



**ARİTMETİK FONKSİYONLAR HALKASI
VE RASYONEL FONKSİYONLAR
GRUBU ÜZERİNE**

ADEM ÜNAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DOÇ. DR. ADEM ŞAHİN
Haziran - 2019
Her hakkı saklıdır**

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARİTMETİK FONKSİYONLAR HALKASI
VE RASYONEL FONKSİYONLAR
GRUBU ÜZERİNE

ADEM ÜNAL

TOKAT
Haziran - 2019

Her hakkı saklıdır

Adem ÜNAL tarafından hazırlanan “Aritmetik Fonksiyonlar Halkası ve Rasyonel Fonksiyonlar Grubu Üzerine” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 13 HAZİRAN 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çekluğu~~ ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANA BİLİM DALI nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman

Doç. Dr. Adem ŞAHİN

Üye

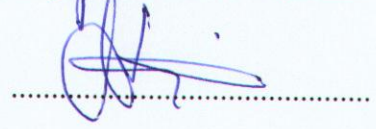
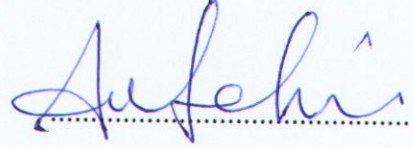
Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Üye

Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi



ONAY

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

---/---/2019



TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

ADEM ÜNAL
13 Haziran 2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARİTMETİK FONKSİYONLAR HALKASI VE RASYONEL FONKSİYONLAR GRUBU ÜZERİNE

ADEM ÜNAL

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ADEM ŞAHİN)

Bu tez çalışmasında, ilk olarak aritmetik fonksiyonlar, aritmetik fonksiyonların dirichlet çarpımı, çarpımsal ve tam çarpımsal fonksiyonlar ile ilgili temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde duruldu. Daha sonra tam çarpımsal fonksiyonlar tarafından üretilen çarpımsal fonksiyonların bir alt grubu olarak tanımlanan rasyonel fonksiyonlar grubu, üreteç fonksiyonlar ve rasyonel fonksiyonlar grubunun lokal özellikleri üzerinde çalışıldı. Yapılan bu çalışmalar doğrultusunda Fibonacci ve Lucas polinomlarının elde edilmesinde kullanılan farklı bir yöntem incelendi. Son olarak bu yöntem kullanılarak literatürde var olan sayı dizileri farklı bir şekilde elde edildi.

2019, 97 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Aritmetik fonksiyon, çarpımsal fonksiyon, rasyonel fonksiyon, üreteç fonksiyonu, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları.

ABSTRACT

MASTER THESIS

ON THE RING OF ARITHMETIC FUNCTIONS AND THE GROUP OF RATIONAL FUNCTIONS

ADEM ÜNAL

**TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ADEM ŞAHİN)

In this thesis, firstly focused on arithmetic functions, dirichlet multiplication of arithmetic functions, basic definitions, theorems and the results related to multiplicative and complete multiplicative functions. Then the group of rational functions which were defined as a subgroup of multiplicative functions produced by complete multiplicative functions, generating functions and local properties of the group of rational functions were studied. According to these studies, a different method for obtaining Fibonacci and Lucas polynomials was examined. Finally the number sequences existing in the literature are obtained by using this method.

2019, 97 PAGES

KEYWORDS: Arithmetic function, multiplicative function, rational function, generating function, generalized Fibonacci and Lucas polynomials.

ÖNSÖZ

Bu tezimin her safhasında bana yol gösteren, maddi ve manevi desteğini sürekli hissettiğim danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Adem ŞAHİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte manevi desteklerini her daim hissettiğim canım eşim Songül'e, kızım Elif'e ve oğlum Samet'e sonsuz sevgilerle.

ADEM ÜNAL

13 Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER.....	v
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Aritmetik Fonksiyonlar.....	9
2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımı.....	26
3. ARİTMETİK FONKSİYONLAR HALKASINDA TERSİNİR ELEMENLARIN OLUŞTURDUĞU GRUBUN BİR ALT GRUBU	47
3.1. Rasyonel Fonksiyonlar Grubu.....	47
3.2. Üreteç Fonksiyonları.....	57
4. RASYONEL FONKSİYONLAR GRUBUNUN LOKAL ÖZELLİKLERİ	68
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ ve LUCAS POLİNOMLARI	78
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	94
7. KAYNAKLAR	96
8. ÖZGEÇMİŞ.....	97

SİMGELER

Simgeler

Açıklamalar

 ϕ

Euler fonksiyonu

 μ

Möbius fonksiyonu

 Λ

Mangoldt fonksiyonu

 σ

Bölen fonksiyonu

 λ

Liouville fonksiyonu

 $\mathbb{M}$

Çarpımsal fonksiyonlar kümesi

 $\mathbb{A}$

Aritmetik fonksiyonlar kümesi

 $M^{\blacksquare}$

Rasyonel fonksiyonlar kümesi

 $\mathbb{M}_1$

Tam çarpımsal fonksiyonlar kümesi

 $*$

Aritmetik fonksiyonların dirichlet çarpımı

 $F_{k,n}$

Genelleştirilmiş Fibonacci polinomu

 $G_{k,n}$

Genelleştirilmiş Lucas polinomu

 M_k $\{\gamma \in M^{\blacksquare}; \gamma = \alpha * \cdots * \alpha, \ k \text{ defa}, \alpha \in M_1\}$

1. GİRİŞ

Aritmetik olarak adlandırılan Sayılar Teorisi matematik biliminde önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda bilgisayar bilimlerinin hızlı gelişimi sonucu önemi ve uygulama alanları hızla artmaktadır. Bu alanlardan bazıları şifreleme sistemleri, iletişim sistemleri, finansal tahminler ve kuantum bilgisayarlardır.

Matematğin tüm alanlarında temel oluşturan fonksiyon konusu sayılar teorisinde de aritmetik fonksiyon veya teorik sayı fonksiyonu olarak ele alınmıştır. Aritmetik fonksiyonlar pozitif tamsayılar kümesinden reel veya kompleks sayılar kümesine tanımlanan bir fonksiyondur. Literatürde ve bu çalışmada incelenen başlıca aritmetik fonksiyonlar; Euler fonksiyonu, Möbius fonksiyonu, Mangoldt fonksiyonu, Bölün fonksiyonları ve Liouville fonksiyonudur.

Aritmetik fonksiyonlar, üzerinde tanımlanan Dirichlet çarpım ile birlikte yeni cebirsel yapı elde edilmektedir. Aritmetik fonksiyonlar kümesinin bir alt kümesi olan $f(1) \neq 0$ biçimindeki bütün aritmetik fonksiyonlar kümesi, Dirichlet çarpıma göre bir değişmeli grup oluşturmaktadır. Bu grubun alt grupları olan çarpımsal ve tam çarpımsal fonksiyonların özellikleri incelenerek aritmetik fonksiyonlar hakkında daha geniş bilgilere ulaşılabilmektedir.

Aritmetik fonksiyonlarda tam çarpımsal fonksiyonlar tarafından üretilen çarpımsal fonksiyonların alt grubuna rasyonel fonksiyonlar grubu adı verilmektedir. Bu grup üzerinde R.Vaidyanathaswamy, T. B. Carroll & A. A. Gioia ve Trueman MacHenry bazı çalışmalar yapmışlardır. Bu gruba rasyonel fonksiyon ismi R.Vaidyanathaswamy tarafından verilmiştir.

1) Vaidyanathaswamy (1931), The theory of multiplicative arithmetic functions adlı eserinde çarpımsal aritmetik fonksiyonlar ve rasyonel fonksiyonlar üzerinde çalışmıştır.

2) Cashwell and Everett (1959), The ring of number-theoretic functions adlı eserlerinde teorik sayı fonksiyonları halkası üzerinde çalışmışlardır.

3) Apostol (1971), Some properties of completely multiplicative arithmetic functions adlı eserinde çarpımsal ve tam çarpımsal aritmetik fonksiyonlar üzerinde bazı çalışmalar yapmıştır.

- 4) Carroll and Gioia (1975), On a subgroup of the group of multiplicative arithmetic functions adlı eserlerinde çarpımsal aritmetik fonksiyonların bir altgrubu olan rasyonel fonksiyonlar üzerinde çalışmışlardır.
- 5) Apostol (1976), Introduction to Analytic Number Theory adlı eserinde Aritmetik fonksiyonlar, aritmetik fonksiyonların dirichlet çarpımı üzerinde çalışmış, bazı aritmetik fonksiyon ve çarpımsal fonksiyon örnekleri ile birçok temel teoremler vermiştir.
- 6) McCarthy (1985), Introduction to arithmetical functions adlı kitabında Aritmetik fonksiyonlar, çarpımsal ve tam çarpımsal fonksiyonlar ve aritmetik fonksiyonların dirichlet çarpımı üzerinde çalışmıştır.
- 7) MacHenry (1999), A Subgroup of the Group of Units in the Ring of Arithmetic Functions adlı eserinde tam çarpımsal fonksiyonlar tarafından üretilen, çarpımsal fonksiyonların bir altgrubu olan rasyonel fonksiyonlar grubu üzerinde çalışmıştır.
- 8) MacHenry (2000), Generalized Fibonacci and Lucas polynomials and Multiplicative Arithmetic Functions adlı eserinde Genelleştirilmiş fibonacci ve lucas polinomları ile çarpımsal aritmetik fonksiyonlar üzerinde çalışmalar yapmıştır.
- 9) Meyer and Rubinfeld (2005), Generating functions adlı eserlerinde üreteç fonksiyonlar üzerinde bazı yöntem ve çalışmalar vermişlerdir.

Tezin Yapısı

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kısaca tezde işlenecek konulardan bahsedilmiş, literatürdeki çalışmalar özetlenmiş, tezin yapısı ve işleyişi anlatılmıştır. İkinci bölümde bazı cebirsel yapılar, aritmetik fonksiyonlar, aritmetik fonksiyonların Dirichlet çarpımları, çarpımsal ve tam çarpımsal fonksiyonlar ve Euler fonksiyonu, Möbius fonksiyonu, Mangoldt fonksiyonu, Liouville fonksiyonu, bölen fonksiyonu gibi aritmetik fonksiyon örnekleri ile ilgili temel tanım, teorem, örnek ve sonuçlar üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde, Vaidyanathaswamy (1931), Apostol (1971), Carroll ve Gioia (1975) tarafından çalışılan rasyonel fonksiyonlar, çarpımsal ve tam çarpımsal aritmetik fonksiyonlar, Meyer ve Rubinfeld (2005) tarafından çalışılan üreteç fonksiyonlar ve literatürdeki bazı sayı dizilerinin üreteç fonksiyonlarına ait bazı temel tanım ve teoremler ile MacHenry (1999)

tarafından yapılan çalışmalar üzerinde durulmuştur. MacHenry (1999) bu çalışmasında rasyonel fonksiyonlar grubunu $M^{\blacksquare}$ ile ifade etmiştir. Ayrıca burada M_1 tam çarpımsal fonksiyonların kümesi olmak üzere

$$M_k = \{\gamma \in M^{\blacksquare}; \gamma = \alpha * \cdots * \alpha, \text{ } k \text{ defa, } \alpha \in M_1\}$$

ve

$$M_k^{\sim} = \{\gamma^{-1} \in M^{\blacksquare}; \gamma \in M_k\}$$

kümelerini bu şekilde tanımlamıştır. Yani $M_k^{\sim}$ fonksiyonları, M_k kümesindeki elemanların Dirichlet çarpımına göre tersleridir. Sonuç olarak da $\gamma_k \in M_k$ ve $\gamma_j \in M_j$ olmak üzere, $M^{\blacksquare}$ grubunun her elemanı $\gamma_k * \gamma_j^{-1}$ çarpımı şeklinde yazılabileceğini ifade etmiştir. Dördüncü bölümde de $\gamma \in M_k$ olmak üzere γ nın her p asalı için

$$P_{\gamma}(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

monik polinomu tarafından lokal olarak tanımlanması incelenmiştir. $\gamma(p^n)$ fonksiyonunun, bu polinomun r_i kökleri ve diskriminantı ile açık olarak nasıl belirlendiği gösterilmiştir. Bu polinomlar $P_{\gamma}(x)$ polinomunun p deki Bell polinomlarıdır. Burada p asalı sabitlenerek $M^{\blacksquare}$ nin lokal davranışı irdelenmiştir. Beşinci bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının, MacHenry (1999) da ifade ettiği yöntemle elde edilişi ve bu yöntemin literatürdeki bazı sayı dizileri üzerine uygulaması yapılmıştır. Tartışma ve sonuç kısmında ise elde edilen sonuçların öneminden bahsedilerek çalışma tamamlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamız içerisinde kullanılan bazı cebirsel yapılar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.0.1. G bir küme, $\otimes$ G üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyomu sağlıyorsa $\langle G, \otimes \rangle$ cebirsel yapısına bir grup denir.

G_1 : Her $a, b, c \in G$ için

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

eşitliği sağlanır. (Birleşme özelliği)

G_2 : Öyle bir $e \in G$ vardır ki, her $x \in G$ için

$$e \otimes x = x \otimes e = x$$

eşitliği sağlanır. (Birim eleman)

G_3 : Her $x \in G$ için G de

$$x \otimes x' = x' \otimes x = e$$

olacak şekilde bir x' elemanı vardır. (x elemanın tersi)

Tanım 2.0.2. İkili işlemi değişmeli olan gruba Abel grup denir.

Tanım 2.0.3. H bir küme, $+$ ve $\cdot$ işlemleri H üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyomu sağlıyorsa $\langle H, +, \cdot \rangle$ cebirsel yapısına bir halkadır denir.

H_1 : $\langle H, + \rangle$ bir Abel gruptur.

H_2 : $\langle H, \cdot \rangle$ nın birleşme özelliği vardır.

H_3 : Her $a, b, c \in H$ için sol dağılma yasası

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

ve sağ dağılma yasası

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

özellikleri vardır.

Tanım 2.0.4. $\cdot$ işleminin değişmeli olduğu $\langle H, +, \cdot \rangle$ halkasına değişmeli halka denir.

Tanım 2.0.5. $\cdot$ işlemine göre birim elemanı olan $\langle H, +, \cdot \rangle$ halkasına birimli halka denir.

Tanım 2.0.6. Sıfır halkası dışındaki bir D halkası birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz ise D ye bir tamlık bölgesi denir.

Tanım 2.0.7. (Fraleigh, 2003) Aşağıdaki şartları sağlayan bir D tamlık bölgesine bir tek çarpanlama bölgesi denir.

D_1 : Sıfır veya tersinir olmayan D nin her elemanı sonlu sayıda indirgenemeyen bir çarpımı şeklinde yazılabilir.

D_2 : Eğer D nin aynı elemanının indirgenemezlerin çarpımı şeklinde iki yazılışı $p_1 p_2 \cdots p_r$ ve $q_1 q_2 \cdots q_s$ ise, $r = s$ dir. Ve p_i ve q_i aralarında ilgili olacak şekilde yeniden numaralandırılabilir.

Örnek 2.0.8. $\mathbb{Z}$ bir tek çarpanlama bölgesidir. Mesela $\mathbb{Z}$ de

$$24 = (2)(2)(3)(2) = (-2)(-3)(2)(2)$$

dir. Burada 3 ve -3 gibi 2 ve -2 aralarında ilgilidir. Böylece sıra ve aralarında ilgililik dışında 24 ün bu iki çarpanlamasında indirgenemez çarpanlar aynıdır.

Tanım 2.0.9. (Karakaş, 2008) F bir Abel grubu, $X \subseteq F$, $X \neq \emptyset$ olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, X kümesi F nin bir tabanıdır denir.

$$(t.1) \quad \langle X \rangle = F,$$

$$(t.2) \quad X \text{ in herhangi } r \text{ tane farklı elemanı } x_1, \cdots x_r \text{ ve } r \text{ tane tamsayı } n_1, \cdots n_r \in \mathbb{Z} \text{ için } n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r = 0 \text{ olunca, daima } n_1 = \cdots = n_r = 0 \text{ olur.}$$

Tanım 2.0.10. (Karakaş, 2008) Eğer X , F nin bir tabanı ise, F grubu X üzerinde serbest Abel grubudur denir.

Uyarı 2.0.11. (Karakas, 2008) F, X üzerinde serbest Abel grubu ise, tanım gereği, $X \neq \emptyset$ dir. Ayrıca, $0 \notin X$ tir; çünkü, $0 \in X$ olunca, tanımdaki ikinci koşul sağlanmaz. Sadece sıfırdan ibaret $\{0\}$ grubu, tabanı $\emptyset$ olan serbest Abel grubu olarak tanımlanır.

Örnek 2.0.12. $\langle \{1\} \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$ ve $n1 = 0$ olan tek tamsayı, $n = 0$ olduğundan, $X = \{1\}$ kümesi, $\mathbb{Z}$ nin bir tabanıdır.

Örnek 2.0.13. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ grubu, $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ üzerinde serbest Abel grubudur. Tanımdaki koşulların sağlandığı,

$$(t.1) \quad (m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \implies (m, n) = m(1, 0) + n(0, 1)$$

$$(t.2) \quad n_1(1, 0) + n_2(0, 1) = (0, 0) \implies n_1 = n_2 = 0$$

ile görülebilir.

Örnek 2.0.14. $\mathbb{Z}_n$ grubu serbest abelyen değildir. Çünkü her $x \in \mathbb{Z}_n$ ve $n \neq 0$ için $nx = 0$ Tanım 2.0.9 deki koşul 2 ile çelişir.

Tanım 2.0.15. (Fraleigh, 2003) Tüm elemanları sonlu mertebeli olan gruba torsiyon grup denir. Sonlu mertebeli tek elemanı birim eleman olan gruba da torsiyonsuz grup denir.

Örnek 2.0.16. $\mathbb{Z}$ grubu torsiyonsuz bir gruptur. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $na = 0$ olacak şekildeki tek a tamsayısı 0 dır. Yani sıfırın dışında mertebesi sonlu olan bir eleman yoktur.

Örnek 2.0.17. $\mathbb{Z}_6$ grubu torsiyon gruptur. $|1| = |5| = 6, |2| = |4| = 3, |3| = 2$ olup tüm elemanların mertebeleri sonludur.

Tanım 2.0.18. Başlangıç şartları $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ şeklinde verilen, $n \geq 1$ için,

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan

$$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

tamsayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir.

Tanım 2.0.19. Başlangıç şartları $l_0 = 2$ ve $l_1 = 1$ şeklinde verilen, $n \geq 1$ için,

$$l_{n+1} = l_n + l_{n-1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan

$$\{l_n\}_{n=0}^{\infty} = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots$$

tamsayı dizisine Lucas sayı dizisi denir.

