



ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA
İNVARİYANT YAKINSAKLIK

DOKTORA TEZİ

Büşra SÖYLEMEZ

Danışman

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞUBAT 2024

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA
İNVARİYANT YAKINSAKLIK

Büşra SÖYLEMEZ

Danışman
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2024

TEZ ONAY SAYFASI

Büşra SÖYLEMEZ tarafından hazırlanan “Asimetrik Metrik Uzaylarda İnvaryant Yakınsaklık” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 12/02/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Başkan : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Ed. Fak.

Üye : Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Necmettin Erbakan Üniv., Ereğli Eđt. Fak.

Üye : Prof. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniv., Cumhuriyet Sos. Bil. M.Y.O.

Üye : Doç Dr. Nimet AKIN
Afyon Kocatepe Üniv., Eđt. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tamamını kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

12/02/2024

...

Büşra SÖYLEMEZ

ÖZET

Doktora Tezi

ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA İNVARİYANT YAKINSAKLIK

Büşra SÖYLEMEZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, çalışmada ele alınan konunun tarihi gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, asimetric metrik uzaylar ayrıntılı bir şekilde analiz edilmiştir. Dördüncü bölümde, asimetric metrik uzaylarda invaryant yakınsaklık, invaryant istatistiksel yakınsaklık, invaryant Cauchy dizisi, invaryant istatistiksel Cauchy dizisi kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca invaryant süreklilik ve invaryant kompaktlık kavramları asimetric metrik uzaylarda tanımlanarak bazı teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Beşinci bölümde, asimetric metrik uzaylarda kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Altıncı bölümde ise asimetric metrik uzaylarda $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık, $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaklık, $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy ve $\mathcal{I}_\sigma$ - kompaktlık kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri veren bazı teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir.

2024, v + 59 sayfa

Anahtar Kelimeler : Asimetric metrik uzay, istatistiksel yakınsaklık, invaryant yakınsaklık, lacunary dizisi, $\mathcal{I}$ -yakınsaklık, $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

INVARIANT CONVERGENCE IN ASYMMETRIC METRIC SPACES

Büşra SÖYLEMEZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Fatih NURAY

This thesis study consists of six chapters:

In the first chapter, the historical development of the subject discussed. In the second chapter, some basic concepts are given that will be used in other sections. In the third chapter, asymmetric metric spaces have been analyzed in detail. In the fourth chapter, the concepts of invariant convergence, statistical invariant convergence, invariant Cauchy sequence, invariant statistical Cauchy sequence have been defined in asymmetric metric spaces and the relations between the concepts have been given. In addition, some theorems and results have been obtained by defining the concepts of invariant continuity and invariant compactness in asymmetric metric spaces. In the fifth chapter, the concepts of strong lacunary invariant convergence and lacunary invariant statistical convergence in asymmetric metric spaces are defined and the relations between the concepts are examined. In the sixth chapter, the concepts of $\mathcal{I}_\sigma$ -convergence, $\mathcal{I}_\sigma^*$ -convergence, $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy and $\mathcal{I}_\sigma$ -compactness in asymmetric metric spaces have been defined and some results have been given.

2024, v + 59 pages

Keywords : Asymmetric metric space, statistical convergence, invariant convergence, lacunary sequence, $\mathcal{I}$ -convergence, $\mathcal{I}_\sigma$ -convergence.

TEŞEKKÜR

Matematik; ayrıntılara odaklanıldıkça oradaki inceliklerin daha çok görüldüğü, her bir ayrıntının bütündeki yeri ve öneminin daha çok fark edildiği bir bilim dalıdır. Matematik öğrenme yolculuğunda, ayrıntılardaki incelikleri keşfederken yılmadan zor da olsa bir hedefe ulaşmanın verdiği özel bir hissiyat vardır. Bu hissiyatı, matematik yolculuğum boyunca bizzat yaşadım.

Öncelikli olarak süreç boyunca bana destek veren, tez konumun belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi, tezimin yazım aşamasındaengin bilgi ve tecrübesi ile karşılaştığım her türlü zorluğu aşmamda bana yardımcı olan danışmanım saygıdeğer Prof. Dr. Fatih NURAY hocama teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora eğitimimde ve tezimin yazımında vermiş oldukları desteklerinden ötürü hocalarım, Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR'a, Doç. Dr. Nimet AKIN'a ve arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Gülistan İSKENDEROĞLU'na teşekkür ederim. Ayrıca, her daim bilgi, tecrübe ve yol göstericiliğiyle motivasyonumu yüksek tutan dostum Dr. Öğr. Üyesi Elif NURAY YILDIRIM'a teşekkür ederim.

Bugüne kadar her konuda yanımda olan kıymetli aileme teşekkür ederim. Matematik yolculuğumun doktora durağında, içimdeki iştıyakı görüp beni destekleyen, yoğun çalışma sürecim boyunca göstermiş olduğu sabırla yüküme omuz veren hayat arkadaşım Atilla SÖYLEMEZ'e teşekkür ederim.

Bu çalışmayı, dünyaya geldiği ilk günden beri minicik bedeniyle bana şahitlik eden biricik evladım Yusuf'a ithaf ediyorum.

Büşra SÖYLEMEZ
Afyonkarahisar, 2024

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	6
3 ASİMETRİK METRİK UZAYLAR	14
4 ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA İNVARYANT YAKINSAKLIK VE İNVARYANT KOMPAKTLIK	23
5 ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA LACUNARY İNVARYANT YAKINSAKLIK	34
6 ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA $\mathcal{I}_\sigma$ - YAKINSAKLIK	42
7 KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
(x_k)	Reel sayı dizisi
$ A $	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(A)$	A kümesinin doğal yoğunluğu
fl_∞	İleri sınırlı dizilerin uzayı
$V(K)$	K kümesinin σ - düzgün yoğunluğu
$\theta = (k_r)$	Lacunary dizisi
$2^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$ nin kuvvet kümesi
$\mathcal{I}$	İdeal
$\mathcal{F}$	Filtre
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	İdeal ile ilişkili süzgeç

Kısaltmalar

$x_k \rightarrow x$	(x_k) dizisi x ye yakınsak
$st - \lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
$\mathcal{I} - \lim x_k$	(x_k) dizisinin $\mathcal{I}$ -limiti
$\mathcal{I}_\sigma - \lim x_k$	(x_k) dizisinin $\mathcal{I}_\sigma$ -limiti
$B^+(x, \varepsilon)$	x -merkezli ε -yarıçaplı ileri açık yuvar
$x_k \xrightarrow{f} x$	(x_k) dizisi x e ileri yakınsak
$x_k \xrightarrow{b} x$	(x_k) dizisi x e geri yakınsak
$x_k \xrightarrow{fV_\sigma} x$	(x_k) dizisi x e ileri invaryant yakınsak
$x_k \xrightarrow{fS_\sigma} x$	(x_k) dizisi x e ileri invaryant istatistiksel yakınsak
$x_k \xrightarrow{fL_\theta} x$	(x_k) dizisi x e ileri kuvvetli lacunary invaryant yakınsak
$x_k \xrightarrow{fS_{\sigma\theta}} x$	(x_k) dizisi x e ileri lacunary invaryant istatistiksel yakınsak
$x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x$	(x_k) dizisi x e ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak
$x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma^*} x$	(x_k) dizisi x e ileri $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsak

1. GİRİŞ

Yakınsaklık, süreklilik ve metrik kavramları, analiz ve fonksiyonel analiz alanlarının temelini oluşturmaktadır. Toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise klasik yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesidir ve bu kavram pozitif tam sayıların doğal yoğunluğu kavramını temel almıştır. İstatistiksel yakınsaklık fikri 1935 yılında A. Zygmund'a dayanmaktadır fakat ilk kez 1951 yılında birbirlerinden bağımsız olarak Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından tanımlanmıştır. Schoenberg (1959), istatistiksel yakınsaklık kavramının bazı temel özelliklerini bir toplanabilme metodu olarak çalışmıştır. Yetmiş yıldan fazla zamandır istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili uygulamalar ve farklı genelleştirmeler Buck (1953), Maddox (1978), Šalát (1980), Fridy (1985; 1993), Fridy ve Orhan (1993), Nuray ve Ruckle (2000), Mursaleen ve Edely (2003), Nuray ve Rhoades (2012), Nuray (2020; 2022) ve daha bir çok matematikçi tarafından verilmiştir. Günümüzde halen istatistiksel yakınsaklık kavramı üzerine çalışmalar devam etmektedir.

Cesàro toplanabilme, toplanabilme teorisinin temel metotlarındandır. Connor 1988 yılında yaptığı çalışmada, istatistiksel yakınsaklık ile Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli Cesàro toplanabilirlik ve kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Freedman vd. (1978), θ lacunary dizisi kavramını kullanarak N_θ kuvvetli lacunary toplanabilir dizi uzayları ile kuvvetli Cesàro toplanabilir dizi uzayları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Savaş (1990), kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık kavramını tanımlamış ve invaryant yakınsaklıkla arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizisi kavramını kullanarak lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Çalışmalarında, lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının istatistiksel yakınsaklık ve diğer toplanabilme metodları ile ilişkilerini araştırmıştır. Savaş ve Nuray (1993) invaryant istatistiksel yakınsaklık ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımladıkları bir çalışma yapmıştır. Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının bir benzeri ise Mursaleen ve Alotaibi (2011)

tarafından verilmiştir. Bu kavramlarla ilgili Savaş (1990), Karakaya (2004), Ulusu ve Nuray (2020) ve daha pek çok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmıştır.

İnvaryant yakınsaklık kavramının temelleri 1932 yılında Banach tarafından atılmıştır. l_∞ , $\|x\| = \sup_k |x_k|$ alışılmış normu ile birlikte Banach uzaylarında sınırlı reel veya kompleks dizileri gösterebilir. Banach, shift (öteleme) operatörleri altında değişmez kalan l_∞ dizi uzayları üzerinde tanımlanan bazı negatif olmayan lineer fonksiyonelleri tanımlamıştır. Bu genişletilmiş fonksiyoneller Banach limitleri olarak bilinir. Daha sonra 1948 yılında Lorentz, hemen hemen yakınsaklık olarak bilinen yakınsaklık kavramını farklı şekilde formüle etmiştir. Banach limit ve daha genel haliyle invaryant yakınsaklık, limit kavramının sınırlı dizi uzaylarına genelleştirmesidir. İnvaryant limitler ise Raimi (1959) tarafından incelenmiştir. Maddox (1978) ve Freedman vd. (1978) kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Nanda (2004), Banach uzaylarında hemen hemen sürekliliği ve hemen hemen kompaktlığı incelediği bir çalışma yayınlamıştır. İnvaryant yakınsaklık kavramı üzerine; Bell (1929), Raimi (1963), Schafer (1972), Miller (1973), Mursaleen (1979, 1983), Savaş (1989), Nuray ve Savaş (1994), Ahmad vd. (1994), Boss ve Seydel (1999), Savaş ve Rhoades (2002), Mursaleen ve Edely (2009), Aiyub ve Khan (2010), Pancaroğlu ve Nuray (2013) ve daha birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır.

Doğal yoğunluğu sıfır olan pozitif tamsayı kümeler ailesinin bir ideal oluşturmasından yola çıkarak ideal yakınsaklık ($\mathcal{I}$ -yakınsaklık) kavramı ilk kez Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanmıştır. Yaptıkları çalışmada klasik metrik uzaydaki diziler için $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. $\mathcal{I}$ -yakınsaklık istatistiksel yakınsaklıktan daha genel bir yakınsaklıktır. Bir çok matematikçi bu konu üzerinde çalışmıştır ve halen üzerinde çalışılmaya devam etmektedir. Örneğin, Holá vd. (1988) $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını, Das ve Ghosal (2010) $\mathcal{I}$ -Cauchy kavramını, Das vd. (2011) idealleri kullanarak toplanabilme metodu çalışmıştır. Nuray vd. (2011) ise $\mathcal{I}$ invaryant ($\mathcal{I}_\sigma$) yakınsaklığı tanımlamıştır. Ulusu ve Nuray (2020) lacunary $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklığı tanımlamıştır.

Asimetrik metrik uzayları, ilk defa ‘quasi-metrik uzaylar’ adıyla 1931 yılında Wilson

tanımlamıştır. Aynı yıl Niemytzki (1931) de asimetrik metrik uzaylarla bağlantılı olarak çalışmıştır. Ribeiro (1943), asimetrik metrik uzayları zayıf metrikli uzaylar olarak adlandırmıştır. Wilson'dan yaklaşık on yıl sonra Albert (1941) quasi-metrikler üzerinde çalışmıştır. Stoltenberg (1969) de bu uzaylar üzerinde çalışma yayınlamıştır. Birbirlerinden bağımsız olarak Kelly (1963) ve Patty (1967) ise asimetrik metrik uzayların topolojik yapısından ötürü bu uzayları, 'Bitopolojik Uzaylar' başlığıyla incelemiştir. Tamlık ve kompaktlık kavramları, bitopolojik yapıdan dolayı değiştiği için asimetrik metrik uzaylardaki bu kavramları Bodjanova (1981) ile Reilly ve Vamanamurthy (1984) çalışmışlar ve metrik uzaylardan farklı sonuçlara ulaşmışlardır. 'Quasi-pseudo metrik uzaylar' adı altında Reilly vd. (1982) ile Künzi (1983) asimetrik metrik uzaylar üzerinde ayrıntılı bir şekilde çalışmışlardır. İlerleyen yıllarda Künzi (1992) quasi-pseudo metrik uzaylarda kompaktlık ve tamlık üzerine çalışmıştır. Mennuci (2004), bu uzaylar üzerinde 'Asimetrik Uzaklıklar Üzerine' başlığıyla kapsamlı bir araştırma yayınlamıştır.

