

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

**ASAL HALKALARIN (TERS-) HOMOMORFİZMA OLARAK
HAREKET EDEN BAZI DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE**

Taylan PEHLİVAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.01.01

Sunuş Tarihi: 03.08.2015

Bornova-İZMİR

2015

Taylan PEHLİVAN tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak sunulan **“Asal Halkaların (Ters-) Homomorfizma Olarak Hareket Eden Bazı Dönüşümleri Üzerine”** başlıklı bu çalışma E. Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim yönetmeliği ile E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 03.08.2015 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ

.....

Raportör Üye: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

.....

Üye : Doç. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK

.....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E. Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Asal halkaların (Ters-) homomorfizma olarak hareket eden bazı dönüşümleri üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

03/08/2015

İmzası

Taylan PEHLİVAN

ÖZET

ASAL HALKALARIN (TERS-) HOMOMORFİZMA OLARAK HAREKET EDEN BAZI DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE

PEHLİVAN, Taylan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Ağustos 2015, 98 sayfa

Bu tez esas olarak altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusu tanıtılıp konu ile ilgili yapılan bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, bu tezi anlamada ve okumada kolaylık sağlayacak bazı temel tanımlara, teoremlere ve özelliklere yer verilmiştir. Ayrıca halkalardaki türev çeşitleri tanıtılıp, günümüze kadar olan çalışmaların kısa özeti ve tezde kullanılan kavram ve önemli referans sonuçları sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, öncelikle Asma, Rehman ve Shakir (2003)' deki çalışmaları daha sonra Rehman (2004)' deki çalışması ve son olarak Rehman' ın çalışmasındaki bazı eksiklikleri tamamlamak için Gusic (2005)' deki çalışması incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Ashraf et al. ın (2012)' deki çalışması esas olarak ele alınmış ve asal halkaların sıfırdan farklı idealleri üzerinde (ters-) homomorfizma olarak hareket eden dönüşümler incelenip bu dönüşümlerin bir karakterizasyonu verilmiştir.

Beşinci bölümde, esas olarak Xiao-Wei Xu ve Hong-Ying Zhang' ın (2011)' deki çalışması ele alınmıştır. Asal bir halkanın sıfırdan farklı Jordan ideali veya alt halkası üzerinde (ters-) homomorfizma olarak hareket eden türevler incelenmiştir.

Altıncı bölümde, Ali ve Kumar (2009)' daki çalışması esas olarak ele alınmıştır. Asal ve yarı asal halkaların Jordan ideal ve alt halkası üzerinde (ters-) homomorfizma olarak hareket eden (θ, ϕ) -türev ve sol (θ, ϕ) -türevler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asal halka, türev, genelleştirilmiş türev, (θ, ϕ) -türevler, (ters-)homomorfizma olarak hareket eden dönüşümler.

ABSTRACT

ON CERTAIN MAPS ACTING AS (ANTI-)HOMOMORPHISM IN PRIME RINGS

PEHLİVAN, Taylan

Msc in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

August 2015, 98 pages

This thesis meanly consists of six chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and short information is given about the works that have been done so far related to this subject.

In the second chapter, some basic theorems, definitions and properties which may help to make easy understanding and reading of this thesis are given. Furthermore, the types of derivations in rings have been introduced a summary of some works have been done over rings so far and frequently used important results from the references took place in this chapter.

In the third chapter, firstly A. Asma, N. Rehman and A. Shakir' s work in 2003 after N. Rehman' s work in 2004 and finally in order to complete some deficiency on N. Rehman' s work in 2004, I. Gusic' s work in 2005 is studied.

In the fourth chapter, Ashraf et al.'s work in 2012 is primarily considered and mappings acting as (anti-)homomorphism on non-zero ideal in prime rings are studied and the characterization of these mappings is given.

In the fifth chapter, Xioa-Wei Xu and Hong-Ying Zhang's work in 2011 is primarily considered. Derivations acting as (anti-)homomorphism on non-zero *Jordan* ideal in prime ring or on subring in prime ring are examined.

In the sixth chapter, A. Al and Deepak Kumar's work in 2009 is considered. Also, (θ, ϕ) -derivations and left (θ, ϕ) -derivations acting as (anti-)homomorphism on *Jordan* ideal and subring in prime or semi-prime rings are examined.

Key words: Prime ring, derivation, generalized derivation, (θ, ϕ) -derivations, mappings acting as (anti-)homomorphism.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen, sunduğu fırsatlar ve iki yıllık çalışma sürecinin en başından itibaren ilgisini, inancını ve desteğini daima hissettiğim değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Emine ALBAŞ' a, lisans ve yüksek lisans hayatım boyunca tüm çalışmalarımnda akademik kişiliklerini örnek aldığım başta sayın Prof. Dr. Nurcan ARGAC olmak üzere her fırsatta değerli zamanlarını bana ayıran Doç. Dr. Çağrı DEMİR ve Ar. Gör. Nihan BAYDAR YARBİL' e, aldığım her kararın arkasında kararlılıkla duran, istediğim geleceği yaşamam için ellerinden gelenin fazlasını yapan aileme yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	ix
TEŞEKKÜR.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
2.1 Genel Bilgiler.....	3
2.2 Adi Türevli ve (θ, ϕ) -Türevli Halkalar.....	8
2.3 Genelleştirilmiş Türevli Halkalar.....	10
3. İDEALLER ÜZERİNDE HAREKET EDEN TÜREVLER	13
3.1 İdeal Üzerinde Hareket Eden	
Genelleştirilmiş Türevler... ..	13
3.2 Lie İdeal Üzerinde Hareket Eden Türevler.....	23
4.HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ	
SOL (α, β) -TÜREVLER.....	30

İÇİNDEKİLER (Devam)

Sayfa

4.1 Genelleştirilmiş Jordan sol (α, β) -Türevler.....	30
4.2 Genelleştirilmiş sol (α, β) -Türevler.....	54
5.ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ	
SOL (θ, ϕ) -TÜREVLER.....	61
6.ASAL ve YARI ASAL HALKALARDA HAREKET	
EDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREV.....	83
7. SONUÇ.....	93
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	94
ÖZGEÇMİŞ.....	98

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$Ann_l(A)$	A kümesinin sol sıfırlayanı
$Ann_r(A)$	A kümesinin sol sıfırlayanı
$Z(R)$	R halkasının merkezi
$Q(R)$	R halkasının iki yanlı Martindale kesirler halkası
$U(R)$	R halkasının sağ Utumi kesirler halkası
$Q_s(R)$	R halkasının simetrik Martindale kesirler halkası
R_c	R halkasının merkezi kapanışı
C	R halkasının genişletilmiş merkezi
$[x, y]$	x ve y elemanlarının komütatör çarpımı
$Char(R)$	R halkasının karakteristiği
Y. Özellik	Yardımcı Özellik
$F _I$	F fonksiyonunun I kümesine kısıtlanması
1_R	R halkasının birim dönüşümü

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (Devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
I_2	2x2 tipindeki birim matris

1.GİRİŞ

Asal halkaların türevleri üzerine ilk çalışma 1957’ de E. C. Posner tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Posner, asal halkaların değişmeliliğini incelemiştir. Daha sonra bu konu ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. (Herstein, 1957; 1979, Giambruno and Herstein, 1981, Lee, P. H. and Lee, T. K., 1981).

Daha sonra türev teorisinin gelişimi, farklı türev kavramlarının tanımlanmasına ve asal halkalarda bu türevlerin sağladığı bazı özelliklerin verilmesine yol açmıştır. Bu türev kavramları içinde genelleştirilmiş türevli halkalar oldukça önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda ilk kez 1991 de Bresar genelleştirilmiş türevi tanımlamış ve bu çalışmasında iki türevin bileşkesi ile ilgili bazı özellikleri genelleştirilmiş türevlere taşımıştır. Bu çalışmayı (Hvala, 1998) ve (Lee, 1999) nin çalışmaları takip etmiştir. Bu araştırmalar sayesinde asal halkalar üzerinde tanımlı genelleştirilmiş türevlerin yapısı karakterize edilmiş ve kimi zamanda bazı özellikleri sağlayan genelleştirilmiş türevli asal halkaların cebirsel özellikleri verilmiştir.

Çalışmalar, belirli bir özdeşlik sağlayan asal halkalardan, halkanın ideallerine, *Lie* idealleri veya *Jordan* idealleri üzerinde sağlanan özdeşlikleri incelemeye doğru yönelmiştir. Bu çalışmaların doğrultusunda bir çok yapısal sonuç elde edilmiştir.

Asal ve yarı asal halkalardaki türev ile ilgili çalışmalar daha sonra farklı yönlerde ilerlemiş olup çeşitli türev tanımları yapılmıştır. İlk olarak Bresar ve Vukman 1990’ da sol türev kavramını tanımlamış ve bu tarz türevlerin asal halkalar üzerindeki hareketlerini incelemişlerdir. Genelleştirilmiş türev tanımından hareketle, (Ashraf ve Shakir, 2008) genelleştirilmiş sol türev ve genelleştirilmiş Jordan sol türev tanımlarını vermişlerdir. Daha sonraki yıllarda (θ, ϕ) -türev kavramı tanımlanmıştır ve buradan hareketle, (Zaidi, Ashraf ve Ali, 2004) çalışmasında sol (θ, ϕ) -türev tanımını vermişlerdir.

Asal ve yarı asal halkalardaki türevlerle ilgili farklı çalışmalardan biri de homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eden türev dönüşümleri üzerinedir. İlk olarak Bell ve Kappe 1989' daki çalışmalarında bu konuyu ele almışlar ve asal bir halkanın sıfırdan farklı tek yanlı bir ideali üzerinde hareket eden türevi incelemişlerdir. Daha sonra (Ashraf et al., 1999), Bell ve Kappe' nin incelediği durumu (σ, τ) -türevlerde ele almışlardır. Ayrıca (Asma et al., 2003) bu durumu *Lie* ideallere genişletip incelemişlerdir.

Bu çalışmadaki ilk amacımız asal halkaların sıfırdan farklı idealleri üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eden dönüşümleri inceleyip, halkalar veya idealler hakkında bir karakterizasyon vermektir. Ardından bu karakterizasyonları çeşitli türev ve genelleştirilmiş türev kavramlarını kullanarak *Lie* ideallere, alt halkalara ve *Jordan* ideallere genişletebilmektir.

2. ÖNBİLGİLER

2.1 Genel Bilgiler

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini ve anlaşılabilirliğini kolaylaştırmak için diğer bölümlerde geçecek olan tanımlar ile yapılacak ispatlarda çok sık kullanılacak asal halkaların bazı özellikleri, başvuru kolaylığı için alındıkları kaynaklarla birlikte verilecektir.

Tanım 2.1.1 [(Hungerford, 1974), Tanım 1.7] R ve R' herhangi iki halka, $f : R \rightarrow R'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ ise f dönüşümüne bir halka **homomorfizması**, $f(xy) = f(y)f(x)$ ise f dönüşümüne bir halka **ters-homomorfizması**, özel olarak $R = R'$ alınırsa f dönüşümüne R halkasının bir **endomorfizması** denir. Eğer $f : R \rightarrow R'$ halka homomorfizması bire-bir ve örten bir dönüşüm ise f dönüşümüne bir halka **izomorfizması** denir. Özel olarak $R = R'$ alınırsa f dönüşümüne R halkasının bir **otomorfizması** denir.

Tanım 2.1.2 [(Hungerford, 1974), Tanım 1.2] R bir halka, M ve N iki sağ (sol) R -modül olsun. $f : M \rightarrow N$ toplamsal dönüşümü her $m \in M$ ve her $r \in R$ için $f(mr) = f(m)r$ ($f(rm) = rf(m)$) şartını sağlıyorsa f dönüşümüne bir **sağ (sol) R -modül homomorfizması** denir.

Tanım 2.1.3 (Hungerford, 1974) R bir halka ve M bir sol R -modül, $A \subseteq M$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$\text{Ann}_l(A) = \{r \in R : \text{her } a \in A \text{ için } ra = 0\}$$

kümesine A nın **sol sıfırlayanı (left annihilator)** denir. Sağ sıfırlayan da yukarıdaki tanıma benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.1.4 [(Hungerford, 1974), Tanım 1.8] R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa bu n 'lerin en küçüğüne **halkanın karakteristiği** denir ve $Char(R) = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir en küçük pozitif n tamsayısı yoksa R halkasına sıfır karakteristiklidir denir.

Tanım 2.1.5 R bir halka ve n bir tamsayı olsun. $x \in R$ için $nx = 0$ olduğunda $n = 0$ ya da $x = 0$ oluyorsa R 'ye **n -burulmasız** (n -torsion free) **halka** denir.

Tanım 2.1.6 R bir halka olsun. $Z(R) = \{x \in R : \text{her } r \in R \text{ için } xr = rx\}$ kümesine R halkasının **merkezi** denir. $Z(R)$, R halkasının bir alt halkasıdır.

Tanım 2.1.7 [(Lam, 2001), Tanım 10.1] R bir halka ve P , R 'nin bir ideali olsun. $P \neq R$ ve R 'nin herhangi I, J idealleri için $IJ \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ oluyorsa P idealine R 'nin bir **asal ideal** denir.

Önerme 2.1.1 [(Lam, 2001), Önerme 10.2] R halkasının bir $P \neq R$ ideali için aşağıdakiler denktir:

- (i) P asal idealdir.
- (ii) $a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.
- (iii) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.
- (iv) R 'nin I, J sağ (sol) idealleri için $IJ \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir.

Tanım 2.1.8 R bir halka olsun. $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkasına **asal halka** denir.

Tanım 2.1.9 [(Lam, 2001), Tanım 10.8] R bir halka ve Q , R 'nin bir ideali olsun. I , R 'nin bir ideali olmak üzere $I^2 \subseteq Q$ iken $I \subseteq Q$ oluyorsa Q idealine R 'nin bir **yarı asal ideal** denir. Her asal ideal bir yarı asal idealdir.

Önerme 2.1.2 [(Lam, 2001), Önerme 10.9] R bir halka ve Q , R 'nin bir ideali olmak üzere aşağıdakiler denktir:

- (i) Q yarı asal idealdir.
- (ii) $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.
- (iii) $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.
- (iv) R 'nin bir I sağ (sol) ideali için $I^2 \subseteq Q$ ise $I \subseteq Q$ dur.

Tanım 2.1.10 R bir halka olsun. $a \in R$ olmak üzere $aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına **yarı asal halka** denir. Her asal halka bir yarı asal halkadır.

Önerme 2.1.3 [(Lam, 2001), Önerme 10.16] Herhangi bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

- (i) R yarı asal bir halkadır.
- (ii) R 'nin herhangi bir nilpotent ideali yoktur.
- (iii) R 'nin herhangi bir nilpotent sol ideali yoktur.

Yardımcı Özellik 2.1.1 R asal bir halka ve I , R 'nin bir sağ(sol) ideali olsun. Bu durumda I idealinin sağ (sol) sıfırlayanı sıfırdır.

Yardımcı Özellik 2.1.2 R asal bir halka, $a, b \in R$ olsun. $a \in Z(R)$ ve $ab \in Z(R)$ olduğunda $b \in Z(R)$ ya da $a = 0$ dır.

Tanım 2.1.11 R , bir halka ve U , R 'nin toplamsal bir alt grubu olsun. $[U, R] \subseteq U$ ise U ya R 'nin bir **Lie ideali** denir.

Tanım 2.1.12 R , bir halka ve J , R 'nin toplamsal bir alt grubu olsun. Her $x \in R$ ve $r \in J$ için $(x \circ r) = xy + yx \in J$ olursa J ye R 'nin bir **Jordan ideali** denir.

Tanım 2.1.13 (Beidar et al. 1996) R yarı asal bir halka olsun.

$$N = \{ I : I, R' \text{ nin bir ideali ve } Ann_l(I) = (0) \}$$

kümesi çarpım ve sonlu arakesit altında kapalıdır.

$$T = \{ (f; J) : J \in N, f : J_R \rightarrow R_R \text{ sağ } R\text{-modül homomorfizması} \}$$

kümesini göz önüne alalım. T kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır:

$(f; J) \approx (g; K) : \Leftrightarrow 0 \neq L \subseteq J \cap K$ olacak şekilde bir $L \in D(R)$ vardır ve L üzerinde $f = g$ dir.

$(f; J), (f; J) \in T$ elemanının denklik sınıfını gösterebilir. Denklik sınıfları üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\{f; J\} + \{g; K\} = \{f + g; KJ\}$$

$$\{f; J\} \{g; K\} = \{fg; KJ\}$$

Bu şekilde tanımlanan işlemlerle T 'nin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka teşkil eder. Bu halkaya R 'nin **iki yanlı sağ (Martindale) kesirler halkası** denir ve $Q(R)$ ile gösterilir. Herhangi bir R yarı asal halkasının iki yanlı sağ kesirler halkası izomorfizmaya bağlı olarak aşağıdaki özellikleri sağlayan $Q(R)$ halkası olarak karakterize edilebilir.

(i) $R, Q(R)$ 'nin bir alt halkasıdır.

(ii) Her $q \in Q(R)$ için $qJ \subseteq R$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir ideali vardır.

(iii) Her $q \in Q(R)$ ve $J \in I$ için $qJ = (0)$ ise $q = 0$ dır.

(iv) Her $J \in I$, $\varphi: J_R \rightarrow R_R$ sağ R -modül dönüşümü ve her $x \in J$ için $\varphi(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in Q(R)$ vardır.

$Q(R)$ 'nin $Q_s(R) = \{q \in Q(R) : \text{bazı } J \in D(R) \text{ için } qJ \cup Jq \subseteq R\}$ alt halkasına R 'nin **simetrik (Martindale) kesirler halkası** denir. $Q(R)$ halkasının merkezine R 'nin **genişletilmiş merkezi** denir ve C ile gösterilir. R yarı asal bir halka ise

$$C = Z(Q_s(R)) = Z(Q(R)) = \{q \in U(R) : \text{her } r \in R \text{ için } qr = rq\}$$

dir. Üstelik R asal bir halka ise C bir cisimdir.

Tanım 2.1.14 (Lam, 2001) R bir halka olsun. Her $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması $a = 0$ ya da $b = 0$ olmasını gerektirirse bu durumda R 'ye **bölge** denir.

Tanım 2.1.15 (Hungerford, 1974) R bir halka olsun. Eğer $e \in R$ olmak üzere $e^2 = e$ olursa e elemanına R 'nin **idempotent elemanı** denir. Eğer $e \in R$ elemanı R halkasının merkezinde içeriliyorsa o zaman e elemanına R 'nin **merkezi idempotent elemanı** denir.

2.2 Adi Türevli ve (θ, ϕ) -Türevli Halkalar

Bu bölümde, tez boyunca sıkça kullanacağımız bazı kavram ve sonuçlara yer vereceğiz. Türevli asal halkalar üzerindeki ilk çalışma 1957 yılında E. C. Posner tarafından başlatılmıştır. Son 50 yılda bir çok önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmalarda asal ve yarı asal halkalar üzerine önemli yapısal sonuçlara ulaşılmıştır. Daha sonraki yıllarda tanımlanan farklı türev kavramları ile bu teori gelişimine devam etmiştir. Bu çalışmada ele alınacak bazı türev tanımları sol türev, (θ, ϕ) -türev, sol (θ, ϕ) -türev ve Jordan sol (θ, ϕ) -türev kavramları olacaktır. Sol türev tanımı ilk olarak Bresar ve Vukman (1990) tarafından yapılmıştır. Daha sonra bu tanımdan hareketle sol (θ, ϕ) -türev ve Jordan sol (θ, ϕ) -türev tanımları da verilmiştir.

R bir halka ve $x, y \in R$ için bu elemanların komütatör çarpımı $[x, y] = xy - yx$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.1 R bir halka $d : R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise d dönüşümüne R 'nin bir **türevi** denir. $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $\delta(x) = [a, x]$ ile tanımlı dönüşüm bir türevdir ve bu tip türevlere **iç türev** denir.

Aşağıda asal bir halkanın sıfırdan farklı ideali için iyi bilinen bir özellik verilecektir.

Yardımcı Özellik 2.2.1 R , asal bir halka, I , R 'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $aIb = (0)$ olursa o zaman ya $a = 0$ dır ya da $b = 0$ dır.

Yardımcı Özellik 2.2.2 [(Herstein, 1969), Y. Özellik 1.1] R bir halka ve I, R' nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. n sabit bir tamsayı olmak üzere $a \in I$ verildiğinde $a^n = 0$ ise R' nin sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır.

Yardımcı Özellik 2.2.3 [(Herstein, 1969), Y. Özellik 1.3] R , sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan ve R' de $2x=0$ olması $x=0$ olmasını gerektiren bir halka olsun. $U \neq (0)$, R' nin hem bir Lie ideali hem de bir alt halkası ise bu durumda ya $U \subset Z(R)'$ dir ya da U , R' nin sıfır olmayan bir idealini kapsar. Üstelik $[U, U] \neq (0)$, yani U değişmeli değilse $R[U, U]R \subset U'$ dur.

Teorem 2.2.1 [(De Filippis, 2000), Teorem 1] R , $\text{char}(R) \neq 2$ olan asal bir halka, d R' nin sıfırdan farklı bir türevi, L , R' nin merkezi olmayan bir Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Her $u \in L$ için $a[d(u), u] = 0$ ise $a = 0$ dır.

Tanım 2.2.2 (Bresar and Vukman, 1990) R herhangi bir halka, $\mu: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $\mu(xy) = x\mu(y) + y\mu(x)$ ($\mu(x^2) = 2x\mu(x)$) koşulunu sağlarsa o zaman μ ye R' nin bir **sol türevi (Jordan sol türevi)** denir.

Tanım 2.2.3 (Zaidi, Ashraf and Ali, 2004) R , birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R' nin endomorfizmaları olsun. $\mu: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $\mu(xy) = \mu(x)\theta(y) + \phi(x)\mu(y)$ ($\mu(x^2) = \mu(x)\theta(x) + \phi(x)\mu(x)$) koşulunu sağlarsa μ dönüşümüne R' nin bir **(θ, ϕ) -türevi (Jordan (θ, ϕ) -türevi)** denir.

Tanım 2.2.4 (Zaidi, Ashraf and Ali, 2004) R birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R' nin endomorfizmaları olsun. Her $x, y \in R$ için $\delta: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü $\delta(xy) = \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\delta(x)$ koşulunu sağlarsa o zaman δ ya R' nin bir **sol (θ, ϕ) -türevi** denir.

