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle$$

$$iii. \quad G = \langle 9, I, I + 1, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 8 \rangle$$

$$I \equiv 8(mod 9)$$

$$i. \quad G = \langle 9, I - 6, I - 4, I - 2, I, I + 2, I + 4, I + 6, I + 8 \rangle$$

$$ii. \quad G = \langle 9, 9k + 3, 9k + 6, I, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{9}$$

$$iii. \quad G = \langle 9, I - 4, I - 2, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 8 \rangle$$

$$iv. \quad G = \langle 9, I - 4, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 8 \rangle$$

$$v. \quad G = \langle 9, I - 3, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 7, I + 8 \rangle$$

$$vi. \quad G = \langle 9, 9k + 6, 9k + 12, I, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{9}$$

$$vii. \quad G = \langle 9, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 8 \rangle$$

Örnek 3.2.16. Katlılığı 9 olan sayısal yarıgrup örnekleri,

$$G = \langle 9, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 \rangle = \{0, 9, 18, 27 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 9, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28 \rangle = \{0, 9, 18, 20 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 9, 21, 24, 31, 32, 34, 35, 37, 38 \rangle = \{0, 9, 18, 21, 24, 27, 30 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 9, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48 \rangle = \{0, 9, 18, 27, 36, 40 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 9, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 \rangle = \{0, 9, 18, 27, 35 \rightarrow\}$$

Önerme 3.2.17. $I \geq 10$ ve $I \not\equiv 1(mod 10)$ olacak şekilde bir I tam sayısı alalım. Bu durumda katlılığı 10 ve iletkeni I olan Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biri olarak yazılabilir. [13]

$$I \equiv 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9(mod 10)$$

$$I \equiv 0(mod 10)$$

- i. $G = \langle 10, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 8, I + 9 \rangle$
- ii. $G = \langle 10, 10k + 2, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{10}$
- iii. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{10}$
- iv. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{10}$
- v. $G = \langle 10, 10k + 5, I - 2, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{10}$
- vi. $G = \langle 10, 10k + 5, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 8, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{10}$
- vii. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 8, 10x + 12, 10x + 14, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{10}$
- viii. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 18, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{10}$
- ix. $G = \langle 10, I - 3, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle$
- x. $G = \langle 10, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-10}{10}$

$$I \equiv 2(mod 10)$$

- i. $G = \langle 10, 10k + 2, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-2}{10}$

- ii. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{10}$
- iii. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{10}$
- iv. $G = \langle 10, 10k + 5, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{10}$
- v. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{10}$
- vi. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 18, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{10}$
- vii. $G = \langle 10, I - 5, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 9 \rangle$
- viii. $G = \langle 10, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{10}$

$I \equiv 3(mod 10)$

- i. $G = \langle 10, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle$
- ii. $G = \langle 10, 10k + 5, I, I + 1, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-13}{10}$
- iii. $G = \langle 10, I - 6, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle$

$I \equiv 4(mod 10)$

- i. $G = \langle 10, 10k + 2, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-4}{10}$
- ii. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-4}{10}$
- iii. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-14}{10}$

- iv. $G = \langle 10, 10k + 5, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 7, I + 8, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-14}{10}$
- v. $G = \langle 10, 10k + 5, I - 2, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-14}{10}$
- vi. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-14}{10}$
- vii. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 18, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{10}$
- viii. $G = \langle 10, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-12}{10}$

$I \equiv 5(mod 10)$

- i. $G = \langle 10, I - 2, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 9 \rangle$
- ii. $G = \langle 10, 10k + 5, I - 2, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-15}{10}$
- iii. $G = \langle 10, 10k + 5, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 8, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-5}{10}$

$I \equiv 6(mod 10)$

- i. $G = \langle 10, 10k + 2, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-6}{10}$
- ii. $G = \langle 10, I - 3, I, I + 1, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle$
- iii. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-6}{10}$
- iv. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-16}{10}$
- v. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-6}{10}$

- vi. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 18, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-16}{10}$
- vii. $G = \langle 10, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-16}{10}$

$$I \equiv 7(\text{mod}10)$$

- i. $G = \langle 10, I - 3, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle$
- ii. $G = \langle 10, 10k + 5, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-7}{10}$
- iii. $G = \langle 10, I, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 8, I + 9 \rangle$

$$I \equiv 8(\text{mod}10)$$

- i. $G = \langle 10, 10k + 2, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{10}$
- ii. $G = \langle 10, I - 5, I - 2, I, I + 1, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 9 \rangle$
- iii. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{10}$
- iv. $G = \langle 10, 10k + 4, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{10}$
- v. $G = \langle 10, 10k + 5, I, I + 1, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{10}$
- vi. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{10}$
- vii. $G = \langle 10, 10k + 6, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 18, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-18}{10}$
- viii. $G = \langle 10, 10k + 8, 10k + 12, 10k + 14, 10k + 16, I + 1, I + 3, I + 5, I + 7, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-8}{10}$

$$I \equiv 9(mod 10)$$

- i. $G = \langle 10, I - 6, I - 3, I, I + 2, I + 3, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle$
- ii. $G = \langle 10, 10k + 5, I - 2, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 8, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-9}{10}$
- iii. $G = \langle 10, 10k + 5, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 8, I + 9 \rangle, 1 \leq k \leq \frac{I-9}{10}$
- iv. $G = \langle 10, I - 3, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 6, I + 7, I + 8, I + 9 \rangle$
- v. $G = \langle 10, I - 2, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 9 \rangle$
- vi. $G = \langle 10, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5, I + 6, I + 7, I + 8, I + 9 \rangle$

Örnek 3.2.18. Katlılığı 10 olan Arf sayısal yarıgruplarına bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

$$G = \langle 10, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 44 \rangle = \{0, 10, 20, 30, 33, 35 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 10, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33 \rangle = \{0, 10, 20, 22, 24 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 10, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 72 \rangle = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 63 \rightarrow\}$$

$$G = \langle 10, 45, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 71, 72 \rangle = \{0, 10, 20, 30, 40, 45, 50, 55, 60, 63 \rightarrow\}$$