Asimetrik metrik uzaylarda simetri özelliği yoktur. Bu durum, metrik uzaylarla arasındaki farkı oluşturmaktadır. Bu nedenle yakınsaklık, süreklilik, kompaktlık ve tamlık gibi kavramlar metrik uzaylardan farklı olarak yeniden tanımlanmalıdır. Ayrıca ilgili bazı teoremlerin metrik uzaylardan farklı ifade edilmesi, fonksiyonel analizin bunlarla ilgili teoremlerinin asimetrik metrik uzaylarda nasıl ispatlanacağı sorusunu ortaya çıkarmıştır. Asimetrik metrik uzayların analizi oldukça doğal görünse de simetri özelliğinin yokluğu teorilerde boşluk bırakmaktadır. Bu nedenle bir çok soru açık problem olarak beklemektedir.

Son zamanlarda da asimetrik metrik uzaylar üzerine bir çok çalışma yapılmış ve yapılmaya da devam etmektedir. Örneğin; Collins ve Zimmer (2007) yakınsaklık, tamlık, kompaktlık ve Arzela Ascoli teoremini bu uzaylarda çalışmıştır. Bhunia ve Das (2011), asimetrik metrik uzaylarda çift indisli diziler üzerine çalışmıştır. Aminpour vd. (2012), asimetrik metrik uzaylarda bazı sonuçlar elde etmiştir. Taslim (2012), asimetrik metrik uzaylarda yoğunluk kavramını tanımlamıştır. Cobzaş (2013), asimetrik normlu uzayları anlattığı eserinde, asimetrik metrik uzaylar ve asimetrik normlu uzaylarla ilgili elde ettiği bulguları yayınlamıştır. Ayrıca Das vd. (2013), bu

uzaylarda reel sayı dizilerini temel alan ideal yakınsaklık ($\mathcal{I}$ -yakınsaklık) kavramını çalışmıştır. Asimetrik metrik uzaylarda, Toyganözü ve Pehlivan (2015) exhaustiveness kavramı üzerine, İlkhan ve Kara (2019) istatistiksel yakınsaklık üzerine, Yaying vd. (2020) ise süreklilik üzerine çalışmıştır.

Asimetrik metrik uzayların, matematik biliminin yanında malzeme bilimi, biyoloji gibi farklı alanlarda uygulamaları bulunabilir. Bu konuda, Hamilton - Jacobi denklemlerinin varlık ve teklik problemi ile ilgili araştırmalar mevcuttur (Mennuci 2004). Waterman vd. (1976) biyolojik kökenler üzerinde asimetrik metrik uzayları çalışmıştır. Domiaty (1979), "uzay-zaman sürekliliği" adı altında asimetrik metrik uzaylar üzerine çalışmıştır. Malzeme biliminde, (Mielke ve Roubicek 2003), plastikler için modellemede (Mainik ve Mielke 2005), malzeme hataları için modellemede (Rieger ve Zimmer 2005) ve gradiyent akış modellerinde (Chenchiah vd. 2009) asimetrik metrik uzayların uygulamaları bulunmaktadır.

Özellikle son yıllarda bir çok matematikçi tarafından çalışılan invaryant yakınsaklık tiplerini asimetrik metrik uzayda tanımlamak ve bazı özelliklerini incelemek bundan sonra yapılacak çalışmalar için bir kaynak niteliği oluşturacaktır. Bu çalışmadaki temel amacımız metrik uzaylarda tanımlanmış olan invaryant yakınsaklık, invaryant istatistiksel yakınsaklık, lacunary invaryant yakınsaklık, lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık kavramlarını asimetrik metrik uzaylara genelleştirmektir. Bu bağlamda metrik uzaylarda daha önceden verilmiş olan yakınsaklık tanımlarını, bunların kendilerine has özelliklerini ve bu özelliklere bağlı olarak aralarındaki ilişkiler yeniden ele alınıp asimetrik metrik uzaylar için verilen yakınsaklık kavramları yeniden tanımlanmıştır. Ayrıca bu kavramlar ve yeni tanımlar arasındaki ilişkileri göstermek amaçlanmıştır.

Bu sebeplerden ötürü tez çalışmasında;

'Temel Kavramlar' adlı ikinci bölümde, 'istatistiksel yakınsaklık' tanımının doğmasına sebep olan yoğunluk kavramı, istatistiksel yakınsaklık, dizi uzayları ve toplanabilme alanında önemli olan ve çalışmanın daha açık ve anlaşılır kılınması için gereken bazı temel kavramların tanımları verildi.

Üçüncü bölümde, asimetric metrik uzaylar ayrıntılı bir şekilde analiz edildi. Collins ve Zimmer (2007) ve Das vd. (2013) e ait çalışmalarda asimetric metrik uzaylarla ilgili elde edilen bazı önemli teoremler ve sonuçlar verildi.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen teoremler ve sonuçlara göre, asimetric metrik uzaylarda invaryant yakınsaklık, invaryant istatistiksel yakınsaklık, invaryant Cauchy dizisi, invaryant süreklilik ve invaryant kompaktlık kavramları tanımlandı ve kavramların birbirleriyle ilişkisini veren bazı teoremler ve sonuçlar elde edildi.

Beşinci bölümde, asimetric metrik uzaylarda kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlandı. Savaş ve Nuray (1993) ın çalışması da incelenerek asimetric metrik uzaylarda verilen bu tanımların aralarındaki ilişkiyi veren bazı sonuçlar elde edildi.

Altıncı bölümde ise daha önceden Nuray vd. (2011) nin yaptıkları çalışmadaki düzgün σ -invaryant yoğunluk kavramından yola çıkarak asimetric metrik uzaylarda $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık ve $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaklık tanımlandı. $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık ile $\mathcal{I}$ -yakınsaklık arasındaki ilişkiyi veren teorem elde edildi. Ayrıca asimetric metrik uzaylarda $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy ve $\mathcal{I}_\sigma$ -kompaktlık kavramları tanımlanarak bazı teoremler ve sonuçlar elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümler için önemli olan ve çalışma boyunca kullanacağımız bazı tanımlar verilecek.

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme ve $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $u, v, z \in X$ için

$$\text{M1)} \quad p(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v,$$

$$\text{M2)} \quad p(u, v) = p(v, u),$$

$$\text{M3)} \quad p(u, v) < p(u, z) + p(z, v).$$

şartları sağlanırsa, p fonksiyonuna, X üzerinde *metrik fonksiyonu*, (X, p) ye ise *metrik uzay* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.2 $A, \mathbb{N}$ nin bir alt kümesi ve

$$A_n = \{k \leq n : k \in A\}$$

olsun. $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısı ($\text{card}A$), $|A|$ ile gösterilsin. Buna göre, A kümesinin alt yoğunluğu ve üst yoğunluğu

$$\underline{\delta}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{|A_n|}{n} \quad \bar{\delta}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|A_n|}{n}$$

dır. Bu limitlerin var olması durumunda yani,

$$\underline{\delta}(A) = \bar{\delta}(A)$$

eşitliğinin sağlanması halinde, bu limite $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin *doğal yoğunluğu* denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir. Yani,

$$\underline{\delta}(A) = \bar{\delta}(A) = \delta(A)$$

ise $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : k \in A\} \right|$$

biçiminde tanımlanır (Niven vd. 1991).

Aşağıda doğal yoğunluk ile alakalı bazı özellikler ve örnekler verilmiştir:

- i. $A \subset \mathbb{N}$ sonlu olsun. Bu durumda $\delta(A) = 0$ dır.
- ii. $A = \mathbb{N}$ ise $\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$ dir.
- iii. $A \subseteq B$ ise $\delta(A) \leq \delta(B)$ dir.
- iv. $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$ dır.
- v. $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ise $\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$ dir.
- vi. $A = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ ise $\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ dır.

Tanım 2.3 (x_k) reel terimli bir dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise, (x_k) dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x_k = L$ biçiminde gösterilir (Fast 1951).

Sonlu elemanlı kümelerin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, fakat tam tersi durum her zaman geçerli olmayabilir. Buna örnek aşağıda verilmiştir:

Genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olan (x_k) dizisine bakılırsa; her $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(A_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_\varepsilon|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

olduğu için $st - \lim x_k = 0$ dır. Fakat bu dizi iraksaktır.

Tanım 2.4 (x_k) reel terimli bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - x_N| > \varepsilon\}\right) = 0$$

sağlayan bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, (x_k) dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir (Fridy 1985).

Tanım 2.5 (x_k) reel terimli bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L ye *Cesáro toplanabilirdir* denir (Cesáro 1890).

Tanım 2.6 (x_k) reel terimli bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına *kuvvetli Cesáro toplanabilirdir* denir (Freedman vd. 1978).

Tanım 2.7 (x_k) reel terimli bir dizi olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{k+m} = L$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L ye *hemen hemen yakınsaktır* denir (Lorentz 1948).

Tanım 2.8 (x_k) reel terimli bir dizi olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_{k+m} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *hemen hemen istatistiksel yakınsaktır* denir (Savaş ve Nuray 1993).

Tanım 2.9 $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dönüşümü her j, m pozitif tam sayıları için $\sigma^j(m) \neq m$ olacak şekilde bir birebir dönüşüm olsun. Sürekli bir $\phi : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneline aşağıdaki özellikleri sağlaması halinde *invariant limit* veya σ - *limit* denir.

i) $n = 1, 2, 3, \dots$ için $(x_n) \geq 0 \Rightarrow \phi(x) \geq 0$

ii) $\phi(e) = 1, e = (1, 1, \dots)$

iii) Her $x \in l_\infty$ için $\phi(x_{\sigma(m)}) = \phi(x)$ (Schaefer 1972).

Özel olarak $\sigma(m) = m + 1$ olursa ϕ bir Banach limiti adını alır.

Tanım 2.10 İnvaryant limitleri eşit olan sınırlı diziye *invaryant yakınsak* veya σ - *yakınsak* dizi denir. σ - *yakınsak* dizilerin kümesi V_σ ile gösterilir (Schaefer 1972).

Tanım 2.11 (x_k) reel terimli bir dizi olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{\sigma^j(m)} = L$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *invaryant yakınsaktır* denir (Schaefer 1972). İnvaryant yakınsak dizilerin uzayı;

$$V_\sigma = \{(x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{\sigma^j(m)} = L, m \text{ ye göre düzgün olarak}\}$$

şeklinde gösterilir (Savaş 1990).

Tanım 2.12 (x_k) reel terimli bir dizi olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_{\sigma^j(m)} - L| = 0$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *kuvvetli invaryant yakınsaktır* denir. Kuvvetli invaryant yakınsak dizilerin uzayı;

$$[V_\sigma] = \{(x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_{\sigma^j(m)} - L| = 0, m \text{ ye göre düzgün olarak}\}$$

şeklinde gösterilir (Mursaleen 1983).

Tanım 2.13 (x_k) kompleks sayı dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{j \leq n : |x_{\sigma^j(m)} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *invariant istatistiksel yakınsaktır* denir. İnvaryant istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı;

$$S_\sigma = \{(x_k) : S_\sigma - \lim x_k = L\}$$

şeklinde gösterilir (Savaş ve Nuray 1993).

Tanım 2.14 A pozitif tam sayıların bir kümesi olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{j \leq n : A \cap \{\sigma(m), \sigma^2(m), \dots, \sigma^j(m)\}\}| = 0$$

ifadesini sağlıyorsa A kümesi *düzgün invariant sıfır yoğunluğa sahiptir* denir (Nuray ve Savaş 1994).

Tanım 2.15 $\theta = (k_r)$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \rightarrow \infty$ iken

$$h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$$

sağlayacak şekilde negatif olmayan tam sayıların bir artan dizisi ise $\theta = (k_r)$ dizisine *lacunary dizisi* denir. Burada $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ dir (Freedman vd. 1978).

Tanım 2.16 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve (x_k) reel terimli bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} x_k = L$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *lacunary toplanabilirdir* denir (Mursaleen ve Alotaibi 2011).

Tanım 2.17 (x_k) reel terimli bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} |x_k - L| = 0$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *kuvvetli lacunary toplanabilirdir* denir. Bu uzaylar;

$$N_\theta = \{x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0\}$$

şeklinde gösterilir (Freedman vd. 1978).

Tanım 2.18 (x_k) reel terimli bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir (Fridy ve Orhan 1993).

Tanım 2.19 (x_k) reel terimli bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} x_{\sigma^k(m)} = L$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *lacunary invaryant yakınsaktır* denir (Savaş 1990).

Tanım 2.20 (x_k) reel terimli bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} |x_{\sigma^k(m)} - L| = 0$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır* denir. Kuvvetli lacunary invaryant yakınsak dizilerin uzayı;

$$L_\theta = \{(x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_{\sigma^k(m)} - L| = 0, m \text{ ye göre düzgün olarak}\}$$

şeklinde gösterilir (Savaş 1990).

Tanım 2.21 (x_k) reel terimli bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer, $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesini sağlayan bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L ye *lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır* denir. Lacunary invaryant istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı;

$$S_{\sigma\theta} = \{(x_k) : S_{\sigma\theta} - \lim x = L\}$$

şeklinde gösterilir (Savaş ve Nuray 1993).

Şimdi, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin altkümeleri ele alınarak ideal ve filtre kavramlarının tanımını verilecek.

Tanım 2.22 Bir $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesinin $\mathbb{N}$ de bir *ideal* olması için ancak ve ancak

- i. $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- ii. Her $U, V \in \mathcal{I}$ için $U \cup V \in \mathcal{I}$,
- iii. Her $U \in \mathcal{I}$ ve $V \subset U$ için $V \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko vd. 2000).

$\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ oluyorsa $\mathcal{I}$ bir *gerçek ideal* olarak adlandırılır. Eğer, $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $\mathcal{I}$ ideali *uygun ideal* olarak adlandırılır (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.23 Bir $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesinin $\mathbb{N}$ de bir *filtre* olması için ancak ve ancak

- i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- ii. Her $U, V \in \mathcal{F}$ için $U \cap V \in \mathcal{F}$,
- iii. Her $U \in \mathcal{F}$ ve $V \subset U$ için $V \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlamasıdır (Nagata 1974).