Tanım 2.0.20. Başlangıç şartları $p_0 = 0$ ve $p_1 = 1$ şeklinde verilen, $n \geq 1$ için,

$$p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} = 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, \dots$$

tamsayı dizisine Pell sayı dizisi denir.

Tanım 2.0.21. Başlangıç şartları $q_0 = 2$ ve $q_1 = 2$ şeklinde verilen, $n \geq 1$ için,

$$q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan

$$\{q_n\}_{n=0}^{\infty} = 2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726, \dots$$

tamsayı dizisine Pell Lucas sayı dizisi denir.

Tanım 2.0.22. Başlangıç şartları $j_0 = 0$ ve $j_1 = 1$ şeklinde verilen, $n \geq 1$ için,

$$j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan

$$\{j_n\}_{n=0}^{\infty} = 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, \dots$$

tamsayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir.

Tanım 2.0.23. Başlangıç şartları $c_0 = 2$ ve $c_1 = 1$ şeklinde verilen, $n \geq 1$ için,

$$c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan

$$\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = 2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, 2047, 4097, \dots$$

tamsayı dizisine Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir.

Tanım 2.0.24. $\{f_n(x)\}$ Fibonacci polinom dizisi, başlangıç şartları $f_0(x) = 0$ ve $f_1(x) = 1$ olmak üzere, $n \geq 1$ için,

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_{n-1}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 2.0.25. $\{l_n(x)\}$ Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları $l_0(x) = 2$ ve $l_1(x) = x$ olmak üzere, $n \geq 1$ için,

$$l_{n+1}(x) = xl_n(x) + l_{n-1}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 2.0.26. $\{P_n(x)\}$ Pell polinom dizisi, başlangıç şartları $P_0(x) = 0$ ve $P_1(x) = 1$ olmak üzere, $n \geq 0$ için,

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 2.0.27. $\{Q_n(x)\}$ Pell Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları $Q_0(x) = 2$ ve $Q_1(x) = 2x$ olmak üzere, $n \geq 0$ için,

$$Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) + Q_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 2.0.28. $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal polinom dizisi, başlangıç şartları $j_0(x) = 0$ ve $j_1(x) = 1$ olmak üzere, $n \geq 0$ için,

$$j_{n+2}(x) = j_{n+1}(x) + 2xj_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 2.0.29. $\{c_n(x)\}$ Jacobsthal Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları $c_0(x) = 2$ ve $c_1(x) = 1$ olmak üzere, $n \geq 0$ için,

$$c_{n+2}(x) = c_{n+1}(x) + 2xc_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

2.1. Aritmetik Fonksiyonlar

Bu bölümde aritmetik fonksiyonların tanımı verilip daha sonra bazı temel aritmetik fonksiyonlar ve bunlarla ilgili teoremler incelenecektir.

Tanım 2.1.1. (Apostol, 1976) Pozitif tamsayılar kümesinden reel veya kompleks sayılar kümesine tanımlanan fonksiyonlara aritmetik fonksiyon ya da teorik sayı fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.2. (Apostol, 1971) f özdeş olarak sıfır olmayan bir aritmetik fonksiyon olmak üzere $(m, n) = 1$ olan her m, n pozitif tamsayı çifti için,

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

eşitliğini gerçekleyen f fonksiyonuna çarpımsal fonksiyon, bütün m, n tamsayıları için

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

eşitliğini sağlayan f aritmetik fonksiyonuna ise tam çarpımsal fonksiyon denir.

Lemma 2.1.3. (Apostol, 1976) f çarpımsal bir fonksiyon ise $f(1) = 1$ dir.

İspat. f fonksiyonu çarpımsal ve her n tamsayısı için $(1, n) = 1$ olduğundan

$$f(n) = f(n1) = f(n)f(1)$$

dir. Ayrıca n nin bütün değerleri için $f(n)$ özdeş olarak sıfır olmadığından $f(n) \neq 0$ olup

$$f(n1) = f(n)f(1)$$

eşitliğinden $f(1) = 1$ elde edilir.

Örnek 2.1.4. Herhangi iki f, g çarpımsal aritmetik fonksiyonlarının $F = fg$ elementer çarpımı ile verilen F fonksiyonu, bütün m, n pozitif tamsayıları için $(m, n) = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F(mn) &= f(mn)g(mn) \\ &= f(m)f(n)g(m)g(n) \\ &= f(m)g(m)f(n)g(n) \\ &= F(m)F(n) \end{aligned}$$

olduğundan çarpımsal fonksiyondur. Ayrıca f ve g aritmetik fonksiyonlarının tam çarpımsal olmaları durumunda $F = fg$ fonksiyonu da tam çarpımsaldır.

Örnek 2.1.5. k gerçel veya karmaşık sayı olmak üzere

$$f_k(n) = n^k$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu göz önüne alalım. Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f_k(mn) = (mn)^k = m^k n^k = f_k(m)f_k(n)$$

olduğundan bu fonksiyon tam çarpımsal fonksiyondur.

Örnek 2.1.6. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $u(n) = 1$ olarak tanımlanan fonksiyon, $f_k(n) = n^k$ fonksiyonunun $k = 0$ için özel durumu olduğundan tam çarpımsal bir fonksiyondur.

Örnek 2.1.7. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$N(n) = n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon

$$N(mn) = mn = N(m)N(n)$$

olduğundan tam çarpımsal fonksiyondur.

Örnek 2.1.8. k gerçel veya karmaşık olmak üzere

$$h_k(n) = \frac{1}{n^k}$$

olarak tanımlanan fonksiyon

$$h_k(mn) = \frac{1}{(mn)^k} = \frac{1}{m^k} \frac{1}{n^k} = h_k(m)h_k(n)$$

olduğundan açık olarak tam çarpımsal fonksiyondur.

Teorem 2.1.9. (Şenay, 2007) Pozitif bir n tamsayısının standart biçimi

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

olmak üzere f çarpımsal fonksiyon ise

$$f(n) = \prod_{i=1}^r f(p_i^{\alpha_i})$$

dir.

İspat. İspatı r üzerinden tümevarımla yapalım. İddia $r = 1$ için açık olarak doğrudur. Şimdi iddianın $r = k$ için doğru olduğunu varsayalım ve

$$n = \prod_{i=1}^{k+1} p_i^{\alpha_i}$$

yazalım. Kabulümüze göre

$$f\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^k f(p_i^{\alpha_i})$$

dir. Ayrıca

$$ebob\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}, p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\right) = 1$$

ve f çarpımsal bir fonksiyon olduğundan

$$f(n) = f\left(\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}\right) \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\right) = f\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}\right) \cdot f(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}})$$

bulunur. Bu sonuçta istediğimiz gibi

$$f(n) = \prod_{i=1}^{k+1} f(p_i^{\alpha_i})$$

olduğunu, yani iddianın $r = k + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Ayrıca bu teoremin karşısı da doğrudur.

Teorem 2.1.10. (Şenay, 2007) Çarpımsal bir f fonksiyonunun tam çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul her p asalı ve her $\alpha > 1$ tamsayısı için

$$f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$$

olmasıdır.

İspat. Çarpımsal bir f fonksiyonunun tam çarpımsal fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu durumda $n = p^\alpha$ ise

$$f(p^\alpha) = f(p.p...p) = f(p).f(p).f(p)...f(p) = f(p)^\alpha$$

elde edilir. Karşıt olarak

$$f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$$

olduğunu varsayalım. Buradan f nin çarpımsal olduğu göz önüne alınarak

$$f(p^\alpha) = f(p.p...p) = f(p).f(p).f(p)...f(p)$$

bulunur. Bu eşitlik her p asalı için gerçekleştiğinden f nin tam çarpımsal olduğu sonucuna varılır.

Tanım 2.1.11. (Apostol, 1976) Pozitif bir m tamsayısı için m den küçük veya eşit ve m ile aralarında asal olan sayıların sayısı $\phi(m)$ ile ifade edilir. Bunu keşfeden Leonard Euler (1707-1783) in isminden dolayı Euler'in ϕ fonksiyonu denir. Bu tanımdan $\phi(1) = 1$ ve p asal olmak üzere $\phi(p) = p - 1$ dir.

Örnek 2.1.12. Bu örnekte $1 \leq m \leq 10$ için $\phi(m)$ değerlerinin hesaplanması verilmiştir.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\phi(m)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Euler ϕ fonksiyonunun çarpımsal olduğunu göstermeden önce aşağıdaki lemmayı vermek ispat için kolaylık sağlayacaktır.

Lemma 2.1.13. (Şenay, 2007) $(m, m') = 1$, ayrıca r, m modülüne göre bir tam kalan sınıfları sistemine ait bütün değerleri, r' de m' modülüne göre bir tam kalan sınıfları sistemine ait bütün değerleri alsın. Bu takdirde $r'm + rm'$ tamsayıları, mm' modülüne göre bir tam kalan sınıfları sistemine ait bütün değerleri alır.

İspat. $r'm + rm'$ lerin sayısının mm' olduğu açıktır. Şimdi bunlardan herhangi ikisinin mm' modülüne göre kongruent olamayacağını gösterelim. Eğer karşıt olarak

$$r'_1m + r_1m' \equiv r'_2m + r_2m' \pmod{mm'}$$

olsaydı, o zaman

$$m(r'_1 - r'_2) + m'(r_1 - r_2) \equiv 0 \pmod{mm'}$$

olurdu. Oysa mm' ile bölünebilme m ile bölünebilmeyi gerektirdiğinden

$$m(r'_1 - r'_2) + m'(r_1 - r_2) \equiv 0 \pmod{m} \implies m'(r_1 - r_2) \equiv 0 \pmod{m}$$

ve $(m, m') = 1$ olduğundan

$$r_1 - r_2 \equiv 0 \pmod{m} \implies r_1 \equiv r_2 \pmod{m}$$

ve benzer olarak

$$r'_1 - r'_2 \equiv 0 \pmod{m'} \implies r'_1 \equiv r'_2 \pmod{m'}$$

bulunur ki tam kalan sınıfları tanımına göre bu mümkün değildir. Böylece bu mm' sayıdaki sayıların hepsi mm' modülüne göre bir tam kalan sınıfları sistemi oluştururlar.

Teorem 2.1.14. (Şenay, 2007) Euler ϕ fonksiyonu çarpımsal fonksiyondur.

İspat. Öncelikle $\phi(1) = 1$ olduğundan ϕ özdeş olarak sıfır değildir. Aksi halde teoremin iddiası açık olurdu. $(m, m') = 1$ ise Lemma 2.1.13 e göre r ve r' sırasıyla m ve m' modülüne göre tam kalan sınıflarındaki bütün değerleri almak üzere $r'm + rm'$ tamsayıları da mm' modülüne göre bir tam kalan sınıfları sistemi oluşturacaktır. Böylece

$$(r'm + rm', mm') = 1$$

koşulunu gerçekleyen yani mm' modülüne göre bir asal kalan sınıfları sistemi oluşturan

$$r'm + rm'$$

tamsayılarının sayısı $\phi(m.m')$ olacaktır. Bu koşulun gerçekleşmesi ise aşağıdaki

$$(r'm + rm', m) = 1 \text{ ve } (r'm + rm', m') = 1$$

koşullarının gerçekleşmesine, bunlar da

$$(rm', m) = 1 \text{ ve } (r'm, m') = 1 \text{ veya } (r, m) = 1 \text{ ve } (r', m') = 1$$

şartlarının gerçekleşmesine denktir. Böylece $(r, m) = 1$ bağıntısını gerçekleyen r lerin sayısı $\phi(m)$ ve $(r', m') = 1$ şartına uyan r' lerin sayısı $\phi(m')$ olduğundan mm' ile asal olan $r'm + rm'$ ler $\phi(m).\phi(m')$ sayıda olacaktır. Buradan

$$\phi(mm') = \phi(m)\phi(m')$$

elde edilir.

Örnek 2.1.15. $\phi(4) = 2 \neq \phi(2)\phi(2) = 1.1 = 1$ olduğundan ϕ tam çarpımsal fonksiyon değildir.

Teorem 2.1.16. (Şenay, 2007) Eğer $n \geq 1$ ise

$$\phi(1) = 1$$

ve

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

dir.

İspat. $\phi(1) = 1$ olduğu açıktır. $n > 1$ tam sayısının standart biçimi tek olduğundan yani; asal çarpanlarının sırasının değişikliği dışında n sayısı asalların çarpımı olarak

tek türlü yazılabildiğinden n tamsayısı

$$n = \prod_{p|n}^r p^{\alpha_i}$$

biçiminde yazılabilir. ϕ çarpımsal olduğundan

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^r \phi(p_i^{\alpha_i})$$

elde edilir. Burada $\phi(p^\alpha)$ değerini hesaplayabilirsek $\phi(n)$ değerini bulmuş oluruz. Tanım gereği $\phi(p^\alpha)$ nın $(x, p^\alpha) = 1$ ve $1 \leq x \leq p^\alpha$ şartlarını gerçekleyen x tamsayılarının sayısı olduğunu biliyoruz. Öte yandan 1 ve p^α arasında tam olarak p^α sayıda x tam sayıları vardır. Ancak bu sayılar arasında p^α ile aralarında asal olmayan

$$p, 2p, 3p, \dots, (p^{\alpha-1} - 2)p, (p^{\alpha-1} - 1)p, p^{\alpha-1}p$$

sayılarının tam olarak $p^{\alpha-1}$ tane olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \phi(p^\alpha) &= p^\alpha - p^{\alpha-1} \\ &= p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ &= n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.17. (Şenay, 2007) Herhangi bir $n \geq 1$ tam sayısı için

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

dir.

İspat. İddianın önce herhangi bir p asal için, n tam sayısının $n = p^\alpha$ şeklinde bir tek asalin kuvveti olması durumunda geçerli olduğunu gösterelim. $\sum_{d|n}$ sembolünün tanımı ve Teorem 2.1.16 ya göre

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \phi(d) &= \phi(1) + \phi(p) + \phi(p^2) + \dots + \phi(p^\alpha) \\
&= 1 + (p-1) + p(p-1) + \dots + p^{\alpha-1}(p-1) \\
&= p^\alpha \\
&= n
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi iddianın $n \geq 1$ olan her n için geçerli olduğunu tümevarımla gösterelim. Bunun için teoremin k tane farklı asal çarpanları bulunan tamsayılar için doğru olduğunu varsayalım ve $k+1$ tane farklı asal çarpanı bulunan herhangi bir N tamsayısı göz önüne alalım. p , N nin asal çarpanlarından biri ve p^α da p nin N yi bölen en büyük kuvveti olsun. Bu durumda n tamsayısı k tane farklı asal çarpanlara sahip olmak ve $(p, n) = 1$ olmak üzere

$$N = p^\alpha n$$

olacaktır. Buradan d nin, n tamsayısının bölenleri cümlesindeki bütün değerleri alması durumunda

$$\{d, pd, p^2d, \dots, p^\alpha d\}$$

cümlesi de N nin bütün bölenlerinin cümlesi olur. Böylece iddianın n için doğru olduğunu göz önüne alarak

$$\begin{aligned}
\sum_{d|N} \phi(d) &= \sum_{d|n} \phi(d) + \sum_{d|n} \phi(pd) + \dots + \sum_{d|n} \phi(p^\alpha d) \\
&= \sum_{d|n} \phi(d) \cdot \{1 + \phi(p) + \phi(p^2) + \dots + \phi(p^\alpha)\} \\
&= \sum_{d|n} \phi(d) \sum_{\delta|p^\alpha} \phi(\delta) \\
&= np^\alpha \\
&= N
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.1.18. $n = 20$ olsun. 20 nin bölenleri 1, 2, 4, 5, 10 ve 20 olduğundan

$$\phi(1) = 1$$

$$\phi(2) = 1$$

$$\phi(4) = \phi(2^2) = 2 \cdot (2 - 1) = 2$$

$$\phi(5) = 4$$

$$\phi(10) = \phi(2 \cdot 5) = (2 - 1) \cdot (5 - 1) = 1 \cdot 4 = 4$$

$$\phi(20) = \phi(2^2 \cdot 5) = 2 \cdot (2 - 1) \cdot (5 - 1) = 2 \cdot 4 = 8$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{d|20} \phi(d) &= \phi(1) + \phi(2) + \phi(4) + \phi(5) + \phi(10) + \phi(20) \\ &= 1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 8 \\ &= 20 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.19. (Apostol, 1976) Möbius fonksiyonu

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } n, 1 \text{ den farklı bir kare ile bölünüyorsa} \\ (-1)^r, & \text{eğer } n = p_1 p_2 \dots p_r \text{ (} p_i \text{ ler farklı asallar) ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyondur.

Örnek 2.1.20. Bu örnekte $1 \leq n \leq 10$ için $\mu(n)$ değerlerinin hesaplanması verilmiştir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Örnek 2.1.21. Bu örnekte bazı tamsayılar için $\mu(n)$ değerleri hesaplanmıştır.

$$\mu(50) = \mu(2 \cdot 5^2) = 0$$

$$\mu(42) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 7) = (-1)^3 = -1$$

$$\mu(210) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) = (-1)^4 = 1$$

Teorem 2.1.22. (Şenay, 2007) Möbius fonksiyonu çarpımsal bir aritmetik fonksiyondur.

İspat. $(m, n) = 1$ olmak üzere m ve n tamsayılarının her ikisi de kare şeklinde birden büyük bir çarpana bölünüyorlarsa Möbius fonksiyonunun tanımına göre

$$\mu(mn) = 0$$

ve

$$\mu(m)\mu(n) = 0$$

olur. Eğer m ve n nin her ikisi de birden büyük bir kare şeklinde bir çarpanla bölünemiyorsa

$$i = 1, 2, \dots, r$$

ve

$$j = 1, 2, \dots, s$$

için p_i ve q_j farklı asallar olmak üzere

$$m = p_1 p_2 \cdots p_r$$

ve

$$n = q_1 q_2 \cdots q_s$$

şeklinde yazılabilecektir. Böylece

$$\mu(m) = (-1)^r$$

$$\mu(n) = (-1)^s$$

ve

$$\mu(mn) = (-1)^{r+s}$$

olup buradan

$$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$$

elde edilir ki, bu da μ fonksiyonunun çarpımsal olması demektir.

Örnek 2.1.23. μ fonksiyonunun tanımından $\mu(4) = 0$ ve $\mu(2) = -1$ olduğu açıktır. Fakat $\mu(4) \neq \mu(2)\mu(2)$ olduğundan μ tam çarpımsal bir fonksiyon değildir.

Tanım 2.1.24. (Apostol, 1976) $n \geq 1$ olmak üzere

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^\alpha, \alpha \geq 1, p \text{ asal ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Mangoldt fonksiyonu denir.