Tanım 2.2.5 (Herstein, 1957) R birleşmeli bir halka, $d: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x \in R$ için $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$ koşulunu sağlarsa o zaman d dönüşümüne R' nin bir **Jordan türevi** denir.

Tanım 2.2.6 (Ali, 2011) R , birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R' nin endomorfizmaları olsun. $G: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $G(x^2) = \theta(x)G(x) + \phi(x)G(x)$ koşulunu sağlarsa G dönüşümüne R' nin bir **Jordan sol (θ, ϕ) -türevi** denir.

Tanım 2.2.7 (Yenigül and Argaç, 1994) R , birleşmeli bir halka ve α , R' nin sıfırdan farklı bir dönüşümü olsun. $d: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)\alpha(y) + x d(y)$ koşulunu sağlarsa o zaman d ye R' nin bir **α -türevi** denir.

2.3 Genelleştirilmiş Türevli Halkalar

Bu bölümde bir önceki bölümde olduğu gibi, tez boyunca ele alacağımız türev kavramlarından biri olan genelleştirilmiş türev kavramları tanıtılacaktır. Genelleştirilmiş türevler cebirsel anlamda ilk olarak 1991 de Bresar daha sonra 1998 de Hvala tarafından çalışılmıştır. Daha önce türevli halkalar teorisinde ele alınan bazı problemler genelleştirilmiş türevli asal ve yarı asal halkalar için de incelenmiştir.

Tanım 2.3.1 (Hvala, 1998) R bir halka, $g: R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y + x\delta(y)$ olacak şekilde R' nin bir δ türevi varsa g dönüşümüne R' nin bir **genelleştirilmiş türevi** denir. Burada δ türevine, g genelleştirilmiş türevine **karşılık gelen türev** denir. $a, b \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $g(x) = ax + xb$ ile tanımlı dönüşüm bir genelleştirilmiş türevdir ve bu tip genelleştirilmiş türevlere **genelleştirilmiş iç türev** denir.

Teorem 2.3.1 [(Lee, 1999), Teorem 4] R yarı asal bir halka olsun. O zaman, R' nin yoğun bir sağ ideali üzerindeki her g genelleştirilmiş türevi, $U(R)$ ye tek türlü genişletilebilir ve uygun bir $a \in U(R)$ ve $U(R)'$ nin bir δ türevi için $g(x) = ax + \delta(x)$ formundadır. Üstelik a ve δ , g genelleştirilmiş türevi ile tek türlü belirlenir.

Tanım 2.3.2 R birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R' nin endomorfizmaları olsun. $\delta: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü μ , R' nin bir (θ, ϕ) -türevi olmak üzere her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \theta(x)\delta(y) + \mu(x)\phi(y)$ koşulunu sağlarsa o zaman δ dönüşümüne R' nin bir **genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türevi** denir.

Tanım 2.3.3 (Ali, 2011) R birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R' nin endomorfizmaları olsun. $G: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü δ , R' nin bir *Jordan sol* (θ, ϕ) -türevi olmak üzere her $x, y \in R$ için $G(xy) = \theta(x)G(y) + \phi(y)\delta(x)$ koşulunu sağlarsa o zaman G dönüşümüne R' nin bir **genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi** denir.

Tanım 2.3.4 (Ali, 2011) R birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R' nin endomorfizmaları olsun. $G: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü δ , R' nin bir *Jordan sol* (θ, ϕ) -türevi olmak üzere her $x, y \in R$ için $G(x^2) = \theta(x)G(x) + \phi(x)\delta(x)$ koşulunu sağlarsa o zaman G dönüşümüne R' nin bir **genelleştirilmiş Jordan sol (θ, ϕ) -türevi** denir.

Tanım 2.3.5 (Ashraf and Ali, 2008) R birleşmeli bir halka, $G: R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için $G(xy) = xG(y) + y\delta(x)$ olacak şekilde R' nin bir δ *Jordan sol* türevi varsa G ye R' nin bir **genelleştirilmiş sol türevi** denir.

Tanım 2.3.6 (Ashraf and Ali, 2008) R birleşmeli bir halka, $G : R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için $G(x^2) = xG(x) + x\delta(x)$ olacak şekilde R 'nin bir δ *Jordan* sol türevi varsa G ye R 'nin bir **genelleştirilmiş Jordan sol türevi** denir.

3. İDEALLER ÜZERİNDE HAREKET EDEN TÜREVLER

Bu bölümde ilk olarak, Nadeem Ur Rehman' ın "On Generalized Derivations as Homomorphisms and Anti-Homomorphisms" adlı çalışması ve Rehman' ın bu çalışmasındaki eksikliklerin tamamlanması amacıyla Ivica Gusic' in "A Note on Generalized Derivations of Prime Rings" adlı çalışması ele alınacaktır. Daha sonra Asma Ali, Nadeem-Ur-Rehman ve Shakir Ali' in "On Lie Ideals with Derivations as Homomorphisms and Anti-Homomorphisms" adlı çalışmaları incelenecektir.

3.1 İdeal Üzerinde Hareket Eden Genelleştirilmiş Türevler

Bu bölümde esas olarak N. Ur Rehman' ın "On Generalized Derivations as Homomorphisms and Anti-Homomorphisms" adlı çalışması ele alınacaktır ve daha sonra bu çalışmadaki bazı eksiklikleri tamamlamak için Ivica Gusic' in "A Note on Generalized Derivations of Prime Rings" adlı çalışması incelenecektir. Makalenin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla çalışma boyunca kullanılan bazı tanımları verelim.

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe, R merkezi $Z(R)$ olan birleşmeli bir halkayı gösterecektir. Belirli bir $a \in R$ için $I_a : R \rightarrow R$ olmak üzere $I_a(x) = [x, a]$ ile verilen dönüşüm iç türevi gösterecektir. Bazı $a, b \in R$ için eğer $F_{a,b}(x) = ax + xb$ olarak tanımlanan $F_{a,b} : R \rightarrow R$ toplamsal dönüşüm genelleştirilmiş iç türev olarak adlandırılacaktır. Bu bölüm boyunca F , R ' nin bir d türevi ile belirlenen R ' nin bir genelleştirilmiş türevini gösterecektir.

(Bell ve Kappe, 1989), çalışmalarında R asal bir halka ve d , R ' nin bir türevi, I R ' nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olmak üzere eğer d , I üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket ederse o zaman $d = 0$ olması gerektiğini ispatlamışlardır.

Daha sonra (Ashraf et al., 1999), Bell ve Kappe' nin incelediği durumu (σ, τ) -türevlerde ele almışlardır. Bu bölümde Bell ve Kappe' nin çalışmasının asal bir halkanın ideali üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eden genelleştirilmiş türeve genişlemesinin ispatı verilecektir.

Teorem 3.1.1 R , 2-burulmasız asal bir halka, I R' nin sıfırdan farklı iki yanlı bir ideali, $F: R \rightarrow R$, R' nin sıfırdan farklı bir d türevi ile belirlenen sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun.

- (i) Eğer $d \neq 0$ ve F , I üzerinde homomorfizma olarak hareket ederse o zaman R değişmelidir.
- (ii) Eğer $d \neq 0$ ve F , I üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ederse o zaman R değişmelidir.

Teoremin ispatına başlamadan önce ispatta kullanacak bazı özellikleri verelim.

Yardımcı Özellik 3.1.1 [(Mayne, 1984), Y. Özellik 3] R , asal bir halka olsun. Eğer R sıfırdan farklı değişmeli bir sağ ideal içerirse o zaman R değişmelidir.

Yardımcı Özellik 3.1.2 R asal bir halka ve I , R' nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $a \in R$ için $aI = (0)$ ise o zaman $a = 0$ dır.

Yardımcı Özellik 3.1.1 in ispatı için aşağıdaki yardımcı özelliğe ihtiyaç vardır.

Yardımcı Özellik 3.1.3 [(Mayne, 1984), Y. Özellik 2] R , asal bir halka ve I , R' nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. d , R' nin türevi olmak üzere eğer $d(I) = 0$ ise o zaman $d(R) = 0$ dır.

Yardımcı Özellik 3.1.1 in ispatı I, R 'nin sıfırdan farklı değişmeli bir sağ ideali olsun. I değişmeli olduğundan her $x \in I$ için $I_x(I) = [x, I] = 0$ olur. Y. Özellik 3.1.3 den her $x \in I$ için $I_x(R) = [x, R] = 0$ elde edilir. Yani her $a \in R$ için $I_a(I) = 0$ dır. Tekrar Y. Özellik 3.1.3 den $I_a(R) = [a, R] = 0$ elde edilir. Bu ise her $a \in R$ için $a \in Z(R)$ demektir, yani R değişmelidir.

Teorem 3.1.1 in ispatı İspatı iki durumda ele alacağız.

(i) İlk olarak F, I üzerinde homomorfizma olarak hareket etsin. Bu durumda her $x, y \in I$ için

$$F(xy) = F(x)y + xd(y) = F(x)F(y) \quad (3.1.1)$$

olur ve F bir genelleştirilmiş türev olduğundan her $x, y, z \in I$ için

$$F(xyz) = F((xy)z) = F(xy)z + xyd(z) \quad (3.1.2)$$

elde edilir. Diğer taraftan her $x, y, z \in I$ için

$$\begin{aligned} F(xyz) &= F(x)F(yz) = F(x)(F(y)z + yd(z)) \\ &= F(x)F(y)z + F(x)yd(z) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

dır. (3.1.2) ve (3.1.3) birlikte düşünülürse her $x, y, z \in I$ için $(F(x) - x)yd(z) = 0$ elde edilir. Son bağıntıdan her $x, z \in I$ için $(F(x) - x)Id(z) = (0)$ bulunur. Y. Özellik 2.2.1 den her $x, z \in I$ için ya $F(x) - x = 0$ dır ya da $d(z) = 0$ dır. Eğer her $z \in I$ için $d(z) = 0$ ise o zaman $d = 0$ olur ve bu bir çelişkidir. Eğer her $x \in I$ için $F(x) = x$ ise bu durumda her $x, y \in I$ için $xy = F(xy) = F(x)y + xd(y)$ olur ve $xd(y) = 0$ bulunur.

Böylece her $y \in I$ için $Id(y) = 0$ dır. Eğer $r \in R$ olmak üzere y yerine yr alınırsa o zaman $Id(y) = 0$ olduğundan $Iy d(r) = 0$ dır. Buradan hareketle $IId(r) = (0)$ olur. Y. Özellik 2.2.1 son bağıntıya uygulanırsa $I \neq 0$ olduğundan $r \in R$ olmak üzere $d(r) = 0$ olur. Buradan $d = 0$ sonucuna varılır ki bu bir çelişkidir.

(ii) Diğer bir yandan F , I üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket etsin. Her $x, y \in I$ için

$$F(xy) = F(x)y + xd(y) = F(y)F(x) \quad (3.1.4)$$

olur ve (3.1.4) de x yerine xy alınıp bağıntı kullanılırsa her $x, y \in I$ için

$$F(xxy) = F(xy)y + xyd(y)$$

bulunur. Bağıntının her iki tarafı genelleştirilmiş türev tanımlarını kullanarak açılırsa her $x, y \in I$ için

$$(F(x)y + xd(y))y + xyd(y) = F(y)(F(x)y + xd(y))$$

$$F(xy)y + xyd(y) = F(xy)y + F(y)xd(y)$$

$$xyd(y) = F(y)xd(y) \quad (3.1.5)$$

olur ve (3.1.5) de x yerine zx alınırsa her $x, y, z \in I$ için

$$zxyd(y) = F(y)zxd(y) \quad (3.1.6)$$

elde edilir. (3.1.5) sol taraftan z ile çarpılırsa her $x, y, z \in I$ için

$$zxyd(y) = zF(y)xd(y) \quad (3.1.7)$$

olur. Diğer yandan (3.1.6) ve (3.1.7) den her $x, y, z \in I$ için $F(y)zxd(y) = zF(y)xd(y)$ olur. Bu bağıntıdan hareketle $[F(y), z]xd(y) = 0$ bulunur. En son elde edilen bağıntıdan her $y, z \in I$ için $[F(y), z]Rd(y) = (0)$ dır. R asal bir halka olduğundan her $y, z \in I$ için ya $[F(y), z] = 0$ dır ya da $d(y) = 0$ dır. Şimdi $A = \{y \in I \mid [F(y), z] = 0, \text{ her } z \in I\}$ ve $B = \{y \in I \mid d(y) = 0\}$ gibi I 'nin iki alt kümesini tanımlayalım. $(A, +)$ ve $(B, +)$, $(I, +)$ 'nin iki toplamsal alt grubu ve $(I, +) = (A, +) \cup (B, +)$ dır. Ayrıca bir grup iki öz altgrubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $I = A$ dır ya da $I = B$ dır. Kabul edelim ki $I = B$ olsun. O zaman her $y \in I$ için $d(y) = 0$ yani $d(I) = 0$ olur. Bu ise daha önce yapılan irdilemeden $d = 0$ olmasını gerektirir, bu bir çelişkidir. Diğer yandan $I = A$ olsun. O zaman her $y, z \in I$ için $[F(y), z] = 0$ dır. Bu bağıntıda y yerine yz alınıp bağıntı kullanılırsa

$$[F(yz), z] = 0$$

$$[F(y)z + yd(z), z] = 0$$

$$[F(y)z, z] + [yd(z), z] = 0$$

$$y[d(z), z] + [y, z]d(z) = 0$$

olur. Son bağıntıda y yerine xy alınırsa her $x, y, z \in I$ için

$$xy[d(z), z] + [xy, z]d(z) = 0$$

$$x[y, z]d(z) + [x, z]yd(z) + xy[d(z), z] = 0$$

$$x([y, z]d(z) + y[d(z), z]) + [x, z]yd(z) = 0$$

olur. Son bağıntıda $y[d(z), z] + [y, z]d(z) = 0$ olması kullanılırsa her $x, z \in I$ için $[x, z]Id(z) = (0)$ bulunur. R asal bir halka olduğundan ya $[x, z] = 0$ dır ya da $d(z) = 0$ dır. Benzer şekilde $C = \{z \in I \mid [x, z] = 0, \text{ her } x \in I\}$ ve $D = \{z \in I \mid d(z) = 0\}$ gibi I 'nin iki alt kümesini tanımlayalım. $(C, +)$ ve $(D, +)$ $(I, +)$ 'nin iki toplamsal alt grubu olmak üzere ve $(I, +) = (C, +) \cup (D, +)$ dır. Ayrıca bir grup iki öz altgrubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $I = C$ dır ya da $I = D$ dır. Eğer $I = D$ olursa, her $z \in I$ için $d(z) = 0$ yani $d(I) = 0$ olur ve buradan daha önce irdelediğimiz gibi $d = 0$ çelişkisi elde edilir. Diğer yandan $I = C$ olursa her $x, z \in I$ için $[x, z] = 0$ olur ve bu I nin, R 'nin değişmeli bir ideali olduğunu ifade eder. Y. Özellik 3.1.1 den R değişmelidir sonucu elde edilir.

Rehman'ın makalesindeki türevin sıfır olma durumundaki eksiklikleri tamamlamak için şimdi Ivica Gusic'in çalışmasının ilgili bölümünü inceleyelim.

Teorem 3.1.2 R , birleşmeli asal bir halka, I , R 'nin sıfırdan farklı bir ideali, d , R 'nin herhangi bir fonksiyonu (türev veya toplamsal dönüşüm olması gerekmez), F , her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y + xd(y)$ koşulunu sağlayan R 'nin herhangi bir fonksiyonu olsun. (F 'nin toplamsal olması gerekmez)

(a) Her $x, y \in I$ için $F(xy) = F(x)F(y)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $d = 0$ ve bu durumda ya $F = 0$ ya da her $x \in R$ için $F(x) = x$ dir.

(b) Her $x, y \in I$ için $F(xy) = F(y)F(x)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $d = 0$ ve bu durumda ya $F = 0$ ya da her $x \in R$ için $F(x) = x$ dir. Bu durum R 'nin değişmeli olmasını verir.

İspat (a) $F|_I$ nin homomorfizma olduğunu kabul edelim. (Rehman, 2004), her $x, y, z \in I$ için $(F(x)-x)y d(z)=0$ olduğunu göstermiştir. Bu bağıntıdan her $x, z \in I$ için $(F(x)-x)Id(z)=(0)$ olur. $d|_I \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Y. Özellik 2.2.1 den her $x \in I$ için $F(x)=x$ elde edilir. O zaman her $x, y \in I$ için

$$xy = F(xy) = F(x)y + xd(y)$$

$$= xy + xd(y)$$

olur. Son bağıntıdan her $x, y \in I$ için $xd(y)=0$ olur. $r \in R$ olmak üzere x yerine xr alalım. O zaman $xRd(y)=(0)$ olur. R , asal bir halka ve $I \neq 0$ olduğundan $y \in I$ için $d(y)=0$ elde edilir. Bu durumda $d(I)=0$ olmalıdır. Bu bir çelişkidir. O zaman $d|_I=0$ dır. Ayrıca her $x, y \in I$ için

$$F(xy) = F(x)y + xd(y)$$

$$= F(x)y$$

olur. $F|_I$ homomorfizma olduğundan $F(xy)=F(x)F(y)$ dir. Yukarıdaki iki bağıntıdan her $x, y \in I$ için $F(x)y=F(x)F(y)$ elde edilir. Son bağıntıdan $t \in I$ olmak üzere x yerine zt alınırsa her $z, t, y \in I$ için

$$0 = F(zt)(y - F(y))$$

$$= F(z)t(y - F(y))$$

olur. Yukarıdaki bağıntıdan her $z, y \in I$ için $(0)=F(z)I(y-F(y))$ dır. Y. Özellik 2.2.1 den ya her $z \in I$ için $F(z)=0$ dır ya da her $y \in I$ için $F(y)=y$ dir. Her $z \in I$ için $F(z)=0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $r \in R$ için

$$0 = F(rz) = F(r)z + rd(z)$$

$$= F(r)z$$

olur. Yani $(0) = F(r)I$ dır. $I \neq (0)$ olduğundan Y. Özellik 3.1.2 den R üzerinde $F = 0$ sonucuna varılır. Diğer yandan her $y \in I$ için $F(y) = y$ olduğunu kabul edelim. O zaman $r \in R$ için

$$ry = F(ry) = F(r)y + rd(y)$$

$$= F(r)y$$

dır. Yukarıdaki bağıntıdan her $r \in R$ ve $y \in I$ için $ry = F(r)y$ elde edilir. Bu ise $(r - F(r))I = (0)$ demektir. $I \neq (0)$ olduğundan Y. Özellik 3.1.2 son bağıntıya uygulanırsa her $r \in R$ için $F(r) = r$ dir. Şimdi R üzerinde $d = 0$ olduğunu göstermek için ilk olarak $F = 0$ olduğunu kabul edelim. (burada aslında $F|_I = 0$ olduğunun kabul edilmesi de yeterlidir)

O zaman her $r \in R$ ve $z \in I$ için

$$0 = F(zr) = F(z)r + zd(r)$$

$$= zd(r)$$

olur. $z \in I$ olduğundan yukarıda yapılan çıkarımın aynısıyla her $r \in R$ için $d(r) = 0$ olur yani R üzerinde $d = 0$ dır. Diğer yandan $F = 1_R$ olduğunu kabul edelim. (burada $F|_I = 1_R$ olduğunun kabul edilmesi de yeterlidir)

Her $z \in I$ ve $r \in R$ için

$$zr = F(zr) = F(z)r + zd(r)$$

$$= zr + zd(r)$$

olur. Son bağıntıdan hareketle her $z \in I$ ve $r \in R$ için $zd(r) = 0$ bağıntısına ulaşılır. Buradan $Id(r) = (0)$ olur. $I \neq (0)$ olduğundan Y. Özellik 3.1.2 son bağıntıya uygulanırsa her $r \in R$ için $d(r) = 0$ sonucuna varılır. Bu ise R üzerinde $d = 0$ demektir.

(b) $F|_I$ nin ters-homomorfizma olduğunu kabul edelim. Rehman (2004) te her $x, y, z \in I$ için $[F(z), y]xd(z) = 0$ sonucuna elde edilmiştir. Buradan hareketle $[F(z), y]Id(z) = (0)$ olur ve Y. Özellik 2.2.1 den ya her $z \in I$ için $d(z) = 0$ dır ya da her $y, z \in I$ için $[F(z), y] = 0$ dır. Kabul edelim ki bazı $z \in I$ için $d(z) \neq 0$ olsun. O zaman her $y \in I$ için $[F(z), y] = 0$ olur yani $F(z)y = yF(z)$ dir. $a \in R$, $x \in I$ ve $r \in R$ için $ax = xa$ olduğundan

$$(ar - ra)x = a(rx) - r(ax)$$

$$= rxa - rxa$$

$$= 0$$

olur. Son elde edilen eşitlikten $(ar - ra)I = (0)$ bağıntısına ulaşılır. Y. Özellik 3.1.2 den $I \neq 0$ olduğundan $ar = ra$ olur. Bu eşitlik $r \in R$ olmak üzere $F(z)r = rF(z)$ olmasını verir. Son bağıntıdan hareketle her $x, y \in I$ ve $d(z) \neq 0$ olmak üzere $z \in I$ için

$$F(xyz) = F(xy)z + xyd(z)$$

olur. Diğer yandan

$$F(xyz) = F(z)F(y)F(x)$$

$$= F(y)F(z)F(x)$$

$$= F(y)F(xz)$$

$$= F(y)(F(x)z + xd(z))$$

$$= F(xy)z + F(y)xd(z)$$

olur. Her $x, y \in I$ ve $d(z) \neq 0$ olmak üzere $z \in I$ için yukarıdaki iki bağıntıdan

$$0 = (xy - F(y)x)d(z) \quad (3.1.8)$$

elde edilir. $t \in R$ için (3.1.8) de x yerine tx alınırsa

$$txyd(z) = F(y)txd(z)$$

olur. (3.1.8) sol taraftan t ile çarpılırsa

$$txyd(z) = tF(y)xd(z)$$

bağıntısına varılır. Son iki bağıntı birlikte düşünüldüğünde her $x, y \in I$ ve $d(z) \neq 0$ olmak üzere $z \in I$ için

$$F(y)txd(z) = tF(y)xd(z)$$

olur. Buradan

$$(F(y)t - tF(y))Id(z) = (0)$$

elde edilir. R , asal bir halka ve Y . Özellik 2.2.1 den her $y \in I$ ve $t \in R$ için $F(y)t = tF(y)$ olur. Bu durumda

$$F(xy) = F(y)F(x) = F(x)F(y)$$

olur. Yani $F|_I$ homomorfizma olur. O zaman (a) şikkından $d(I) = 0$ olur. Bu bir çelişkidir yani $d|_I = 0$ olmalıdır. Diğer yandan her $x, y, z \in I$ için

$$F(x)yz = F(xyz) = F(z)F(xy)$$

ve

$$F(z)F(xy) = F(z)F(x)y = F(xz)y = F(x)zy$$

olduğundan her $x, y, z \in I$ için

$$F(x)zy = F(x)yz$$

bağıntısına ulaşılır. $t \in I$ için x yerine xt alınırsa

$$F(x)t(zy - yz) = 0$$

elde edilir. Yani $F(x)I(zy - yz) = (0)$ olur. Y. Özellik 2.2.1 den ya her $x \in R$ için $F(x) = 0$ dır ya da her $z, y \in I$ için $zy = yz$ dır.