$\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ nin bir gerçek ideali olursa

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{K \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus K \in \mathcal{I}\}$$

ailesi $\mathbb{N}$ de bir süzgeçtir denir. Bu $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya $\mathcal{I}$ ile ilişkilendirilmiş *süzgeç* denir (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.24 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal, (x_k) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa, (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}$ -yakınsaktır denir ve $\mathcal{I} - \lim x_k = L$ biçiminde gösterilir (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.25 Eğer,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(L, x_{m_k}) = 0$$

ifadesini sağlayacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1} < \dots\} \in F(\mathcal{I})$ kümesi varsa (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_\sigma^* - \lim x_k = L$ şeklinde gösterilir (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.26 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}$ idealine ait karşılıklı ayrık her $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ kümeleri için, $A_i \triangle B_i$ ($i \in \mathbb{N}$) sonlu küme ve $B = (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ kümeler ailesi varsa $\mathcal{I}$ *ideali (AP) özelliğine sahiptir* denir (Kostyrko vd. 2000).

3. ASİMETRİK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde asimetrik metrik uzaylar ayrıntılı bir şekilde ele alınacak. Buna göre bu uzaylarda; sınırlılık, yakınsaklık, Cauchy dizisi, süreklilik, kompaktlık ve tamlık kavramları ile bazı önemli teorem ve sonuçları verilecek.

Bazen quasi-metrik uzaylar da denilen asimetrik metrik uzaylar, metrik uzaylardaki simetri şartı olmayan uzaylar olarak tanımlanır (Wilson 1931). Buna göre, asimetrik metrik uzayın tanımı aşağıdaki gibidir:

Tanım 3.1 X bir küme olsun. Bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu;

A1) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

A2) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir *asimetrik metrik* ve (X, d) ikili-sine de *asimetrik metrik uzay* denir (Collins ve Zimmer 2007).

d , X kümesinde tanımlı bir asimetrik metrik ve $u, v \in X$ olsun. Wilson, X kümesinde tanımlı bir d' metriğini

$$d'(u, v) = \frac{d(u, v) + d(v, u)}{2}$$

şeklinde düzenlemiştir (Wilson 1931).

Buna göre, her metrik uzay bir asimetrik metrik (quasi metrik) uzaydır. Ancak simetriyi şartını sağlayan asimetrik metrik uzaylar bir metrik uzay olur. Asimetrik metrik ile metrik arasındaki farkın anlaşılacağı en belirgin örneklerden biri; basit kapalı eğrilerdir. Her zaman saat yönünde alınan bu eğrilerin yay uzunluğu bir asimetrik metrik iken simetri özelliği taşımadığından metrik değildir (Reilly vd. 1982). Ayrıca, tek yönlü sokaklar da asimetrik metrikler için günlük hayattan verilecek iyi bir örnektir. Çünkü tek yönlü yollarda A noktasından B noktasına bir tek yolla gidilebilirken, B noktasından A noktasına bu aynı yol ile gidilemez fakat gidilen yoldan farklı olan bir yol ya da yollarla gidilebilir. Asimetrik metrik uzaylarla ilgili bir başka örnek ise dağlık bir ülkede A konumundan B konumuna hareket

eden bir otomobilin en kısa sürede ya da en az enerji harcayarak aldığı mesafenin B konumundan A konumuna en kısa sürede ya da en az enerji harcayarak aldığı mesafeden farklı olacaktır (Bodjanova 1981).

Asimetrik metrik uzaylarda simetri özelliği olmadığı için bilinen yakınsaklık, süreklilik, kompaktlık ve tamlık gibi kavramlar bu uzaylarda yeniden tanımlanmıştır. Simetri özelliğinin yokluğu bu uzayların topolojik yapısını değiştirmiştir. Bu uzaylarda ileri ve geri topolojiler vardır. Kelly, bu uzayları ‘bitopolojik uzaylar’ olarak adlandırmıştır (Kelly 1963). Bitopolojik yapıdan dolayı bilinen yakınsaklık, tamlık ve kompaktlık gibi kavramların ileri ve geri olmak üzere birden fazla tanımı ortaya çıkmıştır.

Tanım 3.2 d asimetrik metrik ve (X, d) asimetrik metrik uzay olsun. $u \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$B^+(u, \varepsilon) = \{v \in X : d(u, v) < \varepsilon\}$$

ileri açık yuvarı ile üretilen topolojiye d asimetrik metriği ile üretilen *ileri topoloji* denir ve τ_+ ile gösterilir.

Benzer şekilde $u \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$B^-(u, \varepsilon) = \{v \in X : d(v, u) < \varepsilon\}$$

geri açık yuvarı ile üretilen topolojiye d asimetrik metriği ile üretilen *geri topoloji* denir ve τ_- ile gösterilir (Collins ve Zimmer 2007).

Tanım 3.3 $d^s = \sup\{d(u, v), d(v, u)\}$ metriğinden elde edilen τ topolojisi

$$B(u, v) = \{v \in X : d(u, v) < \varepsilon\} = B^+(u, \varepsilon) \cap B^-(u, \varepsilon)$$

açık yuvarları ile üretilen bir topolojidir (Mennuci 2004).

Tanım 3.4 (X, d) bir asimetrik metrik uzay ve (x_k) , X de bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $x_0 \in X$ için $d(x_0, x_k) \leq M$ sağlayacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ varsa x_k dizisine *ileri sınırlıdır* denir. İleri sınırlı dizilerin uzayı fl_∞ ile gösterilecektir.

Tanım 3.5 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve (x_k) , X de bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $x_0 \in X$ için $d(x_k, x_0) \leq M$ sağlayacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ varsa x_k dizisine *geri sınırlıdır* denir. Geri sınırlı dizilerin uzayı bl_∞ ile gösterilecektir.

Tanım 3.6 (X, d) asimetric metrik uzayında bir (x_k) dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_k) = 0$$

ifadesini sağlayan $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *ileri yakınsak*,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0$$

ifadesini sağlayan $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *geri yakınsaktır* denir ve sırasıyla $x_k \xrightarrow{f} x$ ve $x_k \xrightarrow{b} x$ şeklinde gösterilir (Collins ve Zimmer 2007).

Mennuci (2004), bir dizinin yakınsaklığının şartını ileri ve geri yakınsaklıklar arasındaki bağıntıyla aşağıdaki önermede vermiştir:

Önerme 3.7 Bir (X, d) asimetric metrik uzayında,

$$x_k \longrightarrow x \iff d^s(x_k, x) \longrightarrow 0 \iff \text{hem } d(x_k, x) \longrightarrow 0 \text{ hem de } d(x, x_k) \longrightarrow 0$$

Böylece, ' $x \in X$ e yakınsak bir dizi ancak ve ancak $x \in X$ e hem ileri hem de geri yakınsaktır' sonucuna ulaşmıştır.

Colins ve Zimmer (2007) ise bir dizinin ileri ve geri yakınsaklığı arasındaki bağıntıyı şu şekilde vermiştir:

Teorem 3.8 (X, d) asimetric metrik uzayında verilen bir (x_k) dizisi, a ya ileri yakınsak ve b ye geri yakınsak ise bu durumda $a = b$ dir.

Sonuç 3.9 Eğer bir dizinin ileri yakınsaklığı geri yakınsaklığını gerektiriyorsa ileri limit tektir (Colins ve Zimmer 2007).

Aşağıdaki önermede Collins ve Zimmer (2007), asimetric metrik uzaylarda yapılan çalışmalar için çok önemli olan ileri ve geri limitler arasındaki bağıntıyı vermiştir:

Önerme 3.10 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. $c : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(y, x) \leq c(x, y)d(x, y) \quad (3.1)$$

ifadesi aşağıdaki şartı sağlasın:

$$\forall x \in X \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ öyle ki } y \in B^+(x, \varepsilon) \implies c(x, y) \leq C(x)$$

(burada C sadece x e bağlı herhangi bir fonksiyon). Buna göre, ileri limitler geri limitleri gerektirir ve böylece limitler aynıdır. Eğer (X, d) bir metrik uzay ise bu durumda (3.1) özelliği her $x, y \in X$ olmak üzere $c(x, y) = 1$ için sağlanır.

Aşağıda (3.1) özelliğini sağlayan bir asimetric metrik örneği verilmiştir.

Örnek 3.11

$$d(x, y) = \begin{cases} e^y - e^x, & y \geq x \\ e^{-y} - e^{-x}, & y < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetric metriği (3.1) özelliğini sağlar. Gerçekten

1. $y \geq x$ ise $d(y, x) \leq Cd(x, y) \implies e^{-x} - e^{-y} \leq C(e^y - e^x)$ dir. Yani $C \geq e^{-x}e^{-y}$ dir. $e^{-x}e^{-y} \leq e^{-x}e^{-x} < e^{-x}(e^{-x} + \varepsilon)$ şeklinde yazılabilir. Buradan $C = e^{-x}(e^{-x} + \varepsilon)$ seçilebilir.
2. $y < x$ ise $d(y, x) \leq Cd(x, y) \implies e^x - e^y \leq C(e^{-y} - e^{-x})$ dir. Yani $C \geq e^xe^y$ dir. $e^xe^y \leq e^xe^x < e^x(e^x + \varepsilon)$ şeklinde yazılabilir. Buradan $C = e^x(e^x + \varepsilon)$ seçilebilir.

Buna göre, d metriği $C = \max\{e^{-x}(e^{-x} + \varepsilon), e^x(e^x + \varepsilon)\}$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(y, x) \leq Cd(x, y)$ özelliğini sağlar. Böylece C nin yalnızca x e bağlı olduğu da görülür.

Aşağıda (3.1) özelliğini gerçeklemeyen iyi bilinen bir asimetric metrik örneği verilmiştir.

Örnek 3.12

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

şeklinde verilen $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetrik metriği Sorgenfrey asimetrik metriği olarak bilinir. Burada $\varepsilon \leq 1$ için $B^+(x, \varepsilon) = [x, x + \varepsilon)$ ve $B^-(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x]$ dir. Bu metriğe göre, $a \in \mathbb{R}$ için $(x_k) = a(1 - \frac{1}{k})$ olarak verilen dizi geri yakınsaktır ancak ileri yakınsak değildir. Gerçekten,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, a) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(a - \frac{a}{k}, a) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a - a + \frac{a}{k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a}{k} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(a, x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(a, a - \frac{a}{k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

Böylece bu metrik üzerinde verilen bir dizi için ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmez (ya da geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektirmez).

Literatürde farklı Cauchy dizisi tanımları vardır (Reilly vd. 1982; Mennuci 2004). Bu çalışmada aşağıda verilen iki tanım kullanılacaktır.

Tanım 3.13 (x_k) , (X, d) asimetrik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her $k \geq n \geq N$ için

$$d(x_n, x_k) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_k) dizisine *ileri Cauchy dizisi* ve

$$d(x_k, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_k) dizisine *geri Cauchy dizisi* denir (Collins ve Zimmer 2007).

Reilly vd. (1982) ve Kelly (1963) ileri (geri) Cauchy dizilerini, sol (sağ) K-Cauchy dizileri olarak da adlandırmıştır.

Kelly (1963), bu tanımlardan hareketle bir dizinin ileri yakınsaklığının ileri Cauchy dizisi olmasını ya da geri yakınsaklığının geri Cauchy dizisi olmasını gerektirmeyeceğini göstermiştir.

Örnek 3.14 Yukarıda, Örnek 3.12 de verilen dizi geri yakınsaktır fakat geri Cauchy dizisi değildir. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ ve her $k \geq n \geq N$ için $x_k > x_n$ olduğundan

$$d(x_k, x_n) = 1$$

dir yani dizi geri Cauchy dizisi değildir.

Literatürde asimetrik metrik uzaylarda Cauchy dizisi tanımında olduğu gibi süreklilik için de birden fazla tanım vardır.

Tanım 3.15 (X, d) , (Y, d) asimetrik metrik uzaylar ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $y \in B^+(x, \delta)$ iken $f(y) \in B^+(f(x), \varepsilon)$ sağlayan bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu $x \in X$ de *ileri süreklidir* denir.

Benzer şekilde, $\varepsilon > 0$ için $y \in B^+(x, \delta)$ iken $f(y) \in B^-(f(x), \varepsilon)$ sağlayan bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu $x \in X$ de *geri süreklidir* denir (Colins ve Zimmer 2007).

Tanım 3.16 (Sürekliliğin dizisel tanımı) Bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun $x \in X$ de *ileri sürekli* olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$x_k \xrightarrow{f} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{f} f(x)$$

olmasıdır.

Benzer şekilde, bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun $x \in X$ de *geri sürekli* olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$x_k \xrightarrow{b} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{b} f(x)$$

olmasıdır (Colins ve Zimmer 2007).

Bu çalışmada sürekliliğin dizisel tanımı kullanılacaktır.

Tanım 3.17 Bir $S \subseteq X$ kümesi olsun.

i Eğer, S kümesinin ileri (geri) topolojideki her açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahipse, S ye *ileri (geri) kompakttır* denir.

ii Eğer, S kümesindeki her dizi ileri (geri) yakınsak bir altdiziye sahipse, S ye *ileri (geri) dizisel kompakttır* denir.

iii Eğer, S kümesindeki her ileri (geri) Cauchy dizisi ileri (geri) yakınsak ise, S ye *ileri (geri) tamdır* denir (Colins ve Zimmer 2007).

Mennuci (2004), uzayın ileri ve geri kompakt olması halinde ileri ve geri topolojilerinin denk olduğu sonucuna ulaşmıştır. Collins ve Zimmer (2007), eğer kompaktlık mevcutsa, geri limitlerin varlığının ileri limitlerin varlığını gerektirdiği ve limitlerin tek olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Lemma 3.18 (X, d) asimetrik metrik uzay ve (x_k) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, (X, d) ileri dizisel kompakt ve $x_k \xrightarrow{b} a$ ise $x_k \xrightarrow{f} a$ dir (Colins ve Zimmer 2007).

Lemma 3.19 (X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun. Eğer, (X, d) de her ileri Cauchy dizisi ileri yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) asimetrik metrik uzayı ileri tamdır (Colins ve Zimmer 2007).