Örnek 2.1.25. Bu örnekte $1 \leq n \leq 10$ için $\Lambda(n)$ değerlerinin hesaplanması verilmiştir.

n	$=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda(n)$	$=$	0	$\log 2$	$\log 3$	$\log 2$	$\log 5$	0	$\log 7$	$\log 2$	$\log 3$	0

Örnek 2.1.26. Bu örnekte bazı tamsayılar için $\Lambda(n)$ değerleri hesaplanmıştır.

$$\Lambda(125) = \Lambda(5^3) = \log 5$$

$$\Lambda(30) = \Lambda(2 \cdot 3 \cdot 5) = 0$$

$$\Lambda(32) = \Lambda(2^5) = \log 2$$

Sonuç 2.1.27. Lemma 2.1.3 e göre $\Lambda(1) = 0$ olduğundan Mangoldt fonksiyonu çarpımsal fonksiyon değildir.

Teorem 2.1.28. (Şenay, 2007) $n \geq 1$ için

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

dir.

İspat. $n = 1$ için

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

eşitliğinin her iki yanı sıfır olduğundan teoremin iddiası bu durumda doğrudur. Böylece $n > 1$ kabul edip

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

yazalım. Buradan her iki tarafın logaritması alınarak

$$\log n = \sum_{i=1}^r \alpha_i \log p_i$$

bulunur. Şimdi

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

eşitliğinin sağındaki toplamı göz önüne alalım. Bu toplamda sıfır olmayan terimler Mangoldt fonksiyonunun tanımı gereği yalnızca $k = 1, 2, \dots, \alpha_i$ ve $i = 1, 2, \dots, r$ için p_i^k şeklindeki bölenlerle oluşacaktır. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \Lambda(d) &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\alpha_i} \Lambda(p_i^k) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\alpha_i} \log p_i \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \log p_i \\ &= \log n \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.29. (Apostol, 1976) Gerçek veya karmaşık olabilen bir k sayısı, $n \geq 1$ ve $k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyona bölen fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.30. (Apostol, 1976)

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

ifadesinde $k = 0$ alınırsa n nin 1 ve n dahil olmak üzere bütün pozitif bölenlerinin sayısını veren aritmetik fonksiyon elde edilir ki, bunu özel olarak $\tau(n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.31. (Apostol, 1976)

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

ifadesinde $k = 1$ alınırsa bu defa n nin bölenlerinin toplamını veren $\sigma(n)$ aritmetik fonksiyonu elde edilir.

Örnek 2.1.32. $n = 12$ ve $k = 0$ için $d = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sigma_k(n) &= \sum_{d|n} d^k \\ \sigma_0(12) &= \sum_{d|12} d^0 \\ \tau(12) &= \sum_{d|12} 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 6\end{aligned}$$

elde edilir. $k = 1$ için

$$\begin{aligned}
 \sigma_k(n) &= \sum_{d|n} d^k \\
 \sigma_1(12) &= \sum_{d|12} d^1 \\
 \sigma(12) &= \sum_{d|12} d \\
 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 \\
 &= 28
 \end{aligned}$$

elde edilir. $k = 2$ için

$$\begin{aligned}
 \sigma_k(n) &= \sum_{d|n} d^k \\
 \sigma_2(12) &= \sum_{d|12} d^2 \\
 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2 \\
 &= 1 + 4 + 9 + 16 + 36 + 144 \\
 &= 210
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.33. (Şenay, 2007) Standart biçimi

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

olan $n > 1$ tamsayısı için

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{(\alpha_i+1)k} - 1}{p_i^k - 1}$$

dir.

İspat. Örnek 2.1.5 den $f_k(n) = n^k$ fonksiyonunun çarpımsal olduğunu biliyoruz.

Buna göre

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

olmak üzere Sonuç 2.2.16 ye göre $\sigma_k(n)$ çarpımsal bir fonksiyon olacaktır. Buradan standart biçimi

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

olan $n > 1$ tamsayısı için Teorem 2.1.9 a göre

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^r \sigma_k(p_i^{\alpha_i})$$

yazabiliriz. O halde $k \neq 0$ için

$$\begin{aligned} \sigma_k(n) &= \prod_{i=1}^r \sigma_k(p_i^{\alpha_i}) \\ &= \prod_{i=1}^r (1 + p_i^k + p_i^{2k} + \cdots + p_i^{\alpha_i k}) \\ &= \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{(\alpha_i+1)k} - 1}{p_i^k - 1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.34. (Şenay, 2007) τ çarpımsal bir fonksiyondur.

İspat. τ fonksiyonunun tanımından $\tau(1) = 1$ olacağı açıktır. $(m, n) = 1$ ise $m.n$ nin her bölüneni sayıların standart biçimlerinin göz önüne alınmasıyla m nin bir bölüneni n nin bir bölünenin çarpımı şeklinde tek olarak gösterilebilecektir. Karşıt olarak böyle her çarpım $m.n$ nin bir bölünenidir. Buna göre

$$\tau(m.n) = \tau(m).\tau(n)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.35. (Şenay, 2007) Eğer $n > 1$ ve

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

ise

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$$

dir.

İspat. Teorem 2.1.34 e göre τ çarpımsal olduğundan Teorem 2.1.9 e göre

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^r \tau(p_i^{\alpha_i})$$

elde edilir. Öte yandan $p_i^{\alpha_i}$ nin bütün pozitif bölenleri

$$1, p_i, p_i^2, \dots, p_i^{\alpha_i}$$

olup bunların sayısı açık olarak $(\alpha_i + 1)$ dır. Buna göre n nin bölenlerinin sayısı her i için

$$\prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$$

yani

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$$

olacaktır.

Örnek 2.1.36. $n = 4500$ için $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

$$\begin{aligned} \tau(n) &= \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1) \\ &= \prod_{i=1}^3 (\alpha_i + 1) \\ &= (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \\ &= (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (3 + 1) \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= 36 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.37. (Apostol, 1976) $p_1, p_2, \dots, p_k$ farklı asal sayılar olmak üzere her $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ pozitif tamsayısı için

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^{a_1+a_2+\dots+a_k}, & n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona Liouville fonksiyonu denir.

Teorem 2.1.38. (Şenay, 2007) Liouville fonksiyonu tam çarpımsal bir fonksiyondur.

İspat. $m = n = 1$ ise

$$\lambda(mn) = \lambda(1) = \lambda(1)\lambda(1) = \lambda(m)\lambda(n)$$

elde edilir. $m = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ ve $n = p_1^{b_1} \dots p_t^{b_t}$ olsun. Bu durumda

$$\lambda(m) = (-1)^{a_1+a_2+\dots+a_k}$$

ve

$$\lambda(n) = (-1)^{b_1+b_2+\dots+b_t}$$

olup

$$\begin{aligned} \lambda(mn) &= (-1)^{a_1+a_2+\dots+a_k+b_1+b_2+\dots+b_t} \\ &= \lambda(m)\lambda(n) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımı

Bu bölümde aritmetik fonksiyonların üzerinde tanımlanan toplama, elementer çarpım ve Dirichlet çarpımı ve bu çarpımın özelliklerini göstereceğiz. Bu çarpım yardımı ile Mobius fonksiyonu ile Euler ϕ fonksiyonu arasındaki ilişkiler ve Dirichlet çarpımına göre aritmetik fonksiyonların terslerinin varlığı ele alınacaktır.

Tanım 2.2.1. (Apostol, 1976) Herhangi iki f ve g aritmetik fonksiyonlarının $f * g$ Dirichlet çarpımı pozitif bir n tamsayısı için değeri

$$\begin{aligned}(f * g)(n) &= \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2)\end{aligned}$$

ile verilen yeni bir aritmetik fonksiyon olarak tanımlanır. Buradaki birinci toplam n nin bütün pozitif tamsayı bölenleri üzerindedir. İkinci toplam, çarpımları n olan pozitif tamsayıların bütün d_1, d_2 sıralı ikileri üzerinden alınmaktadır.

Teorem 2.2.2. (Apostol, 1976) Herhangi f, g aritmetik fonksiyonları için

$$f * g = g * f$$

değişme özelliği geçerlidir.

İspat. Dirichlet çarpımının tanımında bulunan iki toplamın eşit olduğu açıktır. Ayrıca d_2, d_1 sıralı ikililerin cümlesi ile d_1, d_2 sıralı ikililerinin cümlesi birbirinin aynısı olduğundan Dirichlet çarpımının

$$f * g = g * f$$

değişme özelliğinin bulunduğunu gösterir.

Teorem 2.2.3. (Apostol, 1976) Herhangi f, g, h aritmetik fonksiyonları için

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

birleşme özelliği geçerlidir.

İspat. Eşitliğin sol tarafı için $f * g = F$ yazarsak

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(n) &= (F * h)(n) \\
&= \sum_{dd_3=n} F(d)h(d_3) \\
&= \sum_{d_1d_2=d} f(d_1)g(d_2) \sum_{dd_3=n} h(d_3) \\
&= \sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3)
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Eşitliğin sağ tarafı için $G = g * h$ yazarsak

$$\begin{aligned}
(f * (g * h))(n) &= (f * G)(n) \\
&= \sum_{d_1d=n} f(d_1)G(d) \\
&= \sum_{d_1d=n} f(d_1) \sum_{d_2d_3=d} g(d_2)h(d_3) \\
&= \sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3)
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Bu iki sonuç Dirichlet çarpımı için birleşme özelliğinin geçerli olduğunu gösterir.

Tanım 2.2.4. (Apostol, 1971) $\delta(n) = \left[\frac{1}{n} \right] = \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ ise} \\ 0, & n > 1 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona özdeşlik fonksiyonu denir.

($[\]$ sembolü Tam değer gösterimi olarak kullanılmıştır.)

Teorem 2.2.5. (Şenay, 2007) Özdeşlik fonksiyonu tam çarpımsal bir aritmetik fonksiyondur.

İspat. Özdeşlik fonksiyonu tam değer fonksiyonu olarak ifade edilebildiğinden, tam değer fonksiyonunun özelliklerinden faydalananarak her $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}
\delta(m, n) &= \left[\frac{1}{mn} \right] \\
&= \left[\frac{1}{m} \right] \cdot \left[\frac{1}{n} \right] \\
&= \delta(m) \cdot \delta(n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\delta(n)$ özdeşlik fonksiyonunun tam çarpımsal olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.6. (Şenay, 2007) Her f aritmetik fonksiyonu için

$$f * \delta = \delta * f = f$$

dir. Yani özdeşlik fonksiyonu Dirichlet çarpımı için birim fonksiyondur.

İspat.

$$\begin{aligned} (f * \delta)(n) &= \sum_{d|n} f(d) \delta\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} f(d) \left[\frac{d}{n} \right] \end{aligned}$$

ve $d < n$ için $\left[\frac{d}{n} \right] = 0$ olduğundan

$$(f * \delta)(n) = f(n)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.7. (Şenay, 2007) δ özdeşlik fonksiyonu ve f fonksiyonu da $f(1) \neq 0$ olan bir aritmetik fonksiyon olmak üzere

$$f * g = g * f = \delta$$

eşitliğini gerçekleyen g fonksiyonuna f nin Dirichlet tersi denir.

Teorem 2.2.8. (Apostol, 1976) f aritmetik fonksiyonunun $f(1) \neq 0$ olmak üzere

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

ve $n > 1$ için

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|n, d < n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

indirgeme formülleri ile verilen bir tek f^{-1} Dirichlet tersi vardır.

İspat. Verilen bir f fonksiyonu için

$$(f * f^{-1})(n) = \delta(n)$$

denkleminin $f^{-1}(n)$ değerleri cinsinden bir tek çözümünün bulunduğunu n üzerinde tümevarımla göstereyim. Öncelikle $n = 1$ için

$$(f * f^{-1})(1) = \delta(1)$$

veya

$$f(1) \cdot f^{-1}(1) = 1$$

denkleminin $f(1) \neq 0$ olduğundan bir ve yalnız bir tek çözümü vardır ki bu çözüm

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

dir.

Şimdi $k < n$ olan bütün k tamsayıları için $f^{-1}(k)$ değerlerinin tek olarak belirtildiğini kabul edelim. Dolayısıyla

$$(f * f^{-1})(n) = \delta(n)$$

veya

$$\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0$$

denklemini çözmemiz gerekir. Bu denklemi

$$f(1)f^{-1}(n) + \sum_{d|n, d < n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada $d < n$ olan bütün d bölenleri için $f^{-1}(d)$ değerleri tümevarım varsayımı gereği bilindiğinden ve $f(1) \neq 0$ olduğundan üstteki son denklemden $f^{-1}(n)$ için tek olarak belirli olan

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|n, d < n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

değeri elde edilir ki, bu sonuç da ispatı tamamlar.

Örnek 2.2.9. $f(n) = 2n + 3$ biçiminde tanımlanan aritmetik fonksiyon için $f^{-1}(6)$ değerini hesaplayalım.

$f(1) = 5 \neq 0$ olduğundan

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{5}$$

ve 6'nın bölenleri 1, 2, 3 ve 6 olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}(n) &= \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|n, d < n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \\ f^{-1}(6) &= \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|6, d < 6} f\left(\frac{6}{d}\right) f^{-1}(d) \\ &= \frac{-1}{f(1)} [f(6)f^{-1}(1) + f(3)f^{-1}(2) + f(2)f^{-1}(3)] \\ &= -\frac{1}{5} \left[15 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot f^{-1}(2) + 7 \cdot f^{-1}(3) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Denklemdaki $f^{-1}(2)$ ve $f^{-1}(3)$ değerlerini de hesaplayıp yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} f^{-1}(2) &= \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|2, d < 2} f\left(\frac{2}{d}\right) f^{-1}(d) \\ &= -\frac{1}{5} [f(2)f^{-1}(1)] \\ &= -\frac{1}{5} \cdot 7 \cdot \frac{1}{5} \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f^{-1}(3) &= \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|3, d < 3} f\left(\frac{3}{d}\right) f^{-1}(d) \\ &= -\frac{1}{5} [f(3)f^{-1}(1)] \\ &= -\frac{1}{5} \cdot 9 \cdot \frac{1}{5} \\ &= -\frac{9}{25} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}(6) &= -\frac{1}{5} \left[15 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot f^{-1}(2) + 7 \cdot f^{-1}(3) \right] \\ &= -\frac{1}{5} \left[15 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) + 7 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{5} \left[\frac{75 - 63 - 63}{25} \right] \\ &= \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{55}{25}\right) \\ &= \frac{11}{25} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.10. (Şenay, 2007) Dirichlet çarpımının tanımından

$$(f * g)(1) = f(1)g(1)$$

olup $f(1) \neq 0$ ve $g(1) \neq 0$ ise

$$(f * g)(1) \neq 0$$

olacağı açıktır. Böylece $f(1) \neq 0$ olan bütün aritmetik fonksiyonlarının cümlesi, Dirichlet çarpımının tanımından, değişmeli, birleşmeli, birimli ve her elemanı için terslenebilir olduğundan, Dirichlet çarpımına göre Abelyen bir grup oluşturur.

Bilindiği gibi her f ve g fonksiyonları için, $f + g$ toplamı her n için

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre aşağıdaki sonuç yazılabilir:

Sonuç 2.2.11. Tüm aritmetik fonksiyonların kümesi A olmak üzere $\langle A, + \rangle$ cebirsel yapısı bir abel gruptur.

Teorem 2.2.12. (Şenay, 2007) Bütün aritmetik fonksiyonların A cümlesinde $f, g, h \in A$ olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$[f * (g + h)](n) = (f * g + f * h)(n)$$

dağılma özelliği vardır.

İspat. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için ” + ” işlemi ile Dirichlet çarpımının tanımından

$$\begin{aligned}
 [f * (g + h)](n) &= \sum_{d|n} f(d) \left[g\left(\frac{n}{d}\right) + h\left(\frac{n}{d}\right) \right] \\
 &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\
 &= (f * g)(n) + (f * h)(n) \\
 &= (f * g + f * h)(n)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.13. Aritmetik fonksiyonların $(A, +, *)$ halkası birimli değişmeli bir halkadır.

Teorem 2.2.14. (McCarthy, 1985) f ve g çarpımsal iki fonksiyon olmak üzere $f * g$ Dirichlet çarpımları da çarpımsal bir fonksiyondur.

İspat. $(m, n) = 1$ olsun. Bu taktirde

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

olduğundan

$$(f * g)(mn) = \sum_{d|mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right)$$

olacaktır. Sayıların standart biçimlerinden mn nin her d böleninin $d_1 | m$, $d_2 | n$ olmak üzere $d = d_1 d_2$ şeklinde yazılabileceğini ve

$$(d_1, d_2) = \left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right)$$

olduğunu görebiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}
F(mn) &= (f * g)(mn) \\
&= \sum_{d|mn} f(d)g\left(\frac{mn}{d}\right) \\
&= \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1d_2)g\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right) \\
&= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{m}{d_1}\right)g\left(\frac{n}{d_2}\right) \\
&= \sum_{d_1|m} f(d_1)g\left(\frac{m}{d_1}\right) \cdot \sum_{d_2|n} f(d_2)g\left(\frac{n}{d_2}\right) \\
&= F(m)F(n)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tam çarpımsal iki fonksiyonun Dirichlet çarpımının tam çarpımsal olması gerekmediğine ilgi çekilmelidir.

Örnek 2.2.15. Tam çarpımsal bir aritmetik fonksiyon olan Liouville fonksiyonunu göz önüne alalım. Dirichlet çarpımın tanımından

$$(\lambda * \lambda)(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right)$$

yazılabilir. $n = (2^3) = 8$ için

$$\begin{aligned}
(\lambda * \lambda)(2^3) &= \sum_{d|8} \lambda(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \lambda(1)\lambda(8) + \lambda(2)\lambda(4) + \lambda(4)\lambda(2) + \lambda(8)\lambda(1) \\
&= 1 \cdot (-1)^3 + (-1)^1 \cdot (-1)^2 + (-1)^2 \cdot (-1)^1 + (-1)^3 \cdot 1 \\
&= -4
\end{aligned}$$

ve $n = 2$ için

$$\begin{aligned}
 (\lambda * \lambda)(2) &= \sum_{d|2} \lambda(d) \lambda\left(\frac{2}{d}\right) \\
 &= \lambda(1)\lambda(2) + \lambda(2)\lambda(1) \\
 &= 1 \cdot (-1)^1 + (-1)^1 \cdot 1 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Teorem 2.1.10 a göre $(\lambda * \lambda)(n)$ in tam çarpımsal olması için

$$(\lambda * \lambda)(p^\alpha) = (\lambda * \lambda)(p)^\alpha$$

olması gerekmektedir. Fakat

$$\begin{aligned}
 (\lambda * \lambda)(2^3) &\neq (\lambda * \lambda)(2)^3 \\
 -4 &\neq (-2)^3 \\
 -4 &\neq -8
 \end{aligned}$$

olduğundan $(\lambda * \lambda)(n)$ fonksiyonunun tam çarpımsal olmadığı görülmektedir.