BÖLÜM 4

4.1 ARF SAYISAL YARIGRUPLARDA RF-MATRİSLERİ

Bu bölümde Arf sayısal yarıgruplarının ideallerinin elde edilebilmesi için gerekli olan RF (satır-faktörizasyon)-matris kavramı açıklanacaktır. Herhangi bir Arf sayısal yarıgrupunun RF-matrisini hesaplayabilmek için gerekli olan GAP program kodları verilmiştir.[7]

Tanım 4.1.1. $f \in PF(G)$ olsun. f 'nin RF-matrisi, her i için $a_{ii} = -1$, her $i \neq j$ için $a_{ij} \in \mathbb{N}$ ve her $i = 1, \dots, e$ için

$$\sum_{j=1}^e a_{ij}n_j = f$$

olarak tanımlanan bir $A = (a_{ij})$ matrisidir.[8]

Önerme 4.1.2. RF-matrislerinin boyutu, G Arf sayısal yarıgrupunun minimal üreteç sistemindeki eleman sayısı ile belirlenir.

Örnek 4.1.3.

$$G = \langle 3, 11, 13 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 11 \rightarrow\}$$

RF-matrislerini bulmak için öncelikle sözde-Frobenius kümesinin elemanlarını belirlememiz gerekmektedir. O halde,

$$H(G) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} \text{ ve } F(G) = 10$$

$$PF(G) = \{f \notin G \mid f + n_i \in G, \forall i = 1, 2, 3\}$$

$n_1 = 3, n_2 = 11, n_3 = 13$ alalım,

$$f = 1 \Rightarrow 1 + 3 = 4 \notin G \Rightarrow 1 \notin PF(G)$$

$$f = 2 \Rightarrow 2 + 3 = 5 \notin G \Rightarrow 2 \notin PF(G)$$

$$f = 4 \Rightarrow 4 + 3 = 7 \notin G \Rightarrow 4 \notin PF(G)$$

$$f = 8 \Rightarrow 8 + 3 = 11 \in G, 8 + 11 = 19 \in G, 8 + 13 = 21 \in G \Rightarrow 8 \in PF(G)$$

$$f = 10 \Rightarrow 10 + 3 = 13 \in G, 10 + 11 = 21 \in G, 10 + 13 = 23 \in G$$

$$\Rightarrow 10 \in PF(G)$$

Bu durumda,

$$PF(G) = \{8, 10\}$$

Eğer $f = 8 \in PF(G)$ ise;

$a_{11} = -1$ için,

$$8 = a_{11} \cdot 3 + a_{12} \cdot 11 + a_{13} \cdot 13$$

$$8 = (-1) \cdot 3 + a_{12} \cdot 11 + a_{13} \cdot 13$$

RF-matrisinin ilk satır elemanları: $[-1 \quad 1 \quad 0]$

$f = 8 \in PF(G)$ ise;

$a_{22} = -1$ için,

$$8 = a_{21} \cdot 3 + a_{22} \cdot 11 + a_{23} \cdot 13$$

$$8 = a_{21} \cdot 3 + (-1) \cdot 11 + a_{23} \cdot 13$$

RF-matrisinin ikinci satır elemanları: $[2 \quad -1 \quad 1]$

$f = 8 \in PF(G)$ ise;

$a_{33} = -1$ için,

$$8 = a_{31} \cdot 3 + a_{32} \cdot 11 + a_{33} \cdot 13$$

$$8 = a_{31} \cdot 3 + a_{32} \cdot 11 + (-1) \cdot 13$$

RF-matrisinin üçüncü satır elemanları: $[7 \quad 0 \quad -1]$

$$RF(8) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Eğer $f = 10 \in PF(G)$ ise;

$a_{11} = -1$ için,

$$10 = a_{11} \cdot 3 + a_{12} \cdot 11 + a_{13} \cdot 13$$

$$10 = (-1) \cdot 3 + a_{12} \cdot 11 + a_{13} \cdot 13$$

RF-matrisinin ilk satır elemanları: $[-1 \ 0 \ 1]$

$f = 10 \in PF(G)$ ise;

$a_{22} = -1$ için,

$$10 = a_{21} \cdot 3 + a_{22} \cdot 11 + a_{23} \cdot 13$$

$$10 = a_{21} \cdot 3 + (-1) \cdot 11 + a_{23} \cdot 13$$

RF-matrisinin ikinci satır elemanları: $[7 \ -1 \ 0]$

$f = 10 \in PF(G)$ ise;

$a_{33} = -1$ için,

$$10 = a_{31} \cdot 3 + a_{32} \cdot 11 + a_{33} \cdot 13$$

$$10 = a_{31} \cdot 3 + a_{32} \cdot 11 + (-1) \cdot 13$$

RF-matrisinin üçüncü satır elemanları: $[4 \ 1 \ -1]$

$$RF(10) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Verilen bir Arf sayısal yarıgrubun RF-matrislerini GAP program kullanarak bulmak için gerekli olan kodları;

<code>gap > LoadPackage("num");</code>
<code>true</code>
<code>gap > S := NumericalSemigroup(3,11,13);</code>

$\langle \text{Numerical semigroup with 3 generators} \rangle$
$\text{gap} > \text{pf} := \text{PseudoFrobenius}(S);$
$[8, 10]$
$\text{gap} > \text{RFMatrices}(8, S);$
$[[[-1, 1, 0], [2, -1, 1], [7, 0, -1]]]$
$\text{gap} > \text{RFMatrices}(10, S);$
$[[[-1, 0, 1], [7, -1, 0], [4, 1, -1]]]$

Not 4.1.4. Sözde-Frobenius kümesindeki her eleman için bir RF-matrisi yazılabilir. Yazılan bu matrisler genellikle tek değildir.[5]

Örnek 4.1.5.

$$G = \langle 4, 21, 22, 23 \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \rightarrow\}$$

Arf sayısal yarıgrubu olsun.