Lemma 3.20 Asimetrik metrik uzayda bir X kümesi, ileri kompakt ise ileri dizisel kompakttır (Colins ve Zimmer 2007).

Das vd. (2013), asimetrik metrik uzaylarda reel sayı dizilerinin ideal yakınsaklığını çalışmıştır. Aşağıda, yaptıkları çalışmadaki bazı tanım ve teoremler incelenecek.

Tanım 3.21 (X, d) bir asimetrik metrik uzay ve (x_k) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : d(x, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, (x_k) dizisi $x \in X$ e *ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaktır* denir. Bu durum $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}} x$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : d(x_k, x) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, (x_k) dizisi $x \in X$ e *geri $\mathcal{I}$ -yakınsaktır* denir. Bu durum $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}} x$ şeklinde gösterilir.

Eğer, $\mathcal{I}$ bir uygun ideal ise (x_k) dizisinin ileri yakınsaklığı onun ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaklığını gerektirir. Benzer şekilde geri yakınsaklığı onun geri $\mathcal{I}$ -yakınsaklığını gerektirir.

Teorem 3.22 Eğer (X, d) asimetrik metrik uzayında bir (x_k) dizisi, a ya ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak ve b ye geri $\mathcal{I}$ -yakınsak ise $a = b$ dır.

Genelde ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaklık geri $\mathcal{I}$ -yakınsaklığı gerektirmez. Eğer uzay (3.1) özelliğini sağlarsa gerektirme olur.

Tanım 3.23 (X, d) asimetrik metrik uzay ve $S \subset X$ kümesi olsun. Eğer S deki her (x_k) dizisi, $\{k_n\} \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde limiti S de olan ileri (geri) yakınsak bir (x_{k_n}) alt dizisine sahipse, S kümesi *ileri (geri) $\mathcal{I}$ -dizisel kompakttır* denir.

Teorem 3.24 (X, d) asimetrik metrik uzayı ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt olsun. Bu durumda, $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}} a$ ise $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}} a$ olur.

Tanım 3.25 (x_k) , (X, d) asimetrik metrik uzayında bir dizi olsun. Bu dizinin x e *ileri $\mathcal{I}^*$ -yakınsak* olabilmesi için gerek ve yeter koşul $k \in M$ olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x, x_{m_k}) = 0$$

olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ yani $\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}$, $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < m_{k+1} < \dots\}$ kümesinin mevcut olmasıdır. Bu durum, $x_n \xrightarrow{f\mathcal{I}^*} x$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde, (x_k) dizisinin x e *geri $\mathcal{I}^*$ -yakınsak* olabilmesi için gerek ve yeter koşul $k \in M$ olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, x) = 0$$

olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ yani $\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}$, $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < m_{k+1} < \dots\}$ kümesinin mevcut olmasıdır. Bu durum, $x_n \xrightarrow{B\mathcal{I}^*} x$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.26 Eğer bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir (x_k) dizisi, a ya ileri $\mathcal{I}^*$ -yakınsak ve b ye geri $\mathcal{I}^*$ -yakınsak ise $a = b$ dır.

Genelde ileri $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklık geri $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklığı gerektirmez. Eğer uzay, (3.1) özelliğini sağlarsa gerektirme olur.

Teorem 3.27 $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Eğer, $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}^*} x$ ise bu durumda $(x_k) \xrightarrow{f\mathcal{I}} x$ olur.

Teorem 3.28 $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Eğer, $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}^*} x$ şartını sağlarsa bu durumda $(x_k) \xrightarrow{b\mathcal{I}} x$ olur.

Tanım 3.29 $(x_k), (X, d)$ asimetrik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve $n \in M$ için $\{k \in \mathbb{N} : d(x_n, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi varsa (x_k) dizisine *ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisidir* denir.

Benzer şekilde, her $\varepsilon > 0$ ve $n \in M$ için $\{k \in \mathbb{N} : d(x_k, x_n) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi varsa (x_k) dizisine *geri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisidir* denir.

$\mathcal{I}$ -yakınsaklıkta olduğu gibi, genel olarak, bir dizinin ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi olması geri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi olmasını gerektirmez ancak uzay (3.1) özelliğini sağlarsa gerektirme olur.

Bir dizinin ileri yakınsak olması ileri Cauchy dizisi olmasını gerektirmez (Kelly 1963). Buna göre, genelde, dizinin ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak olması da ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

Teorem 3.30 (X, d) asimetrik metrik uzayının ileri tam olması için ancak ve ancak X deki her ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisinin X de ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak olmasıdır.

Teorem 3.31 (X, d) asimetrik metrik uzayının geri tam olması için ancak ve ancak X deki her geri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisinin X de geri $\mathcal{I}$ -yakınsak olmasıdır.

4. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA İNVARİYANT YAKINSAKLIK VE İNVARİYANT KOMPAKTLIK

‘Temel Kavramlar’ adlı 2. bölümde invaryant yakınsak dizi, istatistiksel invaryant yakınsak dizi, invaryant Cauchy dizisi ve istatistiksel invaryant Cauchy dizisi kavramlarının metrik uzaylardaki tanımları verildi. Bu bölümde, asimetrik metrik uzaylarda bu kavramların tanımları verilerek bazı önemli teorem ve sonuçlar elde edilecek.

Tanım 4.1 (X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun ve bu uzayda bir (x_k) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x, x_{\sigma^j(m)}) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *ileri invaryant yakınsaktır* denir. Bu durum $(x_k) \xrightarrow{fV_\sigma} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2 (X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun ve bu uzayda bir (x_k) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x_{\sigma^j(m)}, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *geri invaryant yakınsaktır* denir. Bu durum $(x_k) \xrightarrow{bV_\sigma} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.3 (X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun ve bu uzayda bir (x_k) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve p pozitif reel sayısı için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [d(x, x_{\sigma^j(m)})]^p = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *ileri p -invaryant yakınsaktır* denir. Bu durum $(x_k) \xrightarrow{fV_{p\sigma}} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.4 (X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun ve bu uzayda bir (x_k) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve p pozitif reel sayısı için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [d(x_{\sigma^j(m)}, x)]^p = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *geri p -invariant yakınsaktır* denir. Bu durum $(x_k) \xrightarrow{bV_{p\sigma}} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.5 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun ve bu uzayda bir (x_k) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} |\{j \leq p : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesini sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *ileri istatistiksel invariant yakınsaktır* denir. Bu durum $(x_k) \xrightarrow{fS_\sigma} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.6 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun ve bu uzayda bir (x_k) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} |\{j \leq p : d(x_{\sigma^j(m)}, x) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesini sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *geri istatistiksel invariant yakınsaktır* denir. Bu durum $(x_k) \xrightarrow{bS_\sigma} x$ şeklinde gösterilir.

Asimetric metrik uzaylara genişletilen bu tanımlar doğrultusunda bazı teoremler elde edilmiştir.

Teorem 4.7 Eğer (x_k) dizisi x_0 a ileri invariant yakınsak y_0 a da geri invariant yakınsak ise $x_0 = y_0$ dır.

İspat: Eğer (x_k) dizisi x_0 a ileri invariant yakınsak ise $\varepsilon > 0$ olmak üzere öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her m ve $p \geq n_1$ için

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır.

Eğer (x_k) dizisi y_0 a geri invariant yakınsak ise $\varepsilon > 0$ olmak üzere öyle bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki her m ve $p \geq n_2$ için

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x_{\sigma^j(m)}, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. O halde $n = \max(n_1, n_2)$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere tüm $p \geq n$ ve her m için

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x_{\sigma^j(m)}, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Buradan $d(x_0, y_0) = 0$ olur ki bu da $x_0 = y_0$ demektir.

Metrik uzayda yakınsak olan bir dizinin asimetrik metrik uzayda yakınsak olmaya bileceği aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 4.8

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \text{ tek ise} \\ 0, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

dizisi verilsin. Bu dizi metrik uzayda $\frac{1}{2}$ ye invaryant yakınsaktır. Fakat asimetrik metrik uzayda $\frac{1}{2}$ ye invaryant yakınsak değildir. Gerçekten, $\sigma(m) = m + 1$ ve Sorgenfrey asimetrik metriğine göre (x_k) dizisi

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d\left(\frac{1}{2}, x_{\sigma^j(m)}\right) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{d(\frac{1}{2}, x_{m+1}) + d(\frac{1}{2}, x_{m+2}) + \dots + d(\frac{1}{2}, x_{m+p})}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + 1 + \frac{1}{2}}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{p}{2} + \frac{p}{4}}{p} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x_{\sigma^j(m)}, \frac{1}{2}) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{d(x_{m+1}, \frac{1}{2}) + d(x_{m+2}, \frac{1}{2}) + \dots + d(x_{m+p}, \frac{1}{2})}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \dots + \frac{1}{2} + 1}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{p}{2} + \frac{p}{4}}{p} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

dir. Yani, (x_k) dizisi Sorgenfrey asimetrik metriğine göre $\frac{1}{2}$ ye ileri ve geri invaryant yakınsak değildir dolayısıyla invaryant yakınsak değildir.

Örnek 4.9 $X = \mathbb{R}$ ve X üzerinde tanımlanan d asimetrik metriği

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x_k = (-1)^k$ dizisi ve $\sigma(m) = m + 1$ olarak alınırsa $x_{\sigma^j(m)} = (-1)^{j+m}$ yani $x_{\sigma^j(m)} \in \{-1, 1\}$ olur. Buna göre m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(-1, x_{\sigma^j(m)}) = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x_{\sigma^j(m)}, 1) = 0$$

dir. Yani, (x_k) dizisi 1 e ileri invaryant yakınsak, -1 e geri invaryant yakınsaktır.

Sonuç 4.10 (X, d) asimetrik metrik uzayında (x_k) dizisinin ileri ve geri invaryant limiti tek değildir. Yukarıdaki örnekte tüm $k \in \mathbb{N}$ için (x_k) dizisi $x \in [1, \infty)$ da geri invaryant yakınsaktır ve $x \in (-\infty, -1]$ de ileri invaryant yakınsaktır.

Sonuç 4.11 Eğer (x_k) dizisinin ileri invaryant yakınsaklığı geri invaryant yakınsaklığını gerektiriyorsa ileri ve geri limitleri aynıdır.

Sonuç 4.12 Genel olarak asimetrik metrik uzaylarda ileri invaryant yakınsaklık geri invaryant yakınsaklığı gerektirmez. Ya da geri invaryant yakınsaklık ileri invaryant yakınsaklığı gerektirmez.

Örnek 4.13 $X = \mathbb{R}$ ve bu küme üzerinde tanımlı d asimetrik metriği

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

olarak verilsin. $x_k = 2(1 + \frac{1}{k})$ şeklinde verilen dizi $\sigma(m) = m + 1$ ise metrik uzayda 2 ye invaryant yakınsaktır. Fakat asimetrik metrik uzayda yukarıdaki asimetrik metriğe göre $\sigma(n) = n + 1$ olması durumunda (x_k) dizisi için

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(2, x_{\sigma^j(m)}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(2, 2 + \frac{2}{m+j}) = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x_{\sigma^j(m)}, 2) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(2 + \frac{2}{m+j}, 2) = 1 \neq 0$$

olur ki 2 ye ileri invaryant yakınsak fakat geri invaryant yakınsak değildir. O halde verilen (x_k) dizisi asimetric metrik uzayda invaryant yakınsak değildir.

Teorem 4.14 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun ve bu uzayda bir (x_k) dizisi verilsin. Eğer,

- (i) (x_k) dizisi ileri invaryant yakınsak ise ileri istatistiksel invaryant yakınsaktır.
- (ii) (x_k) dizisi ileri sınırlı ve ileri invaryant istatistiksel yakınsak ise ileri invaryant yakınsaktır.

İspat:

- (i) $(x_k) \xrightarrow{fV_\sigma} x$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{j=1}^p d(x, x_{\sigma^j(m)}) = \sum_{d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon} d(x, x_{\sigma^j(m)}) + \sum_{d(x, x_{\sigma^j(m)}) < \varepsilon} d(x, x_{\sigma^j(m)})$$

olup her m için

$$\sum_{j=1}^p d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \sum_{d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon} d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon \cdot |\{j \leq p : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}|$$

yazılır. Buradan her iki taraf pozitif $\frac{1}{p}$ ile çarpılır ve $p \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} |\{j \leq p : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. $(x_k) \xrightarrow{fV_\sigma} x$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafı $p \rightarrow \infty$ iken m ye göre düzgün olarak sıfıra yakınsar. Böylece m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} |\{j \leq p : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu ise $(x_k) \xrightarrow{fS_\sigma} x$ olduğunu gösterir.

- (ii) (x_k) dizisi sınırlı ve $(x_k) \xrightarrow{fS_\sigma} x$ olsun. O halde her $x \in X$ ve her j ve m için $d(x, x_{\sigma^j(m)}) < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x, x_{\sigma^j(m)}) = \frac{1}{p} \sum_{d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon} d(x, x_{\sigma^j(m)}) + \frac{1}{p} \sum_{d(x, x_{\sigma^j(m)}) < \varepsilon} d(x, x_{\sigma^j(m)})$$

$$\leq \frac{M}{p} |\{j \leq p : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| + \varepsilon$$

elde edilir. Yani

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x, x_{\sigma^j(m)}) \leq \frac{M}{p} |\{j \leq p : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| + \varepsilon$$

Buradan eşitsizliğin $p \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p d(x, x_{\sigma^j(m)}) = 0$$

elde edilir. Bu da $(x_k) \xrightarrow{fV_\sigma} x$ olması demektir.

Teorem 4.15 (X, d) asimetric metrik uzayında bir (x_k) dizisi verilsin. Eğer,

- (i) (x_k) dizisi geri invaryant yakınsak ise geri istatistiksel invaryant yakınsaktır.
- (ii) (x_k) dizisi geri sınırlı ve geri invaryant istatistiksel yakınsak ise geri invaryant yakınsaktır.

İspat: Teorem 4.18 e benzer şekilde ispatı yapılır.