Eğer her $z, y \in I$ için $zy = yz$ olursa I değişmeli olur. Bu durumda Y. Özellik 3.1.1 den R değişmelidir sonucuna varılır. O zaman $F|_I$ homomorfizma olur ve (a) şikkından ispat sonuçlanır.

3.2 Lie İdeal Üzerinde Hareket Eden Türevler

Bu bölümde Asma Ali, Nadeem-Ur-Rehman ve Shakir Ali' in "On Lie Ideals with Derivations as Homomorphisms and Anti-Homomorphisms" adlı çalışması esas olarak incelenecektir.

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe, R merkezi $Z(R)$ olan birleşmeli bir halkayı gösterecektir. Ayrıca U , herhangi bir küme olmak üzere her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulu sağlanırsa U kümesi karesel kapalı bir küme olarak adlandırılacaktır.

Bu bölümde Bell ve Kappe' nin çalışmasının (Asma et al., 2003) tarafından *Lie* ideallere genişletilmesi ele alınacaktır.

Teorem 3.2.1 R , 2-burulmasız asal bir halka, d R ' nin bir türevi ve U , her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan R ' nin sıfırdan farklı bir *Lie* ideali olsun. Eğer d , U üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket ederse o zaman ya $d = 0$ dır ya da $U \subseteq Z(R)$ dir.

Teoremin ispatına başlamadan önce ispatta kullanılacak olan bazı yardımcı özellikleri verelim.

Yardımcı Özellik 3.2.1 [(Awtar, R., 1984), Teorem 7] R , 2-burulmasız asal bir halka, d , R ' nin türevi ve U , R ' nin sıfırdan farklı bir *Lie* ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z(R)$ ise o zaman $U \subseteq Z(R)$ dir.

Yardımcı Özellik 3.2.2 [(Bergen et al., 1981), Y. Özellik 4] R , 2-burulmasız asal bir halka, $U \not\subseteq Z(R)$ olmak üzere R ' nin bir *Lie* ideali olsun. Eğer $a, b \in R$ için $aUb = (0)$ ise o zaman ya $a = 0$ dır ya da $b = 0$ dır.

Yardımcı Özellik 3.2.3 [(Bergen et al., 1981), Y. Özellik 5] R , 2-burulmasız asal bir halka, U R ' nin sıfırdan farklı bir *Lie* ideali ve d , R ' nin sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d(U) = 0$ ise o zaman $U \subseteq Z(R)$ dir.

Teorem 3.2.1 in ispatı $U \not\subseteq Z(R)$ olduğunu kabul edelim. İspatı iki durumda irdeleyelim. İlk olarak d , R ' nin bir türevi olmak üzere U üzerinde homomorfizma olarak hareket etsin. Bu durumda Tanım 2.1.1 den her $u, v \in U$ için $d(uv) = d(u)d(v)$ dır ve Tanım 2.2.1 den her $u, v \in U$ için $d(uv) = ud(v) + d(u)v$ dir. Son iki bağıntı birlikte düşünüldüğünde her $u, v \in U$ için

$$d(uv) = ud(v) + d(u)v = d(u)d(v)$$

sonucuna varılır. Son bağıntıda u yerine u^2 yazılıp, bağıntı kullanılarak her $u, v \in U$ için

$$u^2 d(v) + d(u^2)v = d(u^2)d(v)$$

bulunur ve burada eşitliğin her iki tarafı türev tanımları kullanılarak açılırsa

$$u^2 d(v) + ud(u)v + d(u)uv = d(u)ud(v) + ud(u)d(v)$$

$$u(ud(v) + d(u)v) + d(u)uv = d(u)ud(v) + ud(uv)$$

$$ud(uv) + d(u)uv = d(u)ud(v) + ud(uv)$$

$$d(u)uv = d(u)ud(v)$$

$$d(u)u(v - d(v)) = 0 \quad (3.2.1)$$

elde edilir. Hipotezden her $v, w \in U$ için $(v + w)^2, v^2, w^2 \in U$ dır ve ayrıca U, R' nin bir toplamsal alt grubu olduğundan $vw + wv = (v + w)^2 - v^2 - w^2 \in U$ den $vw + wv \in U$ elde edilir. Diğer yandan U bir *Lie* ideal olduğundan $[v, w] = vw - wv \in U$ dır. Elde edilen son iki bağıntıdan $2vw \in U$ sonucuna varılır. (3.2.1) de v yerine $2vw$ alınıp (3.2.1) kullanılırsa her $u, v, w \in U$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(u)u(2vw - d(2vw)) \\ &= 2d(u)vw - 2d(u)uvd(w) - 2d(u)ud(v)w \\ &= 2d(u)u(v - d(v))w - 2d(u)uvd(w) \\ &= -2d(u)uvd(w) \end{aligned}$$

bulunur ve buradan $2d(u)uvd(w) = 0$ elde edilir. $\text{Char}(R) \neq 2$ olduğundan, her $u, v, w \in U$ için

$$d(u)uvd(w) = 0 \quad (3.2.2)$$

bağıntısına ulaşılır. Diğer taraftan (3.2.2) de w yerine $2ww_1$ yazılıp, (3.2.2) kullanılırsa her $u, v, w, w_1 \in U$ için

$$0 = 2d(u)uvd(w)w_1 + 2d(u)uvw d(w_1) = d(u)uvd(2ww_1)$$

olur. $\text{Char}(R) \neq 2$ olduğunu kullanarak $d(u)uvw d(w_1) = 0$ elde edilir. Buradan her $u, v, w_1 \in U$ için $d(u)uvUd(w_1) = (0)$ dir. Y. Özellik 3.2.2 ya $d(w_1) = 0$ ya da $d(u)uv = 0$ olmasını gerektirir. İlk durumda Y. Özellik 3.2.3 den, ya $d = 0$ ya da $U \subseteq Z(R)$ dir. İspata başlarken $U \not\subseteq Z(R)$ kabul edildiğinden $d = 0$ dir. Diğer yandan her $u, v \in U$ için

$$d(u)uv = 0 \quad (3.2.3)$$

olması durumunda (3.2.1) ve (3.2.3) birlikte düşünülürse $d(u)u(v - d(v)) = 0 = d(u)uv$ bağıntısına ulaşılır ve buradan her $u, v \in U$ için

$$d(u)ud(v) = 0 \quad (3.2.4)$$

olur. d , U üzerinde homomorfizma olarak hareket ettiğinden her $u, v \in U$ için

$$d(u(uv)) = d(u)d(uv) \text{ olur ve son bağıntıdan}$$

$$d(u(uv)) = d(u)uv + ud(uv) = d(u)d(uv) \text{ elde edilir. Diğer taraftan,}$$

$$d(u(uv)) = d(u^2v) = u^2d(v) + d(u^2)v$$

$$= u^2d(v) + d(u)uv + ud(u)v$$

dir ve ayrıca $d(u(uv)) = d(u)d(uv) = d(u)d(u)v + d(u)ud(v)$ olduğundan

$$u^2d(v) + d(u)uv + ud(u)v = d(u)d(u)v + d(u)ud(v) \text{ bağıntısı elde edilir. (3.2.3),}$$

(3.2.4) ve yukarıdaki eşitlikten

$$u^2d(v) + ud(u)v = d(u)d(u)v$$

olur. Bu bağıntıdan

$$u^2d(v) = (d(u)d(u) - ud(u))v = (d(u)^2 - ud(u))v \quad (3.2.5)$$

bulunur. Her $u \in U$ için

$$d(u^2) = d(u)d(u) = d(u)^2$$

olduğundan ve aynı zamanda

$$d(u)^2 = d(u^2) = d(u)u + ud(u)$$

bağıntısından $d(u)^2 - ud(u) = d(u)u$ elde edilir. (3.2.5) de bu ifade yerine yazılırsa $u^2d(v) = d(u)uv$ bağıntısına ulaşılır. (3.2.3) ve son bağıntıdan her $u, v \in U$ için

$$0 = u^2d(v) \quad (3.2.6)$$

olur. (3.2.6) da v yerine $2vw$ yazılıp, (3.2.6) kullanılırsa

$$0 = u^2d(2vw)$$

$$= 2u^2d(v)w + 2u^2vd(w)$$

sonucuna ulaşılır ve $\text{Char}(R) \neq 2$ olduğundan her $u, v, w \in U$ için

$$u^2vd(w) = 0 \quad (3.2.7)$$

elde edilir. (3.2.7) den her $v, w \in U$ için $u^2 U d(w) = (0)$ bağıntısını elde edilip Y. Özellik 3.2.2 kullanırsa ya her $u \in U$ için $u^2 = 0$ dır ya da her $w \in U$ için $d(w) = 0$ dır. Her $w \in U$ için $d(w) = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $d(U) = 0$ olur ve Y. Özellik 3.2.3 den $U \subseteq Z(R)$ elde edilir bu ise bir çelişkidir. Diğer taraftan her $u \in U$ için $u^2 = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $u \in U$, $r \in R$ için U bir Lie ideal olduğundan $ur - ru \in U$ olur ve kabulden $0 = (ur - ru)^2 = (ur)^2 - ur^2u - ru^2r + (ru)^2$ elde edilir. Her iki tarafın soldan u ile çarpılıp düzenlenmesiyle $0 = u(ur - ru)^2 = u^2rur - u^2r^2u - uru^2r + u(ru)^2$ bağıntısına ulaşılır. Daha sonra her $u \in U$ için $u^2 = 0$ olduğu kullanılarak $u(ru)^2 = 0$ bulunur. Elde edilen son bağıntı sol taraftan r ile çarpılırsa $(ru)^3 = 0$ elde edilir. Y. Özellik 2.2.3 de I yerine RU ve a yerine ru alınıp uygulanırsa R yarı-asal halka olduğundan ve yarı-asal halkalarda sıfırdan farklı nilpotent eleman olmadığından her $u \in U$ ve $r \in R$ için $ru = 0$ elde edilir. $Ru = (0)$ ve R asal bir halka olduğundan $U = (0)$ olmasını gerektirir ki, bu ise bir çelişkidir. Her iki durumda çelişki verdiğinden $d = 0$ olmak zorundadır. d nin U üzerinde homomorfizma olarak hareket ettiği durumda ispat tamamlanmış olur.

Şimdi d , U üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket etsin Tanım 2.1.1 den her $u, v \in U$ için $d(uv) = d(v)d(u)$ dır ve Tanım 2.2.1 den her $u, v \in U$ için $d(uv) = ud(v) + d(u)v$ dır. Bu iki tanımdan hareketle

$$d(u)v + ud(v) = d(v)d(u) \quad (3.2.8)$$

bağıntısı elde edilir. (3.2.8) de v yerine $2uv$ alınıp (3.2.8) kullanılırsa

$$d(u)2uv + ud(2uv) = d(2uv)d(u)$$

$$2d(u)uv + 2ud(uv) = 2d(u)v d(u) + 2ud(v)d(u)$$

$$2d(u)uv + 2ud(uv) = 2d(u)v d(u) + 2ud(uv)$$

$$2d(u)uv = 2d(u)vd(u)$$

$$2(d(u)vd(u) - d(u)uv) = 0$$

olur. $\text{Char}(R) \neq 2$ olduğundan her $u, v \in U$ için $d(u)vd(u) - d(u)uv = 0$ elde edilir. Buradan

$$d(u)vd(u) = d(u)uv \quad (3.2.9)$$

olur. (3.2.9) da v yerine $2vw$ alınıp, (3.2.9) kullanılırsa her $u, v, w \in U$ için $d(u)2vwd(u) = d(u)u2vw$ dır. Buradan hareketle $2(d(u)vwd(u) - d(u)uvw) = 0$ elde edilir ve $\text{Char}(R) \neq 2$ olduğundan

$$d(u)vwd(u) = d(u)uvw \quad (3.2.10)$$

bulunur. (3.2.9) bağıntısı sağ taraftan w ile çarpılırsa her $u, v, w \in U$ için

$$d(u)vd(u)w = d(u)uvw \quad (3.2.11)$$

dir. Şimdi de $A = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ ve $B = \{u \in U \mid [w, d(u)] = 0\}$ gibi U ' nun iki alt kümesini tanımlayalım. $(A, +)$ ve $(B, +)$, $(U, +)$ ' nın iki toplamsal alt grubu ve $(A, +) \cup (B, +) = (U, +)$ dır. Ayrıca bir grup iki öz altgrubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $U = A$ dır ya da $U = B$ dır. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

İlk olarak $U = A$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $u \in U$ için $d(u) = 0$ dır ve Y. Özellik 3.2.3 den ya $d = 0$ dır ya da $U \subseteq Z(R)$ elde edilir. Ancak kabulden $U \not\subseteq Z(R)$ olduğundan bu durumda $d = 0$ olmalıdır. Diğer yandan $U = B$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $u, w \in U$ için $[w, d(u)] = 0$ olur ve özel olarak $w = u$ alınırsa her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ elde edilir. Buradan her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0 \in Z(R)$ elde edilir ve Y. Özellik 3.2.1 den $U \subseteq Z(R)$ olmasını gerektirir ve bu bir çelişkidir.

4. HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SOL (α, β) -TÜREVLER

Bu bölümde Mohammad Ashraf, Shakir Ali, Nadeem-Ur-Rehman ve Muzibur Rahman Mozumder' in "On Generalized Left (α, β) -Derivations in Rings" adlı çalışması incelenecektir.

(Bresar ve Vukman, 1990), R karakteristiği 2 ve 3 ten farklı asal bir halka olmak üzere eğer R halkasında sıfırdan farklı bir *Jordan* sol türev varsa o zaman R ' nin değişmeli olduğunu göstermişlerdir. (Bresar, 1991), R asal bir halka, $F : R \rightarrow R$ ye tanımlı toplamsal bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y + xF(y)$ olacak şekilde R ' nin bir d türevi varsa F dönüşümünü R ' nin bir genelleştirilmiş türevi olarak adlandırılmıştır. Bresar' ın çalışmasından hareketle Ashraf ve Ali, 2008 deki çalışmalarında tezin başında tanımları verilen genelleştirilmiş sol türev ve genelleştirilmiş *Jordan* sol türevleri tanımlamışlardır. Ashraf ve Ali' nin çalışmasından hareketle bu bölümde genelleştirilmiş sol (α, β) -türev ve genelleştirilmiş *Jordan* sol (α, β) -türev tanımları verilmiştir. R bir halka, $G : R \rightarrow R$ ye tanımlı toplamsal bir dönüşüm ve α, β R ' nin endomorfizmaları olsun. Her $x, y \in R$ için $G(xy) = \alpha(x)G(y) + \beta(y)G(x)$ olacak şekilde R ' nin bir δ *Jordan* sol (α, β) -türevi varsa G ye R ' nin bir genelleştirilmiş sol (α, β) -türevi, eğer her $x, y \in R$ için $G(x^2) = \alpha(x)G(x) + \beta(x)G(x)$ olacak şekilde R ' nin bir δ *Jordan* sol (α, β) -türevi varsa G ye R ' nin bir genelleştirilmiş *Jordan* sol (α, β) -türevi denir. Genelleştirilmiş sağ (α, β) -türev ve genelleştirilmiş *Jordan* sağ (α, β) -türev tanımları benzer şekilde yapılmaktadır.

4.1 Genelleştirilmiş *Jordan* sol (α, β) -Türevler

Bu bölümde genelleştirilmiş *Jordan* sol (α, β) -türevlerin karesel kapalı bir *Lie* ideal üzerindeki hareketi incelenecektir.

[(Ashraf, 2005), Teorem 3.3] R , 2-burulmasız ve sol sıfır bölen olmayan bir komütatöre sahip olan bir halka, U karesel kapalı R 'nin bir *Lie* ideali, α R 'nin bir endomorfizması olmak üzere her *Jordan* sol (α, α) -türevin bir sol (α, α) -türev olduğunu göstermiştir.

Her genelleştirilmiş sol (α, β) -türev bir genelleştirilmiş *Jordan* sol (α, β) -türev olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnekte bu durumun tersinin doğru olmadığı görülmektedir.

Örnek 4.1.1 S , her elemanının karesi sıfır olan ancak sıfırdan farklı bazı elemanlarının çarpımı sıfırdan farklı olan bir halka olmak üzere $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; x, y \in S \right\}$ tanımlansın. $G, \delta : R \rightarrow R$ ve $\alpha, \beta : R \rightarrow R$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlı dönüşümler olsun;

$$G\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \delta\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x & -y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Her } r \in R \text{ için} \quad G(r^2) = \alpha(r)G(r) + \beta(r)\delta(r)$$

olduğunu görelim:

$$\text{Her } \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \text{ için}$$

$$\begin{aligned} G\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2\right) &= G\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)G\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)+\beta\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\delta\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)&= \begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -x & -y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= G\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2\right)
\end{aligned}$$

olduğundan G bir genelleştirilmiş *Jordan* sol (α, β) -türevdir. Ayrıca G 'nin bir genelleştirilmiş sol (α, β) -türev olmadığını görelim:

$$\begin{aligned}
G\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)&= G\left(\begin{pmatrix} xs & xt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= G\left(\begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur ve aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)G\left(\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)+\beta\left(\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\delta\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)&= \begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -s & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -xs & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -xs & xt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$G\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq \alpha\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)G\left(\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + \beta\left(\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\delta\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

elde edilir. Bu durumda G' nin bir genelleştirilmiş sol- (α, β) türev olmadığı görülmektedir. Bu bölümün amacı yukarıdaki teoremin tersinin hangi ek koşullar altında gerçekleştiğini göstermektir.

Teorem 4.1.1 R , 2-burulmasız bir halka, U R' nin sol sıfır bölen olmayan bir komütatör içeren karesel kapalı bir *Lie* ideali, α R' nin bir otomorfizması ve $\delta: R \rightarrow R$, R' nin bir *Jordan* sol (α, α) -türevi olsun. Eğer $G: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $u \in U$ için $G(u^2) = \alpha(u)G(u) + \alpha(u)\delta(u)$ koşulunu sağlarsa o zaman her $u, v \in U$ için $G(uv) = \alpha(u)G(v) + \alpha(v)\delta(u)$ dir.

Teoremin ispatına geçmeden önce ispatta kullanılacak bazı yardımcı özellikleri verelim. Yardımcı Özellik 4.1.1' i (Bergen, Herstein ve Kerr, 1981) deki çalışmalarında ispatlamışlardır ve Yardımcı Özellik 4.1.2' nin ispatı [(Ashraf ve Rehman, 2000), Y. Özellik 2.3] e benzer şekilde yapılabilir.

Yardımcı Özellik 4.1.1 R , karakteristiği 2 den farklı asal bir halka, $U \not\subseteq Z(R)$ olacak şekilde U , R' nin bir *Lie* ideali olsun. Eğer $a, b \in R$ için $aUb = (0)$ ise o zaman ya $a = 0$ dır ya da $b = 0$ dır.

İspat [(Bergen, Herstein ve Kerr, 1981), Y. Özellik 1] de U, R' nin $U \not\subseteq Z(R)$ koşulunu sağlayan bir *Lie* ideali ise $[M, R] \subseteq U$ fakat $[M, R] \not\subseteq Z(R)$ olacak şekilde R' nin bir M ideali olduğunu göstermişlerdir. Hipotezde $U, U \not\subseteq Z(R)$ olacak şekilde R' nin bir *Lie* ideali olduğundan $[M, R] \subseteq U$ fakat $[M, R] \not\subseteq Z(R)$ olacak şekilde R' nin bir M ideali vardır. M, R' nin bir ideali olduğundan $u \in U, m \in M, a, b \in R$ ve her $y \in R$ için $[mau, y] \in [M, R] \subseteq U$ dır. $aUb = (0)$ olduğu kullanılırsa $0 = a[mau, y]b = a[ma, y]ub + ama[u, y]b$ olur ve U, R' nin bir *Lie* ideali olduğundan $[u, y] \in U$ dır. Elde edilen bağıntı ve hipotezden $ama[u, y]b = 0$ bulunur. Bu durumda

$$0 = a(may - yma)ub$$

$$= amayub - aymaub$$

$$= amayub$$

bulunur. $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. R asal bir halka ve $aMaRUb = (0)$ olduğundan $Ub = (0)$ elde edilir. O zaman her $x \in R$ ve $u \in U$ için $ux - xu \in U$ olduğundan $(ux - xu)b = 0$ dır. Buradan her $x \in R$ için

$$0 = uxb - xub$$

$$0 = uxb$$

elde edilir. Son bağıntı $uRb = (0)$ olmasını gerektirir. R asal bir halka ve $U \neq (0)$ olduğundan $b = 0$ dır.

Yardımcı Özellik 4.1.2 R , 2-burulmasız bir halka, U R 'nin karesel kapalı bir Lie ideali, α R 'nin bir endomorfizması ve $\delta: R \rightarrow R$, her $u \in U$ için $\delta(u^2) = 2\alpha(u)\delta(u)$ koşulunu sağlayan R 'nin bir toplamsal dönüşümü olsun. O zaman her $u, v \in U$ için

$$(i) \quad \alpha([u, v])\delta([u, v]) = 0$$

$$(ii) \quad \alpha(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) = 0$$

bağıntıları sağlanır.

İspat Hipotezden her $u \in U$ için $\delta(u^2) = 2\alpha(u)\delta(u)$ dır. Bu bağıntıda u yerine $u + v$ alınıp bağıntı lineerleştirilirse

$$\begin{aligned} \delta((u+v)^2) &= \delta(u^2 + uv + vu + v^2) \\ &= 2\alpha(u)\delta(u) + \delta(uv + vu) + 2\alpha(v)\delta(v) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \delta((u+v)^2) &= 2\alpha(u+v)\delta(u+v) \\ &= 2\alpha(u)\delta(u) + 2\alpha(u)\delta(v) + 2\alpha(v)\delta(u) + 2\alpha(v)\delta(v) \end{aligned}$$

dir. Son iki bağıntıdan

$$\delta(uv + vu) = 2\alpha(u)\delta(v) + 2\alpha(v)\delta(u) \quad (i_1)$$

elde edilir.