Sonuç 2.2.16. f çarpımsal ise $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ eşitliği ile tanımlanan fonksiyon da çarpımsal bir fonksiyondur.

İspat. $f_k(n) = n^k$ fonksiyonundan $k = 0$ için elde edilen $g(n) = 1$ sabit fonksiyonu her n için açık olarak çarpımsal fonksiyon olduğundan Teorem 2.2.14 e göre de $F(n)$ çarpımsal bir fonksiyon olur.

Teorem 2.2.17. (Şenay, 2007) Eğer hem g hem de $f * g$ çarpımsal fonksiyonlar ise f çarpımsal fonksiyondur.

İspat. f nin çarpanlanamaz fonksiyon olduğunu varsayalım ve aynı şekilde

$$F = f * g$$

nin de çarpanlanamaz bir fonksiyon olduğunu gösterirsek iddiayı ispatlamış oluruz. O halde f fonksiyonunu çarpanlanamaz kabul ettiğimizden

$$(m, n) = 1$$

ve

$$f(m, n) \neq f(m)f(n)$$

gerçeklenecek şekilde pozitif m ve n tamsayıları bulunacaktır. Şimdi m ve n yi aritmetik fonksiyon tanım gereği $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olacak şekilde seçmeliyiz. Buna göre eğer $mn = 1$ ise

$$f(1) \neq f(1)f(1) \Rightarrow f(1) \neq 1$$

olur. Hipotez gereği g çarpımsal fonksiyon olduğundan $g(1) = 1$ olup, buradan

$$(f * g) = f(1)g(1) = f(1) \neq 1$$

ve buradan da $f * g$ nin çarpımsal olmadığı olduğu sonucuna varılır.

Eğer $mn > 1$ ise çarpımsal fonksiyon tanımındaki uyarılarımızdan $d_1 d_2 < mn$ ve $(d_1 d_2) = 1$ olan bütün d_1, d_2 pozitif tamsayıları için

$$f(d_1 d_2) = f(d_1)f(d_2)$$

yazabiliriz. Şimdi bu durumu Teorem 2.2.14 de $d_1 = m$ ve $d_2 = n$ halini hariç tutarak değerlendirelim. Böylece

$$\begin{aligned} F(mn) &= (f * g)(mn) \\ &= \sum_{\substack{d_1 | m, d_2 | n \\ d_1 d_2 < mn}} f(d_1 d_2) g\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right) + f(mn)g(1) \\ &= \sum_{\substack{d_1 | m, d_2 | n \\ d_1 d_2 < mn}} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{m}{d_1}\right)g\left(\frac{n}{d_2}\right) + f(mn) \\ &= \sum_{d_1 | m} f(d_1)g\left(\frac{m}{d_1}\right) \cdot \sum_{d_2 | n} f(d_2)g\left(\frac{n}{d_2}\right) - f(m)g(1)f(n)g(1) + f(mn) \\ &= F(m)F(n) - f(m)f(n) + f(mn) \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan

$$f(mn) \neq f(m)f(n)$$

olduğu göz önüne alınarak

$$F(mn) \neq F(m)F(n)$$

elde edilir ki bu $f * g$ nin çarpımsal olmadığını gösterir. Bu da hipotezle çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.18. (McCarthy, 1985) Çarpımsal bir f fonksiyonunun f^{-1} Dirichlet tersi de çarpımsal bir fonksiyondur.

İspat. Kabul edelim ki $(m, n) = 1$ olsun. Eğer $m = n = 1$ ise bu taktirde

$$f^{-1}(mn) = 1 = f^{-1}(m)f^{-1}(n)$$

elde edilir. Kabul edelim ki $mn \neq 1$ olsun. $(m_1, n_1) = 1$ ve $m_1 n_1 < mn$ için

$$f^{-1}(m_1 n_1) = f^{-1}(m_1) f^{-1}(n_1)$$

elde edilir. Eğer $m = 1$ veya $n = 1$ ise

$$f^{-1}(mn) = f^{-1}(m)f^{-1}(n)$$

dir.

Kabul edelim ki $m \neq 1 \neq n$ olsun. Teorem 2.2.8 den dolayı

$$f^{-1}(mn) = - \sum_{d|mn, d>1} f(d) f^{-1}\left(\frac{mn}{d}\right)$$

dir. $(m, n) = 1$ ve mn nin bütün d bölenleri $d_1 | m$ ve $d_2 | n$ olacak şekilde $d = d_1 d_2$ biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla $(d_1, d_2) = 1$ ve $(m | d_1, n | d_2) = 1$ dir. Bu taktirde

$$f^{-1}(mn) = - \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n \\ d_1 d_2 > 1}} f(d_1 d_2) f^{-1}\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right)$$

ve $(m|d_1, n|d_2) < mn$ olduğundan

$$\begin{aligned}
f^{-1}(mn) &= - \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n \\ d_1 d_2 > 1}} f(d_1) f(d_2) f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right) f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right) \\
&= -f^{-1}(m) \sum_{d_2|n, d_2 > 1} f(d_2) f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right) - \sum_{d_1|m, d_1 > 1} f(d_1) f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right) \\
&\quad - \left(- \sum_{d_1|m, d_1 > 1} f(d_1) f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right) \right) \left(- \sum_{d_2|n, d_2 > 1} f(d_2) f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right) \right) \\
&= f^{-1}(m) f^{-1}(n) + f^{-1}(m) f^{-1}(n) - f^{-1}(m) f^{-1}(n) \\
&= f^{-1}(m) f^{-1}(n)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.19. (Şenay, 2007) μ fonksiyonu Tanım 2.1.19 da verilen fonksiyon olmak üzere,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n = 1 \text{ ise,} \\ 0, & \text{eğer } n > 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

dir.

İspat. Eğer $n = 1$ ise tanımdan

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

olur. Şimdi $n > 1$ için

$$M(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$$

olsun. Buradan μ çarpımsal olduğundan Sonuç 2.2.16 ye göre $M(n)$ de çarpımsal olur. Böylece n nin standart biçimi

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

ise Teorem 2.1.9 a göre

$$M(n) = \prod_{i=1}^r M(p_i^{\alpha_i})$$

dir. Buna göre her i için

$$\begin{aligned}
M(p_i^{\alpha_i}) &= \sum_{d|p_i^{\alpha_i}} \mu(d) \\
&= \mu(1) + \mu(p_i) + \mu(p_i^2) + \cdots + \mu(p_i^{\alpha_i}) \\
&= 1 + (-1) + 0 + \cdots + 0 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.20. Teorem 2.2.19 den ve özdeşlik fonksiyonunun tanımından dolayı

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n)$$

dir.

Teorem 2.2.21. (Şenay, 2007) μ Möbius fonksiyonu, her $n \in \mathbb{Z}$ için $u(n) = 1$ fonksiyonunun Dirichlet tersidir.

İspat. Teorem 2.2.19 ye göre $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n)$ olduğunu biliyoruz. Buradan Dirichlet çarpımı ve u fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
(\mu * u) &= \sum_{d|n} \mu(d) u\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{d|n} \mu(d) \\
&= \delta(n)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde μ ve u fonksiyonları birbirlerinin Dirichlet tersi olup $u = \mu^{-1}$ ve $\mu = u^{-1}$ dir.

Teorem 2.2.22. (Şenay, 2007) (Möbius birinci ters çevirme formülü) $f(n)$ herhangi bir aritmetik fonksiyon ise

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d_1 d_2 = n} \mu\left(\frac{n}{d_1}\right) F(d_2) \\ &= \sum_{d_1 d_2 = n} \mu(d_1) \sum_{d|d_2} f(d) \\ &= \sum_{d_1 d|n} \mu(d_1) f(d) \\ &= \sum_{d|n} f(d) \sum_{d_1 | \frac{n}{d}} \mu(d_1)\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikteki $f(d)$ nin katsayısı durumunda olan ikinci toplam, Teorem 2.2.19 ye göre $\frac{n}{d} = 1 (n = d)$ dışında sıfırdır. Bu toplam 1 olduğundan son eşitlik $f(n)$ e eşit olup, bu da ispatı tamamlar.

Şimdi teoremin karşısını ispatlayalım. Yani

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d) \Rightarrow F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

olduğunu gösterelim. Dirichlet fonksiyonunun tanımından dolayı

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d) = (F * \mu)(n)$$

yazılabilir. Buradan Dirichlet çarpımının birleşme özelliği ve $\mu = u^{-1}$ olduğu göz önüne alınarak

$$f * u = (F * \mu) * u = F * (\mu * u) = F * \delta = F$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned}F(n) &= \sum_{d|n} f(d) u\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} f(d)\end{aligned}$$

olması demektir.

Teorem 2.2.23. (Şenay, 2007) $n \geq 1$ için

$$\phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

dir.

İspat. Teorem 2.1.17 den $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ olduğunu biliyoruz. Böylece Teorem 2.2.22 e göre

$$F(n) = \sum_{d|n} \phi(d) = n$$

alınırsa

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \sum_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) \\ &= \sum_{d|n} F(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) \\ &= n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \end{aligned}$$

bulunur ki bu sonuç ispatı tamamlar. Buna göre $\frac{\mu(d)}{d}$ çarpımsal olduğundan Sonuç 2.2.16 ye göre $\frac{\phi}{n}$ fonksiyonu ve sonuçta ϕ çarpımsal bir fonksiyon olur.

Teorem 2.2.24. (Şenay, 2007) (İkinci Möbius ters çevirme formülü) f aritmetik fonksiyonu ve $x \geq 1$ için

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$$

dir. Bu teoremde geçen $\sum_{n \leq x}$ biçimindeki toplam işareti $\sum_{n=1}^{[x]}$ şeklinde ve sıfır olan hiçbir terimi bulunmayan bir toplam olarak değerlendirilmelidir. O halde $0 < x < 1$ ise $F(x) = 0$ olur.

İspat. F fonksiyonunun tanımından $x \geq 1$ ise

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq \frac{x}{n}} f\left(\frac{x}{mn}\right) \\ &= \sum_{\substack{m, n \\ 1 \leq mn \leq x}} \mu(n) f\left(\frac{x}{mn}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu son toplamı $1 \leq k \leq x$ için $m.n = k$ olan terimleri bir araya getirip yeniden düzenlersek

$$\sum_{\substack{m, n \\ 1 \leq mn \leq x}} \mu(n) f\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{1 \leq k \leq x} f\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{n|k} \mu(n) = f(x)$$

bulunur ve Teorem 2.2.19 ye göre $k = 1$ için yukarıdaki son eşitlikteki ikinci toplam bir ve $k > 1$ için sıfır olduğundan teoremin ilk kısmının ispatı tamamlanmış olur.

Teoremin karşıtını ispat etmek için $x \geq 1$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right)$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq x} f\left(\frac{x}{m}\right) &= \sum_{m \leq x} \sum_{n \leq \frac{x}{m}} \mu(n) g\left(\frac{x}{mn}\right) \\ &= \sum_{\substack{m, n \\ 1 \leq mn \leq x}} \mu(n) g\left(\frac{x}{mn}\right) \end{aligned}$$

ve yukarıdakine benzer olarak bu son toplam

$$\sum_{1 \leq k \leq x} g\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{n|k} \mu(n)$$

şeklinde yazılır ve yine Teorem 2.2.19 göz önüne alınırsa bu toplamın $F(x)$ e eşit olduğu görülerek ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 2.2.25. Şimdi daha önce verdiğimiz çarpımsal bir fonksiyonun tam çarpımsal bir fonksiyonu olması için bir kriter oluşturan Teorem 2.1.10 dan farklı olarak

ele alacağımız aşağıdaki teorem, aynı zamanda tam çarpımsal fonksiyonların ters fonksiyonlarının varlığı için de bir kriter oluşturmaktadır.

Teorem 2.2.26. (Şenay, 2007) Çarpımsal bir f fonksiyonunun tam çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul her $n \geq 1$ için

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$$

olmasıdır.

İspat. Çarpımsal bir f fonksiyonunun tam çarpımsal olduğunu kabul edelim. Ayrıca

$$h(n) = \mu(n)f(n)$$

olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} (h * f)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} \mu(d)f(n) \\ &= f(n) \sum_{d|n} \mu(d) \\ &= f(n)I(n) \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan Lemma 2.1.3 e göre $f(1) = 1$ ve $\forall n > 1$ için $I(n) = 0$ ve $I(1) = 1$ olduğundan $h * f = I$ dir. Buradan Teorem 2.2.8 gereği $h = f^{-1}$ olur.

Tersine olarak

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$$

ve f çarpımsal olsun. Şimdi f fonksiyonunun tam çarpımsal olduğunu gösterelim. Teorem 2.1.10 gereği her p asalı ve $\forall \alpha \geq 1$ tamsayısı için $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$ olduğunu

gösterirsek ispat tamamlanacaktır. Sonuç 2.2.20 de göz önüne alınarak $n > 1$ için

$$\begin{aligned}
(f^{-1} * f)(n) &= \sum_{d|n} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{d|n} \mu(d) f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= f(n) \sum_{d|n} \mu(d) \\
&= I(n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $n = p^\alpha$ alınırsa Möbius fonksiyonunun tanımından

$$\mu(1)f(1)f(p^\alpha) + \mu(p)f(p)f(p^{\alpha-1}) = 0 \text{ ve } \mu(1) = 1$$

ve çarpımsal f fonksiyonu için Lemma 2.1.3 ye göre $f(1) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
f(p^\alpha) &= f(p)f(p^{\alpha-1}) \\
&= f(p)f(p)f(p) \cdots f(p) \\
&= f(p)^\alpha
\end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuç da ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.27. (Şenay, 2007) Çarpımsal bir f fonksiyonu için

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \prod_{p|n} [1 - f(p)]$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki

$$h(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)$$

olsun ve $h(n)$ fonksiyonunun teoremi gerçeklemediğini gösterelim. Öncelikle Teorem 2.2.14 gereği $h(n)$ fonksiyonunun çarpımsal olduğunu belirtelim. Buna göre $h(n)$ yi

hesaplamak için $h(p^\alpha)$ yı hesaplamak yeterli olacaktır. Böylece

$$\begin{aligned} h(p^\alpha) &= \sum_{d|p^\alpha} \mu(d)f(d) \\ &= \mu(1).f(1) + \mu(p).f(p) \\ &= 1 + (-1)f(p) \\ &= 1 - f(p) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} h(n) &= \prod_{p|n} h(p^\alpha) \\ &= \prod_{p|n} [1 - f(p)] \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem birinci Möbius ters çevirme formülünün güzel bir uygulamasını verir.

Teorem 2.2.28. (Şenay, 2007) $n \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d) \end{aligned}$$

dir.

İspat. Teorem 2.1.57 deki

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

eşitliğine birinci Möbius ters çevirme formülünün uygulanması ile

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \log(n) \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d) \\ &= \log(n) I(n) - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\forall n > 1$ için $I(n) = 0$, $n = 1$ için $\log 1 = 0$ ve $I(n) = 1$ olduğundan $n \geq 1$ için

$$\log(n) \cdot I(n) = 0$$

dır. Buna göre

$$\Lambda(n) = - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d)$$

elde edilir.

3. ARİTMETİK FONKSİYONLAR HALKASINDA TERSİNİR ELEMENLARIN OLUŞTURDUĞU GRUBUN BİR ALT GRUBU

Bir önceki bölümde aritmetik fonksiyonların $(A, +, *)$ cebirsel yapısının birimli değişmeli bir halka olduğu gösterilmişti. Cashwell ve Everett (1959) $(A, +, *)$ tamlık bölgesinin bir tek çarpanlama bölgesi olduğunu birkaç yolla göstermiştir. Bu tamlık bölgesinin tersinir elemanlar grubu, özellikle çarpımsal fonksiyonlar alt grubu bir çok kişi tarafından uzun yıllar çalışılmıştır. Çarpımsal fonksiyonlar bu aritmetik fonksiyonlar gibi karakterize edilirler. Buradaki aritmetik fonksiyonlar asalların kuvvetlerindeki değerleri ile tam olarak belirlenirler. Bu fonksiyonlar arasında asalların değerleri tarafından karakterize edilen tam çarpımsal fonksiyonlar vardır.

3.1. Rasyonel Fonksiyonlar Grubu

Teorem 3.1.1. M çarpımsal fonksiyonların kümesi olmak üzere $(M, *)$ cebirsel yapısı bir gruptur.

İspat. (i) $f, t \in M \implies f * t \in M$ olduğunu gösterelim. $k = f * t$ ve $(m, n) = 1$ olmak üzere $k = \sum_{c|mn} f(c)t(\frac{mn}{c})$ olup burada mn nin her c böleni $c = ab$ biçiminde ve $a|m$ ve $b|n$ dir. Ayrıca $(a, b) = 1$ ve $(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = 1$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} k(mn) &= \sum_{ab|mn} f(ab)t(\frac{mn}{ab}) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a)f(b)t(\frac{m}{a})t(\frac{n}{b}) \\ &= \sum_{a|m} f(a)t(\frac{m}{a}) \sum_{b|n} f(b)t(\frac{n}{b}) = k(m)k(n) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$(f * t)(mn) = [(f * t)(m)][(f * t)(n)]$$

elde edilir.

(ii) *Teorem 2.2.6* da gösterildiği üzere δ birim elemandır.

iii) *Teorem 2.2.8* de $f(1) = 1 \neq 0$ olduğundan her elemanın tersi vardır.

iv) $(A, *)$ birleşmeli ve $M \subset A$ olduğundan $(M, *)$ birleşmelidir.

Tanım 3.1.2. (Carroll ve Gioia, 1975) Eğer f fonksiyonu n tane lineer aritmetik fonksiyonun Dirichlet çarpımı ise; f aritmetik fonksiyonuna $n - ic$ fonksiyon denir.

Tanım 3.1.3. (Carroll ve Gioia, 1975) Eğer h , bir f $n - ic$ ve g $m - ic$ fonksiyonunun tersinir konvolüsyonu biçiminde ise; h fonksiyonuna (n, m) mertebeden Rasyonel Fonksiyon diyeceğiz.

(r, s) mertebeden Rasyonel Fonksiyon teriminin orijinalı Vaidyanathaswamy (1931)'de ifade edilmiştir.

$(1, 1)$ mertebeden bir Rasyonel Fonksiyon totient olarak isimlendirilir.