Şimdi asimetric metrik uzaylarda invaryant Cauchy dizisi tanımı verilecektir.

Tanım 4.16 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve $n > p > N$ için m ye göre düzgün olarak

$$d(t_{pm}, t_{nm}) < \varepsilon$$

ifadesini sağlayan pozitif bir N tamsayısı varsa (x_k) dizisine *ileri invaryant Cauchy dizisi* denir.

Burada,

$$t_{nm} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n x_{\sigma^j(m)}$$

dir.

Tanım 4.17 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve $n > p > N$ için m ye göre düzgün olarak

$$d(t_{nm}, t_{pm}) < \varepsilon$$

ifadesini sağlayan pozitif bir N tamsayısı varsa (x_k) dizisine *geri invaryant Cauchy dizisi* denir.

Tanım 4.18 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} |\{m \leq p : d(t_{Nm}, t_{nm}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesini sağlayan pozitif bir $N(= N(\varepsilon))$ tamsayısı mevcutsa (x_k) dizisine *ileri istatistiksel invaryant Cauchy dizisi* denir.

Tanım 4.19 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} |\{m \leq p : d(t_{nm}, t_{Nm}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesini sağlayan pozitif bir $N(= N(\varepsilon))$ tamsayısı mevcutsa (x_k) dizisine *geri istatistiksel invaryant Cauchy dizisi* denir.

Teorem 4.20 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. Eğer X deki bir (x_k) dizisi invaryant yakınsak ise ileri istatistiksel invaryant Cauchy dizisidir.

İspat: (x_k) dizisi x_0 a invaryant yakınsak ise x_0 a ileri ve geri istatistiksel invaryant yakınsaktır. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her m, n için

$$d(x_0, t_{nm}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(t_{nm}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer,

$$d(t_{Nm}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir N seçilirse her m ve n için

$$d(t_{Nm}, t_{nm}) < d(t_{Nm}, x_0) + d(x_0, t_{nm}) < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece (x_k) dizisi ileri istatistiksel invaryant Cauchy dizisidir.

Sonuç 4.21 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. Eğer X deki bir (x_k) dizisi ileri (geri) invaryant Cauchy dizisi ise ileri (geri) istatistiksel invaryant Cauchy dizisidir.

Teorem 4.22 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve X deki bir (x_k) dizisi ileri invaryant Cauchy dizisi olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^p d(x_k, x_{\sigma^j(m)}) \longrightarrow 0$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n d(x_{\sigma^j(m)}, x_k) \longrightarrow 0$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda (x_k) dizisi ileri Cauchy dizisidir. Ya da tam tersi durum sağlanır.

İspat: (x_k) bir ileri invaryant Cauchy dizisi olsun ve koşullar sağlansın. Her $k > l$ için

$$\begin{aligned} d(x_l, x_k) &\leq d\left(x_l, \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p x_{\sigma^j(m)}\right) \\ &\quad + d\left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p x_{\sigma^j(m)}, \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n x_{\sigma^j(m)}\right) + d\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n x_{\sigma^j(m)}, x_k\right) \end{aligned}$$

yazılabilir ve böylece (x_k) ileri Cauchy dizisi olur.

Tersine olarak (x_k) ileri Cauchy dizisi olsun ve koşullar sağlansın. Her $k > l$ için

$$\begin{aligned} &d\left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p x_{\sigma^j(m)}, \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n x_{\sigma^j(m)}\right) \\ &\leq d\left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p x_{\sigma^j(m)}, x_l\right) + d(x_l, x_k) + d\left(x_k, \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n x_{\sigma^j(m)}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir ve böylece (x_k) ileri invaryant Cauchy dizisi olur.

Şimdi asimetrik metrik uzaylarda invaryant sürekliliğin tanımı verilecektir.

Tanım 4.23 X ve Y asimetrik metrik uzaylar ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $x \in X$ de invaryant sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_k) \xrightarrow{V_\sigma} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{V_\sigma} f(x)$$

olmasıdır.

Asimetrik metrik uzaylarda ileri sürekliliğin dört tipini tanımlayabiliriz:

$$(x_k) \xrightarrow{f} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{f} f(x) \quad (4.1)$$

$$(x_k) \xrightarrow{f} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{fV_\sigma} f(x) \quad (4.2)$$

$$(x_k) \xrightarrow{fV_\sigma} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{f} f(x) \quad (4.3)$$

$$(x_k) \xrightarrow{fV_\sigma} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{fV_\sigma} f(x) \quad (4.4)$$

(4.1) ileri süreklilik ve (4.4) ileri invaryant sürekliliktir. Böylece

$$(4.3) \Rightarrow (4.1) \Rightarrow (4.2)$$

$$(4.3) \Rightarrow (4.4) \Rightarrow (4.2)$$

elde edilir.

Asimetrik metrik uzaylarda geri sürekliliğin dört tipini tanımlayabiliriz:

$$(x_k) \xrightarrow{b} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{b} f(x) \quad (4.5)$$

$$(x_k) \xrightarrow{b} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{bV_\sigma} f(x) \quad (4.6)$$

$$(x_k) \xrightarrow{bV_\sigma} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{b} f(x) \quad (4.7)$$

$$(x_k) \xrightarrow{bV_\sigma} x \quad \text{iken} \quad f(x_k) \xrightarrow{bV_\sigma} f(x) \quad (4.8)$$

(4.5) geri süreklilik ve (4.8) geri invaryant sürekliliktir. Böylece

$$(4.7) \Rightarrow (4.5) \Rightarrow (4.6)$$

$$(4.7) \Rightarrow (4.8) \Rightarrow (4.6)$$

elde edilir.

Tanım 4.24 X bir asimetrik metrik uzay olsun. Eğer,

1. X deki her dizi, ileri (geri) invaryant yakınsak bir alt diziye sahip ise X e *ileri (geri) invaryant kompakttır* denir.
2. X deki her ileri (geri) invaryant Cauchy dizisi ileri (geri) invaryant yakınsak ise X *ileri (geri) tamdır* denir.

Sonuç 4.25 Metrik uzaylarda kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramları denktir.

Benzer şekilde asimetrik metrik uzaylarda ileri (geri) invaryant kompaktlık ve ileri (geri) invaryant dizisel kompaktlık kavramları da denktir.

Lemma 4.26 $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir asimetrik metrik olsun. Eğer, (X, d) ileri invaryant kompakt ve $x_k \xrightarrow{bV_\sigma} x$ ise o zaman $x_k \xrightarrow{fV_\sigma} x$ dir.

İspat: Bir (x_k) dizisini alalım ve $x \in X$ için $(x_k) \xrightarrow{bV_\sigma} x$ olsun. İleri invaryant kompaktlıktan dolayı, (x_k) nın her $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ alt dizisi bir ileri invaryant yakınsak alt diziye sahiptir. $l \rightarrow \infty$ iken $y \in X$ olmak üzere $x_{k_{n_l}} \xrightarrow{fV_\sigma} y$ olsun. Bu durumda Teorem 4.11 den $x = y$ dir. $x_k \xrightarrow{fV_\sigma} x$ varsayalım. O halde $\varepsilon_0 > 0$ ve her n için $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\frac{1}{p} \sum_{l=1}^p d(x, x_{\sigma^{j_l}(m)}) \geq \varepsilon_0$ sağlar. Fakat bu alt dizi x e yakınsayan bir $(x_{k_{n_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ alt dizisine sahiptir. Bu yüzden $l \geq L$ için $L \in \mathbb{N}$ vardır ki $\frac{1}{p} \sum_{l=1}^p d(x, x_{\sigma^{j_l}(m)}) < \varepsilon_0$ sağlanır. Bu bir çelişkidir ve böylece $x_k \xrightarrow{fV_\sigma} x$ dir.

Sonuç 4.27 İnvaryant kompaktlık varsa geri invaryant limitin varlığı ileri invaryant limitin varlığını gerektirir ve dizinin limiti tektir.

Lemma 4.28 Eğer (X, d) asimetrik metrik uzayındaki her ileri invaryant Cauchy dizisi, ileri invaryant yakınsak bir alt diziye sahipse ileri tamdır.

İspat: (x_k) , (X, d) de ileri invaryant Cauchy dizisi ve $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$, (x_k) nın $x \in X$ e yakınsayan bir alt dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. Öncelikle (x_k) ileri invaryant Cauchy dizisi olduğundan her $n \geq p \geq N$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $d(t_{pm}, t_{nm}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ yazılabilir. $j_r \geq N$ için $d(x, x_{\sigma^{j_r}(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda, $j \geq j_r \geq N$ ve her m için

$$d\left(x, \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n x_{\sigma^j(m)}\right) \leq d\left(x, \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^p x_{\sigma^{j_r}(m)}\right) + d\left(\frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^p x_{\sigma^{j_r}(m)}, \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n x_{\sigma^j(m)}\right)$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece $x_k \xrightarrow{fV_\sigma} x$, yani (X, d) ileri tamdır.

Teorem 4.29 (X, d) ve (Y, d) birer asimetrik metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ olsun. Eğer, f fonksiyonu ileri sürekli ise ve m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d\left(f(x_k), \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(x_{\sigma^j(m)})\right) = 0$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonu ileri invaryant sürekli dir.

İspat: İleri invaryant sürekliliğin tanımından

$$d\left(f(x), \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(x_{\sigma^j(m)})\right) \leq d(f(x), f(x_k)) + d\left(f(x_k), \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(x_{\sigma^j(m)})\right)$$

şeklinde düzenleme yapılırsa sonuç elde edilir.

Teorem 4.30 (X, d) ve (Y, d) birer asimetric metrik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ olsun.

Eğer, f fonksiyonu m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d\left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(x_{\sigma^j(m)}), f(x_k)\right) = 0$$

şartını sağlıyorsa ve ileri invaryant sürekli ise f fonksiyonu ileri sürekli dir.

İspat: f fonksiyonunun ileri sürekliliğinin tanımından

$$d(f(x), f(x_k)) \leq d\left(f(x), \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(x_{\sigma^j(m)})\right) + d\left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(x_{\sigma^j(m)}), f(x_k)\right)$$

şeklinde düzenleme yapılırsa sonuç elde edilir.

Teorem 4.31 Bir ileri (geri) invaryant kompakt uzayın ileri (geri) invaryant sürekli görüntüsü de ileri (geri) invaryant kompakttır.

İspat: X ve Y asimetric metrik uzay olsun. K , X in bir ileri invaryant kompakt alt uzayı ve $f : X \longrightarrow Y$ ileri invaryant sürekli olsun. $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ nın da ileri invaryant kompakt olduğunu göstermeliyiz.

$\{f(x_k)\}$, $f(K)$ içinde bir dizi olsun. Bu durumda (x_k) , K da bir dizidir. K ileri invaryant kompakt olduğundan $x \in X$ e ileri invaryant yakınsayan bir (x_{k_n}) alt dizisi vardır. $\{f(x_{k_n})\}$ nın $f(x_k)$ nın bir alt dizisi olduğu görülür. f ileri invaryant sürekli olduğundan,

$$(x_{k_n}) \xrightarrow{fV_\sigma} x \quad \text{iken} \quad f(x_{k_n}) \xrightarrow{fV_\sigma} f(x)$$

dır. Böylece, $f(K)$ ileri invaryant kompakttır. Geri invaryant kompaktlık için de ispat benzer şekilde yapılır.

5. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA LACUNARY İNVARYANT YAKINSAKLIK

Bu bölümde, lacunary invaryant yakınsaklık kavramı asimetric metrik uzaylarda incelenecek. Buna göre, ileri ve geri kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık kavramları ile ileri ve geri lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları asimetric metrik uzaylarda tanımlanacak. Tanımlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilecek ve aralarındaki ilişkileri veren teoremler ispatlanacak.

Tanım 5.1 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. X deki bir (x_k) dizisi için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x, x_{\sigma^j(m)}) = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *ileri kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır* denir. $x_k \xrightarrow{fL_\theta} x$ şeklinde gösterilir.

İleri kuvvetli lacunary invaryant yakınsak dizilerin uzayı;

$$fL_\theta = \{(x_k) : fL_\theta - \lim x_k = x\}$$

şeklinde gösterilecektir.

Tanım 5.2 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. X deki bir (x_k) dizisi için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_{\sigma^j(m)}, x) = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *geri kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır* denir. $x_k \xrightarrow{bL_\theta} x$ şeklinde gösterilir.

Geri kuvvetli lacunary invaryant yakınsak dizilerin uzayı;

$$bL_\theta = \{(x_k) : bL_\theta - \lim x_k = x\}$$

şeklinde gösterilecektir.

Sonuç 5.3 Metrik uzaylardaki lacunary invaryant yakınsaklık tanımı, asimetrik metrik uzaylarda kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık tanımına karşılık gelmektedir.

Tanım 5.4 (X, d) bir asimetrik metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. X de bir (x_k) dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{j \in I_r : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *ileri lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır* denir. $x_k \xrightarrow{fS_{\sigma\theta}} x$ şeklinde gösterilir.

İleri lacunary invaryant istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı;

$$fS_{\sigma\theta} = \{(x_k) : fS_{\sigma\theta} - \lim x_k = x\}$$

şeklinde gösterilecektir.

Tanım 5.5 (X, d) bir asimetrik metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. X de bir (x_k) dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{j \in I_r : d(x_{\sigma^j(m)}, x) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi x e *geri lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır* denir. $x_k \xrightarrow{bS_{\sigma\theta}} x$ şeklinde gösterilir.

Geri lacunary invaryant istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı;

$$bS_{\sigma\theta} = \{(x_k) : bS_{\sigma\theta} - \lim x_k = x\}$$

şeklinde gösterilecektir.

Teorem 5.6 (X, d) asimetrik metrik uzay ve (x_k) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, (x_k) dizisi x_0 a ileri kuvvetli lacunary invaryant yakınsak ve y_0 a geri kuvvetli lacunary invaryant yakınsak ise $x_0 = y_0$ dir.