(i) (i_1) de v yerine $uv + vu$ alınarak

$$\begin{aligned}
 \delta(u(uv + vu) + (uv + vu)u) &= 2\alpha(u)\delta(uv + vu) + 2\alpha(uv + vu)\delta(u) \\
 &= 2\alpha(u)(2\alpha(u)\delta(v) + 2\alpha(v)\delta(u)) \\
 &\quad + 2\alpha(uv)\delta(u) + 2\alpha(vu)\delta(u) \\
 &= 4\alpha(u^2)\delta(v) + 6\alpha(uv)\delta(u) + 2\alpha(vu)\delta(u)
 \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 \delta(u(uv + vu) + (uv + vu)u) &= \delta(u^2v + vu^2) + 2\delta(uvu) \\
 &= 2\alpha(u^2)\delta(v) + 2\alpha(v)\delta(u^2) + 2\delta(uvu) \\
 &= 2\alpha(u^2)\delta(v) + 2\alpha(v)(2\alpha(u)\delta(u)) + 2\delta(uvu) \\
 &= 2\alpha(u^2)\delta(v) + 4\alpha(vu)\delta(u) + 2\delta(uvu)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki bağıntıdan her $u, v \in U$ için

$$\delta(uvu) = \alpha(u^2)\delta(v) + 3\alpha(uv)\delta(u) - \alpha(vu)\delta(u) \quad (i_2)$$

bulunur. $w \in U$ olmak üzere (i_2) de u yerine $u + w$ alınarak

$$\begin{aligned}
 \delta((u + w)v(u + w)) &= \alpha((u + w)^2)\delta(v) + 3\alpha((u + w)v)\delta(u + w) \\
 &\quad - \alpha(v(u + w))\delta(u + w) \\
 &= \alpha(u^2)\delta(v) + \alpha(w^2)\delta(v) + \alpha(uw + wu)\delta(v)
 \end{aligned}$$

$$+3\alpha(uv)\delta(u)+3\alpha(uv)\delta(w)+3\alpha(wv)\delta(u)$$

$$+3\alpha(wv)\delta(w)-\alpha(vu)\delta(u)-\alpha(vu)\delta(w)$$

$$-\alpha(vw)\delta(u)-\alpha(vw)\delta(w)$$

olur. Diğer taraftan her $u, v, w \in U$ için

$$\delta((u+w)v(u+w)) = \delta(uvu) + \delta(wvw) + \delta(uvw + wvu)$$

$$= \alpha(u^2)\delta(v) + 3\alpha(uv)\delta(u) - \alpha(vu)\delta(u) + \alpha(w^2)\delta(v)$$

$$+3\alpha(wv)\delta(w) - \alpha(vw)\delta(w) + \delta(uvw + wvu)$$

bağıntısına ulaşılır. Son iki bağıntı birlikte düşünüldüğünde

$$\delta(uvw + wvu) = \alpha(uw + wu)\delta(v) + 3\alpha(uv)\delta(w) + 3\alpha(wv)\delta(u)$$

$$-\alpha(vu)\delta(w) - \alpha(vw)\delta(u) \quad (i_3)$$

elde edilir. $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + uv + vu$ dir ve U karasel kapalı bir *Lie* ideal olduğundan $uv + vu \in U$ olur. Ayrıca $uv - vu \in U$ olduğundan $2uv \in U$ elde edilir. Hipotezden $\delta((uv)^2) = 2\alpha(uv)\delta(uv)$ dir. (i_3) de w yerine $2uv$ alınırsa

$$2\delta(uv(uv) + (uv)vu) = 2\alpha(u^2v + uvu)\delta(v) + 6\alpha(uv)\delta(uv) + 6\alpha(uv^2)\delta(u)$$

$$-2\alpha(vu)\delta(uv) - 2\alpha(vuv)\delta(u)$$

olur. Ayrıca

$$2\delta(uv(uv) + (uv)vu) = 2\delta((uv)^2 + uv^2u)$$

$$= 2\delta((uv)^2) + 2\delta(uv^2u)$$

$$\begin{aligned}
&= 4\alpha(uv)\delta(uv) + 2\alpha(u^2)\delta(v^2) \\
&\quad + 6\alpha(uv^2)\delta(u) - 2\alpha(v^2u)\delta(u)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son iki bağıntı birlikte düşünüldüğünde ve R , 2-burulmasız bir halka olduğundan

$$\alpha([u, v])\delta(uv) = \alpha(u)\alpha([u, v])\delta(v) + \alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u)$$

bağıntısı elde edilir. Son bağıntıda v yerine $u+v$ alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında her $u, v \in U$ için

$$\alpha([u, v])\alpha(u)\delta(u) = \alpha(u)\alpha([u, v])\delta(u) \quad (i_4)$$

bulunur. (i_4) de u yerine $u+v$ alınıp eşitliğin her iki tarafı açıldığında

$$\begin{aligned}
&\alpha([u, v])\alpha(u)\delta(u) + \alpha([u, v])\alpha(v)\delta(v) + \alpha([u, v])\alpha(u)\delta(v) + \alpha([u, v])\alpha(v)\delta(u) = \\
&\alpha(u)\alpha([u, v])\delta(u) + \alpha(u)\alpha([u, v])\delta(v) + \alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u) + \alpha(v)\alpha([u, v])\delta(v)
\end{aligned}$$

olur. Son bağıntı, (i_4) ve daha önce elde edilen $\alpha([u, v])\delta(uv) = \alpha(u)\alpha([u, v])\delta(v) + \alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u)$ bağıntıları birlikte kullanıldığında $\alpha([u, v])\alpha(u)\delta(v) + \alpha([u, v])\alpha(v)\delta(u) = \alpha([u, v])\delta(uv)$ olur. Bu ise her $u, v \in U$ için

$$\alpha([u, v])(\delta(uv) - \alpha(u)\delta(v) - \alpha(v)\delta(u)) = 0 \quad (i_5)$$

demektir. (i_1) ve (i_5) den R 'nin 2-burulmasız bir halka olduğu kullanılarak

$$\alpha([u, v])(\delta(vu) - \alpha(u)\delta(v) - \alpha(v)\delta(u)) = 0 \quad (i_6)$$

elde edilir. (i_5) ve (i_6) taraf tarafa çıkarılarak her $u, v \in U$ için

$$\alpha([u, v])\delta([u, v]) = 0$$

bağıntısına ulaşılır.

(ii) Her $u, v \in U$ için hipotezden $\delta([u, v]^2) = 2\alpha([u, v])\delta([u, v])$ dir. (i) den her $u, v \in U$ için

$$\delta([u, v]^2) = 0 \tag{ii_1}$$

olur.

Daha önce $2uv, uv + vu \in U$ olduğu görüldüğünden şimdi $uv + vu$ bağıntısında u yerine $2vu$ alınırsa $2vuv + 2v^2u \in U$ ve $uv - vu \in U$ bağıntısında u yerine $2vu$ alınarak $2vuv - 2v^2u \in U$ elde edilir. Son iki bağıntı taraf tarafa toplanırsa $4vuv \in U$ bulunur. (i_1) de v yerine $4vuv$ alınırsa

$$\begin{aligned} \delta(u(4vuv) + (4vuv)u) &= 4\delta(u(vuv) + (vuv)u) \\ &= 8(\alpha(u)\delta(vuv) + \alpha(vuv)\delta(u)) \end{aligned}$$

elde edilir. R , 2-burulmasız bir halka olduğundan

$$\delta(u(vuv) + (vuv)u) = 2(\alpha(u)\delta(vuv) + \alpha(vuv)\delta(u))$$

bulunur. $(i_1), (i_2)$ ve (ii_1) den

$$0 = \delta([u, v]^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \delta(u(vuv) + (vuv)u) - \delta(uv^2u) - \delta(vu^2v) \\
&= 2(\alpha(u)\delta(vuv) + \alpha(vuv)\delta(u)) - \alpha(u^2)\delta(v^2) - 3\alpha(uv^2)\delta(u) \\
&\quad + \alpha(v^2u)\delta(u) - \alpha(v^2)\delta(u^2) - 3\alpha(vu^2)\delta(v) + \alpha(u^2v)\delta(v) \\
&= 2(\alpha(u)(\alpha(v^2)\delta(u) + 3\alpha(vu)\delta(v) - \alpha(uv)\delta(v) + \alpha(vuv)\delta(u)) \\
&\quad - 2\alpha(u^2v)\delta(v) - 3\alpha(uv^2)\delta(u) + \alpha(v^2u)\delta(u) - \alpha(v^2)\delta(u) \\
&\quad - 3\alpha(vu^2) + \alpha(u^2v)\delta(v) \\
&= -3\alpha(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) - \alpha(uv^2 - 2vuv + v^2u)\delta(u)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son bağıntıdan

$$\alpha(uv^2 - 2vuv + v^2u)\delta(u) + 3\alpha(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) = 0 \quad (ii_2)$$

bulunur.

(i₄) bağıntısında eşitliğin her iki tarafı açılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\alpha(uv - vu)\alpha(u)\delta(u) = \alpha(u)\alpha(uv - vu)\delta(u)$$

$$\alpha(uvu)\delta(u) - \alpha(vu^2)\delta(u) = \alpha(u^2v)\delta(u) - \alpha(uvu)\delta(u)$$

$$2\alpha(uvu)\delta(u) = (\alpha(u^2v) + \alpha(vu^2))\delta(u)$$

olur. Son bağıntıdan her $u, v \in U$ için

$$\alpha(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(u) = 0 \quad (ii_3)$$

elde edilir. (ii_3) de u yerine $u+v$ alınarak

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha((u+v)^2 - 2(u+v)v(u+v) + v(u+v)^2) \delta(u+v) \\ &= \alpha((u^2v - 2uvu + vu^2) - (v^2u - 2vuv + uv^2))(\delta(u) + \delta(v)) \end{aligned}$$

bulunur. (ii_3) ve son bağıntı birlikte kullanılırsa her $u, v \in U$ için

$$\alpha(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) - \alpha(v^2u - 2vuv + uv^2)\delta(u) = 0 \quad (ii_4)$$

olur. (ii_2) ve (ii_4) birlikte düşünüldüğünde ve R' nin 2-burulmasız bir halka olduğu kullanılırsa

$$\alpha(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) = 0$$

elde edilir.

Yardımcı Özellik 4.1.3 R , 2-burulmasız bir halka, U R' nin karesel kapalı bir *Lie* ideali, α R' nin bir endomorfizması ve $\delta: R \rightarrow R$, R' nin bir *Jordan* sol (α, α) -türevi olsun. Eğer $G: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $u \in U$ olmak üzere $G(u^2) = \alpha(u)G(u) + \alpha(u)\delta(u)$ koşulunu sağlıyorsa o zaman her $u, v, w \in U$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$(i) \quad G(uv + vu) = \alpha(u)G(v) + \alpha(v)G(u) + \alpha(u)\delta(v) + \alpha(v)\delta(u) \text{ dir.}$$

$$(ii) \quad G(uvu) = \alpha(uv)G(u) + 2\alpha(uv)\delta(u) + \alpha(u^2)\delta(v) - \alpha(vu)\delta(u) \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad G(uvw + wvu) &= \alpha(uv)G(w) + \alpha(wv)G(u) + 2\alpha(uv)\delta(w) \\ &\quad + 2\alpha(wv)\delta(u) + \alpha(uw)\delta(v) + \alpha(wu)\delta(v) \\ &\quad - \alpha(vu)\delta(w) - \alpha(vw)\delta(u) \text{ dir.} \end{aligned}$$

İspat (i) Hipotezden her $u \in U$ için

$$G(u^2) = \alpha(u)G(u) + \alpha(u)\delta(u) \quad (4.1.1)$$

dir. (4.1.1) lineerleştirilirse;

$$\begin{aligned} G((u+v)^2) &= \alpha(u+v)G(u+v) + \alpha(u+v)\delta(u+v) \\ &= \alpha(u)G(u) + \alpha(u)G(v) + \alpha(v)G(u) + \alpha(v)G(v) \\ &\quad + \alpha(u)\delta(u) + \alpha(u)\delta(v) + \alpha(v)\delta(u) + \alpha(v)\delta(v) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} G((u+v)^2) &= G(u^2 + uv + vu + v^2) \\ &= G(u^2) + G(v^2) + G(uv + vu) \\ &= \alpha(u)G(u) + \alpha(u)\delta(u) + \alpha(v)G(v) + \alpha(v)\delta(v) + G(uv + vu) \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki bağıntı kullanılarak

$$G(uv + vu) = \alpha(u)G(v) + \alpha(v)G(u) + \alpha(u)\delta(v) + \alpha(v)\delta(u)$$

bulunur.

(ii) U karesel kapalı bir *Lie* ideal olduğundan

$(u+v)^2 - u^2 - v^2 = uv + vu \in U$ dir. (i) de v yerine $uv + vu$ yazılırsa

$$\begin{aligned} G(u(uv + vu) + (uv + vu)u) &= \alpha(u)G(uv + vu) + \alpha(uv + vu)G(u) \\ &\quad + \alpha(u)\delta(uv + vu) + \alpha(uv + vu)\delta(u) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

bulunur. δ , bir *Jordan* sol (α, α) -türev olduğundan

$$\begin{aligned}\delta(u^2) &= \alpha(u)\delta(u) + \alpha(u)\delta(u) \\ &= 2\alpha(u)\delta(u)\end{aligned}$$

dır. Son bağıntı lineerleştirilerek her $u, v \in U$ için

$$\delta((u+v)^2) = \delta(u^2) + \delta(v^2) + \delta(uv+vu) = 2\alpha(u+v)\delta(u+v)$$

olur. Böylece eşitliğin her iki tarafı açılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$2\alpha(u)\delta(u) + 2\alpha(v)\delta(v) + \delta(uv+vu) = 2\alpha(u)\delta(u) + 2\alpha(u)\delta(v) + 2\alpha(v)\delta(u) + 2\alpha(v)\delta(v)$$

bulunur. Buradan

$$\delta(uv+vu) = 2\alpha(u)\delta(v) + 2\alpha(v)\delta(u)$$

bağıntısı elde edilir. Son bağıntı, (4.1.2) ve (i) den her $u, v \in U$ için

$$\begin{aligned}G(u(uv+vu) + (uv+vu)u) &= \alpha(u)(\alpha(u)G(v) + \alpha(v)G(u) + \alpha(u)\delta(v) + \alpha(v)\delta(u)) \\ &\quad + \alpha(uv)G(u) + \alpha(vu)G(v) \\ &\quad + \alpha(u)(2\alpha(u)\delta(v) + 2\alpha(v)\delta(u)) \\ &\quad + \alpha(uv)\delta(u) + \alpha(vu)\delta(u) \\ &= \alpha(u^2)G(v) + \alpha(uv)G(u) + \alpha(u^2)\delta(v) + \alpha(uv)\delta(u) \\ &\quad + \alpha(uv)G(u) + \alpha(vu)G(u) + 2\alpha(u^2)\delta(v)\end{aligned}$$

$$+2\alpha(uv)\delta(u) + \alpha(uv)\delta(u) + \alpha(vu)\delta(u)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} G(u(uv + vu) + (uv + vu)u) &= \alpha(u^2)G(v) + 2\alpha(uv)G(u) + \alpha(vu)G(u) \\ &\quad + 4\alpha(uv)\delta(u) + 3\alpha(u^2)\delta(v) \\ &\quad + \alpha(vu)\delta(u) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

bağıntısına ulaşılır. Diğer taraftan her $u, v \in U$ için

$$\begin{aligned} G(u(uv + vu) + (uv + vu)u) &= G(u^2v + uvu + uvu + vu^2) \\ &= G(u^2v) + 2G(uvu) + G(vu^2) \\ &= \alpha(u^2)G(v) + \alpha(v)\delta(u^2) + 2G(uvu) \\ &\quad + \alpha(v)G(u^2) + \alpha(u^2)\delta(v) \\ &= 2G(uvu) + \alpha(u^2)G(v) + \alpha(vu)G(u) + \alpha(vu)\delta(u) \\ &\quad + \alpha(u^2)\delta(v) + 2\alpha(vu)\delta(u) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (4.1.3) ve (4.1.4) kıyaslandığında her $u, v \in U$ için

$$2G(uvu) = 2\alpha(uv)G(u) + 4\alpha(uv)\delta(u) + 2\alpha(u^2)\delta(v) - 2\alpha(vu)\delta(u)$$

bulunur ve $\text{Char}(R) \neq 2$ olduğundan

$$2G(uvu) = \alpha(uv)G(u) + 2\alpha(uv)\delta(u) + \alpha(u^2)\delta(v) - \alpha(vu)\delta(u)$$

olur.

(iii) (ii) lineerleştirilerek, u yerine $u + w$ alındığında her $u, v, w \in U$ için

$$\begin{aligned}
 G((u+w)v(u+w)) &= \alpha((u+w)v)G(u+w) + 2\alpha((u+w)v)\delta(u+w) \\
 &\quad + \alpha((u+w)^2)\delta(v) - \alpha(v(u+w))\delta(u+w) \\
 &= \alpha(uv)G(u) + \alpha(uv)G(w) + \alpha(wv)G(u) + \alpha(wv)G(w) \\
 &\quad + 2\alpha(uv)\delta(u) + 2\alpha(wv)\delta(u) + 2\alpha(uv)\delta(w) \\
 &\quad + \alpha(uw)\delta(v) + 2\alpha(wv)\delta(w) + \alpha(u^2)\delta(v) \\
 &\quad + \alpha(wu)\delta(v) + \alpha(w^2)\delta(v) - \alpha(vu)\delta(u) \\
 &\quad - \alpha(vu)\delta(w) - \alpha(vw)\delta(u) \\
 &\quad - \alpha(vw)\delta(w)
 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 G((u+w)v(u+w)) &= G(uvu + uvw + wvu + wvw) \\
 &= G(uvu) + G(wvw) + G(uvw + wvu) \\
 &= \alpha(uv)G(u) + 2\alpha(uv)\delta(u) + \alpha(u^2)\delta(v) - \alpha(vu)\delta(u) \\
 &\quad + \alpha(wv)G(w) + 2\alpha(wv)\delta(w) + \alpha(w^2)\delta(v) \\
 &\quad - \alpha(vw)\delta(w) + G(uvw + wvu)
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

bağıntısı bulunur. (4.1.5) ve (4.1.6) den her $u, v, w \in U$ için

$$\begin{aligned}
G(uvw + wvu) &= \alpha(uv)G(w) + \alpha(wv)G(u) + 2\alpha(uv)\delta(w) + 2\alpha(wv)\delta(u) \\
&\quad + \alpha(uw)\delta(v) + \alpha(wu)\delta(v) - \alpha(vu)\delta(w) - \alpha(vw)\delta(u)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1 in ispatı Y. Özellik 4.1.3 ün (iii) de w yerine $uv - vu$ alınırsa her $u, v \in U$ için

$$\begin{aligned}
G(uv(uv - vu) + (uv - vu)vu) &= \alpha(uv)G(uv - vu) + \alpha((uv - vu)v)G(u) + 2\alpha(uv)\delta(uv - vu) \\
&\quad + 2\alpha((uv - vu)v)\delta(u) + \alpha(u(uv - vu))\delta(v) \\
&\quad + \alpha((uv - vu)u)\delta(v) - \alpha(vu)\delta(uv - vu) \\
&\quad - \alpha(v(uv - vu))\delta(v)\delta(u) \\
&= \alpha(uv)G(uv) - \alpha(uv)G(vu) + \alpha([u, v])\alpha(v)G(u) \\
&\quad + 2\alpha(uv)\delta(uv) + 2\alpha([u, v])\alpha(v)\delta(u) \\
&\quad + \alpha(u)\alpha([u, v])\delta(v) + \alpha([u, v])\alpha(u)\delta(v) \\
&\quad - \alpha(vu)\delta([u, v]) - \alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u) \\
&= \alpha(uv)G(uv) - \alpha(uv)G(vu) + \alpha([u, v])\alpha(v)G(u) \\
&\quad + \alpha([u, v])\delta([u, v]) + \alpha(uv)\delta([u, v]) \\
&\quad + 2\alpha([u, v])\alpha(v)\delta(u) + \alpha(u)\alpha([u, v])\delta(v) \\
&\quad + \alpha([u, v])\alpha(u)\delta(v) - \alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u)
\end{aligned}$$

elde edilir. Y. Özellik 4.1.2 (i) de yukarıda elde edilen bağıntı kullanılırsa her $u, v \in U$ için

$$\begin{aligned}
G(uv(uv - vu) + (uv - vu)vu) &= \alpha(uv)G(uv) - \alpha(uv)G(vu) \\
&+ \alpha([u, v])\alpha(v)G(u) + \alpha(uv)\delta([u, v]) \\
&+ 2\alpha([u, v])\alpha(v)\delta(u) + \alpha(u)\alpha([u, v])\delta(v) \\
&+ \alpha([u, v])\alpha(u)\delta(v) - \alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u)
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafına $\alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u)$ eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
G(uv(uv - vu) + (uv - vu)vu) &= \alpha(uv)G(uv) - \alpha(uv)G(vu) \\
&+ \alpha([u, v])\alpha(v)G(u) + \alpha(uv)\delta([u, v]) \\
&+ 2\alpha([u, v])\alpha(v)\delta(u) + \alpha(u)\alpha([u, v])\delta(v) \\
&+ \alpha([u, v])\alpha(u)\delta(v) \\
&- 2\alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u) \\
&+ \alpha(v)\alpha([u, v])\delta(u) \tag{4.1.7}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $u, v \in U$ için

$$\begin{aligned}
4G(uv(uv - vu) + (uv - vu)vu) &= 4G((uv)^2 - uv^2u + uv^2u - (vu)^2) \\
&= 4\alpha(uv)G(uv) + 4\alpha(uv)\delta(uv) \\
&- 4\alpha(vu)G(vu) - 4\alpha(vu)\delta(vu)
\end{aligned}$$

olur. R , 2-burulmasız bir halka olduğundan her $u, v \in U$ için

$$\begin{aligned}
G(uv(uv - vu) + (uv - vu)vu) &= \alpha(uv)G(uv) + \alpha(uv)\delta(uv) \\
&- \alpha(vu)G(vu) - \alpha(vu)\delta(vu) \tag{4.1.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.7) ve (4.1.8) den

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha([v, u])G(vu) + \alpha([v, u])\alpha(v)G(u) + \alpha([v, u])\alpha(u)\delta(v) \\
&\quad + 2\alpha([v, u])\alpha(v)\delta(u) - 2\alpha(v)\alpha([v, u])\delta(u) + \alpha(u)\alpha([v, u])\delta(v) \\
&\quad + \alpha(v)\alpha([v, u])\delta(u) + \alpha(vu)\delta(vu) - \alpha(uv)\delta(vu) \\
&= \alpha(vuv)G(u) + \alpha(vu^2)\delta(v) - \alpha(uv^2)G(u) - \alpha(uvu)\delta(v) + \alpha(uv^2)G(u) \\
&\quad + \alpha(vuv)G(u) + \alpha(uvu)\delta(v) - \alpha(vu^2)\delta(v) + 2\alpha(uv^2)\delta(u) \\
&\quad - 2\alpha(vuv)\delta(u) - 2\alpha(vuv)\delta(u) + 2\alpha(v^2u)\delta(u) + \alpha(u^2v)\delta(v) \\
&\quad - \alpha(uvu)\delta(v) + \alpha(vuv)\delta(u) - \alpha(v^2u)\delta(u) \\
&\quad + \alpha(vu)\delta(vu) - \alpha(uv)\delta(vu)
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

olur.