$\delta(k) = \left[\frac{1}{k}\right]$ özdeşlik fonksiyon olmak üzere δ bir $0 - ic$ fonksiyon olarak kabul edilir. Bundan dolayı; bir $f = f * \delta$ $n - ic$ fonksiyonu $(n, 0)$ mertebeden bir Rasyonel Fonksiyon ve bir $m - ic$ fonksiyonun tersi, $(0, m)$ mertebeden bir Rasyonel Fonksiyon olarak düşünülebilir. Rasyonel fonksiyon kümesi $M^\blacksquare$ olarak gösterilecektir. Yani,

$$M^\blacksquare = \{f \mid f(n, m) \text{ mertebeden bir rasyonel fonksiyon, } m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$$

dır. İlerleyen bölümde $(M^\blacksquare, *)$ cebirsel yapısının $(M, *)$ ın bir alt grubu olduğunu göstereceğiz. Bu alt grup Rasyonel fonksiyonlar grubu olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.4. (Apostol, 1971) Kabul edelim ki f çarpımsal olsun. Bu taktirde,

$$f \text{ tam çarpımsaldır} \Leftrightarrow \text{Her } p \text{ asal ve } a \geq 2 \text{ için } f^{-1}(p^a) = 0$$

dır.

İspat. Eğer f tam çarpımsal ise Teorem 2.2.26 den dolayı her p asal ve $a \geq 2$ için $f^{-1}(p^a) = 0$ dır. Tersine olarak farz edelimki $f^{-1}(p^a) = 0$ olsun. n , bir asalın karesini içeriyor ise $f^{-1}(n) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Herbir n , $(q, p) = 1$ ve $a \geq 2$ için $n = p^a q$ biçiminde yazılabilir. f^{-1} çarpımsal olduğundan da

$$f^{-1}(n) = f^{-1}(p^a)f^{-1}(q) = 0 = \mu(n)f(n)$$

yazılabilir. Buradan Teorem 2.2.26 den dolayı her n için f tam çarpımsaldır.

Lemma 3.1.5. (Carroll ve Gioia, 1975) f bir aritmetik fonksiyon olsun. Bu taktirde,

f $n - ic$ tir $\iff f$ çarpımsaldır ve her $a \in Z^+$ ve her p asalı için

$$f^{-1}(p^a) = -f_1(p)g^{-1}(p^{a-1}) + g^{-1}(p^a)$$

dır. Burada f_1 bir tam çarpımsal (lineer fonksiyon), g bir $(n - 1) - ic$ fonksiyon ve f^{-1} " $*$ " işlemine göre f nin tersidir.

İspat. Eğer f $n - ic$ ise, bu taktirde f_1 ve g fonksiyonları mevcuttur. Öyleki f_1 lineer, g $(n-1)$ -ic ve $f^{-1} = f_1^{-1} \circ g^{-1}$. Bu nedenle f_1 lineer olduğundan $a \in Z^+$ ve bir p asalı için

$$\begin{aligned} f^{-1}(p^a) &= f_1^{-1}(p)g^{-1}(p^{a-1}) + g^{-1}(p^a) \\ &= -f_1(p)g^{-1}(p^{a-1}) + g^{-1}(p^a) \end{aligned}$$

dır. Tersine olarak f nin $n - ic$ olduğunu göstermek için, f çarpımsal olduğundan, $a \in Z^+$ ve herhangi bir p asalı için sadece

$$f^{-1}(p^a) = f_1^{-1} \circ g^{-1}(p^a)$$

olduğunu göstermeliyiz. $a \in Z^+$ ve p bir asal, f_1 lineer olduğundan her $a \geq 2$ için $f_1^{-1}(p^a) = 0$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} f^{-1}(p^a) &= -f_1(p)g^{-1}(p^{a-1}) + g^{-1}(p^a) \\ &= g^{-1}(p^a) + f_1^{-1}(p)g^{-1}(p^{a-1}) + f_1^{-1}(p^2)g^{-1}(p^{a-2}) + \dots + f_1^{-1}(p^a) \\ &= g^{-1} \circ f_1^{-1}(p^a) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.6. (Carroll ve Gioia, 1975) f bir aritmetik fonksiyon olsun. Bu taktirde

f çarpımsal ve her p asalı ve $a > n$ için $f^{-1}(p^a) = 0 \Rightarrow f$ $n - ic$ tir.

İspat. İspatı n için tümevarım ile göstereceğiz. Teorem 3.1.4 ve Lemma 3.1.5 den dolayı teorem $n = 1$ için doğrudur. Farz edelim ki $n > 1$ ve $k \leq n - 1$ için teorem doğru olsun. Her $a \in \mathbb{Z}^+$ ve her p asalı için bir f_1 lineer fonksiyonu ve bir $(n - 1) - ic$ g fonksiyonu inşa edeceğiz.

$$f^{-1}(p^a) = -f_1(p)g^{-1}(p^{a-1}) + g^{-1}(p^a)$$

olduğunu biliyoruz. Sabit bir p asalı için inşamız şu şekilde olacaktır. Kabul edelim ki her $a > A$ için $f^{-1}(p^a) = 0$ olacak şekilde $A = A(p)$ en küçük tamsayı olsun. Açık olarak

$$n \geq A \geq 0 \text{ ve } f^{-1}(p^A) \neq 0$$

dır. Eğer $A=0$ ise $g(1) = f_1(1) = 1$ ve her $a > 0$ için $g(p^a) = f_1(p^a)$ olarak durum kolayca gösterilebilir. Eğer $A > 0$ ise,

$$0 = \sum_{k=0}^{A-1} (-1)^k x^{A-k} f^{-1}(p^k) - (-1)^A f^{-1}(p^A)$$

polinom eşitliğini ele alalım. Sıfır olmayan sabit terimlerle birlikte A inci dereceden olan bu eşitlik $x = B$ biçiminde 0 dan farklı bir çözüme sahiptir. Bir çarpımsal fonksiyon olan g yi tümevarımla başlangıç koşulları,

$$g^{-1}(p^{A-1}) = \frac{f^{-1}(p^A)}{B}$$

olan ve $a = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$g^{-1}(p^a) + Bg^{-1}(p^{a-1}) = f^{-1}(p^a)$$

1. dereceden fark denklemi ile tanımlayalım. Bu fark denkleminin çözümü, her $a > A - 1$ için

$$g^{-1}(p^{a-1}) = 0$$

ve $j = 2, 3, \dots$ için,

$$g^{-1}(p^{A-j}) = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} B^{-k} f^{-1}(p^{A-j+k}) + (-1)^{j+1} B^{-j} f^{-1}(p^A)$$

dır. Burada $j = A$ için çözüm, B nin

$$0 = \sum_{k=0}^{A-1} (-1)^k x^{A-k} f^{-1}(p^k) - (-1)^A f^{-1}(p^A)$$

eşitliğinin çözümü olduğunda geçerlidir. Şimdi p asal için $f_1(p) = -B$ olması için f_1 lineer fonksiyonunu tanımlayalım. Her bir asal için inşa tamamlandığında f_1 lineer, her $a \geq A = A(p)$ için $g^{-1}(p^a) = 0$ elde ederiz. Bu nedenle tümevarım hipotezinden, tüm p asalları için $A(p) \leq n$ olduğunda, $g(n-1) = ic$ olur. Ve

$$g^{-1}(p^a) + Bg^{-1}(p^{a-1}) = f^{-1}(p^a)$$

ifadesi açıkça gösterirki Lemma 3.1.5 in şartları sağlanır, böylece $f(n-1) = ic$ olur.

Sonuç 3.1.7. (Carroll ve Gioia, 1975)

$$f(n-1) = ic \Rightarrow f \text{ çarpımsal ve her } p \text{ asal ve } a > n \text{ için } f^{-1}(p^a) = 0$$

dır.

MacHenry (1999) Rasyonel fonksiyonlar grubunu $M^\blacksquare$ şeklinde ifade etmiştir. Rasyonel fonksiyonlar grubu Carroll ve Gioia (1975) tarafından çalışılmıştır. Bu gruba rasyonel fonksiyon ismini Vaidyanathaswamy (1931) vermiştir. MacHenry (1999) da $M^\blacksquare$ nin bir çok alt grubundan, aritmetik fonksiyonları sınıflandırmak için ilginç olan alt grup yapılarını incelemiştir. Biz de MacHenry (1999) nin bu çalışmalarını ayrıntılı olarak ele alacağız.

Tanım 3.1.8. (MacHenry, 1999) M_1 tam çarpımsal fonksiyonların kümesi olmak üzere

$$M_k = \{\gamma \in M^\blacksquare; \gamma = \alpha * \dots * \alpha, k \text{ defa}, \alpha \in M_1\}$$

ve

$$M_k^\sim = \{\gamma^{-1} \in M^\blacksquare; \gamma \in M_k\}$$

şeklinde tanımlanır. Yani $M_k^\sim$ kümesinin elemanları, M_k kümesindeki elemanların Dirichlet çarpımına göre tersleridir.

Sonuç 3.1.9. (MacHenry, 1999) $\gamma_k \in M_k$ ve $\gamma_j \in M_j$ olmak üzere, $M^\blacksquare$ grubunun her elemanı $\gamma_k * \gamma_j^{-1}$ çarpımı şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2.4 de tanımlanan δ aritmetik fonksiyonu Dirichlet çarpımının birim elemanıdır ve tam çarpımsal bir fonksiyondur. Ayrıca birim elemanın tersi de kendisine eşit olduğundan $\delta \in M_k$ ve $\delta \in M_k^\sim$ olup

$$\delta \in M_k \cap M_k^\sim$$

elde edilir. Eğer M^* ve $M^{\sim*}$ kümeleri

$$M^* = \cup M_k$$

ve

$$M^{\sim*} = \cup M_k^\sim$$

şeklinde tanımlanırsa $M^\blacksquare$ grubu

$$M^\blacksquare = M^* * M^{\sim*}$$

şeklinde ifade edilebilir.

MacHenry (1999), Carroll ve Gioia (1975) deki Teorem 2.2 yi şöyle ifade etmiştir.

Teorem 3.1.10. (MacHenry, 1999) Eğer $\gamma \in M_k$ ise her bir p asalı ve $n > k$ için

$$\gamma^{-1}(p^n) = 0$$

Teorem 3.1.11. (MacHenry, 1999) $\gamma \neq \delta$ ve $\gamma \in M_k$ ise herhangi bir n pozitif tamsayısı için $\gamma^{-1} \notin M_n$ dir.

İspat. Varsayalım ki tersi doğru olsun. Yani herhangi bir n pozitif tamsayısı için $\gamma^{-1} \in M_n$ olan bir $\gamma \in M_k$ bulunsun ve bu şartı sağlayan en küçük tamsayı da k olsun. Ayrıca $\beta, \chi \in M^{\blacksquare}$ için $\gamma = \beta * \chi$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.10 den $\gamma \in M_k$ ise her bir p asalı ve $t > k$ için $\gamma^{-1}(p^t) = 0$ olur. Dolayısıyla kabulumüzden $\gamma^{-1} \in M_n$ olduğundan $t > n$ için $(\gamma^{-1})^{-1}(p^t) = 0$ olup buradan $t > n$ için $\gamma(p^t) = 0$ elde edilir.

$\gamma = \beta * \chi$ ve sağ taraf k tane fonksiyonun çarpımı şeklinde olduğundan $\beta \in M_1$ ve $\chi \in M_{k-1}$ olarak alıp $\chi = \gamma * \beta^{-1}$ şeklinde yazabiliriz.

Şimdi bir r pozitif tamsayısı için eşitliği açalım;

$$\begin{aligned}\chi(p^r) &= (\gamma * \beta^{-1})(p^r) = \sum_{d|p^r} \chi(d) \beta^{-1}\left(\frac{p^r}{d}\right) \\ &= \gamma(p^r) \beta^{-1}(1) + \gamma(p^{r-1}) \beta^{-1}(p) + \gamma(p^{r-2}) \beta^{-1}(p^2) + \dots \\ &\quad + \gamma(p^2) \beta^{-1}(p^{r-2}) + \gamma(p) \beta^{-1}(p^{r-1}) + \gamma(1) \beta^{-1}(p^r)\end{aligned}$$

olup burada β ve dolayısıyla β^{-1} çarpımsal fonksiyondur ve $\beta^{-1}(1) = 1$ olur, ayrıca $\beta \in M_1$ olduğundan $k = 1$ dir ve Teorem 3.1.10 den dolayı $j \geq 2$ için $\beta^{-1}(p^j) = 0$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\chi(p^r) &= \gamma(p^r).1 + \gamma(p^{r-1})\beta^{-1}(p) + \gamma(p^{r-2}).0 + \dots + \gamma(p^2).0 + \gamma(p).0 + \gamma(1).0 \\ &= \gamma(p^r) + \gamma(p^{r-1})\beta^{-1}(p)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada eğer $r = n + 3$ alınır, $t > n$ için $\gamma(p^t) = 0$ olduğundan $\gamma(p^{n+3}) = \gamma(p^{n+2}) = 0$ olup

$$\begin{aligned}\chi(p^{n+3}) &= \gamma(p^{n+3}) + \gamma(p^{n+2})\beta^{-1}(p) \\ \chi(p^{n+3}) &= 0 + 0.\beta^{-1}(p) \\ \chi(p^{n+3}) &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

$r = n + 3$ için $\chi(p^r) = 0$ olduğundan, yani $\chi(p^{n+3}) = 0$ olduğundan $\chi^{-1} \in M_{n+2}$ dir.

Şimdi $\gamma = \beta * \chi$ olduğundan $\beta = \gamma * \chi^{-1}$ olup

$$\begin{aligned}\beta(p^r) &= (\gamma * \chi^{-1})(p^r) = \sum_{j=0}^r \gamma(p^{r-j})\chi^{-1}(p^j) \\ &= \gamma(p^r)\chi^{-1}(1) + \gamma(p^{r-1})\chi^{-1}(p) + \dots + \gamma(p)\chi^{-1}(p^{r-1}) + \gamma(1)\chi^{-1}(p^r)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\chi \in M_{k-1}$ olduğundan $j > k-1$ için

$$\chi^{-1}(p^j) = 0$$

olur, bu durumda

$$\begin{aligned}\beta(p^r) &= \gamma(p^r)\chi^{-1}(1) + \gamma(p^{r-1})\chi^{-1}(p) + \dots + \gamma(p^{r-(k-1)})\chi^{-1}(p^{k-1}) \\ &\quad + \gamma(p^{r-k})\chi^{-1}(p^k) + \dots + \gamma(p)\chi^{-1}(p^{r-1}) + \gamma(1)\chi^{-1}(p^r) \\ &= \gamma(p^r)\chi^{-1}(1) + \gamma(p^{r-1})\chi^{-1}(p) + \dots + \gamma(p^{r-(k-1)})\chi^{-1}(p^{k-1}) \\ &\quad + \gamma(p^{r-k}).0 + \dots + \gamma(p).0 + \gamma(1).0 \\ &= \gamma(p^r)\chi^{-1}(1) + \gamma(p^{r-1})\chi^{-1}(p) + \dots + \gamma(p^{r-(k-1)})\chi^{-1}(p^{k-1})\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $t > n$ için $\gamma(p^t) = 0$ dir. Eğer $r > k + n$ alınırsa

$$\gamma(p^r) = \gamma(p^{r-1}) = \dots = \gamma(p^{r-(k-1)}) = 0$$

olur. Bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\beta(p^r) &= \gamma(p^r)\chi^{-1}(1) + \gamma(p^{r-1})\chi^{-1}(p) + \dots + \gamma(p^{r-(k-1)})\chi^{-1}(p^{k-1}) \\ &= 0.\chi^{-1}(1) + 0.\chi^{-1}(p) + \dots + 0.\chi^{-1}(p^{k-1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

olup $r > k + n$ için $\beta(p^r) = 0$ bulunur. Bu nedenle $\beta^{-1} \in M_{k+n+1}$ olur. Fakat kabülümüzde $\beta \in M_1$, yani β tam çarpımsaldır ve

$$\beta(p^r) = \beta(p)^r \Rightarrow 0 = \beta(p)^r \Rightarrow 0 = \beta(p)$$

olur. Yani $r \geq k + n + 1$ için $\beta(p) = 0$ olur. Bu nedenle $\beta = \delta$ fonksiyonudur. $\gamma = \beta * \chi$ olduğundan $\gamma = \chi$ olup $\gamma \in M_{k-1}$ olur. Bu ise kabulumuzla çelişir. Çünkü kabülümüzde $\chi \in M_n$ olacak şekildeki en küçük n değeri k olarak seçilmişti, şimdi ise $k - 1$ de bu şartları sağladı.

Teorem 3.1.12. (MacHenry, 1999) $M^\blacksquare$ nin her elemanının M_1 in üreteçleri cinsinden tek türlü temsili vardır.

İspat. Sadece $\gamma \in M^*$ olduğunu ve γ nın M^* içindeki temsilini göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki

$$\gamma = \alpha_1 * \cdots * \alpha_r = \beta_1 * \cdots * \beta_s$$

olacak şekilde iki farklı biçimde gösterilsin. Burada $\delta \neq \alpha_i$, $\delta \neq \beta_j$ ve $\alpha_i, \beta_j \in M_1$ dir. Ayrıca $r \leq s$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.1.10 den γ^{-1} fonksiyonu $j \leq r$ değerleri için $a_j = \gamma^{-1}(p^j)$ şeklinde tek türlü belirlidir. Bu nedenle, her bir α -ya bir β karşılık geleceğinden $r = s$ olur. Ayrıca $\alpha_i(p)$ ve $\beta_i(p)$ değerleri

$$x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r$$

polinomunun kökleridir. Bu yüzden $\{1, \dots, r\}$ kümesinin bir π permutasyonu için

$$\alpha_i = \beta_{\pi(i)}$$

dir. Yani α lar β ların farklı bir sıralanışdır. Dolayısıyla sıra hariç gösterim tektir.

Sonuç 3.1.13. (MacHenry, 1999) $M^\blacksquare$ grubu torsiyonsuz bir gruptur.

Teorem 3.1.14. (MacHenry, 1999) $M^\blacksquare$ grubu bir serbest abelyen gruptur.

İspat. Teorem 3.1.12 den $M^\blacksquare$ grubunun her elemanı M_1 fonksiyonları tarafından tek türlü temsil edilir. Sonsuz tane M_1 fonksiyonu vardır. Bu nedenle $M^\blacksquare$ grubu üreteç kümesi sonsuz olan serbest abelyen gruptur. Üstelik bu sonsuzluk sayılamayan sonsuzluktur.

Teorem 3.1.15. (MacHenry, 1999) $M^\blacksquare$ grubunun, her p asal sayısı için aynı değeri olan M_1 üreteçlerine sahip elemanları, $M^\blacksquare$ grubunun bir alt grubudur.