İspat: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer (x_k) dizisi x_0 a ileri kuvvetli lacunary invaryant yakınsak ise her $r > R_1$, $\varepsilon > 0$ ve her m için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $R_1 \in \mathbb{R}$ vardır.

Eğer (x_k) dizisi y_0 a geri kuvvetli lacunary invaryant yakınsak ise her $r > R_2$, $\varepsilon > 0$ ve her m için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_{\sigma^j(m)}, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $R_2 \in \mathbb{R}$ vardır. $R = \max\{R_1, R_2\}$ olsun. Bu taktirde her j ve m için

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) + d(x_{\sigma^j(m)}, y_0)$$

yazılır. Buradan $\varepsilon > 0$, her $r > R$ ve her m için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_0, y_0) \leq \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) + \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_{\sigma^j(m)}, y_0)$$

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Yani $x_0 = y_0$ dir.

Teorem 5.7 (X, d) asimetrik metrik uzay olsun ve (x_k) dizisi (3.1) şartını sağlasın. Bu taktirde (x_k) dizisinin ileri kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklığı geri kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklığını gerektirir ve limitler aynıdır.

İspat: (x_k) dizisi x_0 a ileri kuvvetli lacunary invaryant yakınsak ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) = 0$$

dır. Bu durumda $\varepsilon > 0$, her m ve $r > R_0$ için $\frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) < \frac{\varepsilon}{C(x_0)}$ yazılabilir. $c(x, y) < C(x)$ eşitsizliği her zaman sağlandığından her m ve j için

$$d(x_{\sigma^j(m)}, x_0) \leq c(x_0, x_{\sigma^j(m)})d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) \leq C(x_0)d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) < \varepsilon$$

yazılır. Böylece $\varepsilon > 0$, her m ve $r > R_0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_{\sigma^j(m)}, x_0) &\leq \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} c(x_0, x_{\sigma^j(m)})d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) \\ &\leq C(x_0) \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x_0, x_{\sigma^j(m)}) < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (x_k) dizisi x_0 a geri invaryant yakınsaktır ve limitler aynıdır.

Teorem 5.8 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun.

X deki bir (x_k) dizisi için

1. $x_k \xrightarrow{fL_\theta} x$ ise $x_k \xrightarrow{fS_{\sigma\theta}} x$
2. $(x_k) \in fl_\infty$ ve $x_k \xrightarrow{fS_{\sigma\theta}} x$ ise $x_k \xrightarrow{fL_\theta} x$
3. $fS_{\sigma\theta} \cap fl_\infty = fL_\theta$

sağlanır.

İspat:

1. Eğer $\varepsilon > 0$ ve $x_k \xrightarrow{fL_\theta} x$ ise

$$\sum_{j \in I_r} d(x, x_{\sigma^j(m)}) = \sum_{\substack{j \in I_r \\ d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon}} d(x, x_{\sigma^j(m)}) + \sum_{\substack{j \in I_r \\ d(x, x_{\sigma^j(m)}) < \varepsilon}} d(x, x_{\sigma^j(m)})$$

olup

$$\sum_{j \in I_r} d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \sum_{\substack{j \in I_r \\ d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon}} d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon |\{j \in I_r : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}|$$

yazılabilir. Yani

$$\sum_{j \in I_r} d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon |\{j \in I_r : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Burada her iki yan $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılarak $r \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{j \in I_r : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. $x_k \xrightarrow{fL_\theta} x$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafı $r \rightarrow \infty$ iken 0 dir.

Böylece

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{j \in I_r : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu ise $x_k \xrightarrow{fS_{\sigma\theta}} x$ olduğunu gösterir.

2. $x_k \xrightarrow{fS_{\sigma\theta}} x$ ve $(x_k) \in fl_{\infty}$ olduğunu kabul edelim. O halde tüm j ve m için

$$d(x, x_{\sigma^j(m)}) \leq M$$

sağlayan $M \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x, x_{\sigma^j(m)}) &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{j \in I_r \\ d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon}} d(x, x_{\sigma^j(m)}) + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{j \in I_r \\ d(x, x_{\sigma^j(m)}) < \varepsilon}} d(x, x_{\sigma^j(m)}) \\ &\leq \frac{M}{h_r} |\{j \in I_r : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Yani

$$\frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(x, x_{\sigma^j(m)}) \leq \frac{M}{h_r} |\{j \in I_r : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| + \varepsilon$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki yanın $r \rightarrow \infty$ için limitine geçilirse istenen elde edilir.

Şimdi (x_k) dizisinin sınırlılık şartının var olmasını inceleyelim. Bunun için bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi verilmiş olsun. Öncelikle (x_k) dizisini tanımlayalım.

$$(x_k) = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots, [\sqrt{h_r}], & k = \sigma^j(m), j = k_{r-1} + 1, k_{r-1} + 2, \dots, k_{r-1} + [h_r] \\ 0, & \text{diğer } k \text{ lar için} \end{cases}$$

(x_k) dizisinin sınırlı olmadığı açıktır. $0 < \varepsilon < 1$ için

$$\frac{1}{h_r} |\{j \in I_r : d(0, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r}$$

olur. $r \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{j \in I_r : d(0, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir ki $x_k \xrightarrow{fS_{\sigma\theta}} 0$ dır. Fakat

$$\frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(0, x_{\sigma^j(m)}) = \frac{1 + 2 + \dots + [\sqrt{h_r}]}{h_r} = \frac{1}{h_r} \cdot \frac{[\sqrt{h_r}] \cdot ([\sqrt{h_r}] + 1)}{2}$$

olur. Burada $r \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} d(0, x_{\sigma^j(m)}) = \frac{1}{2} \neq 0$$

olur. Yani $x_k \not\xrightarrow{fL_{\theta}} 0$ dır. O halde sınırlılık şartı (ii) de kaldırılamaz.

3. Teoremin (i) ve (ii) şıkları birlikte düşünülürse

$$fS_{\sigma\theta} \cap fl_{\infty} = fL_{\theta}$$

elde edilir.

Teorem 5.9 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. X deki bir (x_k) dizisi için

1. $x_k \xrightarrow{bL_{\theta}} x$ ise $x_k \xrightarrow{bS_{\sigma\theta}} x$
2. $(x_k) \in bl_{\infty}$ ve $x_k \xrightarrow{bS_{\sigma\theta}} x$ ise $x_k \xrightarrow{bL_{\theta}} x$
3. $bS_{\sigma\theta} \cap bl_{\infty} = bL_{\theta}$

sağlanır.

İspat: Teorem 5.8 ye benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 5.10 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) , X de bir dizi olmak üzere $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon > 0$, her $k \geq k_0$ ve $t \geq t_0$ için

$$\frac{1}{k} |\{0 \leq j \leq k-1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

sağlayan k_0 ve t_0 sayıları mevcutsa bu taktirde $(x_k) \in fS_{\sigma}$ dır.

İspat: $\varepsilon_1 > 0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$, her $k \geq k_0'$ ve her $t \geq t_0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{k} |\{0 \leq j \leq k-1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (5.1)$$

olacak şekilde k_0' ve t_0 seçelim. $k \geq k_0''$ ve $0 \leq t \leq t_0$ için

$$\frac{1}{k} |\{0 \leq j \leq k-1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

sağlayan k_0'' varlığını ispatlamak yeterlidir. $k_0 = \max(k_0', k_0'')$ alınırsa $k \geq k_0$ ve tüm m sayıları için

$$\frac{1}{k} |\{0 \leq j \leq k-1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

sağlanır. $0 \leq t \leq t_0$, t_0 tam sayı olup yerine konursa

$$M = |\{0 \leq j \leq t_0 - 1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Şimdi de $0 \leq t \leq t_0$, $k \geq t_0$ alınır ve (5.1) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} |\{0 \leq j \leq k - 1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| \leq \\ & \frac{1}{k} |\{0 \leq j \leq t_0 - 1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| + \frac{1}{k} |\{t_0 \leq j \leq k - 1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{M}{k} + \frac{\varepsilon_1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir ki yeterince büyük k için

$$\leq \frac{M}{k} + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$$

yazılabilir. Böylece sonuç elde edilir.

Lemma 5.11 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) , X de bir dizi olmak üzere $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon > 0$, her $k \geq k_0$ ve $t \geq t_0$ için

$$\frac{1}{k} |\{0 \leq j \leq k - 1 : d(x_{\sigma^j(m)}, x) \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

ifadesini sağlayan k_0 ve t_0 sayıları varsa bu taktirde $(x_k) \in bS_\sigma$ dir.

İspat: Lemma 5.10 a benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 5.12 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olsun. Bu taktirde $fS_{\sigma\theta} = fS_\sigma$ dir.

İspat: $(x_k) \in fS_{\sigma\theta}$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon_1 > 0$, her $r \geq r_0$ için $v \geq 0$, $m = t_{r-1} + 1 + v$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r} |\{0 \leq j \leq h_r - 1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

ifadesini sağlayan r_0 sayısı vardır. $p \geq h_r$ olsun. i bir tam sayı ve $0 \leq t \leq h_r$ aralığında seçildiğinde $p = ih_r + k$ yazılır. $p \geq h_r$, $i \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} |\{0 \leq j \leq p - 1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{1}{p} |\{0 \leq j \leq (i+1)h_r - 1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| \\ & = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^i |\{lh_r \leq j \leq (l+1)h_r - 1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{1}{p} (i+1)h_r\varepsilon_1 \leq \frac{2ih_r\varepsilon_1}{p} \end{aligned}$$

$\frac{h_r}{p} \leq 1$ için ve $\frac{lh_r}{p} \leq 1$ olduğundan

$$\frac{1}{p} |\{0 \leq j \leq p-1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| \leq 2\varepsilon_1$$

dır. Böylece Lemma 5.10 dan $fS_{\sigma\theta} \subset fS_\sigma$ dır.

$fS_\sigma \subset fS_{\sigma\theta}$ olduğunu gösterelim. $(x_k) \in (fS_\sigma)$ olsun. $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve $p > N$ için

$$\frac{1}{p} |\{0 \leq j \leq p-1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}|$$

sağlayan $N > 0$ sayısı ve (x_k) dizisi vardır. $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olduğundan $r \geq R$ iken $h_r > N$ olacak şekilde $R > 0$ seçilebilir. Dolayısıyla her m ve $r \geq R$ için

$$\frac{1}{h_r} |\{0 \leq j \leq h_r-1 : d(x, x_{\sigma^j(m)}) \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

sağlanır. O halde $fS_{\sigma\theta} = fS_\sigma$ dır.

Teorem 5.13 (X, d) bir asimetric metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olsun. Bu taktirde $bS_{\sigma\theta} = bS_\sigma$ dır.

İspat: Teorem 5.12 ye benzer şekilde ispatlanır.

6. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA $\mathcal{I}_\sigma$ - YAKINSAKLIK

Bu bölümde, σ - düzgün yoğunluk kavramından yola çıkarak Nuray vd. (2011) nin metrik uzaylarda tanımladığı $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık kavramı asimetrik metrik uzaylarda araştırılarak $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık, $\mathcal{I}_\sigma^*$ yakınsaklık ve $\mathcal{I}_\sigma$ - Cauchy kavramları tanımlanacak. Kavramların aralarındaki ilişkileri veren bazı teoremler ve sonuçlar elde edilecek.

Tanım 6.1 $K \subseteq \mathbb{N}$ ve

$$s_m := \min_n |K \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}|$$

$$S_m := \max_n |K \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}|$$

olsun. Eğer,

$$\underline{V}(K) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s_m}{m}, \quad \overline{V}(K) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_m}{m}$$

limitleri varsa bunlara sırayla K kümesinin alt ve üst σ -düzgün yoğunluğu denir. Eğer, $\underline{V}(K) = \overline{V}(K)$ ise bu durumda $V(K) = \underline{V}(K) = \overline{V}(K)$ olur ve $V(K)$ ya K nın σ - düzgün yoğunluğu denir (Nuray vd. 2011).

Tanım 6.2 (x_k) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}_\sigma$ ya aitse yani $V(A(\varepsilon)) = 0$ oluyorsa (x_k) dizisi L sayısına $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_\sigma - \lim x_k = L$ biçiminde gösterilir (Nuray vd. 2011).

Tanım 6.3 (X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon := \{k : d(x, x_k) \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}_\sigma$ ya aitse yani $V(A_\varepsilon) = 0$ ise (x_k) dizisi x e *ileri* $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır denir. Bu durum $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 6.4 (X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$B_\varepsilon := \{k : d(x_k, x) \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}_\sigma$ ya aitse yani $V(B_\varepsilon) = 0$ ise (x_k) dizisi x e *geri* $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır denir. Bu durum $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma} x$ şeklinde gösterilir.

Teorem 6.5 (X, d) asimetrik metrik uzay ve (x_k) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, (x_k) dizisi $x \in X$ e ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak ve $y \in X$ geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak ise bu durumda $x = y$ dir.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için eğer, (x_k) dizisi $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x$ ise

$$A_\varepsilon := \{k : d(x, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

dır ve eğer (x_k) dizisi $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma} y$ ise

$$B_\varepsilon := \{k : d(x_k, y) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

dır. $F(\mathcal{I}_\sigma) = \{A \subset X : A^c \in \mathcal{I}_\sigma\}$ olduğundan

$$A_\varepsilon^c := \{k : d(x, x_k) < \varepsilon\} \in F(\mathcal{I}_\sigma), \quad B_\varepsilon^c := \{k : d(x_k, y) < \varepsilon\} \in F(\mathcal{I}_\sigma)$$

yazılabilir. $A_\varepsilon^c \cap B_\varepsilon^c \in F(\mathcal{I}_\sigma)$ ve $\emptyset \notin F(\mathcal{I}_\sigma)$ olduğu için $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $d(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $d(x_k, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ yazılabilir. Böylece

$$d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y) < \varepsilon$$

dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $d(x, y) = 0$ elde edilir ve $x = y$ dir.

Genel olarak ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklığı gerektirmez. Ya da geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklığı gerektirmez. Aşağıdaki örnekte bu durum görülmektedir.