RF-matrislerini hesaplayabilmek için öncelikle sözde-Frobenius kümesinin elemanlarını belirlememiz gerekmektedir. O halde,

$$H(G) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19\} \text{ ve } F(G) = 19$$

$$\Rightarrow PF(G) = \{17, 18, 19\}$$

Eğer $f = 19 \in PF(G)$ ise;

$a_{11} = -1$ için,

$$19 = a_{11} \cdot 4 + a_{12} \cdot 21 + a_{13} \cdot 22 + a_{14} \cdot 23$$

$$19 = -1 \cdot 4 + a_{12} \cdot 21 + a_{13} \cdot 22 + a_{14} \cdot 23$$

RF-matrisinin ilk satır elemanları: $[-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

Eğer $f = 19 \in PF(G)$,

$a_{22} = -1$ için,

$$19 = a_{21}.4 + a_{22}.21 + a_{23}.22 + a_{24}.23$$

$$19 = -1.4 + a_{22}.21 + a_{23}.22 + a_{24}.23$$

RF-matrisinin ikinci satır elemanları: $[10 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$

$$f = 19 \in PF(G),$$

$a_{33} = -1$ için,

$$19 = a_{31}.4 + a_{32}.21 + a_{33}.22 + a_{34}.23$$

$$19 = a_{31}.4 + a_{32}.21 + -1.22 + a_{34}.23$$

RF-matrisinin üçüncü satır elemanları: $[5 \quad 1 \quad -1 \quad 0]$

$$f = 19 \in PF(G),$$

$a_{44} = -1$ için,

$$19 = a_{41}.4 + a_{42}.21 + a_{43}.22 + a_{44}.23$$

$$19 = a_{41}.4 + a_{42}.21 + a_{43}.22 + -1.23$$

RF-matrisinin dördüncü satır elemanları: $[0 \quad 2 \quad 0 \quad -1]$ ya da $[5 \quad 0 \quad 1 \quad -1]$

G sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesinin eleman sayısı 4 olduğundan, RF-matrisleri 4×4 tipinde bir matris olacaktır.

$$RF(19) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$RF(19) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.1.5. $f, f' \in PF(G)$ ve $f + f' \notin G$ olsun. $RF(f) = A = (a_{ij})$ ve

$RF(f') = B = (b_{ij})$ olarak alalım. Bu durumda Her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ji} = 0$ dır. Özellikle, eğer $RF\left(\frac{F(G)}{2}\right) = (a_{ij})$ ise o zaman her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $a_{ji} = 0$. [4]

İspat. $f \in PF(G)$ için f 'nin RF-matrisi $A = (a_{ij})$ ise, $i = 1, \dots, e$ ve

$$f = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \dots + a_{ii}n_i + \dots + a_{ie}n_e$$

ve $\forall i$ için $a_{ii} = -1$ olduğundan

$$f = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \dots + (-1)n_i + \dots + a_{ie}n_e$$

$$\Rightarrow f + n_i = a_{i1}n_1 + \dots + a_{i(n-1)}n_{(i-1)} + a_{i(i+1)}n_{i+1} + \dots + a_{ie}n_e$$

$$\Rightarrow f + n_i = \sum_{k \neq i} a_{ik}n_k$$

elde edilir. Benzer şekilde, $f' \in PF(G)$ ve f' 'nin RF-matrisi $B = (b_{ij})$ ise,

$$f' + n_j = \sum_{l \neq j} b_{jl}n_l$$

bulunabilir. $a_{ij} \geq 1$ ve $b_{ji} \geq 1$ ise,

$$f = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \dots + (-1)n_i + \dots + a_{ie}n_e$$

$$f' = b_{j1}n_1 + \dots + b_{ji}n_i + \dots + (-1)n_j + \dots + b_{je}n_e$$

eşitliklerini taraf tarafa toplanırsa,

$$f + f' = (a_{i1} + b_{j1})n_1 + \dots + (b_{ji} - 1)n_i + \dots + (a_{ij} - 1)n_j + \dots$$

$$+ (a_{ie} + b_{je})n_e$$

$$f + f' = (b_{ji} - 1)n_i + (a_{ij} - 1)n_j + \sum_{t \neq i, j} (a_{it} + b_{jt})n_t$$

elde edilen eşitlik G 'nin bir elemanı olur. Bu $f + f' \notin G$ olması ile çelişir.

Böylece, $a_{ij} \geq 1$ ve $b_{ji} \geq 1$ varsayımı yanlıştır. Bu durumda, her $i \neq j$ için $x_{ij} = 0$ veya $y_{ji} = 0$ olur.

Eğer $\frac{F(G)}{2} \in PF(G)$ ve $RF(\frac{F(G)}{2}) = (a_{ij})$ ise, üstteki ifade de $f = \frac{F(G)}{2}$ ve

$$f' = \frac{F(G)}{2} \text{ ve } RF(f) = RF(\frac{F(G)}{2}) = (a_{ij}),$$

$$RF(f') = RF(\frac{F(G)}{2}) = (b_{ij}) = (a_{ij})$$

yazabileceğimizden, her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ve $b_{ji} = a_{ji} = 0$ elde edilebilir.

Örnek 4.1.6. $G = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ ve bir Arf sayısal yarıgrup olsun.

$f = \frac{F(G)}{2}$ alalım. $RF(f) = (a_{ij})$ kabul edilirse, Teorem 4.5.'den $\forall i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $a_{ji} = 0$ 'dır.