Tanım 3.1.16. (MacHenry, 1999) $M^\blacksquare$ grubunun, her p asal sayısı için aynı değeri olan M_1 üreteçlerine sahip alt grubuna tekdüze (uniform) alt grup denir. Buradaki çarpımsal fonksiyonlara da tekdüze (uniform) fonksiyonlar denir.

Tekdüze alt grup $M^\blacksquare$ grubunun öz alt grubudur.

Teorem 3.1.17. (MacHenry, 1999) $M^\blacksquare$ grubu M grubunun öz alt grubudur.

İspat. Öyle bir θ çarpımsal fonksiyonu bulalım ki $M^\blacksquare$ grubunun içinde olmasın. $\{\chi_k\}$ tekdüze fonksiyonlar ailesi olsun ve şu şartları sağlasın. Her bir k pozitif tamsayısı için $t \leq k$ durumunda

$$\chi_k^{-1}(p^t) = \chi_{k+1}(p^t)$$

olsun ve diğer durumlarda

$$\chi_{k+1}(p^{k+1}) \neq 0$$

şeklinde tanımlansın.

Şimdi θ çarpımsal fonksiyonunu tanımlayalım. Bunun için θ^{-1} fonksiyonunu $\{\chi_k\}$ tekdüze fonksiyonlar cinsinden ifade edelim. χ_k fonksiyonunun tersinin ilk k değerinde θ^{-1} ile her p asalı için aynı olacak şekilde tanımlayalım. Yani θ , her p asalı için $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ değerlerinde $\theta_j^{-1}(p) = \chi_k(p)$ olacak şekilde tanımlansın.

Şimdi M_k veya $M_k^\sim$ nin herhangi bir elemanı k tane sabit tarafından lokal şekilde (sadece asalların kuvvetlerinde değerlerini inceliyoruz) tam olarak belirlenmiş olur. Yani bunların tam çarpımsal üreteçlerinin p deki değerleri yardımı ile veya onların $P(x)$ polinomunun katsayıları yardımı ile belirlenmiş olur. Bu nedenle θ kesinlikle ne M^* nin içinde ne de $M^{\sim*}$ nin içinde bir elemandır. Eğer $\gamma \in M_k$ ve $\chi \in M_j$ için

$$\theta = \gamma * \chi^{-1}$$

ise $\theta * \gamma^{-1} = \chi^{-1}$ olur. $\chi \in M_j$ olduğundan $\chi^{-1} \in M_j^{-1}$ ve dolayısıyla $\theta * \gamma^{-1} \in M_j^{-1}$ elde edilir. Böylece θ sonlu sayıda sabit tarafından belirlenmiş olur. Fakat bu doğru değildir. Yani gelişki oldu.

3.2. Üreteç Fonksiyonları

Üreteç Fonksiyonları, verilen bir dizinin elemanları kullanılarak elde edilen bir kuvvet serisidir. Kullanım ve uygulama olanaklarına göre çeşitli üreteç fonksiyonları vardır. Örneğin adi üreteç fonksiyonu, üstel üreteç fonksiyonu, Lambert serisi, Bell serisi ve Dirichlet serisi gibi. Her tip üreteç fonksiyonu bir dizi kullanılarak elde edilir. Meyer and Rubinfeld (2005), Generating functions adlı eserlerinde üreteç fonksiyonları üzerinde bazı yöntem ve çalışmalar vermişlerdir. Bu kısım bu çalışma kullanılarak oluşturulmuştur.

Tanım 3.2.1. $\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \dots \rangle$ sonsuz dizisi için klasik üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \dots$$

kuvvet serisidir. Bunun için

$$\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \dots \rangle \longleftrightarrow g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \dots$$

gösterimi kullanılabilir.

Tanım 3.2.2. $\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \dots \rangle$ sonsuz dizisi için üstel üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!} x^n = g_0 + g_1 x + \frac{g_2 x^2}{2!} + \frac{g_3 x^3}{3!} + \dots$$

şeklinde kuvvet serisidir.

Örnek 3.2.3. Bazı diziler için üreteç fonksiyonları

$$\langle 0, 0, 0, 0, \dots \rangle \longleftrightarrow 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots = 0$$

$$\langle 1, 0, 0, 0, \dots \rangle \longleftrightarrow 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots = 1$$

$$\langle 3, 2, 1, 0, \dots \rangle \longleftrightarrow 3 + 2x + 1x^2 + 0x^3 \dots = 3 + 2x + x^2$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki dizideki i 'inci terim (0'dan indekslenen), üreteç fonksiyonundaki x^i nin katsayısıdır.

Uyarı 3.2.4. Sonsuz bir geometrik dizinin toplamı

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1 - z}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem, $|z| \geq 1$ olduğunda sağlamamaktadır. Bu formül, dizilerin tamamı için üreteç fonksiyonların kapalı formunu verir.

Örnek 3.2.5.

$$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \longleftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

$$\langle 1, -1, 1, -1, \dots \rangle \longleftrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1 + x}$$

$$\langle 1, a, a^2, a^3, \dots \rangle \longleftrightarrow 1 + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots = \frac{1}{1 - ax}$$

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle \longleftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2}$$

Önerme 3.2.6. (Skalerle Çarpma) Eğer

$$\langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \longleftrightarrow F(x)$$

ise bu taktirde,

$$\langle cf_0, cf_1, cf_2, \dots \rangle \longleftrightarrow c.F(x)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \langle cf_0, cf_1, cf_2, \dots \rangle &\longleftrightarrow cf_0 + cf_1x + cf_2x^2 + \cdots \\ &= c.(f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots) \\ &= c.F(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.7.

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle \longleftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

üreteç fonksiyonunu 2 ile çarparsak

$$\langle 2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots \rangle \longleftrightarrow 2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots = \frac{2}{1 - x^2}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.8. (Toplama) Eğer

$$\langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \longleftrightarrow F(x)$$

ve

$$\langle g_0, g_1, g_2, \dots \rangle \longleftrightarrow G(x)$$

ise bu taktirde,

$$\langle f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots \rangle \longleftrightarrow F(x) + G(x)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \langle f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots \rangle &\longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n)x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) \\ &= F(x) + G(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.9. Üreteç fonksiyonların toplanması, iki dizinin terim terime toplanmasına karşılık gelir. Örneğin,

$$\begin{array}{rcl} \langle 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \dots \rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1-x} \\ + & \langle 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1, \dots \rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1+x} \\ \hline \langle 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & 0, \dots \rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \end{array}$$

dir. Ve

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x) + (1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.10. (Sağa Öteleme) Eğer

$$\langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \longleftrightarrow F(x)$$

ise bu taktirde

$$\left\langle \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ tane sıfır}}, f_0, f_1, f_2, \dots \right\rangle \longleftrightarrow x^k \cdot F(x)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \left\langle \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ tane sıfır}}, f_0, f_1, f_2, \dots \right\rangle &\longleftrightarrow f_0 x^k + f_1 x^{k+1} + f_2 x^{k+2} + \dots \\ &= x^k (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots) \\ &= x^k \cdot F(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

dizisini alalım. Şimdi sıfırları ekleyerek diziyi sağa doğru öteleyelim.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ tane sıfır}}, 1, 1, 1, 1, \dots \right\rangle &\longleftrightarrow x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + x^{k+3} \dots \\
 &= x^k (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\
 &= \frac{x^k}{1 - x}
 \end{aligned}$$

Açıkça, diziyeye k tane sıfır eklenmesi, üreteç fonksiyonunun x^k ile çarpılmasına karşılık gelir. Bu genel olarak geçerlidir.

Önerme 3.2.11. (Türev) Eğer

$$\langle f_0, f_1, f_2, f_3, \dots \rangle \longleftrightarrow F(x)$$

ise bu taktirde

$$\langle f_1, 2f_2, 3f_3, \dots \rangle \longleftrightarrow F'(x)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
 \langle f_1, 2f_2, 3f_3, \dots \rangle &\longleftrightarrow f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2 + \dots \\
 &= \frac{d}{dx}(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 \dots) \\
 &= \frac{d}{dx}F(x)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.12.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - x} \right) \\
 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots &= \frac{1}{(1 - x)^2} \\
 \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle &\longleftrightarrow \frac{1}{(1 - x)^2}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada pozitif tamsayıların $\langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$ dizisi için bir üreteç fonksiyonu elde ettik.

Örnek 3.2.13. Tam kare sayıların oluşturduğu $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \dots \rangle$ dizisinin üreteç fonksiyonunu elde edelim. Her bir terim kendisi ile çarpıldığından

$$\langle 0.0, 1.1, 2.2, 3.3, \dots \rangle = \langle 0, 1, 4, 9, \dots \rangle$$

ifadesi yazılabilir. Yukarıdaki örnekten yola çıkarak

$$\begin{aligned} \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle &\longleftrightarrow \frac{1}{1-x} \\ \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle &\longleftrightarrow \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \langle 0, 1, 2, 3, \dots \rangle &\longleftrightarrow x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \\ \langle 1, 4, 9, 16, \dots \rangle &\longleftrightarrow \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ \langle 0, 1, 4, 9, 16, \dots \rangle &\longleftrightarrow x \cdot \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Böylece $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \dots \rangle$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

şeklinde elde edilir.

Önerme 3.2.14. (Konvolüsyon) Eğer

$$\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle \longleftrightarrow A(x)$$

ve

$$\langle b_0, b_1, b_2, \dots \rangle \longleftrightarrow B(x)$$

ise bu taktirde

$$c_n ::= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$$

olmak üzere

$$\langle c_0, c_1, c_2, \dots \rangle \longleftrightarrow A(x).B(x)$$

dir.

İspat. Bu kararı anlamak için Kabul edelim ki

$$C(x) ::= A(x).B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

olsun. $A(x)B(x)$ çarpımını tespit edebilmek için aşağıdaki gibi bir tablo kullanabiliriz.

	b_0x^0	b_1x^1	b_2x^2	b_3x^3	$\dots$
a_0x^0	$a_0b_0x^0$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	$\dots$
a_1x^1	$a_1b_0x^1$	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$	$\dots$	
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	$\dots$		
a_3x^3	$a_3b_0x^3$	$\dots$			
$\vdots$	$\dots$				

Tablodan

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0$$

ifadesi elde edilir ve dolayısıyla $\langle c_0, c_1, c_2, \dots \rangle$ dizisinin $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ ve $\langle b_0, b_1, b_2, \dots \rangle$ dizilerinin konvolüsyonu olduğu söylenebilir.

Önerme 3.2.15. (Fibonacci Dizisi ve Fibonacci Polinomunun Üreteç Fonksiyonları)

$$F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 \dots$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan

$$\langle 0, 1, f_1 + f_0, f_2 + f_1, f_3 + f_2, \dots \rangle$$

ifadesi yazılabilir.

$$\begin{array}{rcl}
\langle 0, & 1, & 0, & 0, & 0, \dots \rangle \longleftrightarrow x \\
\langle 0, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, \dots \rangle \longleftrightarrow xF(x) \\
+ \langle 0, & 0, & f_0, & f_1, & f_2, \dots \rangle \longleftrightarrow x^2F(x) \\
\hline
\langle 0, & 1 + f_0, & f_1 + f_0, & f_2 + f_1, & f_3 + f_2, \dots \rangle \longleftrightarrow x + xF(x) + x^2F(x)
\end{array}$$

toplamından

$$\begin{aligned}
F(x) &= f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + \dots \\
x + xF(x) + x^2F(x) &= 0 + (1 + f_0)x + (f_1 + f_0)x^2 + (f_2 + f_1)x^3 + (f_3 + f_2)x^4 + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklemin sağ tarafı eşit olduğundan

$$F(x) = x + xF(x) + x^2F(x)$$

elde edilir ve bu denklem $F(x)$ e göre çözülürse Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeyi şu şekilde de gösterebiliriz.

$$\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \rangle \longleftrightarrow \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Fibonacci polinomları için de üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2}$$

şeklinde dir.

Önerme 3.2.16. (Fibonacci Dizisinin Kapalı Formu) $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ve $\alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ için

$$1 - x - x^2 = (1 - \alpha_1x)(1 - \alpha_2x)$$

ifadesini çarpanlarına ayrılmış şekilde yazabiliriz. Buradan

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{A_2}{1-\alpha_2 x}$$

denklemini sağlayan A_1 ve A_2 yi

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ A_2 &= \frac{-1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

olacak şekilde bulabiliriz. Dolayısıyla

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\alpha_1 x} - \frac{1}{1-\alpha_2 x} \right)$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha_1 x} &= 1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \cdots \\ \frac{1}{1-\alpha_2 x} &= 1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \cdots \end{aligned}$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\alpha_1 x} - \frac{1}{1-\alpha_2 x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left((1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \cdots) - (1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \cdots) \right) \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Üreteç fonsiyonları ile ilgili literatürde sıkça karşılaşılan bazı sayı dizilerine ait üreteç fonsiyonları şu şekildedir.

Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde verilir.

Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}$$

şeklindedir.

Pell sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklinde verilir.

Pell polinomu için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_{r+1}(x) y^r = \frac{1}{1 - 2xy - y^2}$$

şeklindedir.

Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^n = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklinde verilir.

Pell Lucas polinomu için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{r=0}^{\infty} Q_{r+1}(x) y^r = \frac{2x + 2y}{1 - 2xy - y^2}$$

şeklindedir.

Bell serisi olarak tanımlanan üreteç fonksiyonu;

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{2n} x^n = \frac{1}{1 - p^2 x}$$

formülü ile verilir.



4. RASYONEL FONKSİYONLAR GRUBUNUN LOKAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $\gamma \in M_k$ olmak üzere γ nın her p asalı için

$$P_\gamma(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

monik polinomu tarafından lokal olarak tanımlanması incelenecektir. $\gamma(p^n)$ fonksiyonunun, bu polinomun r_i kökleri ve diskriminantı ile açık olarak nasıl belirlendiği gösterilecektir. Bu polinomlar $P_\gamma(x)$ polinomunun p deki Bell polinomlarıdır. Burada p asalı sabitlenerek $M^\blacksquare$ nin lokal davranışı incelenecektir.

Tanım 4.0.17. (Apostol, 1976) Bir f aritmetik fonksiyonu ve bir p asalı verilsin. Bu durumda

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)x^n$$

şeklinde ifade edilen $f_p(x)$ formal kuvvet serisine p modülüne göre f nin Bell Serisi denir.

Örnek 4.0.18. (Apostol, 1976) $\mu(p) = -1$ ve $n \geq 2$ için $\mu(p^n) = 0$ olduğundan Mobius fonksiyonu için Bell serisi

$$\begin{aligned}\mu_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(p^n)x^n = \mu(p^0)x^0 + \mu(p)x + \mu(p^2)x^2 + \dots \\ &= 1 + (-1)x + 0 + \dots + 0 \\ &= 1 - x\end{aligned}$$

dir.

Örnek 4.0.19. (Apostol, 1976) $n \geq 1$ için $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ olduğundan Euler ϕ fonksiyonu için Bell serisi

$$\begin{aligned}
 \phi_p(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p^n - p^{n-1}) x^n \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} x^{n-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n \\
 &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n \\
 &= (1-x) \frac{1}{1-px} \\
 &= \frac{1-x}{1-px}
 \end{aligned}$$

dir.

Örnek 4.0.20. (Apostol, 1976) Liouville fonksiyonu için Bell serisi

$$\begin{aligned}
 \lambda_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\
 &= \frac{1}{1+x}
 \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 4.0.21. (Apostol, 1976) Tam çarpımsal bir f fonksiyonu için Bell serisi

$$\begin{aligned}
 f_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(p)^n x^n \\
 &= \frac{1}{1-f(p)x}
 \end{aligned}$$

dir.

$M^{\blacksquare}$ çarpımsal fonksiyon ve üreteçleri tam çarpımsal olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.0.22. (MacHenry, 1999) $M^\blacksquare$ nin lokal üreteç fonksiyonu, yani p ye bağlı Bell serisi, $\alpha \in M_1$ için

$$\frac{1}{1 - \alpha(p)x}$$

dir. Böylece α^{-1} için üreteç fonksiyonu

$$1 - \alpha(p)x$$

olur.

Tanım 4.0.23. (MacHenry, 1999) Bir p asalı ve

$$P_\gamma(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

polinomu için γ aritmetik fonksiyonu

$$\gamma^{-1}(p^n) = \begin{cases} a_n & n \leq k \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde lokal olarak tanımlanır.

Tanım 4.0.24. (MacHenry, 1999) $\alpha_i \in M_1$ için

$$\gamma = \alpha_1 * \cdots * \alpha_k$$

olacak şekilde $\gamma \in M_k$ yı göz önüne alalım. Kabul edelim ki

$$\alpha_i(p) = r_i$$

olsun. Aritmetik fonksiyonların Dirichlet çarpımlarının, onların üreteç fonksiyonlarının noktasal çarpımlarına dönüştürdüğü kullanılarak γ için üreteç fonksiyonları

$$x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

olarak elde edilir. Burada a_j ler r_i lerin işaretleri hariç uygun simetrik fonksiyonlarıdır. Özel olarak

$$a_1 = -\sum r_j$$

ve

$$a_k = (-1)^k \prod_j r_j$$

dir.

Böylece bir p asalı ve $a_1, \dots, a_k$ herhangi bir kompleks sayılar kümesi verilirse $\gamma^{-1}(p^i) = a_i$ ile bir tek $\gamma \in M_k$ lokal olarak belirlenir. Şimdi $\gamma(p^n)$ nin r_i ve a_i cinsinden açık ifadelerini araştıralım.

Tanım 4.0.25. (MacHenry, 1999) Kabul edelim ki

$$P_\gamma(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

polinomu verilsin. Bu takdirde

$$\Delta_k = \Delta(r_1, \dots, r_k) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_1 & \dots & r_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & \dots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (r_j - r_i)$$

ve

$$\Delta_{k,n} = \Delta_{k,n}(r_1, \dots, r_k) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_1 & \dots & r_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-2} & \dots & r_k^{k-2} \\ r_1^{n+k-2} & \dots & r_k^{n+k-2} \end{vmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.0.26. $P_\gamma(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ olsun. Buradan denklemin kökleri $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ ve katsayıları $a_1 = -4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 6$ olarak bulunur. $k = 3$ ve $n = 2$

için

$$\Delta_k = \Delta(1, 2, 3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix} = 2$$

ve

$$\Delta_{k,2} = \Delta_{3,2}(1, 2, 3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix} = 12$$

elde edilir.

Örnek 4.0.27. $P_\gamma(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ olsun. Buradan denklemin kökleri $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$ ve katsayıları $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$ olarak bulunur. $k = 3$ ve $n = 5$ için

$$\Delta_k = \Delta(-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^2 & 1^2 & 2^2 \end{vmatrix} = 6$$

ve

$$\Delta_{k,n} = \Delta_{3,5}(-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^6 & 1^6 & 2^6 \end{vmatrix} = 126$$

elde edilir.