Örnek 6.6 d asimetrik metrik uzayı

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise} \\ 0, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde verilsin. $x_k = (1 + \frac{1}{k})$ ve $\sigma(m) = m + 1$ olsun. Bu dizi 1 e ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak değildir. Gerçekten,

$$A_\varepsilon = \{k : d(x, x_k) \geq \varepsilon\} = \{k : d(1, 1 + \frac{1}{k}) \geq \varepsilon\}$$

dır. Böylece,

$$s_m := \min_n |A_\epsilon \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}| = |\{\frac{1}{k} \geq \epsilon\} \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}| = 1+m$$

$$S_m := \max_n |A_\epsilon \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}| = |\{\frac{1}{k} \geq \epsilon\} \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}| = n+m$$

elde edilir. Buradan

$$\underline{V}(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s_m}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1+m}{m} = 1, \quad \overline{V}(A) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_m}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n+m}{m} = 1$$

limitleri bulunur ve $V(A_\epsilon) \neq 0$ olduğundan (x_k) dizisinin 1 e ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak olduğunu görülmüştür.

Fakat (x_k) dizisi 1 e geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır. Çünkü,

$$A_\epsilon = \{k : d(x_k, x) \geq \epsilon\} = \{k : d(1 + \frac{1}{k}, 1) \geq \epsilon\} = \{k : 0 \geq \epsilon\} = \emptyset$$

dır böylece,

$$s_m := \min_n |A_\epsilon \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}| = |\emptyset \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}| = 0$$

$$S_m := \max_n |A_\epsilon \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}| = |\emptyset \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}| = 0$$

$\underline{V}(A_\epsilon) = \overline{V}(A_\epsilon) = V(A_\epsilon) = 0$ bulunur. Bu yüzden (x_k) dizisi 1 e geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır.

Teorem 6.7 (X, d) asimetrik metrik uzayı (3.1) özelliğini sağlasın. Bu durumda (x_k) dizisinin ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklığı geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklığını gerektirir ve limitler tektir.

İspat: $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x_0$ olsun. (3.1) özelliğinden

$$d(x_k, x_0) \leq c(x_0, x_k)d(x_0, x_k) \leq C(x_0)d(x_0, x_k)$$

yazılabilir.

$\epsilon > 0$ verilsin, bu durumda

$$\begin{aligned} \{k \in \mathbb{N} : d(x_k, x_0) \geq \epsilon\} &\subset \{k \in \mathbb{N} : c(x_0, x_k)d(x_0, x_k) \geq \epsilon\} \\ &\subset \{k \in \mathbb{N} : C(x_0)d(x_0, x_k) \geq \epsilon\} = \{k \in \mathbb{N} : d(x_0, x_k) \geq \frac{\epsilon}{C(x_0)}\} \in \mathcal{I}_\sigma \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma} x_0$ olduğunu gösterir.

Eğer $\mathcal{I}_\sigma$ bir uygun ideal olsun. Bu durumda (x_k) dizisi ileri yakınsak iken ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır. Benzer şekilde, $\mathcal{I}_\sigma$ bir uygun ideal olsun. Bu durumda (x_k) dizisi geri yakınsak iken geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır.

Aşağıdaki teoremden, asimetric metrik uzaylarda metrik uzaylardaki duruma benzer sonuç elde edilmiştir.

Teorem 6.8 (x_k) bir ileri sınırlı dizi olsun. Eğer (x_k) dizisi x e ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak ise x e ileri invaryant yakınsaktır.

İspat: $m, n \in \mathbb{N}$ keyfi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d(x, x_{\sigma^j(n)}) \leq \frac{1}{m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ d(x, x_{\sigma^j(n)}) \geq \varepsilon}} d(x, x_{\sigma^j(n)}) + \frac{1}{m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ d(x_{\sigma^j(n)}, x) < \varepsilon}} d(x, x_{\sigma^j(n)})$$

yazılabilir. Her $n = 1, 2, \dots$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ d(x_{\sigma^j(n)}, x) < \varepsilon}} d(x, x_{\sigma^j(n)}) < \varepsilon$$

dir. (x_k) dizisinin sınırlılığından $d(x, x_{\sigma^j(n)}) \leq M$, ($j = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$) sağlayan $M > 0$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d(x, x_{\sigma^j(n)}) &\leq \frac{M}{m} |\{1 \leq j \leq m : d(x, x_{\sigma^j(n)}) \geq \varepsilon\}| \\ &\leq M \frac{\max_n |\{1 \leq j \leq m : d(x, x_{\sigma^j(n)}) \geq \varepsilon\}|}{m} \\ &= M \frac{S_m}{m} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (x_k) dizisi x e ileri invaryant yakınsaktır.

Teorem 6.9 (x_k) bir geri sınırlı dizi olsun. Eğer (x_k) dizisi x e geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak ise x e geri invaryant yakınsaktır.

İspat: Teorem 6.8 benzer şekilde ispatı yapılır.

Şimdi, asimetric metrik uzaylarda $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaklık tanımı verilecektir.

Tanım 6.10 Eğer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x, x_{m_k}) = 0$$

ifadesini sağlayan bir $M \in F(\mathcal{I})$ yani $\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}, M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \in F(\mathcal{I}_\sigma)$ kümesi varsa bu durumda (x_k) dizisi x e ileri $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaktır denir ve $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma^*} x$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde, eğer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, x) = 0$$

ifadesini sağlayan bir $M \in F(\mathcal{I})$ yani $\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}, M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \in F(\mathcal{I}_\sigma)$ kümesi varsa bu durumda (x_k) dizisi x e geri $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaktır denir ve $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma^*} x$ şeklinde gösterilir.

Teorem 6.11 Eğer (x_k) dizisi $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma^*} x_0$ ve $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma^*} y_0$ ise bu durumda $x_0 = y_0$ dır.

İspat: Teorem 6.5 e benzer olarak ispatı yapılır.

Sonuç 6.12 Genel olarak ileri $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaklık geri $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaklığı gerektirmez.

Teorem 6.13 (X, d) asimetrik metrik uzayı (3.1) özelliğini sağlasın. Bu durumda (x_k) dizisinin ileri $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaklığı geri $\mathcal{I}_\sigma^*$ -yakınsaklığını gerektirir ve limitler tektir.

İspat: Teorem 6.7 ye benzer olarak ispatı yapılır.

Metrik uzaylarda $\mathcal{I}_\sigma^*$ and $\mathcal{I}_\sigma$ arasındaki ilişkiye benzer sonuç, asimetrik metrik uzaylarda da elde edilmiştir.

Teorem 6.14 $\mathcal{I}_\sigma$ bir uygun ideal olsun. Eğer $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma^*} x$ ise bu durumda $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x$ dır. Benzer olarak eğer $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma^*} x$ ise bu durumda $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma} x$ dır.

İspat: Teoremin varsayımından $M = \mathbb{N} \setminus A = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots\}$ için bir $A \in \mathcal{I}_\sigma$ kümesi vardır ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x, x_{m_k}) = 0 \tag{6.1}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ olsun. (6.1) den, her $k > k_0$ için $d(x, x_{m_k}) < \varepsilon$ sağlayan $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda

$$\{k \in \mathbb{N} : d(x, x_k) \geq \varepsilon\} \subset A \cup \{m_1 < m_2 < \dots < m_{k_0}\} \quad (6.2)$$

açıktır. $\mathcal{I}_\sigma$ bir uygun ideal olduğu için (6.2) ifadesinin sağındaki küme $\mathcal{I}_\sigma$ ya aittir. Böylece (x_k) x e ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır. Geri durum için de ispat benzer şekilde yapılır. Bu teoremin tersi için $\mathcal{I}_\sigma$, (AP) özelliğine sahip olmalıdır.

Teorem 6.15 $\mathcal{I}_\sigma$ bir uygun ideal olsun ve (AP) özelliğini sağlasın. Eğer $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x$ ise bu durumda $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma^*} x$ dir.

İspat: $\mathcal{I}_\sigma$, (AP) özelliğini sağlasın ve $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x$ olsun. Buna göre, $\varepsilon > 0$ için $\{k : d(x, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$ sağlanır. $A_1 = \{k : d(x, x_k) \geq 1\}$ ve $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{k : \frac{1}{n} \leq d(x, x_k) < \frac{1}{n-1}\}$ yazalım. $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olduğu açıktır. (AP) özelliğinden bir $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir dizisi vardır ki $j \in \mathbb{N}$ ve $B = (\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \in \mathcal{I}_\sigma$ için $A_j \triangle B_j$ sonlu kümelerdir. $M = \mathbb{N} \setminus B$ ve $k \in M$ için $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma^*} x$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$\lambda > 0$ olsun. $\frac{1}{n+1} < \lambda$ sağlayan $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda

$$\{k : d(x, x_k) \geq \lambda\} \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j$$

dir. $A_j \triangle B_j, j = 1, 2, \dots, n+1$ sonlu kümeler olduğundan bir $k_0 \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j\right) \cap \{k : k > k_0\} = \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) \cap \{k : k > k_0\} \quad (6.3)$$

sağlanır. Eğer $k > k_0$ ve $k \notin B$ ise bu durumda $k \notin \bigcup_{j=1}^{n+1} B_j$ ve (6.3) ten, $k \notin \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j$ dir. Fakat

$$d(x, x_k) < \frac{1}{n+1} < \lambda$$

dir. Böylece $k \in M = \mathbb{N} \setminus B$ dir ve $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma^*} x$ elde edilir.

Tanım 6.16 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. $k > m > N$ ifadesini sağlayan bir N varsa her $\varepsilon > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(x_m, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

oluyorsa (x_k) dizisine ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi denir.

Benzer şekilde, $k > m > N$ sağlayan bir N varsa her $\varepsilon > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(x_k, x_m) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

sağlıyorsa (x_k) dizisine geri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi denir.

Teorem 6.17 (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. X kümesinde her $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak dizi $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisidir.

İspat: $(x_k) \in X$ dizisi x e $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak olsun. Teorem 6.5 ten dizi x e ileri ve geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır. Böylece,

$$d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x) + d(x, x_k).$$

yazılabilir. Buna göre $\varepsilon > 0$ için,

$$\{m, k \in \mathbb{N} : d(x_m, x_k) \geq \varepsilon\} \subset \{m \in \mathbb{N} : d(x_m, x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\} + \{k \in \mathbb{N} : d(x, x_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı $\mathcal{I}_\sigma$ ya aittir. Böylece,

$$\{m, k \in \mathbb{N} : d(x_m, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

dir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 6.18 Genel olarak ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi geri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi olmayı gerektirmez. Ya da geri $\mathcal{I}_\sigma$ - Cauchy dizisi ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi olmayı gerektirmez. Fakat eğer (x_k) dizisi (3.1) özelliğini sağlarsa gerektirir.

Sonuç 6.19 Genel olarak ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaklık ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy olmayı gerektirmez.

Örnek 6.20 d asimetric metrik uzayı

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & y \geq x \text{ ise} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde, $(x_k) = (\frac{1}{k})$ ve $\sigma(m) = m + 1$ olarak tanımlansın. Bu dizi 0 a ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır. Çünkü,

$$A_\varepsilon = \{k : d(x, x_k) \geq \varepsilon\} = \{k : d(0, \frac{1}{k}) \geq \varepsilon\} = \{k : 0 \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

dir. Böylece

$$s_m := \min_n |A_\epsilon \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}| = |\emptyset \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}| = 0,$$

$$S_m := \max_n |A_\epsilon \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}| = |\emptyset \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}| = 0$$

dir. Buna göre,

$$\underline{V}(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{s_m}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{0}{m} = 0, \quad \overline{V}(A) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_m}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{0}{m} = 0.$$

$\underline{V}(A_\epsilon) = \overline{V}(A_\epsilon) = V(A_\epsilon) = 0$ olduğundan (x_k) dizisi 0 a ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsaktır. Fakat, (x_k) dizisi ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi değildir. Çünkü, her $n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için,

$$A_\epsilon = \{k : d(\frac{1}{n}, \frac{1}{k}) \geq \varepsilon\} = \{k : 1 \geq \varepsilon\} = \mathbb{N}$$

dir. Böylece

$$s_m := \min_n |A_\epsilon \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}| = |\mathbb{N} \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}| = n+1,$$

$$S_m := \max_n |A_\epsilon \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}| = |\mathbb{N} \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}| = n+m$$

dir. Buna göre,

$$\underline{V}(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s_m}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1+m}{m} = 1, \quad \overline{V}(A) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_m}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n+m}{m} = 1$$

elde edilir. $\underline{V}(A_\epsilon) = \overline{V}(A_\epsilon) = 1 \neq 0$ olduğundan (x_k) , $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi değildir.

Teorem 6.21 (X, d) asimetrik metrik uzayı (3.1) özelliğini sağlasın. Bu durumda eğer (x_k) dizisi ileri (geri) $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak ise ileri (geri) $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisidir.

İspat: $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x_0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $C(x_0) > 0$ olduğu için

$$A(\frac{\varepsilon}{2C(x_0)}) = \{k : d(x_0, x_k) \geq \frac{\varepsilon}{2C(x_0)}\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

dir. $k \notin A(\frac{\varepsilon}{2C(x_0)})$ olsun. Bu durumda $d(x_0, x_k) < \frac{\varepsilon}{2C(x_0)}$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_k) &\leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_k) \leq c(x_0, x_k)d(x_0, x_k) + d(x_0, x_k) \\ &\leq C(x_0)d(x_0, x_k) + d(x_0, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} + d(x_0, x_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $d(x_m, x_k) \geq \varepsilon$, $d(x_0, x_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ olmayı gerektirir. Böylece,

$$\{k \in \mathbb{N} : d(x_m, x_k) \geq \varepsilon\} \subset \{k \in \mathbb{N} : d(x_0, x_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

elde edilir. Bu durumda (x_k) dizisi ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchydir.