[(Ashraf, 2005), Teorem 3.3], her *Jordan* sol (α, α) -türevin bir sol (α, α) -türev olduğunu göstermiştir. Yani her $u, v \in U$ için $\delta(uv) = \alpha(u)\delta(v) + \alpha(v)\delta(u)$ dir. Y. Özellik 4.1.2 (ii) den

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) - \alpha(v^2u - 2vuv + uv^2)\delta(u) \\
&= \alpha(u)\alpha([v, u])\delta(v) + \alpha(v)\alpha([v, u])\delta(u) + \alpha(vu)\delta(vu) - \alpha(uv)\delta(vu) \\
&= \alpha(u^2v)\delta(v) - \alpha(uvu)\delta(v) + \alpha(vuv)\delta(u) - \alpha(v^2u)\delta(u) \\
&\quad + \alpha(vu)\delta(vu) - \alpha(uv)\delta(vu)
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

olur. Ayrıca (4.1.9) ve (4.1.10) dan

$$\begin{aligned}
0 &= 2\alpha(uv^2)\delta(u) - 2\alpha(vuv)\delta(u) - 2\alpha(vuv)\delta(u) + 2\alpha(v^2u)\delta(u) \\
&= 2\alpha([v, u])\alpha(v)\delta(u) - 2\alpha(v)\alpha([v, u])\delta(u) \\
&= 2\alpha(v^2u - 2uvu + uv^2)\delta(u)
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

olur. (4.1.9), (4.1.10) ve (4.1.11) dan her $u, v \in U$ için

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha([v, u])G(vu) + \alpha([v, u])\alpha(v)G(u) + \alpha([v, u])\alpha(u)\delta(v) \\
0 &= \alpha([v, u])G(vu) + \alpha([v, u])(\alpha(v)G(u) + \alpha(u)\delta(v)) \\
0 &= \alpha([v, u])G(vu) + \alpha([v, u])G(vu)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitlikten her $u, v \in U$ için

$$0 = \alpha([v, u])(G(uv) - \alpha(u)G(v) - \alpha(v)\delta(u))$$

olur. Şimdi her $u, v \in U$ için $H(u, v) = G(uv) - \alpha(u)G(v) - \alpha(v)\delta(u)$ olacak şekilde $H: U \times U \rightarrow R$ dönüşümünü tanımlayalım. G , δ ve α dönüşümleri toplamsal dönüşümler olduğundan H dönüşümünün de toplamsal olduğu açıktır. $\alpha([u, v])(G(uv) - \alpha(u)G(v) - \alpha(v)\delta(u)) = 0$ olduğundan her $u, v \in U$ için $\alpha([u, v])H(u, v) = 0$ dır. α , R 'nin bir otomorfizması olduğundan

$$\alpha^{-1}(\alpha([u, v])H(u, v)) = \alpha^{-1}(0) = 0$$

yazılır ve buradan her $u, v \in U$ için

$$[u, v]\alpha^{-1}(H(u, v)) = 0 \tag{4.1.12}$$

elde edilir. Şimdi $[a, b]c = 0$ koşulu $c = 0$ olmasını gerektirecek şekilde U ' nun sabit a ve b elemanlarını alalım. O zaman (4.1.12) bağıntısı $\alpha^{-1}(H(a, b)) = 0$ olmasını gerektirir, (4.1.12) de u yerine a ve aynı zamanda v yerine b alınırsa $\alpha^{-1}(H(a, b)) = 0$ olur ve α , R ' nin bir otomorfizması olduğundan

$$H(a, b) = 0 \quad (4.1.13)$$

elde edilir. (4.1.12) de u yerine $u + a$ alınıp bağıntı kullanılırsa

$$\begin{aligned} [u + a, v]\alpha^{-1}(H(u + a, v)) &= ([u, v] + [a, v])(\alpha^{-1}(H(u, v))) + \alpha^{-1}(H(a, v)) \\ &= [u, v]\alpha^{-1}(H(u, v)) + [u, v]\alpha^{-1}(H(a, v)) \\ &\quad + [a, v]\alpha^{-1}(H(u, v)) + [a, v]\alpha^{-1}(H(a, v)) \\ &= [u, v]\alpha^{-1}(H(a, v)) + [a, v]\alpha^{-1}(H(u, v)) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$[u, v]\alpha^{-1}(H(a, v)) + [a, v]\alpha^{-1}(H(u, v)) = 0 \quad (4.1.14)$$

elde edilir ve (4.1.14) de v yerine b alınırsa

$$[u, b]\alpha^{-1}(H(a, b)) + [a, b]\alpha^{-1}(H(u, b)) = 0$$

olur. (4.1.12) den son bağıntı

$$[a, b]\alpha^{-1}(H(u, b)) = 0$$

olmasını verir. $[a, b]$ sol sıfır bölen olmadığından her $u \in U$ için

$$\alpha^{-1}(H(u, b)) = 0 \quad (4.1.15)$$

elde edilir. (4.1.14) de v yerine $v+b$ alınıp (4.1.13), (4.1.14) ve (4.1.15) kullanılarak

$$[u, v+b]\alpha^{-1}(H(a, v+b)) + [a, v+b]\alpha^{-1}(H(u, v+b)) = 0$$

bulunur. Son bağıntı

$$0 = [u, v+b]\alpha^{-1}(H(a, v+b)) + [a, v+b]\alpha^{-1}(H(u, v+b))$$

$$= [a, b]\alpha^{-1}(H(u, v)) + [u, b]\alpha^{-1}(H(a, v))$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$[a, b]\alpha^{-1}(H(u, v)) + [u, b]\alpha^{-1}(H(a, v)) = 0 \quad (4.1.16)$$

elde edilir. (4.1.16) da u yerine a alınarak $2[a, b](\alpha^{-1}(H(a, v))) = 0$ bulunur.

R , 2-burulmasız bir halka olduğundan $[a, b]\alpha^{-1}(H(a, v)) = 0$ dır. Buradan

$$\alpha^{-1}(H(a, v)) = 0 \quad (4.1.17)$$

elde edilir. (4.1.16) ve (4.1.17) den her $u, v \in U$ için $[a, b]\alpha^{-1}(H(u, v)) = 0$ olur. Bu bağıntı $\alpha^{-1}(H(u, v)) = 0$ olmasını gerektirir. α , R' nin bir otomorfizması olduğundan her $u, v \in U$ için $H(u, v) = 0$ elde edilir. Böylece H' in tanımından $H(u, v) = G(uv) - \alpha(u)G(v) - \alpha(v)\delta(u) = 0$ olur.

Önerme 4.1.1 R , 2-burulmasız bir halka ve α R 'nin bir otomorfizması olsun. R sol sıfır bölen olmayan bir komütatör içersin. Eğer $\delta: R \rightarrow R$, R 'nin bir *Jordan* sol (α, α) -türevi ise o zaman δ , R 'nin bir sol (α, α) -türevidir.

Teorem 4.1.2 R , karakteristiği 2 den farklı asal bir halka, U karesel kapalı R 'nin bir *Lie* ideali olsun. α R 'nin bir otomorfizması ve $\delta: R \rightarrow R$, R 'nin bir *Jordan* sol (α, α) -türevi olsun. Eğer $G: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $u, v \in U$ için $G(uv) = \alpha(u)G(v) + \alpha(v)\delta(u)$ koşulunu sağlıyorsa o zaman ya $\delta(U) = (0)$ dır ya da $U \subseteq Z(R)$ dir.

İspat $U \not\subseteq Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden her $u, v \in U$ için $G(uv) = \alpha(u)G(v) + \alpha(v)\delta(u)$ dir. Buradan u yerine u^2 alınırsa o zaman her $u, v \in U$ için

$$G(u^2v) = \alpha(u^2)G(v) + \alpha(v)\delta(u^2)$$

olur ve $\delta(u^2) = 2\alpha(u)\delta(u)$ olduğundan

$$G(u^2v) = \alpha(u^2)G(v) + 2\alpha(vu)\delta(u) \quad (4.1.18)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 2G(u^2v) &= 2G(u(uv)) = 2(\alpha(u)G(uv) + \alpha(uv)\delta(u)) \\ &= 2(\alpha(u)(\alpha(u)G(v) + \alpha(v)\delta(u)) + \alpha(uv)\delta(u)) \\ &= 2(\alpha(u^2)G(v) + 2\alpha(uv)\delta(u)) \end{aligned}$$

bulunur. $\text{Char}(R) \neq 2$ olduğundan

$$G(u^2v) = \alpha(u^2)G(v) + 2\alpha(uv)\delta(u) \quad (4.1.19)$$

sonucuna varılır. (4.1.18) ve (4.1.19) den her $u, v \in U$ için

$$2\alpha([u, v])\delta(u) = 0$$

elde edilir. $\text{Char}(R) \neq 2$ ve α , R 'nin bir otomorfizması olduğundan

$$[u, v]\alpha^{-1}(\delta(u)) = \alpha^{-1}(0) = 0$$

bulunur. Son bağıntıda v yerine $2vw$ alınırsa her $w \in U$ için

$$[u, 2vw]\alpha^{-1}(\delta(u)) = 0$$

elde edilir ve buradan

$$2[u, v]w\alpha^{-1}(\delta(u)) + 2v[u, w]\alpha^{-1}(\delta(u)) = 0$$

$$2[u, v]w\alpha^{-1}(\delta(u)) = 0$$

bulunur. $\text{Char}(R) \neq 2$ olduğundan her $u, v, w \in U$ için

$$[u, v]w\alpha^{-1}(\delta(u)) = 0$$

olur. Buradan hareketle her $u, v \in U$ olmak üzere

$$[u, v]U\alpha^{-1}(\delta(u)) = 0$$

elde edilir. Y. Özellik 4.1.1 den belirli bir $u \in U$ ve her $v \in U$ için $[u, v] = 0$ ya da $\alpha^{-1}(\delta(u)) = 0$ dır. Şimdi $A = \{u \in U \mid [u, v] = 0, v \in U\}$ ve $B = \{u \in U \mid \alpha^{-1}(\delta(u)) = 0\}$ gibi U ' nun iki alt kümesini tanımlayalım. $(A, +)$ ve $(B, +)$, U ' nun iki toplamsal alt grubu ve $(A, +) \cup (B, +) = (U, +)$ dır. Ayrıca bir grup iki öz altgrubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $U = A$ ya da $U = B$ dır.

Eğer $U = A$ alınırsa o zaman her $u, v \in U$ için $[u, v] = 0$ olur ve bu U ' nun değişmeli olmasını verir. U değişmeli olduğunda R ' nin merkezinde içerilir ve kabulden bu bir çelişkidir.

Eğer $U = B$ alınırsa her $u \in U$ için $\alpha^{-1}(\delta(u)) = 0$ olur. α , R ' nin bir otomorfizması olduğundan $\alpha(\alpha^{-1}(\delta(u))) = \alpha(0) = 0$ bulunur. Böylece her $u \in U$ için $\delta(u) = 0$ yani $\delta(U) = 0$ dir.

4.2 Genelleştirilmiş sol (α, β) -Türevler

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R asal bir halka, $d : R \rightarrow R$, R ' nin bir türevi olarak alınacaktır. S , R ' nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in S$ için $d(xy) = d(x)d(y)$ koşulu sağlanırsa o zaman d ' ye S üzerinde homomorfizma olarak hareket eder, eğer $d(xy) = d(y)d(x)$ koşulu sağlanırsa o zaman d ' ye S üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket eder denir. Daha önceki bölümlerde verilen (Bell ve Kappe, 1989) çalışmasından esinlenerek [(Ashraf, 2005), Teorem 4.2] R , asal bir halka, K R ' nin sıfırdan farklı bir ideali, θ ve ϕ R ' nin otomorfizmaları, $\delta : R \rightarrow R$, R ' nin bir sol (θ, ϕ) -türevi olmak üzere eğer δ , K üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket ederse o zaman $\delta = 0$ olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Ali, Ashraf'ın çalışmasını sol *Jordan* (α, β) -türevlere genişletmiş ve [(Ali, 2011), Teorem 4.1] R 2-burulmasız asal bir halka, I R' nin sıfırdan farklı bir ideali, $\delta: R \rightarrow R$, R' nin bir sol *Jordan* (α, β) -türevi ve $G: R \rightarrow R$, δ türevi ile belirlenen R' nin genelleştirilmiş bir sol türevi olmak üzere eğer G , I üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket ederse ya R değişmeli ya da her $x \in R$ için $G(x) = xq$ olacak şekilde bir $q \in Q_l(R_c)$ olduğunu göstermiştir.

Bu bölümde R asal bir halka, δ R' nin bir birleşmeli sol (α, β) -türevi ile belirli bir genelleştirilmiş sol (α, β) -türevi olmak üzere δ 'nın R' nin sıfırdan farklı bir ideali üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareketi incelenecektir.

Teorem 4.2.1 R , asal bir halka, I R' nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. α ve β R' nin otomorfizmaları, $G: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü R' nin bir δ sol (α, β) -türevi ile belirli genelleştirilmiş sol (α, β) -türev olsun.

(i) Eğer G , I üzerinde homomorfizma olarak hareket ederse o zaman ya R değişmelidir ya da $\delta = 0$ dır.

(ii) Eğer G , I üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ederse o zaman ya R değişmelidir ya da $\delta = 0$ dır.

İspat (i) G , I üzerinde homomorfizma olarak hareket ettiğinden her $u, v \in I$ için

$$\begin{aligned} G(uv) &= G(u)G(v) \\ &= \alpha(u)G(v) + \beta(v)\delta(u) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

elde edilir. (4.2.1) den her $u, v, w \in I$ için

$$G(uvw) = G(u(vw)) = \alpha(u)G(vw) + \beta(vw)\delta(u) \quad (4.2.2)$$

olur. Diğer taraftan her $u, v, w \in I$ için

$$\begin{aligned} G(uvw) &= G((uv)w) = G(uv)G(w) \\ &= \alpha(u)G(v)G(w) + \beta(v)\delta(u)G(w) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

bulunur. (4.2.2) ve (4.2.3) den her $u, v, w \in I$ için

$$\beta(vw)\delta(u) = \beta(v)\delta(u)G(w) \quad (4.2.4)$$

olur. (4.2.4) den hareketle her $u, v, w \in I$ için

$$\beta(v)(\beta(w)\delta(u) - \delta(u)G(w)) = 0$$

elde edilir. β , R' nin bir otomorfizması olduğundan her $u, v, w \in I$ için

$$v\beta^{-1}(\beta(w)\delta(u) - \delta(u)G(w)) = \beta^{-1}(0) = 0$$

dır. Son bağıntıda $r \in R$ olmak üzere v yerine vr alınarak her $u, v, w \in I$ için

$$vR\beta^{-1}(\beta(w)\delta(u) - \delta(u)G(w)) = 0$$

bağıntısı elde edilir. R asal bir halka ve I , R' nin sıfırdan farklı bir ideali olduğundan her $u, w \in I$ için

$$\beta(w)\delta(u) = \delta(u)G(v) \quad (4.2.5)$$

olur. (4.2.5) de $v \in I$ olmak üzere u yerine uv alınırsa

$$\beta(w)\alpha(u)\delta(v) + \beta(w)\beta(v)\delta(u) = \alpha(u)\delta(v)G(w) + \beta(v)\delta(u)G(w) \quad (4.2.6)$$

bulunur. (4.2.5) ve (4.2.6) den bu durum

$$\beta(w)\alpha(u)\delta(v) + \beta(w)\beta(v)\delta(u) - \beta(v)\beta(w)\delta(u) - \alpha(u)\beta(w)\delta(v) = 0$$

olmasını gerektirir ve buradan

$$[\beta(w), \beta(v)]\delta(u) + [\beta(w), \alpha(u)]\delta(v) = 0 \quad (4.2.7)$$

elde edilir. (4.2.7) de w yerine v alınırsa her $u, v \in I$ için

$$[\beta(v), \alpha(u)]\delta(v) = 0 \quad (4.2.8)$$

olur. $r \in R$ olmak üzere (4.2.8) de u yerine ru alınırsa her $u, v \in I$ için

$$0 = [\beta(v), \alpha(ru)]\delta(v) = \alpha(r)[\beta(v), \alpha(u)]\delta(v) + [\beta(v), \alpha(r)]\alpha(u)\delta(v)$$

bulunur. Buradan her $u, v \in I$ için

$$[\beta(v), \alpha(r)]\alpha(u)\delta(v) = 0$$

elde edilir. α , R 'nin bir otomorfizması olduğundan

$$\alpha^{-1}([\beta(v), \alpha(r)]\alpha(u)\delta(v)) = \alpha^{-1}(0) = 0$$

olur. Ayrıca I , R 'nin bir ideali olduğundan $r \in R$ ve her $v \in I$ için

$$\alpha^{-1}([\beta(v), \alpha(r)]IR\alpha^{-1}(\delta(v))) = (0)$$

elde edilir. R nin asallığından $r \in R$ ve her $v \in I$ için ya $\alpha^{-1}([\beta(v), \alpha(r)])I = (0)$ dır ya da $\alpha^{-1}(\delta(v)) = 0$ dır. Şimdi $A = \{v \in I, \text{ her } r \in R \mid \alpha^{-1}([\beta(v), \alpha(r)]) = \{0\}\}$ ve $B = \{v \in I \mid \alpha^{-1}(\delta(v)) = 0\}$ gibi I 'nin iki alt kümesini tanımlayalım. $(A, +)$ ve $(B, +)$, $(I, +)$ 'nin iki toplamsal alt grubu ve $(A, +) \cup (B, +) = (I, +)$ dir. Ayrıca bir grup iki öz altgrubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $I = A$ ya da $I = B$ dır.

Eğer $A = I$ ise $\alpha(r) = r' \in R$ ve her $v \in I$ olmak üzere $\alpha^{-1}([\beta(v), r'])I = 0$ olur. $s \in R$ için $r' = r's$ alınırsa $\alpha^{-1}([\beta(v), r'])sI + \alpha^{-1}(r')\alpha^{-1}([\beta(v), s])I = 0$ bağıntısı bulunur. Buradan $\alpha^{-1}([\beta(v), r'])RI = (0)$ olur. R nin asallığı ve I nin R 'nin sıfırdan farklı bir ideali oluşu $\alpha^{-1}([\beta(v), r']) = 0$ sonucunu verir. α 'nın R 'nin bir otomorfizması olduğu kullanılarak $[\beta(v), r'] = 0$ elde edilir. Buradan I 'nin merkezi olduğu bulunur ve bu R 'nin değişmeli olmasını verir.

Eğer $B = I$ ise o zaman her $v \in I$ için $\alpha^{-1}(\delta(v)) = 0$ olur. α , R 'nin bir otomorfizması olduğundan her $v \in I$ için $\delta(v) = 0$ olur. $r \in R$ olmak üzere v yerine rv alınırsa $0 = \delta(rv) = \alpha(r)\delta(v) + \beta(v)\delta(r) = \beta(v)\delta(r)$ bulunur. β , R 'nin bir otomorfizması olduğundan $v\beta^{-1}(\delta(r)) = 0$ olur. Son bağıntıda $s \in R$ olmak üzere v yerine vs alınırsa $vs\beta^{-1}(\delta(r)) = 0$ olur. Böylece $vR\beta^{-1}(\delta(r)) = (0)$ olur. R asal bir halka ve $(0) \neq I$ olduğundan $\beta^{-1}(\delta(r)) = 0$ olur. Ayrıca β , R 'nin bir otomorfizması olduğundan $r \in R$ için $\delta(r) = 0$ dır ve bu $\delta = 0$ olmasını gerektirir.

(ii) G, I üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ettiğinden her $u, v \in I$ için

$$G(uv) = G(v)G(u)$$

$$=\alpha(u)G(v)+\beta(v)\delta(u) \quad (4.2.9)$$

olur. (4.2.9) de v yerine uv alınırsa her $u,v \in I$ için

$$\begin{aligned} G(u^2v) &= G(u(uv)) = G(uv)G(u) \\ &= \alpha(u)G(uv) + \beta(uv)\delta(u) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

elde edilir. (4.2.9) ve (4.2.10) den

$$\alpha(u)G(uv) + \beta(uv)\delta(u) = \alpha(u)G(v)G(u) + \beta(v)\delta(u)G(u) \quad (4.2.11)$$

bulunur. (4.2.9) ve (4.2.11) den her $u,v \in I$ için

$$\beta(uv)\delta(u) = \beta(v)\delta(u)G(u) \quad (4.2.12)$$

olur. (4.2.12) de $r \in R$ olmak üzere v yerine rv alınırsa her $u,v \in I$ için

$$\beta(urv)\delta(u) = \beta(rv)\delta(u)G(u)$$

elde edilir. β , R ' nin bir otomorfizması olduğundan

$$\beta(u)\beta(r)\beta(v)\delta(u) = \beta(r)\beta(v)\delta(u)G(u) \quad (4.2.13)$$

olur. (4.2.12) sol taraftan $\beta(r)$ ile çapılırsa

$$\beta(r)\beta(u)\beta(v)\delta(u) = \beta(r)\beta(v)\delta(u)G(u) \quad (4.2.14)$$

elde edilir. (4.2.13) ve (4.2.14) den $r \in R$, her $u, v \in I$ olmak üzere $[\beta(u), \beta(r)]\beta(v)\delta(u) = 0$ bağıntısına varılır. β , R' nin bir otomorfizması olduğundan $r \in R$ ve her $u, v \in I$ için $[u, r]v\beta^{-1}(\delta(u)) = 0$ elde edilir. Son bağıntıdan $r \in R$ ve her $u \in I$ için $[u, r]I\beta^{-1}(\delta(u)) = (0)$ ve buradan $[u, r]IR\beta^{-1}(\delta(u)) = (0)$ ifadesine ulaşılır. R' nin asallığından $u \in I$ için ya $[u, r]I = (0)$ ya da $\delta(u) = 0$ dır. Buradan (i) nin ispatında yapılan benzer tekniklerle $\delta = 0$ sonucuna varılır.

5. ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SOL

(θ, ϕ) -TÜREVLER

Bu bölümde Xiao-Wei Xu ve Hong-Ying Zhang'ın "A Note On Generalized Left (θ, ϕ) -Derivations in Prime Rings" adlı çalışması incelenecektir.

R , birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R 'nin endomorfizmaları olsun. $\mu: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $\mu(xy) = \theta(x)\mu(y) + \mu(x)\phi(y)$ koşulunu sağlarsa μ dönüşümüne R 'nin bir (θ, ϕ) -türevi denir. μ , R 'nin bir (θ, ϕ) -türevi olmak üzere $\delta: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \theta(x)\delta(y) + \mu(x)\phi(y)$ koşulunu sağlarsa o zaman δ dönüşümüne R 'nin bir genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türevi denir. Tanımlar göz önüne alındığında

türev $\rightarrow$ genelleştirilmiş türev $\rightarrow$ genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türev ve

türev $\rightarrow (\theta, \phi)$ -türev $\rightarrow$ genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türev

diyagramlarını verebiliriz. Bu tanımlar ve bu tanımlarla ilgili sonuçlar (Bresar, 1991), (Hvala, 1998), (Lee, 1999), (Chang et al, 1994), (Cheng et al, 2006) ve (Ashraf et al, 2004) çalışmalarında vardır. Sol türevlerle ilgili ilk çalışmalara Bresar ve Vukman tarafından başlanmıştır. (Bresar ve Vukman, 1990) R bir halka, $\mu: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $\mu(xy) = x\mu(y) + y\mu(x)$ koşulunu sağlarsa μ 'nin R 'nin bir sol türevi olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca bu çalışmalarda R , asal bir halka olmak üzere R sıfırdan farklı bir sol türev içerdiğinde R 'nin değişmeli olduğunu gösterilmiştir.

(Zaidi, Ashraf ve Ali, 2004) R birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R 'nin endomorfizmaları olmak üzere her $x, y \in R$ için $\delta: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü $\delta(xy) = \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\delta(x)$ koşulunu sağlarsa o zaman δ , R 'nin bir sol (θ, ϕ) -türevi olduğunu göstermişlerdir.

(Ashraf ve Ali, 2008) R birleşmeli bir halka, δ R' nin bir sol türevi olsun. $G: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $G(xy) = xG(y) + y\delta(x)$ koşulunu sağlarsa o zaman G 'nin R' nin bir genelleştirilmiş sol türevi olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca R birleşmeli bir halka, θ ve ϕ , R' nin endomorfizmaları ve μ , R' nin bir sol (θ, ϕ) -türev olmak üzere her $x, y \in R$ için $\delta: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü $\delta(xy) = \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\mu(x)$ koşulunu sağlarsa δ , R' nin bir genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi olduğunu göstermişlerdir. Yukarıda yapılan tanımların ışığı altında

sol türev $\rightarrow$ genelleştirilmiş sol türev $\rightarrow$ genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türev ve

sol türev $\rightarrow$ sol (θ, ϕ) -türev $\rightarrow$ genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türev

diyagramları verilebilir. Özellikle asal bir halkada R' nin bir δ genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi için her $x, y \in R$ olmak üzere $\delta(xy) = \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\mu(x)$ koşulunu sağlayan μ sol (θ, ϕ) -türevi tektir. Eğer halka değişmeli olursa türev, genelleştirilmiş türev, (θ, ϕ) -türev ve genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türev tanımları sol türev, genelleştirilmiş sol türev, sol (θ, ϕ) -türev ve genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türev tanımlarına denk olur. Bu bölümde R asal bir halka, θ ve ϕ , R' nin otomorfizmaları ve δ , R' nin bir genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi olduğunda halka ve türev hakkında bir karakterizasyon verilecektir.

Teorem 5.1 [(Ashraf, 2005), Teorem 4.2] R asal bir halka, K R' nin sıfırdan farklı bir ideali, θ ve ϕ , R' nin otomorfizmaları olsun. $d: R \rightarrow R$, R' nin bir sol (θ, ϕ) -türevi olsun.

(i) Eğer d , K üzerinde homomorfizma olarak hareket ederse $d = 0$ dır.

(ii) Eğer d , K üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ederse $d = 0$ dır.

Teorem 5.2 [(Ali ve Kumar, 2008), Teorem 2.7] R 2-burulmasız asal bir halka, J R 'nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve alt halkası, θ ve ϕ , R 'nin otomorfizmaları ve $d: R \rightarrow R$, R 'nin bir sol (θ, ϕ) -türevi olsun.

- (i) Eğer d , J üzerinde homomorfizma olarak hareket ederse $d = 0$ dır.
- (ii) Eğer d , J üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ederse $d = 0$ dır.

Teorem 5.3 R asal bir halka, θ ve ϕ , R 'nin otomorfizmaları, $\delta: R \rightarrow R$, R 'nin bir genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türev olsun. O zaman R deki bir δ sol (θ, ϕ) -türevi aşağıdaki formlardan biri olmalıdır.

- (1) $\delta = \theta \circ d$ olacak şekilde bir sol $d: {}_R R \rightarrow {}_R R$ R -homomorfizması vardır.
- (2) δ , R nin bir genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türevidir ve R bir değişmeli bölgedir.

İspat Her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\mu(x)$ olacak şekilde μ , R 'nin birleşmeli bir sol (θ, ϕ) -türevi olsun. İlk olarak $\mu = 0$ olduğu durumu inceleyelim. O zaman her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \theta(x)\delta(y)$ olur. $d = \theta^{-1} \circ \delta$ olarak tanımlansın. Her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
 d(xy) &= (\theta^{-1} \circ \delta)(xy) \\
 &= \theta^{-1}(\delta(xy)) \\
 &= \theta^{-1}(\theta(x)\delta(y)) \\
 &= xd(y)
 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $d = \theta^{-1} \circ \delta$, R' nin bir sol R -homomorfizmasıdır ve θ , R' nin bir otomorfizması olduğundan $\delta = \theta \circ d$ elde edilir. Son bağıntı (1) nin ispatını verir. Şimdi de $\mu \neq 0$ olduğu durumu irdeleyelim. Her $x, y, z \in R$ için

$$\begin{aligned}\delta(xyz) &= \delta((xy)z) = \theta(xy)\delta(z) + \phi(z)\mu(xy) \\ &= \theta(x)\theta(y)\delta(z) + \phi(z)\theta(x)\mu(y) + \phi(z)\phi(y)\mu(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $x, y, z \in R$ için

$$\begin{aligned}\delta(xyz) &= \delta(x(yz)) = \theta(x)\delta(yz) + \phi(yz)\mu(x) \\ &= \theta(x)\theta(y)\delta(z) + \theta(x)\phi(z)\mu(y) + \phi(y)\phi(z)\mu(x)\end{aligned}$$

olur. Son iki bağıntıdan her $x, y, z \in R$ için

$$\theta(x)\phi(z)\mu(y) - \phi(z)\theta(x)\mu(y) + \phi(y)\phi(z)\mu(x) - \phi(z)\phi(y)\mu(x) = 0$$

dır ve buradan her $x, y, z \in R$ için

$$[\theta(x), \phi(z)]\mu(y) + [\phi(y), \phi(z)]\mu(x) = 0 \quad (5.1)$$

elde edilir. (5.1) de z yerine y alınırsa her $x, y \in R$ için

$$[\theta(x), \phi(y)]\mu(y) = 0 \quad (5.2)$$

olur. (5.2) de her $x, y, z \in R$ için x yerine xz yazılarak

$$\theta(x)[\theta(z), \phi(y)]\mu(y) + [\theta(x), \phi(y)]\theta(z)\mu(y) = 0$$

bulunur ve (5.2) den her $x, y, z \in R$ için

$$[\theta(x), \phi(y)]\theta(z)\mu(y) = 0$$

olur. Her $z \in R$ için $\theta(z) \in R$ olacağından

$$[\theta(x), \phi(y)]R\mu(y) = (0)$$

elde edilir. R , asal bir halka olduğundan $y \in R$ için ya $\mu(y) = 0$ ya da $\phi(y) \in Z(R)$ dir. Şimdi $A = \{y \in R \mid \phi(y) \in Z(R)\}$ ve $B = \{y \in R \mid \mu(y) = 0\}$ gibi R 'nin iki toplamsal alt grubunu tanımlayalım. $(A, +)$ ve $(B, +)$, R 'nin iki toplamsal alt grubu ve $(A, +) \cup (B, +) = (R, +)$ dır. Ayrıca bir grup iki öz altgrubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $R = A$ ya da $R = B$ dır. $\mu \neq 0$ olduğunu kabul ettiğimizden $R = A$ olmalıdır ve bu durum R 'nin değişmeli olmasını verir. Böylece R 'nin asallığı R 'nin bir değişmeli bölge olduğunu ifade eder.

Şimdi Teorem 5.3 ün yardımıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.1 R asal bir halka, θ ve ϕ , R 'nin otomorfizmaları olsun. μ , R 'nin sıfırdan farklı bir sol (θ, ϕ) -türevidir, ancak ve ancak μ , R 'nin sıfırdan farklı bir (θ, ϕ) -türevi olmak üzere R birleşmeli bir bölgedir.

Yardımcı Özellik 5.1 R , bir halka ve S , R 'nin bir toplamsal alt grubu ve $f: R \rightarrow R$, R 'nin bir toplamsal dönüşümü olsun. f , S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eder, ancak ve ancak ya f , S üzerinde homomorfizma olarak hareket eder ya da f , S üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket eder.

İspat İspatın gerek şartı açıktır. Yeter şartı incelemek için $s \in S$ olmak üzere $H_s = \{x \in S \mid f(sx) = f(s)f(x)\}$ ve $H'_s = \{x \in S \mid f(sx) = f(x)f(s)\}$ gibi S' nin iki alt kümesi tanımlansın. $(H_s, +)$ ve $(H'_s, +)$, S' nin iki toplamsal alt grubu ve $(H_s, +) \cup (H'_s, +) = (S, +)$ dır. Ayrıca bir grup iki öz altgrubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $S = H_s$ ya da $S = H'_s$ dir. Tekrar $H = \{x \in S \mid H_s = S\}$ ve $H' = \{x \in S \mid H'_s = S\}$ gibi S' nin iki alt kümesini tanımlayalım ve yukarıdakine benzer düşünceyle ya $H = S$ ya da $H' = S$ sonucuna varılır ki bu da istenilen sonuçtur.

Teorem 5.1 ve Teorem 5.2, Y. Özellik 5.1' in uygulaması olarak yeniden verilebilir. Şimdi R asal halkasının sıfırdan farklı bir alt halkası üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eden sıfırdan farklı bir μ (θ, ϕ) -türevi ile belirlenen R' nin bir δ genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi için denk bir koşul verilecektir.

Teorem 5.4 R , asal bir halka, S R' nin sıfırdan farklı bir alt halkası, θ ve ϕ , R' nin otomorfizmaları, μ R' nin sıfırdan farklı bir sol (θ, ϕ) -türevi ve δ , μ ile belirli R' nin bir genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi olsun. δ , S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eder ancak ve ancak aşağıdakilerden biri sağlanır:

(i) S üzerinde $\delta = 0$ dır ya da

(ii) S üzerinde $\delta = \theta$ ve $\mu = 0$ dır ya da

(iii) S üzerinde $\delta = \phi$ ve $\mu = \phi - \theta$ dır.

İspat Teorem 5.3 te $\mu \neq 0$ olduğu durumda δ , R' nin bir genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi iken R' nin değişmeli bir bölge olduğu görülmüştü. Bu sebeple ispatın yeter kısmı açıktır. Çünkü S üzerinde $\delta = 0$ olduğunda her $x, y \in S$ için δ nın, S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket etmesi her zaman sağlanır. İkinci olarak S üzerinde $\delta = \theta$ ve $\mu = 0$ olsun. Her $x, y \in S$ için

$$\begin{aligned}\delta(xy) &= \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\mu(x) \\ &= \delta(x)\delta(y)\end{aligned}$$

olur yani δ , S üzerinde homomorfizma olarak hareket eder ayrıca R değişmeli olduğundan ters-homomorfizma olarak da hareket eder. Son olarak S üzerinde $\delta = \phi$ ve $\mu = \phi - \theta$ olsun bu durumda da her $x, y \in S$ için

$$\begin{aligned}\delta(xy) &= \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\mu(x) \\ &= \theta(x)\phi(y) + \phi(y)(\phi - \theta)(x) \\ &= \theta(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x) - \phi(y)\theta(x) \\ &= \delta(x)\delta(y)\end{aligned}$$

olur. Yani δ , S üzerinde homomorfizma olarak hareket eder. Üstelik R değişmeli olduğundan ters-homomorfizma olarak da hareket eder. Şimdi ispatın gerek koşul kısmını inceleyelim. R değişmeli olduğundan δ nın S üzerinde homomorfizma hareketi ile ters-homomorfizma hareketi aynıdır. Bu sebepten δ , S üzerinde homomorfizma olarak hareket ettiğini kabul edelim ve S üzerinde $\delta \neq 0$ olsun. O zaman her $x, y \in S$ için

$$\delta(xy) = \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\mu(x) = \delta(x)\delta(y)$$

olur ve bu bağıntıdan her $x, y \in S$ için

$$(\delta - \theta)(x)\delta(y) = \mu(x)\phi(y) \quad (5.3)$$

elde edilir. (5.3) de x yerine xz alınırsa her $x, y, z \in S$ için

$$(\delta - \theta)(xz)\delta(y) = \mu(xz)\phi(y)$$

bulunur. Son bağıntıdan

$$(\theta(x)\delta(z) + \phi(z)\mu(x) - \theta(x)\theta(z))\delta(y) = \theta(z)\mu(z)\phi(y) + \phi(z)\mu(x)\phi(y)$$

olur ve (5.3) den her $x, y, z \in S$ için

$$\phi(z)\mu(x)((\delta - \phi)(y)) = 0$$

elde edilir. R , değişmeli olduğu için yukarıdaki bağıntı r ile soldan çarpılıp R 'nin değişmeli olduğu kullanılarak her $x, y, z \in S$ ve her $r \in R$ için $\phi(z)r\mu(x)((\delta - \phi)(y)) = 0$ bulunur ve buradan

$$\phi(z)R\mu(x)((\delta - \phi)(y)) = (0)$$

olur. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan $\mu(S)\{(\delta - \phi)(S)\} = (0)$ dır.

Yukarıda yapılan benzer işlemlerle

$$\mu(S)R((\delta - \phi)(S)) = (0)$$

elde edilir ve R asal bir halka olduğundan ya S üzerinde $\mu = 0$ dır ya da $\delta = \phi$ dır.

S üzerinde $\mu = 0$ olduğunu kabul edelim. (5.3) den $(\delta - \theta)(x)\delta(y) = \mu(x)\phi(y)$ olduğunu biliyoruz. Bu bağıntıdan $(\delta - \theta)(x)\delta(y) = 0$ olur. Yukarıda yapılan benzer işlemlerle $\delta \neq 0$ ve R asal bir halka olduğundan S üzerinde $\delta = \theta$ olduğu elde edilir. Şimdi S üzerinde $\delta = \phi$ olduğunu kabul edelim. Tekrar (5.3) den her $x, y \in S$ için $(\delta - \theta)(x)\phi(y) = \mu(x)\phi(y)$ olur ve buradan

$$(\phi - \theta - \mu)(x)\phi(y) = 0$$

bulunur. R , değişmeli bir halka olduğu için yukarıdaki bağıntı r ile soldan çarpılıp R' nin değişmeli olduğu kullanılarak her $x, y \in S$ ve $r \in R$ için $(\phi - \theta - \mu)(x)r\phi(y) = 0$ olur ve buradan

$$(\phi - \theta - \mu)(x)R\phi(y) = (0)$$

elde edilir. R , asal bir halka ve $\phi = \delta \neq 0$ olduğundan S üzerinde $\mu = \phi - \theta$ dır.

Sonuç 5.2 R , asal bir halka, S R' nin sıfırdan farklı bir ideali ya da R , 2-burulmasız asal bir halka, S R' nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve alt halkası olsun. θ ve ϕ , R' nin otomorfizmaları, μ R' nin sıfırdan farklı bir sol (θ, ϕ) -türevi ve δ , R' nin μ ile belirlenen bir genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi olsun. δ , S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eder, ancak ve ancak $\delta = \phi$ ve $\mu = \phi - \theta$ dır.

İspat Yeter şartın ispatı açıktır. Çünkü δ R' nin bir genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi olmak üzere δ , R' nin bir ideali üzerinde hareket ettiğinden ve $\mu \neq 0$ olduğundan Teorem 5.3 (2) den ideal değişmeli olur. Asal bir halkada ideal değişmeli ise halka da değişmelidir. $\delta = \phi$ ve $\mu = \phi - \theta$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $x, y \in S$ için

$$\begin{aligned}
\delta(xy) &= \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\mu(x) \\
&= \theta(x)\delta(y) + \delta(y)\phi(x) - \delta(y)\theta(x) \\
&= \delta(y)\delta(x)
\end{aligned}$$

olur. Yani δ , S üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket eder ve R değişmeli olduğundan aynı zamanda homomorfizma olarak da hareket eder.

İspatın gerek şartı için S 'nin R 'nin bir ideali olduğunu kabul edelim. Teorem 5.4 den üç durum geçerlidir. İlk olarak $\delta = 0$ olduğu durumu inceleyelim. Her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= \delta(rs) = \theta(r)\delta(s) + \phi(s)\mu(r) \\
&= \phi(s)\mu(r)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son bağıntı ve R 'nin değişmeli olmasından her $s \in S$ ve $r \in R$ için $0 = \phi(s)\mu(r)$ olur. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan, her $r \in R$ için $\mu(r) = 0$ olup bu bir çelişkidir. İkinci olarak S üzerinde $\delta = \theta$ ve $\mu = 0$ olduğu durumu inceleyelim. Her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\delta(rs) = \theta(rs) = \theta(r)\theta(s)$$

olur ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\delta(rs) &= \theta(r)\delta(s) + \phi(s)\mu(r) \\
&= \theta(r)\theta(s) + \phi(s)\mu(r)
\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki iki bağıntıdan her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\phi(s)\mu(r) = 0$$

bulunur. Son bağıntı r ile soldan çarpılıp R 'nin değişmeli olması kullanılırsa $\phi(s)r\mu(r) = 0$ elde edilir ve buradan $\phi(s)R\mu(r) = (0)$ sonucuna varılır. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan her $r \in R$ için $\mu(r) = 0$ olur. Son bağıntıdan $\mu = 0$ elde edilir, fakat bu bir çelişkidir. Son olarak S üzerinde $\delta = \phi$ ve $\mu = \phi - \theta$ olduğu durumu inceleyelim. Her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\delta(rs) = \phi(rs) = \phi(r)\phi(s)$$

olur ve diğer yandan

$$\begin{aligned} \delta(rs) &= \theta(r)\delta(s) + \phi(s)\mu(r) \\ &= \phi(s)(\theta(r) + \mu(r)) \end{aligned}$$

bulunur. Son iki bağıntıdan

$$\phi(s)(\phi(r) - \theta(r) - \mu(r)) = 0$$

olur. Yukarıdaki bağıntı r ile soldan çarpılıp R 'nin değişmeli olduğu kullanılırsa $r \in R$ için $\phi(s)r(\phi(r) - \theta(r) - \mu(r)) = 0$ elde edilir ve buradan

$$\phi(s)R(\phi(r) - \theta(r) - \mu(r)) = (0)$$

sonucuna varılır. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan her $r \in R$ için $\mu(r) = \phi(r) - \theta(r)$ olur. Diğer taraftan her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\delta(sr) = \phi(sr) = \phi(s)\phi(r)$$

olur ve ayrıca her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}\delta(sr) &= \theta(s)\delta(r) + \phi(r)\mu(s) \\ &= \theta(s)\delta(r) + \phi(r)\phi(s) - \delta(r)\theta(s)\end{aligned}$$

bulunur. Son iki bağıntı her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\theta(s)(\delta(r) - \phi(r)) = 0$$

olmasını gerektirir. Yukarıda ki benzer işlemlerle, R asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan her $r \in R$ için $\delta(r) = \phi(r)$ dir; yani, $\delta = \phi$ dir. Şimdi R , 2-burulmasız asal bir halka ve S 'nin R 'nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve alt halkası olduğunu kabul edelim. O zaman her $s \in S$ ve $r \in R$ için $rs + sr \in S$ dir. Diğer taraftan R değişmeli olduğundan $2rs = rs + sr \in S$ elde edilir.

İlk incelenen durumda olduğu gibi tekrar üç ayrı durum halinde inceleyelim. İlk olarak S üzerinde $\delta = 0$ olsun. Her $s \in S$ ve $r \in R$ için $0 = \delta(2rs) = 2(\theta(r)\delta(s) + \phi(s)\mu(r))$ olur ve bu bağıntı $2\phi(s)\mu(r) = 0$ olmasını gerektirir. R , 2-burulmasız bir halka ve değişmeli olduğundan daha önce yapılan benzer işlemlerle

$$\phi(s)R\mu(r) = (0)$$

bulunur. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan $\mu = 0$ olur ancak bu bir çelişkidir. İkinci olarak S üzerinde $\delta = \theta$ ve $\mu = 0$ olsun. Her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}\delta(2rs) &= 2(\theta(r)\delta(s) + \phi(s)\mu(r)) \\ &= 2\theta(r)\theta(s) + 2\phi(s)\mu(r)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\delta(2rs) = 2\theta(rs)$ olduğundan son iki bağıntıdan her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$2\phi(s)\mu(r) = 0$$

olur. Daha önce yapılan benzer işlemlerle

$$\phi(s)R\mu(r) = (0)$$

elde edilir. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan $\mu = 0$ olur. Fakat bu bir çelişkidir. Son olarak, S üzerinde $\delta = \phi$ ve $\mu = \phi - \theta$ olsun. Her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}\delta(2sr) &= 2(\theta(s)\delta(r) + \phi(r)\mu(s)) \\ &= 2\theta(s)\delta(r) + 2\phi(r)\phi(s) - 2\phi(r)\theta(s)\end{aligned}$$

olur ve diğer taraftan

$$\delta(2sr) = 2\phi(sr)$$

elde edilir. Son iki bağıntı her $s \in S$ ve $r \in R$ için

$$2\phi(s)(\delta(r) - \phi(r)) = 0$$

olmasını gerektirir. R , 2-burulmasız asal bir halka olduğundan

$$\phi(s)R(\delta(r) - \phi(r)) = (0)$$

elde edilir. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan her $r \in R$ için $\delta = \phi$ olur. Hipotezden her $s \in S$ için $\delta(s) = \phi(s)$ olduğundan her $s \in S$ ve $x \in R$ için $(\delta - \theta)(2xs) = 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= 2(\delta(xs) - \phi(xs)) \\ &= 2(\theta(x)\delta(s) + \phi(s)\mu(x) - \phi(x)\phi(s)) \end{aligned}$$

olur. R , 2-burulmasız bir halka olduğundan

$$\phi(s)(\mu(x) + \theta(x) - \phi(x)) = 0$$

elde edilir. Buradan her $s \in S$ ve $x \in R$ için

$$\phi(s)R(\mu(x) + \theta(x) - \phi(x)) = (0)$$

olur. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan R üzerinde $\mu = \phi - \theta$ elde edilir.