Böylece, $a_{21} = a_{13} = a_{32} = 0$ kabul edebilir.

$$RF(f) = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} & 0 \\ 0 & -1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. Bu matristen,

$$f = \frac{F(G)}{2} = (-1).n_1 + a_{12}.n_2 + 0.n_3$$

$$f = \frac{F(G)}{2} = 0.n_1 + (-1).n_2 + a_{23}.n_3$$

$$f = \frac{F(G)}{2} = a_{31}.n_1 + 0.n_2 + (-1).n_3$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri kullanarak $RF(F(G)) = (b_{ij})$ matrisini elde etmeye çalışalım.

$$F(G) = (-1).n_1 + b_{12}.n_2 + b_{13}.n_3$$

eşitliğindeki b_{12} ve b_{13} sayılarını elde etmek için

$$\frac{F(G)}{2} = (-1).n_1 + a_{12}.n_2 + 0.n_3$$

$$\frac{F(G)}{2} = 0.n_1 + (-1).n_2 + a_{23}.n_3$$

eşitlikleri taraf tarafa toplandığında,

$$F(G) = (-1).n_1 + (a_{12} - 1).n_2 + a_{23}.n_3$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $b_{12} = a_{12} - 1$ ve $b_{13} = a_{23}$ olarak elde edilir. Yine,

$$F(G) = b_{21}.n_1 + (-1).n_2 + b_{23}.n_3$$

ifadesindeki b_{21} ve b_{23} sayılarını elde edebilmek için

$$\frac{F(G)}{2} = 0.n_1 + (-1).n_2 + a_{23}.n_3$$

$$\frac{F(G)}{2} = a_{31}.n_1 + 0.n_2 + (-1).n_3$$

eşitliklerini taraf tarafa toplandığında,

$$F(G) = a_{31}.n_1 + (-1).n_2 + (a_{23} - 1).n_3$$

bulunur ki, buradan $b_{21} = a_{31}$ ve $b_{23} = a_{23} - 1$ yazılır. Son olarak,

$$F(G) = b_{31}.n_1 + b_{32}.n_2 + (-1).n_3$$

eşitliğindeki b_{31} ve b_{32} sayılarını elde edelim.

$$\frac{F(G)}{2} = (-1).n_1 + a_{12}.n_2 + 0.n_3$$

$$\frac{F(G)}{2} = a_{31}.n_1 + 0.n_2 + (-1).n_3$$

eşitliklerini topladığımızda,

$$F(G) = (a_{31} - 1).n_1 + a_{12}.n_2 + (-1).n_3$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $b_{31} = a_{31} - 1$ ve $b_{32} = a_{12}$ bulunur. Böylece,

$$RF(F(G)) = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} - 1 & a_{23} \\ a_{31} & -1 & a_{23} - 1 \\ a_{31} - 1 & a_{12} & -1 \end{bmatrix}$$

olarak

bulunur.

BÖLÜM 5

5.1 RF-MATRİSLERİ İLE İDEALLERİN HESAPLANMASI

Bu bölümde Arf sayısal yarıgruplarının RF-matrisleri satır vektörlerine ayrılmıştır. Bulunan satır vektörleri kullanılarak Arf sayısal yarıgruplarının ideallerinin nasıl bulunduğu açıklanmıştır.

Tanım 5.1.1. Bir k sonsuz cismi üzerindeki A vektör uzayı, $\forall x, y, z \in A$ ve $\alpha, \beta \in k$ için,

- (i) $xy = yx$
- (ii) $x(yz) = (xy)z$
- (iii) $x(y + z) = xy + xz$
- (iv) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$
- (v) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

özelliklerini sağlıyorsa, A 'ya değişmeli k – cebiri denir.[4]

Tanım 5.1.2. A ve B , bir k cismi üzerinde k – cebirleri ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in A$ ve $c \in k$ için,

- (i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- (ii) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
- (iii) $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$

özelliklerini sağlayan f fonksiyonuna k – cebir homomorfizması denir.[4]

t , k cismi üzerinde bir bilinmeyen olsun. $G = \langle n_1, \dots, n_e \rangle$ sayısal yarıgrupunun $k[G]$ yarıgrup halkası,

$$k[G] := k[t^{n_1}, \dots, t^{n_e}] \subset k[t]$$

olarak tanımlanır.

$k[x_1, \dots, x_e]$, k cismi üzerinde $x_1, \dots, x_e$ bilinmeyenli polinom halkası olsun.

$$\tau: k[x_1, x_2, \dots, x_e] \rightarrow k[G]$$

$$x_i \rightarrow t^{n_i}, i = 1, 2, \dots, e$$

bir örten $k - cebiri$ homomorfizmasıdır.

$$\check{ek}\tau = \{f \in k[x_1, \dots, x_e] | \tau(f) = 0\}$$

ideali, $\check{ek}\tau = I_G$ olarak gösterilir.[4]

Tanım 5.1.3. I_G idealine $F[G]$ halkasının tamamlayıcı ideali denir. I_G homojen bir idealdir ve binomlar tarafından üretilir.[4]

Not 5.1.4. $\phi = \prod_{i=1}^e x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^e x_i^{\beta_i}$ binomunu alalım.

$$\phi \in I_G \Leftrightarrow \phi \in \check{ek}\tau$$

$$\Leftrightarrow \tau(\phi) = 0_{k[G]}$$

$$\Leftrightarrow \tau(x_1^{\alpha_1} \dots x_e^{\alpha_e} - x_1^{\beta_1} x_e^{\beta_e}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^{n_1})^{\alpha_1} \dots (t^{n_e})^{\alpha_e} - (t^{n_1})^{\beta_1} \dots (t^{n_e})^{\beta_e} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^{n_1\alpha_1 + \dots + n_e\alpha_e} = t^{n_1\beta_1 + \dots + n_e\beta_e}$$

$$\Leftrightarrow \sum_i^e n_i \alpha_i = \sum_1^e n_i \beta_i$$

Burada, ϕ 'nin derecesi,

$$der(\phi) = \sum_i^e n_i \alpha_i$$

olur.