Eğer her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\{n_k\} \notin \mathcal{I}$ olmak üzere limiti S kümesinde olan ileri yakınsak bir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi varsa $S \subseteq X$ kümesine ileri $\mathcal{I}$ -kompakttır denir (Das vd. 2013). Benzer olarak $\mathcal{I}_\sigma$ -kompaktlık tanımı asimetrik metrik uzaylarda yapılabilir.

Tanım 6.22 X bir asimetrik metrik uzay olsun. Eğer S kümesindeki her (x_k) dizisi $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \mathcal{I}_\sigma$ olmak üzere limiti S kümesinde olan ileri (geri) invaryant yakınsak bir $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ alt dizisi varsa $S \subseteq X$ e ileri (geri) $\mathcal{I}_\sigma$ -kompakttır denir.

Teorem 6.23 (X, d) asimetrik metrik uzayı ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -kompakt ve $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma} x$ ise $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x$ dir.

İspat: Bazı $x \in X$ için $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma} x$ sağlayan $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisini alalım. Eğer $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi x e ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak değilse $\varepsilon > 0$ için

$$A = \{k \in \mathbb{N} : d(x, x_k) \geq \varepsilon_0\} \notin \mathcal{I}_\sigma$$

dir. Aynı zamanda $(x_k)_{k \in A}$ dizisi x e geri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak olsun. İleri $\mathcal{I}_\sigma$ -kompaktlıktan $(x_k)_{k \in A}$ nın bir $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır ve $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin \mathcal{I}_\sigma$ olmak üzere $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ileri yakınsaktır. $y \in X$ olmak üzere $k \rightarrow \infty$ iken $x_{k_n} \xrightarrow{f} y$ olsun. Bu durumda $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} y$ dir. Fakat $x_k \xrightarrow{b\mathcal{I}_\sigma} x$ ve Teorem 6.5 ten $x = y$. Böylece $K \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \geq K$ için $d(x, x_{k_n}) < \varepsilon$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Bu yüzden $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x$ dir.

Lemma 6.24 (X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun. (X, d) deki bir (x_k) dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

- (1) (x_k) bir ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisidir.
- (2) Her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N}, E_n(\varepsilon) \notin \mathcal{I}_\sigma\} \in \mathcal{I}_\sigma$ dır.

Burada $n \in \mathbb{N}$ için $E_n(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N}, d(x_n, x_k) \geq \varepsilon\}$ dir.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve (x_k) ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi olsun. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $M \in (\mathcal{F}_\sigma)$ vardır ki $\{k \in \mathbb{N}, d(x_n, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$ yani $E_n(\varepsilon) \in \mathcal{I}_\sigma$ vardır. Bu durumda $E_n(\varepsilon) \notin \mathcal{I}_\sigma$ iken $n \notin \mathbb{N}$ dir. Sonuç olarak $\{n \in \mathbb{N}, E_n(\varepsilon) \notin \mathcal{I}_\sigma\} \subset \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_\sigma$.

Tersine olarak, $M = \{n \in \mathbb{N}, E_n(\varepsilon) \in \mathcal{I}_\sigma\}$ yazalım. Bu durumda $M \in (\mathcal{F}_\sigma)$ olur. Açıkktır ki $n \notin \mathbb{N}$ iken $E_n(\varepsilon) \in \mathcal{I}_\sigma$ dır yani $\{k \in \mathbb{N}, d(x_n, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$ dir.

Teorem 6.25 Eğer X deki her ileri (geri) $\mathcal{I}_\sigma$ -Cauchy dizisi X de ileri (geri) $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak ise X , ileri (geri) tamdır.

İspat: (X, d) de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi bir ileri Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $P \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $m > k \geq P$ için $d(x_k, x_m) < \varepsilon$ dir. $k \geq P$ için $d(x_P, x_k) < \varepsilon$ dir. Böylece $E_p(\varepsilon) = \{P \in \mathbb{N} : d(x_P, x_k) \geq \varepsilon\} = \{1, 2, \dots, P-1\} \in \mathcal{I}_\sigma$ ve $n \geq P$ $E_n(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$ sonucu elde edilir. Bu yüzden $\{n \in \mathbb{N} : E_n(\varepsilon) \notin \mathcal{I}_\sigma\} \subset \{1, 2, \dots, P-1\} \in \mathcal{I}_\sigma$, ve buradan $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ileri $\mathcal{I}_\sigma$ - Cauchy dizisidir. Varsayımımızdan $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, X de bir ileri $\mathcal{I}_\sigma$ -yakınsak dizidir ve $x_0 \in X$ olmak üzere $x_k \xrightarrow{f\mathcal{I}_\sigma} x_0$ dir. Buradan $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : d(x_0, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$ dir. $k_0 = 0$ alınırsa $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ için tümevarımsal olarak $k_n \in \mathbb{N} \setminus (\{0, 1, 2, \dots, k_{n-1}\} \cup A(\varepsilon_n))$ seçilebilir. Buna göre, her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_0, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$ ve böylece x_k nın ileri yakınsayan x_{k_n} alt dizisi vardır. Böylece (X, d) ileri tamdır.

7. KAYNAKLAR

- Ahmad Z U, Mursaleen M, Khan Q A, 1994, Invariant means and some matrix transformations, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25, 353–359.
- Aiyub M, Khan Q A, 2010, On a sequence space related to invariant means and matrix transformations, *International Mathematical Forum*, 5, 2465–2470.
- Albert G E, 1941, A note on quasi metric spaces, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 47, 479–482.
- Aminpour A M, Khorshidvandpour S, Mousavi M, 2012, Some results in asymmetric metric spaces, *Mathematica Aeterna*, 2(6), 533–540.
- Banach S, 1932, *Theorie des operations linearies*, Warswaza.
- Bell E T, 1929, Certain invariant sequences of polinamials, *Transactions of the American Mathematical Society*, 31, 405–421.
- Bhunia S, Das P, 2011, Two valued measure and summability of double sequences in asymmetric metric context, *Acta Mathematica Hungarica*, 130(1-2), 167–187.
- Bodjanova S, 1981, Some basic notions of mathematical analysis in oriented metric spaces, *Mathematica Slovaca*, 31(3), 277–289.
- Boss J, Seydell D, 1999, Some remarks an invariant means and almost convergence, *Journal of Analysis*, 7, 21–30.
- Buck R C, 1953, Generalized asymptotic density, *American Journal of Mathematics*, 75, 335–346.
- Cesàro E, 1890, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 14(1), 114–120
- Chenchiah I, Rieger M O, Zimmer J, 2009, Gradient flows in asymmetric metric

- spaces, *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 71 (11), 5820–5834.
- Cobzaş S, 2013, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, *Frontiers in Mathematics*, Springer (Basel).
- Collins J, Zimmer J, 2007, An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem, *Topology and its Applications*, 154, 2312–2322.
- Connor J S, 1988, The statistical and strong p Cesàro convergence of sequences, *Analysis*, 8, 47–63.
- Das P, Ghosal S, 2010, Some further results on I-Cauchy sequences and condition (AP), *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2597–2600.
- Das P, Ghosal S, Pal S K, 2013, Extending asymmetric convergence and Cauchy condition using ideals, *Mathematica Slovaca*, 63(3), 545–562.
- Das P, Savaş E, Ghosal S Kr, 2011, On generalizations of certain summability methods using ideals, *Applied Mathematics Letters*, 24, 1509–1514.
- Domiaty R Z, 1979, The Hausdorff separation property for space-times, *Elefteria (Athens)*, 2, 358–371.
- Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 241–244.
- Freedman A R, Sember J J, Raphael M, 1978, Some Cesàro type summability spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 37, 508–520.
- Fridy J A, 1985, On statistical convergence, *Analysis*, 5, 301–313.
- Fridy J A, 1993, On statistical limit point, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4, 1187–1192.
- Fridy J A, Orhan C, 1993, Lacunary statistical convergence, *Pacific Journal of Mathematics*, 160, 43–51.

- Holá L, Šalát T, 1988, Graph convergence, uniform, quasi-uniform and continuous convergence and some characterizations of compactness, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 54-55, 121–132.
- İlkhan M, Kara E E, 2019, On statistical convergence in quasi-metric spaces, *Demonstratio Mathematica*, 52, 225–236.
- Karakaya V, 2004, On lacunary σ -statistical convergence, *Information Sciences*, 166, 271–280.
- Kelly J C, 1963, Bitopological spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3 (13), 71–89.
- Kostyrko P, Šalát T, Wilczyński W, 2000/01, I-convergence, *Real Analysis Exchange*, 26, 669–685.
- Künzi H P, 1983, A note on sequentially compact quasi-pseudometric spaces, *Monatshefte für Mathematik*, 95(3), 219–220.
- Künzi H P, 1992, Complete quasi-pseudometric spaces, *Acta Mathematica Hungarica*, 59(1-2), 121–146.
- Lorentz G G, 1948, A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Mathematica*, 80, 167–190.
- Maddox I J, 1970, *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Maddox I J, 1978, A new type of convergence, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 83, 61–64.
- Mainik A, Mielke A, 2005, Existence results for energetic models for rate independent systems, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 22(1), 73–99.
- Mennucci A, 2004, On asymmetric distances, Technical report, Scuola Normale Superiore, Pisa.

- Mielke A, Roubíček T, 2003, A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys, *Multiscale Modelling and Simulation*, 1(4), 571–597.
- Miller H, 1973, A class of non-rate invariant sequence transformations, *Akad Nauka Umjet Bosnei Hercegovine Rad Odjelj. Prirod. Mathematic Nauka*, 12, 41–43.
- Mursaleen M, 1979, On infinite matrices and invariant means, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 10, 457–460.
- Mursaleen M, 1983, On some new invariant matrix methods of summability, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 34, 77–86.
- Mursaleen M, Alotaibi A, 2011, Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem, *Ann. Univ. Ferrara*, 57, 373–381.
- Mursaleen M, Edely O H H, 2009, On invariant mean and statistical convergence, *Applied Mathematics Letters*, 22, 1700–1704.
- Mursaleen M, Edely O H H, 2003, Statistical convergence of double sequences, *The Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 223–231.
- Nagata J, 1974, *Modern General Topology*, North-Holland Publication Company, Amsterdam London, p. 353.
- Nanda S, 2004, Almost continuity and almost compactness, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 71(1-4), 227–232.
- Niemtytzki, V, Über die Axiome des metrischen Raumes (German), 1931, *Mathematische Annalen*, 104(1), 666–671.
- Niven I, Zuckerman H S, Montgomery H L, 1991, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons. Inc., Fifth edition, New York.
- Nuray F, 2020, Cesàro and statistical derivativ, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 35(5), 1393–1398.

- Nuray F, 2022, Statistical convergence in partial metric spaces, Korean Journal of Mathematics, 30(1), 155–160.
- Nuray F, Gök H, Ulusu U, 2011, I_σ -Convergence, Mathematical Communications, 16(2), 531-538.
- Nuray F, Rhoades B E, 2012, Statistical convergence of sequences of sets, Fasciculi Mathematici, 49, 87–99.
- Nuray F, Ruckle W H, 2000, Generalized statistical convergence and convergence free spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 245, 513–527.
- Nuray F, Savaş E, 1994, Invariant statistical convergence and A-invariant statistical convergence, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25, 267–274.
- Pancaroglu N, Nuray F, 2013, On Invariant Statistically Convergence and Lacunary Invariant Statistical Convergence of Sequences of Sets, Progress in Applied Mathematics 5(2), 23–29.
- Patty C W, 1967, Bitopological spaces, Duke Mathematical Journal, 34, 387–391.
- Raimi R A, 1959, On Banach's generalized limits, Duke Mathematical Journal, 26, 17–28.
- Raimi R A, 1963, Invariant means and invariant matrix methods of summability, Duke Mathematical Journal, 30, 81–94.
- Reilly I L, Subrahmanyam P V, Vamanamurthy M K, 1982, Cauchy sequences in quasipseudometric spaces, Monatshefte für Mathematik, 93(2), 127–140.
- Reilly I L, Vamanamurthy M K, 1984, On oriented metric spaces, Mathematica Slovaca, 34(3), 299–305.

- Ribeiro H, 1943, Sur les espaces a metrique faible (French), Portugaliae Mathematica, 4, 65–68.
- Rieger M O, Zimmer J, 2005, Young measure flow as a model for damage, Preprint 11/05, Bath Institute for Complex Systems, Bath, UK.
- Šalát T, 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Mathematica Slovaca, 30, 139–150.
- Savaş E, Nuray F, 1993, On σ - statistically convergence and lacunary σ - statistically convergence, Mathematica Slovaca, 43, 309–315.
- Savaş E, 1989, Some sequence space involving invariant means, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 31, 1–8.
- Savaş E, 1990, On lacunary strong σ -convergence, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 21, 359–365.
- Savaş E, Rhoades B E, 2002, On some new sequences space of invariant means defined by orlicz functions, Mathematical Inequalities & Applications, 5, 271–281.
- Schaefer P, 1972, Infinite matrices and invariant means, Proceedings of the American Mathematical Society, 36, 104–110.
- Schoenberg I J, 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, The American Mathematical Monthly, 66, 361–375.
- Steinhaus H, 1951, Sur La Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73–74.
- Stoltenberg R A, 1969, On quasi metric spaces, Duke Mathematical Journal, 36, 65–71.
- Taslim T, 2012, On denseness in asymmetric metric spaces, Mathematica Aeterna, 2 (7), 617–627.

- Toyganözü Z H, Pehlivan S, 2015, Some result on exhaustiveness in asymmetric metric spaces, *Filomat*, 29(1), 183–192.
- Ulusu U, Nuray F, 2020, Lacunary $\mathcal{I}$ -invariant convergence, *Cumhuriyet Science Journal*, 41(3), 617–624.
- Waterman M S, Smith T F, Beyer W A, 1976, Some biological sequence metrics, *Advances in Mathematics*, 20, 367–387.
- Wilson W A, 1931, On quasi-metric spaces, *American Journal of Mathematics*, 53(3), 675–684.
- Yaying T, Hazarika B, Mohiuddine A S, 2020, Some new types of Continuity in asymmetric metric spaces, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 35(2), 485–493.