Şimdi Teorem 5.4 ve Sonuç 5.2 nin sol (θ, ϕ) -türevlere uygulandığını verelim.

Sonuç 5.3 R , asal bir halka, S R 'nin sıfırdan farklı alt halkası, θ ve ϕ , R 'nin otomorfizmaları ve μ , R 'nin sol (θ, ϕ) -türevi olsun. μ , S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eder, ancak ve ancak S üzerinde $\mu = 0$ dır.

Sonuç 5.4 (Teorem 5.1 ve Teorem 5.2) R , asal bir halka, S R 'nin sıfırdan farklı bir ideali ya da R , 2-burulmasız asal bir halka, S R 'nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve alt halkası olsun. θ ve ϕ , R 'nin otomorfizmaları ve μ R 'nin bir sol (θ, ϕ) -türevi olmak üzere μ , S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eder, ancak ve ancak S üzerinde $\mu = 0$ dır.

Önerme 5.1 R , asal bir halka, S R 'nin sıfırdan farklı bir ideali ya da R , 2-burulmasız asal bir halka, S R 'nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve alt halkası olsun. θ ve ϕ , R 'nin otomorfizmaları, $\mu = 0$ olmak üzere, R 'nin bir sol (θ, ϕ) -türevi olarak alınsın. δ , μ ile belirli R 'nin bir genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevi olmak üzere S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eder, ancak ve ancak ya $\delta = \theta$ dır ya da $\delta = 0$ dır.

İspat İspatın yeter şartını inceleyelim. Eğer $\delta = \theta$ olursa her $x, y \in S$ için

$$\begin{aligned}\delta(xy) &= \theta(x)\delta(y) + \phi(y)\mu(x) \\ &= \delta(x)\delta(y)\end{aligned}$$

olur ve ispatın bu kısmı sonuçlanır. İspatın gerek şartı incelenirse Teorem 5.3 den $\mu = 0$ olduğu durumda R 'nin $d: {}_R R \rightarrow {}_R R$ tanımlı bir sol R -homomorfizması vardır ve $\delta = \theta \circ d$ olduğu görülmüştü. Hipotezden δ , S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eder. O zaman θ , R 'nin bir otomorfizması olduğundan $\theta^{-1} \circ \delta = d$ olur. θ , otomorfizma olduğundan θ^{-1} de R 'nin bir otomorfizmasıdır ve θ^{-1} , δ 'nin S üzerindeki hareketini korur. Bu durumda d , S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eder sonucuna ulaşılır.

İlk olarak R asal bir halka ve S , R 'nin sıfırdan farklı bir ideali olduğu durumu inceleyelim. d , S üzerinde homomorfizma olarak hareket etsin ve ayrıca d , bir sol R -homomorfizması olduğundan her $x, y, z \in R$ ve her $s, t \in S$ için

$$\begin{aligned} d(sxyz) &= sxytd(z) \\ &= d(sx)d(ytz) \\ &= sd(x)ytd(z) \end{aligned}$$

olur. Son bağıntıdan her $s, t \in S$ ve $x, y, z \in R$ için $s(d(x) - x)ytd(z) = 0$ elde edilir. Her $s, t \in S$ ve $x, z \in R$ için $s(d(x) - x)Rtd(z) = (0)$ olur. R asal bir halka olduğundan ya her $x \in R$ için $S(d(x) - x) = (0)$ dır ya da her $z \in R$ için $Sd(z) = (0)$ dır. Eğer her $x \in R$ için $S(d(x) - x) = (0)$ ise o zaman $r \in R$ olmak üzere x yerine rx alındığında d , bir sol R -homomorfizma olduğundan $SR(d(x) - x) = (0)$ olur. R asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ için $d(x) = x$ elde edilir; yani, $d = 1_R$ olur. Buradan $\delta = \theta \circ d$ olduğu için $\delta = \theta$ bulunur. Diğer taraftan her $z \in R$ için $Sd(z) = (0)$ ise o zaman $r \in R$ olmak üzere z yerine rz alındığında $SRd(z) = (0)$ olur. R asal bir halka ve $S \neq (0)$ olduğundan her $z \in R$ için $d(z) = 0$ yani $d = 0$ dır. $\delta = \theta \circ d$ olduğu için son bağıntı $\delta = 0$ olmasını verir. İkinci olarak d , S üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket etsin. O zaman her $s, t \in S$ için $d(st) = sd(t) = d(t)d(s)$ dir. Üstelik her $x \in R$ olmak üzere s yerine xs alınırsa her $s, t \in S$ ve her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} d(t)d(xs) &= d(t)xd(s) \\ &= d((xs)t) \\ &= xsd(t) \\ &= xd(t)d(s) \end{aligned}$$

olur ve yukarıdan

$$d(t)xd(s) - xd(t)d(s) = 0$$

elde edilir. Son bağıntı her $x \in R$ ve $s, t \in S$ için $[d(t), x]d(s) = 0$ olmasını gerektirir. Bu bağıntıda her $y \in R$ için x yerine xy alınarak

$$0 = [d(t), xy]d(s) = x[d(t), y]d(s) + [d(t), x]yd(s)$$

olur. Son bağıntıdan $x \in R$ için $[d(t), x]yd(s) = 0$ bulunur. $y \in R$ ve R asal bir halka olduğundan ya her $x \in R$ için $[d(t), x] = 0$ dır ya da her $s \in S$ için $d(s) = 0$ dır. Eğer $d(S) = 0$ olursa ve $S \neq 0$ olduğundan $d = 0$ dır; yani, $\delta = 0$ dır. Diğer durumda eğer her $x \in R$ ve $t \in S$ için $[d(t), x] = 0$ ise o zaman $d(S) \subseteq Z(R)$ olur. Her $x, y \in S$ için $d(xy) = d(y)d(x)$ kabulünden ve $d(S) \subseteq Z(R)$ olduğundan $d(xy) = d(x)d(y)$ bulunur. Daha önce incelenen d nin homomorfizma hareketi ile ispat biter.

Şimdi R , 2-burulmasız asal bir halka, S R' nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve alt halkası olduğu durumu inceleyelim. İlk olarak aşağıdakilerin sağlandığını görelim:

(1) Her $s, t \in S$ ve $x \in R$ için $2sxt \in S$ olur.

(2) Bazı $a \in R$ için eğer $Sa = 0$ veya $aS = 0$ ise o zaman $a = 0$ dır.

Her $s, t \in S$ ve $x \in R$ için $2sxt + (st)x + x(st) = s(tx + xt) + (sx + xs)t$ şeklinde yazılır. S , R' nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali olduğundan $tx + xt, sx + xs \in S$, $(st)x + x(st) \in S$ ve S bir alt halka olduğundan $2sxt \in S$ elde edilir.

$a \in R$ için $Sa = 0$ olsun. O zaman her $s \in S$ ve $x \in R$ için $sx + xs \in S$ olur. Buradan $(sx + xs)a = 0$ bulunur. $Sa = 0$ olduğundan her $x \in R$ ve $s \in S$ için $sxa = 0$ sonucuna varılır. Böylece $sRa = (0)$ olur. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan $a = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $aS = 0$ iken $a = 0$ olduğu da görülür.

Şimdi d , S üzerinde homomorfizma olarak hareket etsin. Her $r, s, t \in S$ ve $x \in R$ için

$$d(r(2sxt)) = d(r)d(2sxt)$$

dır. Ve aynı zamanda d , bir sol R -homomorfizması olduğundan her $r, s, t \in S$ ve $x \in R$ için

$$d(r(2sxt)) = rd(2sxt)$$

dır. Son iki bağıntıdan her $r, t \in S$ için

$$2(d(r) - r)SRd(t) = (0)$$

elde edilir. R , 2-burulmasız asal bir halka olduğundan ya her $r \in S$ için $d(r) = r$ ya da S üzerinde $d = 0$ dır. Her $x \in R$ ve her $r \in S$ için $d(r) = r$ olduğunu kabul edelim. O zaman $xs + sx \in S$ olduğundan

$$xs + sx = d(xs + sx)$$

$$= d(xs) + d(sx)$$

$$= d(xs) + d(s)d(x)$$

$$= xs + sd(x)$$

olur. Son bağıntıdan her $s \in S$ ve $x \in R$ için $s(x - d(x)) = 0$ elde edilir. Buradan hareketle $r \in R$ olmak üzere x yerine rx alınıp d nin bir sol R -homomorfizma olduğu kullanılarak $SR(x - d(x)) = (0)$ bulunur. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ için $d(x) = x$ dır; yani, $d = 1_R$ olur. Bu ise $\delta = \theta$ olmasını verir. Diğer yandan S üzerinde $d = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $x \in R$ ve her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(xs + sx) = d(xs) + d(sx) \\ &= xd(s) + sd(x) \\ &= Sd(x) \end{aligned}$$

olur; yani, $Sd(x) = (0)$ dır. İspatlanan (2) den $d = 0$ dır ve $\delta = \theta \circ d$ olduğundan $\delta = 0$ elde edilir.

Son olarak d , S üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket etsin. Üstelik d aynı zamanda bir sol R -homomorfizma olduğundan her $s, t \in S$ için $d(st) = sd(t) = d(t)d(s)$ dır. Her $r \in S$ ve $x \in R$ olmak üzere s yerine $2rxs$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned} d(2rxst) &= 2rxsd(t) = d(t)d(2rxs) \\ &= 2d(t)rx d(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $sd(t) = d(t)d(s)$ bağıntısı soldan $2rx$ ile çarpılırsa

$$2rxsd(t) = 2rx d(t)d(s)$$

bulunur. Son iki bağıntıdan her $r, s, t \in S$ ve $x \in R$ için

$$2[rx, d(t)]d(s) = 0$$

olur. Her $r, r', s, t \in S$ ve $x, x' \in R$ için x yerine $xr'x'$ alınırsa

$$0 = 2[rxr'x', d(t)]d(s) = 2rx[r'x', d(t)]d(s) + 2[rx, d(t)]r'x'd(s)$$

elde edilir. R , 2-burulmasız bir halka olduğundan

$$[rx, d(t)]SRd(s) = (0)$$

bulunur. R , asal bir halka olduğundan ya $[rx, d(t)] = 0$ dır ya da S üzerinde $d = 0$ dır. Eğer $r \in S$ ve $x \in R$ için $[rx, d(S)] = 0$ olursa ve $y \in R$ olmak üzere x yerine xy alınırsa o zaman

$$0 = [rxy, d(S)] = rx[y, d(S)] + [rx, d(S)]y$$

elde edilir ve buradan $SR[y, d(S)] = (0)$ olur. R , asal bir halka ve $S \neq 0$ olduğundan $d(S) \subseteq Z(R)$ bulunur. Daha önce homomorfizma durumunda yapılan çıkarımların aynısıyla ispat bu durum için tamamlanır. Eğer $d(S) = 0$ olursa tekrar homomorfizma durumunda yapılan irdelemenin aynısıyla ispat yapılır.

Şimdi Sonuç 5.2, Sonuç 5.4 ve Önerme 5.1 de *Jordan* ideal durumunda R nin 2-burulmasızlık koşulunun kaldırılamaz olduğunu görmek için iki örnek verelim.

Örnek 5.1 $R = \mathbb{Z}_2[x, y]$ halkası ve $S = \{ f(x, y) \in R \mid f(x, y) \text{ bir simetrik polinom} \}$ olsun. Eğer $f(x, y) = f(y, x)$ koşulunu sağlarsa f simetrik polinomdur. S 'nin R 'nin bir alt halkası ve *Jordan* ideali olduğu kolayca görülür. $\theta = 1_R$ ve $\phi: R \rightarrow R$ dönüşümü her $f(x, y) \in R$ için $\phi(f(x, y)) = f(y, x)$ olarak tanımlansın. Bu durumda ϕ , R 'nin bir otomorfizmasıdır. $\mu = \phi - \theta$ dersek bu durumda $\mu \neq \phi$ olur. Ayrıca her $f(x, y), g(x, y) \in R$ için

$$\begin{aligned}
\mu(f(x,y)g(x,y)) &= (\phi - 1_R)(f(x,y)g(x,y)) \\
&= \phi(f(x,y))\phi(g(x,y)) - f(x,y)g(x,y) \\
&= f(y,x)g(y,x) - f(x,y)g(x,y) \\
&= f(x,y)g(y,x) - f(x,y)g(y,x) \\
&\quad + f(y,x)g(y,x) - f(x,y)g(x,y)
\end{aligned}$$

bulunur. $\mathbf{Z}_2$ cisim olduğundan $\mathbf{Z}_2[x,y]$ tamlık bölgesi olur ve bu durumda R halkası değişmelidir. Yukarıdaki bağıntıda R 'nin değişmeli olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mu(f(x,y)g(x,y)) &= f(x,y)\mu(g(x,y)) + g(y,x)\mu(f(x,y)) \\
&= \theta(f(x,y))\mu(g(x,y)) + \phi(g(x,y))\mu(f(x,y))
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan μ 'nin R 'nin sıfırdan farklı bir sol (θ, ϕ) -türevi olduğu görülür. Ayrıca her $f(x,y) \in S$ için

$$\begin{aligned}
\mu(f(x,y)) &= (\phi - \theta)(f(x,y)) \\
&= f(y,x) - f(x,y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\mu(S) = 0$ olur. Bu durumda μ , S üzerinde homomorfizma ve ters-homomorfizma olarak hareket eder. μ 'nin R 'nin sıfırdan farklı bir sol (θ, ϕ) -türevi olduğu görülmüştür. Her genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türev bir sol (θ, ϕ) -türev olduğundan Sonuç 5.2 de δ yerine μ alınırsa

bu durumda $\mu \neq 0$ ve $\mu \neq \phi$ olur. Ancak Sonuç 5.2 ve Sonuç 5.4 de *Jordan* ideal durumunda μ , S üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket ettiğinde ya $\mu = 0$ ya da $\mu = \phi$ olması gerektiği görülmüştü. Bu örnekte görüldüğü gibi iki burulmasızlık kaldırılamaz bir koşuldur.

Örnek 5.2 $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$ halkası ve $S = \{0, I_2\} \subseteq R$ olsun. S , R 'nin bir *Jordan* ideali ve alt halkasıdır. $\theta = 1_R$ ve $f : R \rightarrow R$ her $x \in R$ için $f(x) = xe_{11}$ ile tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in R$ ve $\mu = 0$ alındığında $f(xy) = xye_{11}$ ve $\theta(x)f(y) = xye_{11}$ olduğundan $f(xy) = \theta(x)f(y) + \phi(y)\mu(x)$ koşulu sağlanır; yani, f , R 'nin genelleştirilmiş bir sol (θ, ϕ) -türevi olur. Ayrıca her sıfırdan farklı $x, y \in S$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ olduğu kolayca görülür. Böylece f , S üzerinde homomorfizma olarak hareket eder, ancak $f \neq \theta$ ve $f \neq 0$ dır. Ancak Önerme 5.1 de *Jordan* ideal durumunda $f = 0$ veya $f = \theta$ olması gerektiği görülmüştü bu yüzden Önerme 5.1 de *Jordan* ideal durumunda R nin 2-burulmasızlık koşulu kaldırılamaz bir koşuldur.

6. ASAL VE YARI ASAL HALKALARDA HAREKET EDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde Asma Ali ve Deepak Kumar' ın "Generalized Derivations as Homomorphisms or Anti-Homomorphisms in a Prime Rings" adlı çalışması incelenecektir.

Daha önceki bölümlerde verilen türev tanımları göz önüne alındığında şimdi (θ, ϕ) -türev olan ancak türev olmayan bir örnek verelim.

Örnek 6.1 R , sıfırdan farklı merkezi bir e idempotent elemana sahip olan bir halka olmak üzere, dönüşüm her $x \in R$ için $d(x) = ex$, $\theta = 1_R$ ($d = 0$), ve $\phi(x) = (1-e)x$ olarak tanımlandığında d dönüşümü bir (θ, ϕ) -türev örneğidir ancak $d(ee) = eee \neq 2eee = d(e)e + ed(e)$ olduğundan d dönüşümü türev değildir. Herhangi bir R halkasında θ , R' nin bir endomorfizması olmak üzere $d = 1_R - \theta$ alınırsa d bir $(\theta, 1_R)$ -türevdir fakat türev değildir. Diğer bir tanım olarak d , R' nin bir (θ, ϕ) -türevi olmak üzere her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)\theta(y) + \phi(x)d(y)$ koşulunu sağlarsa o zaman F dönüşümüne R' nin bir genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türevi denir.

Genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türev tanımı $F = d$ alınması halinde (θ, ϕ) -türev kavramını, $F = d$ ve $\theta = \phi = 1_R$ alınması halinde türev kavramını ve son olarak $\theta = \phi = 1_R$ alınması halinde ise genelleştirilmiş türev kavramını içerir.

Daha önceki bölümlerde bahsi geçen (Bell ve Kappe, 1989) nin çalışmaları (Asma et al., 2003), tarafından *Lie* ideallerde incelemiştir. Ayrıca (Yenigül ve Argaç, 1994) R asal bir halka, $\alpha^2 = \alpha$ olacak şekilde α , R' nin bir dönüşümü, $\alpha(I) = I$ olacak şekilde I , R' nin sıfırdan farklı bir sağ ideali ve d , R' nin bir α -türevi olmak üzere eğer d , I üzerinde homomorfizma olarak hareket ediyorsa $d = 0$ olduğunu ve üstelik $\alpha d = d\alpha$ olmak üzere d , I üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ediyorsa $d = 0$ olduğunu göstermişlerdir.

Ayrıca (Ashraf et al., 1999), Bell ve Kappe' nin incelediği durumu asal halkaların (σ, τ) -türevlerine genişletmişlerdir.

Bu çalışmanın amacı yukarıda belirtilen çalışmaları genelleştirilmiş (θ, ϕ) -türevlerde bir R asal halkasının *Jordan* ideali üzerine taşımaktır.

Teorem 6.1 R , 2-burulmasız asal bir halka, J R ' nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve alt halkası olsun. θ , R ' nin bir otomorfizması ve d , R ' nin bir (θ, θ) -türevi olmak üzere $F : R \rightarrow R$, R ' nin d ile belirlenen bir genelleştirilmiş (θ, θ) -türevi olsun.

(i) Eğer F , J üzerinde homomorfizma olarak hareker ederse o zaman ya R üzerinde $d = 0$ ya da $J \subseteq Z(R)$ dir.

(ii) Eğer F , J üzerinde ters-homomorfizma olarak hareker ederse o zaman ya R üzerinde $d = 0$ ya da $J \subseteq Z(R)$ dir.

Teoremin ispatına başlamadan önce gerekli olan bazı yardımcı özellikleri verelim.

Yardımcı Özellik 6.1 [(Zaidi, Ashraf and Ali, 2004), Y. Özellik 2.5] R asal bir halka, J R ' nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali olsun. Eğer $a \in R$ olmak üzere $aJ = (0)$ ya da $Ja = (0)$ ise $a = 0$ dir.

Yardımcı Özellik 6.2 [(Zaidi, Ashraf and Ali, 2004), Y. Özellik 2.6] R , 2-burulmasız asal bir halka, J R ' nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali olsun. Eğer $aJb = (0)$ ise o zaman ya $a = 0$ dir ya da $b = 0$ dir.

Yardımcı Özellik 6.3 [(Zaidi, Ashraf and Ali, 2004), Y. Özellik 2.7] R , 2-burulmasız asal bir halka, J R ' nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali olsun. Eğer J değişmeli bir *Jordan* ideal ise o zaman $J \subseteq Z(R)$ dir.

Yardımcı Özellik 6.4 [(Aydın and Kaya, 1992), Y. Özellik 2] R , 2-burulmasız asal bir halka, J R 'nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve θ, ϕ R 'nin otomorfizmaları olsun. d , R 'nin bir (θ, ϕ) -türevi olmak üzere eğer $d(J) = (0)$ ise o zaman ya $d = 0$ dır ya da $J \subseteq Z(R)$ dir.

Teorem 6.1 in ispatı $J \not\subseteq Z(R)$ olduğunu kabul edelim.