Örnek 5.1.5.

$$G = \langle 4, 21, 22, 23 \rangle$$

Arf sayısal yarigrubu olsun. Burada,

$n_1 = 4, n_2 = 21, n_3 = 22, n_4 = 23$ olur.

$PF(G) = \{f \notin G \mid f + n_i \in G, \forall i = 1, 2, 3, 4\}$ eşitliğinden,

$$PF(G) = \{17, 18, 19\}$$

olur. I_G idealinin elemanlarını bulmaya çalışalım.

$$\phi \in I_G \Leftrightarrow \sum_i^4 n_i \alpha_i = \sum_1^4 n_i \beta_i$$

olduğunu biliyoruz.

$$0.4 + 2.22 = 1.21 + 1.23$$

Eşitliğinden,

$$n_1 \alpha_1 + n_3 \alpha_3 = n_2 \beta_2 + n_4 \beta_4$$

elde edilir. Bu,

$$\phi = x_1^{\alpha_1} x_3^{\alpha_3} - x_2^{\beta_2} x_4^{\beta_4}$$

$$\phi = x_3^2 - x_2 x_4$$

demektir. Böylece,

$$\phi = x_3^2 - x_2 y_4 \in I_G$$

bulunur. Benzer işlemler uygulanarak diğer polinomlar bulunabilir. Elde edilen bu polinomlar verilen Arf sayısal yarıgrubun ideal kümesinin üreteçlerini oluşturur.

Arf sayısal yarıgrubunun ideallerinin GAP programı ile bulunması,

<code>gap > LoadPackage("num");</code>
<code>true</code>
<code>gap > S := NumericalSemigroup(4,21,22,23);;</code>
<code>gap > BinomialIdealOfNumericalSemigroup(GF(2), S);</code>
<code>< Two – sided ideal in GF(2) [x_1, x_2, x_3, x_4], (6 generators) ></code>
<code>gap > GeneratorsOfTwoSidedIdeal(last);</code>

$$[x_1 * x_2^2 + x_4^2, x_1^6 * x_2 + x_3 * x_4, x_1^{11} + x_3^2, \\ x_1^{11} + x_2 * x_4, x_1^5 * x_4 + x_2 * x_3, x_1^5 * x_3 + x_2^2]$$

Tanım 5.1.6. $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ vektörü için, a^+ vektörü eğer $a_i \geq 0$ ise,

$a^+ = (0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0)$ ve $a^- = a^+ - a$ olarak tanımlanır.

Bu durumda, $a = a^+ - a^-$ olarak yazılır.[4]

Örnek 5.1.7. $a = (3, -2, -5, 1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^6$ vektörünü ele alalım. a^+ ve a^- vektörlerini bulalım.

$a_1 = 3$ olup $a_1 > 0$ olduğundan a^+ vektörünün elemanıdır.

$a_2 = -2$ olup $a_2 < 0$ olduğundan a^+ vektörünün elemanı değildir.

$a_3 = -5$ olup $a_3 < 0$ olduğundan a^+ vektörünün elemanı değildir.

$a_4 = 1$ olup $a_4 > 0$ olduğundan a^+ vektörünün elemanıdır.

$a_5 = 0$ olup $a_5 \geq 0$ olduğundan a^+ vektörünün elemanıdır.

$a_6 = 0$ olup $a_6 \geq 0$ olduğundan a^+ vektörünün elemanıdır.

$a^+ = (3, 0, 0, 1, 0, 0)$ olarak yazılır. Bu durumda,

$a^- = a^+ - a = (3, 0, 0, 1, 0, 0) - (3, -2, -5, 1, 0, 0) = (0, 2, 5, 0, 0, 0)$ olup

$a^- = (0, 2, 5, 0, 0, 0)$ vektörü elde edilir.

olur.

5.2 RF-BAĞINTILAR

Tanım 5.2.1. $G = \langle g_1, \dots, g_2 \rangle$ bir Arf sayısal yarıgrup ve $f \in PF'(G)$ olsun.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektörleri $RF(f)$ 'nin satır vektörleri ve $1 \leq i < j \leq n$ için

$a_{ij} = a_i - a_j$ iken $\phi = X^{a_{ij}^+} - X^{a_{ij}^-} \in I_G$ formundaki binom bağıntısına $RF(f) -$ bağıntı veya $RF -$ bağıntı denir.[4]

Yardımcı Teorem 5.2.2. RF-matrisinin satır vektörlerini $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olarak alalım ve $1 \leq i < j \leq n$ olan $\forall i, j$ sayıları için $a_{ij} = a_i - a_j$ olarak alalım. Bu durumda, $i < j$ için $\phi = X^{a_{ij}^+} - X^{a_{ij}^-} \in I_G$ olur. Aynı zamanda, $der(\phi_{ij}) \leq f + e_i + e_j$ 'dir.[4]

İspat. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektörlerini $RF(f)$ matrisinin satır vektörleri olarak alalım. O halde, $1 \leq i < j \leq n$ için,

$$f = a_{i1}e_1 + \dots + a_{ii}e_i + \dots + a_{in}e_n, (a_{ii} = -1)$$

$$f = a_{j1}e_1 + \dots + a_{jj}e_j + \dots + a_{jn}e_n, (a_{jj} = -1)$$

Aynı zamanda,

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}), (a_{ii} = -1)$$

$$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{ji}, \dots, a_{jj}, \dots, a_{jn}), (a_{jj} = -1)$$

yazabiliriz.

$$f = a_{i1}e_1 + \dots + (-1)e_i + \dots + a_{ij}e_j + \dots + a_{in}e_n$$

$$f + e_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{i(i-1)}e_{i-1} + 0 \cdot e_i + a_{i(i+1)}e_{i+1} + \dots + a_{ij}e_j + \dots + a_{in}e_n$$