Lemma 4.0.28. (MacHenry, 1999) r_j ve a_i

$$P_\gamma(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

polinomunun sırasıyla kökleri ve katsayıları olmak üzere, $j = 1, \dots, k$ ve $k \geq 2$ için

$$r_j^n = -\sum_{i=1}^k a_i r_j^{n-i}$$

biçiminde ifade edilebilir.

İspat. $j_i = 1, \dots, k$ ve $k \geq 2$ için, Vieta Teoreminden core polinomun katsayıları kökler cinsinden

$$a_i = (-1)^i \sum r_{j_1} \cdots r_{j_i}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda lemmanın sağ tarafı önce i sonra j için açılırsa $s = 1, \dots, k$ için

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^k a_i r_j^{n-i} &= -[a_1 r_j^{n-1} + a_2 r_j^{n-2} + \cdots + a_k r_j^{n-k}] \\ &= -\left[(-1)(\sum r_{j_1}) r_j^{n-1} + (-1)^2 (\sum r_{j_1} r_{j_2}) r_j^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + (-1)^k (\sum r_{j_1} \cdots r_{j_k}) r_j^{n-k} \right] \\ &= (-1)^2 (r_1 + r_2 + \cdots + r_k) r_j^{n-1} + (-1)^3 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{k-1} r_k) r_j^{n-2} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{k+1} (r_1 r_2 \cdots r_k) r_j^{n-k} \\ &= (r_1 + r_2 + \cdots + r_k) r_j^{n-1} - (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{k-1} r_k) r_j^{n-2} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{k+1} (r_1 r_2 \cdots r_k) r_j^{n-k} \\ &= r_j^n \end{aligned}$$

şeklinde olup ispat tamamlanır.

Örnek 4.0.29. $k = 3$ ve $j = 2$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^3 a_i r_j^{n-i} &= -[a_1 r_j^{n-1} + a_2 r_j^{n-2} + a_3 r_j^{n-3}] \\ &= (-1)^2 (r_1 + r_2 + r_3) r_j^{n-1} + (-1)^3 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) r_j^{n-2} \\ &\quad + (-1)^4 (r_1 r_2 r_3) r_j^{n-3} \\ &= [(r_1 r_2^{n-1} + r_2^n + r_3 r_2^{n-1}) - (r_1 r_2^{n-1} + r_1 r_2^{n-2} r_3 + r_2^{n-1} r_3) + (r_1 r_2^{n-2} r_3)] \\ &= r_2^n \end{aligned}$$

Teorem 4.0.30. (MacHenry, 1999) $P(x)$ polinomu k dereceli monik bir polinom, bu polinomun katsayıları $i = 1, \dots, k$ için $a_i \in \mathbb{C}$ ve kökleri $r_1, \dots, r_k$ olsun. Ayrıca M^* kümesinin içindeki γ aritmetik fonksiyonu $P_\gamma(x)$ tarafından belirlenen bir fonksiyon

olsun. Bu takdirde

$$\gamma(p^n) = \begin{cases} \frac{\Delta_{k,n+1}}{\Delta_k}, & k > 1 \\ r^n, & k = 1 \end{cases}$$

olur.

Örnek 4.0.31. $P_\gamma(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ polinomu verilsin ve $k = 3$ olsun. $P_\gamma(x)$ polinomuna bağlı olarak γ aritmetik fonksiyonu $p = 3$ için lokal olarak şöyle belirlenir.

$n = 0$ için

$$\gamma(3^0) = \gamma(1) = \frac{\Delta_{3,1}}{\Delta_3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^2 & 1^2 & 2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^2 & 1^2 & 2^2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{6} = 1$$

$n = 1$ için

$$\gamma(3^1) = \gamma(3) = \frac{\Delta_{3,2}}{\Delta_3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^3 & 1^3 & 2^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^2 & 1^2 & 2^2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{6} = 2$$

$n = 2$ için

$$\gamma(3^2) = \gamma(9) = \frac{\Delta_{3,3}}{\Delta_3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^4 & 1^4 & 2^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^2 & 1^2 & 2^2 \end{vmatrix}} = \frac{30}{6} = 5$$

$n = 3$ için

$$\gamma(3^3) = \gamma(27) = \frac{\Delta_{3,4}}{\Delta_3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^5 & 1^5 & 2^5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ (-1)^2 & 1^2 & 2^2 \end{vmatrix}} = \frac{60}{6} = 10$$

elde edilir.

Sonuç 4.0.32. (MacHenry, 1999) $\Delta_k, \Delta_{k,n}$ 'nin bir çarpanıdır.

Sonuç 4.0.33. (MacHenry, 1999)

$$\gamma(p^{n+1}) = \sum_{\sum i_j = n} r_1^{i_1} \dots r_k^{i_k}.$$

Uyarı 4.0.34. (MacHenry, 1999) Teorem 4.0.30 de $k = 2$ için durum ilgi çekicidir. $x^2 + a_1x + a_2$ polinomunun kökleri r_1 ve r_2 olmak üzere, bu polinom $M^{\blacksquare}$ üzerinde

$$\frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$$

olacak şekilde çarpımsal bir fonksiyon belirtir. Özel olarak $a_1 = a_2 = -1$ için Fibonacci sayıları elde edilir.

Uyarı 4.0.35. Δ_k^2 ifadesi γ aritmetik fonksiyonunu belirleyen P_γ polinomunun diskriminantıdır.

Örnek 4.0.36. $P(x) = x^2 - x - 1$ polinomu verilsin.

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-1) = 5$$

ve

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = r_2 - r_1 = \sqrt{5} \\ \Delta_{k,2} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{vmatrix} = r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{k,3} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^3 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 \end{vmatrix} = r_2^3 - r_1^3 = (r_2 - r_1)(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2) \\ &= (r_2 - r_1)((r_2 + r_1)^2 - r_1 r_2) = \sqrt{5}(1 + 1) \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{k,4} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^4 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^4 \end{vmatrix} = r_2^4 - r_1^4 = (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2) \\ &= (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)((r_2 + r_1)^2 - 2r_1 r_2) = \sqrt{5}(1 + 2) \\ &= 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\vdots$

yazılır. Buradan da

$$\gamma(p^n) = \frac{\Delta_{k,n+1}}{\Delta_k} = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\gamma(p^0) &= \frac{\Delta_k}{\Delta_k} = 1 = F_0 \\ \gamma(p^1) &= \frac{\Delta_{k,2}}{\Delta_k} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = F_1 \\ \gamma(p^2) &= \frac{\Delta_{k,3}}{\Delta_k} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 = F_2 \\ \gamma(p^3) &= \frac{\Delta_{k,4}}{\Delta_k} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3 = F_3\end{aligned}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır. Bu şekilde

$$\begin{array}{ccccccc} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array}$$

elde edilir.

Bu örnekte $P(x) = x^2 - x - 1$ polinomu ele alındığında bir aritmetik fonksiyon olan Fibonacci sayılarını elde edebileceğimizi gördük. Literatürde Fibonacci ve Fibonacci tip sayı dizileri önemli çalışma konularıdır. Şahin (2013) doktora tezinde literatürde var olan birçok rekürans ilişkili sayı dizilerinin Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının özel hali olduğunu göstermiştir. Şimdi bu polinomları inceleyelim.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ ve LUCAS POLİNOMLARI

Bu bölümde

$$\{F_{k,n}(t_1, \dots, t_k)\}$$

ve

$$\{G_{k,n}(t_1, \dots, t_k)\}$$

olacak şekilde iki rekürans polinom ailesi üzerinde çalışılacaktır. Burada Carroll (1973) un

$$\gamma(p^n) = F_{k,n+1}(a_1, \dots, a_k)$$

ifadesi, γ aritmetik fonksiyonunun; $P(x)$ in a_i katsayıları cinsinden lokal temsilini verdiği gösterilecektir. Ayrıca $\{F_{k,n}(t_1, \dots, t_k)\}$ F -polinomlarının kısmi türevleri ile $\{G_{k,n}(t_1, \dots, t_k)\}$ G -polinomları üretilecektir.

Tanım 5.0.37. (MacHenry, 1999) x değişkenli ve $t_1, \dots, t_k$ parametrelili bir P polinomu

$$P(x; t_1, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - t_2 x^{k-2} - \dots - t_k$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 5.0.38. (MacHenry, 2000) $k \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $t = (t_1, \dots, t_k)$ parametrelili $F_{k,n}(t)$ polinomları

$$\begin{aligned} F_{k,0}(t) &= 1, & n &= 0 \\ F_{k,1}(t) &= 1, & n &= 1 \\ F_{k,n}(t) &= F_{k-1,n}(t), & 1 &\leq n \leq k \\ F_{k,n}(t) &= \sum_{j=1}^k t_j F_{k,n-j}(t), & n &> k \end{aligned}$$

ve $G_{k,n}(t)$ polinomları

$$\begin{aligned} G_{k,0}(t) &= k, & n &= 0 \\ G_{k,1}(t) &= t_1, & n &= 1 \\ G_{k,n}(t) &= G_{k-1,n}(t) & 1 \leq n < k \\ G_{k,n}(t) &= \sum_{j=1}^k t_j G_{k,n-j}(t) & n \geq k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Örnek 5.0.39. $n \in \mathbb{Z}$ ve $k = 1$ için

$$\begin{aligned} F_{2,0}(t_1, t_2) &= 0 \\ F_{2,1}(t_1, t_2) &= 1 \\ F_{2,2}(t_1, t_2) &= t_1 F_{2,1}(t_1, t_2) + t_2 F_{2,0}(t_1, t_2) \\ &= t_1 \\ F_{2,3}(t_1, t_2) &= t_1 F_{2,2}(t_1, t_2) + t_2 F_{2,1}(t_1, t_2) \\ &= t_1 t_1 + t_2 \\ &= t_1^2 + t_2 \\ F_{2,4}(t_1, t_2) &= t_1 F_{2,3}(t_1, t_2) + t_2 F_{2,2}(t_1, t_2) \\ &= t_1(t_1^2 + t_2) + t_1 t_2 \\ &= t_1^3 + 2t_1 t_2 \\ F_{2,5}(t_1, t_2) &= t_1 F_{2,4}(t_1, t_2) + t_2 F_{2,3}(t_1, t_2) \\ &= t_1(t_1^3 + 2t_1 t_2) + t_2(t_1^2 + t_2) \\ &= t_1^4 + 3t_1^2 t_2 + t_2^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve

$$G_{2,0}(t_1, t_2) = 2$$

$$G_{2,1}(t_1, t_2) = t_1$$

$$\begin{aligned} G_{2,2}(t_1, t_2) &= t_1 G_{2,1}(t_1, t_2) + t_2 G_{2,0}(t_1, t_2) \\ &= t_1^2 + 2t_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2,3}(t_1, t_2) &= t_1 G_{2,2}(t_1, t_2) + t_2 G_{2,1}(t_1, t_2) \\ &= t_1(t_1^2 + 2t_2) + t_2 t_1 \\ &= t_1^3 + 3t_1 t_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2,4}(t_1, t_2) &= t_1 G_{2,3}(t_1, t_2) + t_2 G_{2,2}(t_1, t_2) \\ &= t_1(t_1^3 + 3t_1 t_2) + t_2(t_1^2 + 2t_2) \\ &= t_1^4 + 4t_1^2 t_2 + 2t_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2,5}(t_1, t_2) &= t_1 G_{2,4}(t_1, t_2) + t_2 G_{2,3}(t_1, t_2) \\ &= t_1(t_1^4 + 4t_1^2 t_2 + 2t_2^2) + t_2(t_1^3 + 3t_1 t_2) \\ &= t_1^5 + 5t_1^3 t_2 + 5t_1 t_2^2 \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{Z}$ ve $k = 3$ için

$$F_{3,0}(t_1, t_2, t_3) = 0$$

$$F_{3,1}(t_1, t_2, t_3) = 1$$

$$\begin{aligned} F_{3,2}(t_1, t_2, t_3) &= t_1 F_{3,1}(t_1, t_2, t_3) \\ &= t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{3,3}(t_1, t_2, t_3) &= t_1 F_{3,2}(t_1, t_2, t_3) + t_2 F_{3,1}(t_1, t_2, t_3) \\ &= t_1 t_1 + t_2 \\ &= t_1^2 + t_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{3,4}(t_1, t_2, t_3) &= t_1 F_{3,3}(t_1, t_2, t_3) + t_2 F_{3,2}(t_1, t_2, t_3) + t_3 F_{3,1}(t_1, t_2, t_3) \\ &= t_1^3 + 2t_1 t_2 + t_3 \end{aligned}$$

$\vdots$

ve

$$\begin{aligned}
G_{3,0}(t_1, t_2, t_3) &= 3 \\
G_{3,1}(t_1, t_2, t_3) &= t_1 \\
G_{3,2}(t_1, t_2, t_3) &= t_1 G_{3,1}(t_1, t_2, t_3) \\
&= t_1^2 + 2t_2 \\
G_{3,3}(t_1, t_2, t_3) &= t_1 G_{3,2}(t_1, t_2, t_3) + t_2 G_{3,1}(t_1, t_2, t_3) \\
&= t_1^3 + 3t_1 t_2 + 3t_3 \\
G_{3,4}(t_1, t_2, t_3) &= t_1 G_{3,3}(t_1, t_2, t_3) + t_2 G_{3,2}(t_1, t_2, t_3) + t_3 G_{3,1}(t_1, t_2, t_3) \\
&= t_1^4 + 4t_1^2 t_2 + 2t_2^2 + 4t_1 t_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 5.0.40. $k \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $t = (t_1, \dots, t_k)$ parametreli $F_{k,n}(t)$ ve $G_{k,n}(t)$ polinomlarının en genel halleri

$$F_{k,n} = F_n(t) = \sum_{j=1}^k t_j F_{n-j}(t)$$

ve

$$G_{k,n} = G_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} t_j G_{n-j} + n t_n$$

biçimindedir. Bu ifadelerin hesaplanmış bir kaç adımı şu şekildedir.

$$F_{k,0} = 1$$

$$F_{k,1} = t_1$$

$$F_{k,2} = t_1^2 + t_2$$

$$F_{k,3} = t_1^3 + 2t_1t_2 + t_3$$

$$F_{k,4} = t_1^4 + 3t_1^2t_2 + t_2^2 + 2t_1t_3 + t_4$$

$$F_{k,5} = t_1^5 + 4t_1^3t_2 + 3t_1t_2^2 + 2t_2t_3 + 3t_1^2t_3 + 2t_1t_4 + t_5$$

$$F_{k,6} = t_1^6 + 5t_1^4t_2 + 6t_1^2t_2^2 + t_2^3 + 4t_1^3t_3 + t_3^2 + 6t_1t_2t_3 + 3t_1^2t_4 + 2t_2t_4 + 2t_1t_5 + t_6$$

$\vdots$

ve

$$G_{k,0} = 1$$

$$G_{k,1} = t_1$$

$$G_{k,2} = t_1^2 + 2t_2$$

$$G_{k,3} = t_1^3 + 3t_1t_2 + 3t_3$$

$$G_{k,4} = t_1^4 + 4t_1^2t_2 + 2t_2^2 + 4t_1t_3 + 4t_4$$

$$G_{k,5} = t_1^5 + 5t_1^3t_2 + 5t_1t_2^2 + 5t_2t_3 + 5t_1^2t_3 + 5t_1t_4 + 5t_5$$

$$G_{k,6} = t_1^6 + 6t_1^4t_2 + 9t_1^2t_2^2 + 6t_2^3 + 6t_1^3t_3 + 6t_3^2 + 12t_1t_2t_3 + 6t_1^2t_4 + 6t_2t_4 + 6t_1t_5 + 6t_6$$

$\vdots$

Burada $j > k$ için $t_j = 0$ değerini alır.

Teorem 5.0.41. (MacHenry, 2000) Her k pozitif tamsayısı için $G_{k,0} = k$ ve $n \geq 1$ için

$$G_{k,n} = F_{k,n+1} + \sum_{j=1}^{k-1} jt_{j+1}F_{k,n-j}$$

dir.

İspat. Tanım 5.0.38 den

$$\begin{aligned}
G_{k,n} &= \sum_{j=1}^k t_j G_{k,n-j} = \sum_{j=1}^k t_j \left[\left(\sum_{i=1}^{k-1} i t_{i+1} F_{k,n-j-i} \right) + F_{k,n-j+1} \right] \\
&= \sum_{j=1}^k t_j F_{k,n+1-j} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^k i t_j t_{i+1} F_{k,n-j-i} \\
&= F_{k,n+1} + \sum_{i=1}^{k-1} i t_{i+1} \left(\sum_{j=1}^k t_j F_{k,(n-i)-j} \right) \\
&= F_{k,n+1} + \sum_{i=1}^{k-1} i t_{i+1} F_{k,n-i}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.0.42. (MacHenry ve Wong, 2000) Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları özel olarak

$$F_{k,n} = \sum_{\alpha \vdash n} \binom{|\alpha|}{\alpha_1, \dots, \alpha_k} t_1^{\alpha_1} \dots t_k^{\alpha_k}$$

ve

$$G_{k,n} = \sum_{\alpha \vdash n} \binom{|\alpha|}{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \frac{n}{|\alpha|} t_1^{\alpha_1} \dots t_k^{\alpha_k}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $|\alpha| = \sum_{j=1}^k \alpha_j$ dir. Ayrıca $\alpha \vdash n$ ifadesi, $n = \sum_{j=1}^k j \alpha_j$ şeklinde n nin bir parçalanışını temsil etmektedir ki bazen $1^{\alpha_1} + \dots + k^{\alpha_k}$ biçiminde de gösterilmektedir.

Uyarı 5.0.43. (MacHenry, 1999) $k = 2$ için $F_{k,n}(t)$ ve $G_{k,n}(t)$ polinomları

$$\begin{aligned}
F_{2,0}(t_1, t_2) &= 0 \\
F_{2,1}(t_1, t_2) &= 1 \\
F_{2,2}(t_1, t_2) &= t_1 \\
F_{2,3}(t_1, t_2) &= t_1^2 + t_2 \\
F_{2,4}(t_1, t_2) &= t_1^3 + 2t_1t_2 \\
F_{2,5}(t_1, t_2) &= t_1^4 + 3t_1^2t_2 + t_2^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G_{2,0}(t_1, t_2) &= 2 \\
G_{2,1}(t_1, t_2) &= t_1 \\
G_{2,2}(t_1, t_2) &= t_1^2 + 2t_2 \\
G_{2,3}(t_1, t_2) &= t_1^3 + 3t_1t_2 \\
G_{2,4}(t_1, t_2) &= t_1^4 + 4t_1^2t_2 + 2t_2^2 \\
G_{2,5}(t_1, t_2) &= t_1^5 + 5t_1^3t_2 + 5t_1t_2^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. $k = 2$ durumu için bu polinomlar sırasıyla Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları ve Genelleştirilmiş Lucas Polinomları'dır. $(t_1, t_2) = (1, 1)$ olduğunda F polinomu Fibonacci sayılarını verirken G polinomu ise Lucas sayılarını verir.