(i) F , J üzerinde homomorfizma olarak hareket etsin. F , aynı zamanda bir genelleştirilmiş (θ, θ) -türev olduğundan her $u, v \in J$ için

$$F(uv) = F(u)\theta(v) + \theta(u)d(v) = F(u)F(v) \quad (6.1)$$

dir. (6.1) de v yerine vw alınarak her $u, v, w \in J$ için

$$F(u)\theta(vw) + \theta(u)d(vw) = F(u)F(vw)$$

bulunur. Buradan

$$F(u)\theta(v)\theta(w) + \theta(u)d(v)\theta(w) + \theta(u)\theta(v)d(w) = F(u)F(v)\theta(w) + F(u)\theta(v)d(w)$$

elde edilir. Bu bağıntı düzenlendiğinde

$$(F(u)\theta(v) + \theta(u)d(v))\theta(w) + \theta(u)\theta(v)d(w) = F(uv)\theta(w) + F(u)\theta(v)d(w)$$

olur. Son bağıntıda (6.1) kullanılarak her $u, v, w \in J$ için

$$(F(u) - \theta(u))\theta(v)d(w) = 0$$

elde edilir. θ , R 'nin bir otomorfizması olduğundan her $u, v, w \in J$ için

$$\theta^{-1}(F(u) - \theta(u))v\theta^{-1}(d(w)) = \theta^{-1}(0) = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Son bağıntıdan her $u, w \in J$ için

$$\theta^{-1}(F(u) - \theta(u))J\theta^{-1}(d(w)) = (0)$$

olur. Y. Özellik 6.2 yukarıdaki son bağıntıya uygulanırsa ya her $u \in J$ için $F(u) = \theta(u)$ ya da her $w \in J$ için $d(w) = 0$ elde edilir. Eğer her $w \in J$ için $d(w) = 0$ ise bu durumda Y. Özellik 6.4 den $d = 0$ sonucuna varılır. Diğer yandan eğer her $u \in J$ için $F(u) = \theta(u)$ olursa ve bu bağıntı (6.1) de kullanılırsa her $u, v \in J$ için $\theta(u)d(v) = 0$ olur. Burada u yerine uw alınarak $\theta(u)\theta(w)d(v) = 0$ bağıntısına ulaşılır. θ, R' nin bir otomorfizması olduğundan her $u, v, w \in J$ için $uw\theta^{-1}(d(v)) = 0$ olur. Bu ise her $u, v \in J$ için $uJ\theta^{-1}(d(v)) = (0)$ demektir. Y. Özellik 6.2 den J , sıfırdan farklı bir *Jordan* ideal olduğundan her $v \in J$ için $d(v) = 0$ olur. $J \not\subseteq Z(R)$ olduğundan Y. Özellik 6.4 $d = 0$ olmasını gerektirir.

(ii) F, J üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket etsin. F , aynı zamanda bir genelleştirilmiş (θ, θ) -türev olduğundan her $u, v \in J$ için

$$F(uv) = F(u)\theta(v) + \theta(u)d(v) = F(v)F(u) \quad (6.2)$$

dır. (6.2) de u yerine uv alınarak her $u, v \in J$ için

$$F(uv)\theta(v) + \theta(uv)d(v) = F(v)F(uv)$$

elde edilir. Buradan

$$F(u)\theta(v)\theta(v) + \theta(u)d(v)\theta(v) + \theta(u)\theta(v)d(v) = F(v)F(u)\theta(v) + F(v)\theta(u)d(v)$$

bulunur. Bu bağıntı düzenlenerek

$$(F(u)\theta(v) - F(v)F(u) + \theta(u)d(v))\theta(v) + \theta(u)\theta(v)d(v) = F(v)\theta(u)d(v)$$

dır. Son bağıntıda (6.2) kullanılarak her $u, v \in J$ için

$$\theta(u)\theta(v)d(v) = F(v)\theta(u)d(v) \quad (6.3)$$

elde edilir. (6.3) de u yerine wu alınarak

$$\theta(w)\theta(u)\theta(v)d(v) = F(v)\theta(w)\theta(u)d(v)$$

olur. Ayrıca (6.3) sol taraftan $\theta(w)$ ile çarpılarak

$$\theta(w)\theta(u)\theta(v)d(v) = \theta(w)F(v)\theta(u)d(v)$$

bulunur. Son iki bağıntıdan

$$F(v)\theta(w)\theta(u)d(v) = \theta(w)F(v)\theta(u)d(v)$$

elde edilir. Buradan her $u, v, w \in J$ için

$$[F(v), \theta(w)]\theta(u)d(v) = 0$$

olur. θ , R 'nin bir otomorfizması olduğundan her $u, v, w \in J$ için

$$\theta^{-1}([F(v), \theta(w)])u\theta^{-1}(d(v)) = 0$$

bulunur. Son bağıntıdan her $v, w \in J$ için

$$\theta^{-1}([F(v), \theta(w)])J\theta^{-1}(d(v)) = (0)$$

olur. Y. Özellik 6.2 den ya her $v, w \in J$ için $[F(v), \theta(w)] = 0$ ya da her $v \in J$ için $d(v) = 0$ olur. Şimdi de $A = \{v \in J \mid d(v) = 0\}$ ve $B = \{v, w \in J \mid [F(v), \theta(w)] = 0\}$ gibi J 'nin iki alt kümesini tanımlayalım. $(A, +)$ ve $(B, +)$, $(J, +)$ 'nin iki toplamsal alt grubu ve $(A, +) \cup (B, +) = (J, +)$ dir. Ayrıca bir grup iki öz alt grubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $J = A$ dir ya da $J = B$ dir. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

Eğer $J = A$ alınırsa her $v \in J$ için $d(v) = 0$ olursa Y . Özellik 6.4 den ve $J \not\subseteq Z(R)$ olduğundan $d = 0$ elde edilir. Diğer yandan eğer $J = B$ alınırsa her $v, w \in J$ için $[F(v), \theta(w)] = 0$ olur. Son bağıntıda v yerine vw alınarak $[F(vw), \theta(w)] = 0$ elde edilir. Gerekli açılımlar yapıp bu bağıntı düzenlendiğinde her $v, w \in J$ için

$$0 = [F(v)\theta(w), \theta(w)] + [\theta(v)d(w), \theta(w)]$$

$$= \theta(v)[d(w), \theta(w)] + [\theta(v), \theta(w)]d(w)$$

elde edilir. Son bağıntıda v yerine uv alınırsa

$$0 = \theta(uv)[d(w), \theta(w)] + [\theta(uv), \theta(w)]d(w)$$

olur. Elde edilen son bağıntı düzenlenip yukarıdaki bağıntılarla birlikte düşünüldüğünde her $u, w, v \in J$ için

$$[\theta(u), \theta(w)]\theta(v)d(w) = 0$$

bulunur. θ, R' nin bir otomorfizması olduğundan son bağıntı her $u, w \in J$ için

$$[u, w]J\theta^{-1}(d(w)) = (0)$$

dır. Y . Özellik 6.2 den ya her $u, w \in J$ için $[u, w] = 0$ ya da her $w \in J$ için $d(w) = 0$ dir. Şimdi de $A = \{u, w \in J \mid [u, w] = 0\}$ ve $B = \{w \in J \mid d(w) = 0\}$ gibi J 'nin iki alt kümesini tanımlayalım. $(A, +)$ ve $(B, +)$, $(J, +)$ 'nin iki toplamsal alt grubu ve $(A, +) \cup (B, +) = (J, +)$ dir. Ayrıca bir grup iki öz altgrubun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $J = A$ dir ya da $J = B$ dir. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

Eğer $J = B$ alınırsa her $w \in J$ için $d(w) = 0$ olursa Y. Özellik 6.4 den ve $J \not\subseteq Z(R)$ olduğundan $d = 0$ elde edilir. Diğer taraftan eğer $J = A$ alınırsa her $u, w \in J$ için $[u, w] = 0$ olur Y. Özellik 6.3 den $J \subseteq Z(R)$ olur ve bu bir çelişkidir.

Teorem 6.2 R , yarı asal bir halka ve θ, R' nin bir otomorfizması olsun. d, R' nin bir (θ, θ) -türevi ve $F: R \rightarrow R$, d ile belirlenen R' nin bir genelleştirilmiş (θ, θ) -türevi olmak üzere eğer F, R üzerinde homomorfizma olarak hareket ederse o zaman $d = 0$ dır.

İspat Hipotezden F, R üzerinde homomorfizma olarak hareket etsin. Bu durumda her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)F(y)$ dır. Ayrıca F, R' nin bir genelleştirilmiş (θ, θ) -türevi olduğundan $x, y \in R$ için

$$F(x)\theta(y) + \theta(x)d(y) = F(x)F(y) \quad (6.4)$$

dır. (6.4) de y yerine yz alınarak her $x, y, z \in R$ için

$$F(x)\theta(yz) + \theta(x)d(y)\theta(z) + \theta(x)d(y)d(z) = F(x)F(y)\theta(z) + F(x)\theta(y)d(z) \quad (6.5)$$

elde edilir. (6.4) sağ taraftan $\theta(z)$ çarpıldığında, her $x, y, z \in R$ için

$$F(x)\theta(y)\theta(z) + \theta(x)d(y)\theta(z) = F(x)F(y)\theta(z) \quad (6.6)$$

olur. (6.5) ve (6.6) dan her $x, y, z \in R$ olmak üzere

$$\theta(x)\theta(y)d(z) = F(x)\theta(y)d(z) \quad (6.7)$$

bulunur. (6.7) de x yerine xz alınarak her $x, y, z \in R$ için

$$\theta(x)\theta(z)\theta(y)d(z) = F(x)\theta(z)\theta(y)d(z) + \theta(x)d(z)\theta(y)d(z) \quad (6.8)$$

elde edilir. (6.7) de y yerine yz alınırsa her $x, y \in R$ için

$$\theta(x)\theta(z)\theta(y)d(z) = F(x)\theta(z)\theta(y)d(z) \quad (6.9)$$

olur. (6.8) ve (6.9) dan her $x, y, z \in R$ için $\theta(x)d(z)\theta(y)d(z) = 0$ elde edilir. Son bağıntıda y yerine yx alınarak her $x, y, z \in R$ için $\theta(x)d(z)\theta(y)\theta(x)d(z) = 0$ dır. $\theta(y) \in R$ olduğundan ve son bağıntıdan her $x, z \in R$ için $\theta(x)d(z)R\theta(x)d(z) = (0)$ bulunur. R , yarı asal bir halka olduğundan her $x, z \in R$ için $\theta(x)d(z) = 0$ dır. Son bağıntı sol taraftan $d(z)$ ile çarpılıp, R halkasının yarı asal bir halka olduğu kullanılarak her $z \in R$ için $d(z) = 0$ yani $d = 0$ sonucuna varılır.

Teorem 6.3 R , 2-burulmasız asal bir halka, J R ' nin sıfırdan farklı bir *Jordan* ideali ve alt halkası, θ ve ϕ , R ' nin otomorfizmaları ve $d : R \rightarrow R$, R ' nin bir sol (θ, ϕ) -türevi olsun.

- (i) Eğer d , J üzerinde homomorfizma olarak hareket ederse o zaman $d = 0$ dır.
- (ii) Eğer d , J üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ederse o zaman $d = 0$ dır.

İspat (i) d ' nin J üzerinde homomorfizma olarak hareket ettiğini kabul edelim. Aynı zamanda d , R ' nin bir sol (θ, ϕ) -türevi olduğundan her $u, v \in J$ için

$$d(uv) = d(u)d(v) = \theta(u)d(v) + \phi(v)d(u) \quad (6.10)$$

bağıntısı elde edilir. (6.10) da v yerine vw alınarak her $u, v, w \in J$ olmak üzere $d(u)d(v)d(w) = \theta(u)d(v)d(w) + \phi(v)\phi(w)d(u)$ olur. (6.10) sağ taraftan $d(w)$ ile çarpılırsa her $u, v, w \in J$ için $d(u)d(v)d(w) = \theta(u)d(v)d(w) + \phi(v)d(u)d(w)$ elde edilir.

Son iki bağıntı birlikte düşünüldüğünde her $u, v, w \in J$ için $\phi(v)(d(u)d(w) - \phi(w)d(u)) = 0$ bulunur. Son bağıntıda (6.10) kullanılarak $d(u)d(w) - \phi(w)d(u)$ yerine $\theta(u)d(w)$ alındığında $\phi(v)\theta(u)d(w) = 0$ elde edilir. ϕ , R' nin bir otomorfizması olduğundan her $u, v, w \in J$ olmak üzere $v\phi^{-1}(\theta(u)d(w)) = \phi^{-1}(0) = (0)$ dır.

Y. Özellik 6.2 den $\phi^{-1}(\theta(u)d(w)) = 0$ dır. Buradan her $u, w \in J$ için $\theta(u)d(w) = 0$ elde edilir. θ , R' nin bir otomorfizması olduğundan, yukarıdaki benzer işlemlerle her $w \in J$ için

$$d(w) = 0 \quad (6.11)$$

elde edilir. $r \in R$ olmak üzere J , R' nin bir *Jordan* ideali olduğundan her $w \in J$ olmak üzere $wr + rw \in J$ olduğundan (6.11) de w yerine $wr + rw$ alınarak

$$\begin{aligned} 0 &= d(wr + rw) = d(wr) + d(rw) = \theta(w)d(r) + \phi(r)d(w) + \theta(r)d(w) + \phi(w)d(r) \\ &= \theta(w)d(r) + \phi(w)d(r) \end{aligned} \quad (6.12)$$

bulunur. (6.12) de w yerine uw alınırsa her $u, w \in J$ ve $r \in R$ için $\theta(u)\theta(w)d(r) + \phi(u)\phi(w)d(r) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan (6.12) sol taraftan $\theta(u)$ ile çarpılarak her $u, w \in J$ ve $r \in R$ için $\theta(u)\theta(w)d(r) + \theta(u)\phi(w)d(r) = 0$ bağıntısına ulaşılır. Son iki bağıntıdan $(\theta(u) - \phi(u))\phi(w)d(r) = 0$ olur. ϕ , R' nin bir otomorfizması olduğundan önceki benzer işlemlerle her $u \in J$ ve $r \in R$ için $\phi^{-1}(\theta(u) - \phi(u))J\phi^{-1}(d(r)) = (0)$ elde edilir.

Y. Özellik 6.2 den ya her $r \in R$ için $d(r) = 0$ dır; yani, $d = 0$ dır ya da her $u \in J$ olmak üzere $\theta(u) = \phi(u)$ dır. Eğer her $u \in J$ için $\theta(u) = \phi(u)$ olursa ve bu bağıntı (6.12) de kullanırsa her $u \in J$ ve $r \in R$ için $2\theta(u)d(r) = 0$ olur.

Buradan R , 2-burulmasız bir halka olduğundan $\theta(u)d(r)=0$ elde edilir. θ, R' nin bir otomorfizması olduğundan, her $u \in J$ ve $r \in R$ olmak üzere $u\theta^{-1}(d(r))=0$ olur. Y. Özellik 6.1 den $d=0$ sonucuna varılır.

(ii) d' nin J üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ettiğini kabul edelim.

O zaman her $u, v \in J$ için

$$d(uv) = d(v)d(u) = \theta(u)d(v) + \phi(v)d(u) \quad (6.13)$$

bağıntısına ulaşılır. (6.13) de u yerine u^2 alınırsa her $u, v \in J$ için $d(v)d(u)d(u) = \theta(u)\theta(u)d(v) + \phi(v)d(u)d(u)$ olur. Diğer taraftan (6.13) sağ taraftan $d(u)$ ile çarpılarak $d(v)d(u)d(u) = \theta(u)d(v)d(u) + \phi(v)d(u)d(u)$ elde edilir. Son iki bağıntı birlikte düşünüldüğünde her $u, v \in J$ olmak üzere $\theta(u)(d(v)d(u) - \theta(u)d(v)) = 0$ dır. Son bağıntıda (6.13) ü kullanarak $d(v)d(u) - \theta(u)d(v)$ yerine $\phi(v)d(u)$ yazılırsa, her $u, v \in J$ için $\theta(u)\phi(v)d(u) = 0$ bulunur. ϕ, R' nin bir otomorfizması olduğundan her $u \in J$ için $\phi^{-1}(\theta(u))J\phi^{-1}(d(u)) = (0)$ elde edilir. Y. Özellik 6.2 den her $u \in J$ için ya $\theta(u) = 0$ dır ya da $d(u) = 0$ dır. Daha önceki bölümlerde yapılan benzer tekniklerle, eğer her $u \in J$ için $\theta(u) = 0$ olursa θ, R' nin bir otomorfizması olduğundan $u = 0$ olur ve J idealinin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Diğer taraftan eğer her $u \in J$ için $d(u) = 0$ olması halinde (i) nin ispatında yapılan benzer tekniklerle R üzerinde $d = 0$ bulunur.

7. SONUÇ

Üçüncü bölümde asal halkaların sıfırdan farklı iki yanlı idealleri üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eden genelleştirilmiş türev dönüşümleri incelenmiş ve bu incelemenin sonucunda halkanın ve türevin yapısı hakkında önemli sonuçlara varılmıştır. Ayrıca bu sonuç halkanın sıfırdan farklı bir *Lie* idealine de genişletilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş *Jordan* sol (α, β) -türevlerin halkanın bir *Lie* ideali üzerindeki hareketi ele alınmış ve ayrıca her *Jordan* sol (α, β) -türevin bazı ek koşullar altında bir genelleştirilmiş sol (α, β) -türev olduğu görülmüştür. İkinci olarak, bir genelleştirilmiş sol (α, β) -türevin asal halkanın bir sıfırdan farklı ideali üzerindeki homomorfizma veya ters-homomorfizma hareketi incelenip, bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

Beşinci bölümde, ilk olarak asal bir halkanın sıfırdan farklı bir alt halkası üzerinde hareket eden genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevler incelenmiş daha sonra bu hareket asal halkanın ideal ve *Jordan* ideallerine genişletilmiş olup genelleştirilmiş sol (θ, ϕ) -türevlerle ilgili çeşitli sonuçlara ulaşılmıştır.

Altıncı bölümde, (θ, ϕ) -türev ve sol (θ, ϕ) -türevler incelenmiş ve bu türevlerin asal ve yarı asal halkaların *Jordan* ideal ve alt halkası üzerinde (ters-)homomorfizma olarak hareket ettiği durumlarda bazı önemli sonuçlara varıldığı görülmüştür.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ali, S.**, 2011, On generalized left derivations in rings and Banach algebras, Aequat. Math., 81:209-226pp.
- Ali, A. and Kumar, D.**, 2009, Generalized derivations as homomorphisms or as anti-homomorphisms in a prime ring, Hacet. J. Math. Stat., 38(1):17-20pp.
- Ali, A., Rehman, N. and Ali, S.**, 2003, On Lie ideals with derivations as homomorphisms and anti-homomorphisms, Acta Math. Hungar., 101:79-82pp.
- Ashraf, M.**, 2005, On left (θ, ϕ) -derivations of prime rings, Arch. Math. (Bruno), 41:157-166pp.
- Ashraf, M., Ali, A. and Ali, S.**, 2004, On Lie ideals and generalized (θ, ϕ) -derivations in prime rings, Comm. Algebra, 32:2977-2985pp.
- Ashraf, M., Ali, S. and Mozumder, M. R.**, 2012, On Generalized Left (α, β) -Derivations in Rings, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 38(4):893-905pp.
- Ashraf, M. and Ali, S.**, 2008, On generalized Jordan left derivations in rings, Bull. Korean Math. Soc., 45:253-261pp.
- Ashraf, M., Rehman, N. and Quadri, M. A.**, 1999, On (σ, τ) -derivations in certain classes of rings, Rad. Math., 45:253-261pp.
- Ashraf, M. and Rehman, N.**, 2000, On Lie ideals and Jordan left derivations of prime rings, Arch. Math. (Bruno), 36(3):201-206pp.
- Awtar, R.**, 1984, Lie structure in prime rings with derivations, Publ. Math. Debrecen, 31:209-215pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

- Aydin, N. and Kaya, K.**, 1992, Some generalization in prime rings with (σ, τ) -derivations, Doga Tr. J. Math., 16:169-176pp.
- Beidar, K. I., Martindale III, W. S. and Mikhalev, V.**, 1996, Rings with Generalized Identities, Pure Appl. Math., Dekker, New York, 419s.
- Bell, H. E. and Kappe, L. C.**, 1989, Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions, Acta Math. Hungar., 53:339-346pp.
- Bergen, J., Herstein, I. N. and Kerr, J. W.**, 1981, Lie ideals and derivations of prime rings, Journal. Algebra, 71(1):259-267pp.
- Bresar, M.**, 1991, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, Glasgow Math. J., 33:89-93pp.
- Bresar, M. and Vukman, J.**, 1990, On left derivations and related mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 110:7-16pp.
- Chang, J. and Lin, J. S.**, 1994, (α, β) -derivation with nilpotent values, Chin. J. Math., 22:349-355pp.
- Cheng, H. W. and Wei, F.**, 2006, Generalized skew derivations of rings, Adv. Math. (China), 35:237-243pp.
- De Filippis, V.**, 2000, On the Annihilator of Commutators with Derivation in Prime Rings, Rend. Circ. Mat. Palermo, 49(2):343-352pp.
- Giambruno, A. and Herstein, I. N.**, 1981, Derivations with Nilpotent Values, Rend Circ. Math. Palermo 30:199-206pp.
- Gusic, I.**, 2005, A Note on Generalized Derivations of Prime Rings, Glasnik Matematicki, 40(60):47-49pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

- Herstein, I. N.**, 1969, Topics in ring theory, Univ. Chicago Press.
- Herstein, I. N.**, 1957, Jordan Derivations on Prime Rings, Proc. Amer., 8:1104-1110pp.
- Herstein, I. N.**, 1979, A Note on Derivations II, Canad. Math. Bull., 22(4):509-511pp.
- Hungerford, T. W.**, 1974, Algebra, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 502pp.
- Hvala, B.**, 1998, Generalized derivations in rings, Comm. Algebra, 26:1147-1166pp.
- Lam, T. Y.**, 2001, A First Course in Noncommutative Rings, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 385s.
- Lee, P. H. and Lee, T. K.**, 1981, On Derivations of Prime Rings, Chinese J. Math., 9:107-110pp.
- Lee, T. K.**, 1999, Generalized derivations of the left faithful rings, Comm. Algebra, 27:4057-4073pp.
- Mayne, J. H.**, 1984, Centralizing mappings of prime rings, Canad. Math. Bull., 27:122-126pp.
- Posner, E. C.**, 1957, Derivations in Prime Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8:1093-1100pp.
- Rehman, N.**, 2004, On Generalized Derivations as Homomorphisms and Anti-Homomorphisms, Glasnik Matematicki, 39(59):27-30pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

- Yenigül, M. and Argac, N.,** 1994, On prime and semiprime rings with α -derivations, Turk. J. Math., 18:280-284pp.
- Xu, Xiao-Wei and Zhang, H.,** 2011, A Note On Generalized Left (θ, ϕ) -Derivations in Prime Rings, Hacet. J. Math. Stat., 40(4):523-529pp.
- Zaidi, S. M. A., Ashraf, M., and Ali, S.,** 2004, On Jordan ideals and left (θ, θ) -derivations in prime rings, Int. J. Math. and Math. Sci., 37:1957-1964pp.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Tekirdağ’ da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Çorlu’ da Özel Trakya Koleji’ nde, lise öğrenimini Çorlu Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lise’ sinde tamamladı. 2008 yılında girdiği Ege Üniversitesi Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Öğretim Programından 2013 yılında mezun oldu. 2013 yılından itibaren Ege Üniversitesi’nde yüksek lisans yapmaktadır.