Bu eşitliğin her iki tarafı e_j ile toplanırsa,

$$f + e_i + e_j = a_{i1}e_1 + \dots + a_{i(i+1)}e_{i-1} + 0 \cdot e_i + a_{i(i+1)}e_{i+1} + \dots + (a_{ij} + 1)e_j + \dots + a_{in}e_n$$

elde edilir. Böylece, $f + e_i + e_j$ 'nin bir faktörizasyonunun katsayı vektörü

$$(a_{i1}, \dots, a_{i(i+1)}, 0, a_{i(i+1)}, \dots, a_{ij} + 1, \dots, a_{in})$$

olarak yazılır. Şimdi, bu vektörün $a_i + n_i + n_j$ vektörüne eşit olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} a_i + n_i + n_j &= (a_{i1}, \dots, a_{i(i-1)}, -1, a_{i(i+1)}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}) \\ &\quad + (0, \dots, \underbrace{1}_{i.\text{bileşen}}, \dots, 0) + (0, \dots, 1, \dots, 0) \\ &= (a_{i1}, \dots, a_{i(i-1)}, -1 + 1, a_{i(i+1)}, \dots, a_{ij} + 1, \dots, a_{in}) \\ &= (a_{i1}, \dots, a_{i(i-1)}, 0, a_{i(i+1)}, \dots, a_{ij} + 1, \dots, a_{in}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$f = a_{j1}e_1 + \cdots + a_{ji}e_i + \cdots + \underbrace{a_{jj}}_{-1}e_j + \cdots + a_{jn}e_n$$

$$f + e_i = a_{j1}e_1 + \cdots + a_{ji}e_i + \cdots + a_{j(j-1)}e_{j-1} + 0 \cdot e_j + a_{j(j+1)}e_{j+1} + \cdots + a_{jn}e_n$$

eşitliğinin her iki tarafı e_i ile toplanırsa,

$$f + e_i + e_j = a_{j1}e_1 + \cdots + (a_{ji} + 1)e_i + \cdots + a_{j(j-1)}e_{j-1} + 0 \cdot e_j + a_{j(j+1)}e_{j+1} + \cdots + a_{jn}e_n$$

bulunur ki, bu eşitlikten $f + e_i + e_j$ 'nin bir faktörizasyonunun katsayı vektörü

$$(a_{j1}, \dots, a_{ji} + 1, \dots, a_{j(j-1)}, 0, a_{j(j+1)}, \dots, a_{jn})$$

olarak bulunur. Yine,

$$\begin{aligned} a_j + n_i + n_j &= (a_{j1}, a_{j2}, \dots, \underbrace{a_{ji}}_{i. \text{ bileşen}}, \dots, -1, \dots, a_{jn}) + (0, \dots, \underbrace{1}_{j. \text{ bileşen}}, \dots, 0) \\ &+ (0, \dots, \underbrace{1}_{i. \text{ bileşen}}, \dots, 0) = (a_{j1}, \dots, a_{ji} + 1, \dots, -1 + 1, \dots, a_{jn}) \\ &= (a_{j1}, \dots, a_{ji} + 1, \dots, 0, \dots, a_{jn}) \end{aligned}$$

olduğundan $a_j + n_i + n_j$ vektöründe bu katsayı vektörüne eşit olur.

$$(a_i + n_i + n_j) - (a_j + n_i + n_j) = a_i - a_j = a_{ij}$$

aynı zamanda,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, -1, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}) - (a_{j1}, \dots, a_{ji}, \dots, -1, \dots, a_{jn}) \\ &= (a_{i1} - a_{j1}, \dots, -1 + a_{ji}, \dots, a_{ij} - 1, \dots, a_{in} - a_{jn}) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} &(a_{i1} - a_{j1})e_1 + \cdots + (-1 + a_{ji})e_i + \cdots + (a_{ij} - 1)e_j + \cdots + (a_{in} - a_{jn})e_n \\ &= (a_{i1}e_1 + \cdots + (-1)e_i + \cdots + a_{ij}e_j + \cdots + a_{in}e_n) \\ &\quad - (a_{j1}e_1 + \cdots + a_{ji}e_i + \cdots + (-1)e_j + \cdots + a_{jn}e_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f - f = 0$$

olduğundan, $c_k = (a_{ik} - a_{jk})$ sayıları a_{ij} vektörünün bileşenleri iken $\sum_{k=1}^n c_k e_k$ olan a_{ij} vektörü elde edilir. Buradan,

$$\Rightarrow \phi_{ij} = X^{a_{ij}^+} - X^{a_{ij}^-} \in I_G$$

olur.

Not 5.2.3. $PF'(G) = PF(G) - F(G)$

Örnek 5.2.4.

$$G = \langle 3, 4, 5 \rangle = \{0, 3, \rightarrow\}$$

Arf sayısal yarıgrubu olsun. RF-bağıntılar metodu kullanılarak G Arf sayısal yarıgrubunun ideallerini bulalım.

RF-matrisini yazabilmemiz için sözde-Frobenius kümesi: $PF(G) = \{1, 2\}$

$$PF'(G) = PF(G) - F(G) \Rightarrow PF'(G) = \{1\}$$

$f = 1 \in PF'(G)$ için,

$$RF(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$RF(1)$ -matrisinin satır vektörleri;

$$a_1 = (-1, 1, 0), \quad a_2 = (0, -1, 1), \quad a_3 = (2, 0, -1)$$

$RF(1)$ -matrisinde birinci ve ikinci satırların farklarını alırsak;

$$a_{12} = a_1 - a_2 = (-1, 1, 0) - (0, -1, 1) = (-1, 2, -1)$$

$a_{12} = (-1, 2, -1) \in \mathbb{Z}^3$ vektörü için,

$$a_{12}^+ = (0, 0, 2) \text{ ve } a_{12}^- = a_{12}^+ - a_{12} \text{ olduğundan,}$$

$$a_{12}^- = (1, 0, 1) \text{ olarak bulunur.}$$

Bu durumda Yardımcı Teorem 5.1.2. kullanılarak

$x^{a_{12}^+} = x_3^2$ ve $x^{a_{12}^-} = x_1x_3$ elemanları elde edilir.