Lemma 5.0.44. (MacHenry, 1999) $n \geq 0$ için

$$\gamma(p^{n+1}) = - \sum a_j \gamma(p^{n-j+1})$$

dır.

İspat. $a = (a_1, \dots, a_k)$ olmak üzere

$$\gamma * \gamma^{-1}(p^s) = \delta(p^s) = \begin{cases} 0, & s > 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

olduğundan ve $P_\gamma(x)$ in tanımından $s < k + 1$ için $\gamma^{-1}(p^s) = a_s$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca Tanım 5.0.38 den $F_{k,0}(a) = 0$ ve $F_{k,1}(a) = 1$ olduğunu biliyoruz. $s = n + 1$ için

$$\begin{aligned} \gamma * \gamma^{-1}(p^{n+1}) &= \gamma(p^{n+1})\gamma^{-1}(1) + \gamma(p^n)\gamma^{-1}(p) + \gamma(p^{n-1})\gamma^{-1}(p^2) + \dots \\ &\quad + \gamma(p^2)\gamma^{-1}(p^{n-1}) + \gamma(p)\gamma^{-1}(p^n) + \gamma(1)\gamma^{-1}(p^{n+1}) \\ \delta(p^{n+1}) &= \gamma(p^{n+1})a_0 + \gamma(p^n)a_1 + \gamma(p^{n-1})a_2 + \dots \\ 0 &= \gamma(p^{n+1}) + a_1\gamma(p^n) + a_2\gamma(p^{n-1}) + \dots \\ \gamma(p^{n+1}) &= -[a_1\gamma(p^n) + a_2\gamma(p^{n-1}) + a_3\gamma(p^{n-2}) + a_4\gamma(p^{n-3}) + \dots] \\ \gamma(p^{n+1}) &= -\sum a_j\gamma(p^{n-j+1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.0.45. (Carroll, 1973) $a = (a_1, \dots, a_k)$ olmak üzere

$$\gamma(p^{n+1}) = F_{k,n}(a)$$

dır.

İspat. İspatı tümevarım yöntemi ile verelim. Lemma 5.0.44 den elde edilen

$$\gamma(p^{n+1}) = -[a_1\gamma(p^n) + a_2\gamma(p^{n-1}) + a_3\gamma(p^{n-2}) + a_4\gamma(p^{n-3}) + \dots + a_k\gamma(p^{n-(k-1)})]$$

ifadesinde $t_i = -a_i$ alınıp n nin değerleri yerine yazılırsa, $n = 0$ için

$$\gamma(p) = -a_1\gamma(1) = -a_1 = t_1 = F_{k,0}$$

ve $n = 1$ için

$$\gamma(p^2) = -[a_1\gamma(p) + a_2\gamma(1)] = (-a_1)(-a_1) - a_2 = a_1^2 - a_2 = t_1^2 + t_2 = F_{k,1}$$

elde edilir. Şimdi n den küçük değerler için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim.

Yani $m < n$ için

$$\gamma(p^{m+1}) = F_{k,m}(a)$$

ifadesi doğru olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\gamma(p^{n+1}) &= -[a_1\gamma(p^n) + a_2\gamma(p^{n-1}) + \cdots + a_k\gamma(p^{n-(k-1)})] \\ &= t_1F_{k,n-1} + t_2F_{k,n-2} + \cdots + t_kF_{k,n-k} \\ &= \sum_{j=1}^k t_jF_{n-j}(t) \\ &= F_{k,n}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.0.46. (MacHenry, 1999) $x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$ polinomunun köklerinin kümesi $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ ve $a = (a_1, \dots, a_k)$ olmak üzere

$$G_{k,n}(a) = r_1^n + \cdots + r_k^n$$

dir.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım. $a = (a_1, \dots, a_k)$ olmak üzere, $G_{k,0}(a) = r_1^0 + \cdots + r_k^0 = 1 + \cdots + 1 = k$ olup ifade doğrudur. n ve n den küçük değerler için $G_{k,n}(a) = r_1^n + \cdots + r_k^n$ ifadesi doğru olsun. Şimdi $t_j = -a_j$ için

$G_{k,n}$ nin tanımından

$$\begin{aligned}
G_{k,n+1}(a) &= \sum_{j=1}^k t_j G_{k,n-j+1}(a) \\
&= \sum_{j=1}^k t_j (r_1^{n-j+1} + \dots + r_k^{n-j+1}) \\
&= \sum_{j=1}^k (-a_j) (r_1^{n-j+1} + \dots + r_k^{n-j+1}) \\
&= - \sum_{j=1}^k a_j \left(\sum_{i=1}^k r_i^{n-j+1} \right) \\
&= - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_j (r_i^{n-j+1})
\end{aligned}$$

olur. Lemma 4.0.28 den dolayı

$$G_{k,n+1}(a) = - \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^k a_j r_i^{n-j+1} \right) = - \sum_{i=1}^k (-r_i^{n+1}) = r_1^{n+1} + \dots + r_k^{n+1}$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları literatürde var olan rekürans ilişkisine sahip bir çok sayı dizisinin genel halidir. Yani a_i ve k değerleri farklı alınarak bazı sayı dizileri elde edilebilir. Bu sayı dizilerinin kapalı formunu (Binet benzeri formüllerini) elde etmek için literatürde farklı yöntemler vardır. Bunlardan biri olan üreteç fonksiyon yöntemi (Fibonacci kapalı formu) benzerdir. Biz şimdi Mchenry tarafından yukarıda ispatları verilen Teorem 5.0.45 ve Teorem 5.0.46 yardımıyla yeni kapalı form elde etme yöntemini farklı rekürans ilişkili sayı dizileri için kullanalım.

Örnek 5.0.47. Tribonacci Sayı Dizisinin Elde Edilmesi

$P_\gamma(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ polinomu verilsin. Buradan denklemin kökleri

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{2}i\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27} + \frac{19}{27}} - \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27} + \frac{19}{27}}} \right) - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27} + \frac{19}{27}} \\
&\quad - \frac{2}{9\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27} + \frac{19}{27}}} + \frac{1}{3} \\
r_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27} + \frac{19}{27}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27} + \frac{19}{27}} - \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27} + \frac{19}{27}}} \right) \\
&\quad - \frac{2}{9\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27} + \frac{19}{27}}}
\end{aligned}$$

$$r_3 = \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27}+\frac{19}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt{11}\sqrt{27}+\frac{19}{27}} + \frac{1}{3}$$

şeklinde elde edilir. $k = 3$ olduğundan

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (r_1)^2 & (r_2)^2 & (r_3)^2 \end{vmatrix} = -2i\sqrt{11}$$

$$\Delta_{k,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (r_1)^2 & (r_2)^2 & (r_3)^2 \end{vmatrix} = -2i\sqrt{11}$$

$$\Delta_{k,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (r_1)^3 & (r_2)^3 & (r_3)^3 \end{vmatrix} = -2i\sqrt{11}$$

$$\Delta_{k,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (r_1)^4 & (r_2)^4 & (r_3)^4 \end{vmatrix} = -4i\sqrt{11}$$

$$\Delta_{k,4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (r_1)^5 & (r_2)^5 & (r_3)^5 \end{vmatrix} = -8i\sqrt{11}$$

$$\Delta_{k,5} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (r_1)^6 & (r_2)^6 & (r_3)^6 \end{vmatrix} = -14i\sqrt{11}$$

$$\Delta_{k,6} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (r_1)^7 & (r_2)^7 & (r_3)^7 \end{vmatrix} = -26i\sqrt{11}$$

$$\Delta_{k,7} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (r_1)^8 & (r_2)^8 & (r_3)^8 \end{vmatrix} = -48i\sqrt{11}$$

$\vdots$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\gamma(p^0) &= \frac{\Delta_{k,1}}{\Delta_k} = \frac{-2i\sqrt{11}}{-2i\sqrt{11}} = 1 \\
\gamma(p^1) &= \frac{\Delta_{k,2}}{\Delta_k} = \frac{-2i\sqrt{11}}{-2i\sqrt{11}} = 1 \\
\gamma(p^2) &= \frac{\Delta_{k,3}}{\Delta_k} = \frac{-4i\sqrt{11}}{-2i\sqrt{11}} = 2 \\
\gamma(p^3) &= \frac{\Delta_{k,4}}{\Delta_k} = \frac{-8i\sqrt{11}}{-2i\sqrt{11}} = 4 \\
\gamma(p^4) &= \frac{\Delta_{k,5}}{\Delta_k} = \frac{-14i\sqrt{11}}{-2i\sqrt{11}} = 7 \\
\gamma(p^5) &= \frac{\Delta_{k,6}}{\Delta_k} = \frac{-26i\sqrt{11}}{-2i\sqrt{11}} = 13 \\
\gamma(p^6) &= \frac{\Delta_{k,7}}{\Delta_k} = \frac{-48i\sqrt{11}}{-2i\sqrt{11}} = 24 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olduğundan

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \dots$$

Tribonacci Sayı Dizisi elde edilir.

Örnek 5.0.48. $P_\gamma(x) = x^2 - 2x - 1$ polinomu verilsin. Buradan denklemin kökleri $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ ve $r_2 = 1 + \sqrt{2}$ şeklinde elde edilir. $k = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \sqrt{2} & \sqrt{2} + 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} \\ \Delta_{k,1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \sqrt{2} & \sqrt{2} + 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} \\ \Delta_{k,2} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1 - \sqrt{2})^2 & (\sqrt{2} + 1)^2 \end{vmatrix} = 4\sqrt{2} \\ \Delta_{k,3} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1 - \sqrt{2})^3 & (\sqrt{2} + 1)^3 \end{vmatrix} = 10\sqrt{2} \\ \Delta_{k,4} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1 - \sqrt{2})^4 & (\sqrt{2} + 1)^4 \end{vmatrix} = 24\sqrt{2} \\ \Delta_{k,5} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1 - \sqrt{2})^5 & (\sqrt{2} + 1)^5 \end{vmatrix} = 58\sqrt{2} \\ &\vdots\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\gamma(p^0) &= \frac{\Delta_{k,1}}{\Delta_k} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \\ \gamma(p^1) &= \frac{\Delta_{k,2}}{\Delta_k} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2 \\ \gamma(p^2) &= \frac{\Delta_{k,3}}{\Delta_k} = \frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 5 \\ \gamma(p^3) &= \frac{\Delta_{k,4}}{\Delta_k} = \frac{24\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 12 \\ \gamma(p^4) &= \frac{\Delta_{k,5}}{\Delta_k} = \frac{58\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 29 \\ &\vdots\end{aligned}$$

olduğundan

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, \dots$$

Pell sayı dizisi elde edilir.

Örnek 5.0.49. $P_\gamma(x) = x^2 - x - 2$ polinomu verilsin. Buradan denklemin kökleri $r_1 = -1$ ve $r_2 = 2$ şeklinde elde edilir. $k = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \\ \Delta_{k,1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \\ \Delta_{k,2} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (-1)^2 & 2^2 \end{vmatrix} = 3 \\ \Delta_{k,3} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (-1)^3 & 2^3 \end{vmatrix} = 9 \\ \Delta_{k,4} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (-1)^4 & 2^4 \end{vmatrix} = 15 \\ \Delta_{k,5} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (-1)^5 & 2^5 \end{vmatrix} = 33 \\ \Delta_{k,6} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (-1)^6 & 2^6 \end{vmatrix} = 63 \\ &\vdots\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\gamma(p^0) &= \frac{\Delta_{k,1}}{\Delta_k} = \frac{3}{3} = 1 \\
\gamma(p^1) &= \frac{\Delta_{k,2}}{\Delta_k} = \frac{3}{3} = 1 \\
\gamma(p^2) &= \frac{\Delta_{k,3}}{\Delta_k} = \frac{9}{3} = 3 \\
\gamma(p^3) &= \frac{\Delta_{k,4}}{\Delta_k} = \frac{15}{3} = 5 \\
\gamma(p^4) &= \frac{\Delta_{k,5}}{\Delta_k} = \frac{33}{3} = 11 \\
\gamma(p^5) &= \frac{\Delta_{k,5}}{\Delta_k} = \frac{63}{3} = 21 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olduğundan

$$1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, \dots$$

Jacobsthal sayı dizisi elde edilir.

Örnek 5.0.50. $P_\gamma(x) = x^2 - x - 1$ polinomu verilsin. Buradan denklemin kökleri $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklinde elde edilir. $k = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 &= 1 \\
r_1^2 + r_2^2 &= 3 \\
r_1^3 + r_2^3 &= 4 \\
r_1^4 + r_2^4 &= 7 \\
r_1^5 + r_2^5 &= 11 \\
r_1^6 + r_2^6 &= 18 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots$$

Lucas sayı dizisi elde edilir.

Örnek 5.0.51. $P_\gamma(x) = x^2 - 2x - 1$ polinomu verilsin. Buradan denklemin kökleri $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ ve $r_2 = 1 + \sqrt{2}$ şeklinde elde edilir. $k = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2 \\ r_1^2 + r_2^2 &= 6 \\ r_1^3 + r_2^3 &= 14 \\ r_1^4 + r_2^4 &= 34 \\ r_1^5 + r_2^5 &= 82 \\ r_1^6 + r_2^6 &= 198 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, \dots$$

Pell Lucas sayı dizisi elde edilir.

Örnek 5.0.52. $P_\gamma(x) = x^2 - x - 2$ polinomu verilsin. Buradan denklemin kökleri $r_1 = -1$ ve $r_2 = 2$ şeklinde elde edilir. $k = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 1 \\ r_1^2 + r_2^2 &= 5 \\ r_1^3 + r_2^3 &= 7 \\ r_1^4 + r_2^4 &= 17 \\ r_1^5 + r_2^5 &= 31 \\ r_1^6 + r_2^6 &= 65 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, \dots$$

Jacobsthal Lucas sayı dizisi elde edilir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, MacHenry (1999) nin bir p asalı ve

$$P_\gamma(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

polinomu ve γ aritmetik fonksiyonu için lokal olarak tanımladığı

$$\gamma^{-1}(p^n) = \begin{cases} a_n & n \leq k \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindeki fonksiyondan yola çıkarak, r_i ve a_i

$$P_\gamma(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

polinomunun kökleri ve katsayıları olmak üzere, $\gamma(p^n)$ nin r_i ve a_i cinsinden nasıl ifade edilebildiği üzerinde durulmuştur.

Bu polinom için alınan farklı k ve katsayılar için, literatürde var olan bazı sayı dizileri elde edilmiştir.

- i. $k = 2$ ve özel olarak alınan $a_1 = a_2 = -1$ katsayıları için Fibonacci sayıları ve Lucas sayıları elde edilmiştir.
- ii. $k = 2$ ve özel olarak alınan $a_1 = -2$ ve $a_2 = -1$ katsayıları için Pell sayıları ve Pell Lucas sayıları elde edilmiştir.
- iii. $k = 2$ ve özel olarak alınan $a_1 = -1$ ve $a_2 = -2$ katsayıları için Jacobsthal sayıları ve Jacobsthal Lucas sayıları elde edilmiştir.
- iv. $k = 3$ ve özel olarak alınan $a_1 = a_2 = a_3 = -1$ katsayıları için Tribonacci sayıları elde edilmiştir.

Bu çalışma ile, literatürde var olan farklı rekürans ilişkisine sahip sayı dizilerinin elde edilmesine yönelik yapılan çalışmalara katkı sağlamak amacıyla, MacHenry (1999)

'nin uyguladığı bir yöntem araştırılmaya çalışılmıştır. Dolayısı ile bu yöntem ile

$$P_{\gamma}(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

polinomu için alınacak farklı k ve katsayılar için farklı sayı dizileri üzerinde farklı sonuçlar elde edilebilir.



7. KAYNAKLAR

- Apostol, T.M., 1971. Some properties of completely multiplicative arithmetic functions. Amer. Math. Monthly, 78, 266-271.
- Apostol, T.M., 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics, Department of Mathematics California Institute of Technology Pasadena, California, USA.
- Carroll, T.B., 1973. Severence classes and multiplicative arithmetic functions. Ph. D. Dissertation, Western Mich. Univ, USA.
- Carroll, T.B. ve Gioia, A.A., 1975. On a subgroup of the group of multiplicative arithmetic functions. Journal of the Australian Mathematical Society, 348-358.
- Cashwell, E.D. ve Everett, C.J., 1959. The ring of number-theoretic functions. Pacific our. Math, 9, 975-985.
- Fraleigh, J.B., 2003. A first course in abstract algebra. Pearson Education India.
- Karakaş, H.İ., 2008. Cebir dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi.
- MacHenry, T., 1999. A Subgroup of the Group of Units in the Ring of Arithmetic Functions. Rocky Mountain J. Math., 29(3), 1055-1065.
- MacHenry, T., 2000. Generalized Fibonacci and Lucas polynomials and Multiplicative Arithmetic Functions. Fibonacci Quart., 38, 17-24.
- MacHenry, T. ve Wong, K., 2012. A correspondence between the isobaric ring and Multiplicative Arithmetic Functions. Rocky M. J. OF Math., 42, Number 4.
- McCarthy, P.J., 1985. Introduction to arithmetical functions. Springer Verlag, New York, USA.
- Meyer, A.R. ve Rubinfeld, R., 2005. Generating functions. Course Notes, Week 11 Massachusetts Institute of Technology, USA.
- Shapiro, H.N., 1972. On the convolution ring of arithmetic functions. Comm. Pure Appl. Math. 1, 287-336.
- Şahin, A., 2013. Hessenberg matris yöntemi ile genelleştirilmiş fibonacci ve lucas polinomlarının terimlerinin hesaplanması. Gaziosmanpaşa Üni. Fen Bil. Enst, Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, Tokat.
- Şenay, H. 2007. Sayılar teorisi dersleri. Selçuk Üniversitesi Yayını, Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya.
- Vaidyanathaswamy, R., 1931. The theory of multiplicative arithmetic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 33, 579-662.

8. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Adem ÜNAL

Doğum Tarihi : 07.03.1975

Doğum Yeri : Reşadiye/TOKAT

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 05052125220

E-posta : ademunalim@hotmail.com

Eğitim:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2019
Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	1998
Lise	Tokat Anadolu Lisesi	1993