Böylece $\phi_{12} = x_3^2 - x_1x_3 \in I_G$ binom üretici elde edilir.

Benzer şekilde a_{13} ve a_{23} ile elde edilen binom üreticilerini bulalım.

$$a_{13} = a_1 - a_3 = (-3, 1, 1)$$

$$a_{13}^+ = (0, 1, 1) \text{ ve } a_{13}^- = (3, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x^{a_{13}^+} = x_2x_3 \text{ ve } x^{a_{13}^-} = x_1^3$$

Buradan,

$$\phi_{13} = x_2x_3 - x_1^3 \in I_G$$

binom üretici elde edilir.

$$a_{23} = a_2 - a_3 = (-2, -1, 2)$$

$$a_{23}^+ = (0, 0, 2) \text{ ve } a_{23}^- = (2, 1, 0)$$

$$\Rightarrow x^{a_{23}^+} = x_3^2 \text{ ve } x^{a_{23}^-} = x_1^2x_2$$

Böylece,

$$\phi_{13} = x_3^2 - x_1^2x_2 \in I_G$$

binom üreticini elde ederiz.

Böylece, I_G 'nin 3 minimal üretici

$$I_G = \langle x_3^2 - x_1x_3, x_2x_3 - x_1^3, x_3^2 - x_1^2x_2 \rangle$$

olarak yazılır.

Örnek 5.2.5.

$$G = \langle 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17 \rangle = \{0, 7, 9, 11, \rightarrow\}$$

G Arf sayısal yarıgrubunun ideallerini RF-matrisleri metodunu kullanarak bulalım.

$$H(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\} \text{ ve } F(G) = 10 \text{ ve } PF(G) = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

$$PF'(G) = PF(G) - F(G) \Rightarrow PF'(G) = \{2,4,5,6,8\}$$

$$f = 8 \in PF'(G),$$

$$RF(8) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$RF(8)$ matrisinin satır vektörleri,

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), & a_2 &= (0, -1, 0, 0, 0, 0, 1), & a_3 &= (1, 0, -1, 1, 0, 0, 0) \\ a_4 &= (0, 1, 1, -1, 0, 0, 0), & a_5 &= (3, 0, 0, 0, -1, 0, 0), & a_6 &= (2, 1, 0, 0, 0, -1, 0) \\ a_7 &= (1, 2, 0, 0, 0, 0, -1) \end{aligned}$$

$RF(8)$ matrisindeki birinci ve ikinci satırın farklarını alırsak,

$$a_{12} = a_1 - a_2 = (-1, 1, 0, 0, 0, 1, -1)$$

$$a_{12}^+ = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \text{ and } a_{12}^- = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow x^{a_{12}^+} = x_2 x_6 \text{ ve } x^{a_{12}^-} = x_1 x_7 \text{ o halde,}$$

$$\phi_{12} = x_2 x_6 - x_1 x_7 \in I_G \text{ binom üretici elde edilir.}$$

$RF(8)$ matrisinin birinci ve üçüncü satır vektörlerinin farkını alırsak,

$$a_{13} = a_1 - a_3 = (0, 0, 1, -1, 0, 1, 0)$$

$$a_{13}^+ = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) \text{ ve } a_{13}^- = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x^{a_{13}^+} = x_3 x_6 \text{ ve } x^{a_{13}^-} = x_4 \text{ bu durumda,}$$

$$\phi_{13} = x_3 x_6 - x_4 \in I_G$$

Benzer şekilde işlemler yapılarak aşağıdaki binom üreticileri elde edilir.

$$\phi_{14} = x_4 x_6 - x_1 x_2 x_3 \in I_G, \quad \phi_{15} = x_5 x_6 - x_1^4 \in I_G, \quad \phi_{16} = x_6^2 - x_1^3 x_2 \in I_G$$

$$\begin{aligned}
\phi_{17} &= x_6x_7 - x_1^2x_2^2 \in I_G, \phi_{23} = x_3x_7 - x_1x_2x_4 \in I_G, \phi_{24} = x_4x_7 - x_2^2x_3 \in I_G \\
\phi_{25} &= x_5x_7 - x_1^3x_2 \in I_G, \phi_{26} = x_6x_7 - x_1^2x_2^2 \in I_G, \phi_{27} = x_7^2 - x_1x_2^3 \in I_G \\
\phi_{34} &= x_1x_4^2 - x_2x_3^2 \in I_G, \phi_{35} = x_4x_5 - x_1^2x_3 \in I_G, \phi_{36} = x_4x_6 - x_1x_2x_3 \in I_G \\
\phi_{37} &= x_4x_7 - x_2x_3 \in I_G, \phi_{45} = x_2x_3x_5 - x_1^3x_4 \in I_G, \phi_{46} = x_3x_6 - x_1^2x_4 \in I_G \\
\phi_{47} &= x_3x_7 - x_1x_2x_4 \in I_G, \phi_{56} = x_1x_6 - x_2x_5 \in I_G, \phi_{57} = x_1^2x_7 - x_2^2x_5x_7 \in I_G \\
\phi_{67} &= x_1x_7 - x_2x_6 \in I_G
\end{aligned}$$

Elde edilen binom üreteçlerinden aynı olanlar ve birbirinin terimi olarak yazılanlar çıkarılarak minimal binom üreteç kümesi elde edilir.

Bu durumda minimal binom üreteç kümesi;

$$\begin{aligned}
I_G = \langle &x_2x_6 - x_1x_7, \ x_2x_3 - x_4, \ x_4x_6 - x_1x_2x_3, \ x_5x_6 - x_1^4, \ x_6^2 - x_1^3x_2, \\
&x_6x_7 - x_1^2x_2^2, x_4x_7 - x_2^2x_3, \ x_5x_7 - x_1^3x_2, \ x_7^2 - x_1x_2^3, \ x_1x_4^2 - x_2x_3^2, \\
&x_4x_5 - x_1^2x_3, \ x_4x_7 - x_2x_3, x_2x_3x_5 - x_1^3x_4, \ x_3x_6 - x_1^2x_4, \\
&x_1x_6 - x_2x_5, \ x_1^2x_7 - x_2^2x_5x_7 \rangle
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

BÖLÜM 6 SONUÇLAR

Yapılan bu çalışmada sayısal yarıgrupların ne olduğu ve nasıl elde edildiğine dair bilgiler verilmiştir. Elde edilen sayısal yarıgrupların bazı özellikleri verilmiştir. Herhangi bir sayısal yarıgrubun bir Arf sayısal yarıgrup olabilmesi için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Sayısal yarıgruplarda verilen özelliklerin hepsinin özel bir sınıfı olan Arf sayısal yarıgruplarda geçerli olduğu kabul edilmiştir. Herhangi bir Arf sayısal yarıgrubunu oluşturabilmek için gerekli olan iletken ve Frobenius sayıları kullanarak katlılığa bağlı olarak Arf sayısal yarıgruplarının üreteçlerini bulabilme formülleri tanımlanmıştır. Bulmuş olduğumuz Arf sayısal yarıgruplarının sözde-Frobenius kümesi hesaplanmış ve bu kümeye bağlı olarak RF-matrisleri yazılmıştır. Yazmış olduğumuz RF-matrislerini satır vektörlerine ayırarak, Arf sayısal yarıgrupları için ideallerin RF-matrisleri yöntemi ile nasıl bulunduğu açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Assi and P. A. Garcia-Sanchez, Numerical Semigroups and Applications, 1st edition, RSME Springer Series, Springer (2016), DOI: 10.1007/978-3-319-41330-3.
- [2] Arf C., Une interpretation algebrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algebrique, Proceedings of the London Mathematical Society s2-50(1 (1945)), 256 – 287, DOI: 10.1112/plms/s2-50.4.256.
- [3] Brauer, A. 1942. *On a problem of partitions*. Amer. J. Math. 64:2999-312.
- [4] Çalışkan A., Almost Gorenstein Single Curves, Master's thesis, Balıkesir institute of science, Balıkesir, Türkiye. (2020)
- [5] Eto, Kazufumi, 2017. On Row-Factorization matrices, Journal of Algebra, Number Theory: Advances and applications,
- [6] Fröberg, R., Gottlieb, C., Haggkvist, R. 1987. On numerical semigroups. Semigroup Forum, 35:63-83.
- [7] GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, Version 4.12.2, The GAP Group (2014), URL: <http://www.gap-system.org>, accessed (December 2022).
- [8] J. Herzog and K.-I. Watanabe, Almost symmetric numerical semigroups, Semigroup Forum 98 (2019), 589 – 630, DOI: 10.1007/s00233-019-10007-2.
- [9] J. Lipman, Stable ideals and Arf rings, American Journal of Mathematics 93(3) (1971), 649 685, DOI: 10.2307/2373463.
- [10] J. C. Rosales and M. B. Branco, The Frobenius problem for numerical semigroups with multiplicity four, Semigroup Forum 83 (2011), 468 – 478, DOI: 10.1007/s00233-011-9328-4.
- [11] J. C. Rosales and P. A. Garcia-Sanchez, Numerical Semigroups, 1st edition, Developments in Mathematics series, Vol. 20, Springer New York, NY, ix + 181 pages, (2009), DOI: 10.1007/978-1-4419-0160-6.

- [12] J. J. Sylvester, 1884, “Mathematical Questions with Their Solutions”, *Educaitonal Times*, 41, 171-178
- [13] Karakaş Hİ. Arf Numerical semigroups with multiplicity 9 and 10. In Proceedings of International Meeting on Numerical semigroups with Applications; Cortona, Italy; 2020. pp. 163-183.
- [14] P. A. Garcia-Sanchez, B. A. Heredia, H.İ. Karakaş and J. C. Rosales, Parametrizing Arf numerical semigroups, *Journal of Algebra and Its Applications* 16(11) (2017), 1750209, DOI: 10.1142/S0219498817502097.
- [15] P. DuVal, The Jacobian algorithm and the multiplicity sequence of an algebraic branch, *Revue de la faculte des sciences de l’universite d’Istanbul, Serie A VII* (1942), 107 – 112.
- [16] Süer, M., A Class of Arf Numerical Semigroups, PhD THESIS (2013), Dicle University Faculty of Science, Diyarbakır.
- [17] Süer, M., Karakaş, H.I., İlhan, S.: The family of Arf numerical semigroups with multiplicity eight. Unpublished (2017), 18pp.
- [18] Süer, M., Yalçın, B.Y. (2018). The special gaps of Arf numerical semigroups with small multiplicity. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*. 20(2), pp.437 - 459. <https://dx.doi.org/10.25092/baunfbed.485589>

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Gülşah BAHAR

ÖĞRENİM DURUMU

Derece Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Gaziantep Üniversitesi	2024
Lisans	Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi	2021
Lise	Fitnat Nuri Tekerekoğlu Anadolu Lisesi	2016

YAYINLAR VE BİLDİRİLER

RF-Matrices of Arf Numerical Semigroups With Small Multiplicity
DOI: 10.26713/cma.v14i2.2126

Arf Numerical Semigroups With Low Multiplicity via Gröbner Basis
DOI: 10.22436/jmcs.032.02.07

RF-Matrices and RF relations of low multiplicity Arf numerical semigroups.

RF-Matrices and RF relations of high multiplicity Arf numerical semigroups.